Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Amazonas

Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla

UFPA-UFAM

Mergulhos Equivariantes de Variedades Kählerianas Simétricas

Kelly Karina Santos

Mergulhos Equivariantes de Variedades Kählerianas Simétricas

por

Kelly Karina Santos

sob orientação do

Professor Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

e coorientação do

Professor Dr. Jost-Henrich Eschenburg

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-AM
Novembro/2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S237m

Santos, Kelly Karina

Mergulhos equivariantes de variedades kählerianas simétricas / Kelly Karina Santos. 2016

47 f.: 31 cm.

Orientador: Renato de Azevedo Tribuzy

Coorientador: Jost-Henrich Eschenburg

Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Mergulhos equivariantes. 2. Espaços Simétricos. 3. Variedades kählerianas. 4. Pluri-curvatura média paralela. I. Tribuzy, Renato de Azevedo II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Kelly Karina Santos

Mergulhos Equivariantes de Variedades Kählerianas Simétricas

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus, 04 de novembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy (orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. João Lucas Marques Barbosa (membro externo)
Universidade Federal do Ceará - UFC

....

Prof^a. Dr^a. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda (membro externo)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof^a. Dr^a. Keti Tenenblat (membro externo)
Universidade de Brasília - UnB

Dedico este trabalho ao meu marido Ulysses, meu filho Pedro Davi e aos meus pais Osvaldo e Mirian.

Agradecimentos

Sou grata a Deus pelo seu cuidado e provisão a cada dia, por ter me dado pais presentes e amorosos, uma família incrível, amigos especiais, um marido maravilhoso e um filho lindo. Acredito que cada um deles contribuiu pra minha trajetória até aqui, inclusive na realização do doutorado.

Agradeço aos meus colegas do Departamento de Matemática da UFRR, por terem aprovado o meu afastamento integral para a realização do doutorado.

Agradeço à Kelly Alves Marães pela amizade especial e pelo companherismo nos exames de Geometria e Análise, ao João Batista Ponciano por sua amizade tão prestativa, à Maria Roselene Barroso dos Santos pelos tempos em que partilhamos a mesma sala, e aos colegas do doutorado em geral pela convivência na nova sala dos doutorandos em Matemática da UFAM.

Agradeço ao professor Jost Eschenburg e sua família, que nos receberam de forma tão carinhosa em Augsburg, Alemanha, para a realização do meu Doutorado Sanduíche. Dear professor Jost, thank you very much for every thing you and your family did for us! Vielen Danke!

Agradeço ao meu orientador, professor Renato Tribuzy, que sempre acreditou em mim, sempre foi atencioso em sua orientação e disponível para resolver problemas de ordem burocrática, também aos professores do Doutorado especialmente ao professor José Nazareno por sempre compartilhar seu conhecimento e experiência.

Agradeço a minha mãe, Mirian A. de Sousa Santos, minha sogra, Maria Regina Freitas dos Santos e minha cunhada Cyntia dos Santos que se revesaram na ida à Manaus para ajudar-me com os cuidados com o Pedro Davi na época que eu estava fazendo disciplinas e o Ulysses tinha que viajar. Agradeço aos meus pais Mirian A. de S. Santos e Osvaldo C. Santos por todo investimento em minha vida, por sempre estarem dispostos a participar de minhas lutas e conquistas, ao meu irmão Willian Jordan Santos e minha irmã Keila Priscila Santos por torcerem por mim.

Agradeço ao Ulysses M. dos Santos Junior meu marido que de forma desprendida topou sair de Boa Vista-RR e depois passar um ano na Alemanha dividindo diligentemente os cuidados com o Pedro Davi, que ao início do doutorado tinha apenas 4 meses. Também agradeço ao Pedro Davi dos Santos, meu filho, simplesmente por existir em minha vida e enchê-la de alegrias!

Finalmente agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro no período em que estive em Augsburg, Alemanha.

Airtemis

Como verias a simetria? Chamá-la-ia pelo nome Airtemis? Tentarias definí-la? Talvez criarias belos versos rimando com sintonia, sabedoria, ou melhor ainda: nostalgia!

Uma pequena homenagem ao professor Clovis Barleta de Moraes, meu amigo que deixa saudades.

Resumo

Neste trabalho investigamos algumas características dos mergulhos equivariantes de uma variedade Kähleriana Simétrica. Usamos o Teorema de Wallach-Cartan para caracterizar tais mergulhos nos casos do $\mathbb{CP}^n$ e $SO(2n)/U(n)$ e verificamos que nestes casos os únicos mergulhos com pluri-curvatura média paralela são os extrinsecamente simétricos. Usando o mergulho standard do $\mathbb{CP}^n$ mostramos que se uma subvariedade complexa Q do $\mathbb{CP}^n$ tem pluri-curvatura média paralela então ela é totalmente geodésica. Propusemos ainda um novo mergulho equivariante, denominado $\mathfrak{p}-$mergulho, para um espaço simétrico hermitiano qualquer e verificamos que, pelo menos no caso em que o posto de P é um, a pluri-curvatura média não é paralela .

Palavras-chave: Mergulhos Equivariantes, Espaços Simétricos, Variedades Kählerianas.

Abstract

In this work we investigate some characteristics of the equivariant embeddings of a symmetric Kählerian manifold. We use the Theorem of Wallach-Cartan to characterize these embeddings in the case of $\mathbb{CP}^n$ and $SO(2n)/U(n)$ and verify that if a equivariant embedding has parallel plurimean curvature then it's the extrinsic symmetric one. We use the standard embedding of $\mathbb{CP}^n$ to prove that if a complex submanifold of $\mathbb{CP}^n$ has parallel plurimean curvature, then it's the totally geodesics. We propos a new equivariant embedding, the $\mathfrak{p}-$embedding, for any hermitian symmetric space and verify that, at least when the rank is one, the plurimean curvature is not parallel.

Keywords: Equivariant Embeddings, Symmetric Spaces, Kählerian Manifolds.

Conteúdo

Introdução

Uma variedade Riemanniana P é chamada simétrica se em qualquer $p \in P$ existe uma isometria s_p de P fixando p e revertendo toda geodésica por p. Nos referimos a s_p como simetria em p. Um grupo de isometrias G contendo a simetria s_p para todo $p \in P$ age transitivamente, portanto (P, G) é homogênea.

Seja P uma variedade Riemanniana simétrica com um grupo de simetrias G agindo transitivamente sobre P. Dado $p \in P$, denotamos o grupo de isotropia de P por $K = G_p := \{g \in G : gp = p\}$, assim identificamos P com o espaço quociente G/K usando o difeomorfismo $P \ni gp \mapsto gK \in G/K$. Uma imersão $\Phi : P \to V$ sobre um espaço vetorial euclidiano V é equivariante se existe uma representação ρ de G em V satisfazendo

$$\Phi(gp) = \rho(g)\Phi(p) \quad \text{para todo} \quad g \in G \quad \text{e} \quad p \in P.$$

Em outras palavras, $\Phi(P)$ é uma órbita de ρ, de fato uma órbita muito especial: o grupo de isotropia $K = G_p$ fixa o vetor $v_0 = \Phi(p) \in V$. Uma representação $\rho : G \to O(V)$ é chamada classe-um para algum subgrupo $K \subset G$ se existe um vetor fixo não nulo $v_0 \in V$ por K, isto é, $K = G_{v_o} = \{g \in G; \rho(g)v_o = v_o\}$. Assim nossa representação relacionada a uma imersão equivariante de $P = G/K$ é classe-um para K. Reciprocamente, se $K \subset G$ é um subgrupo maximal, toda representação classe-um para K define um mergulho equivariante de P.

Podemos usar os mergulhos equivariantes de espaços simétricos de Kähler $P = G/K$ para encontrarmos subvariedades Kählerianas. Uma variedade Riemanniana é Kähleriana se possui uma estrutura quase complexa paralela J. Tal variedade é complexa, isto é, admite um atlas diferenciável com mudanças de coordenadas holomorfas tais que J torna-se a multiplicação por i nas cartas coordenadas. Assim é surpreendente que existam subvariedades, além das superfícies, no espaço euclidiano real $\mathbb{R}^n$ tal que a métrica induzida é de Kähler. Estas devem ser consideradas análogas às superfícies imersas orientadas onde J é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ sobre cada plano tangente, num contexto de dimensão mais alta.

O estudo destas imersões nos conduz naturalmente a decompor a segunda forma fundamental α de acordo com tipos, isto é, $\alpha^{(1,1)}(X,Y) = \alpha(X_{(1,0)}, Y_{(0,1)}) + \alpha(X_{(0,1)}, Y_{(1,0)})$ e $\alpha^{(2,0)} = \alpha(X_{(1,0)}, Y_{(1,0)})$ onde $X_{(1,0)}$ e $X_{(0,1)}$ denotam as projeções do vetor tangente X aos espaços T' dos vetores do tipo $(1,0)$ e T'' dos vetores do tipo $(0,1)$, respectivamente.

Aplicações com $\alpha^{(1,1)} = 0$ são chamadas aplicações pluriharmônicas e a imersão em que isto ocorre é denominada imersão plurimínima. Quando M é uma superfície Riemanniana temos $\alpha^{(1,1)} = \langle \cdot, \cdot \rangle H$ onde H é o vetor curvatura média da imersão, neste caso imersões plurimínimas são exatamente as imersões mínimas.

Denominamos o operador $\alpha^{(1,1)}$ de pluri-curvatura média, pois ele é determinado pelas curvaturas médias da restrição da imersão às curvas holomorfas. Quando ele é nulo ou paralelo, a imersão tem propriedades similares às superfícies mínimas ou de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, admitem uma deformação dada por $\alpha^\theta(X,Y) = \alpha(R^\theta X, R^\theta Y)$ onde R^θ é a rotação de ângulo constante θ nos planos complexos. A deformação deste tipo mais conhecida é a que transforma o catenóide no helicóide, a existência de tais deformações caracterizam esta classe de imersões.

Dizemos que uma imersão de uma variedade Kähleriana é ppmc (parallel plurimean curvature), se o operador $\alpha^{(1,1)}$ é paralelo. Exemplos de imersões ppmc em $\mathbb{R}^n$ são as superfícies orientadas com curvatura média paralela em $\mathbb{R}^n$, mergulho de variedades kählerianas satisfazendo $\alpha^{(2,0)}$ identicamente nulas e alguns duplos recobrimentos de variedades extrinsicamente simétricas em $\mathbb{R}^n$. Parece natural que outros mergulhos equivariantes sejam ppmc e portanto investigamos várias famílias de exemplos.

Voltemos aos mergulhos equivariantes $\Phi : P \to V$ de um espaço simétrico $P = G/K$ e $\rho : G \to O(V)$ a representação correspondente. Seja p o ponto base, o espaço normal $N = N_p\Phi(P) = d\Phi(T_pP)^\perp$ se decompõe em autoespaços de $\rho(s_p)$, e se P é simétrico de Kähler, N se decompõe em autoespaços de $\rho(j_p)$ em p. Denotamos por N^+ o $1-$autoespaço de $\rho(s_p)\mid_N$ e $N^{++} \subset N^+$ o $1-$autoespaço de $\rho(j_p)\mid_N$. O primeiro resultado que obtivemos foi:

Lema 1 *A segunda forma fundamental α toma valores em N^+ e sua $(1,1)-$parte é a projeção de α sobre N^{++}.*

Para qualquer imersão equivariante $\Phi : P \to V$, o espaço vetorial V pode ser visto como um espaço de funções sobre P, um subespaço de $C^\infty(P)$. De fato, associamos a cada $v \in V$ a função altura $f_v(x) = \langle \Phi(x), v \rangle$, então a $G-$representação ρ sobre V torna-se parte da $G-$representação sobre $C^\infty(P)$. Isto define uma nova função $gf \in C^\infty(P)$ para todo $g \in G$ como segue:

$$(gf)(x) := f(g^{-1}x).$$

Para ver a compatibilidade das representações sobre V e $C^\infty(P)$ observamos que

$$f_{\rho(g)v}(x) = \langle \Phi(x), \rho(g)v \rangle = \langle \rho(g)^{-1}\Phi(x), v \rangle = \langle \Phi(g^{-1}x), v \rangle = (gf_v)(x).$$

Assim, todo mergulho equivariante é obtido de um $G-$submódulo classe-um de $C^\infty(P)$. Um teorema de N.L. Wallach [26], que remonta à E. Cartan afirma que $C^\infty(P)$ decompõe-se completamente em $G-$representações irredutíveis V_i, as quais são classe-um com respeito a K e cada V_i ocorre precisamente uma vez em $C^\infty(P)$, a menos de equivalência. Assim as imersões equivariantes de $P = G/K$ correspondem às $G-$órbitas

$$Gf_i = \{f_i \circ g^{-1} : g \in G\}$$

de funções f_i, $K-$invariantes sobre P.

Para $P = \mathbb{CP}^n$ podemos gerar $C^\infty(P)$ por certos polinômios reais sobre $\mathbb{C}^{n+1}$, vistos como polinômios em x e seu conjugado complexo $\bar{x}$, usados como coordenadas em lugar das variáveis $Re(x)$ e $Im(x)$. Estes polinômios provêm de $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ se, e somente se, eles são homogêneos de mesmo grau em x e $\bar{x}$. Usando este modelo obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 1 *Se um mergulho equivariante do $\mathbb{CP}^n$ é ppmc então ele é extrinsecamente simétrico.*

O mergulho standard de um espaço simétricos de Kähler $P = G/K$, $\Phi_0 : P \to V_0 = \mathfrak{g}$, associa a cada $p \in P$ o gerador infinitesimal J_p de s_p. Este é extrinsecamente simétrico e tem segunda forma fundamental α paralela [15, 12], portanto é ppmc. Usando o mergulho standard do $\mathbb{CP}^n$ em V e mergulhando uma subvariedade complexa Q em $\mathbb{CP}^n$ obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 2 *Se uma subvariedade complexa $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{CP}^n$ é ppmc, então ela é totalmente geodésica.*

Para espaços simétricos de Kähler P gerais, podemos ver as funções sobre P como geradas pelas restrições a P dos polinômios sobre V_0. Para $P = \mathbb{CP}^n$ ambos os métodos foram comparados.

Podemos construir qualquer função invariante sobre o grupo de isotropia K por meio de sua restição ao toro máximo $T \subset P$ por p. Uma função sobre T extende-se unicamente a uma função $K-$invariante sobre P se, e somente se, sua restrição é invariante sobre o Grupo de Weyl de (P, T), que é o subgrupo de K que mantém T invariante. Assim obtivemos um método para comparar diferentes mergulhos equivariantes: nós somente comparamos as restrições a T das funções $K-$invariantes correspondentes. Em geral temos que: se P é um espaço simétrico hermitiano com toro máximo T de dimensão k, então a álgebra das funções $K-$invariantes tem k geradores $f_1, \ldots, f_k$ cuja restrição a T pode ser explicitamente descrita em termos de polinômios simétricos. Usando isto no espaço das estruturas complexas $SO(2n)/U(n)$ obtivemos que:

Teorema 3 *Se um mergulho equivariante do espaço das estruturas complexas é ppmc então ele é extrinsecamente simétrico.*

Finalmente, um novo tipo de mergulho equivariante tem sido estudado para um espaço simétrico de Kähler $P = G/K$ qualquer. Seu ponto de início foi o mergulho standard $\Phi_0 : P \to \mathfrak{g}$. A nova imersão Φ_0 associa a cada $x \in P$ a projeção ortogonal de $\mathfrak{g}$ sobre o espaço tangente $T_xP \subset \mathfrak{g}$. Isto define um mergulho equivariante $\Phi_1 : P \to S(\mathfrak{g})$ onde $S(\mathfrak{g})$ denota o espaço vetorial das aplicações lineares auto-adjuntas sobre $\mathfrak{g}$. A segunda forma fundamental β de Φ_1 e sua $(1,1)-$parte $\beta^{(1,1)}$ com sua derivada normal $\nabla^{\perp}\beta^{(1,1)}$ foram calculadas. Apesar de Φ_0 ser ppmc Φ_1,pelo menos no caso de posto 1, não é ppmc.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as principais definições e resultados referentes a grupos e álgebras de Lie, espaços simétricos e variedades Kählerianas que serão usados no decorrer deste trabalho.

1.1 Grupos e Álgebras de Lie

Os grupos de Lie são classes especiais que combinam a estrutura algébrica de grupo com a estrutura de variedade diferenciável. Formalmente, temos:

Definição 1.1 Um grupo de Lie é um grupo que tem uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que a aplicação

$$p : (g, h) \in G \times G \mapsto gh^{-1} \in G$$

é diferenciável.

Um conceito importante do decorrer de todo o trabalho é o de "ação de um grupo".

Definição 1.2 Uma ação à esquerda de um grupo G num conjunto X é uma função que associa a $g \in G$ uma aplicação $a(g) : X \to X$ e que satisfaz as propriedades:

1. $a(1) = id_X$, isto é, $a(1)(x) = x$, para todo $x \in X$, e

2. $a(gh) = a(g)a(h)$.

Uma ação à direita é definida de maneira análoga. No que segue trabalharemos apenas com ações à esquerda, além disso, o símbolo a será suprimido na notação, assim uma ação à esquerda escreve-se apenas $g(x)$ ou gx. Com essas notações uma ação à esquerda satisfaz $1x = x$ e $g(hx) = (gh)x$.

Outro conceito importante é o de órbita de um grupo.

Definição 1.3 Dado $x \in X$, sua órbita por G, denotada por Gx é definida como sendo o conjunto $Gx = \{gx \in X; g \in G\}$.

Cada órbita é uma classe de equivalência com respeito à relação de equivalência dada por: $x \sim y$, se existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Por isso, duas órbitas ou são disjuntas ou coincidem.

Definição 1.4 O conjunto G_x dos elementos de G que fixam x é denominado de estabilizador de x :

$$G_x = \{g \in G; gx = x\}.$$

Definição 1.5 Seja a uma ação de G em X.

1. A ação é dita efetiva (ou fiel) se $ker(a) = \{g \in G; a(g) = id_X\} = \{1\}$. Isto é, se $gx = x$ para todo $x \in X$ então $g = 1$.

2. A ação é dita livre se os estabilizadores se reduzem ao elemento neutro de G, isto é, se $gx = x$ para algum $x \in X$, então $g = 1$.

3. A ação é dita transitiva se para todo par de elementos $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

Proposição 1.1 Suponha que a ação de G em X é transitiva e tome $x \in X$. Então, aplicação $\xi_x : g\, G_x \in G/Gx \mapsto gx \in X$ é uma bijeção entre G/Gx e X.

Em virtude dessa identificação, um quociente G/H é também chamado de espaço homogêneo, como são chamados normalmente os conjuntos onde os grupos agem transitivamente. O ponto x escolhido para estabelecer a identificação entre X e G/Gx é denominado de origem ou ponto base do espaço homogêneo X. A identificação de X com G/Gx depende da escolha da origem. No entanto, alterando x não muda substancialmente o espaço quociente, pois numa ação transitiva os estabilizadores são conjugados entre si.

Estes conceitos e resultados serão usados neste trabalho para certos grupos de Lie.

Um exemplo importante de grupo de Lie é o grupo linear geral $Gl(n;\mathbb{R})$. Os elementos deste grupo são as matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas reais ou transformações lineares inversíveis de um espaço vetorial real de dimensão finita. A estrutura de grupo em $Gl(n;\mathbb{R})$ é dada pelo produto usual de matrizes.

Os métodos para estudar os grupos de Lie estão baseados na construção de suas álgebras de Lie, as quais possibilitam transferir métodos da álgebra linear ao estudo de objetos não lineares, como os grupos de Lie.

Definição 1.6 Uma álgebra de Lie é definida como sendo um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete) $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Bilinearidade, isto é, $[\ ,\ ]$ é linear em cada uma das variáveis.

2. Anti-simetria, isto é $[X,Y] = -[Y,X]$, para $X, Y \in \mathfrak{g}$.

3. Identidade de Jacobi: para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$.

Um exemplo de álgebra de Lie é dado pelo espaço vetorial dos campos de vetores sobre uma variedade diferenciável C^∞ munido do colchete de Lie de campos de vetores. Outro exemplo é a álgebra $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ formada pelas matrizes reais $n \times n$ com o colchete dado pelo comutador de matrizes $[A,B] = AB - BA$.

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie G é definida como o espaço dos campos invariantes (à esquerda ou à direita, conforme a escolha), com o colchete dado pelo colchete de Lie de campos de vetores. Os fluxos dos campos invariantes estabelecem a aplicação exponencial $exp : \mathfrak{g} \to G$, que é o principal elo de ligação entre $\mathfrak{g}$ e G. Esta aplicação estabelece o vínculo entre o colchete na álgebra de Lie e o produto no grupo, determinando (quase que) completamente a estrutura do grupo de Lie a partir da álgebra de Lie. Podemos dizer que a álgebra de Lie é um objeto linear que aproxima o grupo: para se obter os elementos da álgebra de Lie deve-se derivar curvas no grupo. O procedimento contrário consiste em resolver equações diferenciais. Por isso, nas primeiras décadas do desenvolvimento da teoria as álgebras de Lie eram denominadas "grupos infinitesimais" [24].

Outro instrumento de ligação entre os grupos de Lie e suas álgebras de Lie são as representações adjuntas. Antes de definí-las, definamos primeiramente o que é uma representação.

Definição 1.7 Sejam G e H grupos de Lie. Um homomorfismo $\Phi : G \to H$ diferenciável entre G e H é chamado de homomorfismo de grupos de Lie. No caso particular em que o contra-domínio é um grupo linear $Gl(V)$, o homomorfismo é chamado representação de G no espaço vetorial V. O espaço V é chamado de espaço da representação e a dimensão de V sua dimensão.

Agora podemos definir as representações adjuntas.

Definição 1.8 A representação adjunta $Ad : G \to Gl(\mathfrak{g})$, de G em sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida por

$$Ad(g) = d(Cg)_1, \text{ onde } C_g(x) = gxg^{-1}.$$

Em $Gl(n;\mathbb{R})$ temos que $Ad(g)A = gAg^{-1}$.

Definição 1.9 Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Sua representação adjunta, é a aplicação $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definida por

$$ad(X)(Y) = [X, Y].$$

A identidade de Jacobi para colchetes em álgebras de Lie garante que as aplicações $ad(X), X \in \mathfrak{g}$, são derivações [1] de $\mathfrak{g}$.

Um dos resultados que relacionam estas representações é o seguinte:

Proposição 1.2 Seja G um grupo de Lie, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com o colchete dado pelos campos invariantes à esquerda. Então, $d(Ad)_1(X) = ad(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ e vale a igualdade $Ad(expX) = exp(ad(X))$.

Alguns exemplos de grupos de Lie com suas respectivas álgebras de Lie, que serão usados neste trabalho, são os seguintes:

[1] Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é denominada derivação, se $D[X;Y] = [DX;Y] + [X;DY]$.

1. $Gl(n;\mathbb{R})$, cuja álgebra de Lie é o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, munido do colchete dado pelo comutador de matrizes $[A;B] = AB - BA$, essa álgebra de Lie será denotada por $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$.

2. $O(n) = \{g \in Gl(n;\mathbb{R}) : gg^t = g^t g = Id\}$ o grupo das matrizes ortogonais. Sua álgebra de Lie é a subálgebra de matrizes anti-simétricas $\mathfrak{so}(n) = \{A \in gl(n;\mathbb{R}) : A + A^t = 0\}$. O colchete em $\mathfrak{so}(n)$ é o comutador de matrizes.

3. $SO(n) = \{g \in O(n) : det\ g = 1\}$, com álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$.

4. $U(n) = \{g \in Gl(n;\mathbb{C}) : g\bar{g}\ ^t = \bar{g}\ ^t g = Id\}$, com álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}); A + \bar{A}\ ^t = 0\}$.

5. $SU(n) = \{g \in U(n); det\ g = 1\}$ com álgebra de Lie $su(n) = \{A \in U(n);\ tr\ A = 0\}$.

1.2 Espaços Simétricos

Se E é um espaço euclidiano então as reflexões sobre subespaços afins são isometrias importantes que geram todo o grupo de isometrias do espaço. Uma reflexão particular é a simetria sobre $p \in E$ que denotaremos por s_p a qual reverte a orientação das geodésicas que passam por p. De forma análoga, se M é uma variedade Riemanniana conexa e p um ponto de M, uma isometria s_p que fixa p e reverte a orientação de todas as geodésicas que passam por p é chamada uma simetria (geodésica) de M por p. Se M é uma variedade Riemanniana qualquer então claramente temos que a mesma não necessariamente admite toda simetria geodésica. Um espaço simétrico (Riemanniano) é uma variedade Riemanniana conexa tal que para todo ponto $p \in M$ a simetria geodésica s_p existe. Formalmente temos a seguinte definição:

Definição 1.10 Um *espaço simétrico* (Riemanniano) é uma variedade Riemanniana S com a propriedade de que a reflexão geodésica em todo ponto é uma isometria de S. Em outras palavras, para todo $p \in S$ existe algum $s_p \in G = I(S)$ (o grupo das isometrias de S) com as propriedades

$$s_p(p) = p\ , \quad (ds_p)_p = -I.$$

Esta isometria s_p é chamada simetria em p.

Como uma primeira consequência da definição, S é geodésicamente completa: se uma geodésica γ está definida sobre $[0, s)$, podemos refletí-la por $s_{\gamma(s)}$ para algum $t \in (\frac{s}{2}, s)$, daí podemos extendê-la em s. Além disso, S é homogênea, isto é, para dois pontos $p, q \in M$ existe uma isometria que aplica p sobre q. De fato, se conectamos p e q por um segmento de geodésica γ (o que é possível pois S é completa), e tomamos $m \in \gamma$ o ponto médio, então $s_m(p) = q$, assim G age transitivamente.

Fixemos um ponto base $p \in P$. O subgrupo fechado $G_p = \{g \in G; g(p) = p\}$ (estabilizador de p) será chamado o *grupo de isotropia* e será denotado por K.

A diferencial em p de qualquer $k \in K$ é uma transformação ortogonal de T_pS. Relembre que a isometria k é determinada por sua diferencial dk_p; assim podemos ver K como um subgrupo fechado de $O(T_pS)$ (o grupo ortogonal de T_pS) usando este mergulho $k \to dk_p$ o qual é chamado *representação isotrópica*. Em particular K é compacto.

Reciprocamente, se S é um espaço homogêneo, ou seja, seu grupo de isometria G age transitivamente, então S é simétrica se e somente se existe uma simetria s_p para algum $p \in S$. A saber, a simetria em qualquer ponto $q = gp$ é justamente o conjugado $s_q = g s_p g^{-1}$.

Um espaço simétrico é chamado irredutível se sua representação isotrópica é irredutível. Além disso dizemos que um espaço simétrico é do tipo compacto se seu recobrimento universal é ainda compacto.

Como usual, podemos identificar o espaço homogêneo S com o espaço quociente G/K usando o difeomorfismo $G-$equivariante $gK \mapsto gp$. Em particular, $dim\ S = dim\ G - dim\ K$.

Podemos citar como exemplos de espaços simétricos o espaço euclidiano, a esfera, o espaço hiperbólico, o grupo ortogonal, os grupos de Lie compactos, as Grassmannianass, dentre outros. Neste trabalho investigaremos, por exemplo, os mergulhos equivariantes dos seguintes espaços simétricos:

- $SU(p+q)/S(U_p \times U_q)$, quando $q = 1$ e $p = n$ (que é o $\mathbb{CP}^n$),
- $SO(2n)/U(n)$ (espaço das estruturas complexas) e
- $SO(p+2)/SO(p) \times SO(2)$ (quádrica complexa),

sendo que

- $SU(p+q) = U(p+q) \cap SL(p+q, \mathcal{C})$, onde $U(n)$ é o grupo das matrizes unitárias de ordem $n \times n$ e $SL(n, \mathcal{C})$ é o grupo das matrizes complexas $n \times n$ de determinante 1;

- $S(U_p \times U_q)$ é o conjunto das matrizes $\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$ onde $g_1 \in U(p), g_2 \in U(q)$ e $det\ g_1 det\ g_2 = 1$;

- $SO(2n)$ é o grupo especial ortogonal, que é o conjunto das matrizes $A_{2n \times 2n}$ ortogonais (ou seja tais que $AA^t = Id$) com determinante 1.

Definição 1.11 Uma variedade Riemanniana (não necessariamente completa) é chamada localmente simétrica se o seu tensor curvatura é paralelo, isto é $\nabla R = 0$.

Uma variedade M é localmente simétrica se e somente se existe um espaço simétrico P tal que M é localmente isométrica a P.

Os espaços simétricos foram introduzidos por E. Cartan na década de 1920 (veja capítulo 3 de [3] e parágrafos 6.7 e 6.9 de [1] para considerações históricas).As referências clássicas sobre espaços simétricos incluem [16], [19] e [20]. Mais recentemente o professor Jost Eschenburg escreveu um material resumido sobre espaços simétricos entitulado "Lectures Notes on Symmetric Spaces" [9], que será exaustivamente utilizado neste trabalho.

1.2.1 Transvecções

Vimos que a simetria no ponto médio aplica um ponto qualquer $p \in P$ a outro ponto $q \in P$. No entanto existe outra simetria com propriedades ainda melhores. Seja γ o segmento geodésico que conecta p e q tal que $\gamma(0) = m$ é o ponto médio, e estenda tal segmento a uma geodésica completa. A simetria s_m reflete cada campo de vetores paralelos ao longo de γ; de fato, sendo uma isometria, ela aplica X ao longo de γ sobre outro campo de vetores paralelos $\tilde{X}$ ao longo de $\tilde{\gamma}$ com $\tilde{\gamma}(t) = s_p(\gamma(t))$ e $ds_m.X(0) = -X(0)$. Assim

$$ds_m.X(t) = -X(-t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. A composição de duas simetrias, digamos $\tau = s_q \circ s_m$, reflete X duas vezes e assim deixa X invariante. Mais precisamente, se $q = \gamma(s)$,

$$\tau(\gamma(t)) = \gamma(t+s), \quad d\tau_{\gamma(t)}X(t) = X(t+s) \tag{1.1}$$

para todo campo de vetores paralelos X ao longo de γ. Tal isometria τ é chamada uma transvecção ao longo de γ. Como toda isometria é determinada por seu valor e o valor de sua derivada num ponto, 1.1 mostra que a transvecção $\tau = \tau_s$ para a variável $s \in \mathbb{R}$ forma um subgrupo a um parâmetro de G, isto é $\tau_{s_1+s_2} = \tau_{s_1} \circ \tau_{s_2}$. De fato, por 1.1, $\tau_{s_1} \circ \tau_{s_2}$ é a isometria mandando o ponto $\gamma(0)$ a $\gamma(s_1 + s_2)$ e todo vetor $X \in T_{\gamma(0)}P$ no seu transporte paralelo $TP_{s_1+s_2}X$ (onde TP_t aqui denota o transporte paralelo de $T_{\gamma(0)P}$ a $T_{\gamma(t)}P$ ao longo de γ), e o mesmo ocorre para $\tau_{s_1+s_2}$, daí $\tau_{s_1} \circ \tau_{s_2} = \tau_{s_1+s_2}$. Mais geralmente, dados dois pontos $p, q \in P$, a composição $s_p \circ s_q$ é uma transvecção ao longo de uma geodésica qualquer conectando p e q. Assim temos o seguinte resultado:

Teorema 4 Cada geodésica completa $\gamma : \mathbb{R} \to P$ é a órbita de um grupo a um parâmetro de isometrias, as transvecções ao longo de γ que agem por transporte paralelo ao longo de γ.

1.2.2 A decomposição de Cartan

Definição 1.12 A decomposição da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ tal que

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$$

e $ad(\mathfrak{k}) \mid_{\mathfrak{p}}$ é a álgebra de Lie de um subgrupo compacto de $Gl(\mathfrak{p})$ é chamada *decomposição de Cartan.*

Teorema 5 Todo espaço simétrico P determina uma decomposição de Cartan sobre a álgebra de Lie dos campos de Killing. Reciprocamente para toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ existe um único espaço simétrico simplesmente conexo $P = G/K$ onde G é o grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e K o subgrupo conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$.

1.2.3 Espaço Simétrico tipo euclidiano, compacto e não compacto

Definição 1.13 Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos a forma de Killing como sendo a forma bilinear $B(X,Y) = tr\ ad(X)ad(Y)$.

Seja $P = G/K$ um espaço simétrico irredutível isotrópico [2] e seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ sua decomposição de Cartan. Como $\mathfrak{p}$ pode ser identificado com o espaço tangente de P no ponto base $p = eK$, a métrica Riemanniana sobre P corresponde a um produto escalar $K-$invariante $\langle\ ,\rangle$ sobre $\mathfrak{p}$. Mas existe uma outra forma bilinear simétrica $K-$invariante sobre $\mathfrak{p}$, a saber a restrição da forma de Killing B. Desde que K age irredutivelmente sobre $\mathfrak{p}$, as duas formas bilineares diferem apenas por um fator λ (pois todo autoespaço de B é $K-$invariante), ou seja $B = \lambda\langle\ ,\ \rangle$. O sinal de λ determinará o tipo do espaço simétrico.

Teorema 6 A curvatura seccional de um espaço simétrico irredutível isotrópico P é zero para $\lambda = 0$, e para $\lambda \neq 0$ temos

$$\langle R(X,Y)Y, X\rangle = \lambda^{-1}B([X,Y], B[X,Y])$$

onde $X, Y \in \mathfrak{p}$ são ortonormais.

Assim,

- se $\lambda = 0$, então P é flat e dizemos que é do tipo euclidiano;
- se $\lambda < 0$, então P tem curvatura seccional não negativa e dizemos que é do tipo compacto e
- se $\lambda > 0$ a curvatura é não-positiva e dizemos que P é do tipo não-compacto.

1.2.4 O Toro Máximo e o Grupo de Weyl de um Espaço Simétrico

Os conceitos apresentados a seguir serão extremamente importantes na construção dos mergulhos equivariantes no decorrer deste trabalho.

Seja $P = G/K$ um espaço simétrico onde G é conexo e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ a decomposição de Cartan correspondente. Seja $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ uma subalgebra abeliana maximal [3].

[2] Dizemos que P é irredutível isotrópico se K age irredutivelmente sobre T_pP que é o mesmo que dizer que não podemos decompor T_pP como $V_1 \oplus V_2$ onde V_1 e V_2 são subespaços $K-$ invariantes.

[3] Dizemos que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ é uma subálgebra maximal se $\mathfrak{a}$ é abeliana e $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_1$ com $\mathfrak{a}_1$ abeliana implica $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$.

Teorema 7 Nas condições acima, $\mathfrak{a}$ intercepta toda $K-$órbita sobre $\mathfrak{p}$ e sempre intercepta perpendicularmente.

Se $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra abeliana maximal então $T = exp(\mathfrak{a})$ é denominado um *toro máximo* de P. Além disso, todas as subalgebras maximais de $\mathfrak{p}$ têm a mesma dimensão, que será chamada posto do espaço simétrico P.

Definição 1.14 O grupo de Weyl de P com respeito a $\mathfrak{a}$ é dado por $W = M/M_0$, onde $M = \{k \in K; Ad(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$ e $M_0 = \{k \in K; Ad(k)x = x \; \forall x \in \mathfrak{a}\}$.

O grupo de Weyl é finito, além disso se $\mathfrak{g}_\alpha = \{z \in \mathfrak{g}; \forall x \in \mathfrak{a} \; ad(x)z = \alpha(x)z\}$ então a forma linear $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ é chamada uma raiz se este espaço $\mathfrak{g}_\alpha$ é não nulo e os hiperplanos $\alpha^\perp = Ker \; \alpha \subset \mathfrak{a}$ são chamados hiperplanos raiz, as componentes conexas de $\mathfrak{a} \setminus \cup_\alpha \alpha^\perp$ são denominadas câmaras de Weyl. A ação de W sobre $\mathfrak{a}$ permuta os hiperplanos raízes e aplica câmaras de Weyl em câmaras de Weyl.

O seguinte teorema determina o tamanho de W.

Teorema 8 O grupo de Weyl W agindo sobre $\mathfrak{a}$ é gerado pelas reflexões nos hiperplanos raiz $\alpha^\perp$ para todo $\alpha \in \triangle$ (conjunto das raízes), e age simplesmente transitivamente [4] sobre o conjunto das câmaras de Weyl em $\mathfrak{a}$.

1.3 Variedades Kählerianas

Definição 1.15 Seja M uma variedade diferenciável. Uma *estrutura quase complexa* sobre M é um campo tensorial do tipo $(1,1)$ tal que $J^2(X) = J(JX) = -X$ para todo campo de vetores X sobre M. Uma variedade quase complexa é um par (M, J) onde é uma variedade diferenciável e J é uma estrutura quese complexa sobre M.

Definição 1.16 Seja M uma variedade diferenciável com uma estrutura quase complexa J. Usando a complexificação natural do espaço tangente, dizemos que um campo Z é do tipo $(1,0)$ se $J(Z) = iZ$ e do tipo $(0,1)$ se $JZ = -iZ$.

[4]Seja G um grupo agindo sobre um conjunto X. Dizemos que a ação age simplesmente transitivamente se é transitiva e para quaisquer x e $y \in X$ existe um único $g \in G$ tal que $gx = y$.

Todo campo de vetores complexos Z de uma variedade quase complexa pode ser escrito como uma soma

$$Z = Z_{(1,0)} + Z_{(0,1)}$$

onde $Z_{(1,0)}$ e $Z_{(0,1)}$ são campos de vetores do tipo $(1,0)$ e $(0,1)$ respectivamente.

Definição 1.17 Seja M uma variedade conexa com uma estrutura quase complexa J. Uma estrutura Riemanniana g sobre M é chamada uma estrutura Hermitiana se

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \text{ para todo} X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e uma estrutura Kähleriana se, em adição tivermos

$$\nabla_X J = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M)$$

Em outras palavras, ser hermitiana significa que J é uma isometria sobre M para todo $p \in M$ enquanto ser Kähleriana adiciona a condição de que o campo tensorial J é invariante sobre paralelismo.

Os espaços simétricos hermitianos são espaços simétricos M com uma estrutura de Kähler J tal que todas simetrias são holomorfas.

Teorema 9 Seja M uma variedade conexa com estrutura quase complexa J e estrutura Riemanniana g.

- Se g é hermitiana, X e Y são ambos do tipo $(1,0)$ (ou ambos do tipo $(0,1)$), então $g(X,Y) = 0$;
- Se g é Kähleriana, X e Y são ambos do tipo $(1,0)$ (ou ambos do tipo $(0,1)$) e R denota o tensor curvatura, então $R(X,Y) = 0$.

Os espaços simétricos Riemannianos irredutíveis compactos que são hermitianos são ([16],pg 354):

Espaço	Posto	Dimensão
$SU(p+q)/S(U_p \times U_q)$	$min(p,q)$	$2pq$
$SO(2n)/U(n)$	$[\frac{1}{2}n]$	$n(n-1)$
$SO(p+2)/SO(p) \times SO(2)$	2	$2p$
$Sp(n)/U(n)$	n	$n(n+1)$
$(e_{6(-78)}, so(10) + \mathbb{R})$	2	32
$(e_{7(-133)}, e_6 + \mathbb{R})$	3	54

1.3.1 Subvariedades Kählerianas ppmc do espaço euclidiano

Algumas superfícies no $\mathbb{R}^3$ admitem deformações isométricas que mudam a forma da superfície enquanto preservam a métrica intrínseca. As curvaturas principais podem ser preservadas enquanto as direções principais são rotacionadas sob esta deformação, isto acontece se a superfície tem curvatura média constante ("cmc"). O exemplo mais conhecido é a deformação do catenóide sobre o helicóide que rotaciona as direções principais em 45°.

As subvariedades Kählerianas $M \subset \mathbb{R}^n$ ppmc (com pluri-curvatura média paralela) generalizam as superfícies de curvatura média constante, sendo que o papel do vetor curvatura média é desempenhado pela $(1,1)-$ parte da segunda forma fundamental α, que denominamos pluri-curvatura média:

$$\alpha^{(1,1)}(X,Y) := \frac{1}{2}(\alpha(X,Y) + \alpha(JX,JY))$$

Se escrevemos $X = X_{(1,0)} + X_{(0,1)}$ e $Y = Y_{(1,0)} + Y_{(0,1)}$ e substituimos na expressão acima então vemos que:

$$\alpha^{(1,1)}(X,Y) = \alpha(X_{(1,0)}, Y_{(0,1)}) + \alpha(X_{(0,1)}, Y_{(1,0)})$$

De forma análoga definimos

$$\alpha^{(2,0)}(X,Y) = \alpha(X_{(1,0)}, Y_{(1,0)}) \text{ e}$$

$$\alpha^{(0,2)}(X,Y) = \alpha(X_{(0,1)}, Y_{(0,1)}).$$

As subvariedades Kählerianas ppmc são caracterizadas pela existência de uma família associada de subvariedades isométricas com segunda forma fundamental rotacionada. Mais claramente se M é uma variedade kähleriana, simplesmente conexa de dimensão n, $f : M \to \mathbb{R}^n$ uma imersão e α a segunda forma fundamental de f. Seja

$$\alpha_\theta(X,Y) = \alpha(R_\theta X, R_\theta Y), \text{ onde } R_\theta = \cos\theta \mathrm{I} + \operatorname{sen}\theta \mathrm{J}.$$

Quando existe uma família de imersões isométricas $f_\theta : M \to \mathbb{R}^n$ com segunda forma fundamental α_θ? Precisamente quando $\alpha^{(1,1)}$ é paralela com respeito à conexão induzida pelas conexões dos espaços tangente e normal [4].

No caso de uma superfície temos $\alpha^{(1,1)}(X,Y) = \langle X, Y\rangle H$, daí $\alpha^{(1,1)}$ é paralelo se e somente se o vetor curvatura média $H = \frac{1}{2}$ traço α é também paralelo e é isto que nos motiva a chamar $\alpha^{(1,1)}$ de pluri-curvatura média de f pois para qualquer curva complexa $C \subset M$ a restrição de $\alpha^{(1,1)}$ a TC é novamente a métrica multiplicada pelo vetor curvatura média da superfície $f\mid_C$.

Quando $\alpha^{(1,1)} \equiv 0$, a imersão é chamada $(1,1)-$geodésica ou pluri-mínima, este caso foi estudado em [13] e [14].

Existem três classes de imersões irredutíveis ppmc no espaço euclidiano conhecidas:

1. Superfícies com vetor curvatura média não nulo paralelo;

2. Subvariedades pluri-mínimas;

3. Imersões Kählerianas extrinsecamente simétricas.

A primeira classe foi estudada por vários autores, veja por exemplo [25]. A segunda contém vários exemplos em dimensões altas [7]. Descreveremos brevemente a terceira.

1.3.2 Espaços extrinsecamente simétricos

Uma imersão isométrica (irredutível e substancial) $f : M \to \mathbb{R}^n$ é chamada extrinsecamente simétrica se a segunda forma fundamental α toda ($\alpha \in Hom(TM \otimes TM, N)$) é paralela. Estas imersões foram classificadas por Ferus [15] (ou também [10]). Não é difícil ver que α é paralelo se e somente se f é invariante sobre reflexões em cada um de seus espaços normais.

Se $f : M \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão Kähleriana extrinsecamente simétrica então f é ppmc.

Exemplos de espaços extrinsecamente simétricos são as esferas euclidianas $\mathbb{S}^m \subset E^{m+1}$, o grupo ortogonal $O(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ou as Grassmannianas onde um subespaço linear $k-$dimensional é trocado pela reflexão ortogonal neste subespaço e o espaço receptor E consiste de todas as matrizes $n \times n$ simétricas (para mais detalhes ver [9]). De fato, muitos espaços simétricos (chamados $\mathbb{R}-$espaços simétricos, [18]) permitem um tal mergulho.

Espaços extrinsecamente simétricos são as subvariedades mais belas, tendo um papel para a geometria das subvariedades como o dos espaços simétricos para a geometria Riemanniana. Enquanto os espaços simétricos têm tensor curvatura paralelo os extrinsecamente simétricos têm segunda forma fundamental paralela.

1.3.3 O mergulho standard

Seja agora $P = G/K$ uma variedade de Kähler simétrica (hermitiana simétrica) do tipo compacta, ou seja P é Kähler e simétrica do tipo compacta e todas as simetrias geodésicas s_p são holomorfas. Em todo ponto $p \in P$ o tensor curvatura R é um produto triplo de Lie sobre T_pP e J_p uma derivação de R. Podemos assumir que $p = eK$. Seja

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

a decomposição de Cartan correspondente (decomposição em autoespaços de $Ad(s_p)$). Então podemos identificar $T_pP = \mathfrak{p}$. Extendemos $J_p : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ a uma derivação $\hat{J}_p$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ colocando $\hat{J}_p = 0$ em $\mathfrak{k}$. Desde que $\mathfrak{g}$ é semisimples, cada derivação é interna. Daqui podemos ver $\hat{J}_p \in \mathfrak{g}$ (agindo sobre $\mathfrak{g}$ por $ad(\hat{J}_p)$). A aplicação

$$\begin{array}{rccc} f: & P & \to & \mathfrak{g} \\ & p & \mapsto & \hat{J}_p \end{array}$$

é chamada mergulho standard de P [15]. Sua imagem $\tilde{P} = \hat{J}(P) \subset \mathfrak{g}$ é uma órbita adjunta. Desde que J é paralela, J_p e J_q são conjugados para um $q \in P$ arbitrário sobre a transvecção g ao longo de uma geodésica ligando $p = eK$ a q. Daqui $\hat{J}_q = Ad(g)\hat{J}_p$. Por holomorficidade cada $k \in K = G_p$ preserva J_p, assim $\hat{J}_p$ centraliza K e a aplicação $\hat{J} : P \to Ad(G)\hat{J}_p$ é uma cobertura equivariante (note que a álgebra de Lie estabilizadora de $\hat{J}_p$ é $\mathfrak{k}$). Esta de fato é injetiva. Para ver isto, note que a órbita $\tilde{P} = Ad(G)\hat{J}_p \subset \mathfrak{g}$ é um espaço simétrico hermitiano extrínseco com simetria extrínseca $s_p = Ad(exp\pi)\hat{J}_p$ e estrutura quase complexa $ad(\hat{J}_p) \mid_{T_{\tilde{p}}\tilde{P}}$ onde $\tilde{p} = \hat{J}_p$. Desde que qualquer espaço simétrico hermitiano semisimples é simplesmente conexo [[16],p376] a aplicação $\hat{J}$ é um a um. A métrica Riemanniana sobre $\tilde{P}$ induzida por qualquer produto interno $Ad-$ invariante sobre $\mathfrak{g}$ coincide, a menos de uma constante, com a métrica Riemanniana inicial sobre cada fator de de Rham. O espaço tangente e normal de $\tilde{P}$ em $\tilde{p} = J_p$ são

$$T_{\tilde{p}\tilde{P}} = ad(\mathfrak{g})\hat{J}_p = [\mathfrak{p}, \hat{J}_p] = -J_p(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p},$$

$$N_{\tilde{p}}\tilde{P} = \mathfrak{p}^{\perp} = \mathfrak{k}$$

assim $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ é também a decomposição em espaço tangente e espaço normal a $\tilde{P}$ em $\hat{J}_p$.

Não distinguiremos P e $\tilde{P}$, consideraremos P como uma subvariedade de $\mathfrak{g}$ onde o ponto $p \in P$ vem do elemento $p = \hat{J}_p \in \mathfrak{g}$.

É importante destacar que o mergulho standard é extrinsecamente simétrico ([15],[12]).

Para calcularmos a segunda forma fundamental α de $\tilde{P} \subset \mathfrak{g}$, consideremos g_t um grupo a um parâmetro das transvecções e $v = (d/dt)_o g_t \in \mathfrak{p}$, e ao mesmo tempo $v = (d/dt)_o g_t p \in T_pP$, e seja $w \in T_pP$. Estendemos w a um campo de vetores w_t ao longo da curva $t \mapsto g_t p$ in P colocando $w_t = (dg_t)_p w$.

O campo de vetores correspondente ao longo de $t \to g_t J_p$ em $\tilde{P}$ é $f_* w_t = g_t f_* w = g_t(Jw)$, usando a equivariância de f, que é $gf = fg$. Agora

$$\alpha(v, w) = ((d/dt)_o f_* w_t)^{\perp} = (d/dt)_o g_t (Jw)^{\perp} = (v.Jw)^{\perp} = [v, Jw].$$

Note que $\mathfrak{p}$ tem uma regra tripla:

1. É o complemneto de $\mathfrak{k}$ na decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$.

2. É identificado com o espaço tangente da variedade abstrata $P = G/K$ em $p = eK$.

3. É o espaço tangente (como um subespaço de $\mathfrak{g}$) da variedade mergulhada $\tilde{P} \subset \mathfrak{g}$ em $j(p) = J_p$. O vetor $v \in \mathfrak{p}$ corresponde ao vetor tangente $-Jv \in T_{J_p}\tilde{P}$ e ao vetor tangente $v.p = (d/dt)_o g_t p$ onde $g_t = \exp tv$.

1.3.4 A imersão $f : Gr_2^+ \to S(n)$

Um exemplo ppmc conhecido é o de uma imersão $f : Gr_2^+ \to S(n)$, onde $Gr_2^+ = G_2^+(\mathbb{R}^n)$ é a Grassmanniana dos $2-$ planos orientados no $\mathbb{R}^n$ ([4]). Este espaço é um espaço simétrico hermitiano que pode ser identificado com a quádrica complexa $\{[z] \in \mathbb{CP}^{n-1}; \langle z, z \rangle = 0\}$ por meio da aplicação $E = span\{x, y\} \mapsto [x + iy]$ onde (x, y) é qualquer basse orientada ortonormal do plano orientado $E \subset \mathbb{R}^n$. Colocamos $f = \tilde{f} \circ \pi$ onde $\pi : Gr_2^+ \to Gr_2$ é a projeção canônica e $\tilde{f} : Gr_2 \to S(n)$ é o mergulho standard (extrinsecamente simétrico) da Grassmanniana sobre o espaço das matrizes $n \times n$ reais simétricas que associa a cada plano $E \in GR_2$ a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^n$ sobre E. O exemplo mais fácil é a imersão de Veronese

$$S^2 \to \mathbb{RP}^2 \to S^4 \subset \mathbb{R}^5 \cong \{x \in S(3);\ \text{traço } x = 1\}.$$

Esta imersão é ppmc, no entanto não é $(2, 0)-$ geodésica.

Capítulo 2

O Teorema de Wallach-Cartan

Este capítulo está dividido em duas partes: na primeira apresentamos o Teorema de Wallach-Cartan, que essencialmente é encontrado em [26] no entanto foi motivado pelos trabalhos de Eli Cartan [5], na segunda apresentamos propriedades que valem para mergulhos equivariantes de um espaço simétrico hermitiano qualquer. As ferramentas desenvolvidas aqui serão de grande valia para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

2.1 O Teorema de Wallach-Cartan

Seja P um espaço simétrico Riemanniano compacto, não necessariamente hermitiano e G o grupo das isometrias de P. Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G, escolha um ponto base $0 \in P$ e seja K o estabilizador de 0 sobre G.

Definição 2.1 Um mergulho equivariante $\Phi : P = G/K \to V$ sobre algum espaço vetorial Euclidiano V é uma órbita $\rho(G)v_0$ de uma representação ortogonal ρ de G sobre V com $G_{v_0} = K$, onde G_{v_0} denota o grupo fixo de $v_0 \in V$ sobre a ação ρ.

Em outras palavras, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, bend left] & \Phi(p) \arrow[d, "\rho(g)"] \\ gp \arrow[r] & \rho(g)\Phi(p) \end{tikzcd}$$

Se dois tais mergulhos $\Phi_i : P \to V_i, i = 1,2$, correspondem às representações $\rho_i : G \to O(V_i)$, são dados, obtemos um terceiro mergulho $\iota_1 \oplus \iota_2$ de P sobre $V_1 \oplus V_2$, correspondente à representação $\rho_1 \oplus \rho_2$. Dessa forma podemos restringir nossa atenção aos mergulhos tais que tal decomposição não existe e que corresponde às representações irredutíveis ρ.

É interessante notar que se $\Phi : P = G/K \to V$ é um mergulho equivariante, então $\Phi(P)$ é uma órbita de ρ muito especial pois o grupo de isotropia $K = G_p$ fixa $v_0 = \Phi(p) \in V$.

Os espaços extrinsicamente simétricos são exemplos de tais mergulhos [15], [10]. No entanto existem muitas outras representações de G que fornecem mergulhos equivariantes de G/K; estas são chamadas classe-um para o par (G, K).

Definição 2.2 Uma representação $\rho : G \to O_n$ é chamada classe- um para um subgrupo $K \subset G$ (ou classe-um para o para (G, K)) se existe um vetor não nulo $v_0 \in V$ que é fixo por K, ou seja

$$K = G_{v_0} := \{g \in G; \rho(g)v_0 = v_0\}$$

A seguir apresentaremos o Teorema de Wallach-Cartan. Como já dissemos ele pode ser encontrado em [26], no entanto, aqui não assumiremos G conexo nem semisimples e trabalharemos com representações reais, esta adaptação do teorema é devido a [11].

Teorema 2.1 (Wallach-Cartan) Todo $G-$submódulo irredutível de $C^\infty(P)$ é uma representação classe-um, e toda representação classe-um V ocorre em $C^\infty(P)$ exatamente uma vez, ou seja não existe outro G-submódulo $W \subset C^\infty(P)$ que seja equivalente a V.

Demonstração: Primeiramente verifiquemos que toda representação classe-um irredutível ocorre como um submódulo de $C^\infty(P)$. De fato, todo mergulho $G-$ invariante $\iota : P \to V$ é determinado por n funções reais sobre P, a saber, as funções altura $\langle \iota, e_i \rangle$ onde $e_1, \ldots, e_n$ constituem uma base ortonormal de V. Isso ocorre pois considerando todas as funções altura $\phi_v = \langle \iota, v \rangle$ para $v \in V$ obtemos um mergulho linear $v \to \phi_v$ de V sobre o espaço vetorial de dimensão infinita $C^\infty(P)$ das funções reais diferenciáveis sobre P. Este é um espaço Pré-Hilbert (com o produto interno L^2) sobre o qual G age ortogonalmente por composição, $g \cdot \phi := \phi \circ g^{-1}$, e o mergulho de V sobre $C^\infty(P)$ é $G-$equivariante. Desde que o produto interno $G-$invariante sobre V é único a menos de um fator, pela irredutibilidade de ρ, podemos assumir que o mergulho de V sobre $C^\infty(P)$ é isométrico.

Reciprocamente, seja $V \subset C^\infty(P)$ qualquer $G-$submódulo irredutível e $\phi_1, \ldots, \phi_n$ uma base ortonormal de V. Podemos identificar V com $\mathbb{R}^n$ usando a aplicação linear ortogonal $\Phi : \mathbb{R}^n \to V$, $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i x_i \phi_i$. Transferimos a $G-$ação de V sobre $\mathbb{R}^n$ de forma que Φ seja equivariante. Mais precisamente, se $g \cdot \phi_j = \sum_i g_{ij} \phi_i$, colocamos $g \cdot e_j = \sum_i g_{ij} e_i$ para a base usual $e_1, \ldots, e_n$ do $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, ϕ_i é uma função sobre P para $i = 1, \ldots, n$. Estas funções juntas definem uma aplicação diferenciável

$$\overrightarrow{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_n) = \sum_j \phi_j e_j : P \to \mathbb{R}^n,$$

que é equivariante. De fato, para todo $p \in P$ e $g \in G$ temos

$$\overrightarrow{\phi}(g^{-1}p) = \sum_j (g \cdot \phi_j)(p) e_j = \sum_{ij} g_{ij} \phi_i(p) e_j = \sum_i \phi_i(p)(g^{-1} \cdot e_i) = g^{-1} \cdot (\overrightarrow{\phi}(p)).$$

Em particular $k \cdot \overrightarrow{\phi}(0) = \overrightarrow{\phi}(k0) = \overrightarrow{\phi}(0)$ para todo $k \in K$ e assim V é classe- um com $v_0 = \Phi(\overrightarrow{\phi}(0))$.

Agora seja W equivalente a V, ou seja $W \subset C^\infty(P)$ é outro submódulo o qual é $G-$isomorfo a V. Queremos mostrar que $W \cap V \neq \emptyset$ e assim $V = W$ pela irredutibilidade. Dada uma base ortonormal $\phi_1, \ldots, \phi_n$ de V encontramos uma base ortonormal $\psi_1, \ldots, \psi_n$ de W tal que para todo $g \in G$ a matriz de V e W com respeito a essas bases são as mesmas, que é $g \cdot \phi_j = \sum_i g_{ij} \phi_i$ e $g \cdot \psi_j = \sum_i g_{ij} \psi_i$. Seja

$$\hat{\phi} : P \times P \to \mathbb{R}, \quad (p_1, p_2) \mapsto \sum_{i=1}^n \phi_i(p_1) \psi_i(p_2).$$

Afirmamos que $\hat{\phi}(g^{-1}p_1, g^{-1}p_2) = \hat{\phi}(p_1, p_2)$ para todo $g \in G$. De fato,

$$\begin{array}{rclcl} \hat{\phi}(g^{-1}p_1, g^{-1}p_2) & = & \sum_i \phi_i(g^{-1}p_1)\psi_i(g^{-1}p_2) & = & \sum_i (g \cdot \phi_i)(p_1)(g \cdot \psi_i)(p_2) \\ & = & \sum_{ijk} g_{ji} \phi_j(p_1) g_{ki} \psi_k(p_2) & = & \sum_j \phi_j(p_1)\psi_j(p_2) = \hat{\phi}(p_1, p_2) \end{array}$$

desde que $\sum_i g_{ji} g_{ki} = \delta_{jk}$ pela ortogonalidade da matriz (g_{ij}).

Seja $s_0 \in K$ a simetria geodésica de P no ponto base $0 \in P$ e $\tau = \tau_0$ a involução correspondente $\tau(g) = s_0 g s_0^{-1}$. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ a decomposição correspondente de $\mathfrak{g}$

sobre os $(\pm 1)-$autoespaços de τ_*, e colocamos $\bar{P} = exp(\mathfrak{p}) \subset G$. Então $P = \bar{P}_0$. Para $g \in \bar{P}$ e $p = g_0$, temos $\hat{\phi}(p, 0) = \hat{\phi}(g0, 0) = \hat{\phi}(0, g^{-1}0) = \hat{\phi}(0, s_0(g_0)) = \hat{\phi}(0, s_0 p)$. Assim $\hat{\phi}(\_, 0) = s \cdot (\hat{\phi}(0, \_))$. Mas $\hat{\phi}(\_, 0) = \sum_i \psi_i(0)\phi_i$ é um elemento não nulo de V enquanto $\hat{\phi}(0, \_) = \sum_i \phi_i(0)\psi_i \in W$. Assim $\hat{\phi}(\_, 0) = s \cdot \hat{\phi}(0, \_)$ é um elemento não nulo na interseção $V \cap W$, o que mostra que $V = W$. ■

Resumidamente, temos que para qualquer imersão equivariante $\Phi : P \to V$, o espaço vetorial V pode ser visto como um espaço de funções sobre P, um subespaço de $C^\infty(P)$. De fato, associamos a cada $v \in V$ a função altura

$$f_v : P \to \mathbb{R} : f_v(x) = \langle \Phi(x), v \rangle. \tag{2.1}$$

Então a $G-$representação ρ sobre V torna-se parte da $G-$representação sobre $C^\infty(P)$.Isto define uma nova função $gf \in C^\infty(P)$ para todo $g \in G$ como segue:

$$(gf)(x) := f(g^{-1}(x)). \tag{2.2}$$

Para ver a compatibilidade das representações sobre V e $C^\infty(P)$ observamos que

$$f_{\rho(g)v}(x) = \langle \Phi(x), \rho(g)v \rangle = \langle \rho(g)^{-1}\Phi(x), v \rangle = \langle \Phi(g^{-1}x), v \rangle = (gf_v)(x).$$

Assim, todo mergulho equivariante é obtido de um $G-$submódulo classe-um de $C^\infty(P)$. O Teorema de N.L.Wallach afirma que para toda representação irredutível $V \subset C^\infty(P)$ classe-um, encontramos uma função não nula $f = v_0 \in V \subset C^\infty(P)$ que é invariante sobre K, além disso C^∞ decompõe-se completamente em $G-$representações irredutíveis V_i, as quais são classe-um com respeito a K e cada tal representação ocorre precisamente uma vez em C^∞, a menos de equivalência. Assim as imersões equivariantes de $P = G/K$ correspondem a $G-$órbitas

$$Gf_i = \{f_i \circ g^{-1} : g \in G\}$$

de funções f_i $K-$invariantes sobre P.

Para encontrarmos tais funções $f : P \to \mathbb{R}$ que são invariantes sobre K usaremos que toda $K-$órbita sobre P intercepta um toro máximo fixo $T \subset P$ contendo nosso ponto base 0. Assim f é determinado por $\Phi = f\mid_T$, desde que f é constante ao longo de todas as K-órbitas. No entanto Φ não é arbitrária pois precisa ser invariante sobre o Grupo de Weyl $W = \{k \in K; kT = T\}$ que mantém T invariante.

2.2 Mergulho Equivariante de um espaço simétrico hermitiano

Seja P um espaço simétrico e $\Phi : P \to V$ um mergulho equivariante. Se $p \in P$ então usaremos a notação T para T_pP e N para N_pP. Seja s a simetria em p tal que $s = -I$ sobre T, temos então que:

$$s\alpha(V,W) = \alpha(sV,sW) = \alpha(-V,-W) = \alpha(V,W),$$

ou seja, $\alpha(V,W) \in N^+$, onde N^+ é o autoespaço se s associado a 1.

De forma análoga, podemos observar ainda que:

$$s\nabla^{\perp}_{U}\alpha(V,W) = \nabla^{\perp}_{sU}\alpha(sV,sW) = \nabla^{\perp}_{-U}\alpha(-V,-W) = -\nabla^{\perp}_{U}\alpha(V,W),$$

ou seja, $\nabla^{\perp}\alpha(V,W) \in N^-$, onde N^- é o autoespaço se s associado a -1.

Disto decorrem as seguintes observações:

Observação 2.1 *Se P um espaço simétrico e $\Phi : P \to V$ um mergulho equivariante, então $\langle \alpha^{(2,0)}, \alpha^{(2,0)} \rangle$ é holomorfa.*

Demonstração: De fato, sejam U, V, W e Z vetores do tipo $(1,0)$, e T do tipo $(0,1)$, provenientes de um sistema de coordenadas

$$\begin{aligned} T\langle \alpha(U,V), \alpha(W,Z)\rangle &= \langle \nabla^{\perp}_{T}\alpha(U,V), \alpha(W,Z)\rangle + \langle \alpha(U,V), \nabla^{\perp}_{T}\alpha(W,Z)\rangle \\ &= \langle \nabla^{\perp}_{T}(\alpha)(U,V) + \alpha(\nabla_T U, V) + \alpha(U, \nabla_T V), \alpha(W,Z)\rangle + \\ &\quad \langle \alpha(U,V), \nabla^{\perp}_{T}(\alpha)(W,Z) + \alpha(\nabla_T W, Z) + \alpha(W, \nabla_T Z)\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

A última igualdade decorre do fato de que $\nabla_T U = \nabla_T V = \nabla_T W = \nabla_T Z = 0$ e do fato de que $\nabla^{\perp}\alpha$ e α são perpendiculares. ■

Observação 2.2 *Vimos acima que se $\Phi : P \to V$ é um mergulho equivariante então $\alpha \in N^+$ e $\nabla^{\perp}\alpha \in N^-$, ou seja, são ortogonais. No entanto observamos que vale uma espécie de recíproca: se $\Phi : P \to V$ é um mergulho tal que α e $\nabla^{\perp}\alpha$ são ortogonais então tal mergulho é localmente simétrico e se P for simplesmente conexo o mergulho é simétrico, ([27], pg 138).*

Demonstração: De fato, pela equação de Gauss, temos

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle - \langle \alpha(Y,Z),\alpha(X,W)\rangle \quad \text{E assim,}\\
\nabla\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \nabla^{\perp}\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle + \langle \alpha(X,Z),\nabla^{\perp}\alpha(Y,W)\rangle\\
&\quad -\langle \nabla^{\perp}\alpha(Y,Z),\alpha(X,W)\rangle - \langle \alpha(Y,Z),\nabla^{\perp}\alpha(X,W)\rangle\\
&= o \ \ (\text{pois } \nabla^{\perp}\alpha \text{ e } \alpha \text{ são ortogonais}).
\end{aligned}$$

Portanto a curvatura é covariantemente paralela ou seja a imersão é localmente simétrica. ■

Suponhamos agora que P é hermitiano e considere J a estrutura complexa sobre P. Então J extende-se a uma isometria sobre V com $J^2 = s$. Desde que $s = I$ sobre N^+, este espaço se decompõe como $N^{++} + N^{+-}$ onde $J = 1$ sobre N^{++} e $J = -1$ sobre N^{+-}.

Sejam $V_{(1,0)}, W_{(1,0)}$ do tipo $(1,0)$ e $V_{(0,1)}, W_{(0,1)}$ do tipo $(0,1)$, então

$$\begin{aligned}
J\alpha(V_{(1,0)},W_{(0,1)}) &= \alpha(JV_{(1,0)},JW_{(0,1)}) &&= \alpha(iV_{(1,0)},-iW_{(0,1)}) &&= \alpha(V_{(1,0)},W_{(0,1)})\\
J\alpha(V_{(0,1)},W_{(1,0)}) &= \alpha(JV_{(0,1)},JW_{(1,0)}) &&= \alpha(-iV_{(0,1)},iW_{(1,0)}) &&= \alpha(V_{(0,1)},W_{(1,0)})\\
J\alpha(V_{(1,0)},W_{(1,0)}) &= \alpha(JV_{(1,0)},JW_{(1,0)}) &&= \alpha(iV_{(1,0)},iW_{(1,0)}) &&= -\alpha(V_{(1,0)},W_{(1,0)})\\
J\alpha(V_{(0,1)},W_{(0,1)})) &= \alpha(JV_{(0,1)},JW_{(0,1)})) &&= \alpha(-iV_{(0,1)}),-iW_{(0,1)}) &&= -\alpha(V_{(0,1)}),W_{(0,1)})
\end{aligned}$$

Daqui $\alpha^{(1,1)}$ é a $N^{++}-$componente de α enquanto $\alpha^{(2,0)}+\alpha^{(0,2)}$ é a $N^{+-}-$componente.

Já sabemos que $\nabla\alpha \in N^-$ e isto junto com $\alpha^{(1,1)} \in N^{++}$ implica que

$$\begin{aligned}
(\nabla_U\alpha^{(1,1)})(V,W))^{N^-} &= (\nabla_U\alpha^{(1,1)}(V,W) - \alpha^{(1,1)}(\nabla_U V,W) - \alpha^{(1,1)}(V,\nabla_U W))^{N^-}\\
&= (\nabla_U\alpha^{(1,1)}(V,W))^{N^-}\\
&= (\nabla_U\xi)^{N^-}
\end{aligned}$$

onde $\xi = \alpha^{(1,1)}(V,W)$. Mas a $N^-{-}$parte de ∇ sobre N^+ é um tensor B (invariante sobre o grupo K), assim pode ser calculado pela álgebra linear: $\nabla_u(\alpha^{(1,1)})(V,W) = B_U\xi$.

Portanto não precisamos mais de diferenciação; tudo pode ser calculado pelos tensores $K-$equivariantes no ponto base p. Veja que B_u não depende de α, somente dos fibrados N^+ e N^-. O mergulho é ppmc se e só se $\alpha^{(1,1)}$ toma valores no núcleo de $B : N^+ \to Hom(T,N^-)$.

Lema 2.1 *$\alpha^{(1,1)}$ é a projeção de α em N^{++}, escrevemos $\alpha^{(1,1)} = (\alpha)^{N^{++}}$.*

Demonstração:

Basta mostrar que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} T \times T \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi_{11}"'] & N \arrow[d, "\pi^{++}"] \\ \hat{T} \arrow[r, "\alpha^{(1,1)}"'] & N^{++} \end{tikzcd}$$

onde $\hat{T} = T_{(1,0)} \times T_{(0,1)} + T_{(0,1)} \times T_{(1,0)}$

De fato, seja $(X, Y) \in T \times T$. Sabemos que, por definição,

$$\alpha^{(1,1)}(X, Y) = \alpha(X_{(1,0)}, Y_{(0,1)}) + \alpha(X_{(0,1)}, Y_{(1,0)}),$$

e este resultado é obtido aplicando α ao resultado de

$$\pi^{(1,1)}(X, Y) = \pi^{++}(X_{(1,0)} + X_{(0,1)}, Y_{(1,0)} + Y_{(0,1)}) = (X_{(1,0)}, Y_{(0,1)}) + (X_{(0,1)}, Y_{(1,0)}).$$

Queremos mostrar que isto é equivalente a calcular $\alpha(X, Y)$ e depois projetar o resultado em N^{++}. De fato,

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y) &= \alpha(X_{(1,0)} + X_{(0,1)}, Y_{(1,0)} + Y_{(0,1)}) \\ &= \alpha(X_{(1,0)}, Y_{(1,0)}) + \alpha(X_{(1,0)}, Y_{(0,1)}) + \alpha(X_{(0,1)}, Y_{(1,0)}) + \alpha(X_{(0,1)}, Y_{(0,1)}) \end{aligned}$$

Projetando em N^{++} (que é aplicar π^{++} na expressão acima) obtemos $\alpha(X_{(1,0)}, Y_{(0,1)}) + \alpha(X_{(0,1)}, Y_{(1,0)})$, que é exatamente $\alpha^{(1,1)}(X, Y)$ e o resultado segue. ■

Mostramos então que a segunda forma fundamental α toma valores em N^{+} e sua $(1,1)-$parte é a projeção de α sobre N^{++}, este resultado será fundamental nos próximos capítulos, quando estivermos calculando α e $\alpha^{(1,1)}$ dos mergulhos a serem propostos.

O lema a seguir caracteriza a parte $(2,0) + (0,2)$ de α.

Lema 2.2 *$\alpha^{(2,0)} + \alpha^{(0,2)}$ é a projeção de α em N^{+-}.(Escrevemos $\alpha^{(2,0)} + \alpha^{(0,2)} = (\alpha)^{N^{+-}}$).*

Demonstração:

Análoga à demonstração do Lema anterior. ■

Capítulo 3

Os mergulhos equivariantes do $\mathbb{CP}^n$

Neste capítulo caracterizaremos os mergulhos equivariantes do $\mathbb{CP}^n = U_n/(U_{n-1} \times U_1)$ em espaços euclidianos e mostraremos que dentre tais mergulhos o único ppmc é o extrinsecamente simétrico. Ao final faremos uma comparação entre as funções equivariantes encontradas por meio do mergulho equivariante standard e as encontradas pelo novo modelo proposto.

3.1 Funções definidas em $\mathbb{CP}^n$ invariantes sobre o grupo de isotropia

Para encontrarmos as funções invariantes do $\mathbb{CP}^n$ lembremos que podemos pensar em $\mathbb{CP}^n$ como o quociente $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}_1$ e neste caso a ação de $\lambda \in \mathbb{S}_1 \subset \mathbb{C}$ em $x \in \mathbb{S}^{2n+1}$ é dada por

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

Assim podemos começar com uma função (real) f sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$ e perguntamos o que significa ser invariante sobre esta ação. Ao invés de Rex e Imx podemos tomar os argumentos x e $\bar{x}$ (com as transformações usuais $Re\ x = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$ e $Im\ x = \frac{1}{2i}(x - \bar{x})$) e assim podemos escrever $f = f(x, \bar{x})$ ou mais precisamente, f é uma composição de uma função $\hat{f}(u, v)$ de duas variáveis u, v em $\mathbb{C}^{n+1}$ com $g : x \mapsto (u, v) := (x, \bar{x}) : \mathbb{C}^{n+1} \to (\mathbb{C}^{n+1})^2$.

Usando a expansão de Taylor podemos decompor $f(u, v)$ como soma de polinômios bihomogêneos $\hat{f}_{kl}$ de grau k em u e l em v; obviamente, $f_{kl} = \hat{f}_{kl} \circ g$ é invariante sobre

$\mathbb{S}^1$ se e só se $k = l$, ou seja se possuir a mesma ordem em x e $\bar{x}$. Isto nos conduz ao espaço V_k dos polinômios de grau k em x e $\bar{x}$, que chamamos polinômios de bigrau k.

Definição 3.1 Seja $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{C}$. Colocamos $f(x) = \hat{f}(x, \bar{x})$, onde $\hat{f} : \mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{C}$. Dizemos que $\hat{f}$ (ou simplesmente f) tem bigrau k se $\hat{f}(\lambda x, y) = \lambda^k \hat{f}(x, y) = \hat{f}(x, \lambda y)$.

Note que se $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{C}$ tem bigrau k então ela é invariante sobre $\mathbb{S}^1$, pois $f(\lambda x) = \hat{f}(\lambda x, \overline{\lambda x}) = (\lambda\bar{\lambda})^k \hat{f}(x, \bar{x}) = (|\lambda|)^{2k} \hat{f}(x, \bar{x}) = \hat{f}(x, \bar{x}) = f(x)$, e assim define uma função sobre $\mathbb{CP}^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.

Usaremos a notação V_k para o conjunto dos polinomios de bigrau k. Se as componentes de x são $x_0, \dots, x_n$ então estamos trabalhando com monômios do tipo $x_0^{r_0} \dots x_n^{r_n} \bar{x_0}^{s_0} \dots \bar{x_n}^{s_n}$, onde $\sum_i s_i = \sum_j r_j = k$.

Observemos que $A = \overline{\bigoplus_k V_k}$, fecho de $\bigoplus_k V_k$, satisfaz as seguintes propriedades:

1. A é uma subálgebra (fechada) de $C(\mathbb{CP}^n)$.

   Sejam $x_0^{r_0} \dots x_n^{r_n} \bar{x_0}^{s_0} \dots \bar{x_n}^{s_n}$, e $x_0^{t_0} \dots x_n^{t_n} \bar{x_0}^{u_0} \dots \bar{x_n}^{u_n}$ elementos de A onde $\sum_i s_i = \sum_i r_i = k_1$ e $\sum_i t_i = \sum_i u_i = k_2$, então o produto é $x_0^{r_0+t_0} \dots x_n^{r_n+t_n} \bar{x_0}^{s_0+u_0} \dots \bar{x_n}^{s_n+u_n}$, onde $\sum_i r_i + t_i = \sum_i s_i + u_i = k_1 + k_2$.

2. A contem as constantes.

   Claramente temos que A contem os polinômios constantes, que estão em V_0.

3. A separa pontos de $\mathbb{CP}^n$.

   Sejam p e q dois pontos distintos de $\mathbb{C}P^n$. Se $x_i(z) = (z, p)$ então $x_i(p) = 1$ e $x_i(q) \neq 1$ portanto para $f_i = x_i \bar{x}_i$ temos $f_i(p) = 1$ e $f_i(q) \neq 1$.

4. A é auto-adjunto.

   Se $p \in A$ então $p = p_0 + \dots + p_r$ onde $p_i \in V_i$, $i = 0, \dots, r$ e então $p = c + x_0\bar{x}_0 + \dots + x_0^{r_0} \dots x_n^{r_n} \bar{x_0}^{s_0} \dots \bar{x_n}^{s_n}$ onde $\sum r_i = \sum s_i = r$. Neste caso, $\bar{p} = c + x_0\bar{x}_0 + \dots + x_0^{s_0} \dots x_n^{s_n} \bar{x_0}^{r_0} \dots \bar{x_n}^{r_n}$ onde $\sum r_i = \sum s_i = r$ e assim temos que $\bar{p} \subset A$.

Segue, pelo Teorema de Stone-Weirstrass [1], que $\overline{\bigoplus_k V_k} = C(\mathbb{CP}^n)$, portanto basta trabalharmos com polinômios (monômios) de bigrau k.

Em V_k os polinômios $f_k = (x\bar{x})^k$ são $K-$invariantes. Existem outros? No capítulo anterior vimos que as funções $K-$invariantes são determinadas por sua restrição ao toro máximo de forma que tal restrição seja invariante pelo grupo de Weyl. Para o $\mathbb{CP}^n$ um supespaço abeliano maximal de $\mathfrak{p}$ é gerado por $E_{1n} - E_{n1}$ ([16], pg 349) e assim o toro máximo é o círculo $\mathbb{S}_1$, uma geodésica fechada γ, além disso o único elemento não trivial do Grupo de Weyl é a conjugação complexa se identificarmos o ponto base 0 com $1 \in \mathbb{S}^1$. Os polinômios invariantes precisam portanto ser simétricos em z e $\bar{z}$. Existem duas simetrias elementares: $z + \bar{z}$ e $z\bar{z}$, mas a segunda é constante 1 (desde que $z \in \mathbb{S}^1$). Assim todos os polinômios homogêneos invariantes são potências de $\Phi = Rez = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$.

Escolhendo $0 = [e_0]$, temos

$$\gamma(t) = [x(t)] = [e_0 cost + vsent]$$

para algum vetor unitário v, este tem período π desde que $[-e_0] = [e_0]$. Assim $z = (e^{it})^2$ e

$$Re((e^{it})^2) = \cos^2\mathrm{t} - \mathrm{sen}^2\mathrm{t} = 2\cos^2\mathrm{t} - 1 = 2\mathrm{x}\bar{\mathrm{x}} - 1,$$

onde estamos indicando por x a $0-$ésima cooordenada em $\mathbb{C}^{n+1}$, que no caso de $\gamma(t)$ é o coeficiente de e_0. Observe que escrevemos $x\bar{x}$, e não x^2, pois $x\bar{x}$ é uma função bem definida em $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$. Assim $x\bar{x}$ é uma função $K-$ invariante que a menos de uma constante coincide com Φ no toro máximo.

3.2 Mergulhos equivariantes

Na seção anterior discutimos sobre as funções definidas em $\mathbb{CP}^n$ invariantes sobre o grupo de isotropia. Vimos que as potências da função polinomial $x\bar{x}$ são $K-$invariantes e assim, trabalharemos com o seguinte mergulho:

[1]Lembremos que se $C(S)$ é o espaço de Banach sup-normado de todas as funções complexas contínuas sobre o espaço de Hausdorf compacto S, um subespaço A de $C(S)$ é uma álgebra se $fg \in A$ sempre que $f \in A$ e $g \in A$. O Teorema de Stone-Weirtrass diz que se A é uma subálgebra fechada a qual contém as constantes, separa pontos sobre S e é auto-adjunto (ou seja, $\bar{f} \in A$ sempre que $f \in A$) então $A = C(S)$. A demonstração pode ser encontrada em [23]. No exemplo $S = \mathbb{C}P^n$ e A é $\overline{\bigoplus_k V_k}$.

$$\begin{array}{rccc} F_K: & \mathbb{CP}^n & \to & V_K \\ & [x] & \mapsto & (x\bar{x})^k \end{array}$$

onde $x \in (\mathbb{C}^{n+1})^{\star} = Hom(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})$ e $\bar{x} := \tau \circ x$ $(\tau(z) = \bar{z},\ \forall z \in \mathbb{C}^{n+1})$

Note que neste mergulho x não é um elemento de $\mathbb{C}^{n+1}$ mas sim de seu dual $(\mathbb{C}^{n+1})^{*}$, $(x\bar{x})^k$ é uma função de bigrau k, se $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ então $(x\bar{x})^k(z) =\mid x(z) \mid^{2k}$.

Calculemos a segunda forma fundamental de F_k.

Seja $v = x' = \frac{d}{dt}\big|_0 x_t$, $(v \perp x, ix)$. Temos então que $w = dF_{[x]}v = k(x\bar{x})^{k-1}(v\bar{x} + x\bar{v})$.

Usando o símbolo δ para $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}$, temos que:

$\delta w = k(k-1)(x\bar{x})^{k-2}\delta(x\bar{x})(v\bar{x} + x\bar{v}) + k(x\bar{x})^{k-1}\delta(v\bar{x} + x\bar{v})$.

Mas, como $x' = v, v' = x'' = -x$ então

$\delta(x\bar{x}) = v\bar{x} + x\bar{v}$ e

$\delta(v\bar{x} + x\bar{v}) = 2(-x\bar{x} + v\bar{v})$. Assim:

$$\begin{aligned} \delta w &= k(k-1)(x\bar{x})^{k-2}(v\bar{x} + x\bar{v})^2 + 2k(x\bar{x})^{k-1}(-x\bar{x} + v\bar{v}) \\ &= k(k-1)(x\bar{x})^{k-2}(\bar{x}\bar{x}vv + xx\bar{v}\bar{v} + 2x\bar{x}v\bar{v}) + 2k(x\bar{x})^{k-1}(-x\bar{x} + v\bar{v}) \end{aligned}$$

Como $\alpha^{(1,1)}(v,v) = (\delta w)^{N^{++}}$, então

$\alpha^{(1,1)}(v,v) = 2k(k-1)(x\bar{x})^{k-2}x\bar{x}v\bar{v} + 2k(x\bar{x})^{k-1}(-x\bar{x} + v\bar{v})$

É interessante notar que, se $k = 1$ as expressões para δw (que é a segunda forma fundamental) e $\alpha^{(1,1)}(v,v)$ coincidem, de fato para ambos obtemos $2(-x\bar{x} + v\bar{v})$. Isto significa que para $k = 1$ o mergulho é extrinsecamente simétrico.

Para calcular $\nabla_v \alpha^{(1,1)}(v,v)$ temos que diferenciar o vetor normal $\xi = 2k(k-1)(x\bar{x})^{k-2}x\bar{x}v\bar{v} + 2k(x\bar{x})^{k-1}(-x\bar{x} + v\bar{v})$ e tomar sua componente em N^{-}. Primeiramente diferenciemos o vetor ξ:

$$
\begin{aligned}
\delta\xi \;=\;& 2k(k-1)(k-2)(x\bar{x})^{k-3}(v\bar{x}+x\bar{v})(x\bar{x}v\bar{v})+\\
& 2k(k-1)(x\bar{x})^{k-2}((v\bar{x}+x\bar{v})v\bar{v}+x\bar{x}(-x\bar{v}-v\bar{x}))+\\
& 2k(k-1)(x\bar{x})^{k-2}(v\bar{x}+x\bar{v})(-x\bar{x}+v\bar{v})+\\
& 2k(x\bar{x})^{k-1}(-(v\bar{x}+x\bar{v})-x\bar{v}-v\bar{x}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\xi \;=\;& 2k(k-1)(k-2)(x\bar{x})^{k-3}(x\bar{x}\bar{x}vv\bar{v}+xx\bar{x}v\bar{v}\bar{v})+\\
& 4k(k-1)(x\bar{x})^{k-2}(xv\bar{v}\bar{v}+\bar{x}vv\bar{v}-xx\bar{x}\bar{v}-x\bar{x}\bar{x}v)+\\
& 4k(x\bar{x})^{k-1}(-x\bar{v}-v\bar{x})
\end{aligned}
$$

Agora tomemos sua componente em N^- :

$$
\begin{aligned}
\nabla_v\alpha^{(1,1)}(v,v) \;&=\; (\delta\xi)^{N^-}\\
&=\; 2k(k-1)(k-2)(x\bar{x})^{k-3}(x\bar{x}\bar{x}vv\bar{v}+xx\bar{x}v\bar{v}\bar{v})+\\
&\quad\; 4k(k-1)(x\bar{x})^{k-2}(xv\bar{v}\bar{v}+\bar{x}vv\bar{v}-xx\bar{x}\bar{v}-x\bar{x}\bar{x}v)
\end{aligned}
$$

Note que a expressão acima é zero somente para $k=1$, que como já comentamos é o caso extrinsecamente simétrico. Assim temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Se um mergulho equivariante do espaço projetivo complexo tem pluri-curvatura média paralela então ele é extrinsicamente simétrico.*

De fato, pelos cálculos acima, vemos que nenhum mergulho equivariante do espaço projetivo complexo, relativo à uma representação irredutível, tem pluri-curvatura média paralela além dos extrinsicamente simétricos ($k=1$). Para verificarmos que o mesmo se aplica aos mergulhos referentes a representações redutíveis, usaremos o seguinte Teorema geral:

Teorema 3.2 *Sejam $f_1 : M \to V_1$ e $f_2 : M \to V_2$ duas imersões isométricas de uma variedade Kähleriana M. Se $f=(f_1,f_2) : M \to V_1 \times V_2$ é ppmc então f_1 e f_2 também o são.*

Demonstração:

Se N é o espaço normal de f em algum ponto $p \in M$ então afirmamos que $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_0$ onde N_1 e N_2 são os espaços normais de f_1 e f_2 respectivamente e $N_0 = \{(df_1 v, -df_2 v); v \in TM\}$. De fato, se $(\eta,\xi) \in N$, então $\langle(\eta,\xi),(df_1 v, df_2 v)\rangle = 0\ \forall v \in TM$, como $\eta \in V_1$ e $\xi \in V_2$, então temos:

$$\begin{aligned}0 &= \langle(\eta,\xi),(df_1v,df_2v)\rangle &= \langle(\eta_{N_1}+\eta_{T_1},\xi_{N_2}+\xi_{T_2}),(df_1v,df_2v)\rangle\\ && = \langle\eta_{T_1},df_1v\rangle+\langle\xi_{T_2},df_2v\rangle\end{aligned}$$

Se escrevemos $\eta_{T_1}=df_1a$ e $\xi_{T_2}=df_2b$, então obtemos

$$\langle df_1a,df_1v\rangle+\langle df_2b,df_2v\rangle=0\ \ \forall v\in TM,$$

mas como as imersões são isométricas, então temos $\langle a,v\rangle=-\langle b,v\rangle\ \ \forall v\in TM$ e portanto $b=-a$. Segue que $(\eta,\xi)=(\eta_{N_1}+df_1a,\eta_{N_2}-df_2a)=(\eta_{N_1},\eta_{N_2})+(df_1a,-df_2a)$ ou seja $(\eta,\xi)\in N_1\oplus N_2\oplus N_0$.

Sejam z do tipo $(1,0)$ e $\bar{w}$ do tipo $(0,1)$. Sabemos que $\alpha^{(1,1)}(z,\bar{w})\in N$ e assim

$$\begin{aligned}\alpha^{(1,1)}(z,\bar{w}) &= (\bar{\nabla}_{\bar{w}}z)^{\perp}\\ &= (\bar{\nabla}_{\bar{w}}z)^{N_1}+(\bar{\nabla}_{\bar{w}}z)^{N_2}+(\bar{\nabla}_{\bar{w}}z)^{N_0}\\ &= \alpha_1^{(1,1)}(z,\bar{w})+\alpha_2^{(1,1)}(z,\bar{w})\end{aligned}$$

A última igualdade decorre do fato de que

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_{\bar{w}}z)^{N_0} &= (df_1(\nabla_z\bar{w})+\alpha_1^{(1,1)}(z,\bar{w})+df_2(\nabla_z\bar{w})+\alpha_2^{(1,1)}(z,\bar{w}))^{N_0}\\ &= (df_1(\nabla_z\bar{w})+df_2(\nabla_z\bar{w}))^{N_0}\\ &= 0\ \ (\text{pois }\ \nabla_z\bar{w}=0).\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_u\alpha^{(1,1)}(z,\bar{w}) &= \bar{\nabla}_u\alpha_1^{(1,1)}(z,\bar{w})+\bar{\nabla}_u\alpha_2^{(1,1)}(z,\bar{w})\\ &= \nabla_u^{\perp}\alpha_1^{(1,1)}(z,\bar{w})-A_{\alpha_1^{(1,1)}(z,\bar{w})}u+\nabla_u^{\perp}\alpha_2^{(1,1)}(z,\bar{w})-A_{\alpha_2^{(1,1)}(z,\bar{w})}u\\ &= \nabla_u^{\perp}\alpha_1^{(1,1)}(z,\bar{w})+\nabla_u^{\perp}\alpha_2^{(1,1)}(z,\bar{w})\\ &\quad -\textstyle\sum_i\langle A^1_{\alpha_1^{(1,1)}}(z,\bar{w})u+A^2_{\alpha_2^{(1,1)}}(z,\bar{w})u,df_1e_i-df_2e_i\rangle(df_1e_i-df_2e_i)\\ &= \nabla_u^{\perp}\alpha_1^{(1,1)}(z,\bar{w})+\nabla_u^{\perp}\alpha_2^{(1,1)}(z,\bar{w})\\ &\quad +\textstyle\sum_i(\langle\alpha_1^{(1,1)}(z,\bar{w}),\alpha_1(df_1e_i,u)\rangle-\langle\alpha_2^{(1,1)}(z,\bar{w}),\alpha_2(u,df_2e_i)\rangle)(df_1e_i-df_2e_i)\end{aligned}$$

Como por hipótese $\bar{\nabla}_u\alpha(z,\bar{w})=0$ então cada fator da decomposição acima precisa ser zero, em particular $\nabla_u^{\perp}\alpha_1^{(1,1)}(z,\bar{w})=\nabla_u^{\perp}\alpha_2^{(1,1)}(z,\bar{w})=0$, ou seja f_1 e f_2 são ppmc. ■

Observe que a a condição para que a recíproca seja verdadeira é que

$$\sum_i(\langle\alpha_1^{(1,1)}(z,\bar{w}),\alpha_1(df_1e_i,u)\rangle-\langle\alpha_2^{(1,1)}(z,\bar{w}),\alpha_2(u,df_2e_i)\rangle)(df_1e_i-df_2e_i)=0$$

Em particular, se $f=(f_1,f_1)$ então a recíproca é verdadeira.

3.3 O mergulho standard e sua comparação com o novo modelo

Até aqui trabalhamos com os mergulhos equivariantes $F_k : \mathbb{CP}^n \to V_k$ descritos nas seções anteriores e vimos que dentre eles o único ppmc é o mergulho F_1 (ou seja, o que temos $k = 1$) e vimos também que este caso é o extrinsecamente simétrico pois a segunda forma coincide com $\alpha^{(1,1)}$. No entanto, como vimos no capítulo 1, todo espaço simétrico hermitiano possui um mergulho standard $f : P \to \mathfrak{g}$, que já sabemos ser extrinsecamente simétrico e assim ppmc. Uma pergunta natural é como estes dois modelos se relacionam?

A construção dos mergulhos F_k foi feita via funções $K-$invariantes. Caracterizemos tais funções no toro máximo. Relembre que os mergulhos F_k são dados por:

$$\begin{array}{rccc} F_K : & \mathbb{CP}^n & \to & V_k \\ & [x] & \mapsto & (x\bar{x})^k \end{array}$$

Seja $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Além disso $e_i^T \in (\mathbb{C}^{n+1})^\star = Hom(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})$, $x^{0^T} = ce_0^T + se_1^T : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ ($c = \cos t$ e $s = \sin t$) e $\bar{x^{0^T}} = k \circ x^{0^T}$ para $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$, $0 \leq t \leq \pi$. Temos então:

$$\begin{aligned} F_k(x_0^T)(v) &= (x^{0^T}\bar{x^{0^T}})^k(v) \\ &= (x_0^T(v)\bar{x_0^T}(v))^k \\ &= [(cv_0 + sv_1)(c\bar{v_0} + s\bar{v_1})]^k \\ &= [c^2 \mid v_0 \mid^2 + s^2 \mid v_1 \mid^2 + cs(v_0\bar{v_1} + v_1\bar{v_0})]^k \end{aligned}$$

que é a expressão para as funções invariantes definidas no toro máximo.

Por outro lado, para o $\mathbb{CP}^n$ o mergulho standard é dado por:

$$[x] \mapsto (xx^*)$$

A algebra de Lie de U_{n+2} consiste das matrizes hermitianas vezes i, e $x \in \mathbb{C}^{n+2}$ é um vetor (uma coluna), daqui xx^* é uma matriz hermitiana. Observe que agora estamos trabalhando em $\mathbb{C}^{n+1}$ e não $(\mathbb{C}^{n+1})^*$.

Portanto, se x^0 é um vetor fixo então $x^0 x^{0^*} \in H(\mathbb{C}^n)$ que é o conjunto das matrizes hermitianas de ordem $n \times n$. Assim,

$$x^0 x^{0^*} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ sc & s^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v_0} & \bar{v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0\bar{v_0} & v_0\bar{v_1} \\ v_1\bar{v_0} & v_1\bar{v_1} \end{pmatrix}$$

As funções invariantes são dadas por

$$\begin{aligned}
\langle x^0 x^{0^*}, vv^* \rangle &= tr(x^0 x^{0^*} vv^*) \\
&= tr \left(\begin{array}{cc|c} c^2 & cs & \multirow{2}{*}{0} \\ sc & s^2 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} v_0\bar{v_0} & v_0\bar{v_1} & \multirow{2}{*}{$\star$} \\ v_1\bar{v_0} & v_1\bar{v_1} & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\star} & \star \end{array} \right) \\
&= tr \left(\begin{array}{cc|c} c^2 v_0\bar{v_0} + csv_1\bar{v_0} & \star & \multirow{2}{*}{$\star$} \\ \star & csv_0\bar{v_1} + s^2 v_1\bar{v_1} & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array} \right) \\
&= c^2 \mid v_0 \mid^2 + s^2 \mid v_1 \mid^2 + cs(v_0\bar{v_1} + v_1\bar{v_0})
\end{aligned}$$

É interessante notar que as funções $K-$ invariantes nos dois modelos coincidem quando $k = 1$ (que já vimos ser o único caso ppmc), neste sentido o novo modelo apresentado (mergulhando em V_k) são generalizações do standard.

Capítulo 4

As subvariedades complexas do $\mathbb{CP}^n$

No capítulo anterior caracterizamos os mergulhos equivariantes de $\mathbb{P} = \mathbb{CP}^n$ em V_k e vimos que o único ppmc é o extrinsicamente simétrico, ou seja quando $k = 1$. Neste capítulo trataremos da seguinte questão: dada uma subvariedade complexa Q do $\mathbb{CP}^n$, o que podemos dizer do mergulho de Q em V_1? Seria tal mergulho ppmc também?

$$Q \hookrightarrow \mathbb{P} \hookrightarrow V_1$$

Denotaremos por:

γ a segunda forma fundamental de $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{P}$,

α a segunda forma fundamental de $\mathbb{P} \hookrightarrow V_1$ e

β a segunda forma fundamental de $\mathbb{Q} \hookrightarrow V_1$.

Temos então que:

$$0 = (\nabla_Z \alpha)(X,Y) = \nabla_Z^{\perp P} \alpha(X,Y) - \alpha(\nabla_Z^P X, Y) - \alpha(X, \nabla_Z^P Y) \tag{4.1}$$

$$(\nabla_Z \beta^{(1,1)})(X,Y) = \nabla_Z^{\perp Q} \beta^{(1,1)}(X,Y) - \beta^{(1,1)}(\nabla_Z^Q X, Y) - \beta^{(1,1)}(X, \nabla_Z^Q Y) \tag{4.2}$$

Fazendo (4.2) menos (4.1) membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned}(\nabla_Z \beta^{(1,1)})(X,Y) &= \nabla_Z^{\perp Q} \beta^{(1,1)}(X,Y) - \nabla_Z^{\perp P} \alpha(X,Y) - \beta^{(1,1)}(\nabla_Z^Q X, Y) + \alpha(\nabla_Z^P X, Y) \\ &\quad - \beta^{(1,1)}(X, \nabla_Z^Q Y) + \alpha(X, \nabla_Z^P Y)\end{aligned}$$

Observação 4.1 Note que os dois primeiros termos do segundo membro cancelam-se, ou seja, $\nabla_Z^{\perp Q}\beta^{(1,1)}(X,Y) = \nabla_Z^{\perp P}\alpha(X,Y)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\nabla_Z^{\perp Q}\beta^{(1,1)}(X,Y) &= (\nabla_Z^{\perp Q}\beta^{(1,1)}(X,Y))^{NP} + (\nabla_Z^{\perp Q}\beta^{(1,1)}(X,Y))^{TP} \\
&= \nabla_Z^{\perp P}\beta^{(1,1)}(X,Y) + (\nabla_Z^{\perp Q}\beta^{(1,1)}(X,Y))^{TP}
\end{aligned}$$

Mas $(\nabla_Z^{\perp Q}\beta^{(1,1)}(X,Y))^{TP} = 0$, pois se $\xi \in NQ$ (onde NQ é o espaço normal à Q e tangente à P) então

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_Z^{\perp Q}\beta^{(1,1)}(X,Y), \xi\rangle &= -\langle \beta^{(1,1)}(X,Y), \alpha(Z,\xi)\rangle \\
&= -\langle \alpha(X,Y), \alpha(Z,\xi) \\
&= -\langle [X,JY],[Z,J\xi]\rangle \\
&= \langle [Z,[X,JY]], J\xi\rangle \\
&= 4\langle R(X,JY)Z, J\xi\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois o tensor curvatura é invariante em TQ.

Portanto, a expressão para $(\nabla_Z\beta^{(1,1)})(X,Y)$ fica:

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z\beta^{(1,1)})(X,Y) &= -\beta^{(1,1)}(\nabla_Z^Q X,Y) + \alpha(\nabla_Z^P X,Y) - \beta^{(1,1)}(X,\nabla_Z^Q Y) + \alpha(X,\nabla_Z^P Y) \\
&= -\alpha(\nabla_Z^Q X,Y) + \alpha(\nabla_Z^P X,Y) - \alpha(X,\nabla_Z^Q Y) + \alpha(X,\nabla_Z^P Y) \\
&= \alpha(\gamma(Z,X),Y) + \alpha(X,\gamma(Z,Y))
\end{aligned}$$

E assim temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1 *Se uma subvariedade complexa Q de $\mathbb{CP}^n$ é ppmc então ela é totalmente geodésica.*

Demonstração: Claramente temos que se Q é totalmente geodésica, então $(\nabla_Z\beta^{(1,1)})(X,Y) = 0$ pois $\gamma \equiv 0$. Se Q não é totalmente geodésica então existe $X \in TQ$ tal que $\gamma(X,X) \neq 0$ e neste caso $(\nabla_X\beta^{(1,1)})(X,X) = 2\alpha(\gamma(X,X),X) = [\gamma(X,X),JX]$ que é não nulo. ■

Capítulo 5

Os mergulhos equivariantes do espaço das Estruturas Complexas

Neste capítulo estamos interessandos em caracterizar os mergulhos equivariantes do espaço das estruturas complexas $SO(2n)/U(n)$.

Já sabemos que para construir as funções invariantes sobre o grupo de isotropia K, podemos fazê-lo por meio de sua restição ao toro máximo $T \subset P$ por p e que a função sobre T extende-se (unicamente) a uma função $K-$invariante sobre P se e somente se sua restrição é invariante sobre o Grupo de Weyl, que é o subgrupo de K que mantém T invariante.

No caso do espaço das estruturas complexas, um subespaço abeliano maximal de $\mathfrak{p}$ é gerado pelas matrizes

$$(E_{12} - E_{21}) - (E_{n+1,n+2} - E_{n+2,n+1}), (E_{23} - E_{32}) - (E_{n+2,n+3} - E_{n+3,n+2}), \ldots$$

e portanto o toro máximo é $\mathbb{S}_1 \times \ldots \times \mathbb{S}_n$ ($[\frac{n}{2}]$ vezes, onde $[\frac{n}{2}] = \frac{n}{2}$ se n é par e $\frac{n-1}{2}$ se n é ímpar) ([16],pg350) .O grupo de Weyl contém todas as permutações das coordenadas e conjugações das coordenadas $z_j \mapsto \bar{z}_j$ (onde z_j é a coordenada do $j-$ésimo círculo $\mathbb{S}^1, j = 1, \ldots, r$).

Aqui faremos os cálculos para o caso $n = 2$. (O caso geral é análogo).

$$z(t_1) = 2(e_1 cost_1 + iv_1 sent_1) \text{ e } z(t_2) = 2(e_2 cost_2 + iv_2 sent_2)$$

onde $e_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A função mais fácil é $z+\bar{z}+w+\bar{w} = 2Re(z)+2Re(w)$. Como o período das geodésicas é π, precisamos considerar a função:

$$\begin{aligned} 2((Re(z))^2 + (Re(w))^2) &= 2(2(cos^2t_1 - sen^2t_1) + 2(cos^2t_2 - sen^2t_2)) \\ &= 4(cos^2t_1 - (1 - cos^2t_1) + cos^2t_2 - (1 - cos^2t_2)) \\ &= 4(2cos^2t_1 - 1 + 2cos^2t_2 - 1) \\ &= 8(cos^2t_1 + cos^2t_2) - 8 \\ &= 8(x\bar{x} + y\bar{y}) - 8 \end{aligned}$$

Removendo as constantes podemos ver que $x\bar{x} + y\bar{y}$ é a função "mais fácil".

$$F_K : \ [x, y] \ \mapsto \ (x\bar{x} + y\bar{y})^k$$

A primeira derivada em t_1 é:

$k(x\bar{x} + y\bar{y})^{k-1}\delta(x\bar{x} + y + \bar{y}) = k(x\bar{x} + y\bar{y})^{k-1}(v\bar{x} + x\bar{v})$

A segunda derivada em t_1 fica então:

$k(k-1)(x\bar{x} + y\bar{y})^{k-2}(v\bar{x} + x\bar{v})^2 + k(x\bar{x} + y\bar{y})^{k-1}\delta(v\bar{x} + x\bar{v})$

Mas, desde que:

$$\begin{aligned} (v\bar{x} + x\bar{v})^2 &= (v\bar{x} + x\bar{v})(v\bar{x} + x\bar{v}) \\ &= \bar{x}\bar{x}vv + 2x\bar{x}v\bar{v} + xx\bar{v}\bar{v} \end{aligned}$$

e

$$\delta(v\bar{x} + x\bar{v}) = -2(x\bar{x} + v\bar{v})$$

então, a segunda derivada é:

$$k(k-1)(x\bar{x} + y\bar{y})^{k-2}(\bar{x}\bar{x}vv + 2x\bar{x}v\bar{v} + xx\bar{v}\bar{v}) + k(x\bar{x} + y\bar{y})^{k-1}(-2(x\bar{x} + v\bar{v}))$$

Projetando em N^{++} para encontrar $\alpha^{(1,1)}(v, v)$:

$$\alpha^{(1,1)}(v, v) = 2k(k-1)(x\bar{x} + y\bar{y})^{k-2}(x\bar{x}v\bar{v}) + -2k(x\bar{x} + y\bar{y})^{k-1}(v\bar{v})$$

Lembremos também que $(\alpha^{(2,0)} + \alpha^{(0,2)})(v, v)$ é a projeção sobre N^{+-} :

$$(\alpha^{(2,0)} + \alpha^{(0,2)})(v, v) = k(k-1)(x\bar{x} + y\bar{y})^{k-2}(\bar{x}\bar{x}vv + xx\bar{v}\bar{v})$$

que é zero somente no caso $k = 1$. Isto significa que o mergulho é extrinsecamente simétrico somente quando $k = 1$.

Para encontrarmos $\nabla\alpha^{(1,1)}$ precisamos diferenciar $\alpha^{(1,1)}(v,v)$ e projetar sobre N^-. Derivando, obtemos:

$2k(k-1)(k-2)(x\bar{x}+y\bar{y})^{k-3}(v\bar{x}+x\bar{v})x\bar{x}v\bar{v} + 2k(k-1)(x\bar{x}+y\bar{y})^{k-2}((v\bar{x}+x\bar{v})v\bar{v} + x\bar{x}(-x\bar{v}-v\bar{x})) - 2k(k-1)(x\bar{x}+y\bar{y})^{k-2}(v\bar{x}+x\bar{v})v\bar{v} - 2k(x\bar{x}+y\bar{y})^{k-1}(-x\bar{y}-v\bar{x})$

e projetando em N^- :

$$\nabla\alpha^{(1,1)} = 2k(k-1)(k-2)(x\bar{x}+y\bar{y})^{k-3}(v\bar{x}+x\bar{v})x\bar{x}v\bar{v} - 4k(k-1)(x\bar{x}+y\bar{y})^{k-2}(v\bar{x}+x\bar{v})v\bar{v}$$

Que é zero somente se $k = 1$ (caso extrinsecamente simétrico).

A derivação em t_2 é análoga.

Então, como no caso do $\mathbb{CP}^n$, temos:

Teorema 5.1 *Se um mergulho equivariante do espaço $SO(2n)/U(n)$ tem pluri-curvatura média paralela então ele é extrinsicamente simétrico.*

Aproveitamos para observar que se G/K é um espaço simétrico hermitiano qualquer cujo toro máximo é um produto métrico de círculos isométricos $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ e cujo grupo de Weyl contém todas as permutações das coordenadas e conjugações das coordenadas $z_j \mapsto \bar{z}_j$ (onde z_j é a coordenada do $j-$ésimo círculo $\mathbb{S}^1, j = 1, \ldots, r$) e cujas geodésicas têm período π então as funções $K-$invariantes mais fáceis são $(x\bar{x}+y\bar{y}\ldots)^k$ e para $k = 1$ o mergulho definido é extrinsecamente simétrico.

Nestas condições temos então uma demonstração alternativa para o já conhecido Teorema de O. Loos, para o caso em que o espaço simétrico é hermitiano, que diz:

"Se o toro máximo de um espaço simétrico (hermitiano) é um produto métrico de círculos isométricos, então ele é um $\mathbb{R}-$ espaço, mergulhável como um espaço extrinsecamente simétrico."

Capítulo 6

O mergulho $\mathfrak{p}-$projeção

O mergulho a seguir é um novo exemplo de mergulho equivariante para qualquer espaço simétrico hermitiano $P = G/K$. Tal mergulho é órbita de polinômios homogêneos sobre $\mathfrak{g}$ (álgebra de Lie de G), de grau 2 e o espaço receptor é o espaço das formas quadráticas.

O polinômio quadrático f_2 é dado pela $\mathfrak{p}-$projeção $\pi_{\mathfrak{p}}$ (onde $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ é a decomposição de Cartan, que é decomposição em espaços tangente e normal do mergulho usual $P \subset \mathfrak{g}$ no ponto base $\mathfrak{p}$, com $G_p = K$).

$$\begin{array}{rcll} P = G/K & \to & S^2G & \text{(Espaço das formas quadráticas)} \\ p & \mapsto & f_p & \text{onde } f_p(x) = \langle \pi_{\mathfrak{p}} x, x \rangle \end{array}$$

(usando um produto interno $Ad(G)-$ invariante sobre $\mathfrak{g}$). A forma quadrática $_p$ é inteiramente determinada por $\pi_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$. Este é quase o simétrico extrínseco sobre $\mathfrak{g}$; de fato, s_p tem autoespaços $\mathfrak{k}$ (autovalor 1) e $\mathfrak{p}$ (autovalor -1) enquanto $\pi_{\mathfrak{p}}$ tem autovalor 0 sobre $\mathfrak{k}$ e 1 sobre $\mathfrak{p}$. Daqui

$$s_p = I - 2\pi_{\mathfrak{p}}$$

onde I denota a identidade sobre $\mathfrak{g}$. Além disso, $s_p = J_p^2$ e J_p são dados pelo mergulho usual, de forma que podemos obter todas as informações do novo mergulho pelo mergulho usual. Vamos chamar este mergulho de mergulho $\mathfrak{p}-$projeção ou simplesmente **$\mathfrak{p}-$ mergulho**.

Nós temos uma variedade Riemanniana P e um mergulho isométrico $f : P \to V$ (onde o espaço vetorial V no nosso caso, é o espaço das matrizes simétricas sobre $\mathfrak{g}$. Então sua Hessiana Ddf é a segunda forma fundamental, calculada como segue

$$Ddf(v,w) = d_v(df(w)) - df(D_v w)$$

Afirmamos que $df(w) = \frac{1}{2}\tilde{ad}_w$ onde $\tilde{ad}_w = ad_w$ sobre $\mathfrak{p}$ e $-ad_w$ sobre $\mathfrak{k}$.

De fato, $f = \pi_\mathfrak{p}$ e como $J_p^2 = I - 2\pi_p$ então $\partial_w f = \partial_w(-\frac{1}{2}J^2)$. Segue que

$$\begin{array}{lcl} \partial_w f & = & -\frac{1}{2}((\partial_w J)J + J\partial_w J) \\ (\partial_w f)_x & = & \frac{1}{2}([J,w]Jx + J[J,w]x) \\ (\partial_w f)_x & = & \frac{1}{2}([[J,w],[J,x]] + [J,[[J,w],x]]) \end{array}$$

Precisaremos da seguinte observação:

Observação 6.1 Se $a, b \in \mathfrak{g}$ então $J[a,b] = [Ja,b] + [a,Jb]$. Em particular temos que se $a, b \in \mathfrak{p}$ então $[a,b] = [Ja,Jb]$, se $a, b \in \mathfrak{k}$ então $J[a,b] = 0$ e se $a \in \mathfrak{p}$ e $b \in \mathfrak{k}$ então $J[a,b] = [Ja,b]$ (analogamente, se $a \in \mathfrak{k}$ e $b \in \mathfrak{p}$ então $J[a,b] = [a,Jb]$).

Demonstração: De fato,

Pela Identidade de Bianchi temos

$$[J,[a,b]] + [b,[J,a]] + [a,[b,J]] = 0$$
$$[J,[a,b]] - [[J,a],b] - [a,[J,b]] = 0$$

Ou seja, $[J,[a,b]] = [[J,a],b] + [a,[J,b]]$, que é $J[a,b] = [Ja,b] + [a,Jb]$. ■

Voltando ao cálculo de $\partial_w f$, observe que quando $x \in \mathfrak{k}$, $[J,x] = 0$ e assim o primeiro termo é zero. Neste caso, a expressão fica:

$$\begin{array}{lcl} (\partial_w f)_x & = & \frac{1}{2}([J,[[J,w],x]]) \\ & = & \frac{1}{2}[J,[J,[w,x]]] \\ & = & -\frac{1}{2}[w,x] \\ & = & -\frac{1}{2}ad_w x \end{array}$$

Quando $x \in \mathfrak{p}$, temos que $[[J,w],x] \in \mathfrak{k}$ (pois é o colchete de dois elementos de $\mathfrak{p}$) e assim $[J,[[J,w],x]] = 0$, ou seja o segundo termo é zero. Neste caso, a expressão fica:

$$\begin{array}{lcl} (\partial_w f)_x & = & \frac{1}{2}[[J,w],[J,x]] \\ & = & \frac{1}{2}(J[w,[J,x]] - [w,JJx]) \\ & = & \frac{1}{2}[w,x] \\ & = & \frac{1}{2}ad_w x \end{array}$$

Assim $df(w) = \frac{1}{2}\tilde{ad}_w = \frac{1}{2}(ad_w\pi_\mathfrak{p} - ad_w\pi_\mathfrak{k})$ (onde $\pi_\mathfrak{k} = I - \pi_\mathfrak{p}$)

Retomando o cálculo da hessiana, temos

$$\begin{aligned} Ddf(v,w) &= d_v(df(w)) - df(D_v w) \\ &= \partial_v(\tfrac{1}{2}(ad_w\pi_{\mathfrak{p}} - ad_w\pi_{\mathfrak{k}})) - \tfrac{1}{2}\tilde{ad_{D_v w}} \end{aligned}$$

No entanto, observe que $\partial_v ad_w = ad_{\partial_v w}$ e $\partial_v w$ não está em $\mathfrak{p}$, tem parte normal $\alpha_{vw} \in \mathfrak{k}$ de forma que em lugar de $ad_{\partial_v w}$ usaremos sua componente simétrica $ad_{D_v w}$. A hessiana fica então:

$$\begin{aligned} Ddf(v,w) &= \partial_v(\tfrac{1}{2}(ad_w\pi_{\mathfrak{p}} - ad_w\pi_{\mathfrak{k}})) - \tfrac{1}{2}\tilde{ad_{D_v w}} \\ &= \tfrac{1}{2}(ad_{D_v w}(\pi_{\mathfrak{p}} - \pi_{\mathfrak{k}}) + ad_w\partial_v(\pi_{\mathfrak{p}} - \pi_{\mathfrak{k}}) - \tilde{ad_{D_v w}}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\tilde{ad_{D_v w}} + ad_w\partial_v(\pi_{\mathfrak{p}} - \pi_{\mathfrak{k}}) - \tilde{ad_{D_v w}}) \\ &= \tfrac{1}{2}(ad_w\partial_v(\pi_{\mathfrak{p}} - \pi_{\mathfrak{k}})) \\ &= \tfrac{1}{2}(ad_w(\tilde{ad_v} + \tilde{ad_v})) \\ &= ad_w\tilde{ad_v} \end{aligned}$$

Portanto $\beta(v,v) = ad_v\tilde{ad_v} = (ad_v^2, -ad_v^2)$.

Para calcularmos $\beta^{(1,1)}(v,v)$ primeiramente precisamos verficar quem é N^+ e N^{++} :

Para o N^+, lembrando que matrizes agem por conjugação, verifiquemos como $s = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ age:

$$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto as matrizes diagonais são invariantes por s enquanto as antidiagonais [1]são antinvariantes. Segue que N^+ é constituído pelas matrizes diagonais.

Para o N^{++}, verifiquemos quais matrizes diagonais são invariantes por $j = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -JA & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -JAJ & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

[1]Denominamos matrizes antidiagonais as matrizes cujos elementos que não estão na diagonal secundária são necessariamente nulos.

Igualando este resultado a $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ encontramos a condição $JAJ = -A$, que é equivalente a $AJ = JA$. Concluimos que a $(++)-$ parte de algum (A, B) (onde $A \in \mathfrak{p}$ e $B \in \mathfrak{k}$) é $(A^{\mathbb{C}})$ (onde $A^{\mathbb{C}}$ é a parte complexa linear de A).

A parte complexa linear de A é dada por $\frac{1}{2}(A - JAJ)$, como no nosso caso $\beta(v, v) = ad_v \tilde{ad}_v = (ad_v^2, -ad_v^2)$ então $A = ad_v^2$. $A^{\mathbb{C}}$ fica então:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(ad_v^2 - Jad_v^2 J)(x) &= \tfrac{1}{2}([v,[v,x]] - [J,[v,[v,Jx]]]) \\
&= \tfrac{1}{2}([v,[v,x]] + J[v,[Jv,x]]) \\
&= \tfrac{1}{2}([v,[v,x]] + J(-[x,[v,Jv]] - [Jv,[x,v]])) \\
&= \tfrac{1}{2}([v,[v,x]] + J[[v,Jv],x] - [-v,[x,v]]) \\
&= \tfrac{1}{2}J[[v,Jv],x]
\end{aligned}$$

Como $[v, Jv] \in \mathfrak{k}$, $ad_{[Jv,v]}$ é antissimétrica. Segue que

$$\beta^{(1,1)}(v, v) = (0, -ad_v^2) = -ad_v^2 \circ \pi_{\mathfrak{k}}.$$

Para ver se é ppmc devemos calcular $\partial_w(\beta^{(1,1)}(v, v))$:

$$\begin{aligned}
\partial_w(\beta^{(1,1)}(v,v)) &= \partial_w(-ad_v^2 \circ \pi_{\mathfrak{k}}) \\
&= -(\partial_w(ad_v^2) \circ \pi_{\mathfrak{k}} + ad_v^2 \circ \partial_w \pi_{\mathfrak{k}}) \\
&= -(((\partial_w ad_v) ad_v + ad_v \partial_w ad_v)\pi_{\mathfrak{k}} + ad_v^2 \circ \partial_w \pi_{\mathfrak{k}}) \\
&= -(((ad_{D_w v} + ad_{\alpha_{wv}}) ad_v + ad_v(ad_{D_w v} + ad_{\alpha_{wv}}))\pi_{\mathfrak{k}} + ad_v^2 \circ \partial_w \pi_{\mathfrak{k}})
\end{aligned}$$

Em $\mathfrak{p}$, a expressão fica apenas $ad_v^2 \circ \partial_w \pi_{\mathfrak{k}}$, ou seja,

$$(\nabla_w \beta^{(1,1)})(v, v) = ad_v^2 \circ \partial_w \pi_{\mathfrak{k}} = ad_v^2 \tilde{ad}_w$$

que acreditamos que seja não nula e não tangente sempre, no entanto apresentaremos uma demonstração explícita apenas para o caso de posto 1:

Para mostrar que não é tangente precisamos mostrar que $ad_v^2 \tilde{ad}_w \neq ad_u \quad \forall u$.

Suponha que $v \neq \lambda_1 w$, todo plano que contem v tem curvatura diferente de 0 (entao $[v, x] = 0 \leftrightarrow x$ e v sao paralelos) e existe u tal que $ad^2 v \ \tilde{ad} w = ad_u$.

Entao,

$$\begin{aligned}\langle ad_v^2\tilde{ad}_w(x), v\rangle &= \langle [v,[v,[w,x]]], v\rangle\\ &= -\langle [[v,[w,x]], v]v\rangle\\ &= -\langle [v,[w,x]], [v,v]\rangle \text{ (metrica bi-invariante)}\\ &= 0\end{aligned}$$

e $0 = \langle ad_u(x), v\rangle = \langle [u,x], v\rangle = -\langle x, [u,v]\rangle\ \forall x$, portanto $[u,v] = 0$ e assim $u = \lambda v$.

Entao $ad_v^2\tilde{ad}_w(w) = 0$ e $ad_u(w) = 0$, $u = \lambda_2 w$ e $v = \lambda_3 w$, absurdo.

Para mostrar que $ad_v^2\tilde{ad}_w \neq 0$ podemos usar que $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[Z,[X,Y]]$:

$$\begin{aligned}\langle ad^2\tilde{ad}_w(v), [w,v]\rangle &= \langle [v,[v,[w,v]]][w,v]\rangle\\ &= 4\langle R(v,[w,v])v, [w,v]\rangle\end{aligned}$$

A ultima expressao é quase a curvatura seccional, que supomos nao nula.

Podemos concluir que, pelo menos no caso de posto 1, *o* $\mathfrak{p}-$*mergulho não é ppmc.*

Bibliografia

[1] AKIVIS M. A., ROSENFELD B. A., CARTAN É. (1869-1951), *Translations of Mathematical Monographs*, American Mathematical Society, Providence v. 123, 1993.

[2] BERNDT J., CONSOLE S., OLMOS C.: *Submanifolds and Holonomy*, CRC Press 2003.

[3] BOREL A., *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups*, History of Mathematics, American Mathematical Society, Providence, v. 21, 2001.

[4] BURSTALL F. E., ESCHENBURG J-H., FERREIRA M.J., TRIBUZY R.: *Kähler submanifolds with parallel pluri-mean curvature*. Differential Geometry and its applications. 20, 2004, 47-66.

[5] CARTAN É., *Sur la determination d'un systeme orthogonal complet dans un espace de Riemann symetrique clos*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 53 , 1929, 217-252.

[6] CARTAN É., *Sur une classe remarqueble d'espaces de Rieman*. Bull. Soc. Math. France 55, 1927, 114-134.

[7] DAJCZER M., GROMOLL D., *Real Kähler Submanifolds and uniqueness of Gauss map*, J. Differential Geometry. 22, 1985.

[8] ESCHENBURG J-H.: *Gauss Maps and Symmetric Spaces*, 2007.

[9] ESCHENBURG J-H.: *Lectures notes on Symmetric Spaces*, Preprint Augsburg 2000.

[10] ESCHENBURG J-H., HEINTZE E.: *Extrinsic symmetric spaces and orbits of s-representations*. Manuscripta math. 88, 1995, 517-524, Erratum manuscripta math. 92, 1997, 408.

[11] ESCHENBURG J-H., QUAST P., TANAKA M.S.(in press): *Isometries of embedded symmetric spaces*, Augsburg 2012.

[12] ESCHENBURG J-H., QUAST P.: *Pluriharmonic maps into Kähler symmetric spaces and sym's formula*, Mathematische Zeitschrift. Springer 2009.

[13] ESCHENBURG J-H., TRIBUZY R.: *Associated families of pluriharmonic maps and isotropy*, Manuscripta Math. 95, 1998, 295-310.

[14] ESCHENBURG J-H., TRIBUZY R.:*(1,1)-geodesic maps into Grasmann manifolds*, Math. Z. 220, 1995, 337-346.

[15] FERUS, D., *Symmetric submanifolds of Euclidean space, Math.* Ann. 247, 1980, 81-93.

[16] HELGASON S.: *Differencial Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Academic Press, 1978.

[17] KATSUDA A., *A pinching problem for locally homogeneous spaces.* J. Math. Soc. Japan 41, 1989, 57-74.

[18] KOBAYASHI S., NAGANO T.: *On filtered Lie algebras and geometric structures*, I, J. Math. Mech. 13, 1964, 875-907.

[19] LOOS O., *Symmetric spaces I: general theory*, W. A. Benjamin, New York, 1969.

[20] LOOS O., *Symmetric spaces II: compact spaces and classification*, W. A. Benjamin, New York 1969.

[21] MIN-OO M., RUCH E. A.: *Comparison theorems for compact symmetric spaces.* Ann. sc. Éc. Norm. Sup. (4) 12, 1979, 335-353.

[22] QUAST, P.: *A pinching theorem for extrinsically symmetric submanifolds of Euclidean space.* Manuscr. Math. 115, 2004, 427-536.

[23] RUDIN W.: *Functional Analysis*,MacGraw-Hill, 1973, p.115.

[24] SAN MARTIN L.A.B.: *Grupos de Lie*, 2014.

[25] YAU S.T., *Submanifolds with constant mean curvature*, I, Amer. J. Math. 96, 1974, 346-366.

[26] WALLACH, N.R., *Minimal immersions of symmetric spaces into spheres*, W.M.Boothly and G.L. Weiss (ed.): “Symmetric Spaces”, Dekker, New York, 1972, 1-39.

[27] ZILLER, W., *Lie Groups. Representation Theory and Symmetric Spaces.* University of Pennsylvania, 2010.