Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Sólitons de Ricci com Estrutura de Produto Deformado

Antonio Airton Freitas Filho

Manaus-AM
Julho/2017

Sólitons de Ricci com Estrutura de Produto Deformado

por

Antonio Airton Freitas Filho

sob orientação do

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Manaus-AM
Julho/2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

F866s

Freitas Filho, Antonio Airton

Sólitons de Ricci com Estrutura de Produto Deformado / Antonio Airton Freitas Filho. 2017

60 f.: 31 cm.

Orientador: José Nazareno Vieira Gomes

Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Sóliton de Ricci. 2. Produto deformado. 3. Sóliton de Ricci modificado. 4. Fluxo Ricci-Harmônico modificado. I. Gomes, José Nazareno Vieira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Antonio Airton Freitas Filho

Sólitons de Ricci com Estrutura de Produto Deformado

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Manaus, 17 de julho de 2017.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy (Membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo (Membro Externo)
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

....

Prof. Dr. Ronaldo Freire de Lima (Membro Externo)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

....

Prof. Dr. Flávio França Cruz (Membro Externo)
Universidade Regional do Cariri - URCA

Esta tese é dedicada aos meus pais Antonio Airton Freitas e Maria José Flor Freitas, e ao meu irmão Marcos Bruno Flor Freitas.

Agradecimentos

À minha família pelo carinho, apoio e confiança. À minha mãe Maria José, pelo amor incondicional. Ao meu pai Antonio Airton pela camaradagem. Ao meu único irmão Marcos Bruno pelo companheirismo.

À Juliana do Nascimento (e família), pessoa que admiro muito e que tive o privilégio de conhecer durante o doutorado.

Aos amigos do INPA: Alexandre, David, Ernesto, Janaina, Joelma, Juciane, Vagner e tantos outros que tive a oportunidade de conhecer em Manaus.

Ao professor José Nazareno, não somente pela orientação deste trabalho, mas também por sua amizade e ensinamento além da Matemática.

Ao professor Dragomir Mitkov Tsonev pelas constantes discussões, encorajamentos e sugestões que melhoraram a escrita do meu primeiro artigo publicado.

Agradeço aos professores Damião Júnio Gonçalves Araújo, Flávio França Cruz, Renato de Azevedo Tribuzy e Ronaldo Freire de Lima por terem aceitado compor a banca e pelas sugestões que melhoraram o conteúdo deste trabalho.

Ao professor Ernani Ribeiro da UFC pela orientação no Mestrado e por me fazer ciente da seleção de doutorado na UFAM.

Aos meus colegas de Doutorado: Abraão Mendes, Adrian Vinícius, Andrea Mota, Clebes Brandão, Elzimar Rufino, Francisco Feitosa, João Filipe, Kelly Karina, Kelly Marães, Manoel Vieira, Marcos Aurélio e Max Ferreira; e Mestrado: Ayana, Cícero, Cristiano, Danilo, Edfram, Fernando, Gabriel, João Batista, João Raimundo, Joerlen, Matheus, Wanessa e outros mestrandos que me fugiram o nome nesse momento. Com os quais foi proveitoso discutir Matemática.

Agradeço aos professores da UFAM: Carlos Wagner, Cícero Mota, Dimas Martinez, Domingos Anselmo, Flávia Morgana, Gérman Alonso, Inês Padilha, Juliana Miranda, Michel Pinho, Raul Mesquita, Rosilene Barroso, Roberto Cristóvão, Roberto Prata, Thiago Rodrigo e a todos os outros professores do Departamento que contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico.

Aos secretários Arístocles, Elclimar e Leandra pela competência e prestatividade.

À FAPEAM pelo apoio financeiro.

“Não tentes ser bem sucedido, tenta antes ser um homem de valor.”

Albert Einstein.

Resumo

Nesta tese mostramos que um sóliton de Ricci gradiente com estrutura de produto deformado expansivo ou estacionário, cuja função deformadora atinge um máximo e um mínimo, deve ser um produto Riemanniano usual. Encontramos uma condição necessária e suficiente para construir sólitons de Ricci gradientes com estrutura de produto deformado. Como aplicação, apresentamos uma nova classe de sólitons de Ricci gradientes com estrutura de produto deformado expansivo, tendo como fibra uma variedade de Einstein de curvatura escalar não-positiva. Também discutimos algumas obstruções para esta construção, especialmente quando a base do produto deformado é compacta. Em seguida introduzimos os sólitons de Ricci modificados como uma classe de métricas tipo-Einstein que contém os sólitons de Ricci e as métricas m-quasi-Einstein. Por um lado, tal classe está relacionada à construção de sólitons de Ricci realizados como produtos deformados, por outro lado, um sóliton de Ricci modificado compõe uma solução auto-similar do fluxo Ricci-Harmônico modificado, resultando em uma nova caracterização para as métricas m-quasi-Einstein. Além disso, definimos os quase sólitons de Ricci modificados. Em particular, na direção dos teoremas de Lichnerowicz e Obata, provamos que, na classe de variedades compactas com curvatura escalar constante, a esfera euclidiana tem estrutura bem determinada de quase sóliton de Ricci gradiente modificado, sendo rígida, desde que se tenha uma condição geométrica específica. Também encontramos uma condição de existência para a construção de quase sólitons de Ricci com estrutura de produto deformado e, finalmente, exibimos um exemplo de sóliton de Ricci não-gradiente com estrutura de produto deformado expansivo.

Palavras-chave: Sóliton de Ricci; Produto deformado; Sóliton de Ricci modificado; Fluxo Ricci-Harmônico modificado.

Abstract

In this work we show that either expanding or steady gradient Ricci soliton warped product, whose warping function reaches both maximum and minimum, must be a Riemannian product. Firstly, we present a necessary and sufficient condition for constructing a gradient Ricci soliton warped product. As an application, we give a new class of expanding gradient Ricci soliton warped products having as fiber an Einstein manifold with non-positive scalar curvature. Secondly, we discuss some restrictions to this latter construction, and especially in the case when the base of the warped product is compact. Thirdly, we introduce the modified Ricci solitons as a new class of Einstein type metrics that contains both Ricci solitons and m-quasi-Einstein metrics. This class is closely related to the construction of the Ricci solitons that are realised as warped products. On the other hand, a modified Ricci soliton appears as part of a self-similar solution of the modified Harmonic-Ricci flow which results in a new characterisation of m-quasi-Einstein metrics. Finally, we study a modified almost Ricci soliton. In the spirit of Lichnerowicz and Obata theorems, we prove that in the class of compact Riemannian manifolds with constant scalar curvature the standard sphere with a structure of gradient modified almost Ricci soliton is rigid under some specific geometric condition. An existence condition for constructing an almost Ricci soliton warped product as well as an example of expanding non-gradient Ricci soliton warped product are presented.

Keywords: Ricci soliton; Warped product; Modified Ricci soliton; Modified Harmonic-Ricci flow.

Conteúdo

Introdução

Esta tese consiste de três partes interligadas. A primeira trata sobre construção de sólitons de Ricci gradientes com estrutura de produto deformado. A segunda é um estudo sobre quase sólitons e sólitons de Ricci modificados. A terceira trata da construção de quase sólitons de Ricci, não necessariamente gradientes, com estrutura de produto deformado.

O conceito de produto deformado foi introduzido por Bishop e O'Neill [9]. Como aplicação, eles obtiveram novos exemplos de variedades Riemannianas completas com curvatura seccional negativa. Dadas as variedades Riemannianas (B, g_B), (F, g_F) e uma função real suave positiva f em B, Bishop e O'Neill definiram sobre a variedade produto $B \times F$ a *métrica deformada*

$$g = \pi^* g_B + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_F, \tag{1}$$

em que π e σ são as projeções canônicas sobre B e F, respectivamente. O *produto deformado* $B \times_f F$ é a variedade produto $B \times F$ com a métrica em (1), em que B é a *base*, F é a *fibra* e f é a *função deformadora*. Quando f é constante, recaímos num produto Riemanniano usual.

Produtos deformados se destacam como uma rica classe em geometria Riemanniana, em especial, eles são úteis no estudo de *variedades de Einstein*, isto é, uma variedade Riemanniana (M, g) com tensor de Ricci satisfazendo a equação $Ric = Cg$, para alguma função suave C em M. Estas duas últimas definições aparecem naturalmente no contexto de superfícies regulares. Por exemplo, as superfícies de revolução são produtos deformados. Enquanto que, qualquer superfície é uma variedade de Einstein. Como consequência do Teorema de Schur, em uma variedade de Einstein de dimensão $n \geq 3$, a função C é constante. Com estes conceitos em mente, salientamos que não existe produto deformado Einstein compacto com função deformadora não-constante, se a curvatura escalar é não-positiva, conforme foi mostrado por Kim-Kim [34].

Uma condição necessária para um produto deformado ser uma variedade de Einstein é a sua base ser uma variedade m–quasi-Einstein, isto é, uma variedade Riemanniana (B, g_B) cujo tensor Bakry-Émery Ricci modificado $Ric + \nabla^2 h - \frac{1}{m} dh \otimes dh$ é um múltiplo constante do tensor métrico g_B, em que $\nabla^2 h$ denota o hessiano de uma função suave h em B (ver [7, 34]). Apontamos que exemplos de variedades m–quasi-Einstein foram obtidos em Besse [7], o que possibilitou construir exemplos de variedades de Einstein com estrutura de produto deformado. Nesta direção, Case-Shu-Wei [16] fizeram um bom estudo das propriedades das variedades m–quasi-Einstein e provaram vários resultados de rigidez. Mais recentemente, Barros-Batista-Ribeiro [4] obtiveram algumas estimativas de volume para produtos deformados Einstein, similares aos clássicos resultados de Calabi [14] e Yau [48], referentes a variedades Riemannianas completas com curvatura de Ricci não-negativa. Em [4] e [34], foram adotadas a abordagem utilizada nas variedades m–quasi-Einstein. Em particular, nesses dois últimos artigos, os autores apresentaram obstruções para a existência de tal classe de variedades. Neste ínterim, cabe mencionar o artigo de He-Petersen-Wylie [31] sobre produtos deformados Einstein que, além de considerarem bases com bordo não-vazio, eles estenderam alguns resultados dos artigos de [16] e [34].

Uma generalização natural das variedades de Einstein são os sólitons de Ricci. Este conceito foi introduzido por Hamilton [28] no início dos anos 80. Um *sóliton de Ricci* é uma variedade diferenciável M munida de uma métrica Riemanniana completa g, um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante λ satisfazendo a equação

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g, \tag{2}$$

em que $\mathscr{L}_X g$ denota a derivada de Lie de g com respeito a X e Ric o tensor de Ricci calculado na métrica g. Um sóliton de Ricci é *expansivo*, *estacionário* ou *contrátil* se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$, respectivamente. Quando X é o gradiente de alguma função suave ψ em M, escrevemos $(M, g, \nabla\psi, \lambda)$ para indicar um sóliton de Ricci gradiente com função potencial ψ. Neste caso, a equação (2) pode ser reescrita como segue

$$Ric + \nabla^2\psi = \lambda g. \tag{3}$$

Para mais detalhes sobre sólitons de Ricci, recomendamos [13, 28].

É bem conhecido desde os anos 90 que um sóliton de Ricci gradiente estacionário ou expansivo compacto é necessariamente uma variedade de Einstein [29, 32]. Petersen-Wylie [44] usaram um teorema devido a Brinkmann [12] para mostrar que qualquer sóliton de Ricci gradiente em uma superfície é um produto deformado. Outro fato bem conhecido é o exemplo obtido por Robert Bryant (ver [11, 19]), ele construiu um sóliton de Ricci estacionário sobre o produto deformado $(0, +\infty) \times_f \mathbb{S}^m$, $m > 1$, em que f é uma função deformadora radial. Bishop e O'Neill provaram que um produto deformado é completo para toda função deformadora se, e somente se, a base e a fibra são ambas completas. Em detrimento disso, a dificuldade de Robert Bryant foi provar a completude do seu exemplo, este por sua vez, pode ser visto como um protótipo para a construção que estamos propondo nesta tese. Em prol do resultado de Bishop e O'Neill, vamos considerar bases e fibras completas, assim nossa preocupação será com as soluções das EDPs que surgem da nossa hipótese de construção, conforme equações (4) e (5).

Deve-se enfatizar que existem várias obstruções para a existência de métricas tipo Einstein, algumas delas podem ser vistas em [4, 6, 7, 15, 34]. Instigados por isso, investigamos obstruções para a construção de sólitons de Ricci que são realizados como produtos deformados. Este é o conteúdo dos Teoremas 1.1 e 1.2.

Teorema 1.1. *Sejam $M = B^n \times_f F^m$ um produto deformado e φ uma função suave sobre B tal que $(B^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ seja um sóliton de Ricci gradiente expansivo ou estacionário. Suponha que sua fibra F^m tem dimensão $m \geq 2$ e que a função deformadora f atinge um máximo e um mínimo. Então M deve ser um produto Riemanniano.*

Este resultado é motivado pelas ideias de [34] que trata de produtos deformados Einstein compactos com curvatura escalar não-positiva. Ressaltamos que o Teorema 1.1 é uma generalização natural do caso Einstein para o caso sóliton de Ricci com a compensação da compacidade tomada em [34]. Além disso, um interessante fato surge da nossa construção, a base de um sóliton de Ricci com estrutura de produto deformado satisfaz a equação (4) adiante. Esta equação é uma generalização das métricas de Einstein, que contém as métricas m–quasi-Einstein, não só pela equação de estrutura, mas também num sentido bem geral que ficará claro no Capítulo 2.

Nosso próximo resultado estabelece um critério de compacidade para um sóliton de Ricci gradiente contrátil com estrutura de produto deformado.

Teorema 1.2. *Sejam $B^n \times_f F^m$ um produto deformado e φ uma função suave em B de modo que $(B^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ seja um sóliton de Ricci gradiente contrátil com base compacta e fibra com dimensão $m \geq 2$. Então $B^n \times F^m$ deve ser uma variedade compacta.*

Em seguida obtemos uma condição necessária e suficiente para a construção de um sóliton de Ricci gradiente com estrutura de produto deformado. Por esta razão, consideramos uma variedade Riemanniana (B^n, g_B) admitindo funções suaves $f > 0$ e φ satisfazendo

$$Ric + \nabla^2\varphi = \lambda g_B + \frac{m}{f}\nabla^2 f \tag{4}$$

e

$$2\lambda\varphi - |\nabla\varphi|^2 + \Delta\varphi + \frac{m}{f}\nabla\varphi(f) = c \tag{5}$$

para algumas constantes $m, c, \lambda \in \mathbb{R}$, com $m \neq 0$.

Provamos que f e φ satisfazem a equação

$$\lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f) = \mu \tag{6}$$

para alguma constante $\mu \in \mathbb{R}$, cf. Proposição 1.3.

Tomando $m > 1$ um número inteiro e usando as fórmulas de Bishop e O'Neill, construímos um sóliton de Ricci gradiente com estrutura de produto deformado como segue:

Teorema 1.3. *Consideremos uma variedade Riemanniana (B^n, g_B) admitindo funções suaves $f > 0$ e φ satisfazendo (4) e (5). Assim, podemos tomar μ dada por (6) e escolher uma variedade F^m com ${}^F Ric = \mu g_F$. Então $(B^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente.*

Neste contexto, devemos destacar o fato indispensável da métrica g_F ser Einstein, cf. Proposição 1.2. Além disso, $\mu = \mu(\varphi, f, \lambda, m)$ é constante quando a dimensão da fibra é $m \geq 2$, cf. Proposição 1.3.

Relacionados ao Teorema 1.3, destacamos o seguinte caso particular: em [46] foram construídos sólitons de Ricci gradientes com estrutura de produto deformado estacionário, com base conforme a um pseudo espaço euclidiano de dimensão $n \geq 3$ invariante sob a ação de um grupo de translação de dimensão $n-1$. Contudo, como consequência da teoria de EDO, observamos que a técnica em [46] aplica-se apenas à construção de sólitons de Ricci gradientes estacionários.

Como aplicação do Teorema 1.3, construímos uma nova classe de sólitons de Ricci gradientes com estrutura de produto deformado expansivos cuja fibra é uma variedade de Einstein com curvatura escalar constante não-positiva. Para isso, consideramos um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com coordenadas $x = (y, x_n)$, em que $y = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ e $n > 1$.

Além disso, resolvemos as EDPs em (4) e (5) encontrando as funções

$$f(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{-\lambda}{m}}x_n} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{m}}x_n} > 0 \quad \text{e} \quad \varphi(x) = \frac{\lambda}{2}|y|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + b, \tag{7}$$

para qualquer $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b \in \mathbb{R}$, e para todas constantes não-negativas c_1 e c_2 que tornam $f > 0$.

Com estas notações afirmamos nosso próximo resultado:

Corolário 1.3*. Seja (F^m, g_F) uma variedade Riemanniana completa com tensor de Ricci ${}^F Ric = \mu g_F$ e $m > 1$. Para f e φ dadas pelas equações em* (7)*, $(\mathbb{R}^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ tem uma estrutura de sóliton de Ricci gradiente expansivo com $\mu \leq 0$.*

Neste momento, cabe ressaltar os relevantes resultados obtidos em Ivey [33] e Dancer-Wang [20]. Estes trabalhos tratam da construção de sólitons de Ricci gradientes estacionários (não compactos), os quais foram obtidos por construções de produtos deformados duplos e múltiplos. Estas construções generalizam a construção do sóliton de Bryant. Também Gastel e Kronz [26] construíram uma família a dois parâmetros (produto deformado duplo) de sólitons de Ricci gradientes expansivos em $\mathbb{R}^n \times F^m$, em que a fibra F^m $(m \geq 2)$ é uma variedade de Einstein com curvatura escalar positiva.

Agora passaremos a falar da segunda parte. Consideramos uma classe mais geral de métricas Riemannianas, a saber:

Definição 2.1*. Um sóliton de Ricci modificado é uma variedade Riemanniana completa (M, g) munida com um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, uma 1–forma $\omega \in \mathfrak{X}(M)^*$ e dois números reais λ e $\theta > 0$ satisfazendo a equação*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g + \theta \omega \otimes \omega. \tag{8}$$

Nos referimos a (8) como *equação fundamental* e a $(M, g, X, \lambda, \omega, \theta)$ como um *sóliton de Ricci modificado.* A condição $\theta > 0$ é meramente motivacional, não havendo impedimento em considerar $\theta \leq 0$. Quando $X = \nabla\eta$ e $\omega = d\xi$ para algumas funções suaves η, ξ em M, então $(M, g, \nabla\eta, \lambda, d\xi, \theta)$ é um sóliton de Ricci gradiente modificado. Neste caso, a equação fundamental torna-se

$$Ric + \nabla^2\eta = \lambda g + \theta d\xi \otimes d\xi. \tag{9}$$

Os sólitons de Ricci modificados apareceram inicialmente em [17] sob a nomenclatura de *θ–sólitons de Ricci*, com o objetivo de mostrar a não-existência de hipersuperfícies reais em variedades complexas de curvaturas seccionais constantes não-nulas com estrutura de sóliton de Ricci, cujo campo potencial seja um campo de Reeb.

No desenvolver deste trabalho veremos que uma situação interessante ocorre quando permitimos que λ seja uma função suave não-constante em M. Neste caso, dizemos que $(M, g, X, \lambda, \omega, \theta)$ é um *quase sóliton de Ricci modificado.* No Capítulo 2 apresentamos um exemplo de estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente modificado sobre a esfera euclidiana, a qual provamos ser rígida, conforme escreveremos agora:

Proposição 2.1. *As únicas estruturas não-triviais de quase sólitons de Ricci gradientes modificados $(\mathbb{S}^n, g, \nabla\eta, \lambda, d\xi, \theta)$, com $\nabla\xi$ conforme, são descritas pelas funções suaves*

$$\xi = c_1 - \frac{h_v}{n}, \quad \eta = \frac{\theta}{2}\Big(c_1 - \frac{h_v}{n}\Big)^2 - \frac{h_w}{n} + c_2, \quad e \quad \lambda = \theta\Big(c_1 - \frac{h_v}{n}\Big)\frac{h_v}{n} + \frac{h_w}{n} + n - 1,$$

para algumas constantes c_1, c_2 e funções alturas h_v, h_w em $\mathbb{S}^n$.

Surge então uma questão natural: *Em que classe de variedades o exemplo da Proposição 2.1 é rígido?*

Buscamos uma resposta para essa questão na classe das variedades Riemannianas compactas com curvatura escalar constante e com uma condição geométrica mais fraca que a de conformidade considerada na Proposição 2.1. Este é o conteúdo do nosso próximo resultado, que está no espírito dos teoremas de Lichnerowicz (estimativa de autovalores) e Obata (rigidez da esfera).

Teorema 2.1. *Se $(M^n, g, X, \lambda, d\xi, \theta)$, $n \geq 2$, é um quase sóliton de Ricci modificado compacto com curvatura escalar constante S, e ξ uma autofunção do Laplaciano, então seu autovalor correspondente α satisfaz*

$$\alpha \geq \frac{S}{n-1}.$$

Ocorrendo a igualdade somente se (M^n, g) é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$, em que $r = \sqrt{n(n-1)/S}$. Além disso, a menos de homotetia e constantes, a estrutura é gradiente com funções associadas dadas pela Proposição 2.1.

Na Seção 2.3 do Capítulo 2 introduzimos o fluxo Ricci-Harmônico modificado, alterando o fluxo Ricci-Harmônico de Müller [39]. Neste contexto, provamos que os sólitons de Ricci modificados generalizam os sólitons de Ricci não somente através da equação de estrutura, mas também pelo fato deles se relacionarem com as soluções auto-similares do fluxo Ricci-Harmônico modificado o qual generaliza o fluxo de Ricci. Em particular, as métricas m–quasi-Einstein ganham uma nova caracterização.

Mostramos, além da existência e unicidade em tempo curto do fluxo, para o caso em que as variedades envolvidas são compactas, que os sólitons Ricci-Harmônicos modificados têm como parte indispensável os sólitons de Ricci modificados. A técnica consiste em recorrer ao "Truque de DeTurck", acrescentando termos de modo a corrigir a falta de parabolicidade estrita do fluxo Ricci-Harmônico modificado.

Finalmente, na terceira parte desta tese, generalizamos a construção abordada na primeira parte. Mais precisamente, estudamos os quase sólitons de Ricci não necessariamente gradiente com estrutura de produto deformado. Inspirado na estrutura de sóliton de Ricci não-gradiente sobre o grupo de Lie solúvel Sol^3, encontrada por Baird e Danielo [2], nós obtivemos um exemplo de sóliton de Ricci não-gradiente com estrutura de produto deformado cuja base é o espaço hiperbólico em seu modelo de produto deformado.

Capítulo 1

Construção de sólitons de Ricci gradientes com estrutura de produto deformado

1.1 Preliminares

Nesta seção seguiremos a notação e terminologia de Bishop e O'Neill [9]. Nosso objetivo é relacionar a geometria de $M = B \times F$ aos seus fatores. A noção apropriada é a de *levantamento*. Consideramos o levantamento $\tilde{f} = f \circ \pi$ de uma função suave a valores reais f em B a M, assim como o levantamento $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(B)$ a M, cujo valor em cada $(p, q) \in B \times F$ é o único vetor $\tilde{X}_{(p,q)} \in T_{(p,q)}M$, tal que $d\pi(\tilde{X}) = X$. Assim o levantamento de X a M é o *único* elemento de $\mathfrak{X}(M)$ que está π-relacionado a X e σ-relacionado ao campo de vetores nulo em F. O conjunto de todos os levantamentos horizontais $\tilde{X}$ é denotado por $\mathfrak{L}(B)$. Funções e campos de vetores em F são levantadas a M do mesmo modo, mas agora usando a projeção σ. O conjunto de todos os levantamentos verticais $\tilde{V}$ é denotado por $\mathfrak{L}(F)$. De agora em diante, se $X \in \mathfrak{X}(B)$, quando não houver perigo de confusão, usaremos a mesma notação para seu levantamento horizontal $X \in \mathfrak{L}(B)$; semelhantemente para o levantamento vertical $V \in \mathfrak{L}(F)$ de $V \in \mathfrak{X}(F)$.

Lembramos que o produto deformado $M = B^n \times_f F^m$ de duas variedades Riemannianas é simplesmente o produto Riemanniano delas munido do tensor métrico (1). A variedade B é chamada a *base* de M e F a *fibra*. Vetores tangentes às folhas $B \times \{q\}$ são ditos *horizontais* e vetores tangentes às fibras $\{p\} \times F$ são ditos *verticais*. Denotamos por $\mathcal{H}$ a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}M$ sobre seu subespaço horizontal $T_{(p,q)}(B \times q)$, e por $\mathcal{V}$ a projeção sobre seu subespaço vertical $T_{(p,q)}(p \times F)$. O gradiente do levantamento $\tilde{h} = h \circ \pi$ de uma função suave h em B a M é o levantamento do gradiente de h. Desde que não haja perigo de confusão, denotaremos o gradiente, o Hessiano e o Laplaciano de $\tilde{h}$ calculados na métrica de M respectivamente por $\nabla\tilde{h}$, $\nabla^2\tilde{h}$ e $\Delta\tilde{h}$, em que $\Delta = tr(\nabla^2)$, e por D, ∇ e ${}^F\nabla$ as conexões de Levi-Civita de M, B e F, respectivamente.

Lema 1.1 ([9]) *Em $M = B^n \times_f F^m$, se $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(F)$, então*

(i) $D_Y Z$ *é o levantamento de* $\nabla_Y Z$ *em* B,

(ii) $D_Y V = D_V Y = \frac{Y(f)}{f} V$,

(iii) $\mathcal{H}(D_V W) = -\frac{g(V,W)}{f}\nabla f$,

(iv) $\mathcal{V}(D_V W) \in \mathfrak{L}(F)$ *é o levantamento de* ${}^F\nabla_V W$ *em* F.

Em particular,

$$\Delta\tilde{h} = \Delta h + \frac{m}{f}\nabla h(f), \tag{1.1}$$

para toda função suave h em B.

No que se segue, escreveremos Ric para o tensor de Ricci do produto deformado, ${}^B Ric$ para o levantamento do tensor de Ricci de B e ${}^F Ric$ para o levantamento do tensor de Ricci de F. Estes levantamentos são feitos via pullback por π ou σ dos tensores associados. Além disso, denotamos por H^h o levantamento do Hessiano $\nabla^2 h$ de uma função suave h em B para M. Ressaltamos que, para todos $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$, temos $\nabla^2\tilde{h}(Y,Z) = H^h(Y,Z)$.

Lema 1.2 ([9]) *Sejam $M = B^n \times_f F^m$, $m > 1$, $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(F)$. Então*

(i) $Ric(Y,Z) = {}^B Ric(Y,Z) - \frac{m}{f} H^f(Y,Z)$,

(ii) $Ric(Y,V) = 0$,

(iii) $Ric(V,W) = {}^F Ric(V,W) - \left(\frac{\Delta f}{f} + \frac{|\nabla f|^2}{f^2}(m-1)\right) g(V,W)$.

Agora, dado um sóliton de Ricci gradiente $(M^k, g, \nabla\psi, \lambda)$, tomamos o traço da equação (3) e obtemos

$$R + \Delta\psi = k\lambda,$$

em que R denota a curvatura escalar de M. Além disso, Hamilton [29] provou que

$$2\lambda\psi - |\nabla\psi|^2 + \Delta\psi = c \tag{1.2}$$

para alguma constante c.

1.2 Condições de existência e obstruções para a construção

Nesta seção daremos condições necessárias e suficientes para a construção de sólitons de Ricci gradientes realizados como produtos deformados. Por simplicidade escreveremos sóliton de Ricci PW para indicar um sóliton de Ricci com estrutura de produto deformado e, para o caso gradiente, sóliton de Ricci gradiente PW. Com este objetivo, estudaremos uma variedade Riemanniana (B^n, g_B) como possível base de um sóliton de Ricci gradiente PW $(M = B^n \times_f F^m, \nabla\psi, \lambda)$. Desse modo, é natural supormos que a função potencial ψ seja o levantamento de uma função suave φ definida em B^n, isto é, a base carregará informações cruciais de M, como no caso de um produto deformado Einstein, assim como todos os exemplos conhecidos na literatura. Com estas considerações em mente, estabelerecemos restrições sobre as funções que parametrizam um sóliton de Ricci gradiente PW.

Nossa primeira proposição é a equação de Hamilton (1.2) para um sóliton de Ricci gradiente PW, quando a função potencial é o levantamento de uma função da base.

Proposição 1.1 *Sejam $B^n \times_f F^m$ um produto deformado e φ uma função suave em B de modo que $(B^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente. Então temos*

$$2\lambda\varphi - |\nabla\varphi|^2 + \Delta\varphi + \frac{m}{f}\nabla\varphi(f) = c \tag{1.3}$$

para alguma constante c.

Demonstração: De (1.2) temos

$$2\lambda\tilde{\varphi} - |\nabla\tilde{\varphi}|^2 + \Delta\tilde{\varphi} = c \tag{1.4}$$

para alguma constante c. Por outro lado, como

$$\nabla\tilde{\varphi} = \widetilde{\nabla\varphi} \quad \text{e} \quad \Delta\tilde{\varphi} = \Delta\varphi + \frac{m}{f}\nabla\varphi(f) \tag{1.5}$$

obtemos, substituindo (1.5) em (1.4), imediatamente a equação (1.3). □

A próxima proposição evidencia duas equações relevantes de um sóliton de Ricci gradiente PW, uma para a base e a outra para a fibra.

Proposição 1.2 *Sejam $B^n \times_f F^m$ um produto deformado e φ uma função suave em B de modo que $(B^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente, com $m > 1$. Então temos*

$$^{B}Ric + H^{\varphi} = \lambda g_B + \frac{m}{f}H^f \tag{1.6}$$

e $^{F}Ric = \mu g_F$, com μ satisfazendo

$$\mu = \lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f). \tag{1.7}$$

Demonstração: Primeiro observamos que pelo Lema 1.2 (i) para todos $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ temos

$$Ric(Y,Z) = {}^{B}Ric(Y,Z) - \frac{m}{f}H^f(Y,Z).$$

Usando a equação fundamental (3) e o fato que $\nabla^2\tilde{\varphi}(Y,Z) = H^{\varphi}(Y,Z)$ deduzimos que

$$^{B}Ric(Y,Z) = \lambda g_B(Y,Z) - H^{\varphi}(Y,Z) + \frac{m}{f}H^f(Y,Z).$$

Isto prova a primeira afirmação da proposição. De modo semelhante, dados $V, W \in \mathfrak{L}(F)$ temos

$$\begin{aligned} ^{F}Ric(V,W) &= \lambda g(V,W) - \nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) + \Big(\frac{\Delta f}{f} + (m-1)\frac{|\nabla f|^2}{f^2}\Big)g(V,W) \\ &= \lambda f^2 g_F(V,W) - \nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) + f\Big(\Delta f + (m-1)\frac{|\nabla f|^2}{f}\Big)g_F(V,W). \end{aligned}$$

Uma vez que $\nabla\tilde{\varphi} \in \mathfrak{L}(B)$ temos

$$\nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) = g(D_V\nabla\tilde{\varphi}, W) = g\Big(\frac{\nabla\varphi(f)}{f}V, W\Big) = f\nabla\varphi(f)g_F(V,W). \tag{1.8}$$

Assim,

$$^{F}Ric(V,W) = \big(\lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f)\big)g_F(V,W),$$

completando a prova da proposição. □

O principal objetivo deste capítulo é considerar sólitons de Ricci que são realizados como produtos deformados. Assim, a proposição anterior justifica o motivo de considerarmos a equação (4) na introdução. Motivados pelo trabalho de Maschler [37], nos referimos a esta equação como a *equação tipo Ricci-Hessiano.* Em [16], Case-Shu-Wei introduziram o conceito de métricas m–quasi-Einstein que se originou do estudo padrão das variedades de Einstein que são realizadas como produto deformado, cf [7]. Assim, é natural esperar que a classe das equações tipo Ricci-Hessiano contenha a classe das métricas m–quasi-Einstein. Para provar esta afirmação, seja (B^n, g, h, λ) uma métrica m–quasi-Einstein, isto é

$$Ric + \nabla^2 h - \frac{1}{m} dh \otimes dh = \lambda g$$

para alguns $\lambda \in \mathbb{R}$ e $0 < m \leq \infty$. Tomando $m = 4r < \infty$, $\varphi = \frac{h}{2}$ e $f = e^{-\frac{\varphi}{r}}$, deduzimos

$$\frac{r}{f}\nabla^2 f = -\nabla^2\varphi + \frac{1}{r} d\varphi \otimes d\varphi$$

e, por um cálculo direto, temos que (B^n, g, φ, f) satisfaz a equação tipo Ricci-Hessiano, a saber

$$Ric + \nabla^2\varphi = \lambda g + \frac{r}{f}\nabla^2 f. \tag{1.9}$$

Para $m = \infty$, apenas considere $\varphi = h$ e $f = constante$.

Agora vamos supor que $(B^n, g, \varphi, f, \lambda)$ satisfaz uma equação do tipo (1.9), para algum $r > 0$. Observe que a seguinte relação é verdadeira

$$\nabla^2 \ln(f) = \frac{1}{f}\nabla^2 f - \frac{1}{f^2} df \otimes df. \tag{1.10}$$

De (1.9) e (1.10), temos

$$\begin{aligned} \lambda g &= Ric + \nabla^2\varphi - r\nabla^2 \ln(f) - \frac{r}{f^2} df \otimes df \\ &= Ric + \nabla^2\xi - \frac{1}{r} d\xi \otimes d\xi + \nabla^2\varphi, \end{aligned} \tag{1.11}$$

em que $\xi := -r\ln(f)$, o que completa a prova de nossa afirmação. Disso resulta que a diferença entre essas classes está na não-homoteticidade de $\nabla\varphi$.

Uma situação interessante ocorre quando permitimos que λ seja uma função suave na variedade. Este caso será melhor tratado no Capítulo 2, onde introduzimos a definição de quase sóliton de Ricci modificado. Por enquanto, vamos nos restringir a uma breve discussão do seguinte:

Exemplo 1.1 *Seja* $(\mathbb{M}^n(\tau), g_\circ)$ *a esfera euclidiana* $\mathbb{S}^n$ *ou o espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^n$ *conforme* $\tau = 1$ *ou* $\tau = -1$*, respectivamente. Denotamos por* h_v *a função altura com respeito a um vetor unitário* $v \in \mathbb{R}^{n+1}$*. Então, para cada número real* $m \neq 0$*, as funções* $\lambda = \tau(n-1) - \frac{\tau}{m}h_v^2 - h_v$*,* $f = e^{-\frac{\tau}{m}h_v}$ *e* $\varphi = \frac{1}{2m}h_v^2$ *satisfazem a equação (4) em* $(\mathbb{M}^n(\tau), g_\circ)$*. De fato, nesse caso,*

$$d\varphi = \frac{h_v}{m}dh_v, \quad df = -\frac{\tau}{m}e^{-\frac{\tau}{m}h_v}dh_v \quad e \quad \nabla^2 h_v = -\tau h_v g_\circ.$$

Logo,

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{m}dh_v \otimes dh_v - \frac{\tau}{m}h_v^2 g_\circ \quad e \quad \frac{m}{f}\nabla^2 f = \frac{1}{m}dh_v \otimes dh_v + h_v g_\circ.$$

Finalmente, como $Ric = \tau(n-1)g_\circ$*, basta escolher a função* λ *indicada acima.*

A partir de agora identificaremos um $(0,2)$–tensor T em M com um $(1,1)$–tensor pela equação

$$g(T(Z), Y) = T(Z, Y), \quad Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Por um cálculo direto, obtemos

$$\mathrm{div}(\varphi T) = \varphi \mathrm{div} T + T(\nabla\varphi, \cdot) \quad \text{e} \quad \nabla(\varphi T) = \varphi\nabla T + d\varphi \otimes T, \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

Em particular, temos $\mathrm{div}(\varphi g) = d\varphi$. Além disso, os seguintes fatos gerais são bem conhecidos na literatura

$$\mathrm{div}\nabla^2\varphi = Ric(\nabla\varphi, \cdot) + d\Delta\varphi \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}d|\nabla\varphi|^2 = \nabla^2\varphi(\nabla\varphi, \cdot).$$

Estas identidades serão úteis neste capítulo e as usaremos sem maiores comentários.

Proposição 1.3 *Sejam* (B^n, g) *uma variedade Riemanniana,* $f > 0$ *e* φ *funções suaves satisfazendo*

$$Ric + \nabla^2\varphi = \lambda g + \frac{m}{f}\nabla^2 f \quad e \quad 2\lambda\varphi - |\nabla\varphi|^2 + \Delta\varphi + \frac{m}{f}\nabla\varphi(f) = c, \tag{1.12}$$

para certas constantes $m, c, \lambda \in \mathbb{R}$*, com* $m \neq 0$*. Então* f *e* φ *satisfazem*

$$\lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f) = \mu, \tag{1.13}$$

para alguma constante $\mu \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração: De (1.12), obtemos $S = n\lambda + \frac{m}{f}\Delta f - \Delta\varphi$, em que S é a curvatura escalar de B. Assim,

$$dS = -\frac{m}{f^2}\Delta f df + \frac{m}{f}d(\Delta f) - d(\Delta\varphi). \tag{1.14}$$

Vamos usar a segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes, a saber:

$$0 = -\frac{1}{2}dS + \mathrm{div}Ric. \tag{1.15}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}\mathrm{div}Ric &= m\mathrm{div}\Big(\frac{1}{f}\nabla^2 f\Big) - \mathrm{div}(\nabla^2\varphi)\\ &= m\Big(\frac{1}{f}\mathrm{div}(\nabla^2 f) - \frac{1}{f^2}(\nabla^2 f)(\nabla f,\cdot)\Big) - \mathrm{div}(\nabla^2\varphi)\\ &= \frac{m}{f}Ric(\nabla f,\cdot) + \frac{m}{f}d(\Delta f) - \frac{m}{2f^2}d(|\nabla f|^2) - Ric(\nabla\varphi,\cdot) - d(\Delta\varphi).\end{aligned}$$

De (1.12) temos

$$\begin{aligned}Ric(\nabla f,\cdot) &= \lambda df + \frac{m}{2f}d(|\nabla f|^2) - (\nabla^2\varphi)(\nabla f,\cdot),\\ Ric(\nabla\varphi,\cdot) &= \lambda d\varphi + \frac{m}{f}(\nabla^2 f)(\nabla\varphi,\cdot) - \frac{1}{2}d(|\nabla\varphi|^2).\end{aligned}$$

Deste modo

$$\begin{aligned}\mathrm{div}Ric &= \frac{m}{f}\Big(\lambda df + \frac{m}{2f}d(|\nabla f|^2) - (\nabla^2\varphi)(\nabla f,\cdot)\Big) + \frac{m}{f}d(\Delta f) - \frac{m}{2f^2}d(|\nabla f|^2)\\ &\quad -\Big(\lambda d\varphi + \frac{m}{f}(\nabla^2 f)(\nabla\varphi,\cdot) - \frac{1}{2}d(|\nabla\varphi|^2)\Big) - d(\Delta\varphi)\\ &= \frac{m}{f}\lambda df + \frac{m^2}{2f^2}d(|\nabla f|^2) - \frac{m}{f}(\nabla^2\varphi)(\nabla f,\cdot) + \frac{m}{f}d(\Delta f) - \frac{m}{2f^2}d(|\nabla f|^2)\\ &\quad -\lambda d\varphi - \frac{m}{f}(\nabla^2 f)(\nabla\varphi,\cdot) + \frac{1}{2}d(|\nabla\varphi|^2) - d(\Delta\varphi)\\ &= \frac{m}{f}\lambda df + \frac{m(m-1)}{2f^2}d(|\nabla f|^2) + \frac{m}{f}d(\Delta f) - \lambda d\varphi + \frac{1}{2}d(|\nabla\varphi|^2) - d(\Delta\varphi)\\ &\quad -\frac{m}{f}\big[(\nabla^2\varphi)(\nabla f,\cdot) + (\nabla^2 f)(\nabla\varphi,\cdot)\big].\end{aligned}$$

Como $d(\nabla\varphi(f)) = (\nabla^2\varphi)(\nabla f,\cdot) + (\nabla^2 f)(\nabla\varphi,\cdot)$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{div}Ric &= \frac{m}{f}\lambda df + \frac{m(m-1)}{2f^2}d(|\nabla f|^2) + \frac{m}{f}d(\Delta f) - \lambda d\varphi + \frac{1}{2}d(|\nabla\varphi|^2) - d(\Delta\varphi)\\ &\quad -\frac{m}{f}d(\nabla\varphi(f)).\end{aligned} \tag{1.16}$$

Substituindo as equações (1.14) e (1.16) na equação (1.15), chegamos a próxima identidade

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{m}{2f^2}\Delta f df - \frac{m}{2f}d(\Delta f) - \frac{1}{2}d(\Delta\varphi) + \frac{m}{f}\lambda df + \frac{m(m-1)}{2f^2}d(|\nabla f|^2) + \frac{m}{f}d(\Delta f) \\
&\quad -\lambda d\varphi + \frac{1}{2}d(|\nabla\varphi|^2) - \frac{m}{f}d(\nabla\varphi(f)).
\end{aligned}
$$

A equação anterior multiplicada por $\frac{2f^2}{m}$ é equivalente a

$$
\begin{aligned}
0 &= \Delta f df - fd(\Delta f) - \frac{f^2}{m}d(\Delta\varphi) + 2f\lambda df + (m-1)d(|\nabla f|^2) + 2fd(\Delta f) \\
&\quad -\frac{2f^2}{m}\lambda d\varphi + \frac{f^2}{m}d(|\nabla\varphi|^2) - 2fd(\nabla\varphi(f)).
\end{aligned}
$$

Simplificando e reagrupando os termos, obtemos

$$
0 = d\big(f\Delta f + \lambda f^2 + (m-1)|\nabla f|^2\big) - \frac{f^2}{m}d\big(\Delta\varphi + 2\lambda\varphi - |\nabla\varphi|^2\big) - 2fd(\nabla\varphi(f)). \quad (1.17)
$$

Mas, por hipótese $2\lambda\varphi - |\nabla\varphi|^2 + \Delta\varphi + \frac{m}{f}\nabla\varphi(f) = c$. Donde

$$
-\frac{f^2}{m}d(\Delta\varphi + 2\lambda\varphi - |\nabla\varphi|^2) - fd(\nabla\varphi(f)) = -\nabla\varphi(f)df. \quad (1.18)
$$

Consequentemente, as equações (1.17) e (1.18) permitem concluir que

$$
d\big(f\Delta f + \lambda f^2 + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f)\big) = 0,
$$

o que é suficiente para completar a prova. □

Estamos prontos para provar nosso primeiro teorema.

Teorema 1.1 *Sejam $M = B^n \times_f F^m$ um produto deformado e φ uma função suave sobre B tal que $(B^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ seja um sóliton de Ricci gradiente expansivo ou estacionário. Suponha que sua fibra F^m tem dimensão $m \geq 2$ e que a função deformadora f atinge um máximo e um mínimo. Então M deve ser um produto Riemanniano.*

Demonstração: Se $M = B^n \times_f F^m$, $m > 1$, é um sóliton de Ricci gradiente com $Ric + \nabla^2\tilde{\varphi} = \lambda g$, então a Proposição 1.2 implica que ${}^F Ric = \mu g_F$, em que

$$
\mu = \lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f). \quad (1.19)
$$

Pela Proposição 1.3, μ é constante, em que as equações em (1.12) são garantidas pelas equações (1.6) e (1.3). Sejam $p, q \in B^n$ os pontos em que f atinge seu máximo e mínimo B^n, respectivamente. Então

$$
\nabla f(p) = 0 = \nabla f(q) \quad \text{e} \quad \Delta f(p) \leq 0 \leq \Delta f(q).
$$

Como $f > 0$ e $\lambda \leq 0$ temos $-\lambda f(p)^2 \geq -\lambda f(q)^2$ e combinando com (1.19) temos

$$0 \geq f(p)\Delta f(p) = \mu - \lambda f(p)^2 \geq \mu - \lambda f(q)^2 = f(q)\Delta f(q) \geq 0. \qquad (1.20)$$

Esta última equação nos fornece

$$\mu - \lambda f(p)^2 = \mu - \lambda f(q)^2 = 0.$$

Assim, para $\lambda < 0$, teremos $f(p) = f(q)$, donde f é constante. Para $\lambda = 0$, teremos $\mu = 0$ e a equação (1.19) reduz-se a

$$Lf = \Delta f - \nabla\varphi(f) = \frac{1}{f}(1-m)|\nabla f|^2 \leq 0,$$

em que $L := \Delta - \nabla\varphi$. Portanto, pelo princípio do máximo forte f é constante. Ou seja, em qualquer caso M é um produto Riemanniano. $\square$

Observação 1.1 *A função deformadora f não atinge um mínimo se $\mu \leq 0$ e $\lambda > 0$. De fato, a equação* (1.19) *implica $Lf < 0$. Agora, se f atinge um mínimo, o princípio do máximo forte garante que f é constante, o que contradiz* (1.19).

O próximo resultado garante a compacidade do sóliton de Ricci gradiente PW quando supomos apenas a compacidade da base.

Teorema 1.2 *Sejam $B^n \times_f F^m$ um produto deformado e φ uma função suave em B de modo que $(B^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ seja um sóliton de Ricci gradiente contrátil com base compacta e fibra com dimensão $m \geq 2$. Então $B^n \times F^m$ deve ser uma variedade compacta.*

Demonstração: Suponha que $B^n \times_f F^m$, $m > 1$, seja um sóliton de Ricci gradiente com $Ric + \nabla^2\tilde{\varphi} = \lambda g$. Como na prova do Teorema 1.1 temos ${}^F Ric = \mu g_F$, em que a constante μ é dada por (1.19) ou equivalentemente

$$\mu = \lambda f^2 + fLf + (m-1)|\nabla f|^2.$$

Por integração

$$\mu \operatorname{vol}_\varphi(B^n) = \lambda \int_{B^n} f^2 e^{-\varphi} \mathrm{dB} + (m-2) \int_{B^n} |\nabla f|^2 e^{-\varphi} \mathrm{dB}.$$

Como $\lambda > 0$ e $m > 1$ concluímos que $\mu > 0$ e assim F^m é compacta pelo Teorema de Bonnet-Myers. Consequentemente, $B^n \times F^m$ é uma variedade compacta. $\square$

Observação 1.2 *Observe que o Teorema 1.2 tem a seguinte prova alternativa. Lembre que ambas B^n e F^m são variedades Riemannianas completas então $B^n \times_f F^m$ é completa para toda função deformadora f. Como $\nabla\tilde{\varphi} \in \mathfrak{L}(B)$ e B^n é compacta devemos ter que $|\nabla\tilde{\varphi}|$ é limitada no sóliton de Ricci contrátil $(B^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$. Portanto, podemos aplicar o Teorema* 1 *em [24] para concluir que $B^n \times F^m$ é uma variedade compacta.*

Observação 1.3 *Já é conhecido que sólitons de Ricci compactos de dimensão $k \leq 3$ são triviais (ver [30, 32] ou [13]). Para o caso de sólitons de Ricci gradiente PW contráteis com base compacta a situação é mais delicada, conforme veremos no Corolário 1.2.*

Surge agora a seguinte questão natural: *É possível construir um sóliton de Ricci gradiente PW com base compacta e função deformadora não-constante?* Os Corolários 1.1 e 1.2 dão uma resposta parcial para esta questão.

Corolário 1.1 *Não é possível construir um sóliton de Ricci gradiente PW com base compacta e função deformadora não-constante, de modo que sua fibra seja uma variedade Riemanniana de dimensão $m \geq 2$ e curvatura escalar não-positiva.*

Demonstração: Suponha que M^k seja um sóliton de Ricci gradiente PW com base compacta e função deformadora não-constante tendo como fibra uma variedade Riemanniana de dimensão $m \geq 2$. Pelo Teorema 1.1, M^k deve ser um sóliton de Ricci contrátil. Consequentemente, como na prova do Teorema 1.2 sua fibra deve ser uma variedade de Einstein com curvatura escalar constante positiva. $\square$

O resultado abaixo mostra como construir sólitons de Ricci gradientes PW.

Teorema 1.3 *Seja (B^n, g_B) uma variedade Riemanniana completa com duas funções suaves $f > 0$ e φ satisfazendo as equações em* (1.12)*. Tome a constante μ em* (1.13) *e uma variedade Riemanniana completa (F^m, g_F) com tensor de Ricci ${}^F Ric = \mu g_F$, $m > 1$. Então $(B^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente PW.*

Demonstração: Pelas hipóteses sobre f e φ podemos concluir pela Proposição 1.3 que qualquer μ dada por (1.13) é constante. Tomando uma variedade de Einstein (F^m, g_F) com tensor de Ricci ${}^F Ric = \mu g_F$, podemos considerar o produto deformado $(B^n \times_f F^m, g)$, com $g = \pi^* g_B + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_F$. Esta variedade tem uma estrutura de sóliton de Ricci gradiente. De fato, primeiramente, observamos que a equação fundamental

$$Ric + \nabla^2 \tilde{\varphi} = \lambda g$$

é imediatamente satisfeita para todos $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$, segundo os fatos: pullback pela π da primeira equação em (1.12), $H^{\varphi}(Y,Z) = \nabla^2\tilde{\varphi}(Y,Z)$, $H^f(Y,Z) = \nabla^2\tilde{f}(Y,Z)$ e parte (i) do Lema 1.2.

Agora, quando $Y \in \mathfrak{L}(B)$ e $V \in \mathfrak{L}(F)$ usamos $\nabla\tilde{\varphi} \in \mathfrak{L}(B)$ e parte (i) do Lema 1.1 para verificar que $\nabla^2\tilde{\varphi}(Y,V) = g(D_Y\nabla\tilde{\varphi}, V) = 0$. Assim, pela parte (ii) do Lema 1.2, a equação fundamental é novamente satisfeita.

Finalmente, para $V, W \in \mathfrak{L}(F)$ temos pela definição de μ e parte (iii) do Lema 1.2 que

$$
\begin{aligned}
Ric(V,W) &= \mu g_F(V,W) - (f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2)g_F(V,W)\\
&= (\lambda f^2 - f\nabla\varphi(f))g_F(V,W)\\
&= (\lambda - \frac{1}{f}\nabla\varphi(f))g(V,W)).
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Por outro lado, a equação (1.8) nos fornece

$$
\nabla^2\tilde{\varphi}(V,W) = f\nabla\varphi(f)g_F(V,W) = \frac{1}{f}\nabla\varphi(f)g(V,W). \tag{1.22}
$$

Combinando as equações (1.21) e (1.22) concluímos que a equação fundamental é novamente satisfeita, o que completa a prova do teorema. $\square$

De acordo com o Corolário 1.1 a compacidade da base do sóliton de Ricci PW implica restrições para sua existência. Por esta razão, estabelecemos o critério de compacidade abaixo, cuja demonstração segue a mesma técnica usada por Fernández-López e García-Río [24].

Proposição 1.4 *Seja (B, g) uma variedade Riemanniana completa satisfazendo*

$$
Ric + \nabla^2\varphi - \frac{m}{f}\nabla^2 f \geq cg \tag{1.23}
$$

para $m > 0$, algumas funções suaves φ, f em B e alguma constante positiva c. Então, B é compacta desde que $|\nabla\varphi|$ e $|\nabla(\ln f)|$ sejam ambos limitados em (B, g). Em particular, o grupo fundamental $\pi_1(B)$ é finito.

Demonstração: Seja p um ponto em B e considere qualquer geodésica $\gamma : [0, +\infty) \to B$ partindo de p e parametrizada pelo comprimento de arco s. Da desigualdade (1.23) temos

$$
\begin{aligned}
Ric(\gamma', \gamma') &\geq cg(\gamma', \gamma') - g(\nabla_{\gamma'}\nabla\varphi, \gamma') + \frac{m}{f}g(\nabla_{\gamma'}\nabla f, \gamma')\\
&= c - \frac{d}{ds}g(\nabla\varphi, \gamma') + m\frac{d}{ds}g(\nabla(\ln f), \gamma') + \frac{m}{f^2}(\gamma'(f))^2.
\end{aligned}
$$

Assim, por integração e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t Ric(\gamma',\gamma')ds &\geq ct + g(\nabla\varphi_p,\gamma'(0)) - g(\nabla\varphi_{\gamma(t)},\gamma'(t)) - mg(\nabla(\ln f)_p,\gamma'(0)) \\
&\quad -mg(\nabla(-\ln f)_{\gamma(t)},\gamma'(t)) \\
&\geq ct + g(\nabla\varphi_p,\gamma'(0)) - |\nabla\varphi_{\gamma(t)}| - mg(\nabla(\ln f)_p,\gamma'(0)) \\
&\quad -m|\nabla(\ln f)_{\gamma(t)}|.
\end{aligned}$$

Como $|\nabla\varphi|$ e $|\nabla(\ln f)|$ são ambos limitados, obtemos

$$\int_0^{+\infty} Ric(\gamma',\gamma')ds = +\infty.$$

Então, a compacidade de (B,g) segue do critério de compacidade de Ambrose [1]. Finalmente, observe que a desigualdade (1.23) também valerá no recobrimento universal de B, o qual implicará em sua compacidade, e portanto $\pi_1(B)$ é finito. $\square$

Observação 1.4 *No decorrer da demonstração da Proposição 1.4 obtivemos*

$$\begin{aligned}
Ric(\gamma',\gamma') &\geq c - \frac{d}{ds}g(\nabla\varphi,\gamma') + m\frac{d}{ds}g(\nabla(\ln f),\gamma') \\
&= c + \frac{d}{ds}g(m\nabla\ln f - \nabla\varphi,\gamma').
\end{aligned}$$

Logo, definindo $\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por $\alpha(s) = g(m\nabla\ln f_{\gamma(s)} - \nabla\varphi_{\gamma(s)},\gamma'(s))$ obtemos pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|\alpha(s)| \leq |m\nabla\ln f_{\gamma(s)} - \nabla\varphi_{\gamma(s)}| \leq m|\nabla\ln f_{\gamma(s)}| + |\nabla\varphi_{\gamma(s)}| \leq mc_2 + c_1,$$

em que, por hipótese, $|\nabla\varphi_{\gamma(s)}| \leq c_1$ e $|\nabla\ln f_{\gamma(s)}| \leq c_2$, para c_1, c_2 constantes. Assim, pelo Teorema 1.2 *de [25] (B,g) satisfaz a estimativa de diâmetro*

$$\operatorname{diam}(B) \leq \frac{\pi}{c}\left((mc_2+c_1) + \sqrt{(mc_2+c_1)^2 + (n-1)c}\right).$$

Corolário 1.2 *Não é possível construir um sóliton de Ricci gradiente PW com base compacta e função deformadora não-constante, de modo que sua fibra tenha dimensão maior ou igual a dois e primeiro grupo fundamental da base não finito.*

Demonstração: Suponha que M^k seja um sóliton de Ricci gradiente PW. Como na prova do Corolário 1.1, M^k deve ser um sóliton de Ricci PW contrátil. Consequentemente, pelas Proposições 1.2 e 1.4, sua base deve ser uma variedade Riemanniana com primeiro grupo fundamental finito. $\square$

1.3 Exemplo de sóliton de Ricci gradiente PW expansivo

Nesta seção, como aplicação do Teorema 1.3, construímos sólitons de Ricci gradientes PW expansivos.

Inicialmente lembramos que o sóliton Gaussiano é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido com sua métrica padrão $g_\circ$ e a função potencial $\psi(x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2$. Vamos considerar em $\mathbb{R}^n$ a métrica $\bar{g} = \frac{1}{\rho^2}g_\circ$, em que ρ é uma função positiva em $\mathbb{R}^n$. Precisamos encontrar duas funções suaves $f > 0$ e φ em $\mathbb{R}^n$ e uma constante λ satisfazendo uma equação tipo Ricci-Hessiano em $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$, isto é,

$$Ric_{\bar{g}} + \bar{\nabla}^2\varphi = \lambda\bar{g} + \frac{m}{f}\bar{\nabla}^2 f, \tag{1.24}$$

em que $m > 0$ é um inteiro. Considerando os fatos da teoria conforme, obtemos

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\rho^2}\big\{(n-2)\rho\nabla^2\rho + (\rho\Delta\rho - (n-1)|\nabla\rho|^2)g_\circ\big\}, \tag{1.25}$$

em que as duas parcelas que aparecem no segundo termo da equação são calculadas na métrica $g_\circ$. Além disso, para todo $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ valem as seguintes equações

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}^2 h)_{ij} &= h_{x_ix_j} + \frac{\rho_{x_j}}{\rho}h_{x_i} + \frac{\rho_{x_i}}{\rho}h_{x_j} \quad \text{para} \;\; i \neq j,\\
(\bar{\nabla}^2 h)_{ii} &= h_{x_ix_i} + 2\frac{\rho_{x_i}}{\rho}h_{x_i} - \sum_k \frac{\rho_{x_k}}{\rho}h_{x_k} \quad \text{para} \;\; i = j.
\end{aligned}$$

Precisamos analisar a equação (1.24) em dois casos. Para $i \neq j$, ela é reescrita como

$$(n-2)\frac{\rho_{x_ix_j}}{\rho} + \varphi_{x_ix_j} + \frac{\rho_{x_j}}{\rho}\varphi_{x_i} + \frac{\rho_{x_i}}{\rho}\varphi_{x_j} = \frac{m}{f}\Big(f_{x_ix_j} + \frac{\rho_{x_j}}{\rho}f_{x_i} + \frac{\rho_{x_i}}{\rho}f_{x_j}\Big) \tag{1.26}$$

e para $i = j$,

$$\begin{aligned}
&(n-2)\frac{\rho_{x_ix_i}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\sum_k \rho_{x_kx_k} - \frac{(n-1)}{\rho^2}\sum_k \rho_{x_k}^2 + \varphi_{x_ix_i} + 2\frac{\rho_{x_i}}{\rho}\varphi_{x_i}\\
= \;& \frac{1}{\rho}\sum_k \rho_{x_k}\varphi_{x_k} + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{m}{f}\Big(f_{x_ix_i} + 2\frac{\rho_{x_i}}{\rho}f_{x_i} - \frac{1}{\rho}\sum_k \rho_{x_k}f_{x_k}\Big).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Suponhamos que as funções ρ, f, φ tenham as seguintes dependências $\rho = \rho(x_n)$, $f = f(x_n)$ e $\varphi = \varphi(y)$, em que $x = (y, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Então tomando $i = n$ em (1.26) temos para todo $j \neq n$

$$\rho_{x_n}\varphi_{x_j} = 0.$$

Novamente de (1.26), para $i \neq n$, obtemos para todos $i \neq j \neq n$,

$$\varphi_{x_i x_j} = 0. \tag{1.28}$$

Como estamos interessados em obter soluções não triviais para (1.24), devemos considerar ρ constante. Logo, de (1.27) temos

$$\varphi_{x_i x_i} - \frac{m}{f} f_{x_i x_i} = \frac{\lambda}{\rho^2}. \tag{1.29}$$

Donde, para $i \neq n$, temos

$$\varphi_{x_i x_i} = \frac{\lambda}{\rho^2}. \tag{1.30}$$

Consequentemente, de (1.28) e (1.30), φ estão bem determinadas por

$$(D^2\varphi)_{ij} = \frac{\lambda}{\rho^2}\delta_{ij}, \tag{1.31}$$

em que $D^2\varphi$ significa o Hessiano de φ calculado na métrica δ_{ij} em $\mathbb{R}^{n-1}$. Além disso, tomando $i = n$ em (1.29), obtemos

$$f_{x_n x_n} + \frac{\lambda}{m\rho^2} f = 0. \tag{1.32}$$

Portanto, pela teoria de EDO, nos resta escolher $\lambda < 0$ para obtermos

$$f(x) = c_1 e^{\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{-\lambda}{m}}x_n} + c_2 e^{-\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{-\lambda}{m}}x_n} > 0 \tag{1.33}$$

para todas constantes não-negativas c_1 e c_2 que tornam $f > 0$.

A conclusão é que para toda constante negativa λ, as funções suaves φ e f dadas respectivamente por (1.31) e (1.33) satisfazem uma equação tipo Ricci-Hessiano (1.24) em $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\rho^2}g_\circ)$, em que $\rho > 0$ é constante.

Corolário 1.3 *Seja $\mathbb{R}^n$ um espaço euclidiano com coordenadas $x = (y, x_n)$, em que $y = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ e $n > 1$. Considere uma variedade Riemanniana completa (F^m, g_F) com tensor de Ricci ${}^F Ric = \mu g_F$ e $m > 1$. Então $(\mathbb{R}^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ tem uma estrutura de sóliton de Ricci gradiente expansivo com $\mu \leq 0$, em que*

$$f(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{-\lambda}{m}}x_n} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{m}}x_n} > 0 \quad e \quad \varphi(x) = \frac{\lambda}{2}|y|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + b \tag{1.34}$$

para qualquer $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b \in \mathbb{R}$, e para todas constantes não-negativas c_1 e c_2 que tornam $f > 0$.

Demonstração: Tomando $\rho = 1$ em (1.31) e (1.33), podemos considerar as funções em (1.34) satisfazendo as equações em (1.12) para $c = 2\lambda b - |a|^2 + \lambda(n-1)$. Consequentemente, da equação (1.13) calculamos

$$\mu = \lambda f^2 - \frac{\lambda}{m} f^2 + (m-1) f_{x_n}^2 = (m-1)\Big(\frac{\lambda}{m} f^2 + f_{x_n}^2\Big).$$

Um cálculo direto mostra que

$$\mu = 4\lambda c_1 c_2 \frac{(m-1)}{m} \leq 0.$$

A conclusão do corolário segue imediatamente do Teorema 1.3. $\square$

Capítulo 2

Sólitons e quase sólitons de Ricci modificados

2.1 Caracterização

Como vimos em nossa introdução, um sóliton de Ricci é uma variedade Riemanniana (M, g) munida com um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante λ satisfazendo

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g, \tag{2.1}$$

e um sóliton de Ricci gradiente satisfaz

$$Ric + \nabla^2 \psi = \lambda g, \tag{2.2}$$

para alguma função potencial suave ψ em M.

Vimos no Capítulo 1 que a base B de um sóliton de Ricci gradiente PW $(B^n \times_f F^m, \nabla\tilde{\varphi}, \lambda)$ representa uma generalização das variedades m–quasi-Einstein e satisfaz a equação tipo Ricci-Hessiano

$$^{B}Ric + \nabla^2 \varphi = \lambda g_B + \frac{m}{f}\nabla^2 f, \tag{2.3}$$

com função potencial φ e função deformadora f. Para maiores detalhes sobre variedades tipo Ricci-Hessiano, ver [38].

Já sabemos que $\nabla^2 \ln(f) = \frac{1}{f}\nabla^2 f - \frac{1}{f^2} df \otimes df$. Portanto, escrevendo $\xi = -m\ln(f)$ e $\eta = \varphi + \xi$, a equação (2.3) é equivalente a

$$^{B}Ric + \nabla^2 \eta = \lambda g + \frac{1}{m} d\xi \otimes d\xi. \tag{2.4}$$

Agora vamos analisar a situação mais geral seguinte.

Suponha que $(M, g, \tilde{Y}, \lambda)$ é um sóliton de Ricci PW, em que $M = B^n \times_f F^m$ e $\tilde{Y}$ é o levantamento horizontal de $Y \in \mathfrak{X}(B)$ para $\mathfrak{X}(M)$. Pelo Lema 1.1, para $Z, U \in \mathfrak{L}(B)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{L}_Y g_B}(\tilde{Z}, \tilde{U}) &= (\pi^* \mathscr{L}_Y g_B)(\tilde{Z}, \tilde{U}) \\
&= (\mathscr{L}_Y g_B)(d\pi \tilde{Z}, d\pi \tilde{U}) \\
&= \mathscr{L}_Y g_B(Z, U).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\tilde{Y}} g(\tilde{Z}, \tilde{U}) &= g(D_{\tilde{Z}} \tilde{Y}, \tilde{U}) + g(\tilde{Z}, D_{\tilde{U}} \tilde{Y}) \\
&= g_B(\nabla_Z Y, U) + g_B(Z, \nabla_U Y) \\
&= \mathscr{L}_Y g_B(Z, U).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathscr{L}_{\tilde{Y}} g = \widetilde{\mathscr{L}_Y g_B}$$

sobre levantamentos horizontais.

Agora pelo Lema 1.2 a seguinte equação é verificada na base

$$^{B}Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_Y g_B = \lambda g_B + \frac{m}{f}\nabla^2 f. \tag{2.5}$$

Novamente tomando $\xi = -m \ln(f)$ temos

$$\frac{m}{f}\nabla^2 f = -\nabla^2 \xi + \frac{1}{m} d\xi \otimes d\xi.$$

Consequentemente, a equação (2.5) torna-se

$$^{B}Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_B = \lambda g_B + \frac{1}{m} d\xi \otimes d\xi, \tag{2.6}$$

em que $X = Y + \nabla \xi$.

A discussão acima é a nossa primeira motivação para definirmos o objeto de estudo deste capítulo.

Definição 2.1 *Um sóliton de Ricci modificado é uma variedade Riemanniana completa* (M, g) *munida com um campo de vetores* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, uma* 1*–forma* $\omega \in \mathfrak{X}(M)^*$ *e dois números reais* λ *e* $\theta > 0$ *satisfazendo a equação*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g + \theta \omega \otimes \omega. \tag{2.7}$$

Quando $X = \nabla\eta$ e $\omega = d\xi$ para algumas funções suaves η e ξ em M, escrevemos $(M, g, \nabla\eta, \lambda, d\xi, \theta)$ para indicar um sóliton de Ricci gradiente modificado, cuja equação fundamental torna-se

$$Ric + \nabla^2\eta = \lambda g + \theta d\xi \otimes d\xi. \tag{2.8}$$

Assumindo que λ é uma função suave em M e admitindo que vale a equação (2.7), vamos nos referir a $(M, g, X, \lambda, \omega, \theta)$ como um **quase sóliton de Ricci modificado**.

Observação 2.1 *A equação* (2.4) *é o caso gradiente de um sóliton de Ricci modificado, em que $\theta = \frac{1}{m}$. Estruturas de quase sóliton de Ricci gradiente modificado sobre a esfera euclidiana e sobre o espaço hiperbólico foram apresentados no Exemplo 1.1.*

2.2 Rigidez e obstruções de quase sólitons de Ricci modificados compactos

Nesta seção obtemos um teorema de rigidez para uma classe particular de quase sólitons de Ricci modificados. Inicialmente apresentamos uma tal estrutura para a esfera unitária euclidiana $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que atende às nossas hipóteses para o referido resultado de rigidez.

Começamos notando que para qualquer função $u \in C^\infty(M)$ vale a identidade

$$du \otimes du = \frac{1}{2}\nabla^2 u^2 - u\nabla^2 u. \tag{2.9}$$

Fazendo $u = \xi$ em (2.9) e substituindo na equação fundamental (2.8), obtemos

$$Ric + \nabla^2\Big(\eta - \frac{\theta}{2}\xi^2\Big) = \lambda g - \theta\xi\nabla^2\xi. \tag{2.10}$$

A importância da equação (2.10) está na sua utilidade para caracterizarmos as estruturas de quase sólitons de Ricci modificados em $\mathbb{S}^n$. Vejamos: denotando por g a métrica canônica em $\mathbb{S}^n$ e considerando a solução de Obata para a equação $\nabla^2\xi = \frac{\Delta\xi}{n}g$, teremos $\Delta(\Delta\xi) + n\Delta\xi = 0$, ver [40]. Pela caracterização do espectro de $\mathbb{S}^n$, existe algum vetor fixado $v \in \mathbb{S}^n$ tal que $\Delta\xi = h_v = -\frac{1}{n}\Delta h_v$, em que $h_v(x) = \langle x, v\rangle$ é uma função altura em $\mathbb{S}^n$ (ver por exemplo [8]). Assim, pelo Teorema de Hopf, existe uma constante c_1 tal que

$$\xi = c_1 - \frac{h_v}{n}. \tag{2.11}$$

Desde que $Ric = (n-1)g$ e $-n\nabla^2\xi = \nabla^2 h_v = -h_v g$ substituímos (2.11) em (2.10) para obter

$$\nabla^2\Big[\eta - \frac{\theta}{2}\Big(c_1 - \frac{h_v}{n}\Big)^2\Big] = \Big[\lambda + \theta\Big(\frac{h_v}{n} - c_1\Big)\frac{h_v}{n} - (n-1)\Big]g. \tag{2.12}$$

Portanto $\nabla\phi$ é um campo de vetores conforme em $(\mathbb{S}^n, g)$, em que $\phi = \eta - \frac{\theta}{2}\Big(c_1 - \frac{h_v}{n}\Big)^2$. Novamente deve existir algum vetor fixado $w \in \mathbb{S}^n$ e uma constante c_2 tal que

$$\eta = \frac{\theta}{2}\Big(c_1 - \frac{h_v}{n}\Big)^2 - \frac{h_w}{n} + c_2. \tag{2.13}$$

É imediato de (2.12) e (2.13) que

$$\nabla^2 h_w = -n\nabla^2\phi = -n\Big[\lambda + \theta\Big(\frac{h_v}{n} - c_1\Big)\frac{h_v}{n} - (n-1)\Big]g.$$

Como $\nabla^2 h_w = -h_w g$, segue que

$$\frac{h_w}{n} = \lambda + \theta\Big(\frac{h_v}{n} - c_1\Big)\frac{h_v}{n} - (n-1),$$

isto é,

$$\lambda = \theta\Big(c_1 - \frac{h_v}{n}\Big)\frac{h_v}{n} + \frac{h_w}{n} + n - 1. \tag{2.14}$$

Observe que acabamos de provar o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *As únicas estruturas não-triviais de quase sólitons de Ricci gradientes modificados* $(\mathbb{S}^n, g, \nabla\eta, \lambda, d\xi, \theta)$*, com* $\nabla\xi$ *conforme, são descritas pelas funções suaves em* (2.11)*,* (2.13) *e* (2.14)*.*

Para o próximo resultado lembramos que o tensor sem traço de um $(0,2)$–tensor T em (M, g) é definido por

$$\mathring{T} = T - \frac{\mathrm{tr}(T)}{n}g$$

e a divergência de seu correspondente $(1,1)$–tensor T é definido como o $(0,1)$–tensor

$$(\mathrm{div}T)(v)(p) = \mathrm{tr}\big(w \mapsto (\nabla_w T)(v)(p)\big),$$

em que $p \in M$, $v, w \in T_pM$, ∇ representa a derivada covariante de T e tr é o traço calculado na métrica g.

Também será conveniente considerar o isomorfismo musical ${}^\sharp\colon \mathfrak{X}(M)^* \to \mathfrak{X}(M)$, isto é, a inversa da aplicação canônica dada por $X^\flat(\cdot) = g(X, \cdot)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 2.1 *Seja $(M, g, X, \lambda, \omega, \theta)$ um quase sóliton de Ricci modificado compacto com curvatura escalar S. Então vale a seguinte identidade*

$$\int_M |\mathring{Ric}|^2 \mathrm{dM} = \frac{n-2}{2n} \int_M \langle \nabla S, X \rangle \mathrm{dM} + \theta \int_M \mathring{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) \mathrm{dM}. \tag{2.15}$$

Em particular, para $\omega = d\xi$ temos

$$\begin{aligned} \int_M |\mathring{Ric}|^2 \mathrm{dM} &= \frac{n-2}{2n} \int_M \langle \nabla S, X \rangle \mathrm{dM} - \theta \int_M |\mathring{\nabla}^2 \xi|^2 \mathrm{dM} \\ &+ \theta \frac{n-1}{n} \int_M \left[(\Delta \xi)^2 - \frac{S}{n-1} |\nabla \xi|^2 \right] \mathrm{dM}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Demonstração: Por um cálculo direto temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathring{Ric}(X)) &= (\mathrm{div} \mathring{Ric})(X) + \langle \mathring{Ric}, \nabla X \rangle \\ &= \frac{n-2}{2n} \langle \nabla S, X \rangle + \langle \mathring{Ric}, \frac{1}{2} \mathscr{L}_X g \rangle \\ &= \frac{n-2}{2n} \langle \nabla S, X \rangle + \langle \mathring{Ric}, -Ric + \lambda g + \theta \omega \otimes \omega \rangle \\ &= \frac{n-2}{2n} \langle \nabla S, X \rangle - |\mathring{Ric}|^2 + \theta \mathring{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp), \end{aligned}$$

em que na segunda igualdade utilizamos o fato do tensor $\mathring{Ric}$ ser simétrico. Assim, obtemos

$$|\mathring{Ric}|^2 = -\mathrm{div}(\mathring{Ric}(X)) + \frac{n-2}{2n} \langle \nabla S, X \rangle + \theta \mathring{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp). \tag{2.17}$$

A equação (2.15) segue por integração de (2.17). Continuando nossos cálculos usamos a Fórmula de Bochner como segue: para toda $f \in C^\infty(M)$, vale

$$\begin{aligned} \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) &= Ric(\nabla f, \nabla f) - \frac{S}{n} |\nabla f|^2 \\ &= \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 - |\nabla^2 f|^2 - \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle - \frac{S}{n} |\nabla f|^2 \\ &= \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 - |\mathring{\nabla}^2 f|^2 - \frac{1}{n} (\Delta f)^2 - \langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle - \frac{S}{n} |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_M \mathring{Ric}(\nabla f, \nabla f) \mathrm{dM} = - \int_M |\mathring{\nabla}^2 f|^2 \mathrm{dM} + \frac{n-1}{n} \int_M \left[(\Delta f)^2 - \frac{S}{n-1} |\nabla f|^2 \right] \mathrm{dM}. \tag{2.18}$$

Tomando $f = \xi$ em (2.18) e $\omega = d\xi$ em (2.15) completamos nossa demonstração. $\square$

Antes de enunciarmos e provarmos nosso resultado de rigidez convém lembrar que Pigola, Rigoli, Rimoldi e Setti introduziram em [45] o conceito de *quase sóliton de Ricci*, denotado por (M^n, g, X, λ), que consiste numa variedade Riemanniana (M^n, g) com um campo de vetores X e uma função suave λ satisfazendo a seguinte equação de estrutura:

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g.$$

Já é conhecido que um quase sóliton de Ricci compacto com curvatura escalar constante é isométrico a uma esfera euclidiana (cf. Corolário 1 de [5]) e, ele é gradiente (cf. Corolário 2 de [3]). Para ser mais preciso, ver Proposição 2.1, Exemplo 2.1, Proposição 2.2 e Corolário 2.1 todos de [27].

Teorema 2.1 *Seja $(M^n, g, X, \lambda, d\xi, \theta)$, $n \geq 2$, um quase sóliton de Ricci modificado compacto com curvatura escalar constante S. Se ξ é uma autofunção do Laplaciano, então seu autovalor correspondente α satisfaz*

$$\alpha \geq \frac{S}{n-1}.$$

A igualdade ocorre somente se (M, g) é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$, em que $r = \sqrt{n(n-1)/S}$. Além disso, a menos de homotetia e constantes, a estrutura é gradiente com funções dadas na Proposição 2.1.

Demonstração: Nas hipóteses do teorema temos de (2.16)

$$0 \leq \int_M |\mathring{Ric}|^2 \mathrm{dM} + \theta \int_M |\mathring{\nabla}^2\xi|^2 \mathrm{dM} = \theta \frac{n-1}{n}\Big(\alpha - \frac{S}{n-1}\Big) \int_M |\nabla\xi|^2 \mathrm{dM},$$

implicando que $\alpha \geq \frac{S}{n-1}$. Quando a igualdade ocorre, obteremos imediatamente que

$$\nabla^2\xi = \frac{\Delta\xi}{n} g = -\frac{S\xi}{n(n-1)} g.$$

Assim, por um clássico resultado devido a Obata [40] temos que (M^n, g) é isométrica a uma esfera euclidiana $\mathbb{S}^n(r)$, em que $r = \sqrt{n(n-1)/S}$. Resta mostrar que X pode ser trocado por $\nabla\eta$ para alguma função suave η. Pela equação fundamental (2.7) temos

$$\begin{aligned} \frac{S}{n} g + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g &= \lambda g + \theta d\xi \otimes d\xi \\ &= \lambda g - \theta\xi\nabla^2\xi + \frac{\theta}{2}\nabla^2\xi^2 \\ &= \lambda g + \frac{\theta S\xi^2}{n(n-1)} g + \frac{\theta}{2}\nabla^2\xi^2. \end{aligned}$$

Donde

$$\mathscr{L}_Z g = 2\rho g,$$

em que

$$Z = X - \frac{\theta}{2}\nabla\xi^2 \quad \text{e} \quad \rho = \frac{\mathrm{div}Z}{n} = \lambda + \frac{\theta S\xi^2}{n(n-1)} - \frac{S}{n}.$$

Como $(\mathbb{S}^n(r), g)$ é Einstein, segue que o fator conforme ρ é uma autofunção do Laplaciano com autovalor $\frac{S}{n-1}$ e satisfazendo

$$\nabla^2\rho = -\frac{S\rho}{n(n-1)}g. \tag{2.19}$$

Observamos que (2.19) é a equação de Obata para ρ. Alternativamente, podemos obtê-la imediatamente fazendo $f = \rho$ na equação (2.18).

Escrevendo

$$u = -\frac{n(n-1)}{S}\rho,$$

deduzimos a próxima expressão

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\nabla u}g = \nabla^2 u = -\frac{n(n-1)}{S}\nabla^2\rho = \rho g = \frac{1}{2}\mathscr{L}_Z g = \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g - \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\frac{\theta}{2}\nabla\xi^2}g.$$

Portanto

$$\mathscr{L}_X g = \mathscr{L}_{\nabla(u+\frac{\theta}{2}\xi^2)} = \mathscr{L}_{\nabla\eta}g,$$

em que $\eta = u + \frac{\theta}{2}\xi^2$.

Logo, a estrutura de quase sóliton de Ricci modificado em $(\mathbb{S}^n(r), g)$ é de fato gradiente. Consequentemente, a menos de homotetia e constantes, as funções são dadas conforme explicamos na Proposição 2.1. □

O nosso próximo resultado estabelece um critério de compacidade que se aplica ao caso em que a constante θ, da definição de sóliton de Ricci modificado, é negativa.

Teorema 2.2 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa satisfazendo*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g \geq \lambda g + \theta\omega\otimes\omega$$

para um campo de vetores X e uma 1–forma ω em M, uma constante positiva λ e uma constante negativa θ. Então, M é compacta desde que $|X| \leq c_1$ e $|\omega|^2 \leq \frac{\lambda - c_2}{|\theta|}$ para algumas constantes c_1, $c_2 > 0$. Além disso, temos a seguinte estimativa para o diâmetro de M

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{c_2}\left(c_1 + \sqrt{c_1^2 + (n-1)c_2}\right).$$

Em particular, o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é finito.

Demonstração: Por hipótese temos

$$Ric \geq \lambda g + \theta\omega \otimes \omega - \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g.$$

Seja p um ponto em M e considere qualquer geodésica $\gamma : [0, \infty) \to M$ partindo de p e parametrizada pelo comprimento de arco s. Deste modo

$$\begin{aligned}
Ric(\gamma', \gamma') &\geq \lambda g(\gamma', \gamma') + \theta\big(\omega(\gamma')\big)^2 - \frac{1}{2}(\mathscr{L}_X g)(\gamma', \gamma') \\
&= \lambda - |\theta|\big(\omega(\gamma')\big)^2 - \frac{d}{ds}g(X, \gamma') \\
&\geq \lambda - |\theta||\omega|^2 + \frac{d}{ds}g(-X, \gamma') \\
&\geq c_2 + \frac{d}{ds}g(-X, \gamma').
\end{aligned}$$

Definindo a função $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $\alpha(s) = g(-X_{\gamma(s)}, \gamma'(s))$ obtemos pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|\alpha(s)| \leq |X_{\gamma(s)}| \leq c_1.$$

Consequentemente (M, g) satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2 de [25], donde M é compacta e vale a estimativa do diâmetro $\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{c_2}\left(c_1 + \sqrt{c_1^2 + (n-1)c_2}\right)$. Além disso, pelo Teorema 1.3 em [25], $\pi_1(M)$ é finito. $\square$

Salientamos que se $\theta \geq 0$, $|X| \leq c_1$ e sem a condição sobre $|\omega|^2$, o teorema anterior ainda é válido. De fato, o resultado segue de [24] que faz uso do critério de compacidade de Ambrose [1]. Além disso, podemos aplicar novamente o Teorema 1.2 em [25] para obtermos a estimativa de diâmetro:

$$\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\lambda}\left(c_1 + \sqrt{c_1^2 + (n-1)\lambda}\right),$$

Finalizamos esta seção com uma obstrução referente a quase sólitons de Ricci modificados compactos.

Proposição 2.2 *Seja $(M^n, g, X, \lambda, \omega, \theta)$ um quase sóliton de Ricci modificado compacto com curvatura escalar S. Se $n\lambda - S$ é uma função não-negativa, então ω é a 1–forma identicamente nula, (M, g) é uma variedade de Einstein e X é um campo de Killing.*

Demonstração: Inicialmente pelo Teorema de Decomposição de Hodge-de Rham (ver por exemplo [47] p. 223) podemos escrever $X = \nabla h + Y$, em que $h \in C^\infty(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ com $\operatorname{div} Y = 0$. Agora, tomando o traço na equação fundamental obtemos

$$\Delta h = n\lambda - S + \theta|\omega|^2 \geq 0, \tag{2.20}$$

isto é, h é subharmônica, assim h é constante pelo Teorema de Hopf. Voltando à (2.20) temos

$$0 = \Delta h = (n\lambda - S) + \theta|\omega|^2 \geq 0. \tag{2.21}$$

Como ambas as parcelas $n\lambda - S$ e $\theta|\omega|^2$ de (2.21) são não-negativas, segue que $n\lambda = S$ e $\omega \equiv 0$. Além disso, $X = Y$ (pois h é constante), assim pela equação fundamental

$$\mathring{Ric} = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_Y g. \tag{2.22}$$

Agora utilizando a primeira parte do Lema 2.1 deduzimos que

$$0 \leq \int_M |\mathring{Ric}|^2 \mathrm{dM} = \frac{n-2}{2n}\int_M \langle \nabla S, Y\rangle \mathrm{dM} = -\frac{(n-2)}{2n}\int_M S\mathrm{div}Y \mathrm{dM} = 0, \tag{2.23}$$

donde (M, g) é uma variedade de Einstein e X é um campo de Killing por (2.22). É claro que para $n = 2$ a conclusão de X ser um campo de Killing segue de (2.22), visto que toda superfície é uma variedade de Einstein. $\square$

Observação 2.2 *É claro que na proposição anterior se supormos que $\theta < 0$ teremos a mesma obstrução desde que $n\lambda - S$ seja uma função não-positiva.*

2.3 Fluxo Ricci-Harmônico modificado

Nesta seção vamos introduzir o fluxo Ricci-Harmônico modificado (cf. Definição 2.2), em seguida provaremos o teorema de existência e unicidade em tempo curto para tal fluxo. Para isso utilizaremos o "Truque de DeTurck"e o roteiro escrito por Brendle na Seção 2.2 de seu livro [10], o qual refere-se à existência e unicidade em tempo curto para o fluxo de Ricci. Para o nosso caso, definiremos o fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado e por fim definiremos os sólitons Ricci-Harmônico modificados como soluções auto-similares do fluxo Ricci-Harmônico modificado.

Primeiramente discutiremos sobre os requisitos necessários para a introdução do fluxo Ricci-Harmônico modificado. Para não carregar a notação, utilizaremos à convenção de soma sob índices repetidos nos sistemas de coordenadas.

Preliminares

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e (x_i) um sistema de coordenadas locais com campos coordenados associados $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(M) \approx \Gamma(TM)$ e formas duais correspondentes $dx_i \in \mathfrak{X}(M)^* \approx \Gamma(TM^*)$. Denotemos por ∇ a conexão de Levi-Civita da métrica Riemanniana g e por Γ_{ij}^k os símbolos de Christoffel de ∇. Estamos interessados em calcular as derivadas covariantes de ∂_i e dx_i. Sabemos que $\nabla\partial_i \in \Gamma(TM^* \otimes TM)$ e $\nabla dx_i \in \Gamma(TM^* \otimes TM^*)$. Assim

$$\begin{aligned}\nabla\partial_i(\partial_s) &:= \nabla_{\partial_s}\partial_i = \Gamma_{si}^k\partial_k = \Gamma_{is}^k\partial_k = \Gamma_{ij}^k\delta_{sj}\partial_k \\ &= \Gamma_{ij}^k dx_j(\partial_s)\partial_k = \Gamma_{ij}^k dx_j \otimes \partial_k(\partial_s),\end{aligned}$$

isto é,

$$\nabla\partial_i = \Gamma_{ij}^k dx_j \otimes \partial_k. \tag{2.24}$$

Enquanto que,

$$\begin{aligned}\nabla dx_i(\partial_r, \partial_s) &:= (\nabla_{\partial_r} dx_i)(\partial_s) := \nabla_{\partial_r}(dx_i(\partial_s)) - dx_i(\nabla_{\partial_r}\partial_s) \\ &= \nabla_{\partial_r}(\delta_{is}) - dx_i(\Gamma_{rs}^l\partial_l) = -\Gamma_{rs}^i = -\Gamma_{jk}^i\delta_{jr}\delta_{ks} \\ &= -\Gamma_{jk}^i dx_j(\partial_r)dx_k(\partial_s) = -\Gamma_{jk}^i dx_j \otimes dx_k(\partial_r, \partial_s),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla dx_i = -\Gamma_{jk}^i dx_j \otimes dx_k.$$

Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação suave entre as variedades Riemannianas (M^n, g) e (N^m, h). Podemos definir em M o fibrado vetorial ϕ^*TN, induzido por ϕ escrevendo:

$$\begin{aligned}\phi^*TN &= \{(p, w);\ p \in M, w \in T_{\phi(p)}N\} \\ &= \bigcup_{p\in M}\{p\} \times T_{\phi(p)}N.\end{aligned}$$

Para obtermos um referencial local no fibrado ϕ^*TN consideramos um sistema de coordenadas locais (y_α) em N. Note que, para cada $\partial_\alpha \in \Gamma(TN)$ temos $\partial_\alpha|_\phi \in \Gamma(\phi^*TN)$, nos permitindo definir $\phi^*\partial_\alpha := \partial_\alpha|_\phi$. Assim, sendo ∇ a conexão de Levi-Civita de h, e usando a sua expressão local como em (2.24), calculamos a derivada covariante de $\partial_\alpha|_\phi$ como segue

$$\begin{aligned}\nabla\partial_\alpha|_\phi &:= \nabla(\phi^*\partial_\alpha) = \phi^*(\nabla\partial_\alpha) = \phi^*\left(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma dy_\beta \otimes \partial_\gamma\right) \\ &= (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ \phi)d\phi^\beta \otimes \partial_\gamma|_\phi,\end{aligned}$$

em que $\phi^\beta := y_\beta \circ \phi \in C^\infty(M)$, implicando em

$$\nabla\partial_\alpha|_\phi = (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ \phi)\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x_j}dx_j \otimes \partial_\gamma|_\phi.$$

Lembramos que a diferencial $d\phi$ da aplicação ϕ aplica as seções de TM nas seções de TN ao longo de ϕ, isto é, em termos do fibrado ϕ^*TN podemos interpretar $d\phi$ como uma seção do fibrado vetorial de homomorfismos $Hom(TM;\phi^*TN)$, devido a linearidade de $d\phi$. Ademais, sendo esse último fibrado isomorfo ao fibrado vetorial $TM^*\otimes\phi^*TN$, é possível introduzir uma conexão ∇ em $\Gamma(TM^*\otimes\phi^*TN)$ utilizando as conexões dos fibrados TM^* e ϕ^*TN.

Escrevendo $\sigma\in\Gamma(TM^*\otimes\phi^*TN)$ nos sistemas de coordenadas (x_i) e (y_α) para as variedades M e N, respectivamente, obtemos $\sigma=\sigma_i^\alpha dx_i\otimes\partial_\alpha|_\phi$, o que nos permite calcular a derivada covariante $\nabla\sigma\in\Gamma(TM^*\otimes TM^*\otimes\phi^*TN)$, isto é,

$$
\begin{aligned}
\nabla\sigma &= \nabla\left(\sigma_i^\alpha dx_i\otimes\partial_\alpha|_\phi\right)\\
&= d\sigma_i^\alpha\otimes dx_i\otimes\partial_\alpha|_\phi+\sigma_i^\alpha\nabla dx_i\otimes\partial_\alpha|_\phi+\sigma_i^\alpha dx_i\otimes\nabla\partial_\alpha|_\phi\\
&= d\sigma_j^\gamma\otimes dx_j\otimes\partial_\gamma|_\phi+\sigma_k^\gamma\nabla dx_k\otimes\partial_\gamma|_\phi+\sigma_i^\alpha dx_i\otimes\nabla\partial_\alpha|_\phi\\
&= \left(\frac{\partial\sigma_j^\gamma}{\partial x_i}-\Gamma_{ij}^k\sigma_k^\gamma+(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\circ\phi)\sigma_i^\alpha\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x_j}\right)dx_i\otimes dx_j\otimes\partial_\gamma|_\phi.
\end{aligned}
$$

Em particular, para $\sigma=d\phi$,

$$
\begin{aligned}
\nabla d\phi &= \left(\frac{\partial^2\phi^\gamma}{\partial x_i\partial x_j}-\Gamma_{ij}^k\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x_k}+(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\circ\phi)\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x_j}\right)dx_i\otimes dx_j\otimes\partial_\gamma|_\phi\\
&= \left(\nabla^2\phi^\gamma+(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\circ\phi)d\phi^\alpha\otimes d\phi^\beta\right)\otimes\partial_\gamma|_\phi.
\end{aligned}
$$

Decorrida a discussão acima, definimos o *campo de tensão* $\Delta_{g,h}\phi$ da aplicação suave $\phi:(M,g)\to(N,h)$ com respeito às métricas g e h, como a seção de ϕ^*TN dada por

$$
\begin{aligned}
\Delta_{g,h}\phi &:= \mathrm{tr}_g\nabla d\phi=g^{ij}\left(\frac{\partial^2\phi^\gamma}{\partial x_i\partial x_j}-\Gamma_{ij}^k\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x_k}+(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\circ\phi)\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x_j}\right)\partial_\gamma|_\phi\\
&= \left(\Delta\phi^\gamma+(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\circ\phi)g(\nabla\phi^\alpha,\nabla\phi^\beta)\right)\partial_\gamma|_\phi.
\end{aligned}
$$

O campo de tensão generaliza o laplaciano de funções suaves $u:M\to\mathbb{R}$ e, por este motivo, dizemos que uma aplicação suave $\phi:(M,g)\to(N,h)$ é *harmônica* quando $\Delta_{g,h}\phi$ é a seção nula de ϕ^*TN.

Eells e Sampson em [22] estudaram as aplicações harmônicas $\phi:(M,g)\to(N,h)$ entre variedades Riemannianas com o objetivo de resolver o seguinte problema: *Toda aplicação suave $\phi:(M,g)\to(N,h)$ é homotópica à uma aplicação harmônica*? No mesmo artigo uma resposta afirmativa é dada para o caso em que ambas as variedades são compactas e N possui curvatura seccional não-positiva.

É claro que o estudo das aplicações harmônicas é interessante e faz-se relevante. Como sabemos, em análise, as funções harmônicas possuem uma rica teoria e, em geometria não seria diferente, visto que determinados entes geométricos são aplicações harmônicas, tais como, por exemplo, geodésicas, subvariedades mínimas e aplicações holomorfas entre variedades Kähler.

Sabe-se ainda que as aplicações harmônicas são pontos estacionários do fluxo do calor da família de aplicações $\phi(t)$ satisfazendo

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) = \Delta_{g,h}\phi(t).$$

Este fluxo inspirou Hamilton a introduzir o bem sucedido fluxo de Ricci em [28], como uma equação do calor não-linear para uma família a um parâmetro de métricas Riemannianas $g(t)$, em uma variedade suave descrito por

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)}.$$

A ideia de Hamilton era resolver a Conjectura de Poincaré a qual foi provada por Perelman (ver [41, 42, 43]). Neste mesmo trabalho Hamilton provou que o fluxo de Ricci em uma variedade compacta sempre existe em tempo curto e é único, para isto ele recorreu ao Teorema da Função Inversa de Nash-Moser, visto que o fluxo de Ricci é fracamente parabólico. Posteriormente, DeTurck [21] simplificou significativamente a prova da existência e unicidade em tempo curto para o fluxo de Ricci, acrescentando um termo ao fluxo, tornando este novo fluxo "modificado"estritamente parabólico e univocamente relacionado ao fluxo de Ricci. Este método é hoje conhecido na literatura como "Truque de DeTurck".

Com aplicações à relatividade geral List [36] definiu o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)} + 4du(t) \otimes du(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}u(t) = \Delta_{g(t)}u(t), \end{cases}$$

em que $u(t)$ é uma família a um parâmetro de funções suaves em M.

Posteriormente Müller [39] generalizou a ideia de List considerando uma família a um parâmetro de constantes não negativas $\theta(t)$ e de aplicações suaves $\phi(t) : (M, g(t)) \to (N, h)$ definindo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)} + 2\theta(t)\nabla\phi(t) \otimes \nabla\phi(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(t) = \Delta_{g(t),h}\phi(t), \end{cases}$$

em que $\nabla\phi(t) \otimes \nabla\phi(t) := \phi(t)^* h$.

Para nossos propósitos precisaremos ainda da derivada de Lie de uma aplicação suave $\phi : M \to N$ na direção de um campo de vetores suave X sobre M. Para este fim interpretamos a aplicação suave ϕ como um "0–tensor"sobre M que toma valores em $\mathbb{R}^d$, visto que (N, h) pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^d$ para algum d graças ao Teorema do Mergulho de Nash.

Como aprendemos em [35] (p. 324, Proposição 12.36), sabemos que a derivada de Lie de um tensor A sobre M no ponto p é dada por

$$(\mathscr{L}_X A)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\theta_t^* A)(p),$$

em que $\theta : I \times M \to M$ é o fluxo do campo de vetores X.

Devido à discussão acima, e admitindo o cálculo da derivada de Lie na direção do campo X para aplicações $\phi \in C^\infty(M; N) = \{\phi \in C^\infty(M; \mathbb{R}^d); \phi(M) \subseteq N\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathscr{L}_X \phi)_p &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\theta_t^* \phi)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(\theta_t(p)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(\theta^{(p)}(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\phi \circ \theta^{(p)}\right)(t) \\
&= d\phi_p(X_p),
\end{aligned}$$

desde que $\theta^{(p)} : I \to M$ é uma curva integral do campo de vetores X, isto é, $\theta^{(p)}(0) = p$ e $\left(\theta^{(p)}\right)'(0) = X_p$, concluímos que $\mathscr{L}_X \phi = d\phi(X)$.

2.3.1 Existência e unicidade em tempo curto

Definição 2.2 *Sejam M, N variedades suaves e h, ω_N uma métrica Riemanniana e uma 1–forma fixadas em N, respectivamente. Sejam $g(t)$ uma família a um parâmetro de métricas Riemannianas em M e $\phi(t)$ uma família a um parâmetro de aplicações suaves de M em N e considere $\omega(t) := \phi(t)^* \omega_N$. Dizemos que a família $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)} + 2\theta\omega(t) \otimes \omega(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) = \Delta_{g(t),h} \phi(t), \end{cases} \tag{2.25}$$

se ela satisfaz (2.25), em que θ é uma constante positiva e $\Delta_{g(t),h}\phi(t)$ é o campo de tensão da aplicação $\phi(t)$ com respeito às métricas $g(t)$ e h, sob a evolução da métrica $g(t)$ para cada $t \in [0, \varepsilon)$ variando suavemente.

Observamos ainda que o fluxo Ricci-Harmônico modificado generaliza o fluxo introduzido por List em [36] e é uma modificação do fluxo Ricci-Harmônico definido por Müller em [39], por este motivo adotamos tal nomenclatura.

Definição 2.3 *Sejam $(M, \bar{g})$ e (N, h) duas variedades Riemannianas compactas fixadas, e ω_N uma 1–forma fixada em N. Sejam $\tilde{g}(t)$ uma família a um parâmetro de métricas Riemannianas em M, $\tilde{\phi}(t)$ uma família a um parâmetro de aplicações suaves de M em N e considere $\tilde{\omega}(t) := \tilde{\phi}(t)^*\omega_N$. Dizemos que a família $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = -2Ric_{\tilde{g}(t)} + 2\theta\tilde{\omega}(t) \otimes \tilde{\omega}(t) - \mathscr{L}_{Z_t}\tilde{g}(t), \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi}(t) = \Delta_{\tilde{g}(t),h}\tilde{\phi}(t) - \mathscr{L}_{Z_t}\tilde{\phi}(t), \end{cases} \tag{2.26}$$

se ela satisfaz (2.26), em que θ é uma constante positiva, $\Delta_{\tilde{g}(t),h}\tilde{\phi}(t)$ é o campo de tensão da aplicação $\tilde{\phi}(t)$ com respeito às métricas $\tilde{g}(t)$ e h, sob a evolução da métrica $\tilde{g}(t)$ para cada $t \in [0, \varepsilon)$ variando suavemente. Enquanto que, $Z_t = \Delta_{\tilde{g}(t),\bar{g}}\mathrm{id}_M$ é o campo de tensão da aplicação identidade $\mathrm{id}_M : M \to M$ com respeito às métricas $\tilde{g}(t)$ e $\bar{g}$, sob a evolução da métrica $\tilde{g}(t)$ para cada $t \in [0, \varepsilon)$ variando suavemente.

O resultado abaixo garante a existência e unicidade em tempo curto para o fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado.

Proposição 2.3 *Sejam $(M, \bar{g})$ e (N, h) duas variedades Riemannianas compactas fixadas, e ω_N uma 1–forma fixada em N. Dadas uma métrica Riemanniana g_0 em M e uma aplicação suave $\phi_0 : (M, g_0) \to (N, h)$, existem um número real $\varepsilon > 0$, famílias suaves a um parâmetro de métricas $\tilde{g}(t)$, e aplicações suaves $\tilde{\phi}(t)$, $t \in [0, \varepsilon)$, tais que $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado, com dado inicial $(\tilde{g}(0), \tilde{\phi}(0)) = (g_0, \phi_0)$. Além disso, a solução $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é única.*

Demonstração: Sejam (x_i) e (y_α) sistemas de coordenadas locais para as variedades diferenciáveis M e N, respectivamente. Por simplicidade, omitiremos a variável temporal t. Escreveremos agora os entes envolvidos do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado em coordenadas locais. Iniciamos pelo tensor de Ricci na métrica $\tilde{g}$.

$$\begin{aligned} Ric_{\tilde{g}} &= -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}\left(\frac{\partial^2\tilde{g}_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2\tilde{g}_{kj}}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2\tilde{g}_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2\tilde{g}_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}\right) dx_k \otimes dx_l \\ &\quad + \text{termos de ordem baixa}, \end{aligned}$$

em que "termos de ordem baixa" refere-se aos termos de ordem 0 e 1 com respeito a derivadas parciais de $\tilde{g}_{kl}$ e, posteriormente, a derivadas parciais de ϕ^γ. Além disso, definimos o campo de vetores $Z = \Delta_{\tilde{g},\bar{g}}\mathrm{id}_M$, isto é,

$$Z = \tilde{g}^{ij}\left(\bar{\Gamma}^l_{ij} - \tilde{\Gamma}^l_{ij}\right)\partial_l,$$

em que $\bar{\Gamma}$ e $\tilde{\Gamma}$ denotam os símbolos de Christoffel associados as métricas $\bar{g}$ e $\tilde{g}$, respectivamente. O que implica

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}\tilde{g}^{kl}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{g}_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x_k}\right)\partial_l \\ &\quad + \frac{1}{2}\tilde{g}^{ij}\bar{g}^{kl}\left(\frac{\partial \bar{g}_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x_k}\right)\partial_l. \end{aligned}$$

Disto deduzimos que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_Z\tilde{g} &= -\tilde{g}^{ij}\left(\frac{\partial^2 \tilde{g}_{kj}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 \tilde{g}_{il}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 \tilde{g}_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}\right) dx_k \otimes dx_l \\ &\quad + \text{ termos de ordem baixa.} \end{aligned}$$

Desde que as 1–formas $\tilde{\omega} := \tilde{\phi}^*\omega_N$ quando escritas em um sistema de coordenadas independem da escolha da métrica, obtemos

$$\begin{aligned} -2Ric_{\tilde{g}} + 2\theta\tilde{\omega}\otimes\tilde{\omega} - \mathscr{L}_Z\tilde{g} &= \tilde{g}^{ij}\frac{\partial^2 \tilde{g}_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} dx_k \otimes dx_l \\ &\quad + \text{ termos de ordem baixa.} \end{aligned}$$

Agora para a segunda equação do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado temos

$$\Delta_{\tilde{g},h}\tilde{\phi} = \tilde{g}^{ij}\frac{\partial^2 \tilde{\phi}^\gamma}{\partial x_i \partial x_j}\partial_\gamma|_{\tilde{\phi}} + \text{ termos de ordem baixa,}$$

e, como $\mathscr{L}_Z\tilde{\phi} = d\tilde{\phi}(Z)$ possui apenas termos de ordem 1, segue que

$$\Delta_{\tilde{g},h}\tilde{\phi} - \mathscr{L}_Z\tilde{\phi} = \tilde{g}^{ij}\frac{\partial^2 \tilde{\phi}^\gamma}{\partial x_i \partial x_j}\partial_\gamma|_{\tilde{\phi}} + \text{ termos de ordem baixa.}$$

Deste modo o fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado é estritamente parabólico. Portando decorre da teoria padrão de sistemas parabólicos a existência e unicidade em tempo curto para o fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado. □

O lema a seguir é bastante útil para nossos propósitos, visto que ele informa o comportamento do campo de tensão na presença de difeomorfismos. De posse dele provaremos o teorema de existência e unicidade em tempo curto para o fluxo que estamos abordando no caso em que M e N são compactas.

Lema 2.2 *Sejam $\phi : (M, g) \to (N, h)$ uma aplicação suave entre as variedades Riemannianas (M, g) e (N, h) e $\varphi : M \to M$ um difeomorfismo de M. Então*

$$(\Delta_{\varphi^*(g),h}(\phi \circ \varphi))|_p = (\varphi^* (\Delta_{g,h}\phi))\,|_p = (\Delta_{g,h}\phi)|_{\varphi(p)} \in T_{\phi(\varphi(p))}N$$

para todo $p \in M$.

Para o restante desta seção é útil ter em mente o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& (M,g(t)) \arrow[dl, "\mathrm{id}_M\circ\varphi_t"'] \arrow[dr, "\phi(t)"] \arrow[dd, "\varphi_t"] & \\
(M,\bar{g}) & & (N,h) \\
& (M,\tilde{g}(t)) \arrow[ul, "\mathrm{id}_M"] \arrow[ur, "\tilde{\phi}(t)"'] &
\end{tikzcd}$$

O diagrama anterior evidencia como iremos proceder na demonstração do teorema de existência e unicidade para tempo curto.

A partir de agora, para os próximos resultados desta seção, iremos supor que $(M, \bar{g})$ e (N, h) são duas variedades Riemannianas compactas fixadas e ω_N uma 1–forma fixada em N.

As seguintes proposições asseguram a correspondência entre as soluções de ambos os fluxos, o que será útil para verificarmos que o fluxo Ricci-Harmônico modificado existe e é único em tempo curto.

Proposição 2.4 *Suponha que $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado em M. Além disso, seja φ_t, $t \in [0, \varepsilon)$ uma família a um parâmetro de difeomorfismos de M satisfazendo*

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = Z_t|_{\varphi_t(p)}$$

para todo $p \in M$ e todo $t \in [0, \varepsilon)$. Então $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, com $g(t) := \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$ e $\phi(t) := \varphi_t^*(\tilde{\phi}(t))$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado.

Demonstração: Visto que valem as identidades $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$ e $\phi(t) = \varphi_t^*(\tilde{\phi}(t))$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}g(t) &= \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*\tilde{g}(t)) = \varphi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + \mathscr{L}_{Z_t}\tilde{g}(t)\right)\\
&= \varphi_t^*\left(-2Ric_{\tilde{g}(t)} + 2\theta\tilde{\omega}(t)\otimes\tilde{\omega}(t)\right)\\
&= -2Ric_{g(t)} + 2\theta(\varphi_t^*(\tilde{\phi}(t)))^*\left(\omega_N\otimes\omega_N\right)\\
&= -2Ric_{g(t)} + 2\theta\phi(t)^*\left(\omega_N\otimes\omega_N\right)\\
&= -2Ric_{g(t)} + 2\theta\omega(t)\otimes\omega(t),
\end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) &= \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*\tilde{\phi}(t)) = \varphi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi}(t) + \mathscr{L}_{Z_t}\tilde{\phi}(t)\right)\\
&= \varphi_t^*\left(\Delta_{\tilde{g}(t),h}\tilde{\phi}(t)\right) = \Delta_{g(t),h}\phi(t),
\end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos o Lema 2.2.

Portanto $(g(t),\phi(t))$, $t\in[0,\varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado, desde que $(\tilde{g}(t),\tilde{\phi}(t))$, $t\in[0,\varepsilon)$, seja uma solução do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado. $\square$

Proposição 2.5 *Suponha que $(g(t),\phi(t))$, $t\in[0,\varepsilon)$ é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado em M. Além disso, suponha que φ_t, $t\in[0,\varepsilon)$, é uma família a um parâmetro de difeomorfismos de M evoluindo sob o fluxo do calor da família de aplicações φ_t*

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t = \Delta_{g(t),\bar{g}}\varphi_t.$$

para cada $t\in[0,\varepsilon)$, definimos $(\tilde{g}(t),\tilde{\phi}(t))$, uma métrica Riemanniana $\tilde{g}(t)$ e uma aplicação suave $\tilde{\phi}(t)$, por $\varphi_t^*(\tilde{g}(t)) = g(t)$ e $\varphi_t^*(\tilde{\phi}(t)) = \phi(t)$. Então $(\tilde{g}(t),\tilde{\phi}(t))$, $t\in[0,\varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado. Ademais,

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = Z_t|_{\varphi_t(p)} \tag{2.27}$$

para todo $p\in M$ e todo $t\in[0,\varepsilon)$.

Demonstração: Usando o Lema 2.2, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = (\Delta_{g(t),\bar{g}}\varphi_t)|_p = (\Delta_{\varphi_t^*(\tilde{g}(t)),\bar{g}}\varphi_t)|_p = (\Delta_{\tilde{g}(t),\bar{g}}\mathrm{id}_M)|_{\varphi_t(p)} = Z_t|_{\varphi_t(p)}$$

para todo $p \in M$ e todo $t \in [0, \varepsilon)$. Visto que $\varphi_t^*(\tilde{g}(t)) = g(t)$ e $\varphi_t^*(\tilde{\phi}(t)) = \phi(t)$, segue que

$$\begin{aligned}\varphi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + \mathscr{L}_{Z_t}\tilde{g}(t)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)} + 2\theta\omega(t)\otimes\omega(t)\\ &= \varphi_t^*\left(-2Ric_{\tilde{g}(t)} + 2\theta\tilde{\omega}(t)\otimes\tilde{\omega}(t)\right)\end{aligned}$$

o que implica

$$\varphi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + 2Ric_{\tilde{g}(t)} - 2\theta\tilde{\omega}(t)\otimes\tilde{\omega}(t) + \mathscr{L}_{Z_t}\tilde{g}(t)\right) = 0,$$

e também

$$\varphi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi}(t) + \mathscr{L}_{Z_t}\tilde{\phi}(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t) = \Delta_{g(t),h}\phi(t) = \varphi_t^*\left(\Delta_{\tilde{g}(t),h}\tilde{\phi}(t)\right),$$

donde

$$\varphi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi}(t) - \Delta_{\tilde{g}(t),h}\tilde{\phi}(t) + \mathscr{L}_{Z_t}\tilde{\phi}(t)\right) = 0.$$

Assim, $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado, sempre que $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, for uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado. $\square$

Finalmente estamos em condições de mostrar o teorema de existência e unicidade em tempo curto para o fluxo Ricci-Harmônico modificado, o qual é análogo ao Teorema de Hamilton em [28] referente ao fluxo de Ricci.

Teorema 2.3 *Existe um número real $\varepsilon > 0$ e famílias a um parâmetro de métricas Riemannianas $g(t)$ e aplicações suaves $\phi(t)$, $t \in [0, \varepsilon)$, tais que $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado com $g(0) = g_0$ e $\phi(0) = \phi_0$. Além disso, a solução $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é única.*

Demonstração: Primeiramente provaremos a existência da solução. Pela Proposição 2.3 existe uma solução $(\tilde{g}(t), \tilde{\phi}(t))$ do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado a qual, como sabemos, está definida em algum intervalo $[0, \varepsilon)$ com $\tilde{g}(0) = g_0$ e $\tilde{\phi}(0) = \phi_0$. Consequentemente, temos

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = -2Ric_{\tilde{g}(t)} + 2\theta\tilde{\omega}(t)\otimes\tilde{\omega}(t) - \mathscr{L}_{Z_t}\tilde{g}(t)\\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi}(t) = \Delta_{\tilde{g}(t),h}\tilde{\phi}(t) - \mathscr{L}_{Z_t}\tilde{\phi}(t),\end{cases}$$

em que $Z_t = \Delta_{\tilde{g}(t),\bar{g}}\mathrm{id}_M$. Para cada $p \in M$, denotamos por $\varphi_t(p)$ a solução da EDO

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = Z_t|_{\varphi_t(p)}$$

com condição inicial $\varphi_0(p) = p$. Pela Proposição 2.4, as métricas $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t))$ e aplicações $\phi(t) = \varphi_t^*(\tilde{\phi}(t))$, $t \in [0,\varepsilon)$, constituem uma solução do fluxo Ricci-Harmônico modificado com $g(0) = g_0$ e $\phi(0) = \phi_0$.

Agora provaremos a unicidade de nossa solução. Suponha que $(g^i(t), \phi^i(t))$, $i = 1,2$, são ambas as soluções do fluxo Ricci-Harmônico modificado, as quais estão definidas no mesmo intervalo $[0,\varepsilon)$, satisfazendo $g^1(0) = g^2(0)$ e $\phi^1(0) = \phi^2(0)$. Queremos deduzir que $(g^1(t), \phi^1(t)) = (g^2(t), \phi^2(t))$ para todo $t \in [0,\varepsilon)$. Provaremos tal fato argumentado por contradição. Suponha que $(g^1(t), \phi^1(t)) \neq (g^2(t), \phi^2(t))$ para algum $t \in [0,\varepsilon)$. Definimos o número real $\delta \in [0,\varepsilon)$ por

$$\delta = \inf\left\{t \in [0,\varepsilon) : (g^1(t), \phi^1(t)) \neq (g^2(t), \phi^2(t))\right\}.$$

Claramente, $(g^1(\delta), \phi^1(\delta)) = (g^2(\delta), \phi^2(\delta))$. Seja φ_t^1 a solução do fluxo do calor da família de aplicações φ_t^1

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^1 = \Delta_{g^1(t),\bar{g}}\varphi_t^1$$

com condição inicial $\varphi_\delta^1 = \mathrm{id}_M$. Analogamente, denotamos por φ_t^2 a solução do fluxo do calor da família de aplicações φ_t^2

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^2 = \Delta_{g^2(t),\bar{g}}\varphi_t^2$$

com condição inicial $\varphi_\delta^2 = \mathrm{id}_M$. Segue da teoria parabólica que φ_t^1 e φ_t^2 estão definidas em algum intervalo $[\delta, \delta+\tilde{\varepsilon})$, em que $\tilde{\varepsilon}$ é um número real positivo. Além disso, se escolhemos $\tilde{\varepsilon} > 0$ suficientemente pequeno, então $\varphi_t^1 : M \to M$ e $\varphi_t^2 : M \to M$ são difeomorfismos para todo $t \in [\delta, \delta+\tilde{\varepsilon})$.

Para cada $t \in [\delta, \delta+\tilde{\varepsilon})$, definimos as métricas Riemannianas $\tilde{g}^i(t)$ em M, $i = 1,2$, por $(\varphi_t^i)^*(\tilde{g}^i(t)) := g^i(t)$ e também as aplicações suaves $\tilde{\phi}^i(t)$ de M em (N,h), $i = 1,2$, por $(\varphi_t^i)^*(\tilde{\phi}^i(t)) := \phi^i(t)$. Assim segue da Proposição 2.5 que $(\tilde{g}^1(t), \tilde{\phi}^1(t))$ e $(\tilde{g}^2(t), \tilde{\phi}^2(t))$ são duas soluções do fluxo Ricci-Harmônico-DeTurck modificado. Como $(\tilde{g}^1(\delta), \tilde{\phi}^1(\delta)) = (\tilde{g}^2(\delta), \tilde{\phi}^2(\delta))$, a unicidade na Proposição 2.3 implica que $(\tilde{g}^1(t), \tilde{\phi}^1(t)) = (\tilde{g}^2(t), \tilde{\phi}^2(t))$ para todo $t \in [\delta, \delta+\tilde{\varepsilon})$. Para cada $t \in [\delta, \delta+\tilde{\varepsilon})$, definimos um campo de vetores Z_t em M por

$$Z_t = \Delta_{\tilde{g}^1(t),\bar{g}}\mathrm{id}_M = \Delta_{\tilde{g}^2(t),\bar{g}}\mathrm{id}_M.$$

Agora pela Proposição 2.5, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^1(p) = Z_t|_{\varphi_t^1(p)}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^2(p) = Z_t|_{\varphi_t^2(p)}$$

para todos $p \in M$ e todo $t \in [\delta, \delta + \tilde{\varepsilon})$. Como $\varphi_\delta^1 = \varphi_\delta^2 = \mathrm{id}_M$, segue que $\varphi_t^1 = \varphi_t^2$ para todo $t \in [\delta, \delta + \tilde{\varepsilon})$. De posse dessas informações concluímos que

$$g^1(t) = (\varphi_t^1)^*(\tilde{g}^1(t)) = (\varphi_t^2)^*(\tilde{g}^2(t)) = g^2(t)$$

e

$$\phi^1(t) =: (\varphi_t^1)^*(\tilde{\phi}^1(t)) = (\varphi_t^2)^*(\tilde{\phi}^2(t)) := \phi^2(t).$$

O que contradiz a definição do número real δ. $\square$

2.3.2 Sóliton Ricci-Harmônico modificado

Nesta seção caracterizamos um sóliton de Ricci modificado como parte de uma solução auto-similar do fluxo Ricci-Harmônico modificado, sendo esta, a segunda motivação para a introdução dos sólitons de Ricci modificados. Além disso, representa uma nova caracterização para as métricas m–quasi-Einstein.

Admitiremos aqui que a solução existe e é única em tempo curto (fato este provado na seção anterior para o caso em que M e N são compactas). Deste modo os sólitons de Ricci modificados são incorporados na definição de sóliton Ricci-Harmônico modificado (cf. Definição 2.4) e, pela Proposição 2.6, deduzimos que esse último conceito é equivalente a uma solução auto-similar do fluxo Ricci-Harmônico modificado (cf. Definição 2.5).

Definição 2.4 *Um sóliton Ricci-Harmônico modificado $(M, g_0, X, \lambda, \omega, \theta, \phi_0)$ é um sóliton de Ricci modificado $(M, g_0, X, \lambda, \omega, \theta)$ munido com uma aplicação suave $\phi_0 : (M, g_0) \to (N, h)$, para alguma variedade Riemanniana fixada (N, h) e uma 1–forma fixada ω_N em N satisfazendo*

$$\begin{cases} \phi_0^*\omega_N = \omega, \\ \Delta_{g_0,h}\phi_0 = \mathscr{L}_X\phi_0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Sabemos que uma solução auto-similar $g(t)$, $t \in [0, \varepsilon)$, do fluxo de Ricci é invariante por scaling de constantes positivas $c(t)$ e difeomorfismos ψ_t de M que variam suavemente por um parâmetro temporal t de uma métrica inicial g_0, isto é, $g(t) := c(t)\psi_t^* g_0$. Portanto é razoável que a família de aplicações $\phi(t) : M \to N$ seja definida por $\phi(t) := \psi_t^* \phi_0$, para uma aplicação inicial $\phi_0 : (M, g_0) \to (N, h)$.

Definição 2.5 *Dizemos que* $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, *é uma solução auto-similar do fluxo Ricci-Harmônico modificado se existir uma família a um parâmetro de difeomorfismos* ψ_t *de* M *satisfazendo* $\psi_0 = \mathrm{id}_M$ *e escalares positivos* $c(t)$ *variando suavemente em* t*, tais que*

$$\begin{cases} g(t) = c(t)\psi_t^* g_0, \\ \phi(t) = \psi_t^* \phi_0 = \phi_0 \circ \psi_t. \end{cases} \tag{2.29}$$

Inspirado no Lema 2.4 em [18] referente aos sólitons de Ricci obtemos, de modo análogo, a relação entre um sóliton Ricci-Harmônico modificado e uma solução auto-similar do fluxo Ricci-Harmônico modificado.

O seguinte diagrama será de grande utilidade na demonstração do resultado abaixo.

$$\begin{tikzcd}
(M, g_0) \arrow[r, "\phi_0"] & (N, h) \\
\left(M, \frac{g(t)}{c(t)}\right) \arrow[u, "\psi_t"] \arrow[ur, "\phi(t)"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposição 2.6 *Seja* $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, *uma solução auto-similar do fluxo Ricci-Harmônico modificado, então existe uma aplicação suave* $\phi_0 : (M, g_0) \to (N, h)$ *satisfazendo* (2.28) *para uma* 1*–forma fixada* ω_N *em* N *e um campo de vetores* X *em* M*, de modo que* $(M, g_0, X, \lambda, \omega, \theta)$ *é um sóliton de Ricci modificado, isto é,* $(M, g_0, X, \lambda, \omega, \theta, \phi_0)$ *é um sóliton Ricci-Harmônico modificado. Reciprocamente, dado um sóliton Ricci-Harmônico modificado existem famílias a um parâmetro de difeomorfismos* ψ_t *de* M *e escalares positivos* $c(t)$ *variando suavemente em* t *tais que* $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, *com* $g(t) := c(t)\psi_t^* g_0$ *e* $\phi(t) := \psi_t^* \phi_0$*, é uma solução auto-similar do fluxo Ricci-Harmônico modificado.*

Demonstração: Inicialmente suponhamos que $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução auto-similar do fluxo Ricci-Harmônico modificado. Como ψ_t é uma família de difeomorfismos de M satisfazendo $\psi_0 = \mathrm{id}_M$ e $c(t)$ são escalares positivos variando suavemente em t, podemos assumir sem perda de generalidade que $c(0) = 1$. Defina ω em M por $\omega := \phi_0^*\omega_N$ para a 1–forma fixada ω_N em N. Assim, pela definição de $\omega(t)$ obtemos

$$\omega(t) = \phi(t)^*\omega_N = (\phi_0 \circ \psi_t)^*\omega_N = \psi_t^*\phi_0^*\omega_N = \psi_t^*\omega,$$

logo

$$-2Ric_{g_0} + 2\theta\omega \otimes \omega = \frac{\partial}{\partial t}g(t)\Big|_{t=0} = c'(0)g_0 + \mathscr{L}_{Y_0}g_0,$$

em que Y_t é a família de campos de vetores gerada pelos difeomorfismos ψ_t. Assim $(M, g_0, X, \lambda, \omega, \theta)$ satisfaz a equação fundamental do sóliton de Ricci modificado com $\lambda = -\frac{c'(0)}{2}$ e $X = Y_0$. Além disso,

$$\Delta_{g_0,h}\phi_0 = \Delta_{g(t),h}\phi(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\psi_t^*\phi_0\Big|_{t=0} = \psi_t^*(\mathscr{L}_{Y_t}\phi_0)\Big|_{t=0} = \mathscr{L}_X\phi_0.$$

Consequentemente, $(M, g_0, X, \lambda, \omega, \theta, \phi_0)$ é um sóliton Ricci-Harmônico modificado.

Reciprocamente, seja $(M, g_0, X, \lambda, \omega, \theta, \phi_0)$ um sóliton Ricci-Harmônico modificado. Defina $c(t) = 1 - 2\lambda t$, e uma família a um parâmetro de campos de vetores Y_t em M por $Y_t = \frac{X}{c(t)}$.

Seja ψ_t a família de difeomorfismos gerada pela família Y_t, isto é, $Y_t|_{\psi_t(p)} = \frac{\partial}{\partial t}\psi_t(p)$, em que $p \in M$ e $\psi_0 = \mathrm{id}_M$. Assim podemos definir as famílias a um parâmetro de aplicações suaves de M a N e métricas Riemannianas em M por

$$\phi(t) := \psi_t^*\phi_0 \quad \text{e} \quad g(t) := c(t)\psi_t^*g_0,$$

respectivamente. Como $\phi_0^*\omega_N = \omega$ temos

$$\psi_t^*(\theta\omega \otimes \omega) = \theta\psi_t^*(\phi_0^*\omega_N \otimes \phi_0^*\omega_N) = \theta\phi(t)^*(\omega_N \otimes \omega_N) = \theta\omega(t) \otimes \omega(t),$$

em que definimos $\omega(t) := \phi(t)^*\omega_N$. Consequentemente temos que $(g(t), \phi(t))$, $t \in [0, \varepsilon)$, é uma solução auto-similar do fluxo Ricci-Harmônico modificado, pois

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g(t) &= -2\lambda\psi_t^*g_0 + c(t)\psi_t^*(\mathscr{L}_{Y_t}g_0) = \psi_t^*(-2\lambda g_0 + \mathscr{L}_X g_0)\\ &= \psi_t^*(-2Ric_{g_0} + 2\theta\omega \otimes \omega) = -2Ric_{g(t)} + 2\theta\omega(t) \otimes \omega(t),\end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) &= \psi_t^*(\mathscr{L}_{Y_t}\phi_0) = \frac{1}{c(t)}\psi_t^*(\mathscr{L}_X\phi_0) = \frac{1}{c(t)}\psi_t^*(\Delta_{g_0,h}\phi_0)\\ &= \frac{1}{c(t)}\Delta_{\psi_t^*g_0,h}\phi(t) = \Delta_{g(t),h}\phi(t).\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Construção de quase sólitons de Ricci com estrutura de produto deformado

3.1 Condições de existência para a construção

Iniciamos esta seção observando que as equações de Bishop e O'Neill para o tensor de Ricci do produto deformado $B^n \times_f F^m$ também são verdadeiras quando a fibra tem dimensão $m = 1$ e, neste caso, ${}^F Ric \equiv 0$.

Deduziremos as equações necessárias para a construção de um quase sóliton de Ricci com estrutura de produto deformado $(B^n \times_f F^m, \tilde{X}, \tilde{\lambda})$ que, por simplicidade, escreveremos quase sóliton de Ricci PW (conforme o Capítulo 1), em que $\tilde{X}$ é o levantamento horizontal de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $\tilde{\lambda}$ é o levantamento de uma função $\lambda \in C^\infty(B)$ para o produto. Quando X é o gradiente de uma função suave φ sobre a base B, indicamos a tese de Feitosa [23] que trata da construção de quase sólitons de Ricci gradientes PW, e a tese de Matos Neto [38] para uma classificação das variedades tipo Ricci-Hessiano que ocorrem nas bases de quase sólitons de Ricci gradientes PW.

A partir da equação fundamental de um quase sóliton de Ricci PW obteremos uma equação de estrutura para a sua base, que envolve o levantamento da derivada de Lie de g_B na direção do campo de vetores X e uma expressão para $\mu = \mu(X, f, \lambda, m)$, que fará o papel da possível constante de Einstein da fibra. Aqui seguiremos procedimentos análogos aos executados no Capítulo 1.

Proposição 3.1 *Sejam $B^n \times_f F^m$ um produto deformado, X um campo de vetores suave e λ uma função suave em B de modo que $(B^n \times_f F^m, \tilde{X}, \tilde{\lambda})$ é um quase sóliton de Ricci. Então, o tensor de Ricci na base é calculado pela equação*

$$ {}^{B}Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_B = \lambda g_B + \frac{m}{f} H^f \tag{3.1} $$

e o tensor de Ricci na fibra satisfaz ${}^{F}Ric = \mu g_F$, com μ dada por

$$ \mu = f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - fX(f) + \lambda f^2. \tag{3.2} $$

Demonstração: A prova deste resultado é semelhante a prova da Proposição 1.2, sendo suficiente utilizar os Lemas 1.1 e 1.2. Inicialmente dados $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ temos

$$ \begin{aligned} {}^{B}Ric(Y,Z) - \frac{m}{f}H^f(Y,Z) &= Ric(Y,Z) = \tilde{\lambda} g(Y,Z) - \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\tilde{X}} g(Y,Z) \\ &= \lambda g_B(Y,Z) - \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_B(Y,Z), \end{aligned} $$

donde (3.1) é verificada. Para $V, W \in \mathfrak{L}(F)$ vale

$$ \begin{aligned} Ric(V,W) &= \tilde{\lambda} g(V,W) - \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\tilde{X}} g(V,W) \\ &= \lambda f^2 g_F(V,W) - \frac{1}{2} g(D_V X, W) - \frac{1}{2} g(V, D_W X) \\ &= \lambda f^2 g_F(V,W) - fX(f) g_F(V,W). \end{aligned} $$

Por outro lado,

$$ Ric(V,W) = {}^{F}Ric(V,W) - \big(f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2\big) g_F(V,W). $$

Logo, é imediato que (3.2) é verdadeira. $\square$

De acordo com a Proposição 3.1 a base de um quase sóliton de Ricci PW satisfaz a equação (3.1) e uma determinada expressão $\mu = \mu(X, f, \lambda, m)$ é obtida em (3.2), o que nos motiva considerar uma variedade Riemanniana (B, g) satisfazendo a seguinte equação de estrutura

$$ Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g + \frac{m}{f}\nabla^2 f, \tag{3.3} $$

em que $f > 0$, $\lambda \in C^\infty(B)$ e $X \in \mathfrak{X}(B)$, com o propósito de obter uma identidade que envolva a expressão de μ, e apontando as condições que torne B a base de um quase sóliton de Ricci PW.

Desenvolvendo cada membro da identidade de Bianchi contraída duas vezes

$$\mathrm{div}Ric = \frac{1}{2}dS,$$

obteremos primeiramente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}Ric &= \mathrm{div}\left(-\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g\right) + d\lambda + \frac{m}{f}\mathrm{div}\left(\nabla^2 f\right) - \frac{m}{2f^2}d|\nabla f|^2 \\
&= \mathrm{div}\left(-\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g\right) + d\lambda + \frac{m}{f}\Big(Ric(\nabla f, \cdot) + d\Delta f\Big) - \frac{m}{2f^2}d|\nabla f|^2 \\
&= \mathrm{div}\left(-\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g\right) + d\lambda + \frac{m}{f}\left(-\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g(\nabla f, \cdot) + \lambda df + \frac{m}{2f}d|\nabla f|^2\right) \\
&\quad + \frac{m}{f}d\Delta f - \frac{m}{2f^2}d|\nabla f|^2. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Precisaremos da equação

$$\mathscr{L}_X g(\nabla f, \cdot) = (\nabla_{\nabla f}X)^\flat + d(X(f)) - \nabla^2 f(X, \cdot), \qquad (3.5)$$

que pode ser obtida por uma conta direta. Substituindo (3.5) em (3.4), encontramos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}Ric &= \mathrm{div}\left(-\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g\right) + d\lambda + \frac{m}{f}\left(-\frac{1}{2}\Big((\nabla_{\nabla f}X)^\flat + d(X(f)) - \nabla^2 f(X, \cdot)\Big)\right) \\
&\quad + \frac{m}{f}\lambda df + \frac{m^2}{2f^2}d|\nabla f|^2 + \frac{m}{f}d\Delta f - \frac{m}{2f^2}d|\nabla f|^2 \\
&= \mathrm{div}\left(-\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g\right) + d\lambda - \frac{m}{2f}(\nabla_{\nabla f}X)^\flat - \frac{m}{2f}d(X(f)) + \frac{m}{2f}\nabla^2 f(X, \cdot) \\
&\quad + \frac{m}{f}\lambda df + \frac{m(m-1)}{2f^2}d|\nabla f|^2 + \frac{m}{f}d\Delta f \\
&= \mathrm{div}\left(-\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g\right) + d\lambda - \frac{m}{2f}(\nabla_{\nabla f}X)^\flat + \frac{m}{2f}\nabla^2 f(X, \cdot) \\
&\quad + \frac{m}{2f^2}\Big(-fdX(f) + 2\lambda f df + (m-1)d|\nabla f|^2 + 2fd\Delta f\Big) \\
&= \mathrm{div}\left(-\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g\right) + d\lambda - \frac{m}{2f}(\nabla_{\nabla f}X)^\flat + \frac{m}{2f}\nabla^2 f(X, \cdot) \\
&\quad + \frac{m}{2f^2}\Big(-d(fX(f)) + X(f)df + d(\lambda f^2) - f^2 d\lambda \\
&\quad + (m-1)d|\nabla f|^2 + fd\Delta f + d(f\Delta f) - \Delta f df\Big).
\end{aligned}$$

É conveniente para nós definirmos

$$\mu = f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - fX(f) + \lambda f^2, \qquad (3.6)$$

de modo que, podemos reescrever a expressão

$$\begin{aligned} \mathrm{div}Ric &= \mathrm{div}\left(-\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g\right) - \frac{m-2}{2}d\lambda - \frac{m}{2f}(\nabla_{\nabla f}X)^\flat + \frac{m}{2f}\nabla^2 f(X,\cdot) \\ &+\frac{m}{2f^2}d\mu + \frac{m}{2f^2}X(f)df + \frac{1}{2}d\left(\frac{m}{f}\Delta f\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por outro lado

$$dS = -d(\mathrm{div}X) + nd\lambda + d\left(\frac{m}{f}\Delta f\right). \tag{3.8}$$

Da relação entre (3.7) e (3.8) deduzimos a próxima equação

$$\begin{aligned} \frac{m}{2f^2}d\mu &= \mathrm{div}\left(\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g\right) - \frac{1}{2}d(\mathrm{div}X) + \frac{n+m-2}{2}d\lambda \\ &+\frac{m}{2f}\left(\nabla_{\nabla f}X\right)^\flat - \frac{m}{2f}\nabla^2 f(X,\cdot) - \frac{m}{2f^2}X(f)df. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Em particular, se X é o campo gradiente de uma função suave φ, temos

$$\begin{aligned} \frac{m}{2f^2}d\mu &= \mathrm{div}(\nabla^2\varphi) - \frac{1}{2}d\Delta\varphi + \frac{n+m-2}{2}d\lambda \\ &+\frac{m}{2f}\nabla\varphi(\nabla f,\cdot) - \frac{m}{2f}\nabla^2 f(\nabla\varphi,\cdot) - \frac{m}{2f^2}\nabla\varphi(f)df \\ &= Ric(\nabla\varphi,\cdot) + \frac{1}{2}d\Delta\varphi + \frac{n+m-2}{2}d\lambda \\ &+\frac{m}{2f}d(\nabla\varphi(f)) - \frac{m}{f}\nabla^2 f(\nabla\varphi,\cdot) - \frac{m}{2f^2}\nabla\varphi(f)df \\ &= -\frac{1}{2}d|\nabla\varphi|^2 + \lambda d\varphi + \frac{1}{2}d\Delta\varphi + \frac{n+m-2}{2}d\lambda + \frac{1}{2}d\left(\frac{m}{f}\nabla\varphi(f)\right), \end{aligned}$$

reagrupando,

$$d\mu = \frac{f^2}{m}\left(d\left(\Delta\varphi - |\nabla\varphi|^2 + \frac{m}{f}\nabla\varphi(f) + (n+m-2)\lambda\right) + 2\lambda d\varphi\right), \tag{3.10}$$

a qual também pode ser obtida durante a demonstração da Proposição 2.3 de [23]. Ainda em [23] foi provado o seguinte resultado:

Proposição A [23] *Seja $\mathbb{M} = B^n \times_f \mathbb{F}^m$ um produto deformado e duas funções suaves $\psi \in C^\infty(\mathbb{M})$ e $\lambda \in C^\infty(B)$ tais que $(B^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla\psi, \tilde{\lambda})$ seja um quase soliton de Ricci gradiente, com $\mathcal{H}(\nabla\psi) \in \mathfrak{L}(B)$ e $\mathcal{V}(\nabla\psi) \in \mathfrak{L}(\mathbb{F})$. Então $\psi = \tilde{\varphi}$ para alguma função $\varphi \in C^\infty(B)$ e a equação*

$$-2\lambda d\varphi + d\Big((2-m-n)\lambda + |\nabla\varphi|^2 - \Delta\varphi - \frac{m}{f}\nabla\varphi(f)\Big) = 0, \tag{3.11}$$

é válida para as funções f, φ e λ definidas em B.

Observação 3.1 *No contexto da Proposição A podemos usar nossa Proposição 3.1 para garantir que a fibra do produto deformado* $\mathbb{M} = B^n \times_f \mathbb{F}^m$ *é de fato uma variedade de Einstein, com* ${}^{\mathbb{F}}Ric = \mu g_{\mathbb{F}}$ *e* μ *dada por* (3.2)*. Ademais, pelas equações* (3.11) *e* (3.10)*,* μ *é constante. Para o caso não-gradiente, a dificuldade está na obtenção de uma equação do tipo* (3.11)*. Por isso assumiremos a nulidade da equação* (3.13) *abaixo.*

Proposição 3.2 *Sejam* (B^n, g) *uma variedade Riemanniana,* $f > 0$*,* λ *funções suaves e* X *um campo de vetores suave satisfazendo*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g = \lambda g + \frac{m}{f}\nabla^2 f \tag{3.12}$$

e

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g\right) - \frac{1}{2}d(\operatorname{div}X) + \frac{n+m-2}{2}d\lambda + \frac{m}{2f}\left(\nabla_{\nabla f}X\right)^{\flat} - \frac{m}{2f}\nabla^2 f(X,\cdot) - \frac{m}{2f^2}X(f)df = 0. \tag{3.13}$$

Então $\mu = f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - fX(f) + \lambda f^2$ *é uma constante.*

A Proposição 3.2 torna possível generalizar o Teorema 1.3 do Capítulo 1 para o contexto deste capítulo.

Teorema 3.1 *Seja* (B^n, g_B) *uma variedade Riemanniana completa com um campo de vetores suave* X *e duas funções suaves* $f > 0$*,* λ *satisfazendo as equações* (3.12) *e* (3.13)*. Então, tomando a constante* $\mu = f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - fX(f) + \lambda f^2$ *e uma variedade Riemanniana completa* F^m *com tensor de Ricci* ${}^{F}Ric = \mu g_F$*, obtemos que* $(B^n \times_f F^m, \tilde{X}, \tilde{\lambda})$ *é um quase sóliton de Ricci PW.*

Demonstração: Pelas hipóteses sobre a função f e o campo de vetores X podemos concluir pela Proposição 3.2 que a expressão μ dada por (3.6) é constante. Tomando uma variedade de Einstein (F^m, g_F) com tensor de Ricci ${}^{F}Ric = \mu g_F$, podemos considerar o produto deformado $(B^n \times_f F^m, g)$, com $g = \pi^* g_B + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_F$. Esta variedade tem uma estrutura de quase sóliton de Ricci. De fato, observamos inicialmente que a equação fundamental

$$Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\tilde{X}} g = \tilde{\lambda} g$$

é satisfeita para todos $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$, pelos fatos: pullback pela π da equação (3.12), $\mathscr{L}_{\tilde{X}} g(Y,Z) = \mathscr{L}_X g_B(Y,Z)$, $H^f(Y,Z) = \nabla^2 \tilde{f}(Y,Z)$ e parte (i) do Lema 1.2.

Para o caso em que $Y \in \mathfrak{L}(B)$ e $V \in \mathfrak{L}(F)$ usamos $\tilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$ e parte (i) do Lema 1.1 para verificar que $\mathscr{L}_{\tilde{X}}g(Y,V) = g(D_Y X, V) + g(Y, D_V X) = 0$. Assim, pela parte (ii) do Lema 1.2, a equação fundamental é novamente satisfeita.

Finalmente, para $V, W \in \mathfrak{L}(F)$ temos pela definição de μ e parte (iii) do Lema 1.2 que

$$\begin{aligned} Ric(V,W) &= \mu g_F(V,W) - (f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2)g_F(V,W) \\ &= (\lambda f^2 - fX(f))g_F(V,W) \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{f}X(f)\right) g(V,W)). \end{aligned}$$

Por outro lado, a equação

$$\mathscr{L}_{\tilde{X}}g(V,W) = 2\frac{X(f)}{f}g(V,W)$$

nos permite concluir que a equação fundamental é novamente satisfeita, o que completa a prova do teorema. □

3.2 Exemplo de sóliton de Ricci não-gradiente PW expansivo

Finalizaremos esta tese aplicando o Teorema 3.1 obtendo uma classe de sólitons de Ricci não-gradientes PW expansivos, cuja base é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ em seu modelo de produto deformado, conforme o Corolário 3.1. Salientamos ainda que é possível introduzir a referida estrutura mesmo o campo de vetores X sendo também dependente da fibra, a qual será apresentada antes do nosso exemplo.

A variedade Riemanniana que motiva o nosso exemplo é o grupo de Lie solúvel Sol^3, cuja estrutura de sóliton de Ricci não-gradiente foi descoberta por Baird-Danielo [2].

Lembre que Sol^3 é o espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ munido com a métrica Riemanniana

$$g_{Sol^3} = dx_1^2 + e^{2x_1}dx_2^2 + e^{-2x_1}dx_3^2.$$

Isto nos permite interpretar Sol^3 como o duplo produto deformado $\mathbb{R} \times_{e^{x_1}} \mathbb{R} \times_{e^{-x_1}} \mathbb{R}$, ou ainda, como $\mathbb{H}^2 \times_{e^{-x_1}} \mathbb{R}$, visto que $\mathbb{R} \times_{e^{x_1}} \mathbb{R}$ é um modelo de produto deformado para $\mathbb{H}^2$.

Por um cálculo direto, o tensor de Ricci de Sol^3 é dado por

$$^{Sol^3}Ric = -2dx_1^2.$$

Queremos encontrar uma estrutura de sóliton de Ricci sobre Sol^3. Com este fim, escolhemos o campo de vetores suave $X = a\partial_1 + bx_2\partial_2 + cx_3\partial_3$ em Sol^3, com a, b e c constantes. Tal campo não é gradiente, desde que escolhamos constantes b e c não simultaneamente nulas, pois

$$\begin{aligned} X^\flat &= g_{Sol^3}(X, \cdot) = dx_1(X)dx_1 + e^{2x_1}dx_2(X)dx_2 + e^{-2x_1}dx_3(X)dx_3 \\ &= adx_1 + be^{2x_1}x_2dx_2 + ce^{-2x_1}x_3dx_3, \end{aligned}$$

e por derivação exterior

$$dX^\flat = 2be^{2x_1}x_2dx_1 \wedge dx_2 - 2ce^{-2x_1}x_3dx_1 \wedge dx_3 \neq 0,$$

mostrando que a 1–forma dual $X^\flat = g_{Sol^3}(X, \cdot)$ não é fechada. Portanto, X não pode ser gradiente.

Resta calcular $\mathscr{L}_X g_{Sol^3}$. Vejamos:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_X g_{Sol^3} &= \mathscr{L}_X(dx_1) \otimes dx_1 + dx_1 \otimes \mathscr{L}_X(dx_1) \\ &\quad + X(e^{2x_1})dx_2^2 + e^{2x_1}\mathscr{L}_X(dx_2) \otimes dx_2 + e^{2x_1}dx_2 \otimes \mathscr{L}_X(dx_2) \\ &\quad + X(e^{-2x_1})dx_3^2 + e^{-2x_1}\mathscr{L}_X(dx_3) \otimes dx_3 + e^{-2x_1}dx_3 \otimes \mathscr{L}_X(dx_3) \\ &= d(X(x_1)) \otimes dx_1 + dx_1 \otimes d(X(x_1)) \\ &\quad + 2e^{2x_1}X(x_1)dx_2^2 + e^{2x_1}d(X(x_2)) \otimes dx_2 + e^{2x_1}dx_2 \otimes d(X(x_2)) \\ &\quad - 2e^{-2x_1}X(x_1)dx_3^2 + e^{-2x_1}d(X(x_3)) \otimes dx_3 + e^{-2x_1}dx_3 \otimes d(X(x_3)) \\ &= 2ae^{2x_1}dx_2^2 + e^{2x_1}d(bx_2) \otimes dx_2 + e^{2x_1}dx_2 \otimes d(bx_2) \\ &\quad - 2ae^{-2x_1}dx_3^2 + e^{-2x_1}d(cx_3) \otimes dx_3 + e^{-2x_1}dx_3 \otimes d(cx_3) \\ &= 2(a+b)e^{2x_1}dx_2^2 + 2(c-a)e^{-2x_1}dx_3^2. \end{aligned}$$

Logo

$$^{Sol^3}Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_{Sol^3} = -2dx_1^2 + (a+b)e^{2x_1}dx_2^2 + (c-a)e^{-2x_1}dx_3^2,$$

o que nos leva tomar $\lambda = -2$ e $a + b = c - a = -2$, e assim (Sol^3, X, λ) é um sóliton de Ricci não-gradiente.

Neste exemplo $\mathbb{H}^2$ é a base do produto deformado, mesmo existindo a possibilidade de o campo de vetores X ser também dependente da fibra $\mathbb{R}$, o que ocorre quando c é não-nula.

Agora iremos generalizar o exemplo obtido em Sol^3. Aqui, diferentemente do Capítulo 2, será conveniente escrever o somatório.

Sejam $n \geq 2$ e $m \geq 1$ inteiros, $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ e escreva $\bar{M}^{n+m}$ para denotar a variedade Riemanniana

$$\left(\mathbb{R}^{n+m}, dx_1^2 + e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2 + e^{-2x_1}\sum_{\alpha=1}^{m} dy_\alpha^2\right),$$

a qual é isométrica a $\mathbb{H}^n \times_{e^{-x_1}} \mathbb{R}^m$, pois $\mathbb{R} \times_{e^{x_1}} \mathbb{R}^{n-1}$ é um modelo de produto deformado para o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$.

Aproveitando a estrutura de produto deformado sobre $\bar{M}^{n+m}$, podemos utilizar as equações do Lema 1.2 para deduzir que

$$\begin{aligned}
{}^{\bar{M}}Ric &= {}^{\mathbb{H}^n}Ric - \frac{m}{e^{-x_1}}\nabla^2 e^{-x_1} + {}^{\mathbb{R}^{n+m}}Ric - \big(e^{-x_1}\Delta e^{-x_1} + (m-1)|\nabla e^{-x_1}|^2\big) g_{\mathbb{R}^{n+m}} \\
&= -(n-1)\big(dx_1^2 + e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2\big) - m\big(dx_1^2 - e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2\big) \\
&\quad -\big(-(n-2)e^{-2x_1} + (m-1)e^{-2x_1}\big)\sum_{\alpha=1}^{n} dy_\alpha^2 \\
&= -(n+m-1)dx_1^2 - (n-m-1)e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2 + (n-m-1)e^{-2x_1}\sum_{\alpha=1}^{m} dy_\alpha^2,
\end{aligned}$$

em que na primeira igualdade as duas primeiras parcelas referem-se ao tensor ${}^{\bar{M}}Ric$ quando atua em campos horizontais, enquanto que, nas duas últimas parcelas, em campos verticais.

Definimos o campo de vetores $X = a\partial_1 + b\sum_{i=2}^{n} x_i\partial_i + c\sum_{\alpha=1}^{m} y_\alpha\partial_\alpha$, em que a, b e c são constantes com b e c não simultaneamente nulas, de modo que $\bar{M}^{n+m}$ admita uma estrutura de sóliton de Ricci não-gradiente. Para isso, calculamos primeiramente

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_X g_{\bar{M}} &= \mathscr{L}_X(dx_1^2) + \mathscr{L}_X\Big(e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2\Big) + \mathscr{L}_X\Big(e^{-2x_1}\sum_{\alpha=1}^{m} dy_\alpha^2\Big) \\
&= d(X(x_1)) \otimes dx_1 + dx_1 \otimes d(X(x_1)) \\
&\quad +2e^{2x_1}X(x_1)\sum_{i=2}^{n} dx_i^2 + e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n}\big(d(X(x_i)) \otimes dx_i + dx_i \otimes d(X(x_i))\big) \\
&\quad -2e^{-2x_1}X(x_1)\sum_{\alpha=1}^{m} dy_\alpha^2 + e^{-2x_1}\sum_{\alpha=1}^{m}\big(d(X(y_\alpha)) \otimes dy_\alpha + dy_\alpha \otimes d(X(y_\alpha))\big).
\end{aligned}$$

Pela expressão de X, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_X g_{\bar{M}} &= 2ae^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2 + e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n}\big(d(bx_i)\otimes dx_i + dx_i\otimes d(bx_i)\big)\\
&\quad -2ae^{-2x_1}\sum_{\alpha=1}^{m} dy_\alpha^2 + e^{-2x_1}\sum_{\alpha=1}^{m}\big(d(cy_\alpha)\otimes dy_\alpha + dy_\alpha\otimes d(cy_\alpha)\big)\\
&= 2(a+b)e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2 + 2(c-a)e^{-2x_1}\sum_{\alpha=1}^{m} dy_\alpha^2.
\end{aligned}$$

Em seguida, calculamos

$$\begin{aligned}
{}^{\bar{M}}Ric + \frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_{\bar{M}} &= -(n+m-1)dx_1^2 + (a+b-n+m+1)e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2\\
&\quad +(c-a+n-m-1)e^{-2x_1}\sum_{\alpha=1}^{m} dy_\alpha^2,
\end{aligned}$$

o que nos leva a escolher $\lambda = -(n+m-1)$, $a+b=-2m$ e $c-a=-2(n-1)$.

Analogamente, como no exemplo do Sol^3, a 1-forma $X^\flat$ não é fechada, pois

$$\begin{aligned}
X^\flat &= g_{\bar{M}}(X,\cdot) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{g}_{ij}dx_i(X)dx_j + \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \bar{g}_{\alpha\beta}dy_\alpha(X)dy_\beta\\
&= \bar{g}_{11}dx_1(X)dx_1 + \sum_{i=2}^{n} \bar{g}_{ii}dx_i(X)dx_i + \sum_{\alpha=1}^{m} \bar{g}_{\alpha\alpha}dy_\alpha(X)dy_\alpha\\
&= adx_1 + be^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} x_i dx_i + ce^{-2x_1}\sum_{\alpha=1}^{m} y_\alpha dy_\alpha.
\end{aligned}$$

Por derivação exterior

$$dX^\flat = 2be^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} x_i dx_1\wedge dx_i + -2ce^{-2x_1}\sum_{\alpha=1}^{m} y_\alpha dx_1\wedge dy_\alpha \neq 0.$$

E, novamente, o campo de vetores X não pode ser gradiente. Além disso, ele pode depender da fibra quando $c\neq 0$.

Observação 3.2 *Na métrica euclidiana*

$$g_\circ = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + \sum_{\alpha=1}^{m} dy_\alpha^2,$$

o campo de vetores X é o gradiente da função suave $u\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ definida por

$$u(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = ax_1 + \frac{b}{2}\sum_{i=2}^{n} x_i^2 + \frac{c}{2}\sum_{\alpha=1}^{m} y_\alpha^2,$$

visto que

$$X^\flat = g_\circ(X,\cdot) = adx_1 + b\sum_{i=2}^{n} x_i dx_i + c\sum_{\alpha=1}^{m} y_\alpha dy_\alpha = du.$$

O exemplo de sóliton de Ricci não-gradiente PW $(\bar{M}^{n+m}, X, \lambda)$, obtido anteriormente, nos informa como aplicar o Teorema 3.1. Assim, apresentamos uma classe de sólitons de Ricci não-gradientes PW expansivos, cuja base é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ num modelo de produto deformado, tendo como fibra uma variedade Riemanniana completa (F^m, g_{F^m}) com tensor de Ricci identicamente nulo.

Corolário 3.1 *Sejam $\mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, o espaço hiperbólico em seu modelo de produto deformado*

$$\mathbb{H}^n = \Big(\mathbb{R}^n, dx_1^2 + e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2\Big),$$

e (F^m, g_F), com $m \geq 1$, uma variedade Riemanniana completa satisfazendo ${}^F Ric \equiv 0$. Então $(\mathbb{H}^n \times_f F^m, \tilde{X}, \lambda)$ tem uma estrutura de sóliton de Ricci não-gradiente expansivo com $\lambda = -(n+m-1)$, em que

$$f(x_1,\ldots,x_n) = e^{-x_1} \quad e \quad X = 2(n-1)\partial_1 - 2(n+m-1)\sum_{i=2}^{n} x_i\partial_i.$$

Demonstração: Devemos verificar que a escolha de f, X e λ satisfazem as equações (3.12) e (3.13) da Proposição 3.2, nos restando apenas aplicar o Teorema 3.1 para concluir o nosso resultado.

A equação (3.12) é automaticamente verdadeira, pois estamos tomando $c = 0$ na construção anterior.

Calculamos cada parcela do lado direito da equação (3.13) com o objetivo de mostrar que $d\mu = 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_{\mathbb{H}^n}\right) &= -2m\operatorname{div}\left(e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2\right) \\ &= -2me^{2x_1}\sum_{i=2}^{n}\operatorname{div}(dx_i\otimes dx_i) - 2m\sum_{i=2}^{n} dx_i(\nabla e^{2x_1})dx_i. \end{aligned}$$

Como, para dada $u \in C^\infty(M)$, vale a identidade

$$\operatorname{div}(du\otimes du) = \Delta u du + \frac{1}{2}d|\nabla u|^2,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_{\mathbb{H}^n}\right) &= -2me^{2x_1}\sum_{i=2}^{n}\left(\Delta x_i dx_i + \frac{1}{2}d|\nabla x_i|^2\right) \\
&= -2me^{2x_1}\sum_{i=2}^{n}\Delta x_i dx_i - me^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} d|\nabla x_i|^2 \\
&= -me^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} d(e^{-2x_1}) = 2me^{2x_1}e^{-2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_1 \\
&= 2m(n-1)dx_1. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

As demais parcelas seguem de cálculos diretos. De fato,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}d(\operatorname{div}X) &= -\frac{1}{2}d\left(\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\mathscr{L}_X g_{\mathbb{H}^n}\right)\right) = -\frac{1}{2}d\left(\operatorname{tr}\left(-2me^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i^2\right)\right) \\
&= md\left(e^{2x_1}\sum_{i,j=2}^{n} dx_i^2(e^{-x_1}\partial_j, e^{-x_1}\partial_j)\right) = md\left(\sum_{i,j=2}^{n}(\delta_{ij})^2\right) \\
&= 0, \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2f}\left(\nabla_{\nabla f}X\right)^\flat &= \left(\frac{m}{2e^{-x_1}}\nabla_{\left(-e^{-x_1}\partial_1\right)}\left(2(n-1)\partial_1 - 2(n+m-1)\sum_{i=2}^{n} x_i\partial_i\right)\right)^\flat \\
&= \left(m(n+m-1)\sum_{i=2}^{n} x_i\partial_i\right)^\flat \\
&= m(n+m-1)e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} x_i dx_i, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{m}{2f}\nabla^2 f(X,\cdot) &= -\frac{m}{2}dx_1(X)dx_1 + \frac{m}{2}e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} dx_i(X)dx_i \\
&= -m(n-1)dx_1 - m(n+m-1)e^{2x_1}\sum_{i,j=2}^{n} x_j dx_i(\partial_j)dx_i \\
&= -m(n-1)dx_1 - m(n+m-1)e^{2x_1}\sum_{i=2}^{n} x_i dx_i \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-\frac{m}{2f^2}X(f)df &= -\frac{m}{2e^{-2x_1}}X(e^{-x_1})d(e^{-x_1}) = -\frac{m}{e^{-2x_1}}(n-1)(-e^{-x_1})^2 dx_1 \\
&= -m(n-1)dx_1. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Como λ é constante, somamos as equações de (3.14) a (3.18) para concluir que $d\mu$ identicamente nula, donde μ é constante. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mu &= f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - fX(f) + \lambda f^2 \\ &= -(n-2)e^{-2x_1} + (m-1)e^{-2x_1} + 2(n-1)e^{-2x_1} - (n+m-1)e^{-2x_1} = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando F^m uma variedade Riemanniana com ${}^{F}Ric \equiv 0$, então

$$\Big(\mathbb{H}^n \times_f F^m, \tilde{X}, -(n+m-1)\Big)$$

é um sóliton de Ricci não-gradiente PW expansivo pelo Teorema 3.1. $\square$

Bibliografia

[1] Ambrose, W.: *A Theorem of Myers*. Duke Math. J. 24 (3) (1957) 345-348

[2] Baird, P.; Danielo, L.: *Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces*, Journal reine angew. Mathematik, 608 (2007) 65-91

[3] Barros A.; Batista, R.; Ribeiro Jr, E.: *Compact almost Ricci solitons with constant scalar curvature are gradient* Monatsh Math. 174 (2014) 29-39

[4] Barros, A.; Batista, R.; Ribeiro Jr, E.: *Bounds on volume growth of geodesic balls for Einstein warped products*, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015) 4415-4422

[5] Barros A.; Ribeiro Jr, E.: *Some characterizations for compact almost Ricci solitons*, Proc. of the Amer. Math. Soc. 140 (2012) 10033–1040

[6] Barros A.; Ribeiro Jr, E.; Silva Filho, J.: *Uniqueness of quasi-Einstein metrics on 3- dimensional homogeneous Riemannian manifold*, Diff. Geom. Appl. 35 (2014) 60-73

[7] Besse, A. L.: Einstein manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987

[8] Berger, M.; Gauduchon, P.; Mazet, E.: *Le Spectre d'une Variètè Riemannienne.* New York: Springer-Verlag, 1971. (Lectures Notes in Mathematics, v. 194)

[9] Bishop, R. L.; O'Neill, B.: *Manifolds of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969) 1-49

[10] Brendle, S.: *Ricci Flow and the Sphere Theorem.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010 (Graduate Studies in Mathematics, v. 111)

[11] Bryant, R.: *Existence of a gradient Ricci soliton in dimension three.* Preprint

[12] Brinkmann H. W.: *Einstein spaces which are mapped conformally on each other*, Math. Ann. 94 (1925) 119-145

[13] Cao, H.D.: *Recent progress on Ricci soliton*, Adv. Lect. Math. 11 (2009) 1-38

[14] Calabi, E.: *On manifolds with non-negative Ricci curvature II.* Notices Amer. Math. Soc., 22 (1975) A205

[15] Case, J.: *The nonexistence of quasi-Einstein metrics*, Pacific J. Math. 248 (2) (2010) 277-284

[16] Case, J.; Shu, Y.; Wei, G.: *Rigity of quasi-Einstein metrics*, Diff. Geom. Appl. 29 (2011) 93-100

[17] Cho, J. T.; Kimura, M.: *Ricci solitons and real hypersurfaces in a complex space form*, Tohoku Math. J. 61, no. 2 (2009), 205-212

[18] Chow, B.; Knopf, D.: The Ricci flow: an introduction. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004 (Mathematical surveys and monographs, v. 110)

[19] Chow, B. et al.: *The Ricci Flow: Techniques and Applications Part I: Geometric Aspects.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 135, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007

[20] Dancer, A. S.; Wang, M. Y.: *Some new examples of non-Kähler Ricci solitons*, Math. Res. Lett. 16 (2) (2009) 349-363

[21] DeTurck, D. M.: *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors*, J. Diff. Geom. 18 (1983) 157-162

[22] Eells, J.; Sampson, J. H.: *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964) 109-160

[23] Feitosa, F. E.: *Sobre superfícies imersas em* $3-$*variedades de contato homogêneas e construção de quase solitons de Ricci*, Tese de Doutorado. Manaus, 2016

[24] Fernández-López, M.; García-Río, E.: *A remark on compact Ricci solitons*, Math. Ann. 340 (2008) 893-896

[25] Galloway, G. J.: *A generalization of Myers Theorem and an application to relativistic cosmology*, J. Differential Geom. 14 (1) (1979), 105–116

[26] Gastel, A.; Kronz, M.: *A family of expanding Ricci solitons*, Variational problems in Riemannian geometry, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 59, Birkhuser, Basel (2004) 81-93

[27] Gomes, J. N. V.: *Rigidez de Superfícies de Contato e Caracterização de Variedades Riemannianas Munidas de um campo Conforme ou de Alguma Métrica Especial.* Tese de Doutorado. Fortaleza, 2012

[28] Hamilton, R. S.: *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 17 (2) (1982) 255-306

[29] Hamilton, R. S.: *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in Differential Geometry (Cambridge, MA, 1993), International Press, Combridge, MA, 2 (1995) 7-136

[30] Hamilton, R. S.: *The Ricci flow on surfaces, mathematics and general relativity* (Santa Cruz, CA, 1986), Contemp. Math. 71, Am. Math. Soc., Providence, RI, (1988) 237-262

[31] He, C.; Petersen, P.; Wylie, W.: *On the classification of warped product Einstein metrics*, Comm. Anal. Geom. 20 (2) (2012) 271-311

[32] Ivey, T.: *Ricci solitons on compact three-manifolds*, Differential Geom. Appl. 3 (1993) 301-307

[33] Ivey, T.: *New examples of complete Ricci solitons*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), 241-245

[34] Kim, D.-S.; Kim, Y.H.: *Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (8) (2003) 2573-2576

[35] Lee, J.: *Introduction to Smooth second edition*, New York, Springer-Verlag, 2013. (New York Graduate Texts in Mathematics. v. 218)

[36] List, B.: *Evolution of an extended Ricci flow system*, PhD thesis, 2006, AEI Potsdam, 2005

[37] Maschler, G.: *Special Kähler-Ricci potentials and Ricci solitons.* Ann. Global Anal. Geom. 34 (2008) 367-380

[38] Matos Neto, M. V.: *Classificação da base de produto warped quase-sólitons de Ricci*, Tese de Doutorado. Manaus, 2016

[39] Müller, R.: *The Ricci flow coupled with harmonic map heat flow*, PhD thesis, ETH Zürich, 2009

[40] Obata, M.: *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere.* J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 333-340

[41] Perelmann, G.: *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159v1 [math.DG]

[42] Perelmann, G.: *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math/0303109v1 [math.DG]

[43] Perelmann, G.: *Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:math/0307245v1 [math.DG]

[44] Petersen, P.; Wylie, W.: *On the classification of gradient Ricci solitons*, Geom. Topol. 14 (2010) 2277-2300

[45] Pigola, S.; Rigoli, M.; Rimoldi, M.; Setti, A.: *Ricci Almost Solitons*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. X (2011) 757–799

[46] Pina, R. S.; Sousa, M. L.: *Gradient Ricci solitons with structure of warped product*, To appear in Results. Math., DOI 10.1007/s00025-016-0583-2, 2016

[47] Warner, F.: *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups.* New York: Springer-Verlag, (1983)

[48] Yau, S. T.: *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry*, Indiana Univ. Math. J. 25 (7) (1976) 659-670