**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

JERSON SANDRO SANTOS DE SOUZA

# O CONCEITO DE FUNÇÃO: DA OPERACIONALIZAÇÃO DA DEFINIÇÃO À APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

MANAUS
2017

JERSON SANDRO SANTOS DE SOUZA

# O CONCEITO DE FUNÇÃO: DA OPERACIONALIZAÇÃO DA DEFINIÇÃO À APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Leandro de Oliveira Souza

MANAUS

2017

# Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo autor.

S729c

Souza, Jerson Sandro Santos de
O conceito de função: da operacionalização da definição à aprendizagem significativa / Jerson Sandro Santos de Souza. 2017
159 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Leandro de Oliveira Souza
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Operacionalização da Definição. 2. Conceito de Função. 3. Registros de Representação. 4. Engenharia Didática. 5. Aprendizagem Significativa. I. Souza, Leandro de Oliveira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

JERSON SANDRO SANTOS DE SOUZA

# O CONCEITO DE FUNÇÃO: DA OPERACIONALIZAÇÃO DA DEFINIÇÃO À APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática/PPG-ECIM da Universidade Federal do Amazonas/UFAM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Leandro de Oliveira Souza
Orientador

Katiuscia Souza

Profa. Dra. Katiuscia dos Santos de Souza
Membro Interno

Rogério F. Pires

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires
Membro Externo

# RESUMO

Para compreender um conceito matemático é necessário saber articular as representações dele. No caso do conceito de função, para alcançar a articulação, os alunos devem ter um ponto de referência dentro do mar de terminologia abstrata no qual está imerso esse conceito. Algo que oriente suas interpretações de relações funcionais e una em um todo coerente todos os termos abstratos que orbitam o referido conceito. Acreditamos que o tal ponto de referência deva ser a definição de função. Não qualquer definição, mas uma que seja utilizada conscientemente como elo de ligação entre as demais representações, processo que denominamos de *operacionalização da definição de função*. Neste trabalho, objetivamos compreender se um ambiente de aprendizagem pautado na busca pela operacionalização da definição de função poderia favorecer a aprendizagem significativa desse conceito. Primeiramente, fizemos o levantamento de um quadro teórico geral acerca da tradição de ensino do conceito de função. O desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de função, as múltiplas representações e as dificuldades de aprendizagem desse conceito, bem como o processo de aquisição de conceitos por parte alunos foram o foco do levantamento bibliográfico, cujo objetivo era identificar alguns aspectos facilitadores da operacionalização. Em um segundo momento, três sequências didáticas baseadas nas variáveis levantadas nas análises preliminares, elaboradas e analisadas sob os pressupostos da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa utilizada, foram aplicadas a vinte alunos de primeiro ano do ensino médio de uma escola pública estadual da cidade de Manaus-AM. Os resultados das observações realizadas ao longo das sequências didáticas, da produção escrita dos alunos e da discussão de dois testes (um aplicado antes e outro depois das atividades) sugerem a evolução do uso da definição: de uma definição inerte, abandonada de qualquer raciocínio logo após enunciada, para uma definição operacional, utilizada como fonte orientadora do pensamento funcional. Concluímos que uma definição operacional pode ser considerada o elemento desencadeador do processo de aprendizagem significativa do conceito de função.



Palavras-chave: Operacionalização da Definição. Conceito de Função. Registros de Representação. Engenharia Didática. Aprendizagem Significativa.

**ABSTRACT**

To understand a Mathematical concept is necessary to know how to articulate its representations. In the case of the function concept, to achieve the articulation, students need a landmark inside the Abstract Terminology. Something leading their interpretations about functional relationship and connect in a coherent whole all the abstract terms that orbit the concept. We believe the landmark must be the definition of function. Not any definition, but one we can use consciously as a connecting link between other representations, this process is called *Operationalization of the definition of mathematical function*. In this work, we intend to know if a learning environment guided in the searching for operationalization of the definition of function can favor the meaningful learning of this concept. Firstly, we did a survey of a general theoretical framework about the tradition of teaching of function concept. The historical-epistemological development of the function concept, the multiple representations and learning disabilities of this concept, as well as the acquisition process of concepts by students were the focus of the bibliographic search, which aimed to identify some aspects enabler of the operationalization. Later, three didactic sequences based in the variable raised in the preliminary analyses, elaborate and analyzed under the conjectures of the Didactic Engineering, research methodology used, were applied to twenty junior high school students of a public school in Manaus-AM. The observation outcome accomplished during the didactic sequences, the writing production of the students and the argument of two exams (one applied before the activities and another after them) suggests the evolution of using of the definition: an inert definition, abandoned of any reasoning soon after been enunciated, to an operational definition, used as a guiding source of the functional thinking. In conclude that an operational definition can be considerated the primary element of the Meaningful learning process of the function concept.

Keywords: Operational definition. Function concept. Register of representation. Didactic Engineering. Meaningful Learning.

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

Durante minha graduação em licenciatura plena em Matemática, presenciei e experimentei muitas dificuldades que envolviam conteúdos elementares. Nesse contexto, a disciplina de Cálculo I[1], sem dúvida, foi a que mais me impactou.

Para um calouro que não teve uma boa formação básica em Matemática, o curso de Cálculo I pode ser extremamente desafiador, ainda mais porque essa disciplina é pré-requisito para várias outras. Ela se configura, em sua fase introdutória, em um verdadeiro compêndio de Matemática elementar.

Com muito esforço consegui me sair bem no curso de Cálculo I, mas muitos de meus colegas de graduação viram nessa disciplina um grande obstáculo. Como tive um bom desempenho, fiz um processo seletivo para monitor bolsista de Cálculo I (e depois outro, para monitor de Cálculo II) e fui aprovado.

Quando monitor, atendia não só outros graduandos do curso de Matemática, mas também indivíduos de vários outros cursos que tinham em suas grades a disciplina de Cálculo I, assim, percebi o verdadeiro alcance das dificuldades.

As dificuldades mais comuns apresentadas pelos graduandos que eu atendia como monitor estavam relacionadas a algumas competências relativas ao conceito de função, tais como construção e interpretação de gráficos, realizar tratamentos algébricos, compreender como se dá a relação funcional entre duas variáveis e, principalmente, saber articular as múltiplas representações desse conceito (algébrica, tabular e gráfica).

A disciplina de Cálculo I, mesmo enfatizando o uso de conceitos mais sofisticadas que aqueles utilizados no ensino médio, como é o caso do conceito de limite, grosso modo, é o estudo das funções reais de uma variável real. Por isso, faz-se necessário que o graduando tenha uma definição pessoal de função que seja coerente com aquela adotada pelos matemáticos (definição formal), que ele compreenda os contras e prós de cada representação e entenda o comportamento dos gráficos, em especial, das funções mais utilizadas em modelagens de fenômenos.

A resolução de problemas envolvendo os conceitos do Cálculo I era o ápice da dificuldade dos graduandos, pois o entendimento do comportamento do fenômeno abordado

[1] Cálculo Diferencial e Integral, o I representa o foco do estudo, que são as funções reais de uma variável real.

no problema dependia do entendimento do comportamento da função que o modelava. Mas para interpretar uma situação-problema que envolve o conceito de função é preciso, como acreditamos, que o aprendiz tenha uma definição de função que realmente seja utilizada por ele, que o auxilie na interpretação do problema, que gerencie suas ações, que seja significativa.

Já como professor de ensino básico, vislumbrei, com um olhar mais crítico, a origem do problema encontrado pelos alunos de graduação. Cheguei a buscar na literatura novas formas de abordar o tema e melhorar minha prática. Contudo, foi ao ingressar no mestrado que tive uma excelente oportunidade para investigar o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função. Com o estudo das disciplinas e o diálogo com os professores obtive um repertório de conceitos da área de ensino que me permitiu apresentar, por meio deste trabalho, uma proposta que pretendeu conduzir um grupo de alunos a uma aprendizagem significativa do conceito de função.

## 1.2 Problemática

É muito comum em disciplinas como Química, Física e Biologia que a resolução de um problema esteja condicionada ao entendimento da noção de dependência entre duas variáveis. Isso ocorre porque muitos dos fenômenos em estudo nessas disciplinas apresentam regularidades, ou seja, desde que as condições iniciais sejam as mesmas eles possuem comportamento idêntico.

A regularidade de um fenômeno natural, no âmbito da sala de aula, é apresentada mediante uma regra que transcende as observações, geralmente representada por uma fórmula. Essa representação da lei de variação auxilia o professor na explicação do fenômeno, mas se o aprendiz não compreender as características e propriedades inerentes ao conceito matemático que dá vida à generalização apresentada, o processo de ensino e aprendizagem do fenômeno fica prejudicado. Essa é uma das dificuldades que a não compreensão do conceito de função pode acarretar.

O conceito de função é uma ferramenta própria para o estudo quantitativo de fenômenos naturais (CARAÇA, 1951). Funções representam relações de dependência entre grandezas e o seu uso faz-se indispensável na leitura matemática de fenômenos da natureza. Esse fato amplia as possibilidades do conceito, não o restringindo a temas próprios da Matemática.

Existem várias maneiras de representar o conceito de função: palavras, diagramas, tabelas de valores, fórmulas e gráficos. Na matemática escolar, outros conceitos foram estabelecidos como pré-requisitos para a apresentação da definição formal de função: estudo de noções de conjuntos e suas propriedades, conjuntos numéricos com ênfase no conjunto dos números reais e o entendimento das noções de par ordenado e de produto cartesiano. Na sequência, o conceito de função é apresentado por meio de sua interpretação mais abstrata, geral e formal: como uma relação de dependência entre elementos de dois conjuntos.

Apresentar funções dessa forma torna o conceito quase ininteligível. Vários termos girando em torno de um único conceito, várias representações e uma maneira estática de abordá-lo. Todo esse contexto pode desfavorecer a construção de significados claros, precisos e transferíveis por parte dos aprendizes.

Alguns estudos (VINNER, 1983; SIERPINSKA, 1992; SAJKA, 2003) apontam vários fatores que podem dificultar a compreensão do conceito de função, mas três desses fatores podem ser considerados cruciais: 1) *a abordagem estática*: quando o ensino do conceito privilegia aspectos estruturais e pouca ênfase é dada às suas aplicações; 2) *ênfase quase exclusiva na representação analítica*: um trabalho intensivo com fórmulas é realizado ao ponto de o aprendiz conceber que função é uma fórmula e; 3) *acréscimo de terminologias novas para identificar cada representação*: dentro de cada representação criam-se macetes para saber identificar se uma tabela, gráfico ou diagrama representam o conceito de função, como se cada representação tivesse sua própria definição de função.

Esses fatores podem aparecer isolados, mas é mais provável que os três permeiem todo o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função. Mas por que geram dificuldades?

Segundo Duval (2012), a compreensão de um conteúdo conceitual em Matemática assume a coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica (termo usado para indicar diferentes tipos de representação, como escrita em língua natural, escrita algébrica, tabelas, figuras, etc.). Quer dizer, é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão Matemática, e não o isolamento em cada registro. Por isso consideramos que os três fatores sejam tão prejudiciais, pois eles nutrem o isolamento das representações.

Visto que a compreensão do conceito de função, na referida perspectiva teórica, pressupõe que o aluno transite, com rapidez e espontaneidade, entre as múltiplas representações desse conceito, possibilitar o processo de articulação das representações torna-se fundamental.

Como para Duval (2012, p.295, grifo do autor), no que se refere ao raciocínio, **“a língua natural deve ser considerada, ao mesmo tempo, um registro de partida e um registro de chegada”**, resolvemos focar num aspecto elementar de um conceito, a sua definição. Neste caso, a definição de função seria o registro em língua natural de partida e as explicações baseadas nela formariam o registro em língua natural de chegada. As demais representações serviriam para conectar o registro em língua natural de partida ao de chegada.

Nesse sentido, acreditamos que o que gerencia a articulação entre as várias representações do conceito de função é a definição dele. Uma concepção de definição que alcance todas as representações. Ou seja, consideramos que a articulação é favorecida pelo processo de utilização consciente da definição como elo de ligação entre as demais representações, processo que denominamos de *operacionalização da definição de função.*

*A operacionalização da definição de função é o momento em que o aprendiz apresenta uma definição formal ou pessoal (compatível com a formal) que abarque as várias representações, percebendo-as, por meio da definição adotada, como diferentes fontes de informações sobre o mesmo conceito. É o ponto em que o aprendiz trabalha com a definição que enunciou, ou seja, sabe definir o conceito de função e identificar/explicar, baseando-se na definição dada, se determinada tabela, gráfico ou diagrama representa uma função, além de conseguir estabelecer/identificar relações funcionais entre variáveis.*

Em síntese, devemos primeiro operacionalizar a definição de função para depois articular as várias representações desse conceito e, consequentemente, compreendê-lo. Porquanto acreditamos que a operacionalização desencadeia o processo de aquisição do conceito de função, nossa pesquisa guiou-se pela seguinte questão: *Como a operacionalização da definição de função, admitida como elemento didático-metodológico, pode favorecer a aprendizagem significativa do conceito de função?*

Para responder a essa pergunta, primeiramente fizemos o levantamento de um quadro teórico geral acerca da tradição de ensino do conceito de função. O desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de função, as múltiplas representações e as dificuldades de aprendizagem desse conceito, bem como o processo de aquisição de conceitos por parte alunos foram o foco do levantamento bibliográfico, cujo objetivo era identificar alguns aspectos favorecedores da operacionalização da definição de função. Em um segundo momento, três sequências didáticas baseadas nas variáveis levantadas nas análises preliminares, e analisadas sob os pressupostos da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa utilizada, foram aplicadas a vinte alunos de primeiro ano do ensino médio de uma escola pública estadual da cidade de Manaus-AM.

Em virtude do que foi exposto, a presente pesquisa foi direcionada pelo seguinte objetivo geral (e seus desdobramentos).

*Objetivo Geral:* Compreender como sequências didáticas pautadas na busca pela operacionalização podem favorecer a aprendizagem significativa do conceito de função no primeiro ano do Ensino Médio.

*Objetivos Específicos:*

- identificar alguns conceitos subsunçores específicos e relevantes para a aprendizagem significativa do conceito de função;
- determinar quais são os principais fatores que podem favorecer a operacionalização da definição de função;
- discutir como a operacionalização pode proporcionar um ambiente de superação da dificuldade que os aprendizes têm de articular as múltiplas representações do conceito de função;
- analisar como a operacionalização pode melhorar a prática didático-pedagógica do conteúdo funções;
- avaliar evidências de aprendizagem significativa.

Em suma, assumimos como hipótese que o que gerencia o processo de articulação entre as várias representações do conceito de função é a definição dele. Uma concepção de definição que sirva como um elo de ligação entre as demais representações e seja realmente utilizada em identificações e explicações. Isto é, uma definição que seja operacional, não uma mera representação em linguagem natural que não será utilizada para nada. Como a aquisição do conceito de função pressupõe que o aluno saiba articular as múltiplas representações desse conceito, então, no contexto da hipótese assumida, a operacionalização passa a ser o estopim do processo de aprendizagem significativa do conceito de função. Resumindo: deve-se operacionalizar para articular e articular para compreender.

# 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos que orientaram a compreensão do fenômeno em estudo: o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função. Foram realizadas algumas análises preliminares (como preconiza a Engenharia Didática) nas dimensões epistemológica, cognitiva e didática.

A tradição de ensino do conceito de função, as dificuldades de aprendizagem encontradas pelos alunos, as dificuldades históricas de formalização desse conceito e as perspectivas teóricas adotadas, dentre outras situações, são explicitadas para, assim, caracterizar o objeto de estudo.

O objetivo principal deste capítulo, consolidado na seção 2.8, é apresentar um conjunto de variáveis que julgamos interferir na constituição do fenômeno didático em estudo, no sentido de facilitar a operacionalização da definição de função.

## 2.1 Percurso histórico-epistemológico do conceito de função

### 2.1.1 Conceito de função: motivação inicial

Estar à mercê de uma natureza poderosa que tanto cria quanto destrói, este foi um dos fatos que motivaram os homens, desde os tempos mais remotos, a empreenderem esforços para compreenderem os fenômenos naturais. Certamente, a necessidade primeira da humanidade foi dominar a natureza, no sentido de prever esses fenômenos e até, posteriormente, reproduzi-los. Tudo isso visando a estabelecer com a natureza uma parceria que viabilizasse a manutenção e perpetuação da espécie.

Na busca pela compreensão dos fenômenos naturais, o homem passou a observá-los e estudá-los afim de descobrir as suas causas e o seu encadeamento. Assim, um conjunto estruturado de conhecimentos foi surgindo lentamente, oriundo dos resultados desses estudos, que passou a ser chamado de Ciência (CARAÇA, 1951). Nesse contexto, o objetivo da Ciência era a construção de quadros ordenados e explicativos dos fenômenos naturais do mundo físico e do mundo humano, individual e social.

Os primeiros pensadores perceberam o quão impraticável era tentar compreender os fenômenos naturais em sua totalidade, devido à complexidade da realidade. Segundo Caraça (1951), a realidade possui duas características essenciais que parecem inviabilizar o seu estudo: a *interdependência* e a *fluência*.

A interdependência preconiza que todas as coisas estão intimamente conectadas, todas as coisas estão relacionadas umas com as outras, tal como num organismo vivo. Enquanto a fluência defende que o mundo está em constante transformação, em permanente evolução; nele tudo flui. Ele se transforma tão rapidamente que depois de finalizada a escrita da palavra agora a mesma já não tem o significado que se pretendia inicialmente.

Se nos basearmos nos conceitos de interdependência e fluência, é natural o surgimento de dois problemas. Se a realidade é permeada pela interdependência, como fixar a nossa atenção num objeto particular de estudo? E, se a realidade está em permanente mudança, como encontrar, no mundo movente da fluência, os objetos do nosso estudo?

Em virtude do problema que surge da interdependência, os estudiosos necessitaram, então, recortar da realidade um conjunto de seres e fatos bastante significativos que tornassem possível o estudo dos fenômenos que queriam dominar. A escolha de um recorte conveniente comporta um erro inicial, pois o resto da realidade é abstraída. Entretanto, esse erro deve ser refletido nos resultados do estudo.

Já em relação ao problema oriundo do princípio de permanente rejuvenescimento da realidade (fluência), Caraça (1951) discute sobre duas posições assumidas pelos pensadores ao longo dos tempos:

> Uns, aceitando-o como um dado real, uma característica fundamental da Natureza, fazem dele a base de partida do seu esforço na compreensão do real. Outros, aterrorizados pelo sentimento de instabilidade que ele provoca, instabilidade que nada poupa, do mundo físico ao mundo social, reagem, procurando substituir o mundo real do *devir,* por um mundo artificial da *permanência* (p.111).

A posição mais comumente assumida se referia à adoção de um mundo artificial inerte, o que retardou a construção do conceito de variável e, consequentemente, a formalização do conceito de função, tendo em vista que esse conceito é um instrumento por excelência para estudar problemas de variação.

Assim, aqueles quadros explicativos dos fenômenos naturais, no máximo, aspiraram a dar uma descrição, uma imagem da realidade, não uma explicação da realidade tal como ela é; pois a mesma é estudada mediante recortes. Os estudiosos, mesmo com essa limitação que pode obscurecer os estudos, conseguiram dar explicações que se perpetuaram por gerações. Isso se deve ao fato de terem escolhido recortes convenientes da realidade e capitado regularidades que conduziam a certas leis.

Há certos fenômenos que apresentam regularidades, ou seja, desde que as condições iniciais sejam as mesmas eles possuem comportamento idêntico. Quando se identifica uma regularidade um certo “poder” se obtém, “poder” de reprodução do fenômeno e previsão do mesmo, desde que se criem as condições iniciais convenientes. Conforme esse fato, uma tarefa crucial para a explicação dos fenômenos naturais é a procura de regularidades (CARAÇA, 1951). Imbricado ao conceito de regularidade temos o conceito de lei natural. Ao se observar um fenômeno natural e percebendo uma regularidade no mesmo uma regra geral pode ser estabelecida, regra de cunho causal que transcende nossas observações limitadas: a lei natural.

Caraça (1951) define dois tipos de leis naturais: a qualitativa e a quantitativa; a primeira diz respeito à variação de qualidade e a última à variação de quantidade (ou seja, faz sentido fazer comparações do tipo mais que, menos que, maior que, menor que). Assim como houve uma tradição de se adotar um mundo artificial estático na tentativa de driblar a fluência, houve, ainda, em certas épocas históricas, a tradição de dar explicações qualitativas para os fenômenos naturais.

A fluência da realidade transforma em coisas novas, a todo momento, os elementos constitutivos da parcela da realidade adotada. Essa parcela se transforma e, a todo momento, apresenta qualidades novas, o que torna instável explicações inteiramente qualitativas para os fenômenos naturais.

> Não é que a Ciência, no seu avanço, tenda a pôr de parte a *qualidade*, e isso seria, mesmo, absurdo, uma vez que as qualidades traduzem as relações de interdependência dos seres uns com os outros, e a *interdependência* é, precisamente, uma das características essenciais da Realidade. Mas a Ciência não se ocupa apenas de *descrever*, empreende a tarefa de *explicar* e, nesta, há um fato que se impõe com força cada vez maior - *para obter a explicação das variações de qualidade há que aprofundar o estudo das variações de quantidade* (CARAÇA, 1951, p.122).

Neste contexto, o primado da explicação dos fenômenos tende a pertencer ao tipo quantitativo. Essa ênfase torna iminente o surgimento do conceito de função.

Conforme Rezende (1994), o estudo das leis quantitativas e, consequentemente, o surgimento do conceito de função foram, sem dúvida, de extrema importância para o desenvolvimento da Matemática e da Ciência em geral. Este autor afirma que a introdução do conhecimento quantitativo por Galileu, que contestava os métodos de Aristóteles e

Arquimedes, fez surgir uma nova Física. Uma Física centrada na observação, quantificação e no estabelecimento de relações entre as grandezas envolvidas no fenômeno.

Galileu Galilei (1564-1642) não se interessava exclusivamente em descobrir a causa dos fenômenos naturais que estudava, mas sim descrevê-los em termos de leis quantitativas. Essas leis eram "descobertas" mediante atividades empíricas e observações criteriosas do fenômeno, que conduziam a explicitação de certas regularidades. Os resultados das experimentações eram ordenados em quadros racionais de interpretação e previsão, cujas consequências e previsões estabelecidas eram confirmadas por novas observações e experimentações. De posse da lei e satisfeitas as condições iniciais era possível prever o comportamento de determinado fenômeno. A postura adotada por Galileu, que veio a refutar muitas explicações qualitativas de Aristóteles, deu início a uma nova maneira de estudar os fenômenos do mundo físico.

> Reagindo às tradições verbalistas e redundantes da escolástica medieval, Galileu sublinhava ser a Matemática a linguagem apropriada para estudar a natureza. Era preciso medir grandezas, identificar regularidades e obter relações que tivessem tanto quanto possível uma descrição Matemática simples (PONTE, 1990, p.5).

Embora Galileu não tenha trabalhado no sentido de formalizar o conceito de função, foi ele juntamente com Kepler (1571-1630) que iniciaram o estudo quantitativo dos fenômenos naturais, fato que tornou capital a construção de um conceito matemático próprio para o estudo de leis quantitativas.

A partir dessas primeiras idealizações, fortemente associadas à noção de lei natural, o conceito de função passou, ao longo da história, por sucessivas ampliações. Durante um bom tempo permaneceu atrelado aos problemas concretos do mundo físico, até, gradativamente, ser definido em termos mais gerais por meio de relações entre conjuntos.

### 2.1.2 O desenvolvimento da definição do conceito de função

Os problemas práticos ou teóricos são de extrema importância para o surgimento e desenvolvimento dos conceitos matemáticos, fato que tem o conceito de função como um grande exemplo. O desenvolvimento histórico desse conceito exemplifica como os consensos e discordâncias entre os pensadores, bem como os problemas que entravam em discussão dentro do meio matemático exigiam que as definições fossem cada vez mais precisas, que alcançassem todos os casos e que realmente exprimissem a essência do objeto matemático. Quando as definições vigentes se mostravam insuficientes para a resolução dos novos problemas que iam aparecendo, os matemáticos se esforçavam para alcançar cada vez mais clareza, precisão e generalização.

Ponte (1990) relata que o surgimento da noção de função como conceito específico, objeto de estudo da Matemática, remonta apenas aos finais do século XVII, confundindo-se com os primórdios do Cálculo Infinitesimal. Este autor destaca que não se trata de uma noção muito antiga, conquanto aspectos muito simples desse conceito possam ser encontrados em épocas anteriores, presentes, por exemplo, na mais elementar operação de contagem.

A formação do primitivo conceito de função era necessária devido aos problemas concretos do mundo físico que iam surgindo, associados à ideia de regularidade. Entretanto, outros elementos eram essenciais para a formação desse conceito, como a moderna notação algébrica introduzida por Viète (1540-1603) e a representação geométrica, que proporcionava uma base intuitiva fundamental, possível devido à criação da Geometria Analítica por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665).

De forma vaga a ideia de função surgia em um trabalho de Newton (1642-1727) publicado em 1736, sob o título *The Method of Fluxions and Infinite Series*. Embora Newton não tenha usado a palavra função, percebe-se pelos seus trabalhos que ele considerava as relações de dependência entre variáveis. Usava o termo *relata quantitas* para designar o que chamamos hoje de variável dependente, *fluente* para designar as variáveis independentes e *genita* para indicar as quantidades obtidas de outras a partir das quatro operações aritméticas fundamentais.

Foi Leibniz (1646-1716) quem pela primeira utilizou o termo função, em 1673. Ele usou a palavra função para indicar, em termos muito gerais, quantidades que variavam ao longo de uma curva (e.g. tangente). Ele também introduziu os termos parâmetro, constante e variável. “Leibniz não é o responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra “função”, praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje” (BOYER, 1996, p.297).

Os problemas que deram origem ao Cálculo (desenvolvido por Newton e Leibniz) eram geométricos e cinemáticos, por isso, o foco do Cálculo, até então, era o estudo das curvas geométricas, não do conceito de função em si. Contudo, o procedimento de relacionar curvas a fórmulas viria mudar esse quadro.

> Com o desenvolvimento do estudo de curvas por meios algébricos, tornou-se indispensável um termo para representar quantidades dependentes de alguma variável por meio duma expressão analítica. Com esse propósito, a palavra "função" foi adotada na correspondência trocada entre 1694 e 1698 por Leibniz e João Bernoulli (PONTE, 1990, p.3).

Em 1718, Johann Bernoulli (1667-1748), num primeiro intento de deixar mais preciso o conceito de função, segundo Youschkevitch (1976), define função de uma grandeza variável a uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes. Para Bernoulli, uma função só poderia ser representada por uma única expressão analítica. Ele empreendeu várias notações para uma função, sendo $fx$ a que mais se aproxima da atual.

A definição de Bernoulli seria aperfeiçoada em 1748 por Euler (1707-1783), seu antigo aluno. Segundo Youschkevitch (1976), em sua obra *Introductio in Analysin Infinitorum*, Euler, após definir quantidade constante e quantidade variável, afirmava que uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de um modo qualquer, desta quantidade e de números ou quantidades constantes. Euler não definiu o que seria uma expressão analítica, mas, segundo Boyer (1996), ele se referia às funções algébricas e às funções transcendentes elementares (exponenciais, logarítmicas e trigonométricas). Embora Euler não tenha sido o precursor no que se refere à noção de função, foi ele o primeiro a tratar o Cálculo como uma teoria formal de funções, sua obra de 1748 foi a primeira em que o conceito de função desempenhou um papel central. Assim como Leibniz, Euler foi um fecundo criador de notações, deve-se a ele a notação $f(x)$ até hoje utilizada para designar uma função de $x$.

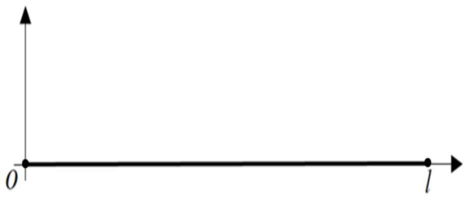
As ideias de Bernoulli e Euler iriam revolucionar o estudo das funções. A partir de então, pensar em função seria o mesmo que pensar na expressão analítica que a representava, "situação que haveria de vigorar pelos séculos XVIII e XIX, apesar de cedo se perceber que conduzia a diversas incoerências e limitações (de fato, uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas!)" (PONTE, 1990, p.4).

A observação de fenômenos físicos levou os matemáticos, no decurso da história, a ampliarem a compreensão dos objetos matemáticos e definirem esses objetos com maior precisão. Podemos destacar dois problemas de extrema importância para a evolução do conceito de função: o *problema da corda vibrante* e o *problema da condução do calor*. Esses problemas, que desafiaram os matemáticos daquela época, evidenciaram as limitações do conceito de função, situação que implicaria sucessivas ampliações do mesmo, alterando profundamente a sua natureza e o seu significado.

O problema da corda vibrante ocasionou discussões mais acaloradas acerca do conceito de função, o que culminaria no enfraquecimento da quase inseparável relação função-expressão analítica. Segundo Ávila (1985, p.16), “O problema surgiu em meados do século XVIII, em conexão com o estudo das vibrações transversais de uma corda flexível e esticada, como uma corda de violino”.

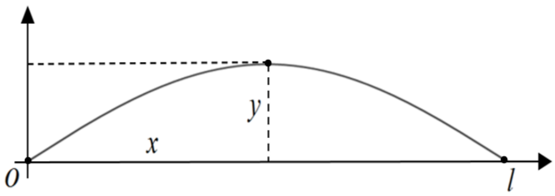
Simplificadamente (abstraindo algumas suposições iniciais), o problema consistia, segundo Botelho e Rezende (2007), no seguinte: *considere uma corda esticada e com os extremos fixos (corda de algum instrumento musical, como o violão). A corda será afastada de sua posição de repouso (figura 1), assumindo a posição inicial (figura 2), e depois solta, provocando vibrações. Sendo assim, descreva matematicamente os movimentos dessa corda, ou seja, determine a função que descreve o formato da corda quando variamos a posição x e o tempo t.*

**Figura 1** – Posição de repouso




Fonte: O autor.

**Figura 2** – Posição inicial




Fonte: O autor.

O problema era desafiador para os matemáticos da época, até porque tanto os conceitos quanto os procedimentos que eles usavam eram imprecisos. Ávila (1985, p.19) afirma que “não só o conceito corrente de função era restrito e impreciso, como não existia uma fundamentação adequada das noções de limite, derivada e integral, ou uma teoria de convergência de séries”.

Como resposta ao problema da corda vibrante, d’Alembert (1717-1783), o primeiro a estudar significativamente o fenômeno das vibrações de uma corda, apresentou em 1747, no seu artigo intitulado *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise em vibration*, a seguinte equação que ficaria conhecida como equação da onda (ou equação das cordas vibrantes), em terminologia moderna:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)\,, \tag{1}$$

onde $y = y(x,t)$ representa a amplitude de um ponto de abscissa $x$ no instante $t$, $\mu$ é densidade linear de massa da corda e $T$ é a força de tensão na corda.

Para a equação (1), geralmente apresentada na forma $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$, d'Alembert obteve a seguinte solução geral: $y(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$, onde $f$ e $g$ são funções arbitrárias determinadas pela posição inicial da corda e $v$ é uma constante que depende da situação física estudada.

Para d'Alembert, a curva que representa a corda em sua posição inicial deveria ser descrita por uma expressão analítica. Embora tanto Daniel Bernoulli (1700-1782) quanto Euler concordassem com a solução de d'Alembert, Bernoulli defendia que não era preciso restringir a curva que representava a corda em sua posição inicial a uma expressão analítica (Euler também ponderava sobre essa restrição).

Daniel Bernoulli, adotando um ponto de vista bastante físico, fez uma observação profunda, retomada anos depois por Fourier (1768-1830). Ele acreditava que a posição inicial da corda poderia ser descrita como uma soma possivelmente infinita de termos trigonométricos. Ele apresentou uma solução em série trigonométrica para a equação (1), mas não foi muito bem aceita.

Lagrange (1736-1813) obteve uma solução da equação (1) na forma de uma série mais geral que a solução obtida por Daniel Bernoulli, inclusive foi ele quem mais se aproximou do desenvolvimento de uma dada função em série trigonométrica.

O debate envolvendo Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli e Lagrange perdurou por alguns anos, mostrando-se frutífero para a expansão do conhecimento funcional. Segundo Kliner (1989), esses diálogos tiveram importantes consequências na evolução do conceito de função. Este autor afirma que o conceito foi estendido, de modo a abranger: a) funções definidas por expressões analíticas diferentes em diferentes intervalos e; b) funções desenhadas à mão livre e que, possivelmente, não eram dadas por combinações de símbolos algébricos.

Fourier, ao estudar o problema de condução do calor nos objetos materiais, teve que retomar as ideias sugeridas no problema da corda vibrante. Ele conjecturou, a certa altura, que "qualquer" função poderia ser escrita como uma soma de senos e cossenos, num intervalo apropriado. Embora não tenha dado uma prova matemática dessa afirmação, instigou outros matemáticos, como Dirichlet (1805-1859) e Cantor (1845-1918), a definirem o real alcance do dito "qualquer".

Em sua obra *Théorie analytique de la chaleur,* publicada em 1822, Fourier afirma que certas funções $y = f(x)$ podiam ser representadas por uma série da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos(nx) + b_n.sen(nx)), \text{ onde } a_0,\ a_n \text{ e } b_n \text{ são dados por} \qquad (2)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,,\ a_n = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx\,,\ n \geq 0 \text{ e } b_n = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx,\ n \geq 1.$$

Os coeficientes $a_0, a_n$ e $b_n$ são os chamados coeficientes de Fourrier da função $f$ . Com esses coeficientes, uma série da forma (2) é chamada a série de Fourrier.

A relação (2) conduziu Fourier, naturalmente, ao estudo de condições de integrabilidade. Segundo Ávila (1985), Fourier apresentou pela primeira vez, num artigo de 1807, submetido à Academia de Ciências da França, a questão: *dada a função* $f$ *, é sempre possível achar esses coeficientes* ( $a_0, a_n$ e $b_n$ ) *de modo a satisfazer a relação (2)?* Este autor afirma que essa questão surgira, ainda que numa situação bem restrita, com Daniel Bernoulli em 1753, entretanto foi com Fourier que ela se tornou realmente presente no mundo matemático.

Quanto aos tipos de funções que podem ser estudadas, a representação de funções por Séries de Fourier fornece uma generalidade que supera o desenvolvimento por Séries de Taylor. De fato, Fourier mostrou que muitas funções poderiam ser representadas por uma Série de Fourier. Mesmo que existam muitos pontos em que a derivada não exista ou em que a função não seja contínua, a função pode ter expansão em série de Fourier (BOYER, 1996). Assim, as ideias defendidas por Fourier provocaram uma espécie de movimento de libertação do conceito de função de sua representação analítica.

Dirichlet se empenhou para entender em quais casos as integrais que definem os coeficientes de uma série de Fourier existiam, por isso foi levado a debruçar-se sobre o conceito de função. Conforme Ponte (1990, p.4), ele

> formulou as condições suficientes para representabilidade duma função por uma série de Fourier. Dirichlet separou então o conceito de função da sua representação

> analítica, formulando-o em termos de correspondência arbitrária entre conjuntos numéricos, em 1837.

A definição de Dirichlet acabou sendo um marco para a concepção moderna do conceito de função. Na segunda metade do século XIX, uma onda de exemplos de funções baseada na definição de Dirichlet foi apresentada pelos matemáticos daquele período (COSTA, 2004).

Dirichlet definiu função, segundo Rüthing (1984), da seguinte maneira:

> Suponhamos que a e b são dois valores dados e x é a quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Se para cada x corresponde um único y, de modo que, enquanto x percorre o intervalo de a até b, y = f(x) varia gradualmente da mesma forma, então y é chamada função contínua de x para este intervalo. Além disso, não é absolutamente necessário que y dependa de x no intervalo inteiro de acordo com a mesma lei; sem dúvida, não é necessário pensar somente em relações que possam ser expressas através de operações matemáticas.

Para mostrar a natureza totalmente arbitrária da lei de correspondência que orienta a relação entre as variáveis, Dirichlet surpreendeu os matemáticos ao apresentar, em 1829, o exemplo de uma função que era descontínua em todos os seus pontos, não integrável e não podia ser representada por uma expressão analítica (pelo menos na época). Função hoje conhecida como Função de Dirichlet. Abaixo temos a definição da função de Dirichlet, a função *d*.

$$d: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definida por } d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

A definição de Dirichlet está mais próxima do ponto de vista atual de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas os conceitos de conjunto e de número real não tinham ainda sido estabelecidos (BOYER, 1996). Contudo, foi a partir dos estudos de conjuntos de pontos feito por Cantor e, consequentemente, do desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, que o conceito de função passaria a ser definido em termos de pares ordenados de elementos, não necessariamente numéricos (FONSECA et al., 2013).

Cantor, também motivado pelo estudo das séries de Fourier, tinha o objetivo de saber em que condições uma série de Fourier convergia para a função a que estava associada. Ao longo de seus estudos percebeu que para obter uma resposta precisa a essa pergunta tinha que focar não somente o conceito de função, mas também o conceito de número, portanto; o que seria um número real? Essa nova questão o conduziu ao estudo dos subconjuntos da reta, o que ocasionou nos estudos iniciais da Teoria dos Conjuntos.

Foi, finalmente, com a definição de um grupo de matemáticos franceses, que o conceito de função atingiu o seu caráter mais geral e formal. O referido grupo ficou conhecido como Nicolas Bourbaki.

> Já no século XX, a busca pela formalização dos conceitos matemáticos levou muitos pesquisadores matemáticos a publicarem textos científicos. Entre eles destaca-se um grupo de matemáticos da França, que adotou o pseudônimo de Nicolas Bourbaki. Esse grupo acreditava que muitas definições da matemática moderna deveriam ser repensadas. Para isso, escreveram uma série de livros, que foram publicados a partir de 1935, apresentando ao mundo “a matemática moderna”, a partir de uma nova terminologia e novos conceitos (FONSECA et al., 2013, p.12).

A definição de Bourbaki, que até hoje influencia o ensino de funções, foi importante para ampliar as possibilidades do conceito. A definição dada pelo grupo, em 1939, conforme Rüthing (1984), pode assim ser enunciada:

> Sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, para qualquer $x \in E$ existe um único $y \in F$, e apenas um, que está na relação dada com x. Damos o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x; dizemos que y é o valor da função para o elemento x, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função.

Podemos observar que a definição de Bourbaki apresenta o conceito de função como um certo subconjunto do produto cartesiano *E x* F. Assim, com essa definição de caráter mais abrangente, a noção de função se expandiu de forma a incluir tudo o que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, e não apenas numéricos. Segundo Alvarenga et al. (2014, p.175), “Esta característica foi essencial para a disseminação do conceito de *função* por diversas áreas do conhecimento, podendo, assim, ser utilizada em distintos modelos de correspondência entre variáveis, não sendo restrita apenas ao conjunto dos números reais”.

De resto, podemos dizer que o conceito de função passou por diversas transformações necessárias para torná-lo cada vez mais fundamentado, cada vez mais útil para a resolução de problemas, cada vez mais operacional. Segundo Silva e Rezende (1999), através da análise histórica do conceito de função, podemos perceber que os matemáticos ao definirem esse conceito utilizaram três ideias básicas:

a) *função como relação entre quantidades variáveis*: Essa interpretação elege a noção de variação como o cerne do conceito de função. Ela se refere à ideia de duas grandezas que variam uma dependendo da outra, ideia esta tão presente no nascimento da Física quantitativa e que permeia nosso cotidiano. Tal interpretação mostra, de imediato, a utilidade prática do conceito de função.

b) *função como relação entre conjuntos*: É a ideia de que a cada elemento x de um conjunto A se associa um único elemento f(x) de um conjunto B. Embora a interpretação anterior seja a mais intuitiva, a relação entre conjuntos é a ideia mais utilizada para definir o conceito de função. Esta interpretação é estática e tem um caráter mais formal que as demais.

c) *função como transformação*: Interpretação dada pelo matemático George Boole (1815-1864) em sua definição. É a ideia de que a função f transforma o elemento x no valor f(x). Esta se faz presente, por exemplo, nas transformações lineares entre espaços vetoriais ou nas funções complexas de variáveis complexas.

O percurso histórico do conceito de função deixa claro o sentido de sua evolução e operacionalização: de ideias mais intuitivas a ideias mais gerais e formais, em outras palavras, da relação entre quantidades variáveis à relação entre elementos de dois conjuntos.

A presente análise histórico-epistemológica nos possibilitou entender que a construção de um conceito depende de tantas outras ideias e de uma gestação lenta em que os problemas e o instrumento matemático se inter-relacionam, ajudando-se e esclarecendo-se mutuamente. Percebemos, ainda, que o conceito de função surgiu dentro de um contexto prático, atrelado a problemas com referência na realidade, como uma relação entre quantidades variáveis, evidenciando um apelo fortemente intuitivo e rico para o entendimento de suas limitações enquanto objeto matemático. Conforme novos problemas iam aparecendo, as limitações das definições então adotadas eram explicitadas, o que exigia mais clareza, precisão e generalização. Esse processo de constante aperfeiçoamento culminou na definição de função como relação entre conjuntos quaisquer, a mais formal e mais utilizada para introduzir o tema.

Obedecendo ao sentido histórico de evolução do conceito de função, acreditamos que podemos favorecer a operacionalização na medida em que o conceito seja apresentado como relação entre quantidades variáveis para depois ser formalizado como relação entre conjuntos. Situações mais intuitivas, principalmente aquelas que aludem ao universo mais próximo do aluno, são fundamentais para que o aprendiz atribua significação ao objeto matemático em questão, o que possibilitaria ao mesmo trabalhar com a definição que adotou. Conforme Silva e Rezende (1999, p.32), “se a interpretação como relação entre quantidades variáveis torna a aprendizagem do conceito de função mais intuitiva para o aluno e de maior aplicabilidade nas demais áreas do conhecimento, por que não partir dela para, após o domínio do conceito, chegar ao formalismo? ”

Partindo dessa mesma preocupação, Botelho e Rezende (2007, p.74) afirmam:

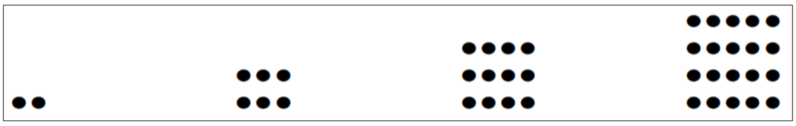
> Não pensamos em fórmulas matemáticas ou em subconjuntos de um produto cartesiano quando compramos um produto. O que fazemos é relacionar a quantidade comprada com o preço a ser pago através do conhecimento que temos sobre a maneira com que estas grandezas, *quantidade* e *preço,* variam.

## 2.2 As múltiplas representações do conceito de função

Entendemos que para favorecer a operacionalização também é necessário inserir o conceito de função em diferentes contextos problemáticos; contextos baseados na pluralidade de representações. Por isso, nesta seção, apresentamos alguns exemplos em que discutimos os contras e prós de cada representação e sobre o principal fator que causa o isolamento das representações: o acréscimo desnecessário de terminologias novas.

*Exemplo 1*: Observe a seguinte sequência de figuras:

**Figura 3** – Sequência dos números retangulares



Fonte: O autor.

Se as próximas figuras da sequência obedecem ao mesmo padrão observado nas figuras iniciais, então quantas bolinhas terá a centésima figura?

É claro que, com muito esforço, essa questão pode ser resolvida sem fazer apelo a um raciocínio mais elaborado. Basta desenhar mais 96 figuras e o problema estará resolvido. Contudo, o dito raciocínio mais elaborado pode tanto reduzir o trabalho quanto facilitar o entendimento do comportamento do “fenômeno” como um todo. Isto é possível, em particular, pois o nosso fenômeno fictício possui uma regularidade.

A tal regularidade pode ser percebida pela forma como os “pontinhos” são dispostos, de modo a formarem retângulos. Partindo desse fato, e sem recorrer ao trabalho árduo de desenhar várias figuras, como poderíamos resolver o problema?

Se nos basearmos nas limitações de ação, teremos de saber calcular a quantidade de pontinhos de uma figura conhecendo apenas o número natural que representa sua posição. Podemos facilitar o entendimento do problema recorrendo à representação tabular.

### 2.2.1 Representação tabular

Primeiro poderíamos construir uma tabela com duas linhas, a primeira será a linha das posições e a segunda a da quantidade de pontinhos, observe a tabela 1.

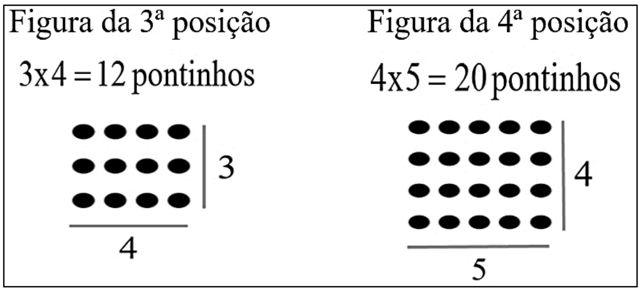
**Tabela 1** – Dados organizados de forma a dar uma noção inicial da lei quantitativa

| Posição | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quantidade | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 | 72 |

Fonte: O autor.

As posições 5, 6, 7 e 8 puderam ser preenchidas, pois um olhar mais cauteloso sobre as quatro primeiras posições sugere uma lei: *a quantidade de pontinhos é o produto da posição atual pela posição seguinte*. Essa afirmação pode ser validada se pensarmos na quantidade de pontinhos de certa posição como o resultado do cálculo da área do retângulo dessa posição. Podemos supor que a quantidade de pontinhos horizontais é a medida da base e a quantidade de pontinhos verticais é a medida da altura. Como a área de um retângulo é o produto da base pela altura, temos, por exemplo, o caso da figura 4.

**Figura 4** – Quantidade de pontinhos das figuras das 3ª e 4ª posições




Fonte: O autor.

A tabela nos ajuda a organizar os dados e a empreender o tal raciocínio mais elaborado, contudo ainda estamos presos a casos particulares.

A tabela 1 dá uma ideia inicial da lei. Ela consiste em duas sucessões, dois conjuntos numéricos – o das posições $P$ e o dos números de pontinhos Q, postos em correspondência um com o outro. Tal correspondência é unívoca no sentido de *P* para *Q*, pois a cada posição corresponde uma, e apenas uma, quantidade de pontinhos. A lei está na forma como essa correspondência do conjunto *P* ao conjunto *Q* se realiza.

Assim, é natural entendermos que o instrumento para o estudo de leis quantitativas, o conceito de função, deve ter em sua essência a correspondência de dois conjuntos. De posse dessa ideia fundamental, o próximo passo seria generalizar. Para tal devemos criar uma representação simbólica, afim de alcançar a generalidade conveniente, uma característica da lei, desprendendo-se de tabelas de resultados particulares.

Segundo Caraça (1951), a representação simbólica almejada e, consequentemente, a generalização, é alcançada a partir do momento em que se introduz o conceito de variável.

> Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos variável [...] Quando dizemos, por exemplo: seja (E) o conjunto dos números reais do intervalo (0,1), e seja x a sua variável, que queremos significar? Que o símbolo x sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é suscetível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela (CARAÇA, 1951, p.127).

Estabelecido o conceito de variável, agora podemos voltar ao exemplo 1 e apresentar uma noção mais geral, cuja essência seja a correspondência entre o conjunto das posições *P* e o conjunto das quantidades *Q*, a representação algébrica ou analítica.

### 2.2.2 Representação Analítica

Considere *p* a variável do conjunto *P* e *q* a variável do conjunto *Q*. A lei consiste na existência duma dada correspondência entre *p* e *q*, correspondência que sabemos ser unívoca no sentido $P \rightarrow Q$. Diremos que a variável *q* é função da variável *p*, indicaremos simbolicamente por $q = f(p)$, onde *p* será chamada de *variável independente* e *q variável dependente*. A variável *q* é dependente da *p*, pois sua variação depende da variação dos valores de *p*, particularmente, variando a posição, variamos, também, a quantidade de pontinhos.

Agora é possível transcrever a lei: *a quantidade de pontinhos é o produto da posição atual pela posição seguinte*, para a linguagem algébrica:

$$q = p.(p+1) \text{ ou } f(p) = p.(p+1), \tag{3}$$

onde *p* é a posição da figura, *p+1* é a posição seguinte e *q* é a quantidade de pontinhos da figura de posição *p*.

De posse de (3), saber quantos pontos comporta a centésima posição fica simples, basta fazermos *p=100*, em (3):

$$q = f(100) = 100.(100+1) = 100.101 = 10100 \text{ pontinhos.}$$

Ao descobrirmos a lei quantitativa alcançamos um certo poder de previsão e controle sobre o fenômeno em estudo, por isso é tão útil interpretar o conceito de função como uma relação entre quantidades variáveis. Agora podemos saber, sem que precisemos recorrer a casos particulares, quantos pontinhos há em qualquer posição e mais, se for dada a quantidade de pontinhos de uma figura, podemos saber qual a posição que ela ocupa na sequência. Por exemplo, qual é a posição da figura que possui 20 pontinhos? Basta fazermos *q=20* em (3) e resolver a equação resultante: $p.(p+1) = 20$.

A equação $p.(p+1) = 20$ pode ser escrita como $p^2 + p = 20$, subtraindo 20 em ambos os membros dessa equação chegamos à equação do segundo grau na forma completa: $p^2 + p - 20 = 0$, temos que $\Delta = 1^2 - 4.1.(-20) = 81$, então $p = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$. Como delta é positivo a equação tem duas raízes reais e distintas como solução, são elas $p' = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4$ e $p'' = \frac{-1-9}{2} = \frac{-10}{2} = -5$. Como as posições são dadas por números naturais, a solução conveniente para o problema é 4, ou seja, a figura composta de 20 pontinhos está na quarta posição.

### 2.2.3 Definição do conceito de função

Na tabela 1 estão indicados apenas alguns pares de valores da correspondência, embora a tabela nos dê uma primeira noção, ela é limitada. Por outro lado, a afirmação $q = f(p)$ significa que qualquer valor *p* corresponde um único valor de *q*. Dentro desse contexto mais abrangente, podemos definir o conceito de função da seguinte maneira:

> Dados os conjuntos *X*, *Y*, uma *função* $f: X \to Y$ (lê-se: “uma função de *X* em *Y*”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto *X* chama-se *domínio* e *Y* é o *contradomínio* da função *f*. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a *imagem* de *x* pela função *f*, ou o *valor* assumido pela função *f* no ponto $x \in X$ (LIMA et al., 2012, p.45).

Vale ressaltar que o ensino de funções é quase exclusivamente centrado na apresentação de correspondências entre conjuntos numéricos, as chamadas funções numéricas, embora esses tipos de funções sejam as mais importantes para o estudo de leis quantitativas, o conceito de função não se restringe a correspondências entre conjuntos numéricos. Muitos exemplos de funções são correspondências entre conjuntos numéricos, em que a regra que expressa a regularidade é dada por uma fórmula, "mas em geral não precisa ser assim. A natureza da regra que ensina como obter *f(x)* quando é dado *x* é inteiramente arbitrária" (LIMA et al., 2012, p.49). Isso pode ser observado no exemplo a seguir.

*Exemplo 2*: Diante de uma coleção de objetos, se solicitado a contá-los, um indivíduo quase que automaticamente procede da seguinte maneira: aponta para um dos objetos dizendo: um; aponta para outro e diz: dois; e assim procede até esgotar os objetos da coleção. Sendo, por exemplo, 5 o último número pronunciado, ele conclui que a coleção tem 5 objetos.

Portanto, a contagem se realiza fazendo corresponder, sucessivamente, a cada objeto da coleção um número da sequência de números naturais (1, 2, 3, ...). A correspondência ou associação mental de dois entes exige que haja um ponto de partida e um ponto de chegada, respectivamente, o objeto a ser contado e o número natural que o rotula, e, ainda, uma ideia (ou conjunto de instruções) pela qual o pensar no ponto de partida evoca o pensar no ponto de chegada, a chamada lei de correspondência.

Pode-se dizer que uma função $f$ é um objeto matemático constituído por três partes:

1) *Domínio A*: conjunto de partida ou conjunto onde a função está definida.

2) *Contradomínio B*: conjunto de chegada ou conjunto onde a função toma valores.

3) *Lei de correspondência f(x)*: é a maneira pela qual o pensar no elemento do domínio desperta o pensar no elemento do contradomínio. Quando a função é numérica, tanto o domínio quanto o contradomínio são conjuntos numéricos, nesse caso, a lei de correspondência será dada por uma expressão analítica.

A notação abaixo sintetiza em um resumido conjunto de símbolos a participação dos três elementos constituintes do conceito de função.

$$\text{Notação: } \begin{array}{l} f: A \to B \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$$

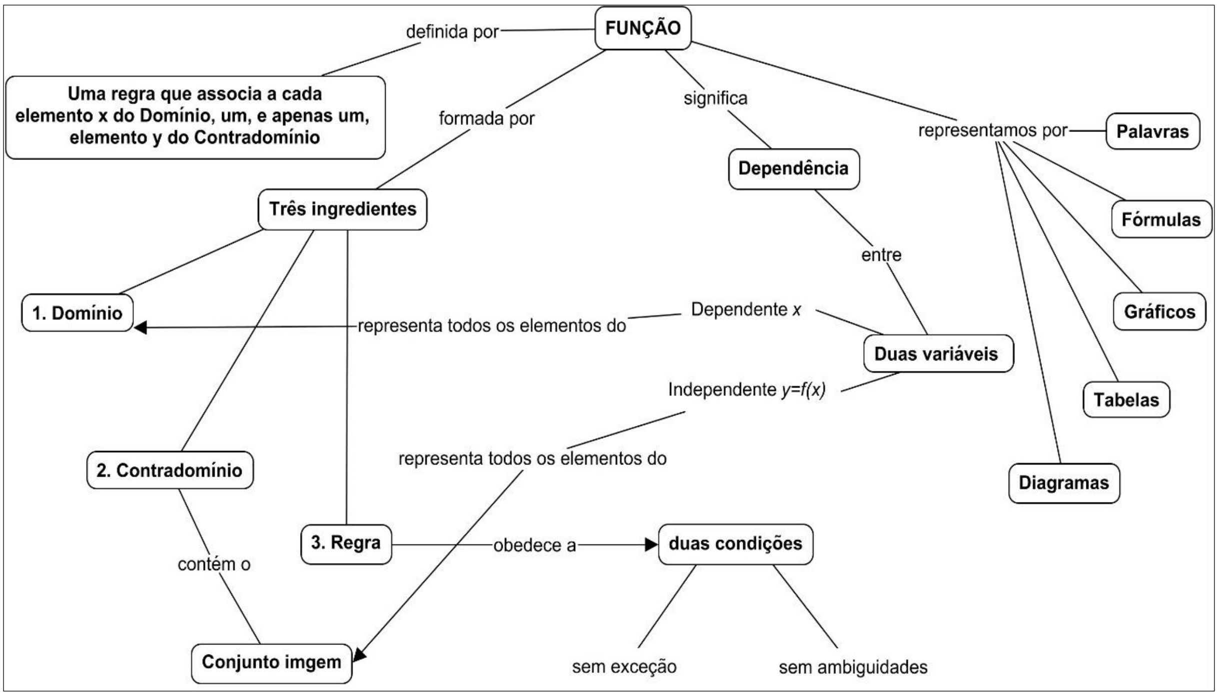
Essa notação indica uma função *f*, definida em *A* com imagens (i.e., pontos de chegada) em *B* segundo a lei de correspondência $y = f(x)$. A representação $A \to B$ indica a correspondência entre os conjuntos *A* e *B*, enquanto $x \mapsto y$ indica a correspondência entre os elementos dos respectivos conjuntos. No caso das funções numéricas, a identidade $y = f(x)$ nos informa que os pontos de chegada *y* são construídos mediante uma fórmula dependente de *x*. Sendo assim, o elemento *y* é equiparado a forma genérica de calculá-lo *f(x)*.

A lei de correspondência que caracteriza uma função deve satisfazer duas condições, conforme Lima et al. (2012):

I) *Sem exceções*: a lei de correspondência deve fornecer pontos de chegada para todo ponto de partida, ou seja, cada elemento (todos) do domínio deve estar associado a algum elemento do contradomínio;

II) *Sem ambiguidades*: cada elemento do domínio está associado a apenas um elemento do contradomínio.

A seguir, temos um mapa conceitual que resume a ideia de função discutida nesta seção; ideia adotada ao longo das sequências didáticas que compuseram a parte prática deste estudo.



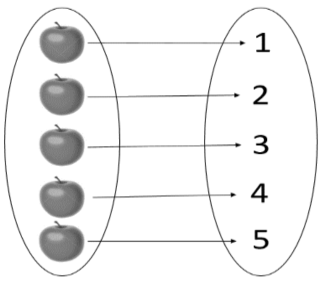

Fonte: O autor.

A partir dessa definição, podemos dizer que o *exemplo 2* representa bem a ideia de função. Possui um domínio (coleção de objetos), um contradomínio (conjunto dos naturais) e uma lei de correspondência (a regra), que se configura no próprio processo elementar de contagem: a cada objeto da coleção apontado se atribui um número natural, como se fosse um rótulo, começando do número 1 e procedendo sequencialmente até findar os objetos do conjunto. A lei de correspondência obedece às duas condições: sem exceções e sem ambiguidades, pois cada objeto da coleção recebe algum rótulo e todos os objetos recebem um único rótulo, caso contrário, algum objeto ficaria fora da contagem ou seria computado mais de uma vez. No *exemplo 1*, os conjuntos de partida e chegada são, respectivamente, *P* e *Q* (ambos conjuntos de números naturais). Por ser uma função numérica admite como lei de correspondência uma fórmula (expressão analítica), no caso, $f(p) = p.(p+1)$, que é a tradução algébrica da lei: *a quantidade de pontinhos é o produto da posição atual pela posição seguinte*. Essa lei de correspondência obedece às condições I e II pois cada posição apresenta alguma quantidade de pontinhos (que define a figura), e toda posição está associada a uma única quantidade de pontinhos (senão cada posição poderia ter mais de uma figura).

### 2.2.4 Representação por diagramas

Além de definições, tabelas e fórmulas, o conceito de função pode, também, ser representado por diagramas de flechas e por gráficos. O diagrama de flechas se configura numa tentativa de apresentar o conceito de função na sua forma mais geral e formal como relação entre conjuntos, já no ensino básico. O exemplo 2, em termos de diagramas, poderia ser representado assim:

**Figura 5** – Diagrama para a contagem de cinco maçãs




Fonte: O autor.

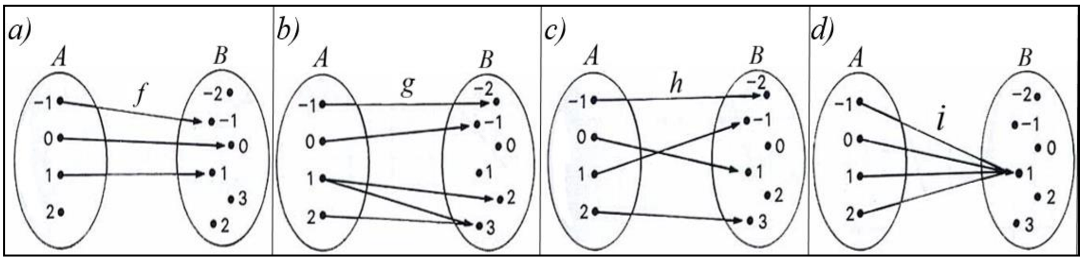
Com o auxílio do diagrama de flechas, duas condições devem ser satisfeitas para que uma relação *f* de *A* em *B* seja considerada uma função:

i) todo elemento do conjunto *A*, domínio, deve servir como ponto de partida de flecha;

ii) cada elemento do conjunto *A* deve servir como ponto de partida de uma única flecha.

É fácil ver que o diagrama da figura 5 representa uma função, pois cumpre as condições i e ii. As condições i e ii são apenas as condições *sem exceção* e *sem ambiguidade* que a lei de correspondência deve satisfazer para que uma relação entre dois conjuntos seja uma função. Ou seja, há o acréscimo desnecessário de terminologias novas. Para compreender melhor as condições i e ii, observe os exemplos da figura 6.

**Figura 6** – Diagramas de flechas exemplificando relações entre conjuntos numéricos




Fonte: O autor.

Os diagramas *c* e *d* representam o conceito de função. No diagrama *d* acontece algo que pode confundir a aplicação das duas condições: um ponto de partida deve estar associado a um único ponto de chegada, mas um ponto de chegada pode receber vários pontos de partida. O diagrama *a* não representa uma função, pois não cumpre i (sem exceção); e o diagrama *b*, pois não cumpre ii (sem ambiguidades).

Geralmente, no que diz respeito ao ensino de funções, a representação por diagramas é a mais utilizada, principalmente quando se inicia o aprendiz nesse conceito. O que acontece é que o ensino de funções vai se resumir a dizer se um diagrama representa ou não o conceito de função, um trabalho maçante de memorização das duas condições. Não é que a representação por diagramas deva ser excluída das situações de ensino, mas focar o ensino de função numa representação tão estática, cujos conjuntos em causa raramente excedem três ou quatro elementos, pode gerar o "problema da trivialização" do conceito de função, problema sério porque fornece aos alunos uma imagem distorcida da Matemática (PONTE, 1990, p.7).

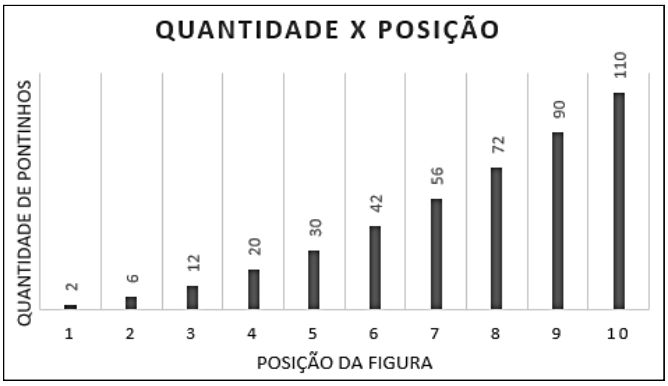
Apresentar o conceito de função por meio de diagramas, que enfatizam a interpretação de função como uma relação binária, pode ser um grande contraexemplo de operacionalização da definição de função. Pois o professor pode apresentar uma definição que não vai usar. Sobre esse problema Lima afirma:

> Funções são definidas por relações binárias, ponto de vista que nenhum matemático nem usuário da Matemática adota em seu dia-a-dia. Pior: esta generalidade inútil é rapidamente abandonada e todas as funções que surgem depois são bolinhas e flechinhas, ou então dadas por fórmulas (2001, p.46).

### 2.2.5 Representação gráfica

Agora, representaremos graficamente a relação entre as variáveis, quantidade de pontinhos e posição, apresentadas no exemplo 1.

**Figura 7** – Quantidade de pontinhos para as dez primeiras posições




Fonte: O autor.

O gráfico acima nos fornece uma base intuitiva fundamental, uma descrição visual de como as mudanças sofridas por uma grandeza *p* provoca variações em outra *q*. Construir gráficos de funções constitui-se num processo de "visualização das leis de correspondência", o que facilita a análise de fenômenos, a descrição de regularidades e a interpretação de interdependências, pois além de ser outra forma de representar o conceito de função, o gráfico pode trazer informações adicionais.

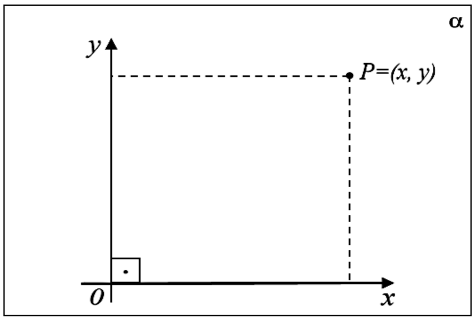
Em geral, um gráfico é uma ferramenta que possui a importante função de sintetizar um conjunto de dados, facilitando a comunicação, análise e interpretação dos mesmos. A representação gráfica da relação funcional entre variáveis permite ao indivíduo vislumbrar o comportamento do fenômeno modelado, não é, pois, apenas um expediente de apelo visual, mas sim um instrumento cuja correta interpretação se constitui num processo de resolução de problemas.

> Os gráficos se apresentam como uma ferramenta cultural que pode ampliar a capacidade humana de tratamento de informações quantitativas e de estabelecimento de relações entre as mesmas. A apresentação gráfica é frequentemente associada à coordenação de informações quantitativas dispostas em dois eixos perpendiculares; um horizontal (chamado eixo dos **x** ou abscissa) e um vertical (eixo dos **y** ou ordenada) (MONTEIRO, 1999, p.1).

Embora existam outros tipos de gráficos que podem expressar o conceito de função, o tipo mais utilizado no ensino de funções é o gráfico cartesiano, isso porque as figuras no plano cartesiano podem ser descritas por fórmulas, o que possibilita a articulação entre duas formas de representar o conceito: a gráfica e a analítica. Considerando o contexto histórico, Caraça (1951) afirma que o conceito de função serviu como elemento definidor da unificação de dois campos que passaram aproximadamente dois mil anos separados: o campo analítico e o geométrico.

Os gráficos cartesianos são figuras geométricas desenhadas sobre o plano cartesiano. Considere o plano $\alpha$ determinado por dois eixos *x* e *y* perpendiculares em *0* como mostra a figura 8. Nesse plano a posição de cada ponto $P \in \alpha$ é indicada por um par de números: o número *x* chamado de *abscissa* e o número *y* chamado de *ordenada* que é a altura do ponto de abscissa igual a *x*. Cada ponto *P* do plano $\alpha$ corresponde a um par de números *(x,y)*, por isso escrevemos *P=(x,y)*. Um plano com as características de α é denominado plano cartesiano, em homenagem a Descartes, que, assim como Fermat, teve a ideia de tratar as curvas geométricas por meio de expressões algébricas, proporcionando os fundamentos da Geometria Analítica.

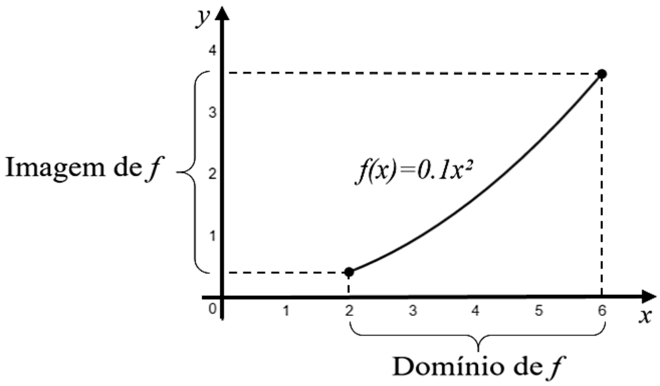
**Figura 8** – O ponto *P* no plano cartesiano α




Fonte: O autor.

Como já mencionado, há uma relação funcional entre duas variáveis *x* e *y*, quando a cada valor da variável *x* corresponder um único valor da variável *y*. Assim, no que diz respeito à ideia de gráfico cartesiano, cada par de valores *(x, y)* corresponderá às coordenadas de pontos sobre o plano cartesiano. O gráfico cartesiano de uma função é o conjunto formado por todos os pontos de coordenadas *(x, y)* que satisfazem a condição *y=f(x)*, ou seja, o gráfico de uma função é o conjunto de todos os pontos do plano da forma *( x, f(x))*, com *x* variando no domínio da função *f*. Matematicamente: seja a função $f\colon A \to B$ definida por *y=f(x)*. O gráfico de *f*, que é indicaremos por *Graf (f)*, é definido por: $Graf\,(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in A \text{ e } y \in B\}$.

**Figura 9** – O conjunto de todos os pontos *(x, 0.1x²)*, com x variando no intervalo [2, 6]



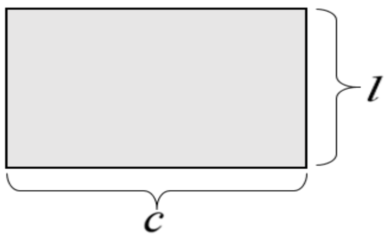

Fonte: O autor.

Os gráficos cartesianos permitem-nos visualizar “a forma” geométrica de uma função. Se um indivíduo, ao estudar um fenômeno, conseguir perceber uma relação funcional entre duas grandezas e estabelecer a lei quantitativa que rege essa relação, a construção do gráfico cartesiano, no mínimo, pode deixá-lo perplexo com o vislumbre da regularidade do fenômeno. Construir, interpretar e conhecer as características gerais dos gráficos cartesianos de funções, bem como compreender as características de alguns gráficos específicos se configura numa poderosa ferramenta para a resolução de problemas não apenas matemáticos. Observe o próximo exemplo:

*Exemplo 3:* João trabalhou durante muitos anos para seu Joaquim. Em retribuição à dedicação de João, seu Joaquim decidiu dar-lhe de presente um terreno. Disse seu Joaquim a João: “o terreno retangular que você conseguir cercar, em minhas terras, com 210 m de arrame, será seu”. Quais seriam as melhores medidas do terreno retangular para que o mesmo tivesse a maior área possível?

Como o terreno cercado deve ter formato retangular, usaremos a figura abaixo para termos uma noção intuitiva desse fato.

**Figura 10** – Terreno visto de cima, em que *c* é o comprimento e *l* a largura

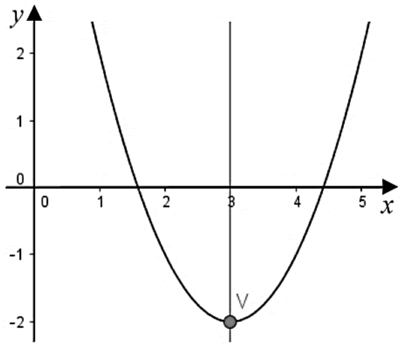



Fonte: O autor.

Usar 210 m de arame para cercar o terreno significa que o perímetro do retângulo deve ter 210 m, ou seja, $2c+2l=210$, dividindo ambos os membros dessa equação por 2, segue que $c+l=105$. Isolando $l$, temos: $l=105-c$. A área do retângulo, que indicaremos por $A$, pode ser expressa por: $A=c.l$, como $l=105-c$, então podemos reescrever a área da seguinte maneira: $A=c.(105-c)=105c-c^2$, assim $A=-c^2+105c$. Por fim, podemos dizer que a área $A$ depende do comprimento $c$, ou que a área $A$ é uma função de $c$, ou seja, $A=f(c)$. Sendo assim, cada valor assumido pela variável $c$ corresponde a um único valor da variável $A$. O gráfico que nos permite visualizar a relação funcional entre as variáveis área e comprimento é o conjunto formado por todos os pontos $(c, -c^2+105c)$, com c variando no domínio da $f$. Mas o que o gráfico dessa função tem a ver com a resolução do problema?

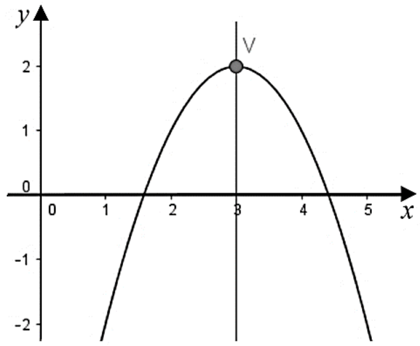
Como foi dito, é de fundamental importância conhecer as características de alguns gráficos específicos. A fórmula que define a área é da forma $ax^2+bx+c$, com $a$, $b$ e $c$ sendo números reais e $a \neq 0$. É sabido que uma função definida por esse tipo de fórmula é conhecida como função quadrática. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Os pontos que compõem uma parábola são simétricos em relação ao segmento de reta que é perpendicular ao eixo das abscissas e passa pelo ponto $V$ (vértice da parábola), o chamado eixo de simetria. Quando o coeficiente $a$ da fórmula que define a função quadrática ($y = ax^2 + bx + c$) é positivo, a concavidade da parábola estará voltada para cima. Mas se $a$ for negativo, a concavidade da parábola estará voltada para baixo.

**Figura 11** – Parábola definida por $f(x)=x^2-6x+7$.




Fonte: O autor.

**Figura 12** – Parábola definida por $f(x)= -x^2+6x-7$.

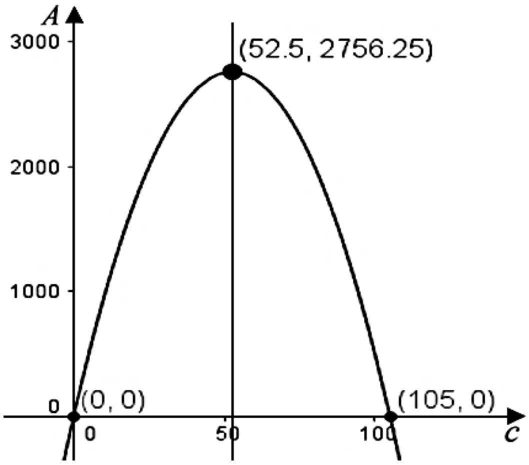



Fonte: O autor.

Os zeros ou raízes de uma função são os valores de $x$ tais que $f(x)=0$, geometricamente, os zeros de uma função são as abscissas dos pontos onde a função intersecta o eixo dos $x$. Em relação à função quadrática, os zeros serão os valores de $x$ tais que $ax^2+bx+c=0$, o que corresponde às soluções de uma equação do segundo grau.

Retomando a fórmula da área $A=-c^2+105c$, podemos dizer que a parábola que representa graficamente essa fórmula tem concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente do termo de segundo grau (o $a$ de $ax^2+bx+c=0$) é negativo. Resolvendo a equação $-c^2+105c=0$, teremos os zeros da função. Colocando -c em evidência, temos que $-c(c-105)=0$, ou seja, $-c=0$ ou $c-105=0$, sendo assim os valores de $c$ para $A=0$ são 0 e 105. Portanto, $(0, 0)$ e $(105, 0)$ são os pontos em que a parábola, que representa a relação funcional entre as variáveis $c$ e $A$, intersecta o eixo das abscissas. Abaixo temos o gráfico de $A=-c^2+105c$.

**Figura 13 –** Parábola definida por *A*= -c²+105, onde c é o comprimento e *A=f(c)* a área do retângulo de comprimento *c*




Fonte: O autor.

Para resolvermos o problema, devemos saber qual é a medida do comprimento do terreno *c* para que a área *A* seja a maior possível. Em termos gráficos, queremos saber qual é a abscissa que dá a maior ordenada, ou seja, qual é a ordenada do ponto de maior altura. A representação gráfica deixa claro que o ponto de maior altura é o vértice dessa parábola. Como o vértice *V* é o ponto por onde passa o eixo de simetria da parábola e este é perpendicular ao eixo das abscissas, podemos dizer que a abscissa do vértice é o ponto médio das abscissas dos pontos em que a parábola corta o eixo horizontal, a média das raízes da equação $A=-c^2+105c$. Logo, $\frac{0+105}{2}=52{,}5$ é a abscissa que fornece a maior ordenada, substituindo c por 52,5 em $A=-c^2+105c$, temos $A=-52{,}5^2+105.52{,}5=2756{,}25$.

Assim, o comprimento do terreno deve ser de 52,5 m e a largura também, pois a largura é dada por $l=105-c$, substituindo c por 52,5, temos $l=105-52{,}5=52{,}5$. A conclusão é que a maior área corresponde ao terreno com a forma de um quadrado de lado 52,5 m, nessas condições o terreno de João terá 2756,25 m².

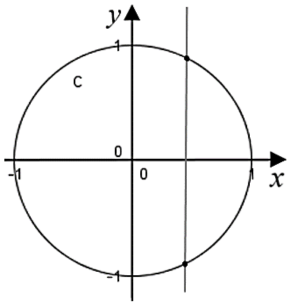
O problema apresentado no *exemplo 3* mostra que o gráfico não é apenas uma tentativa de expressar visualmente valores numéricos, mas sim um recurso que além de explicitar as propriedades de uma função serve como um instrumento próprio para a resolução de problemas que envolvem esse conceito. Por isso, a representação gráfica, no ensino de funções, não deve ser posta em segundo plano ou ser vista como uma mera extensão de uma fórmula. O trabalho quase que exclusivo com as expressões analíticas que definem as funções pode passar a impressão de que uma função é apenas uma fórmula. Sendo assim, as manipulações algébricas acabam sendo consideradas a única via para encontrar soluções de problemas sobre funções. Nesse contexto, Filho e Menezes (2010, p.7) ao analisarem os dados de sua pesquisa discutem sobre:

> a tendência dos alunos, mesmo nas questões inteiramente relacionadas à interpretação gráfica, de utilizarem estratégias e procedimentos com cálculos para resolverem os problemas. Especificamente, têm-se evidências de que os alunos concebem o cálculo como a única, ou mais relevante, via para encontrar soluções.

Há, ainda, a situação em que o aprendiz sabe definir corretamente o conceito de função, mas não sabe identificar quando um gráfico cartesiano representa uma função. Isso pode ocorrer quando uma única representação do conceito é enfatizada, geralmente as expressões analíticas, e as demais relegadas a atividades repetitivas. Isso pode dificultar a construção significativa do conceito, tendo em vista que um conceito transcende suas representações. Sem falar nas terminologias que são apresentadas quando uma representação é trabalhada, elas são apresentadas de forma desconexa, o que faz com que as representações do conceito de função: verbal, tabular, por diagramas, analítica e gráfica, se isolem.

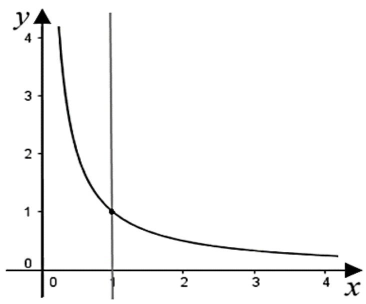
No caso dos gráficos, existe uma regra para verificar se um gráfico cartesiano representa ou não o conceito de função, que chamaremos de *regra da paralela*. Essa regra pode ser assim apresentada: considerando o gráfico cartesiano da relação $f$ de $A$ em $B$, se a reta paralela ao eixo das ordenadas conduzida pelo ponto $(x, 0)$, em que $x \in A$, sempre intersectar o gráfico de $f$ em um único ponto (figura 15), então esse gráfico representa uma função. Se a paralela, nessas condições, intersectar o gráfico em mais de um ponto, o mesmo não representará uma relação funcional (figura 14, por exemplo).

**Figura 14** – Circunferência $x^2+y^2=1$




Fonte: O autor.

**Figura 15** – Função definida por $f(x)=1/x$, com $x>0$




Fonte: O autor.

Por que se reta paralela intersectar o gráfico em dois ou mais pontos, o mesmo não representará uma função?

Isso vem da própria definição de função e de como se constrói um gráfico cartesiano. Os gráficos cartesianos são formados por pontos $(x,y)$ que satisfazem condições específicas, por exemplo, numa circunferencia de raio 1 centrada na origem o quadrado da abscissa acrescido do quadrado da ordenada deve ser igual a 1, ou seja, os pontos satisfazem a condição $x^2+y^2=1$ (figura 14). O gráfico cartesiano de uma função é ainda mais específico, pois é exigido que cada abscissa esteja associada a uma única ordenada. Como as ordenadas $f(x)$, em termos gráficos, são as alturas dos pontos de abscissa $x$, então cada ponto deve ter, *grosso modo*, uma única altura (e.g., figura 15). A regra da paralela não passa de um macete para se transferir para o registro gráfico a condição: sem ambiguidades, que a regra que define uma função deve obedecer, isso quer dizer: mais terminologias.

Em suma, nesta seção, destacamos a questão do acréscimo de terminologias novas toda vez em que uma representação é trabalhada. Isso tem como consequência o isolamento dos registros de representação[2], pois as regras utilizadas são desconexas e restritas ao contexto de um único registro, o que inviabiliza a coordenação entre as várias representações do conceito de função. O grande entrave que o isolamento impinge, refere-se à própria apreensão do objeto matemático em jogo. Conforme Duval (2012), a apreensão de um objeto depende de que o aprendiz consiga realizar tratamentos em diferentes registros de representação e transitar de um para outro o mais espontaneamente possível.

A contínua exemplificação da operacionalização da definição de função, por parte do professor, pode subsidiar a superação do problema do isolamento de representações. Como foi discutido nesta seção, a definição apresentada pelo professor surge como uma mera formalidade, que é posteriormente abandonada. Adotando a constante exemplificação, o docente poderia guiar-se pela definição apresentada toda vez que discutisse porque determinadas relações entre variáveis são funcionais e porque certas tabelas, gráficos, fórmulas e diagramas representam o conceito de função, o que colocaria a definição de função como um elo de ligação entre as demais representações, uma referência facilitadora da articulação entre essas representações. Como a concepção de função dos alunos está ligada à concepção de função de seus professores (PIRES; SILVA, 2015), temos um precioso momento para apresentar e utilizar uma definição de função que sirva para modelar aquela concepção inicial dos aprendizes, explicitando na prática docente uma forma mais significativa de trabalhar o conteúdo funções.

Além de utilizar a definição de função que enunciou, o professor poderia proporcionar um ambiente rico em representações, trabalhando os contras e prós de cada uma delas, levando o aluno a entender que todas as representações são diferentes fontes de informações sobre o conceito de função, mas que o conceito em si não pode ser reduzido às suas

[2] Trataremos melhor desse assunto na seção 2.5.

representações. Embora as representações sejam de suma importância, o que importa não são elas, mas sim os objetos matemáticos que são representados (o conteúdo). Os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com a forma, isto é, com as representações que se fazem deles. Nesse contexto, o recurso a uma pluralidade de representações, como aponta Duval (2012), é uma condição para a superação da confusão entre representante e representado.

## 2.3 Obstáculos à aprendizagem do conceito de função

Ao longo dos últimos anos, vários autores (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1983; SIERPINSKA, 1992; SFARD, 1992; SAJKA, 2003) se engajaram em pesquisas para identificar e compreender as dificuldades de aprendizagem do conceito de função, bem como suas causas. As conclusões sobre tais dificuldades apontam para a própria definição do objeto função, para as suas múltiplas representações, para a interpretação de gráficos, para a manipulação de símbolos relativos ao conceito, bem como para uma incompatibilidade entre as palavras utilizadas para especificar o conceito e o "retrato mental" evocado.

A maioria dos livros didáticos em uso no país define uma função $f : A \to B$ como uma relação que a cada elemento x de A, faz corresponder um único elemento y de B. Segundo Lima et al. (2012, p.95), "Essa definição apresenta o inconveniente de ser formal, estática e não transmite a ideia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza em função da outra) ou resultado de um movimento". Esse tipo de definição apresentada de início para os estudantes pode gerar confusões e dificuldades, pois os aprendizes se deparam com vários termos, como: conjuntos, elementos, variáveis, relações binárias, produto cartesiano; todos girando em torno de um só conceito, o de função.

Dassie et al. (2010), em um estudo que visava a analisar o conceito de função abordado em livros didáticos brasileiros do ensino básico, examinaram textos mais antigos – antes de 1930 – para verificar se o ponto de vista adotado hoje (essencialmente estático) sempre esteve presente. Uma das conclusões foi que esse tipo de abordagem tem raízes bem antigas e vem resistindo às reformas de programas e às mudanças de paradigma no ensino de Matemática. Lima (1999, p.3), em relação a definição de função como um conjunto de pares ordenados, complementa dizendo que:

> Os usuários da Matemática e os próprios matemáticos costumam pensar numa função de modo dinâmico, em contraste com essa concepção estática. Uma transformação geométrica é uma função. Mas não é provável que exista alguém que imagine uma rotação, por exemplo, como um conjunto de pares ordenados. Os

> próprios autores e professores que apresentam essa definição não as adotam depois, quando tratam de funções específicas como as logarítmicas, trigonométricas, etc.

Sajka (2003) defende que uma das dificuldades na compreensão do conceito de função está relacionada à natureza dual própria do conceito, representada especialmente pela notação da lei de correspondência da função. Por exemplo, a notação $f(x) = x + 5$ pode representar o conceito de função como um todo (o objeto) ou uma fórmula que permite calcular o valor da função para determinados valores de x (o processo). Portanto, uma função pode ser entendida numa perspectiva estrutural – como um objeto – ou numa perspectiva operacional – como um processo. A interpretação depende do contexto, o que gera dificuldades.

Caraça (1951) discute sobre a natureza dual da variável.

> Seja (E) o conjunto dos números reais do intervalo (0,1), e seja x a sua variável, que queremos significar? Que o símbolo x, sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é suscetível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela [...] no entanto; o carácter contraditório do conceito – a variável é e não é cada um dos elementos do conjunto (CARAÇA, 1951, p.127-128).

Ou seja, em um primeiro momento, para $f(x) = x + 5$, x representa todos os elementos do domínio, mas em outro momento o professor pode pedir para o aprendiz calcular o valor da função quando $x = 5$, temos, pois, a natureza dual da variável, o coletivo e o individual.

Várias das dificuldades apresentadas pelos alunos no tema funções estão relacionadas com a ambiguidade intrínseca do simbolismo matemático, com os tipos de problemas padronizados, com o contexto fechado no qual os símbolos são inseridos e ensinados, e com a interpretação que cada aprendiz faz deles (SAJKA, 2003).

Muitos alunos utilizam definições pessoais para o conceito de função, significando-o de forma equivocada. Conforme Vinner (1983), para que o aluno se aproprie de um conceito matemático, o processo de formação desse conceito deve combinar, numa ação recíproca, a imagem conceitual (estrutura cognitiva relativa a um conceito) e a definição conceitual (conjunto de palavras que usamos para explicitar um conceito). Esses conceitos serão aprofundados na próxima seção.

Saraiva e Teixeira (2009) discutem sobre o problema da memorização da definição feita pelos alunos. Estes autores, refletindo sobre os dados da pesquisa que realizaram com alunos do décimo primeiro ano de escolaridade em Portugal, concluíram que a maioria dos alunos conseguiu enunciar a definição de função, contudo, falharam quando solicitados a escolher em um conjunto de gráficos os que representavam funções. Os alunos não foram capazes de associar as palavras que escreveram, por exemplo: “[...] a um objeto corresponde uma e só uma imagem [...]”, com a representação gráfica de uma função, escolhendo representações gráficas que não representavam funções, contradizendo as definições que haviam escrito anteriormente, ou seja, não havia uma compatibilidade entre definição conceitual e imagem conceitual.

Outra dificuldade muito comum é a falta de competências para transitar naturalmente entre as múltiplas representações do conceito de função. Segundo Duval (2012), a compreensão em Matemática assume a coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica (termo usado para indicar diferentes tipos de representação como, por exemplo, escrita em língua natural, escrita algébrica, tabelas, figuras etc). Logo, é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão Matemática e não o contrário, o isolamento em cada registro. Nesse sentido, mobilizar as várias representações do conceito de função não é apenas saber se determinada tabela, diagrama ou gráfico representam uma função implica a construção semântica desse conceito.

Sfard (1992) acrescenta que geralmente os aprendizes têm uma concepção inferior à estrutural ao descrever funções, associando o objeto a uma de suas representações, como a algébrica ou a gráfica. Acreditamos que sequências didáticas que visem à manipulação das propriedades específicas de cada uma das representações, que explicitem a utilidade de cada uma delas, bem como as vantagens e desvantagens que o uso de cada uma pode proporcionar dentro de um determinado contexto devem ser exploradas para a superação dessa visão reducionista.

O conceito de função não deve ser apresentado unicamente através da relação entre conjuntos numéricos, pois limita o alcance do conceito e gera a ilusão de que uma função obrigatoriamente deve ser definida por uma fórmula. Sierpinska (1992) centra seu trabalho dentro da perspectiva teórica dos obstáculos epistemológicos, dentre os que a autora descreve, há um que esclarece muito bem o fato comentado: a crença, ainda hoje presente no ensino de funções, de que somente relações descritíveis por fórmula são dignas de receberem o nome de funções.

Devemos esclarecer que a ênfase dada à representação algébrica do conceito de função limita-se, geralmente, à aplicação de fórmulas, o que não garante que os alunos consigam identificar relações pertinentes que os encaminhem na construção de uma regra geral, ou seja, que eles consigam generalizar por meio de fórmulas os seus procedimentos de cálculos oriundos de situações que apresentam padrões (transcrever algebricamente situações). Baseando-se nos resultados de seu estudo que visava a apresentar o conceito de função para alunos da oitava série do ensino fundamental mediante a aplicação de uma sequência didática baseada em situações-problema, com o intuito de causar a superação de algumas dificuldades que o pesquisador identificou na literatura, Martins (2006) discute sobre a dificuldade dos alunos de generalizar dados por meio da representação algébrica. Segundo este autor, a falta de domínio do quadro algébrico parece dificultar o desenvolvimento de todo o quadro funcional.

Os alunos também apresentam grande dificuldade na construção e interpretação de gráficos de funções. Existe uma diferença qualitativa entre construção e interpretação de gráficos, respectivamente, elaborar algo novo e extrair sentido de dados. Segundo Kramarski (2004), a construção gráfica requer o desenvolvimento de ideias que geralmente estão implícitas e a interpretação se baseia na reação do estudante. Afirma ainda que através da representação gráfica constrói-se o significado sobre a relação entre as variáveis e sobre o seu padrão de covariação.

Comumente, mesmo em situações especialmente propostas para que a interpretação gráfica seja suficiente para a resolução de um problema, os alunos recorrem a estratégias e procedimentos algorítmicos para resolverem o problema. Os alunos concebem o cálculo como o único ou mais importante caminho para encontrar soluções (FILHO; MENEZES, 2010).

Geralmente, na apresentação do conceito de função se estabelece uma sucessão rígida e de apenas uma “mão”. Ao se definir função trabalha-se vigorosamente com a lei de correspondência (fórmula), depois cria-se uma tabela com duas colunas – números do domínio com suas respectivas imagens – por fim, plotam-se pontos no plano cartesiano gerando, da conexão desses pontos, o esboço do gráfico. A sequência: fórmula, tabela e gráfico gera a ideia de que a expressão analítica representa por si só o conceito função, o gráfico é um mero subproduto da fórmula, enquanto a tabela serve apenas para se chegar ao gráfico, sendo ela um mero dispositivo que promove uma transição da fórmula para o gráfico. Tal abordagem não deixa claro que a fórmula, a tabela e o gráfico são diferentes representações de um mesmo conceito. Este contexto consolida o obstáculo epistemológico apresentado por Sierpinska (1992): somente relações descritíveis por fórmula analítica são dignas de receberem o nome de funções.

Discutindo sobre a apresentação tardia do tema funções, em especial, sobre a demora no acesso às representações gráficas, no final do ensino fundamental, o que posteriormente propiciará aos aprendizes grandes dificuldades de interpretação; Smole et al. (1989) defendem que a representação gráfica, instrumento rico em possibilidades de abordagens e colocações, pode ser explorada já nos primeiros anos do ensino fundamental visando a familiarizar o aluno com a interpretação de gráficos e o conceito de função. Esses autores sugerem, a partir de problemas concretos e interessantes, a construção e interpretação de tabelas e gráficos, sendo que as situações apresentadas devem sempre se reportar ao universo mais próximo do aprendiz.

As dificuldades de interpretação de gráficos de funções não geram limitações de aprendizagem apenas de conteúdos da Matemática, mas também de outras disciplinas como a Física, tendo em vista que a representação gráfica é muito utilizada pela sua característica de resumir grandes quantidades de informações.

McDermott et al. (1987) analisaram as produções de estudantes no decurso do processo de elaboração e análise de gráficos de Cinemática e identificaram 10 das dificuldades mais comuns apresentadas por esses alunos. Com destaque para a interpretação errônea dos gráficos como fotografias da trajetória do movimento, não entendendo o gráfico da função como um conjunto de informações que apresentam uma regularidade, resultado da dependência entre duas variáveis.

Como podemos perceber, são muitas as dificuldades de aprendizagem do conceito de função, mas as causas, acreditamos, podem ser resumidas. Sintetizando os resultados das pesquisas discutidas nesta seção e na anterior, pode-se destacar três fatores[3] que dificultam a apreensão do conceito de função: 1) *a abordagem estática*: quando o ensino do conceito privilegia aspectos estruturais e pouca ênfase é dada às suas aplicações; 2) *ênfase quase exclusiva na representação analítica*: um trabalho intensivo com fórmulas é realizado ao ponto de o aprendiz conceber que função é apenas uma fórmula e; 3) *acréscimo de terminologias novas para identificar cada representação*: dentro de cada representação criam-se macetes para saber identificar se uma tabela, gráfico ou diagrama representam o conceito de função, como se cada representação tivesse sua própria definição de função.

[3] Esses três fatores foram considerados durante a construção das três sequências didáticas que foram aplicadas aos participantes desta pesquisa.

Esses fatores podem aparecer isolados, mas é mais provável que os três permeiem, de maneira entrelaçada, todo o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função. Eles se enquadram na dimensão do ensinar e reverberam negativamente para a dimensão do aprender. Poderíamos perguntar: por que esses três fatores sintetizados são tão prejudiciais para a aquisição do conceito de função?

Para Duval (2012), a aquisição de conhecimentos matemáticos se processa a partir do momento em que o sujeito que aprende for capaz de transitar naturalmente por diferentes registros de representação semiótica. Por isso os três fatores são tão prejudiciais, pois nutrem "o isolamento de registros de representação" (DUVAL, 2012, p.283).

Damm (2012) discute como o fenômeno do isolamento (ou fechamento) de registros de representação é bem comum nas aulas de Matemática:

> Podemos observar, em diferentes níveis da aprendizagem, um "fechamento" de registros de representação junto aos alunos: isso acontecendo em todas as etapas do currículo. Mudar a forma de representação (= converter uma representação, = mudar de registro) se mostra como uma operação difícil e muitas vezes impossível para muitos alunos em diferentes níveis de ensino. *Tudo se passa como se a compreensão que grande maioria dos alunos tem de um conteúdo estivesse limitada à forma de representação utilizada* (p.185).

Ainda dentro da perspectiva do isolamento de registros de representação, Duval (2012, p. 283) afirma:

> Naturalmente, a ausência de coordenação não impede toda compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações aonde deveriam realmente ser utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do "sentido" daquilo que é feito.

Assim, com a aplicação das sequências didáticas, aspirávamos, em especial, a provocar a superação da dificuldade de *articular as múltiplas representações do conceito de função*. Acreditamos ser esta a dificuldade que nutre as demais, a mais nociva para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função, porque dificulta a construção semântica do conceito, e é proveniente de uma aprendizagem mecânica. Se o isolamento de registros de representação é uma consequência da aprendizagem mecânica do conceito de função, então perceber que um aluno está transitando com certa espontaneidade entre as representações algébrica, tabular e gráfica oferece-nos uma forte evidência de que o mesmo adquiriu significados. Nesse contexto, fomentar a construção de uma definição operacional por parte dos aprendizes entra como uma forma de subsidiar a articulação entre as múltiplas representações do conceito de função, o que contornaria o obstáculo do isolamento de registros de representação.

## 2.4 Aquisição de conceitos

Um dado é um veículo simbólico da informação, que em determinado momento encontra-se desprovido de significado. Enquanto a informação é oriunda do processamento de dados, ou seja, do agrupamento, organização, síntese, contextualização e interpretação dos dados.

Na medida em que a informação é gerenciada, experimentada e integrada ao repertório cognitivo do indivíduo, sendo este capaz de utilizá-la na tomada de decisões, na resolução de situações complexas, a informação se eleva ao *status* de conhecimento. O conhecimento, por sua vez, é constituído de unidades elementares portadoras de significados, unidades de conhecimento chamadas de *conceitos*.

Um conceito, segundo Dahlberg (1978), é a reunião de enunciados verdadeiros sobre determinado objeto, fixada por um símbolo linguístico: o termo (ou nome do conceito). Esta autora enfatiza que cada enunciado representa um elemento do conceito, que são as suas características, e estas traduzem os atributos das coisas designadas. Esses elementos se articulam numa unidade estruturada, numa unidade de conhecimento. O nome do conceito pode ser formado de sinais ou conjunto de sinais dependentes ou não das palavras, ele permite a comunicação e facilita a manipulação mental do conceito.

Ausubel et al. (1980, p. 74) definem conceitos como “objetos, eventos, situações ou propriedades que *possuem atributos essenciais* e são designados numa determinada cultura por algum signo ou símbolo aceito”.

### 2.4.1 Abstração e generalização

A formação de conceitos depende de duas operações mentais, dimensões elementares e indissociáveis dos conceitos: a *abstração* e a *generalização*. A transição do mundo real (da experiência sensível) para o mundo mental (das ideias, conceitos e proposições) se dá quando o indivíduo destaca mentalmente um ou mais elementos de um objeto, os quais só mentalmente podem manter-se fora dessa totalidade, a fim de simplificar sua avaliação, classificação ou comunicação; tal processo é chamado de abstração. O número *cinco*, por exemplo, é uma ideia abstrata não uma coisa concreta do mundo real. Nesse caso, o aspecto destacado foi a quantidade, não interessando se é de maçãs, pessoas, livros ou qualquer outra coisa. É muito útil, pois temos uma ideia precisa da quantidade que *cinco* representa, por isso sua comunicação torna-se possível; encontramos na abstração uma análise redutora e simplificadora do complexo.

> Através do estabelecimento de equivalências, ou seja, por meio do agrupamento de informações relacionadas da experiência em categorias definidas pelos atributos essenciais de seus membros, os conceitos, portanto, padronizam e simplificam a realidade, facilitando consequentemente a aprendizagem receptiva, a solução de problemas e a comunicação. Já que está impedido e é cognitivamente incapaz de lidar continuamente com uma série de eventos diferenciados por nuanças, o homem recorre à categorização, respondendo aos objetos e eventos heterogêneos como uma classe ou como membros de uma classe (AUSUBEL et al., 1980, p.74-75).

A generalização se processa quando reconhecemos aspectos comuns a vários objetos distintos, porém essenciais, a partir de comparações. Generalizar é agrupar um conjunto de entes abstraídos considerando a similaridade de seus aspectos. Imagine uma criança que pela primeira vez passa a conviver com um cão da raça *Pinscher*, destacando, de sua vivência com o mesmo, aspectos referentes ao seu pelo, ao formato do focinho, ao seu tamanho e a seu comportamento. Em certo momento, ela é apresentada a uma segunda raça, o *São Bernardo*, nesse momento ela pode não o identificar como um cão, pois é muito maior que o *Pinscher*, entretanto outros aspectos são similares. Conforme ela for amadurecendo, conhecendo outras raças e outros animais, sua abstração de cão vai se refinando e apenas aspectos essenciais serão destacados, tornando o termo cão uma classe ou uma representação genérica. Nesse nível, um determinado animal poderá ser precisamente reconhecido como um cão. Assim, a generalização nos proporciona a capacidade de ver no singular aspectos essenciais gerais.

Os enunciados verdadeiros na definição de Dahlberg (1978) e os nomes dos conceitos são abstrações. Já a generalização se configura na reunião de entes que possuem semelhantes a soma total de suas características globais. Na construção de conceitos predomina o não concreto e o grupal, pois eles são formados a partir de uma série de vários exemplares individuais de objetos ou seres, dos quais eliminamos as diferenças e conservamos as qualidades comuns por meio da abstração.

Através do exposto, podemos entender que ao trabalhar com conceitos nos libertamos do mundo da experiência sensível e somos deslocados para o mundo racional, onde podemos refletir a realidade sem estarmos presos a situações práticas vivenciadas, e nele podemos escolher novas rotas e meios para alcançar nossos objetivos. Se isso não fosse possível, a criança do exemplo deveria sempre andar com um cão para poder identificar outros. Nesse sentido, podemos ver um conceito como um instrumento elementar do pensamento que nos concede a capacidade de compreender o mundo e o seu funcionamento. Por isso torna-se importante discutir sobre o potencial de estratégias de ensino que podem contribuir para a aprendizagem significativa de conceitos científicos.

### 2.4.2 Imagem conceitual

É importante salientar que um conceito transcende as definições citadas, ele é maleável, flexível, capaz de alterar sua forma na medida em que o indivíduo aprende. Um conceito não é uma entidade cognitiva isolada, pois a ele estão associadas várias figuras mentais, propriedades e processos, arrecadados ao longo da experiência do indivíduo. A soma de todas as representações verbais e não verbais de todos os tipos, associadas ao nome do conceito, se configura na chamada *imagem conceitual*.

> Usaremos o termo imagem conceitual para descrever a estrutura cognitiva total associada ao conceito, o que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos associados. É construída no decorrer dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (TALL; VINNER, 1981, p. 152).

Tome, por exemplo, o conceito de força em Física. Quando ouvimos a palavra força podemos imaginar várias coisas, como algumas ideias relacionadas: empurrar, puxar, grandeza vetorial; podemos pensar na equação do princípio fundamental da dinâmica $\vec{F}_R = m.\vec{a}$, ou ainda, em forças específicas, como a força gravitacional, a força nuclear forte, enfim, são várias as representações que podem ser evocadas, todas concorrem para a formação de um todo; a imagem conceitual de força.

Qualquer fragmento da imagem conceitual que é ativado em um determinado momento, dependendo do estímulo, chama-se *imagem conceitual evocada*. Isso se dá, segundo Tall e Vinner (1981), porque as entradas sensoriais excitam certas vias neurais e inibe outras, por isso, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da imagem conceitual, desenvolvendo-as de uma forma que podem não formar um todo coerente. Se um sujeito estivesse diante de um problema que solicitasse o cálculo da intensidade da força resultante que atua sobre um corpo, esse tipo de problema, dependendo da experiência do indivíduo, poderia ser um possível estímulo para que ele ativasse a equação do princípio fundamental da dinâmica. É claro que a qualidade desses fragmentos depende da experiência, da aprendizagem, pois o conteúdo evocado pode não estar de acordo com aquele aceito pelos físicos.

### 2.4.3 Definição conceitual

Existem diferentes formas de apresentar ou observar um conceito, que compõem as *representações do conceito*[4]. O conceito de função, por exemplo, pode ser representado (exteriorizado) por meio de uma tabela, um diagrama, um gráfico, uma fórmula ou por meio de um enunciado. Essas representações, por sua vez, dependem do quão desenvolvida é a imagem conceitual do indivíduo. Se ele aprendeu apenas funções definidas por fórmulas matemáticas, consequentemente, terá uma imagem conceitual mais restrita, ou mono registro.

A *definição conceitual* se refere ao enunciado utilizado para especificar um conceito. Podendo ser formal, ou seja, aquela aceita em geral pela comunidade científica de uma determinada área de conhecimento, ou pessoal, que é uma reconstrução particular de uma definição conceitual formal ou, ainda, a sua própria explicação da imagem conceitual evocada. A definição conceitual pessoal é, portanto, uma possível parte da imagem conceitual.

> Consideremos o termo definição conceitual como sendo uma forma de palavras usadas para especificar esse conceito. Pode ser aprendida por um indivíduo de forma mecânica, ou de forma mais significativa e relacionada em maior ou menor grau ao conceito como um todo. Também pode ser uma reconstrução pessoal feita pelo aluno a partir de uma definição. Neste caso, o aluno emprega a forma de palavras para dar a sua própria explicação da imagem conceitual (evocada). A definição conceitual pode ser dada ao aluno ou construída por ele mesmo, mas em ambos os casos, é possível que o aluno faça modificações de tempo em tempo. Desta maneira, uma definição conceitual pessoal pode ser diferente de uma definição conceitual formal, sendo esta última uma definição conceitual aceita pela comunidade matemática em geral (TALL; VINNER, 1981, p. 152).

As definições têm papéis importantes quando se referem aos conceitos científicos. Na Matemática, por exemplo, a compreensão de seus objetos a fim de torná-los operacionais depende muito de uma definição precisa, clara e concisa, pois a descrição precisa do objeto dará vida ao mesmo, estabelecendo limites, especificando até onde este objeto é diferente de outro aparentemente semelhante. Uma definição apropriada nos concede a capacidade de contemplar os objetos matemáticos com os olhos da mente, bem como a capacidade de utilizá-los na resolução de problemas.

---

[4] O conceito de representação será discutido com maior profundidade na seção 2.5.

Uma pessoa pode usar um conceito sem saber defini-lo, pois um conceito transcende as diferentes formas de exteriorizá-lo ou evocá-lo. Enquanto a definição formal pode ou não fazer parte da imagem conceitual de um indivíduo, a forma de operar com o conceito também é constituinte da forma de concebê-lo, sendo, portanto, um atributo da imagem conceitual.

### 2.4.4 Fatores de conflito potencial e cognitivo

Segundo Tall e Vinner (1981), as diferentes partes da imagem conceitual (imagem conceitual evocada) podem não constituir um todo (imagem conceitual) coerente, tendo em vista o exercício de apenas algumas dessas partes, e a negligência em operacionalizar as outras. Logo, determinados fragmentos da imagem conceitual podem estar em desacordo com outros, ou até mesmo com a definição conceitual formal, temos, então, um *fator de conflito potencial*. Potencial porque partes incoerentes da imagem conceitual podem coexistir, desenvolvendo-se paralelamente, quando não percebidas como contraditórias, mas que a qualquer momento podem colidir, causando confusões imediatas ou desconfortos inconscientes, isso ocorrerá quando aspectos conflitantes forem evocados simultaneamente, como consequência de alguma solicitação externa como uma pergunta na avaliação, nesse caso, tais incoerências são chamadas de *fatores de conflito cognitivo*. Assim, os fatores são de conflitos potenciais quando podem coexistir sem constituírem obstáculos para a aprendizagem e, tornam-se fatores de conflito cognitivo, quando são responsáveis por uma situação ambígua criada sempre que aspectos contraditórios ao conceito forem ativados simultaneamente.

Um aprendiz pode enunciar corretamente uma definição conceitual formal e ao mesmo tempo ter uma imagem conceitual incompatível, não reconhecida pelos matemáticos. Este último é um tipo mais grave de fator de conflito potencial, uma imagem conceitual que está em contradição não com outra parte da imagem conceitual, mas com a própria definição conceitual formal, esses fatores podem impedir seriamente o aprendizado da linguagem formal de uma área do conhecimento (TALL; VINNER, 1981).

### 2.4.5 Estrutura cognitiva

Suponha, agora, o grande número de conceitos que uma pessoa pode adquirir ao logo de sua vida, seja no dia a dia, seja na escola. A cada conceito associa-se uma estrutura semelhante a uma teia, no centro dela está o nome do conceito, já nas ramificações se encontram figuras mentais, propriedades e processos associados, o que constitui uma rede de significados. Conforme o indivíduo aprende, o conhecimento se amplia, logo novas estruturas podem ser construídas ou simplesmente reorganizadas, o que gera novas conexões entre estruturas já existentes com base na semelhança de seus aspectos. Nesse contexto, a mente pode ser concebida como um tecido flexível, plástico, fluido, dinâmico, mutável, formado por um conjunto de conhecimentos e suas inter-relações, a *estrutura cognitiva*. Assim, a imagem conceitual pode ser entendida como uma estrutura cognitiva total referente a *um* conceito, enquanto a imagem conceitual evocada, como uma das ramificações da teia.

A estrutura cognitiva é dinâmica devido às relações constantemente ativadas entre conhecimentos: a interação de novas informações a ser aprendidas com conceitos já fixados na estrutura cognitiva, o que enriquece os conceitos já estabelecidos, ou a interação entre conceitos já estabelecidos nessa estrutura, que promove uma reorganização do conteúdo aprendido. Conforme Ausubel (1978), a estrutura de conhecimentos de um indivíduo em uma determinada área comporta uma noção de organização pré-instalada, formando um tipo de hierarquia conceitual, i.e., os conceitos mais abrangentes situam-se no cume da estrutura mental e, gradativamente, abarcam os conceitos ou proposições menos inclusivos e mais diferenciados.

A estrutura cognitiva que ilustra o significado de um conceito é muito maior do que a expressão de um símbolo, portanto, o ensino de conceitos científicos não deve visar apenas a formalizações, à reprodução acrítica de definições conceituais formais, que formam apenas uma ramificação da rede de significados, mas ao enriquecimento da imagem conceitual dos aprendizes. A aquisição da estrutura formal é necessária, pois deixa mais elaborada a imagem conceitual e mais coerente com a epistemologia da matéria, mas não suficiente para a aprendizagem.

### 2.5 Registros de representação semiótica

Embora seja algo óbvio, pelo menos quando a questão é levantada, os objetos matemáticos são bem diferentes daqueles tratados pela Física, Química, Biologia, etc. Esses objetos (conceitos, propriedades, estruturas ou relações) são imateriais e o modo de trabalhar em Matemática, principalmente o ato de propor e resolver problemas, independe de verificações empíricas. Assim, sendo os objetos matemáticos não diretamente acessíveis à percepção (abstratos), como acessá-los? Dentro dessa problemática faz-se essencial compreender o que é uma representação ou, mais precisamente, uma representação semiótica.

Toda a comunicação em Matemática se fundamenta em representações. Suponha que certo professor estivesse incumbido de apresentar o conceito de função para determinada turma. Muito provavelmente ele começaria definindo uma função e depois trabalharia com diagramas, fórmulas, tabelas e gráficos. Nesse exemplo, o acesso ao objeto matemático função dependeria de uma escrita, uma notação, figuras, expressões algébricas e gráficos cartesianos, ou seja, de *representações semióticas*. Segundo Duval (2012), "As representações **semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e funcionamento" (p.269).

Uma representação semiótica é a forma (o representante) sob a qual uma informação/conteúdo (o representado) pode ser descrita (DAMM, 2012). Além disso, representações semióticas são produzidas dentro de sistemas semióticos (sistema particular de signos) que possuem regras específicas para o tratamento dos conteúdos veiculados. Para diferenciar os sistemas semióticos utilizados em Matemática daqueles utilizados fora dela, Duval (2013) utiliza o termo *registro*. Segundo Duval (2012, p.266), "um registro é um campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios". Nesse contexto, podemos dizer que a expressão $y = x^2 - 5x + 6$ é uma representação semiótica para certa função quadrática, que pertence ao registro algébrico, e este, por sua vez, é detentor de regras específicas, ou seja, trabalhar corretamente dentro desse registro (ou sistema semiótico) implica dominar tais regras. Como resposta à pergunta apresentada, temos que as representações semióticas são as ferramentas que nos permitem alcançar e utilizar os objetos matemáticos. Para Duval (2013, p.15), o espectro extremamente amplo de representações semióticas não constitui somente o acesso aos objetos matemáticos, mas também "determinam os processos cognitivos e epistemológicos dos tratamentos matemáticos".

Segundo Duval (2012), todo registro de representação, para ser considerado como tal, deve permitir três atividades cognitivas fundamentais: a *formação*, o *tratamento* e a *conversão*. A atividade de formação é comparável a realização de uma descrição e deve respeitar regras. Essas regras têm por função assegurar o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para tratamentos; são regras de conformidade, i.e., são regras já existentes, não sendo competência do aprendiz criá-las, mas somente usá-las para reconhecer as representações. Tanto o tratamento quanto a conversão são *transformações* de representações, que são radicalmente diferentes. O tratamento é a transformação de uma representação no interior do registro onde foi formada; cada registro possui regras próprias de tratamento com graus de dificuldade diferentes. A natureza e a quantidade dessas regras variam de um registro para outro. O cálculo (numérico, algébrico, proposicional, etc.), por exemplo, é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas. A conversão é a transformação de uma representação que se desenvolve durante a mudança de um registro para outro, sem alterar, em sua totalidade, os objetos matemáticos que estão em jogo. Não há regras de conversão, assim como há regras de conformidade e de tratamento, o que é exigido na conversão é o estabelecimento da diferença entre forma e conteúdo. A ilustração de enunciado é um exemplo de conversão; nesse caso, a ilustração é a transformação de uma representação linguística em uma representação figural. É bom ressaltar que a conversão e o tratamento são atividades cognitivas diferentes e independentes. Um aluno pode muito bem ser capaz de fazer contas com números na forma fracionária e com números na forma decimal, mas, quando necessário, se mostrar incapaz de pensar um número fracionário em sua forma decimal e vice-versa, ou pior, não conseguir efetuar a conversão. Portanto, falar em registro de representação é o mesmo que falar na possibilidade de formação, tratamento e conversão de representações semióticas.

Para Duval (2012), das três atividades cognitivas descritas, a conversão é a mais negligenciada, pois considera-se, geralmente, que:

> a conversão das representações acontece por si mesma desde que haja capacidade de formar representações nos registros diferentes e efetuar tratamentos sobre as representações [...] a conversão não tem nenhuma importância real para a compreensão dos objetos ou dos conteúdos representados, pois o seu resultado se limita a uma mudança de registro (p.277).

Relegar a atividade de conversão a segundo plano, designando-a como uma mera consequência das atividades de formação e tratamento, é desconsiderar o importante papel dessa atividade cognitiva para a apreensão dos objetos matemáticos. Duval (2012, p.266) afirma que:

> As transformações de representações semióticas em outras representações semióticas estão no coração da atividade matemática. As dificuldades dos alunos para compreender matemática surgem por conta da diversidade e complexidade dessas transformações.

Mais adiante tornaremos a falar sobre a importância das conversões para a aquisição dos conhecimentos matemáticos.

Até agora nenhuma novidade foi apresentada sobre a ideia de representação. É claro que uma função, um vetor ou uma matriz, todos objetos matemáticos, não podem ser detectados por experiências em laboratório ou observados em meio a natureza. A ideia fundamental que a *teoria dos registros de representação semiótica* levanta para a compreensão de como se processa a aquisição de conhecimentos matemáticos é que, em Matemática, "o *tratamento* dos conhecimentos depende da *forma* e não do *conteúdo* envolvido" (DAMM, 2012, p.173). Ou seja, a relação entre o conteúdo da representação e o objeto representado depende do sistema semiótico utilizado. Assim, tanto as representações quanto a maneira de se trabalhar com essas representações depende do registro utilizado; mudando-se o registro, mudam-se, portanto, a forma e as regras. Sobre a forma ser mais importante que o conteúdo, afirma Duval (2013, p.14), "do ponto de vista cognitivo, a atividade matemática deveria ser analisada em termos de *transformações de representações semióticas* e não de conceitos puramente mentais e, portanto, assemióticos".

Duval (2012) discute sobre a ideia enganosa, geralmente aceita, de que uma representação semiótica serve apenas para comunicar as representações mentais (crenças; concepções). Esse autor critica, baseando-se nos estudos de Vygotsky e de Piaget, essa visão reducionista da funcionalidade das representações, afirmando que o desenvolvimento das representações mentais "dependem de uma interiorização de representações semióticas, do mesmo modo que as representações mentais são uma interiorização daquilo que é percebido" (p.269). Diz ainda que "as representações semióticas permitem preencher algumas funções cognitivas essenciais como a de tratamento" (p.270); de fato, algumas atividades de tratamento são diretamente ligadas à utilização de sistemas semióticos, como, por exemplo, o cálculo: atividade cognitiva que as representações mentais não preenchem.

Segundo o que foi exposto até aqui, pode-se afirmar que uma representação não serve apenas para designar ou comunicar um objeto matemático, como geralmente se concebe, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento, ou ainda, como ferramentas comuns para produzir novos conhecimentos. Ou seja, a teoria dos registros de representação semiótica atribui às representações um lugar de destaque, e não apenas secundário. Não podemos, entretanto, esquecer que o que importa não são as várias representações, embora sejam de suma importância, mas sim os objetos matemáticos que são representados (o conteúdo). Ora, os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com a forma, i.e., com as representações que se fazem deles. Essa confusão acarreta, conforme Duval (2012),

> uma perda de compreensão e **os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inúteis** ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações "inertes" que sugerem nenhum tratamento (p.268, grifo nosso).

Dentro desta perspectiva teórica, a confusão entre forma e conteúdo simboliza um obstáculo para a aprendizagem da Matemática. Duval (2012, p.268) chama de "ponto estratégico" para a compreensão da Matemática, a distinção entre o objeto matemático e sua representação semiótica. Como mencionado, o acesso aos objetos matemáticos não se dá de forma direta, ele não é possível fora das representações semióticas, o que torna a confusão representação-objeto quase inevitável. Duval (2012) nomeia esse inimigo potencial do processo de ensino e aprendizagem da Matemática de *paradoxo cognitivo do pensamento matemático*: "de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível" (p.268).

Esse paradoxo encontra força no desconhecimento da importância das representações semióticas para a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos, o alimento que o nutre é achar que a atividade matemática é igual à atividade conceitual. Segundo Duval (2012, p.269), "Este paradoxo cognitivo do pensamento matemático no ensino não é percebido, simplesmente porque existe muito mais importância às representações mentais do que às representações semióticas".

Em forma de pergunta, o paradoxo cognitivo do pensamento matemático pode ser apresentado da seguinte maneira: *Como os aprendizes poderiam não confundir os objetos matemáticos com suas representações semióticas, se eles não têm acesso aos objetos matemáticos fora das representações semióticas?*

Duval (2012) apresenta duas repostas a essa pergunta que, na verdade, são duas condições para que uma representação funcione verdadeiramente como uma representação, i.e., ela dá acesso ao objeto matemático representado. São elas: 1) o recurso a vários registros de representação semiótica e; 2) A coordenação de vários registros de representação semiótica. As condições 1) e 2) nos conduz, naturalmente, a um novo questionamento colocado por Duval (2012), cujas repostas são justificativas para as duas condições apresentadas: *Qual a necessidade da diversidade de registros de representação e por que a coordenação desses muitos registros é importante para o funcionamento do pensamento humano?*

Duval (2012) apresenta três respostas a essa nova pergunta: 1) economia de tratamentos; 2) complementaridade de registros e; 3) a conceitualização implica coordenação de registros de representação.

Resposta 1 – *Economia de tratamentos*: Imagine que alguém tivesse que resolver a seguinte operação com números racionais na forma fracionária: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{3}{4}$. É claro que um aluno com um razoável entendimento de operações com frações poderia resolver essa adição recorrendo, por exemplo, à construção de frações equivalentes às apresentadas, mas com denominadores iguais, via mmc. Ou utilizar outro registro; um cujo custo de tratamento seja menor. Recorrendo ao registro decimal teríamos: $0,5+0,25+0,2+0,75=1,7$. Ou seja, um ensino que apresenta vários registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático permite ao aprendiz trocar de registro, o que favorece a realização de tratamentos de forma mais potencializada e econômica.

Resposta 2 – *Complementaridade de registros*: Suponha que um indivíduo queira estudar a relação funcional entre duas variáveis, *x* e *y*. O mesmo possui uma tabela com uma grande quantidade de valores para as duas variáveis e pretende estudar o comportamento dessas variáveis. A contemplação do comportamento da relação funcional entre as variáveis *x* e *y* fica prejudicada se tentarmos analisar os valores particulares que constituem a tabela, contudo, um gráfico cartesiano sintetizaria a grande quantidade de informações contidas na tabela e revelaria o aspecto global da relação. Queremos dizer que, dependendo da situação, uma representação pode ser mais conveniente que outra, mesmo que cada uma represente o mesmo objeto. Cada registro tem limitações representativas específicas, ou seja, nenhuma representação nos fornece a descrição de todo o objeto matemático representado, as informações veiculadas são parciais. Essa parcialidade acaba exigindo o trabalho com várias representações de um mesmo objeto, pois cada representação destaca informações específicas do objeto matemático em questão. Sendo assim, a comparação de diferentes modos de representação de um mesmo objeto incita o aprendiz a perceber os contras e prós de cada registro, o que fornece um caminho para o entendimento do objeto matemático como um todo.

Resposta 3 – *A conceitualização implica coordenação de registros de representação*: Essa resposta baseia-se na ideia de que a aquisição de conhecimentos matemáticos (conceitualização) é possível somente a partir do momento em que o aprendiz transita naturalmente por diferentes registros de representação semiótica. “A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão” (DUVAL, 2012, p.282). Embora um contexto pautado na ampla utilização de uma variedade de registros seja fundamental, ele não garante a apreensão conceitual, pois é somente durante a articulação entre as múltiplas representações de um mesmo objeto que se percebe a diferença entre representante e representado. Mudar naturalmente, de maneira rápida e espontânea, a forma como o conhecimento é representado não constitui tarefa simples, por isso, a coordenação “supõe uma abordagem desenvolvimentista da atividade cognitiva nas disciplinas em que o recurso a uma pluralidade de registros é fundamental” (DUVAL, 2012, p.278-279).

O recurso a vários registros de representação semiótica, bem como a coordenação entre esses vários registros permite ao aprendiz distinguir a representação do objeto representado e, principalmente, apreender o conceito matemático em jogo. Esses dois fatores foram considerados durante a construção das sequências didáticas referentes a este trabalho.

A teoria discutida nesta seção mostra como a forma é essencial na aprendizagem da Matemática, enfatizando que a atividade matemática, do ponto de vista cognitivo, não deveria ser analisada em termos de conceitos puramente mentais, mas sim a partir do funcionamento representacional próprio do registro no qual as representações são produzidas. A forma nos dá acesso aos objetos abstratos da Matemática, dita como devemos trabalhar com esses objetos, são absolutamente necessárias para o funcionamento cognitivo do pensamento humano e propõe um novo caminho para compreendermos como se processa a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

## 2.6 Teoria da Aprendizagem Significativa

O que podemos fazer para reter e lembrar mais facilmente de uma informação? Uma forma de contextualizar a resposta mais óbvia a esta pergunta reside no resultado de um levantamento realizado pela empresa especializada em soluções para gerenciamento de senhas, *SplahData*[5]. Ela divulgou, em 2014, uma lista contendo as 25 senhas mais utilizadas por usuários de computadores em suas contas, tornando-as, assim, as piores senhas. A senha que ocupava a 1ª posição era 123456. Quer dizer, para que uma informação se torne rapidamente operacional, facilmente evocável, devemos relacioná-la aos nossos conhecimentos prévios. Por isso, é tão comum um indivíduo se reportar, em suas senhas, àqueles, ou àquilo que lhe é mais próximo, como a sucessão de números referente ao inesquecível processo elementar de contagem.

[5] Disponível em: <http://splashdata.com/blog/>. Acesso em: 20/12/2015.

Ilustrada pelo exemplo anterior, uma forma produtiva de promover a aquisição de significados e sua retenção é levar em consideração aquilo que o aluno já sabe, favorecendo o relacionamento das novas informações àquelas já estabelecidas na estrutura cognitiva do mesmo, possibilitando, assim, um compartilhamento de significados, e a "ancoragem" das novas informações a aspectos relevantes da estrutura cognitiva desse aprendiz. Nas palavras de Ausubel (1978, p.iv): "Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é *aquilo que o aprendiz* já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo".

### 2.6.1 O processo de aprendizagem significativa

O processo através do qual uma nova informação interage com um conceito já estabelecido na estrutura cognitiva do aprendiz é chamado de *aprendizagem significativa*. A interação que caracteriza a aprendizagem significativa transcende uma simples associação, ela ocorre de maneira não-arbitrária e não-literal entre uma nova informação (materiais instrucionais) e aspectos específicos e relevantes da estrutura cognitiva, os *subsunçores*[6]. Por meio desse vínculo entre o novo e o prévio, há um compartilhamento de significados, onde a nova informação passa a ter sentido para o aprendiz e os subsunçores ficam cada vez mais elaborados, mais estáveis e diferenciados, mais capazes de servirem como âncora em novas interações, o que contribui para o desenvolvimento da estrutura cognitiva.

### 2.6.2 Aprendizagem significativa x aprendizagem mecânica

Para Ausubel (2003), o conhecimento ou, mais amplamente, a estrutura cognitiva (estrutura de conhecimentos e suas inter-relações), é produto da aprendizagem significativa por definição. Em distinção à aprendizagem significativa Ausubel (1978) define a *aprendizagem mecânica*, como sendo aquela em que a nova informação é armazenada na memória do aprendiz de maneira literal e arbitrária (isolada e distribuída ao acaso na estrutura cognitiva). A nova informação não se incorpora ao repertório cognitivo do aprendiz nem o modifica, pois não há interação entre o novo e algum aspecto específico e relevante da estrutura cognitiva já existente. Como o aprendiz não dá significados ao que aprende, o produto da aprendizagem mecânica é, geralmente, de duração, utilidade e significados transitórios.

[6] Segundo Moreira (2009c), a palavra *subsunçor* não existe na Língua Portuguesa, trata-se de uma tentativa de tradução da palavra inglesa *subsumer*.

Embora suscitem ideias opostas, conforme Moreira (2009a, p.31):

> a distinção entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica não é dicotômica. Estes dois tipos de aprendizagem estão em extremos opostos de um mesmo contínuo. Isto significa que não se deve pensar que a aprendizagem é significativa ou mecânica. Há casos intermediários. É possível que uma aprendizagem inicialmente mecânica passe, progressivamente, à significativa.

Embora a ideia de “ancoragem” seja uma analogia útil para se entender o que é a aprendizagem significativa, ela não nos concede uma visão da dinâmica do processo. A estrutura cognitiva é o corpo de conhecimentos de cada indivíduo, sendo assim, como os conceitos são unidades de conhecimentos e vetores de significados, então a estrutura cognitiva é um conjunto de conceitos e suas inter-relações. O conteúdo total dessa estrutura é constituído pelos produtos da aprendizagem significativa. Portanto, o que está em jogo na aprendizagem significativa é o aumento da substância da estrutura de conhecimentos.

### 2.6.3 Diferenciação progressiva e reconciliação integrativa

Ausubel (1978) discute sobre os dois processos básicos da dinâmica da estrutura cognitiva, a *diferenciação progressiva* e a *reconciliação integrativa*, que ilustram como a aprendizagem significativa amplia a estrutura conceitual do indivíduo. A diferenciação progressiva é um processo externo-interno, i.e., conforme a nova informação (externa à estrutura cognitiva) interage com um subsunçor (interno), ambos se modificam; a nova informação passa a ter significado e o subsunçor torna-se mais elaborado, estável e diferenciado, acarretando, portanto, a modificação da estrutura de conhecimentos. Na reconciliação integrativa o processo interativo é interno-interno, ou seja, há uma interação entre subsunçores, ativada quando elementos existentes na estrutura cognitiva com certo grau de clareza, estabilidade e diferenciação são percebidos como intimamente relacionados, o que promove a reorganização da estrutura cognitiva. A reconciliação integrativa é um tipo de diferenciação progressiva, pois à medida que o indivíduo percebe os subsunçores relacionados, delimitando semelhanças e similaridades entre eles e, posteriormente, reorganizando sua estrutura cognitiva, consequentemente também a modifica.

A aquisição do conceito de função, por exemplo, se dá por diferenciação progressiva em Matemática. Imagine que um aluno tenha o conceito de função estabelecido em sua estrutura cognitiva, à medida que ele vai aprendendo significativamente função afim, função quadrática, função exponencial, função logarítmica etc. o subsunçor função torna-se cada vez mais elaborado, mais estável e diferenciado, mais capaz de ser um conceito âncora em novas interações. Se o aprendiz tiver em sua estrutura cognitiva os conceitos de função e progressão aritmética, e percebê-los intimamente relacionados (uma progressão aritmética é uma sequência e uma sequência é uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$), destacando suas diferenças e similaridades, a modificação da estrutura cognitiva será resultante da sua reorganização: reconciliação integrativa.

Embora sejam processos da dinâmica da estrutura cognitiva, a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa foram apresentadas com outro propósito por Ausubel (1978, p.152), como princípios programáticos da organização da matéria de ensino e facilitadores da aprendizagem significativa. Como a estrutura cognitiva é um conjunto de conhecimentos hierarquicamente organizados, que é constantemente modificada pela experiência e obedece a dois processos dinâmicos que explicam a "mecânica" do desenvolvimento cognitivo, nada mais justo que as instruções levem em consideração estratégias de ensino que corroborem essas duas características peculiares da dinâmica da estrutura de conhecimentos do aprendiz. Assim, o ensino deve ser organizado de tal modo que os conceitos mais abrangentes do conteúdo da matéria de ensino sejam apresentados nas primeiras aulas e, progressivamente, diferenciados ao longo das demais, destacando os detalhes e especificidades de cada conceito: diferenciação progressiva. A reconciliação integrativa é praticada como princípio programático, quando exploramos as relações entre conceitos centrais do conteúdo, estabelecendo semelhanças e diferenças importantes, e apontando discordâncias reais ou aparentes.

A diferenciação progressiva e reconciliação integrativa são processos relacionados que têm como resultado a mudança ou a reorganização da estrutura conceitual e, consequentemente, a sua ampliação; são processos que explicam os efeitos da aprendizagem significativa sobre a estrutura cognitiva. Mas como ocorre a aquisição de conceitos? Dois processos foram descritos por Ausubel (1978) que respondem a essa pergunta: a *formação de conceitos* e a *assimilação de conceitos*.

Ausubel (2003), explica que o significado de 'aquisição' não é exatamente aquele do dicionário, relativo ao contexto da aprendizagem, que implica uma ingestão de informações passiva, absorvente, mecânica, autoritária e não crítica. Refere-se à criação (produção, construção) de conhecimentos viáveis (assuntos ordenados e organizados hierarquicamente), embora possua também um significado mais vulgar de 'ganhar posse' de novos significados (conhecimentos) que anteriormente não se compreendiam ou não existiam.

### 2.6.4 Os processos de formação e assimilação de conceitos

A formação de conceitos ocorre, primordialmente, em crianças mais novas (em idade pré-escolar), é responsável pelo surgimento dos primeiros subsunçores, que possibilitarão a aprendizagem significativa. Esse processo envolve um suporte empírico-concreto, onde há testagem de hipóteses, e generalizações a partir de entidades específicas. Na formação de conceitos, há uma equivalência entre o nome do conceito e as características essenciais comuns a um grupo de entidades específicas. O conceito de "cão" é adquirido pela criança através do processo de formação, por encontros sucessivos com cães, gatos e outros animais, até ela ser capaz de generalizar as características essenciais que constituem o conceito culturalmente aceito de "cão", como o latido ou o comportamento, por exemplo.

O processo de formação de conceitos constrói a base para a aprendizagem significativa, os subsunçores. Assim, a maioria das crianças com idade escolar já possui um conjunto de conceitos-âncora adequado para a aquisição de conceitos por assimilação. O processo de assimilação é predominante em crianças mais velhas e em adultos, nesse processo, há uma interação da nova informação com conceitos específicos e relevantes preexistentes na estrutura cognitiva, i.e., com subsunçores, o que implicará uma estrutura cognitiva mais diferenciada.

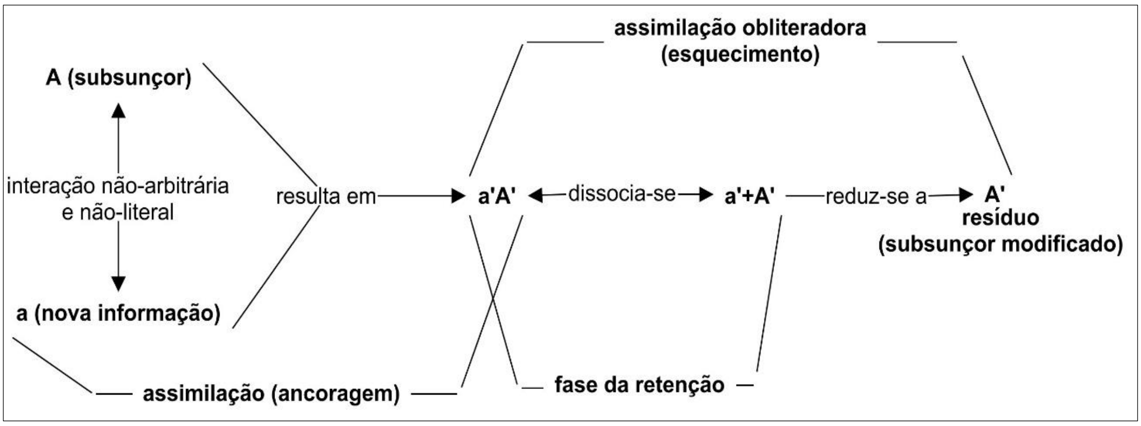
### 2.6.5 O princípio de assimilação de Ausubel

O processo de assimilação (ou ancoragem) já descrito é uma parte da chamada "teoria da assimilação" ou "princípio da assimilação" introduzido por Ausubel para tornar mais claro e preciso o processo de aquisição e organização de significados na estrutura cognitiva (MOREIRA, 2009a). Entretanto, para uma compreensão mais pormenorizada relativa à aquisição de conceitos faz-se necessário o entendimento do completo funcionamento do referido princípio, que não termina após a aprendizagem significativa (ancoragem), mas continua, implicando um mecanismo natural de esquecimento: *assimilação obliteradora*.

Segundo Ausubel (1978), na aprendizagem significativa a nova informação potencialmente significativa **a** se relaciona de maneira não-arbitrária e não-literal a um conceito ou proposição especificamente relevante **A** preexistente na estrutura cognitiva. Essa interação promove um compartilhamento de significados, onde não só a nova informação adquire significados, mas também o subsunçor, e ambos os conhecimentos são modificados, gerando **a'** e **A'**, que são coparticipantes de uma nova unidade portadora de significado composto, o produto interacional **a'A'** (resultado da aprendizagem significativa).

O esquema a seguir é uma representação simplificada do princípio da assimilação proposto por Ausubel. Descrever todo o processo de assimilação por meio de uma única interação entre uma nova informação potencialmente significativa e um único subsunçor, como acontece no esquema (figura 16), é apenas ilustrativo. Verdadeiramente, a cada conceito (subsunçor) associa-se uma imagem conceitual (cujo conteúdo inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos associados, além de outros conceitos), o que sugere uma rede de significados impossível de representar por meio de uma figura.

**Figura 16 –** Representação do princípio de assimilação de Ausubel




Fonte: Adaptado de Moreira (2009c).

Na ancoragem, mesmo após o surgimento dos novos significados, o produto interacional **a'A'** permanece na estrutura cognitiva, podendo sofrer modificações decorrentes de novas aprendizagens e perda da capacidade de reprodução de ideias subordinadas.

A assimilação obliteradora inicia-se após a ancoragem, com a fase da retenção. A ancoragem proporciona um efeito facilitador na retenção, contudo, nessa fase, a nova informação e o subsunçor modificados gozam de uma independência momentânea (**a'A'↔a'+A'**), i.e., passam por um período variável de tempo em que podem ser reproduzidos como entidades individuais. Tal fato, segundo Ausubel (1978), explica como as informações recém-incorporadas permanecem disponíveis durante o período de retenção.

Embora os conceitos mais inclusivos, bem estabelecidos e diferenciados sirvam como ancoradouro para as novas informações a serem aprendidas, possibilitando a aquisição de significados e facilitando a retenção, o significado dos conhecimentos recém-assimilados tende, naturalmente, a ser incorporado ou reduzido pelos significados mais estáveis das ideias estabelecidas. Ou seja, na fase da obliteração as novas informações tornam-se, espontânea e progressivamente, mais unidas à estrutura cognitiva, i.e., aos poucos se fundem às suas ideias-âncora, até não ser mais possível reproduzi-las isoladamente, podemos dizer, então, que houve esquecimento, **a'A'** reduz-se simplesmente a **A'**.

Este processo de redução é um mecanismo típico da organização da estrutura cognitiva, similar ao processo de redução característico da formação de conceitos, onde atributos essenciais são abstraídos e generalizados a partir de exemplares similares, pois um único conceito abstrato é mais operacional na estrutura cognitiva do que todos os distintos exemplos dos quais foi abstraído. Na fase obliteradora esta tendência simplista e econômica também ocorre, porque apenas os conceitos mais abrangentes e estáveis são retidos, pois os mesmos contêm a substância das informações recém-assimiladas.

A assimilação obliteradora é uma continuação natural do processo de assimilação, não implicando o retorno do subsunçor envolvido na sua forma inicial **A**, mas sim a modificação do mesmo **A'**, que é o resíduo da assimilação obliteradora, o elemento mais estável e abrangente do produto interacional **a'A'**.

Como a substância da nova informação foi fundida ao subsunçor na estrutura cognitiva, houve perda de detalhes e diferenciação, logo tais conhecimentos não podem ser resgatados com as mesmas palavras com as quais interagiram com as ideias-âncora, inicialmente. Ausubel (1978) alerta que na aprendizagem significativa, a nova informação **a** poderá nunca ser evocada com detalhes da mesma forma em que foi recebida pelo aprendiz, pois o processo de assimilação da nova informação **a** a altera para **a'**, por isso, recursos avaliativos que requeiram a repetição exata das informações aprendidas desestimulam a aprendizagem significativa.

Resumindo o princípio de assimilação de Ausubel: a nova informação e o subsunçor interagem para adquirirem significados e facilitar a retenção, separam-se para diferenciarem-se e consolidar a retenção, e reduzem-se para simplificar e facilitar o manuseio cognitivo.

### 2.6.6 Condições para a ocorrência da aprendizagem significativa

Segundo Ausubel (1978), existem duas condições para a ocorrência da aprendizagem significativa:

1. o material instrucional deve ser potencialmente significativo;
2. o estudante deve ter predisposição para aprender.

A condição (1) significa que o material a ser aprendido deve ser relacionável à estrutura cognitiva do aluno, de maneira não-arbitrária e não-literal, o que implica duas condições subjacentes: que o material instrucional tenha significado lógico e significado psicológico. O significado lógico concerne à natureza própria do material, e a evidência desse significado reside na possibilidade de relacionamento, não-aleatório e substantivo, a conceitos específicos e relevantes já estabelecidos na estrutura cognitiva do aprendiz. Ou seja, o material instrucional deve se situar dentro da capacidade intelectual do aprendiz naquele momento. O significado psicológico se refere à natureza da estrutura cognitiva, e a evidência desse significado repousa na disponibilidade de subsunçores específicos e relevantes para a ancoragem do novo material.

A interação não-arbitrária e não-literal entre o conteúdo logicamente significativo do material de aprendizagem e os conceitos específicos e relevantes preexistentes na estrutura de conhecimentos provoca o surgimento do significado real para o aprendiz, o significado psicológico, que comporta componentes pessoais.

Um material instrucional será sempre 'potencialmente' significativo, nunca exatamente significativo, pois a significatividade do material não depende do material em si, mas do aprendiz, o que nos leva a condição (2). Esta depende da atitude do aprendiz de relacionar as novas informações aos seus conhecimentos prévios.

Se, por exemplo, um professor de Matemática tivesse a intenção de ensinar um conteúdo avançado, extremamente abstrato, para um aluno do 5º ano do ensino fundamental, mesmo o aprendiz estando motivado para tal (2), não aprenderia significativamente esse conteúdo, salvo raras exceções, pois o material está além da sua capacidade intelectual naquele momento, não haveria uma possibilidade de "relacionabilidade" do material com seus conhecimentos prévios (material sem significado lógico). Se o professor, por outro lado, apresentasse um conteúdo com significado lógico para alunos do 5º ano, mas se determinado aprendiz não tivesse subsunçores específicos e relevantes para ancorar aquele conteúdo (sem significado psicológico), não aprenderia de forma significativa mesmo estando disposto para tal. Não importa o quão planejado e organizado seja o ambiente de aprendizagem, mesmo que o material instrucional cumpra (1), se o aluno simplesmente quiser memorizar a informação para "passar na prova", a boa intenção do professor em favorecer a que os alunos alcancem uma aprendizagem significativa não se consolidará.

> [...] independentemente de quão potencialmente significativo possa ser o material a ser aprendido, se a intenção do aprendiz for, simplesmente, a de memorizá-lo arbitrária e literalmente, tanto o processo de aprendizagem como seu produto serão mecânicos (ou automáticos). E, de modo recíproco, independentemente de quão

> disposto a aprender estiver o indivíduo, nem o processo nem o produto da aprendizagem serão significativos, se o material não for potencialmente significativo - se não for relacionável à estrutura cognitiva, de maneira não-literal e não-arbitrária (MOREIRA, 2009c, p.13).

### 2.6.7 Organizadores prévios

Antes da consecução de aulas que tenham a intenção de favorecer a aprendizagem significativa, existem dois obstáculos que devem ser especialmente considerados, a não relacionabilidade (entre o novo e o prévio) e a não disponibilidade (de subsunçores adequados). Para a superação dessas dificuldades Ausubel (1978) propôs a utilização de *organizadores prévios*.

Os organizadores prévios podem ser questões apresentadas para debate, simulações computacionais, uma aula introdutória, uma demonstração, uma situações-problema, a apresentação de um vídeo, slides, enfim, são recursos instrucionais que devem ser apresentados antes do material a ser aprendido e devem possuir um nível mais alto de abstração, generalidade e abrangência em relação a esse material de aprendizagem. A construção de um organizador prévio depende sempre da natureza do material de aprendizagem, da idade do aprendiz e do grau de familiaridade que este já tem com o conteúdo a ser aprendido.

Servem para ativar a relacionabilidade entre o que o aprendiz já sabe e a nova informação (não percebidos como relacionados), ou para fornecer ideias âncoras relevantes para a aprendizagem significativa do conteúdo a ser apresentado, i.e., promovem um contexto ideacional que facilita a aprendizagem significativa. Para Ausubel (1978, p. 171), "a principal função do organizador prévio é servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele precisa saber para que possa aprender significativamente a tarefa com que se depara".

Moreira (2009b), faz uma distinção entre dois tipos de organizadores prévios, o expositivo e o comparativo:

> No caso de material totalmente não familiar, um organizador "expositivo", formulado em termos daquilo que o aprendiz já sabe em outras áreas de conhecimento, deve ser usado para suprir a falta de conceitos, idéias ou proposições relevantes à aprendizagem desse material e servir de "ponto de ancoragem inicial'. No caso da aprendizagem de material relativamente familiar, um organizador "comparativo" deve ser usado para integrar e discriminar as novas informações e conceitos, ideias ou proposições, basicamente similares, já existentes na estrutura cognitiva (p. 29).

Na concepção ausubeliana, os verdadeiros organizadores prévios são aqueles destinados a facilitar a aprendizagem significativa de tópicos específicos ou de ideias estreitamente relacionadas. A intenção não é facilitar a aprendizagem significativa de vários tópicos, não é uma visão geral de todo o conteúdo como um sumário ou um resumo que estão no mesmo nível de abstração, generalidade e inclusividade dos materiais instrucionais, organizadores com essa finalidade são chamados *pseudo-organizadores prévios*.

Cabe aqui uma observação de Moreira (2009b):

> [...] os organizadores prévios deveriam ser usados, sobretudo, para explicitar ao aprendiz a relacionabilidade entre seu conhecimento prévio e o novo conhecimento, ou seja, entre o que ele sabe mas não percebe que está relacionado com o novo. Seria um outro tipo de ponte cognitiva, provavelmente muito mais útil do que aquela que, em princípio, supriria a falta de conhecimento prévio adequado (p.36).

Ou seja, os organizadores prévios são mais efetivos para clarificar a relacionabilidade entre o que o aprendiz já sabe e o que precisa saber, ou ainda, recuperar significados obliterados, aqueles que foram "absorvidos" pelos subsunçores, perdendo diferenciação.

Na ausência de subsunçores, uma solução plausível foi apresentada por Novak (1977 apud Moreira 2009c), para a aquisição de novas informações em determinada área de conhecimento, completamente nova para o indivíduo, faz-se necessária uma aprendizagem mecânica. Esta ocorre até que alguns conceitos nessa área sejam adquiridos e se tornem subsunçores mesmo que pouco elaborados, conforme vão servindo de âncora em interações vão se tornando cada vez mais elaborados, ricos em significados, assim, uma aprendizagem inicialmente mecânica passa, progressivamente, à significativa.

### 2.6.8 Evidências de aprendizagem significativa

Surge, naturalmente, sob uma proposta de favorecer a aprendizagem significativa, o problema de como avaliar a sua ocorrência. Como a aprendizagem significativa implica aquisição de significados e estes, por sua vez, possuem componentes pessoais, então não faz sentido dizer que este indivíduo aprendeu de forma significativa e aquele não, podemos, apenas, procurar evidências de sua ocorrência.

Ausubel (1978) sugere que uma maneira de procurar evidências de aprendizagem significativa é criar contextos variados, formulando questões e problemas de maneira nova e não familiar que requeiram máxima transformação do conhecimento adquirido. Segundo este autor, tal proposta se constitui, também, na melhor maneira de evitar a *simulação da* *aprendizagem significativa*, pois a longa experiência de um aprendiz em realizar exames compostos por problemas típicos, faz com que ele se habitue a memorizar, não só proposições e fórmulas, mas também causas, exemplos, explicações e as maneiras de resolver os problemas propostos. Sem a utilização de questões e problemas criativos inseridos em múltiplos contextos, os produtos de uma aprendizagem mecânica podem se confundir com os produtos de uma aprendizagem significativa.

Joseph Novak da Universidade de Cornell, nos Estados Unidos, um dos principais colaboradores de Ausubel, faz sua contribuição em relação à análise de evidências de aprendizagem significativa, com o desenvolvimento dos *mapas conceituais* em 1972. Novak e outros pesquisadores entrevistaram um grande número de crianças com o intuito de acompanhar e entender as mudanças na maneira como elas compreendiam a ciência, contudo, tiveram dificuldade em identificar mudanças específicas na compreensão de conceitos científicos apenas examinando entrevistas transcritas. Logo, diante da necessidade de encontrar uma melhor forma de representar a compreensão conceitual das crianças, surgiu a ideia de que o conhecimento da criança poderia ser representado na forma de um mapa conceitual (NOVAK; CAÑAS, 2010).

### 2.6.9 Mapas conceituais para a avaliação da aprendizagem significativa

Neste trabalho, a análise dos mapas conceituais elaborados pelos alunos, participantes da investigação, servirá como meio para avaliar evidências de aprendizagem significativa.

Mapas conceituais são diagramas que indicam relações entre conceitos, estabelecendo uma hierarquia conceitual: os conceitos mais gerais e inclusivos no topo do mapa e os menos gerais e específicos abaixo. São ferramentas gráficas para a representação da estrutura cognitiva e fundamentam-se nos pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa, a base teórica para o mapeamento conceitual.

> Mapas conceituais são ferramentas gráficas para a organização e representação do conhecimento. Eles incluem conceitos, geralmente dentro de círculos ou quadros de alguma espécie, e relações entre conceitos, que são indicadas por linhas que os interligam. As palavras sobre essas linhas, que são palavras ou frases de ligação, especificam os relacionamentos entre dois conceitos. [...] Outra característica dos mapas conceituais é que os conceitos são representados de maneira hierárquica, com os conceitos mais inclusivos e gerais no topo e os mais específicos e menos gerais dispostos hierarquicamente abaixo (NOVAK; CAÑAS, 2010, p.10).

Nos mapas conceituais, quando dois conceitos são conectados por uma linha, significa, no entendimento de quem o fez, que há uma relação entre esses conceitos, e a natureza dessa relação deve ser explicitada por uma ou duas palavras-chave escritas sobre essa linha. Uma proposição é formada pela junção dos dois conceitos mediante a palavra-chave, que evidencia o significado da relação. Por isso, torna-se essencial o uso de palavras-chave sobre as linhas que unem os conceitos, mas esse recurso não as torna autoexplicativas. Temos, então, talvez o maior valor de um mapa conceitual: a externalização dos significados (explicações orais ou escritas), pois a compreensão genuína de um conceito ou proposição implica a posse de significados claros, precisos, diferenciados e, em especial, transferíveis.

O tamanho e a forma da linha que liga os conceitos, bem como os tipos de figuras geométricas que contêm os nomes dos conceitos são irrelevantes, salvo exceções, onde regras são estabelecidas, por exemplo, a de que os conceitos mais gerais e inclusivos devem estar em elipses e conceitos mais específicos em retângulos (MOREIRA, 2009b). Não há regras gerais fixas, o importante é que o mapa conceitual seja um instrumento capaz de evidenciar os significados atribuídos a conceitos e relações entre conceitos. Conforme Novak e Cañas (2010), o ideal é que os mapas conceituais sejam elaborados a partir de uma *questão focal*, questão particular que pretendemos responder, porque a estrutura hierárquica de uma área específica do conhecimento também depende do contexto no qual o conhecimento está sendo aplicado ou considerado.

O mapeamento conceitual pode ser usado para diversos objetivos, mas focalizaremos em duas finalidades: estratégia potencialmente facilitadora de uma aprendizagem significativa e instrumento para avaliar evidências de aprendizagem significativa.

A confecção de um bom mapa conceitual depende muito mais do que uma simples leitura do material instrucional, implica a aquisição dos significados compartilhados dentro do contexto da matéria de ensino. “Na medida em que os alunos utilizarem mapas conceituais para integrar, reconciliar e diferenciar conceitos, na medida em que usarem essa técnica para analisar [...] materiais educativos do currículo, eles estarão usando o mapeamento conceitual como um recurso de aprendizagem” (MOREIRA, 2009b, p.7).

Como os mapas conceituais servem para obter uma visualização da organização conceitual que um aprendiz atribui a um dado conhecimento, então ele também pode ser considerado um instrumento não convencional de avaliação (MOREIRA, 2009b). A ideia não é avaliá-los como se avalia um teste de múltipla escolha, por exemplo, atribuindo escores a questões que não dão margem a interpretações pessoais. A intenção é buscar informações sobre significados e relações significativas entre os conceitos da matéria de ensino, consoante o ponto de vista do aprendiz, interpretando as informações; explicações orais e escritas facilitam essa tarefa, afim de obter evidências de aprendizagem significativa.

> Como instrumento de avaliação da aprendizagem, mapas conceituais podem ser usados para se obter uma visualização da organização conceitual que o aprendiz atribui a um dado conhecimento. Trata-se basicamente de uma técnica não tradicional de avaliação que busca informações sobre os significados e relações significativas entre conceitos-chave da matéria de ensino segundo o ponto de vista do aluno (MOREIRA, 2009b, p.7).

Tendo em vista o componente idiossincrático da significação, não há um mapa conceitual correto. Cada aprendiz apresenta o seu mapa. Dois mapas sobre um mesmo conteúdo podem explicitar um bom entendimento do material instrucional, não sendo necessariamente um melhor do que o outro. Contudo, mesmo as interpretações sendo únicas, alguns mapas se mostrarão inadequados, pobres de significados, sugerindo falta de compreensão.

## 2.7 Aprender significativamente o conceito de função

O que é aprender significativamente o conceito de função? Poderíamos simplesmente dizer, de maneira genérica, que é aprender o conceito de função atribuindo-lhe significados. Contudo, essa resposta tautológica não acentua as características próprias do conceito de função. Uma resposta mais específica seria mais viável para futuras análises e discussões; uma resposta que considere as particularidades e a complexidade do referido conceito. Como a definição em Matemática tem um importante papel na identificação, comunicação, tratamento e aplicação dos conceitos matemáticos, acreditamos que a definição do conceito de função tem de ser o cerne de uma resposta plausível.

Dentro da Teoria dos registros de representação semiótica, podemos dizer que mobilizar as múltiplas representações do conceito de função é muito mais do que saber se determinada tabela, diagrama ou gráfico representa uma relação funcional, implica a construção semântica do conceito. Além disso, a articulação entre as múltiplas representações possibilita o enriquecimento da imagem conceitual, o que subsidia a compatibilidade entre imagem conceitual (aquilo que é pensado) e definição conceitual (aquilo que é escrito).

Segundo Damm (2012):

> O que se constatou em diversas pesquisas em Educação Matemática é a dificuldade que o aluno encontra em passar de uma representação a outra. Ele consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, porém, é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão desse objeto. Essa **apreensão é significativa** a partir do momento que o aluno consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e “passar” de um a outro o mais naturalmente possível (p.168, grifo nosso).

Logo, considerando a importância de uma definição operacional e da articulação das múltiplas representações para a aquisição do conceito de função, eis uma resposta mais específica para a pergunta feita no início desta seção: *Diremos que um aluno aprendeu significativamente o conceito de função quando, a partir de um contexto instigador e que leve em conta seus conhecimentos prévios, ele for capaz de utilizar de maneira consciente a definição que enunciou e transitar naturalmente entre os vários registros de representação semiótica desse conceito.* Acreditamos que essas ações são suficientes para afirmar que há evidências da aquisição de significados claros, precisos e transferíveis por parte dos alunos.

Neste trabalho, buscamos evidências de aprendizagem significativa considerando as duas condições para a ocorrência da aprendizagem significativa, utilizar aquilo que o aluno já sabe e ter disposição para aprender significativamente, estabelecidas por Ausubel (1978). Além disso, obedecendo às particularidades do conceito de função, levamos em consideração outros dois fatores: a operacionalização e a articulação. Em especial, a partir da ideia de que operacionalizar a definição de função exige do aprendiz uma compreensão que suplante o fruto da mera memorização, buscamos evidências de aprendizagem significativa do conceito de função analisando o desenvolvimento da definição dos participantes; quanto mais operacionais e elaboradas forem as definições, mais evidências de aprendizagem significativa perceberemos. Os quatro fatores referenciados foram considerados durante a elaboração, aplicação e análise das sequências didáticas.

## 2.8 Como favorecer a operacionalização da definição de função

Com base na análise histórico-epistemológica do conceito de função, na discussão acerca de suas múltiplas representações, na análise das dificuldades de aprendizagem encontradas pelos alunos, e no recorte teórico que subsidia este trabalho acreditamos que para favorecer a operacionalização cinco variáveis devem ser consideradas. Essas variáveis são recursos teóricos que auxiliaram as discussões dos resultados e a validação das sequências didáticas elaboradas, são elas:

*A.* introduzir o conceito de função como uma relação entre quantidades variáveis para, posteriormente, defini-lo como relação entre conjuntos.
*B.* apresentar o conceito de função dentro diferentes contextos;
*C.* enunciar uma definição de função que realmente seja utilizada;
*D.* levar em consideração aquilo que o aprendiz já sabe;
*E.* recorrer a diferentes registros de representação semiótica.

Apresentar o conceito de função por meio de sua definição formal apoiada na representação por diagramas é esperar que o aluno apreenda em poucas aulas a forma mais geral de um conceito matemático que a humanidade levou séculos para formalizar. Introduzir o conceito de função por meio de relações binárias pode dificultar a construção de um campo de significados para o conceito. Como preconiza a variável *A*, devemos obedecer ao movimento histórico do desenvolvimento do conceito de função. Partir do entendimento da noção de variação, de dependência, e da descrição de regularidades, para o formalismo inerente à interpretação de função como relação entre conjuntos.

Trabalhar um conteúdo exclusivamente por meio da abordagem definição-exemplo-exercício pode obscurecer a análise do professor e, consequentemente, a aprendizagem de seus alunos. O docente poderia pensar que um aluno apreendeu um conceito e atribuiu significados a ele, quando na verdade o contexto linear onde foi apresentado facilitou a memorização de toda terminologia relacionada a ele. Consoante a variável *B*, o docente poderia apresentar o conceito dentro de múltiplos contextos; contextos que requeiram máxima transformação do conhecimento adquirido. Assim, diferentes atividades podem aplicadas, não só em contextos livrescos, mas atividades concretas, onde toda a terminologia relacionada ao conceito surja como uma ferramenta prática para lidar com problemas com referência na realidade. Na medida do possível, atividades baseadas em *B* devem privilegiar o trabalho em grupo, para que haja a exposição dos alunos a outros pontos de vista.

Segundo a variável *C*, o professor deveria trabalhar com a definição de função que adotou, exemplificando permanentemente o processo de operacionalização da definição de função. Sempre que possível, o professor deve explicar, por meio da definição adotada, porque determinadas relações entre variáveis são funcionais e porque determinadas tabelas, digramas ou gráficos representam o conceito de função.

Considerando a variável *D*, devemos trabalhar o conceito de função nos reportando ao universo mais próximo do aluno, levando em consideração aqueles conceitos já estabelecidos em sua estrutura cognitiva e que são específicos e relevantes para ancorar as novas informações. Depois de identificados alguns subsunçores, o docente pode trabalhar no sentido de favorecer o relacionamento dos mesmos às novas informações que serão propaladas ao longo das atividades, possibilitando, assim, um compartilhamento de significados e o desenvolvimento da estrutura cognitiva do aprendiz.

Atividades baseadas em *E* devem recorrer a uma pluralidade de representações do conceito de função, ou seja, a atividades em que os alunos tenham a oportunidade de trabalhar com tabelas, fórmulas e gráficos, para que possam entender os contras e prós de cada uma dessas representações e perceber que essas representações são diferentes fontes de informação sobre um mesmo objeto, superando, assim, a confusão entre forma e conteúdo. Além disso, o recurso a diferentes registros de representação semiótica pode ampliar as possibilidades de resolução de problemas.

Em síntese, as cinco variáveis supramencionadas foram manipuladas em três sequências didáticas que visavam a apresentar o conceito de função de forma diferenciada para alunos já iniciados nesse conceito, mas que não desenvolveram suas imagens conceituais ao ponto de alcançarem a operacionalização, o que apresentavam, como identificado no teste de sondagem, era uma definição inerte e incapaz de gerenciar interpretações de situações que envolvessem relações funcionais. Todas as definições apresentadas pelos aprendizes no teste de sondagem foram imediatamente abandonadas logo após enunciadas, assim, não subsidiando identificações, tratamentos, tampouco conversões.

# 3 METODOLOGIA

## 3.1 Engenharia Didática

Acreditamos que a confirmação ou refutação de nossas hipóteses poderá ser melhor subsidiada por meio da elaboração, aplicação e análise de sequências didáticas. Estamos chamando de *sequência didática* (SD) a "um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática" (PAIS, 2011, p.102). Como sequências didáticas pressupõem relações trinômias do tipo professor-aluno-saber, optamos por utilizar uma metodologia que não se desvinculasse da prática pedagógica. Nesse sentido, encontramos na *Engenharia Didática* (ARTIGUE, 1996) os pressupostos necessários para o desenvolvimento da investigação. Segundo Artigue (1996, p.196), a Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se "por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino".

O significado do termo Engenharia Didática emerge de uma analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro

> que, para realizar um projeto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar (ARTIGUE, 1996, p.193).

O engenheiro não parte para a execução de um projeto de maneira abrupta, sendo imediatamente subsidiado para tal; ele deve, primeiramente, demonstrar através de um modelo teórico a viabilidade desse projeto, que será compartilhado, e submetido à crítica de seus pares. Assim deve acontecer com uma Engenharia Didática. As sequências didáticas devem ser rigorosamente planejadas e construídas com um objetivo claro: obter informações para desvelar o fenômeno investigado. A viabilidade dessas sequências didáticas em auxiliar o cumprimento dos objetivos que motivaram a elaboração delas deve ser defendida numa das fases desta metodologia.

Dentro dessa perspectiva metodológica, o termo "metodologias externas" refere-se aos instrumentos como questionários, testes, entrevistas, etc. Externas, porque são extrínsecas à sala de aula, ou, melhor dizendo, são externas à interação professor-aluno-saber e, portanto, insuficientes para captar a complexidade do sistema estudado, e privilegiá-las seria um enorme risco para a didática (ARTIGUE, 1996). As metodologias externas não são capazes de atingir a realidade da produção dos alunos, atingir em tempo real as suas dificuldades de aprendizagem, não conseguem atingir, por exemplo, os procedimentos de raciocínio dos aprendizes em tempo real. Em tempo real: lê-se: dentro da relação professor-aluno-saber. Nesse contexto, faz-se necessário o trabalho baseado em sequências didáticas. O potencial clarificador das sequências didáticas pode assegurar uma condição vantajosa para o estudo do fenômeno didático em questão, servindo como uma espécie de ambiente experimental.

> A justificativa de escolha pelo uso de uma engenharia didática se deve ao fato de que as técnicas tradicionais, tais como questionários, observações diretas, entrevistas, análises de livros, análise documental, são insuficientes para abranger a complexidade do fenômeno didático, sobretudo em nível de sala de aula. Mesmo que esses instrumentos sejam válidos, no universo de suas próprias limitações, não têm a especificidade necessária para interpretar a dimensão do aspecto cognitivo em nível de aprendizagem escolar. A adoção exclusiva de um desses instrumentos na pesquisa didática não é recomendável, sobretudo, tendo em vista a diversidade de relações envolvidas na atividade pedagógica (PAIS, 2011, p. 107-108).

Os objetivos de uma investigação pautada em uma Engenharia Didática podem ser diversos, contudo, para este trabalho, destaca-se a investigação do processo de ensino e aprendizagem do conceito de função. Segundo Freitas (2012, p. 81), “por meio da análise das situações didáticas é possível investigar a problemática da aprendizagem matemática e desvelar aspectos que ocorrem durante a resolução de problemas e a elaboração de conceitos pelos alunos”.

*Neste trabalho, para atingir o nosso objetivo, aplicamos três sequências didáticas afim de fazer evoluir a imagem conceitual dos alunos em relação ao conceito de função, para que eles fossem capazes de operacionalizar as definições que enunciaram, articular as várias representações do conceito e, consequentemente, aprendê-lo significativamente.*

Um investigador que opta pela Engenharia Didática, para a condução de sua pesquisa, deve abraçar algumas ideias, talvez a mais importante delas seja: o modelo teórico não é suficiente para abarcar toda a complexidade do fenômeno didático. Sendo assim, a Engenharia Didática propõe uma articulação entre teoria e prática, entre a pesquisa e a ação pedagógica, pois sem essa conexão cada uma dessas dimensões – a teórica e a prática – têm seus significados reduzidos (PAIS, 2011).

Como estamos seguindo os princípios da Engenharia Didática, nossa pesquisa contemplou as seguintes fases:

- Fase 1: Análises preliminares;
- Fase 2: Concepção e análise *a priori*;
- Fase 3: Experimentação;
- Fase 4: Análise *a posteriori* e validação.

## 3.2 Análises Preliminares

Esta fase sustentará a concepção da Engenharia Didática. Por isso o pesquisador deve ter uma visão panorâmica da tradição de ensino do conceito em foco, buscando identificar a problemática em que este conhecimento se insere no campo do ensino, ou seja, o pesquisador não deve, na concepção de uma sequência didática, dispensar a referência de um quadro teórico sobre o qual ele fundamenta suas principais categorias. Segundo Machado (2012, p. 238), as análises preliminares são feitas por meio de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o tema em questão, bem como sobre:

- a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino;
- a análise do ensino atual e de seus efeitos;
- a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução;
- a análise do campo de entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática.

Todas as dimensões da análise preliminar (epistemológicas, didáticas e cognitivas) levam em consideração os objetivos específicos da pesquisa. Logo, tais objetivos ditarão se cada uma delas acontecerá ou não, e ainda determinarão a profundidade dessas análises. A denominação ‘preliminar’ não é rígida, talvez mais coerente a um primeiro nível de elaboração, pois as análises preliminares serão retomadas e aprofundadas durante todo o andamento do trabalho. Cada uma dessas análises participa na formação do objeto de estudo.

O que naturalmente pode emergir de uma efetiva análise preliminar são várias razões para julgar insatisfatório um ponto de equilíbrio de funcionamento do sistema didático e, através da análise dos entraves que contribuíram para chegar a esse equilíbrio, propor condições para estabelecer um novo ponto de equilíbrio aparentemente satisfatório (que será experimentado e validado como tal, se for o caso).

Nesta pesquisa, as análises preliminares, que foram enfocadas no capítulo 2, constam de:

- Estudo histórico e epistemológico do conceito de função;
- Análise do processo de ensino e aprendizagem das múltiplas representações do conceito de função;
- Análise dos obstáculos à aprendizagem do conceito de função.

Com as análises preliminares, percebemos que o ensino convencional privilegia uma concepção estática de função, onde uma robusta terminologia abstrata é apresentada. São vários símbolos e conceitos girando em torno do conceito de função, e a quantidade de termos abstratos parece aumentar, conforme novas formas de representar o referido conceito são discutidas. Acreditamos que em meio a esse volume de termos abstratos, surge a dificuldade de reunir em um todo coerente todas as ideias que são apresentadas, o que dá lugar a uma aprendizagem mecânica. Consequentemente, as representações semióticas do conceito de função acabam sendo isoladas pelos aprendizes, pois não há um ponto de referência que sirva para conectar toda a terminologia em algo que faça sentido para eles. Nesse contexto, consideramos ser uma definição que alcançou a operacionalização o elemento capaz de proporcionar o diálogo entre as representações semióticas do conceito de função, o que favorecerá a aquisição de significados pelos aprendizes.

## 3.3 Concepção e análise *a priori* das sequências didáticas

Nesta fase, o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, define certo número de variáveis pertinentes do sistema sobre o qual o ensino pode atuar, variáveis que possivelmente interferem na constituição do fenômeno didático em estudo, as chamadas variáveis de comando. Tais variáveis podem ser globais (referentes à organização global da engenharia), ou locais (referentes à organização de uma sessão da sequência didática). Essas variáveis podem ser de ordem geral ou dependentes do conteúdo considerado. Conquanto as escolhas globais possam aparecer separadamente das escolhas locais, elas são interdependentes, sendo que relevantes escolhas globais devem ser capazes de permitir a invenção, a organização e o desenvolvimento de situações locais. Em suma, o objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos aprendizes e explicar o seu sentido (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008).

A análise *a priori* está centrada nas características de uma situação adidática[7], que se pretendeu construir e que se quer aplicar aos alunos. Segundo Machado (2012), na análise *a priori* deve-se:

> - descrever cada escolha local feita (eventualmente, relacionando-as às escolhas globais) e as características da situação adidática decorrentes de cada escolha;
> - analisar qual o desafio da situação para o aluno, decorrente das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que disporá durante a experimentação;
> - prever os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos; além disso, deve assegurar que, se tais comportamentos ocorrem, resultarão do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem (p. 243-244).

Assim, a análise *a priori* comporta uma parte descritiva e outra preditiva. A parte descritiva diz respeito à definição de um coerente desenho experimental, estratégias que conduzam à prevenção de influências tendenciosas, permitindo determinar de que forma as escolhas efetuadas possibilitam controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. A parte descritiva deve mostrar que o que esperávamos dos alunos após as situações didáticas realmente ocorreu devido ao desenvolvimento do conhecimento visado. A parte preditiva refere-se às hipóteses levantadas, que orientarão o desenrolar do trabalho, cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo na quarta fase da engenharia.

As variáveis de comando levantadas nos capítulos anteriores, recapituladas a seguir, foram manipuladas ao longo das três sequências didáticas e participaram efetivamente na validação das mesmas.

Epistemológica:

*A* – introduzir o conceito de função como uma relação entre quantidades variáveis para, posteriormente, defini-lo como relação entre conjuntos.

Didática:

*B* – apresentar o conceito de função dentro diferentes contextos;

*C* – enunciar uma definição de função que realmente seja utilizada.

Cognitiva:

*D* – levar em consideração aquilo que o aprendiz já sabe.

*E* – recorrer a uma pluralidade registros de representação semiótica.

[7] Uma situação adidática é uma etapa do trabalho do aprendiz sobre a qual a intenção de ensinar não tem uma influência direta. Este é o momento em que o aluno desenvolve uma certa autonomia intelectual e, mesmo sem um controle didático do professor, contribui para a construção de conceitos.

As variáveis de comando *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, por serem globais, foram manipuladas nas três sequências didáticas que foram aplicadas aos sujeitos desta pesquisa. Embora cada sequência didática tivesse sua especificidade, o que nos remeteria a variáveis de comando locais, nos limitamos, na análise dos resultados, aos aspectos interferentes mais globais.

## 3.4 Experimentação

Consiste na aplicação da sequência didática a uma determinada população de alunos, passo fundamental para a análise do alcance educacional da proposta. Esta fase se inicia no momento em que ocorre o contato do pesquisador/professor com a população de alunos objeto da investigação. O pesquisador deve ficar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado e, na medida do possível, respeitar as escolhas e deliberações feitas na análise *a priori*. A presente pesquisa obedeceu aos pressupostos da experimentação.

Segundo Machado (2012, p.244-245), a experimentação pressupõe:

- a explicação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático[8];
- a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.).

### 3.4.1 Sujeitos e contexto

A experimentação, no contexto desta pesquisa, se consolidou com a aplicação de três sequências didáticas a 20 alunos voluntários de três turmas distintas de 1º ano do ensino médio[9] de uma escola pública estadual da cidade de Manaus-AM, todos alunos de um mesmo professor de Matemática. As atividades foram realizadas em uma sala cedida pela direção da escola, no turno regular, onde três dias da semana os alunos das três turmas se reuniam para o desenvolvimento das sequências didáticas. Como a escola trabalhava com projetos, ela já possuía uma organização de tempos que privilegiava atividades extras, por isso o

[8] O contrato didático são as regras que se referem às mútuas obrigações que se estabelecem entre o professor e os alunos, e que dependem estritamente dos conhecimentos em questão.

[9] O 1º ano do ensino médio foi escolhido pois é geralmente nesta série que os aprendizes têm maior contato com a definição formal do conceito de função.

desenvolvimento das atividades não interferiu no andamento das aulas de Matemática, pois foram encaradas como um projeto da escola.

Os voluntários deveriam ser assíduos nas aulas de Matemática, no mínimo 80% de frequência (critério cujo cumprimento foi prestativamente subsidiado pelo professor de Matemática das três turmas). Ser voluntário e ter um interesse pessoal em participar das atividades sem fins de escores para a disciplina, se configura num primeiro intento de cumprimento da segunda condição para a ocorrência de uma aprendizagem significativa, ter predisposição para aprender significativamente certo conteúdo. O critério da assiduidade tenta minimizar os impactos de uma variável que pode obscurecer a contribuição das sequências didáticas para a aprendizagem significativa do conceito de função, neste caso, a ausência nas atividades.

O investigador não era professor das turmas de 1º ano em questão. Tal fato fazia-se necessário, pois a ideia era trabalhar com alunos que já tivessem sido iniciados no conceito de função e dentro de um contexto convencional, que era o caso dos participantes da pesquisa. Isso facilitaria a discussão das diferenças de impacto na imagem conceitual dos alunos que SDs pautadas no favorecimento da operacionalização da definição de função poderiam proporcionar em relação ao ensino baseado exclusivamente no contexto dos livros. Adotamos uma perspectiva de complementaridade entre a forma convencional de ensinar o conteúdo funções e a realização de atividades práticas, e não de exclusividade. Nem sempre o professor tem a missão de iniciar um aprendiz em determinado conceito matemático, mas se ele já foi iniciado e mostra dificuldades, o professor pode investir algum tempo para averiguar o que o aluno já sabe e, tomando como base os conhecimentos que ele já adquiriu, reapresentar de maneira mais significativa o conceito desejado. Essa é uma das ideias que tentaremos ilustrar com os resultados deste trabalho.

Os 20 participantes foram divididos em 5 grupos com 4 integrantes cada. Esses grupos foram representados pelas letras P, Q, R, S e T. Os integrantes de cada equipe foram representados por dois símbolos, a letra que representa o grupo ao qual ele pertence seguido de um número (1, 2, 3 ou 4). Por exemplo, os integrantes do grupo P são os participantes P1, P2, P3 e P4.

A coleta de dados ocorreu no mês de outubro de 2016, ao longo de 12 encontros que perfizeram 22 aulas (de 50 minutos cada). Foram 18 aulas para o desenvolvimento das sequências didáticas, cada sequência didática era composta de três sessões de duas aulas seguidas, ou seja, foram três aulas duplas para cada SD. Mais uma aula simples para a aplicação do teste de sondagem (no primeiro encontro), outra para a aplicação do questionário final (no último encontro) e duas seguidas para a aplicação da aula-organizador prévio (no segundo encontro). Observe o quadro 1.

**Quadro 1 –** Esquema de desenvolvimento da pesquisa

| Encontro | Número de aulas | Atividade | Data de aplicação |
|---|---|---|---|
| 1º | 1 | Aplicação do teste de sondagem | 1/10/16 |
| 2º | 2 | Aula-organizador prévio | 4/10/16 |
| 3º | 2 | SD1 – sessão 1 | 7/10/16 |
| 4º | 2 | SD1 – sessão 2 | 9/10/16 |
| 5º | 2 | SD1 – sessão 3 | 11/10/16 |
| 6º | 2 | SD2 – sessão 1 | 14/10/16 |
| 7º | 2 | SD2 – sessão 2 | 16/10/16 |
| 8º | 2 | SD2 – sessão 3 | 18/10/16 |
| 9º | 2 | SD3 – sessão 1 | 21/10/16 |
| 10º | 2 | SD3 – sessão 2 | 23/10/16 |
| 11º | 2 | SD3 – sessão 3 | 25/10/16 |
| 12º | 1 | Aplicação do questionário final | 28/10/16 |

Fonte: O autor.

### 3.4.2 Aula-organizador prévio

Reiteramos que no primeiro encontro foi aplicado um teste de sondagem para se obter os primeiros dados acerca das concepções e perspectivas dos participantes relativas ao conceito de função. No segundo encontro, baseando-se nas informações provenientes do teste de sondagem, foi feita uma explanação sobre o conceito de função mediante apresentação de slides contendo mapas conceituais. Explicou-se o conceito de função usando-se como conceitos-âncora as ideias de sequência e proporcionalidade, e enunciou-se a definição de função[10] que foi utilizada ao longo das três sequências didáticas. Esta aula serviu como um organizador prévio para o conceito de função (isto é, serviu para ativar a relação entre aquilo que os alunos já sabiam e as novas informações apresentadas). Nessa aula, que chamaremos de aula-organizador prévio, foi discutido ainda como se constroem mapas conceituais e a importância destes para a aprendizagem de conceitos.

[10] A definição de função que foi enunciada na aula-organizador prévio e utilizada ao longo das SDs foi apresentada na seção 2.2.3 deste escrito.

A aula-organizador prévio obedeceu aos dois processos básicos da dinâmica da estrutura cognitiva, a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa, como princípios programáticos. Ou seja, os conceitos foram apresentados de forma hierárquica, procedendo de cima para baixo em termos de níveis de abstração, generalização e abrangência, e foram explicitadas as semelhanças e diferenças entre as novas informações e os conceitos subsunçores identificados, neste caso, as noções de sequência e proporcionalidade.

Em síntese, a aula-organizador prévio constou de:

- aula expositiva que visava a relacionar os conceitos subsunçores identificados no teste de sondagem com as novas informações;
- instruções sobre como elaborar um mapa conceitual e explicação das vantagens de sua utilização para a apresentação e organização do conhecimento;
- apresentação de uma definição de função que foi utilizada ao longo de todas as sequências didáticas.

### 3.4.3 Instrumentos de coleta de dados

Os instrumentos de coleta de dados compreenderam: 1) dois testes, um aplicado no início (teste de sondagem) e outro ao término das atividades (questionário final), respondidos individualmente; 2) produção escrita dos alunos, representada principalmente por mapas conceituais com suas respectivas explicações, também elaborados individualmente e; 3) o diário de campo do investigador.

## 3.5 Análise *a posteriori* e validação

Esta fase consiste em uma análise do conjunto de dados colhidos ao longo da experimentação, provenientes das observações realizadas durante cada sessão de ensino, devidamente registradas, bem como das produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados podem ser enriquecidos, para uma melhor compreensão do ocorrido, por meio de metodologias externas.

Nesta fase, os dados são organizados e analisados à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, e discutidos com base nas relações que se estabelecem entre as sequências didáticas e os significados adquiridos pelos aprendizes sobre o conceito em questão. Sendo assim, a avaliação dos efeitos da SD referente as expectativas previamente analisadas sobre a aprendizagem dos alunos, permite confirmar ou refutar as hipóteses formuladas. O objetivo da análise *a posteriori* é “relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade dos fenômenos didáticos identificados" (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008, p.68). Segundo Machado (2012, p. 245), "quando a experimentação prevê mais de uma sessão, é aconselhável fazer uma análise *a posteriori* local após uma ou algumas sessões, confrontando com as análises *a priori* feitas, para eventuais correções de *rota prevista*".

A Engenharia Didática se fundamenta em registros de estudos de casos, cuja validade se constitui numa de suas singularidades em relação a outros tipos de investigação baseados em experimentações na sala de aula. Tal validação é essencialmente interna, pautada no confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*, verificando as hipóteses formuladas no início da pesquisa (MACHADO, 2012).

> As [metodologias] que se baseiam em métodos estatísticos diferem da engenharia didática pela validação. Na engenharia didática, a validação é interna, enquanto as do segundo tipo têm uma validação do tipo externo, isto é, utilizam métodos comparativos para validar seus resultados, ou seja, fazem uma comparação estatística entre os desempenhos dos grupos-controle e grupos-experimentais. (MACHADO, 2012, p.236-237).

A validação interna, num sentido amplo, se aplica especialmente aos estudos que estão avaliando a possibilidade de relações causais entre variáveis. Numa abordagem qualitativa, a validação interna refere-se ao controle mínimo que uma pesquisa tem de ter, para que seus resultados sejam interpretáveis, ou seja, os pesquisadores estão interpretando o que acreditam interpretar? (MOREIRA, 2002). Tal validação é a explicação e a demonstração de que foram pelo menos controladas as influências tendenciosas de fatores que causam a ilusão de uma relação causal, controle explicitado na análise *a priori*, por isso o processo de validação se instaura desde a segunda fase da engenharia.

Mais adiante, serão apresentados os dados coletados nas três sequências didáticas. Estes foram discutidos à luz da análise *a priori*, do objetivo da pesquisa, da hipótese e do recorte teórico, o sumo desta discussão se constituiu na análise *a posteriori*. Foram realizadas análises *a posteriori* do teste de sondagem, das sequências didáticas e do questionário final. A validação, que colocou em jogo a verificação de nossa hipótese, foi sintetizada no capítulo 6, onde os resultados do estudo foram frutos da interlocução entre análises *a priori*, objetivo da pesquisa e análises *a posteriori*.

# 4 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISES *A POSTERIORI*

## 4.1 O Teste de sondagem

O teste de sondagem (ver apêndice A) teve por objetivo proporcionar um primeiro vislumbre acerca dos conceitos subsunçores que poderiam ser utilizados para ancorar as novas informações que foram propaladas no decurso das intervenções, e captar indícios das dificuldades as quais pretendíamos indiretamente subsidiar a superação. Além disso, o teste de sondagem proporcionou uma primeira ideia sobre como os aprendizes estavam operacionalizando ou não a definição do conceito de função. Em suma, o teste de sondagem objetivou verificar a substância da imagem conceitual dos alunos.

Sete questões compuseram o teste de sondagem. Na **questão 1** o respondente deveria apresentar uma definição para o conceito de função, poderia ser uma definição pessoal ou exatamente como estava no livro (formal). As respostas dadas a esta questão forneceram informações importantes acerca do nível de operacionalidade da definição apresentada, ou seja, se a definição enunciada foi, de fato, utilizada para resolver as demais questões, ou foi apenas uma mera formalidade que não serviu para nada.

A **questão 2** exigia que o respondente fizesse algumas conversões. No item (b), conversão do registro figural para o registro em língua natural. Em (c), do registro em língua natural para o registro algébrico. O item (a) serviu para identificar se o participante compreendia como se comporta a sequência dos números retangulares, e o item (d) para saber se ele conseguia utilizar a fórmula elaborada no item (c).

Já na **questão 3** os aprendizes tiveram de identificar gráficos cartesianos de relações funcionais, seja baseando-se em regras pré-definidas, como a regra da paralela, seja utilizando a definição dada. O uso da definição resultaria numa conversão do registro em língua natural para o registro gráfico.

Na **questão 4** era necessário que o aluno tivesse uma imagem conceitual razoavelmente desenvolvida, que englobasse os tipos de gráficos mais comuns trabalhados no 1º ano do ensino médio. O respondente deveria converter uma representação algébrica em uma representação gráfica.

A **questão 5** centrou-se na conversão da representação tabular na representação algébrica. Além disso, esta questão exigia que o aluno entendesse como se dava a relação de dependência entre as variáveis x e y.

Na **questão 6**, o respondente deveria apenas identificar, em pares de variáveis, quais eram dependentes e quais eram independentes. Grandezas que dependem uma da outra, de tal forma que a variação de uma implica a variação da outra, revelam a importância prática imediata do conceito de função. Logo, identificar qual variável é dependente e qual é independente é um exercício simples que mostra se o indivíduo captou a ideia mais elementar que dá significado ao conceito de função, a ideia de dependência.

A última questão, **questão 7**, baseava-se na ideia de proporcionalidade, conceito que pode ser usado para ancorar o conceito de função, pois dizer que algo é proporcional a alguma coisa, ou que alguma coisa cresce proporcionalmente em relação a outra é comum no cotidiano. Embora a concepção popular de proporcionalidade seja pouco consistente matematicamente, pode ser enriquecida e servir como subsunçor para o conceito de função. Na referida questão, foi apresentado um típico problema que surge em contextos onde o tema regra de três é discutido.

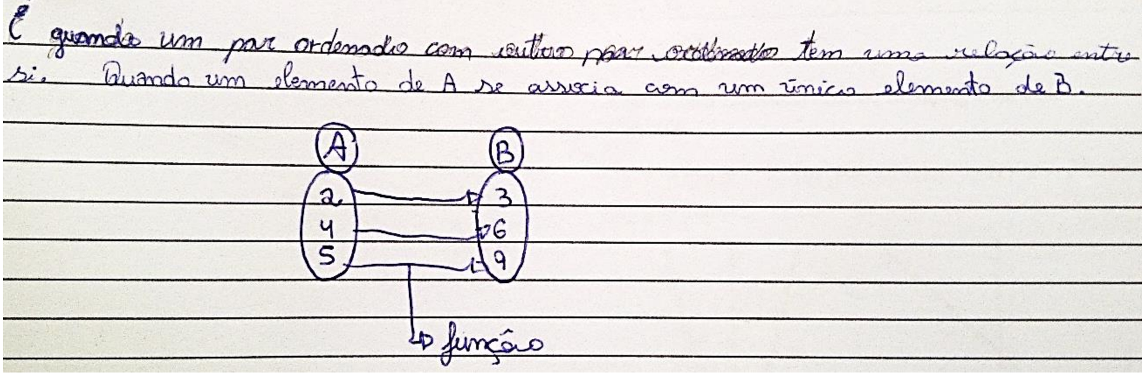
## 4.2 Resultados e discussão do teste de sondagem

4.2.1 Resultados e discussão da questão 1

*Questão 1*: Explique com suas palavras o significado do conceito matemático de função.

Todas as definições apresentadas nesta questão foram versões não integrais da clássica definição de função como relação binária: *função é uma relação entre dois conjuntos quaisquer A e B, que a cada elemento x de A faz corresponder um único elemento y de B*. Essa é a interpretação mais formal e geral do conceito de função, mas é a menos produtiva para permitir que o aluno compreenda e saiba usar a ideia de que funções expressam variação. A definição abaixo representa bem essa concepção de função.

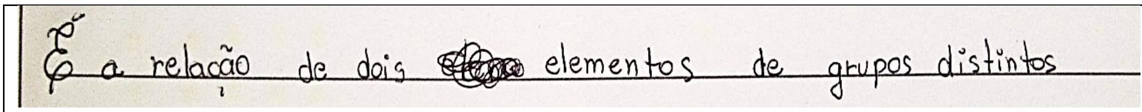
**Figura 17** – Definição de função dada por P1




**P1**: É quando um par ordenado com outros par ordenados tem um relação entre si. Quando um elemento de A se associa com um único elemento de B.

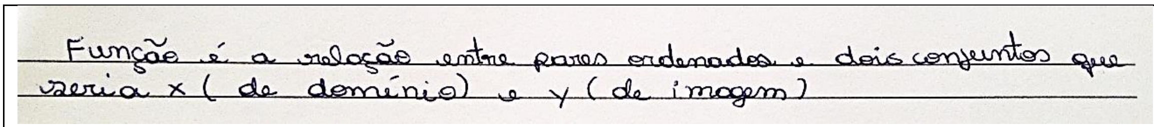
Nota-se que **P1** (figura 17) utilizou a representação por diagramas para exemplificar sua definição.  A representação por diagramas de flechas é uma tentativa de apresentar funções, já no ensino básico, como relações entre conjuntos, contudo, o trabalho com funções acaba sendo resumido à atividade cognitiva de formação, quer dizer, a reconhecer quando um diagrama representa ou não uma função. Para tal basta identificar se de cada elemento do domínio sai uma e apenas uma flecha. Como as classes de funções exprimidas por diagramas não possuem quaisquer aplicações significativas nem propriedades interessantes, temos apenas, segundo Ponte (1990), uma versão trivializada de um conceito matemático. Observe algumas outras definições.

**Figura 18** – Definição de função dada por P2


É a relação de dois elementos de grupos distintos

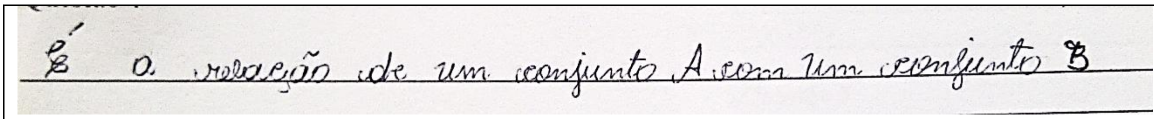
**P2**: É a relação de dois elementos de grupos distintos.

**Figura 19** – Definição de função dada por Q2


Função é a relação entre pares ordenados e dois conjuntos que seria x ( de domínio) e y ( de imagem)

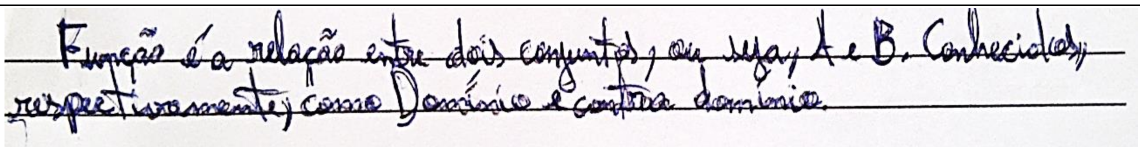
**Q2**: Função é a relação entre pares ordenados e dois conjuntos que seria x (de domínio) e y (de imagem).

**Figura 20** – Definição de função dada por Q3


É a relação de um conjunto A com um conjunto B

**Q3**: É a relação de um conjunto A com um conjunto B.

**Figura 21** – Definição de função dada por R1


Função é a relação entre dois conjuntos, ou seja, A e B. Conhecidos, respectivamente, como Domínio e contra domínio.

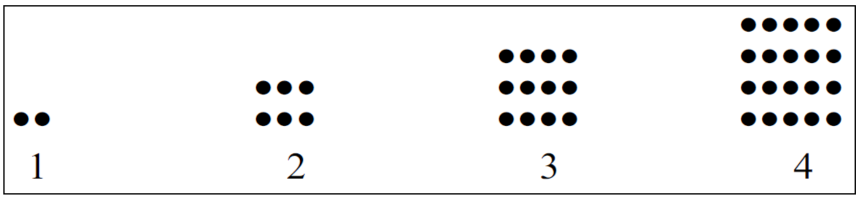
**R1**: Função é a relação entre dois conjuntos, ou seja, A e B. Conhecidos, respectivamente, como domínio e contra domínio.

Todos os respondentes tinham o mesmo professor de matemática, por isso torna-se fácil especular qual variável levou à unanimidade da interpretação de função como relação binária. Pires e Silva (2015) inferem, após a análise das concepções de professores e alunos, que muito do que é feito pelos estudantes em relação ao conceito de função é reflexo da prática docente. Enquanto isso, uma das principais fontes de informação do professor sobre os conteúdos a serem ministrados, os livros didáticos, apresentam funções como relações binárias, como afirma Lima (2001) após a análise de 36 volumes, constituindo 12 coleções de livros didáticos utilizados no ensino médio das escolas brasileiras, perfazendo mais de 15000 páginas. Ainda segundo este autor, definir funções por relações binárias é infrutífero, pois além de nenhum matemático nem usuário da matemática utilizar esse ponto de vista em seu cotidiano, a generalidade apresentada nas aulas é rapidamente abandonada. A perspectiva de Lima (2001) é endossada por Dassie et al. (2010), segundo estes últimos, embora os livros atuais apresentem um número consideravelmente maior de tipos de funções, eles ainda apresentam uma visão de função essencialmente estática, como a dos livros anteriores à década de 1930.

As respostas dadas a esta questão apresentam indícios dos efeitos que a *abordagem estática*, fator que dificulta a operacionalização e causa dificuldades de aprendizagem do conceito de função, teve sobre a imagem conceitual dos aprendizes. Partiremos, a seguir, para a análise e discussão das demais questões, atentando para o nível de operacionalização das definições enunciadas aqui e para a espontaneidade com que os respondentes efetuam as conversões exigidas.

4.2.2 Resultados e discussão da questão 2

*Questão 2*: Na sequência abaixo, cada número corresponde à posição de um conjunto de pontos, conforme mostra a figura.




Sendo assim, responda ao que se pede.

a) Desenhe a 5ª figura da sequência.

b) Explique com suas próprias palavras como podemos descobrir quantos pontos haverá em uma posição qualquer, sabendo apenas o número desta posição.

c) Escreva uma fórmula matemática que relacione o número de pontos e sua respectiva posição na formação da sequência.

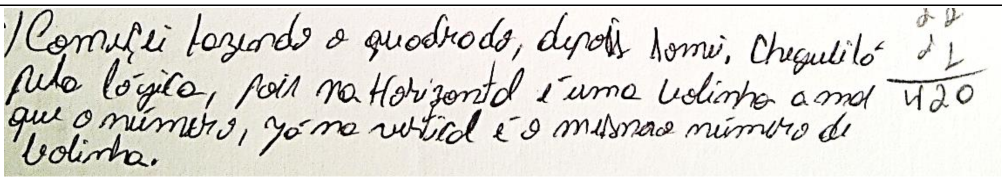
d) Quantos pontos haverá na 20ª posição?

**Tabela 2** – Questão 2: frequências de acertos e erros

| Item | Acertos | Erros | Acertos (%) | Erros (%) |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 19 | 1 | 95 | 5 |
| **B** | 19 | 1 | 95 | 5 |
| **C** | 6 | 14 | 30 | 70 |
| **D** | 18 | 2 | 90 | 10 |

A maioria dos aprendizes conseguiu responder corretamente às perguntas dos itens *a*, *b* e *d* da questão 2, como ilustra a tabela 2, contudo o item *c* foi o que mais agregou erros. A discrepância de *c* em relação aos demais itens centrou-se na dificuldade que os aprendizes têm de fazer generalizações por meio de fórmulas, ou seja, na falta de domínio do registro algébrico, que, segundo Martins (2006), pode dificultar o desenvolvimento de todo o quadro funcional. Observe a resposta de **Q4** ao item *b*.

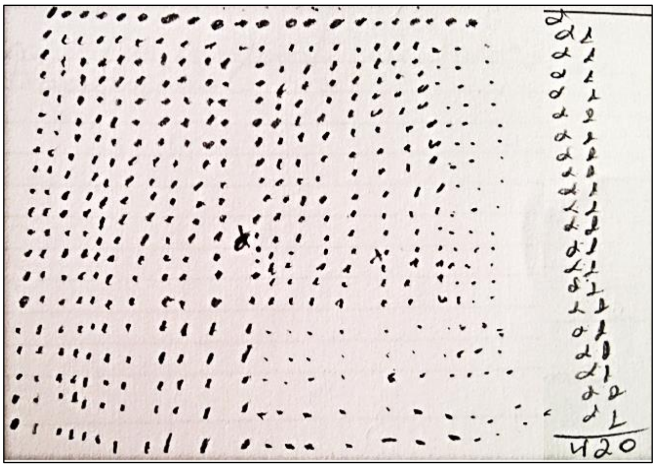
**Figura 22** – Explicação de Q4 sobre como obter a quantidade de pontos sabendo apenas a posição da figura.



**Q4**: Comecei fazendo o quadrado, depois somei, cheguei lá pela lógica, pois na horizontal é uma bolinha a mais que o número, já na vertical é o mesmo número de bolinha.

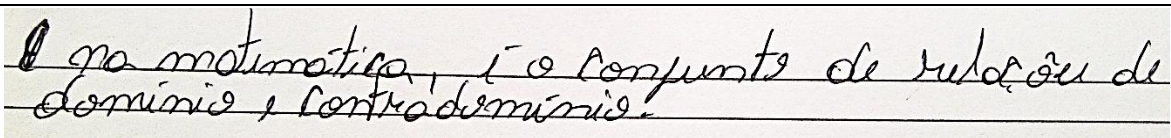
Percebe-se que **Q4**, assim como a maioria dos respondentes, entendeu o padrão de desenvolvimento da sequência. Quando ele fala: *"na horizontal é uma bolinha a mais que o número"*, esse tal número é a posição, isto é, na horizontal há uma bolinha a mais que o número natural que representa a posição. Já quando ele fala: *"na vertical é o mesmo número de bolinha"*, quer dizer que na vertical há um número de pontinhos igual ao número que representa a posição da figura. A conclusão deveria ser que a quantidade de pontinhos y é dada por x.(x + 1), onde x é a posição da figura, com x sendo a variável independente e y a variável dependente. **Q4** recorreu ao seguinte procedimento para responder ao item *d*.

**Figura 23** – Procedimento adotado por Q4 para calcular quantos pontos haverá na 20ª posição



Mesmo de posse da ideia de como se dava o padrão de desenvolvimento da sequência, **Q4** não conseguiu descrever algebricamente a lei de formação da sequência, foi da mesma forma para os demais que erraram o item *c*. A questão *c* exigia que **Q4** soubesse transitar naturalmente do registro em língua natural para o registro algébrico, conversão que acreditamos ser melhor gerenciada por uma definição operacional. Observe a definição que **Q4** enunciou na questão 1.

**Figura 24** – Definição de função dada por Q4

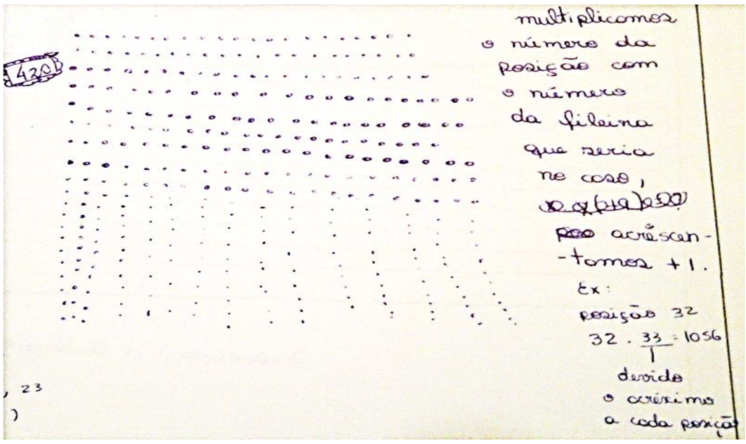


**Q4**: Na matemática, é o conjunto de relações de domínio e contradomínio.

Essa versão empobrecida da definição de função como relação binária, apresentada por **Q4** (figura 24), parece ser incapaz de auxiliar o uso consciente do conceito de função.

O respondente **Q2** (figura 25) reforça a questão da dificuldade de fazer a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico. Deixou claro em sua resposta que entendeu o padrão obedecido pela sequência, mas não conseguiu elaborar uma fórmula, tampouco usou o que enunciou, e acabou recorrendo, assim como **Q4**, ao método exaustivo.

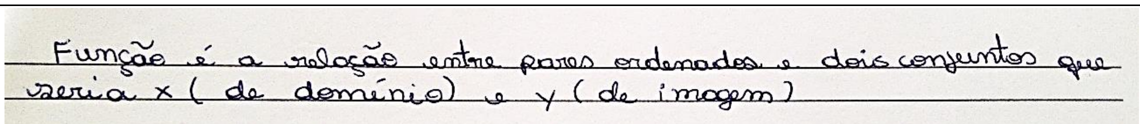
**Figura 25** – Explicação de Q2 sobre como obter a quantidade de pontos pautando-se na posição da figura




**Q2**: Multiplicamos o número da posição com o número da fileira que seria no caso, acrescentamos + 1.

**Q2** apresentou a seguinte definição de função na questão 1, que não o auxiliou em nada na hora de estabelecer uma relação de dependência entre as variáveis quantidade de pontinhos e posição da figura.

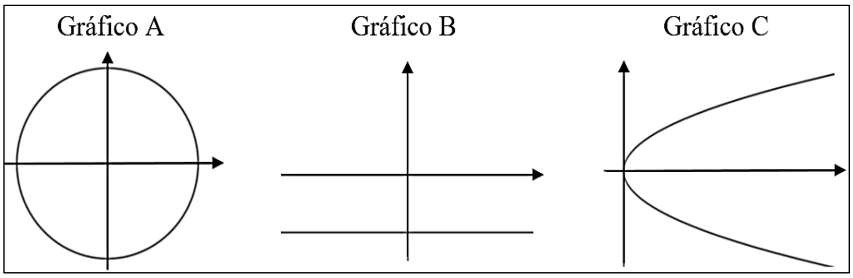
**Figura 26** – Definição de função dada por Q2




**Q2**: Função é a relação entre pares ordenados e dois conjuntos que seria x (de domínio) e y (de imagem).

### 4.2.3 Resultados e discussão da questão 3

*Questão 3*: Observe os gráficos cartesianos abaixo.




Agora, escreva dentro dos parênteses *S*, se o gráfico representa uma função, e *N*, caso não represente.

Gráfico A (     )     Gráfico B (     )     Gráfico C (     )

**Tabela 3** – Questão 3: frequências de acertos e erros

| Gráfico | Acertos | Erros | Acertos (%) | Erros (%) |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 6 | 14 | 30 | 70 |
| **B** | 6 | 14 | 30 | 70 |
| **C** | 4 | 16 | 20 | 80 |

Nesta questão era necessário apenas identificar se o gráfico poderia ou não representar uma relação funcional, sendo que, como apontou o professor regente, os principais gráficos já tinham sido trabalhados. Embora a questão fosse simples, e uma análise quantitativa das respostas não muito reveladora, tendo em vista que a possibilidade de acertar respondendo aleatoriamente é muito grande: apenas três gráficos que podem ou não representar uma função, a maioria das respostas dadas foram incorretas, como mostra a tabela 3, o que acaba tornando claro o alcance da imagem conceitual dos respondentes. Como os alunos podem não saber identificar o gráfico de uma função, sendo que todos foram capazes de enunciar a definição de função? Saraiva e Teixeira (2009) afirmam que isso se deve à memorização da definição de função; a definição é decorada apenas por uma mera formalidade, e o resultado disso é que os alunos acabam contradizendo suas definições quando, por exemplo, são solicitados a escolher em um conjunto de gráficos os que representavam funções, e falham. Estes autores afirmam que essas incoerências denotam que há uma incompatibilidade entre definição conceitual e imagem conceitual. Consideramos que uma definição operacional pode enriquecer a imagem conceitual, modelando-a, aperfeiçoando-a e tornando-a um todo coerente, o que contornaria situações como a da questão 3, de incompatibilidade entre o que se enuncia e o que se pensa.

4.2.4 Resultados e discussão da questão 4

*Questão 4*: Associe cada expressão dada ao esboço gráfico mais adequado.

(a) $y = \log x$ (b) $y = x^2 + 1$ (c) $y = 2^x$ (d) $y = -x + 5$

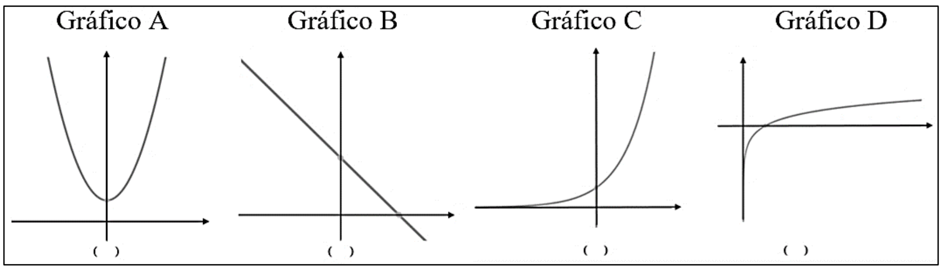


**Tabela 4** – Questão 4: frequências de acertos e erros

| Gráfico | Acertos | Erros | Acertos (%) | Erros (%) |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 6 | 14 | 30 | 70 |
| **B** | 6 | 14 | 30 | 70 |
| **C** | 4 | 16 | 20 | 80 |
| **D** | 7 | 13 | 35 | 65 |

Para responder corretamente a esta questão era necessária uma imagem conceitual razoavelmente desenvolvida, nutrida com os principais tipos de funções geralmente abordadas no 1º ano do ensino médio, nesse caso, função afim, quadrática, exponencial e logarítmica. A tabela 4 mostra que houve mais erros que acertos, embora esses dados sejam bem convincentes quanto as dificuldades dos participantes de relacionarem fórmulas a gráficos, eles são superficiais e insuficientes para respaldar uma inferência razoavelmente objetiva. Contudo, as dificuldades identificadas nas questões anteriores dão sentido aos dados da tabela 4, e por estes são complementados. Os respondentes não souberam relacionar as fórmulas de alguns dos modelos funcionais mais úteis e ricos em aplicações aos seus respectivos gráficos, isso mostra que o conceito de função foi-lhes apresentado dentro de um espectro mínimo de contextos. Consideramos que apresentar a noção de função dentro de múltiplos contextos pode contribuir para o enriquecimento da imagem conceitual dos alunos. E uma imagem conceitual bem desenvolvida é necessária, como aponta Tall e Vinner (1981), para que a definição formal de um conceito matemático tenha significado para o aprendiz.

### 4.2.5 Resultados e discussão da questão 5

*Questão 5*: Preencha a tabela abaixo, considerando que ela representa uma função de X em Y. Lembre-se de que *n* representa um número qualquer do domínio.

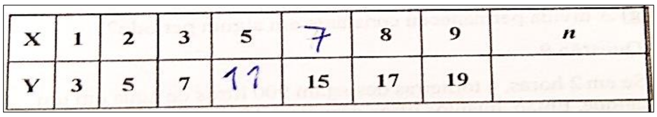
| X | 1 | 2 | 3 | 5 | | 8 | 9 | *n* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 3 | 5 | 7 | | 15 | 17 | 19 | |

**Tabela 5** – Questão 5: frequências de acertos e erros

| Acertos | Erros | Acertos (%) | Erros (%) |
|---|---|---|---|
| 3 | 17 | 15 | 85 |

Esta questão exigia que o aprendiz transitasse do registro tabular para o registro algébrico. No entanto, como discutimos na questão 2, fazer generalizações de dados por meio de fórmulas é um fator de complicação para os alunos. Observe a respostas a seguir.

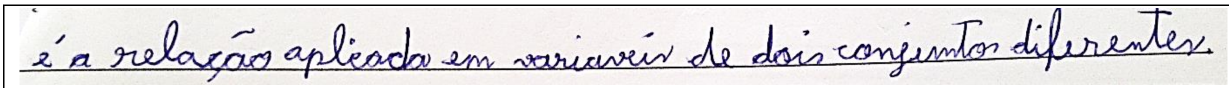
**Figura 27** – Resposta de Q1 à questão 5



| X | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 | *n* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 17 | 19 | |

Como mostra a figura 27, o respondente **Q1** até conseguiu entender corretamente como se processava a relação entre os conjuntos X e Y, entretanto não conseguiu transcrever algebricamente a situação descrita pela questão. **Q1** afirmou, tentando gentilmente justificar sua dificuldade: *"professor, eu não consigo fazer contas com letras"*. Observe a definição de função do mesmo respondente.

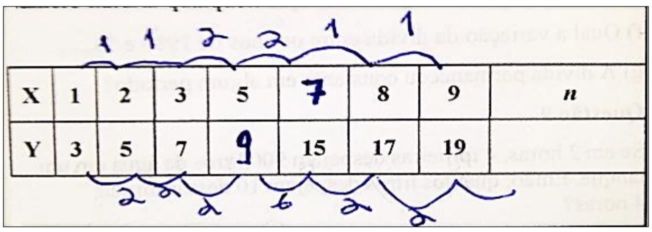
**Figura 28** – Definição de função dada por Q1




**Q1**: é a relação aplicada em variáveis de dois conjuntos diferentes.

Em sua definição, **Q1** enfatiza as noções de relação, variáveis e conjuntos, que são fundamentais para se conseguir elaborar a representação algébrica, mas não conseguiu unir essas noções com a sua correta percepção de como se relacionava os conjuntos X e Y. Entendemos que a definição de **Q1** não alcançou a operacionalização, por isso ela não foi capaz de subsidiar a tal união dos elementos fundamentais e direcionar as ações do respondente. Essa foi a mesma dificuldade da maioria dos respondentes. A segunda dificuldade foi achar que os números do conjunto X deveriam seguir a sequência "ininterrupta": 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; e não: 1, 2, 3, 5, lacuna, 8, 9, porque depois do 3 deveria aparecer o 4. Da mesma forma, Y devia seguir a sequência "ininterrupta" de ímpares: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. Ou seja, os alunos não perceberam, mesmo citando em suas definições os termos domínio e contradomínio, que a relação se estabelecia verticalmente de X para Y, da primeira linha da tabela para a segunda, do domínio para o contradomínio. O procedimento realizado por **P4** (figura 29) ilustra esse equívoco.

**Figura 29** – Resposta de P4 à questão 5




| X | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 | *n* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 3 | 5 | 7 | 9 | 15 | 17 | 19 | |

Percebe-se que **P4** atentou para o comportamento horizontal dos números, provavelmente analisando os conjuntos X e Y como duas sequências numéricas independentes. **P4**, como mostra a figura 29, percebeu que de 1 para 2, no conjunto X, uma unidade era acrescida, de 2 para 3, também uma unidade era acrescida; já de 3 para 5, duas unidades eram acrescidas, logo deduziu que de 5 para a lacuna, também duas unidades deveriam ser acrescidas, por isso preencheu o espaço vazio com 7. No conjunto Y, ele procedeu da mesma maneira, percebeu que de 3 para 5, duas unidades eram acrescidas, de 5 para 7, também duas unidades eram acrescidas, logo, baseando-se nas duas primeiras iterações, concluiu que a lacuna só poderia ser preenchida por 9, que é duas unidades a mais que 7. Esse equívoco foi comum no dia da aplicação do teste de sondagem, alguns aprendizes chegaram a preguntar se a tabela estava incompleta. Esse equívoco mostra que uma definição inerte, não operacional, mesmo explicitando termos importantes para o conceito de função, como é o caso do domínio e do contradomínio, não auxilia o aprendiz na resolução ou interpretação de situações-problema que envolvem relações funcionais.

4.2.6 Resultados e discussão da questão 6

*Questão 6*: Nas situações a seguir, estão descritas algumas relações de dependência entre duas variáveis. Em cada item, procure decidir qual é a variável independente (aquela que pode ser fixada previamente) e qual é a variável dependente (aquela que depende dos valores da variável independente). Escreva dentro dos parênteses *D,* se a variável for dependente, e *I*, se a variável for independente.

a) O comprimento do lado de um quadrado e o seu perímetro.

Perímetro (     )     Comprimento do lado (     )

b) Número de erros em uma prova e a nota obtida.

Número de erros (     )          Nota (     )

c) A área de um círculo e o comprimento do raio.

Comprimento do raio (     )          Área (     )

d) A quantidade de canetas que alguém compra e o preço pago por elas.

Quantidade (     )          Preço (     )

e) O espaço percorrido por um corpo em queda livre no vácuo e o tempo transcorrido desde o instante em que ele começou a cair.

Espaço (    )                                    Tempo (    )

**Tabela 6** – Questão 6: frequências de acertos e erros

| Questão | Acertos | Erros | Acertos (%) | Erros (%) |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 15 | 5 | 75 | 25 |
| **B** | 18 | 2 | 90 | 10 |
| **C** | 9 | 11 | 45 | 55 |
| **D** | 16 | 4 | 80 | 20 |
| **E** | 5 | 15 | 25 | 75 |

O conceito de função enquanto instrumento de estudo de leis quantitativas, baseado na correspondência de conjuntos, adquiriu tal generalidade, denotada por uma representação simbólica, libertando-se de tabelas de casos particulares, a partir do momento em que o conceito de variável foi introduzido (CARAÇA, 1951). Certamente, as noções de variável dependente e independente são basilares para se compreender o sentido mais importante por trás do conceito de função: o de dependência entre grandezas, as variações de uma implicam as variações da outra. Como ilustra a tabela 6, mesmo dentro do espectro de dificuldades até aqui discutido, os alunos conseguiram, em sua maioria, responder corretamente às questões referenciadas. Observa-se que houve mais erros nas questões *c* e *e*; o principal fator para essa divergência, foi a dificuldade de interpretação das duas situações: área x raio e espaço x tempo, eram elas mais complexas que as demais do ponto de vista dos respondentes, o que foi facilmente constatado no dia da aplicação do teste, pelo fato de o pesquisador ser solicitado pelos alunos para “dar uma ideia” de como se resolvia as referidas questões.

Embora pareça que os alunos tenham apreendido ao menos de maneira singela as noções de variável dependente e independente, como mostra a tabela 6, eles não foram capazes de empreender conscientemente essas ideias nas questões 2 e 5, que solicitavam transcrições de situações em linguagem algébrica. Entendemos que o uso consciente dessas ideias para a representação algébrica de situações, ou melhor, para conversões para o quadro algébrico, depende de que os aprendizes balizem suas ações por meio de uma definição que realmente tenha significado para eles, uma definição que dirija coerentemente todas as noções que giram em torno do conceito de função, como é o caso da ideia de variável, posicionando-as nos seus devidos lugares e atribuindo-lhes suas verdadeiras funções.

4.2.7 Resultados e discussão da questão 7

*Questão 7*: Se em 2 horas, 4 torneiras despejam 900 litros de água em um tanque. Então, quantos litros despejam 10 dessas torneiras em 4 horas?

No caso desta questão, é totalmente desnecessário apresentar os dados por meio de tabela, porque nenhum dos participantes respondeu-a corretamente. A resposta correta seria 4500 litros. Embora todas as repostas estivessem erradas, elas não variaram muito, 18 alunos responderam 2250 litros, e os 2 restantes responderam 1800 litros. O que foi constatado na produção escrita dos alunos foi um equívoco na hora de armar o dispositivo para resolver uma regra de três composta. São três variáveis envolvidas neste problema: tempo, quantidade de torneiras e capacidade, mas os alunos ignoram o tempo; resolveram a questão excluindo o tempo e não fizeram nenhuma adaptação depois, por exemplo, multiplicar por 2, pois $2250 \, x \, 2 = 4500$. Já os 2 participantes que responderam 1800 litros ignoram a quantidade de torneiras. Nenhum dos 20 respondentes tentou resolver a questão sem fazer apelo ao dispositivo da regra de três.

### 4.3 Análise *a posteriori* do teste de sondagem

As dificuldades de transcrever algebricamente situações, de identificar gráficos, de trabalhar com a definição enunciada, enfim, de articular as múltiplas representações do conceito de função puderam ser vislumbradas por meio das respostas dadas pelos sujeitos desta pesquisa, evidenciando que o contexto da pesquisa se encaixa, de certo modo, no quadro teórico geral levantado.

Ficou claro que a definição enunciada pelos alunos na questão 1 não subsidiou em nada as suas ações ao longo do teste, ou seja, os aprendizes não alcançaram a operacionalização da definição de função. Os participantes, como mencionado, já haviam sido iniciados no conceito de função e apresentados a terminologia que envolve o conceito em nível de ensino médio, mas a abordagem convencional a que foram submetidos não foi suficiente para que eles atribuíssem significados às novas informações.

Nota-se, ainda, que os momentos de sucesso dos respondentes centraram-se em questões que não dependiam de um conhecimento específico, ou seja, não dependiam de um conhecimento significativo de como grandezas variam para a sua resolução, como é o caso das questões 2 e 6. Tal fato reforça a ideia de uma definição que não foi utilizada, pois as questões que dependiam pouco dela tiveram bons resultados, enquanto as que dependiam muito, tiveram os piores resultados.

Na questão 2 tivemos os melhores resultados, os alunos conseguiram entender o padrão de desenvolvimento da sequência, mesmo não sabendo transcrever algebricamente esse comportamento. A questão 7 foi a que mais concentrou equívocos, todos erraram. E a questão 1 foi dominada pela interpretação de função como relação entre conjuntos. Portanto, adotamos como subsunçores a ideia de sequência, de proporcionalidade direta e de função como relação binária. A ideia de função como relação binária, porque todos os alunos se apropriaram, mesmo que de forma deficitária, dessa interpretação. A ideia de sequência, porque os alunos entenderam muito bem a questão 2, basta revelar para os mesmos onde ali se encontra o conceito de função. Já a ideia de proporcionalidade, porque todos erraram, e a partir da discussão da impossibilidade das respostas dadas e de como variam as grandezas apresentadas na questão, pode surgir, a partir de uma ponte entre o novo e o prévio, algum significado.

A ponte que pretendeu conectar aquilo que os alunos já sabiam com as novas informações se constituiu na aula-organizador prévio. Esta foi uma aula (dupla) expositiva em que o pesquisador discutiu a ideia de dependência entre grandezas, num aspecto geral, recorrendo, gradativamente, a exemplos que envolviam conjuntos não apenas numéricos. As noções de sequência e proporcionalidade foram o pano de fundo da discussão sobre como as variações nos valores de uma variável podem depender dos valores de uma outra, sendo que que a compreensão de como elas variam pode ser generalizada via Álgebra e visualizada via Geometria Analítica. No início da aula-organizador prévio, apresentou-se uma definição de função (ver seção 2.2.3) que foi utilizada para explicar porque sequências numéricas e a ideia de proporcionalidade embutiam o conceito de função; a definição enunciada foi utilizada durante todas as sequências didáticas. Utilizou-se sempre, ao longo das SDs, a definição enunciada, para explicar porque determinadas relações eram funcionais, para dizer se determinado gráfico ou diagrama representava o conceito de função, para contextualizar a resolução dos problemas etc., exemplificando permanentemente a operacionalização da definição de função.

Além dos conceitos subsunçores identificados, alguns outros fatores, cuja manipulação defendemos favorecer a operacionalização, foram enfocados na aula-organizador prévio e orientaram a observação e o desenvolvimento das sequências didáticas, são eles: introduzir o conceito de função como uma relação entre quantidades variáveis para, posteriormente, defini-lo como relação entre conjuntos, apresentar o conceito de função dentro diferentes contextos, enunciar uma definição de função que realmente seja utilizada e recorrer a diversos registros de representação semiótica.

## 4.4 As sequências didáticas

Para melhor atender às variáveis de comando, em especial, à variável *B*: apresentar o conceito de função dentro de múltiplos contextos, optamos por trabalhar com experimentos. Os experimentos realizados foram adaptações dos experimentos disponibilizados pela coleção M³ Matemática Multimídia desenvolvida pela Unicamp. Utilizaremos a mesma definição de experimento que a apresentada no portal principal da coleção[11]: *atividades práticas instigantes que podem ser feitas em uma ou duas aulas em que se constrói algum conceito ou formalização matemática*.

Apesar de não desconsiderarmos a importância da aula expositiva para a aprendizagem escolar, há alguns aspectos relativos ao processo de ensino e aprendizagem do conceito de função que depende de algo a mais, se o objetivo for subsidiar uma aprendizagem significativa. Entendemos que a lacuna deixada pelo ensino convencional do conceito de função pode ser preenchida por atividades práticas, onde toda a terminologia relativamente ao conceito de função seja utilizada como ferramenta para a resolução de problemas com referência na realidade. Essas atividades práticas, ou experimentos, são mais propícias a instigarem os alunos, a motivarem os mesmos a aprenderem significativamente o conceito de função, ou seja, são mais capazes de subsidiar o cumprimento da segunda condição para a ocorrência da aprendizagem significativa. Em suma, acreditamos que a abordagem convencional definição-explicação-exercícios não é suficiente para fomentar a construção de um campo de significados para o conceito de função, dada a grande quantidade termos abstratos que orbitam o referido conceito.

Em atividades práticas, que há a manipulação de materiais e o trabalho em grupo, os alunos têm maior oportunidade de trocar informações com seus colegas, o que possibilita, de

[11] A coleção M³ Matemática Multimídia contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp com financiamento do FNDE, SED, MCT e MEC para o Ensino Médio de Matemática no Brasil. São mais de 350 recursos educacionais no formato de vídeos, áudios, softwares e experimentos, que estão licenciados sob uma licença *Creative Commons* - é permitido copiar, distribuir, exibir, executar a obra e criar obras derivadas, mas não é permitido o uso comercial ou o relicenciamento sobre uma licença mais restritiva. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/>. Acesso em: 10 ago. 2016.

certo modo, o enriquecimento de suas imagens conceituais, tendo em vista o intercâmbio de significados estabelecido.

Os experimentos desenvolvidos, que formaram o miolo das três sequências didáticas aplicadas aos alunos, serviram para explicitar como se dão as relações funcionais entre variáveis e como a definição pode nos auxiliar a explicar e entender essas relações.

Cada uma das três sequências didáticas foi desenvolvida ao longo de três aulas duplas, cada aula com um objetivo. A primeira foi dedicada às explicações preliminares sobre o que deveria ser feito e à confecção de alguns objetos necessários para a realização dos experimentos. Na segunda aula foram desenvolvidas as atividades: os alunos organizavam os dados em tabelas, dados estes que eram generalizados em fórmulas e sintetizados em gráficos, e as perguntas levantadas eram respondidas e discutidas. Na terceira aula o pesquisador fazia um resumo das atividades, discutia os resultados alcançados pelos grupos, recolhia os mapas conceituais e organizava uma síntese dos principais aspectos formais do conteúdo, procurando fazer a passagem do conhecimento, do plano individual e subjetivo, à dimensão de referência histórica e cultural do saber matemático.

Com a aplicação das três sequencias didáticas, buscou-se apresentar o conceito de função dentro de um contexto rico em significados, onde as várias representações semióticas desse conceito fossem trabalhadas e a definição de função apresentada na aula-organizador prévio fosse constantemente utilizada para explicações e generalizações. Pretendeu-se criar um ambiente que subsidiasse a elaboração de uma definição de função, por parte dos alunos, que realmente fosse utilizada pelos mesmos e servisse como um elemento que interconectasse as demais representações desse conceito, facilitando, assim, a conversão. O caráter prático das atividades que compunham as sequências didáticas propiciou o envolvimento dos alunos com essas atividades, direcionadas por problemas com referência na realidade; além do mais, fizemos uma constante retomada de conceitos já assimilados pelos alunos. Instaurou-se, então, um ambiente que consideramos ser ideal para a aprendizagem significativa do conceito de função.

A seguir temos as descrições das três SDs aplicadas. Após as descrições apresentaremos alguns dados levantados no decurso das atividades, são estes: imagens de tabelas, gráficos e mapas conceituais com suas respectivas explicações[12]. Restringimo-nos à

---

[12] Para não comprometer as construções originais, as explicações dos mapas conceituais foram transcritas quase que de forma integral, foram feitas apenas algumas correções ortográficas, e foram mantidas as concordâncias, as pontuações etc.

apresentação das produções dos alunos **P1** e **R1**, respectivamente, o que apresentava maior desenvoltura na realização das atividades e o que apresentava o maior número de dúvidas e dificuldades em realizar as mesmas. Acreditamos que esses participantes são bons representantes para os demais, dado o lugar privilegiado que ocupam no fictício intervalo que representa o impacto das atividades nas imagens conceituais dos alunos: os extremos.

Os mapas conceituais elaborados e explicados por **P1** e **R1**, assim como os dados oriundos das observações serão discutidos apenas na seção 4.8.

## 4.5 SD1: Caixa de papel

### 4.5.1 Descrição da SD1

*Objetivo*: discutir com os alunos o conceito de volume aliado ao comportamento de funções.

*Conteúdos abordados*: polinômios: funções polinomiais, gráficos e propriedades; geometria espacial: problemas de otimização; unidades de medida.

*Duração*: 6 aulas de 50 minutos (3 aulas duplas)

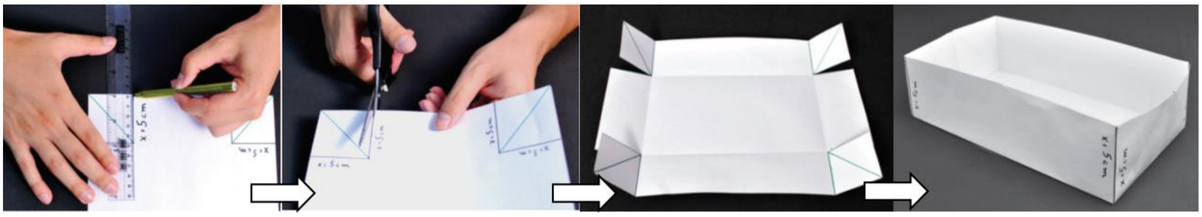
*Material utilizado*: 1) folha de papel A4; 2) régua de 30 cm; 3) lápis; 4) tubo de cola e; 5) tesoura.

*Problema*: Dada uma folha A4, qual a medida de x para que a caixa, sem tampa, obtida pela dobradura dos cantos (figura 30), tenha o maior volume possível?

*Descrição*

Os alunos foram solicitados a fazer, com o auxílio de régua, quadrados de lado x nos quatro cantos da folha A4. Cada equipe deveria fazer 10 caixas, para isso deveriam escolher 10 valores diferentes para x, com x variando entre 1 cm e 10 cm. Cortando um dos lados de cada um dos quadrados e colando as faces desses quadrados era possível montar as caixas. Observe (figura 30).

**Figura 30** – Procedimento para a construção das caixas



Fonte: <file:///C:/Users/sandro/Downloads/caixa_de_papel---o_experimento.pdf> (adaptado).

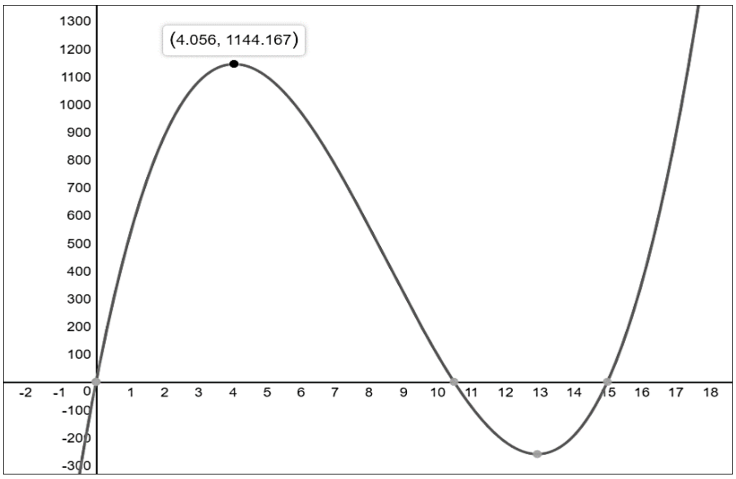
Depois da confecção das 10 caixas, colocando-as uma ao lado da outra, os grupos deveriam discutir e tentar descobrir qual delas tinha maior volume, baseando-se apenas na percepção visual. Feito isso, eles as numeraram em relação ao volume, do menor para o maior, número 1 para o menor volume e 10 para o maior. Essa numeração serviu de registro para a verificação da percepção visual dos alunos acerca do volume das caixas.

Após a ordenação das caixas com base nas suas percepções visuais, os alunos tiveram que calcular o volume das caixas algebricamente. Para isso, calcularam o produto das três dimensões da caixa, medidas com o auxílio da régua. Esses produtos serviram de base para uma segunda numeração, o menor volume calculado seria representado por 1 e o maior volume calculado por 10. Neste momento, eles compararam a percepção visual que tiveram do volume com o seu valor real.

Com os dados obtidos anteriormente, eles fizeram uma tabela no caderno, contendo quatro colunas: a da primeira numeração (percepção visual), a da segunda numeração (cálculo algébrico), a da altura (os valores de x) e a do volume (produto das três dimensões).

Após a confecção e preenchimento da tabela, os grupos esboçaram o gráfico do volume da caixa em função de sua altura x em um sistema de eixos de coordenadas. Algumas respostas diferentes foram dadas a pergunta: qual x resultará no maior volume possível? Entretanto, os alunos perceberam que apenas 10 valores de x não seriam suficientes para o cálculo em questão. Foi nesse contexto que entrou em cena a importância da representação analítica. O pesquisador mostrou, por meio de manipulações algébricas e com o auxílio de um software de calculadora gráfica, que o gráfico esboçado pelos alunos era parte do gráfico da função $y = 4x^3 - 102x^2 + 630x$.

**Figura 31** – Representação gráfica da função definida por $f(x) = 4x^3 - 102x^2 + 630x$ .




Fonte: Gráfico gerado no aplicativo de calculadora gráfica Desmos[13].

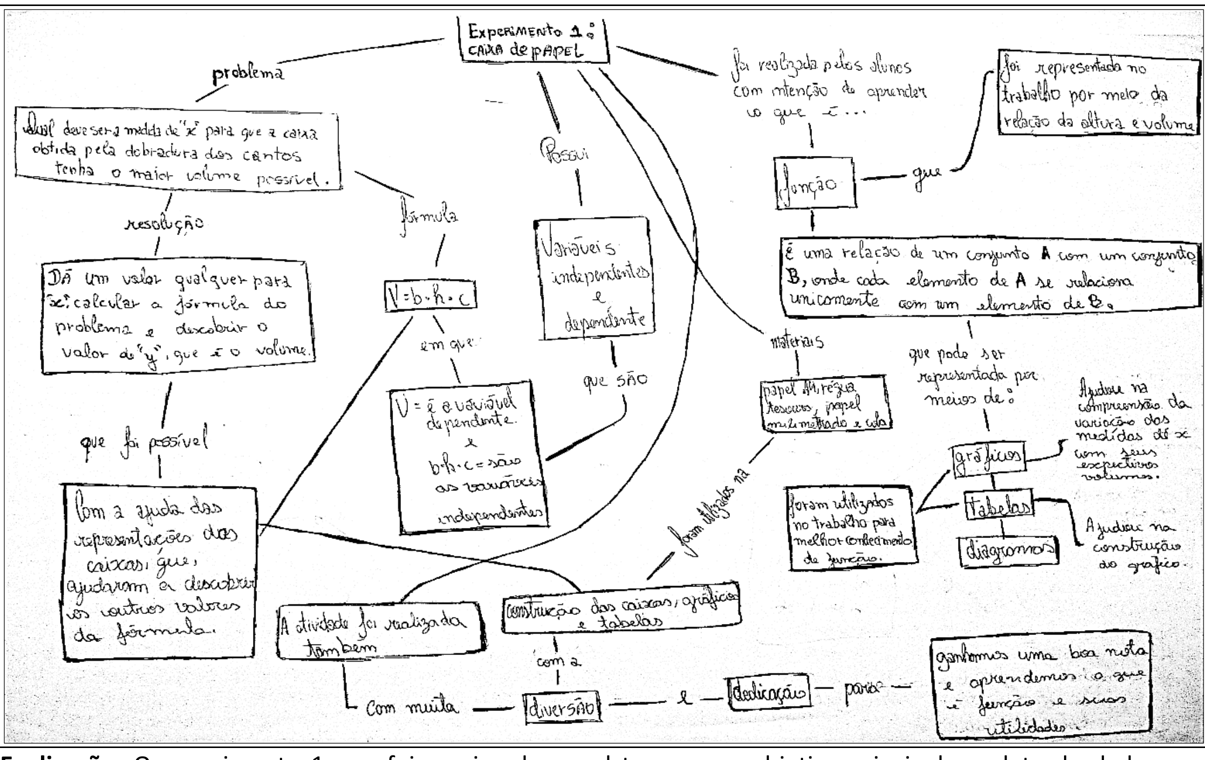
[13] Software on-line e gratuito. Disponível em: <https://www.desmos.com/calculator>. Acesso em: 11 out. 2016.

O valor máximo para o volume é aproximadamente 1144,167 cm³, proveniente da escolha x=4,056 cm, como mostra a figura 31. A maioria dos alunos chegaram à resposta aproximada x=4 cm. No geral, houve a compreensão dos contras e prós de cada representação. A tabela para organizar os dados, primeira tentativa para entender o comportamento do fenômeno; o gráfico para visualizar como se dá a relação entre as duas variáveis; a representação analítica, que confere generalidade e precisão.

No final, houve uma discussão sobre a divergência entre intuição e a notável ferramenta que é o cálculo matemático. Além disso, discutimos como seria possível explicar, por meio da definição, que há uma relação funcional entre as grandezas altura (x) e volume (v), não esquecendo que o foco das sequências didáticas é o enriquecimento da imagem conceitual dos participantes e o favorecimento da operacionalização da definição de função.

### 4.5.2 Resultados de P1

**Figura 32 –** Mapa conceitual do experimento 1

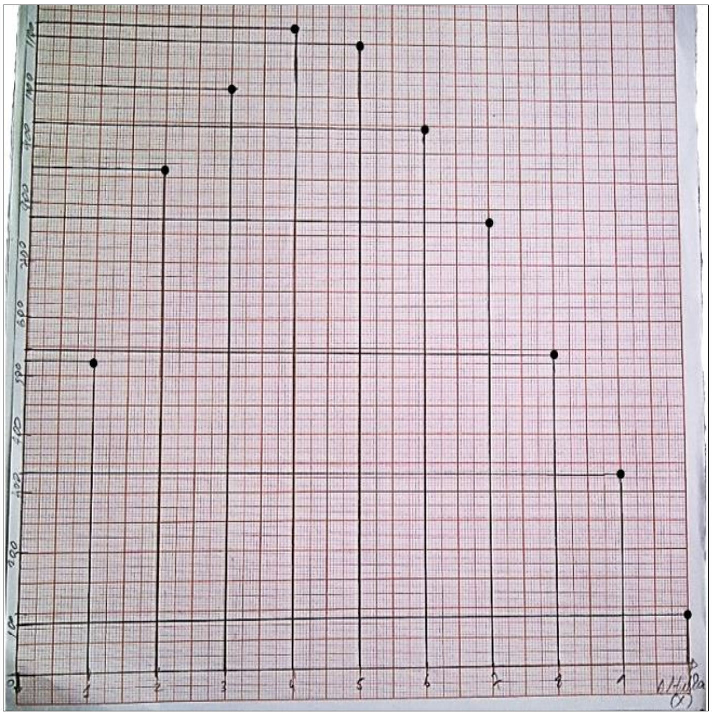



**Explicação:** O experimento 1 que foi a caixa de papel teve como objetivo principal a coleta de dados que ajudaram na compreensão do experimento caixa de papel. No experimento foram utilizados alguns materiais para a construção da caixa de papel, depois da construção da caixa, utilizando um valor qualquer para x foi preciso resolver a fórmula para descobrirmos o valor do volume, quando descobrimos todos os valores necessários era hora de fazermos uma tabela para compararmos os valores de x e o volume, depois que fizemos isso, fizemos um gráfico para vermos a variação que tem entre os valores x e o volume, e percebemos que até certo ponto ele aumentava e depois começava a cair. Então com esse experimento conseguimos perceber a presença da função, como por exemplo o valor de x é variável independente e o volume é a variável dependente, ou seja, esse experimento apresenta uma relação em que a cada valor de x se relaciona um único valor de volume, pois não é possível que uma mesma altura se relacione com dois valores diferentes de volume. Portanto, podemos definir que esse trabalho ajudou muito na aprendizagem sobre função.

**Figura 33 –** Tabela do experimento 1

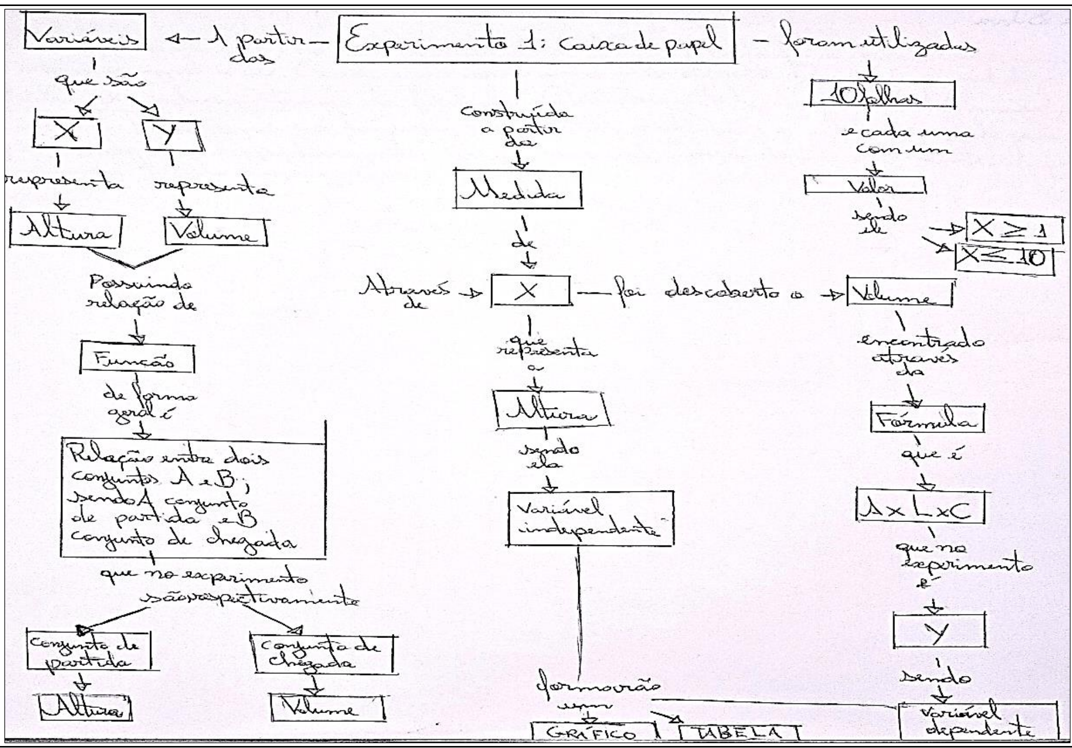
| ALTURA (X) | VOLUME (V) | 1ª NUMERAÇÃO (percepção visual) | 2ª NUMERAÇÃO (cálculo do volume) |
|---|---|---|---|
| 1 cm | 522,5 cm³ | 2 | 3 |
| 2 cm | 880 cm³ | 3 | 6 |
| 3 cm | 1080 cm³ | 5 | 8 |
| 4 cm | 1118 cm³ | 8 | 10 |
| 5 cm | 1110 cm³ | 10 | 9 |
| 6 cm | 945 cm³ | 9 | 7 |
| 7 cm | 784 cm³ | 7 | 5 |
| 8 cm | 540 cm³ | 6 | 4 |
| 9 cm | 324 cm³ | 4 | 2 |
| 10 cm | 95 cm³ | 1 | 1 |

**Figura 34** – Gráfico do experimento 1



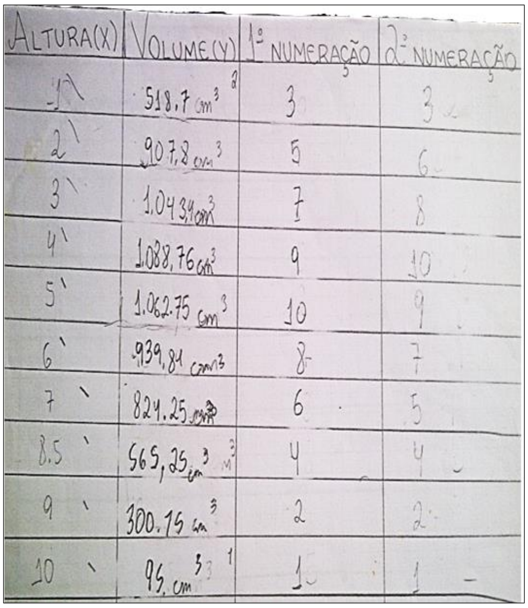
## 4.5.3 Resultados de R1

**Figura 35** – Mapa conceitual do experimento 1



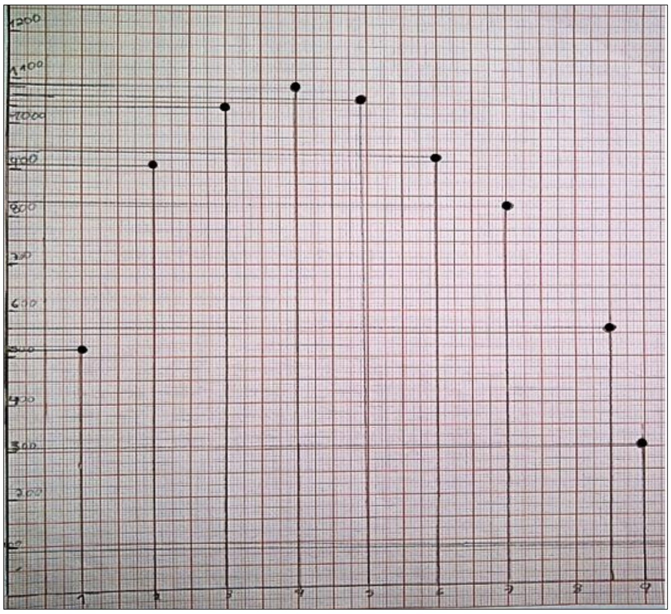

**Explicação:** Foi realizado um experimento em sala, no qual foi utilizada 10 folhas e cada uma deveria conter uma medida x, sendo maior ou igual a 1 e menor ou igual a 10. E cada uma sendo um valor diferente. Demos uma medida a x e formamos a caixa e logo depois calculamos o volume através da fórmula C (comprimento) x A (altura) x L (largura), no qual medimos e calculamos o volume. Descobrimos que há uma relação entre a altura e o volume, a qual pode ser representada como uma função, sendo elas, respectivamente, x e y, variável independente e dependente. A função do experimento foi dada através de uma tabela e um gráfico.

**Figura 36** – Tabela do experimento 1



| ALTURA(X) | VOLUME(Y) | 1º NUMERAÇÃO | 2º NUMERAÇÃO |
|---|---|---|---|
| 1 | 518,7 cm³ | 3 | 3 |
| 2 | 907,8 cm³ | 5 | 6 |
| 3 | 1.043,9 cm³ | 7 | 8 |
| 4 | 1.088,76 cm³ | 9 | 10 |
| 5 | 1.062,75 cm³ | 10 | 9 |
| 6 | 939,84 cm³ | 8 | 7 |
| 7 | 824,25 cm³ | 6 | 5 |
| 8,5 | 565,25 cm³ | 4 | 4 |
| 9 | 300,15 cm³ | 2 | 2 |
| 10 | 95 cm³ | 1 | 1 |

**Figura 37** – Gráfico do experimento 1



## 4.6 SD2: Eliminado quadrados

### 4.6.1 Descrição da SD2

*Objetivo*: estudar um modelo discreto de função exponencial e construir gráficos de funções exponenciais com os dados obtidos no experimento.

*Conteúdos abordados*: relações e funções, produto cartesiano, função decrescente; função exponencial.

*Duração*: 6 aulas de 50 minutos (3 aulas duplas)

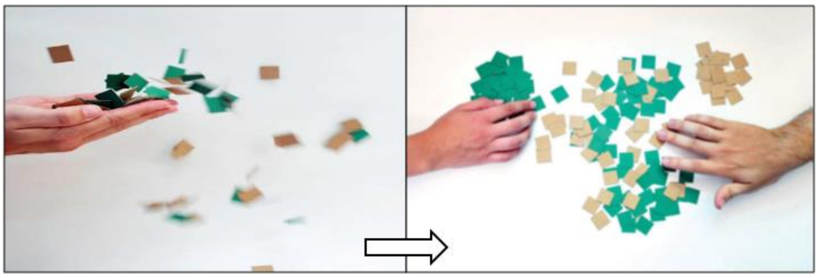
*Material utilizado*: 1) papel cartão dupla face; 2) tesoura; 3) régua de 30cm; 4) lápis; 5) borracha e; 6) calculadora.

*Problema*: ao lançar 240 quadradinhos aleatoriamente sobre uma mesa e retirar todos os que ficaram com a face marrom para cima (figura 38), quantos restarão depois do primeiro lance? Repetindo o procedimento com os quadradinhos que sobraram, quantos restarão depois do segundo lance? E depois do quinto? Existe alguma relação entre esses valores?

*Descrição*

Na primeira aula dupla, destinada às explicações e confecções de materiais, os alunos confeccionaram 240 quadradinhos de 2 cm x 2 cm, em papéis com faces de cores diferentes. A ideia era discutir sobre o decaimento exponencial. Para isso os participantes sopraram das palmas de suas mãos por sobre o chão, buscando certa aleatoriedade, os quadradinhos, e depois separando as cores. Os quadradinhos marrons (ou de outra cor) eram separados, contados, e o resultado era anotado numa tabela. Depois das anotações, os quadradinhos marrons eram subtraídos do total de quadradinhos.

**Figura 38** – Procedimento para lançamento e separação dos quadradinhos



Fonte: <file:///C:/Users/sandro/Downloads/eliminando_quadrados---o_experimento.pdf> (adaptado).

O procedimento supracitado era repetido 7 vezes, e os resultados eram anotados numa tabela com a configuração da tabela 7.

**Tabela 7** – Tipo de tabela usada no experimento 2

| Lançamento (i) | Quadrados restantes ( $Q_i$ ) | Quociente ( $Q_i / Q_{i-1}$ ) |
|---|---|---|
| 0 | 240 | ------ |
| ⋮ | | ⋮ |
| 7 | | |

Fonte: <file:///C:/Users/sandro/Downloads/eliminando_quadrados---o_experimento.pdf>.

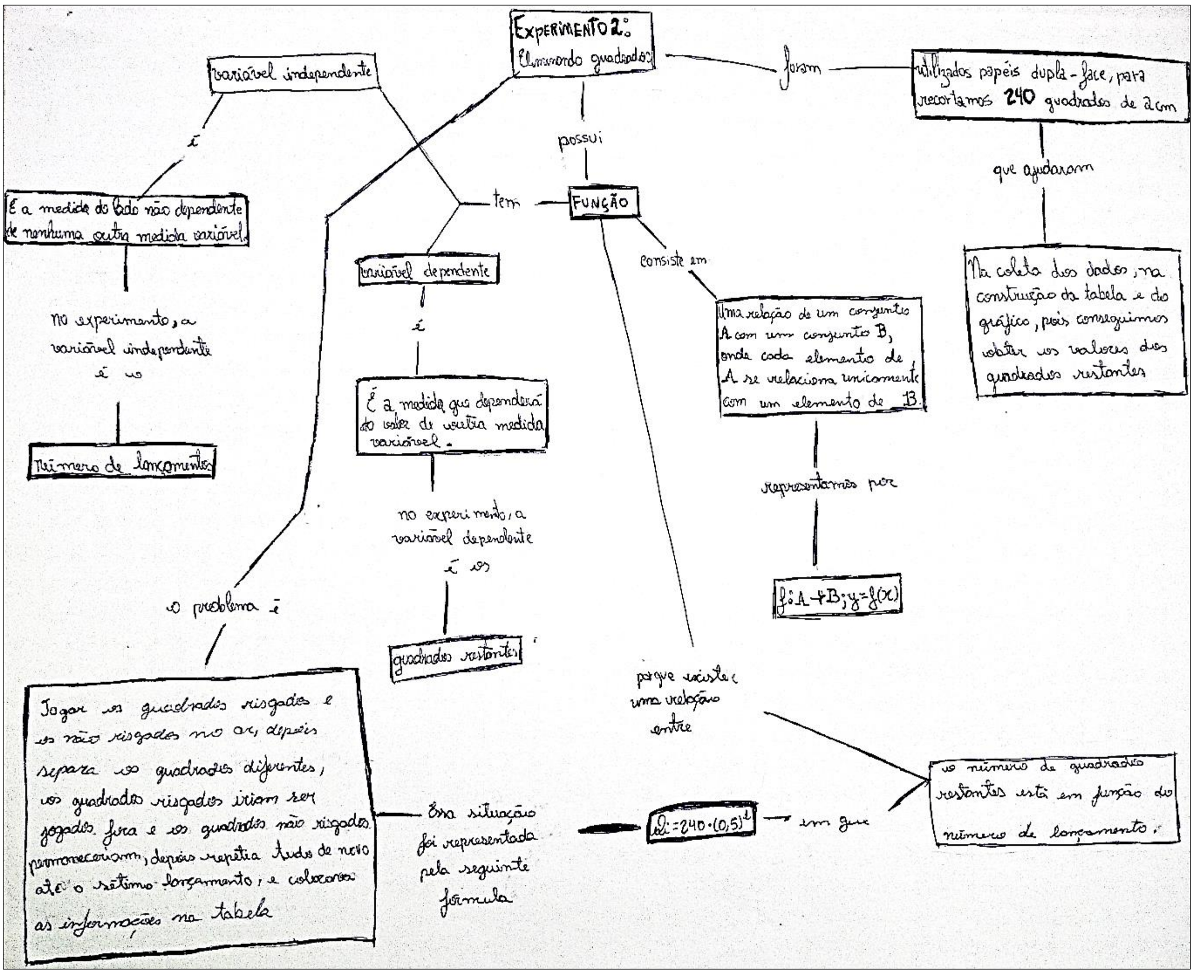
Os dados da tabela 7 eram utilizados para a construção de um gráfico cartesiano, *quadrados restantes x lançamento*, numa escala conveniente. Era solicitado, de quando em quando, que os alunos prestassem atenção em que cor predominava após a separação das duas cores.

Cada célula da terceira coluna da tabela 7 era preenchida com o resultado do quociente $\frac{Q_i}{Q_{i-1}} = b$, onde $Q_i$ é a quantidade final (após o lançamento) e $Q_{i-1}$ é a quantidade inicial (antes do lançamento). No modelo ideal, esse quociente seria constante (b seria sempre 0,5), mas na experiência b será menor que 1 e próximo de 0,5. Uma discussão sobre qual seria o valor ideal de b, no caso 0,5, foi levantada e corretamente respondida pelas equipes, uma analogia com o lançamento de uma moeda foi a base da explicação dos participantes.

Finalizamos o experimento comparando o modelo ideal com os resultados experimentais, deduzindo uma fórmula que relacionava a quantidade restante de quadradinhos ( $Q_i$ ) e o número do lançamento (*i*), fórmula esta que nos concedia a capacidade de previsão de quantos quadradinhos restariam após um certo lançamento, $Q_i = 240.0,5^i$.

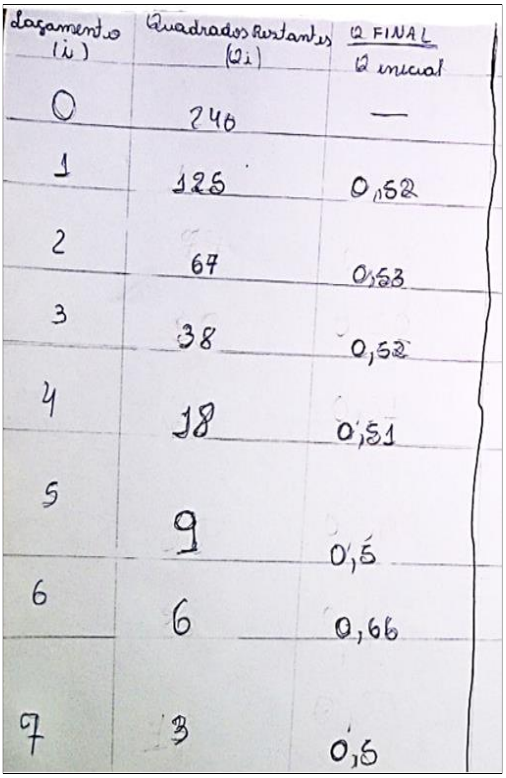
## 4.6.2 Resultados de P1

**Figura 39 –** Mapa conceitual do experimento 2




**Explicação:** No experimento 2 existe uma função porque existe uma relação entre o número de quadrados restantes com o número do lançamento, na qual a fórmula é $Q_i = 240.(0,5)^i$, nesse experimento nós deveríamos cortar 240 quadrados com 2cm cada lado, depois jogá-los para o ar, e recolher os que estavam riscados, e depois repetindo isso até a sétima vez, e depois construir uma tabela e um gráfico. A tabela nos ajudou muito com a aprendizagem de função, porque pudemos ver e resolver quais eram as variáveis independente e dependente. E concluímos que o número do lançamento era independente e o número de quadrados restantes era dependente e que nem sempre quanto maior for o valor da variável independente maior será o valor da sua variável dependente.

**Figura 40 –** Tabela do experimento 2



| Lançamento (i) | Quadrados Restantes (Qi) | Q FINAL / Q inicial |
|---|---|---|
| 0 | 240 | — |
| 1 | 125 | 0,52 |
| 2 | 67 | 0,53 |
| 3 | 38 | 0,52 |
| 4 | 18 | 0,51 |
| 5 | 9 | 0,5 |
| 6 | 6 | 0,66 |
| 7 | 3 | 0,5 |

**Figura 41** – Gráfico do experimento 2

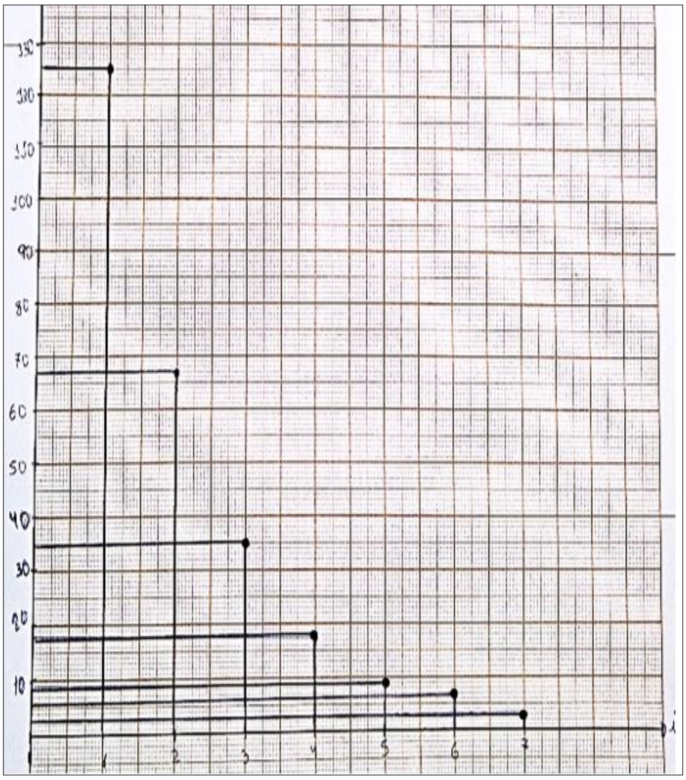
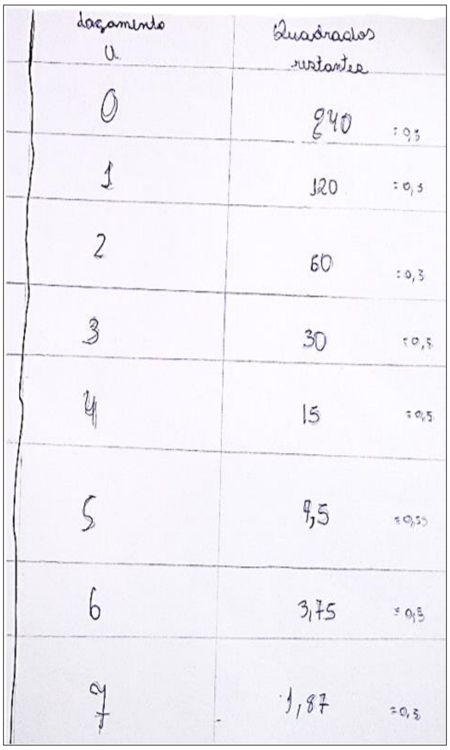
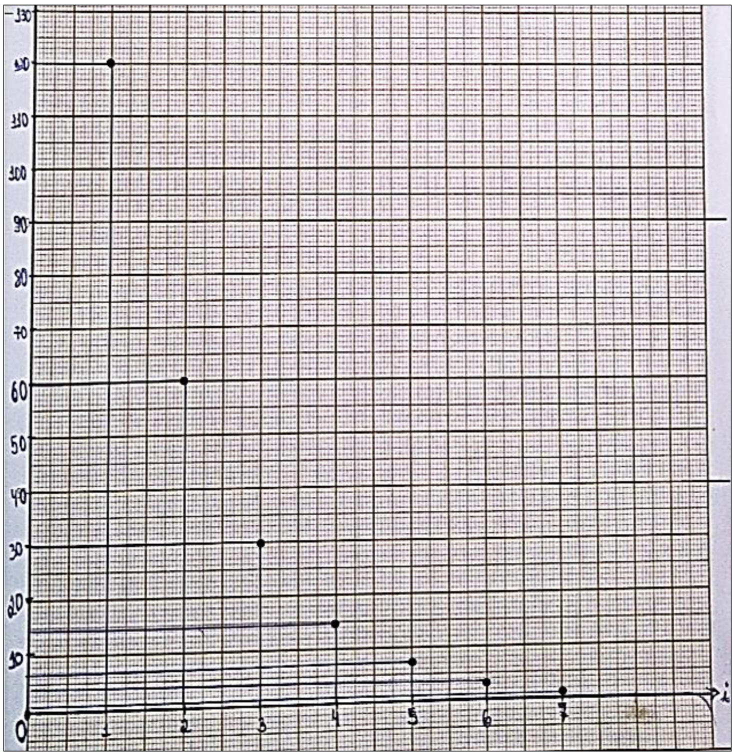



**Figura 42 –** Tabela do modelo ideal



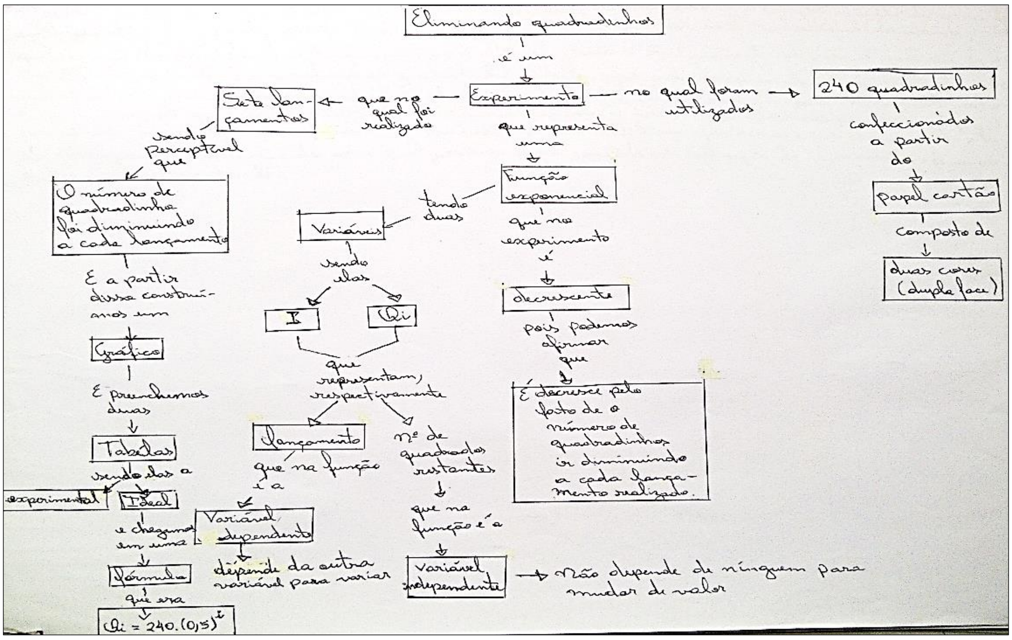
| Lançamento (i) | Quadrados restantes | |
|---|---|---|
| 0 | 240 | : 0,5 |
| 1 | 120 | : 0,5 |
| 2 | 60 | : 0,5 |
| 3 | 30 | : 0,5 |
| 4 | 15 | : 0,5 |
| 5 | 7,5 | : 0,55 |
| 6 | 3,75 | : 0,5 |
| 7 | 1,87 | : 0,5 |

**Figura 43** – Gráfico do modelo ideal



### 4.6.3 Resultados de R1

**Figura 44 –** Mapa conceitual do experimento 2



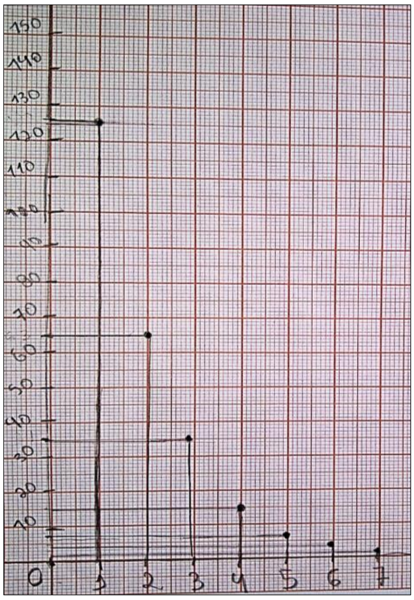

**Explicação:** Eliminando quadradinhos é um experimento realizado para demonstrar o comportamento de uma função exponencial – nesse caso, decrescente. Dado dois dados ao experimento, ou melhor, duas variáveis (dependente e independente) que seriam *i* (representando o lançamento, que o estimado seria a realização de sete para a conclusão do experimento) e *Qi* (representando a quantidade de quadradinhos restantes após cada lançamento). Foram utilizados 240 quadradinhos com medidas de 2 cm cada lado, sendo eles dupla face (duas cores). Em cada lançamento notamos que o número de quadradinhos restantes ia diminuindo. Com o resultado, elaboramos primeiramente a tabela, preenchemos com os valores e realizamos um gráfico (experimental). Logo após a tabela ideal, que desprezaria a resistência do ar e qualquer imperfeição cometida na realização do experimento, fizemos outro gráfico para representá-la. A relação entre *i* e *Qi* é uma função pois a cada número de lançamento corresponde uma e apenas uma quantidade de quadradinhos e o gráfico e a tabela apresentam padrões nos resultados.

**Figura 45** – Tabela do experimento 2

| LANÇAMENTO (i) | QUADRADOS RESTANTES (Qi) | Q FINAL / Q INICIAL |
|---|---|---|
| 0 | 240 | Ø |
| 1 | 128 | 0,53 |
| 2 | 63 | 0,49 |
| 3 | 34 | 0,53 |
| 4 | 16 | 0,47 |
| 5 | 8 | 0,50 |
| 6 | 3 | 0,37 |
| 7 | 2 | 0,66 |

| LANÇAMENTO (i) | QUADRADOS RESTANTES (Qi) |
|---|---|
| 0 | 240 |
| 1 | 120 |
| 2 | 60 |
| 3 | 30 |
| 4 | 15 |
| 5 | 7,5 |
| 6 | 3,75 |
| 7 | 1,87 |

**Figura 46** – Gráfico do experimento 2



## 4.7 SD3: Dinamômetro[14] com elástico

### 4.7.1 Descrição da SD3

*Objetivos*: verificar se um elástico comum obedece à lei de Hooke[15]; construir um gráfico através de dados obtidos experimentalmente; conhecer uma aplicação da função afim.

*Conteúdos abordados*: comportamento linear e função afim.

*Duração*: 6 aulas de 50 minutos (3 aulas duplas)

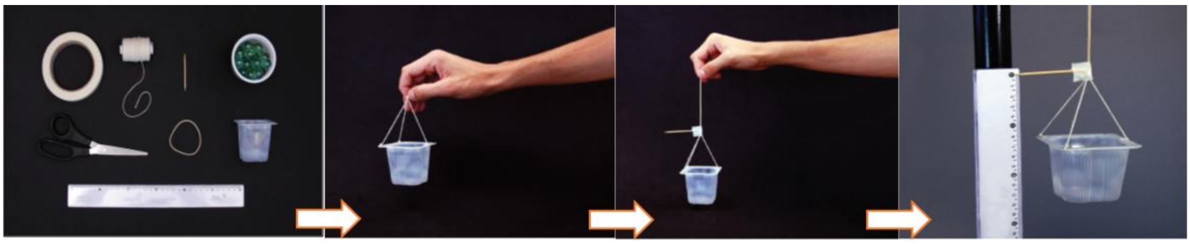
*Material utilizado:* 1) elástico de látex (aproximadamente 20 cm); 2) 60 cm de barbante; 3) tesoura; 4) um copo plástico; 5) 30 bolas de gude de mesmo tamanho; 6) régua graduada de 30 cm; 7) fita adesiva e; 8) um palito de dente.

*Problema:* analisando o gráfico construído, vocês diriam que o elástico obedece exatamente à Lei de Hooke, ou não? Isto é, será que a variação de comprimento em um elástico também é proporcional à força aplicada sobre ele? Por quê?

*Descrição*

Na primeira aula dupla os participantes tiveram por objetivo construir um dinamômetro, utilizando os materiais mencionados (figura 47).

**Figura 47 –** Materiais e construção do dinamômetro



Fonte: <file:///C:/Users/sandro/Downloads/TELA-dinamometro_com_elastico---o_experimento.pdf> (adaptado).

Para tal, os alunos fizeram o seguinte: 1) dividiram o barbante em três pedaços de 20 cm cada; 2) amarraram um pedaço em cada furo do copo plástico; 3) juntaram as extremidades dos barbantes e deram um nó, de modo que os copos ficaram bem equilibrados; 4) amarraram uma das extremidades do elástico no ponto de junção dos barbantes (nó); 5) ainda nesse ponto, fixaram um palito de dentes perpendicularmente ao elástico usando uma fita adesiva, de forma a obterem um ponteiro; 6) com uma fita adesiva, fixaram bem a outra extremidade do elástico na mesa, próximo a uma de suas pernas, deixando-o pendurado e; 7)

---

14 O dinamômetro é um instrumento constituído basicamente por uma mola de constante *k* conhecida e usa a lei de Hooke para medir forças através da variação de comprimento sofrida.

15 Essa lei nos permite calcular a deformação que uma mola sofre ao se aplicar uma determinada força sobre ela, podendo ser equacionada da seguinte maneira: $F = k.\Delta L$, onde $F$ é a força aplicada sobre o corpo elástico, $k$ é uma constante característica da mola que traduz sua rigidez e $\Delta L$ é a deformação linear causada.

prenderam a régua na perna da mesa, de modo a deixar o palito de dentes alinhado com o zero (a perna da mesa era perpendicular ao chão).

Como foi dito anteriormente, o objetivo deste experimento era saber se a variação de comprimento em um elástico era proporcional à força aplicada sobre ele. Por isso, na segunda aula dupla, os alunos anotaram, em uma tabela (semelhante à tabela 8), qual era a variação do comprimento do elástico do dinamômetro (figura 47) em função do número de bolas de gude que ele estava suportando (a variação do comprimento era dada pela indicação do ponteiro do dinamômetro). Abaixo segue o modelo de tabela utilizado:

**Tabela 8** – Tipo de tabela utilizada no experimento 3

| Nº de bolas de gude (n) | Variação do comprimento do elástico em mm (ΔL) |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 3 |
| ⋮ | ⋮ |
| 30 | 330 |

Fonte: <file:///C:/Users/sandro/Downloads/TELA-dinamometro_com_elastico---o_experimento.pdf>.

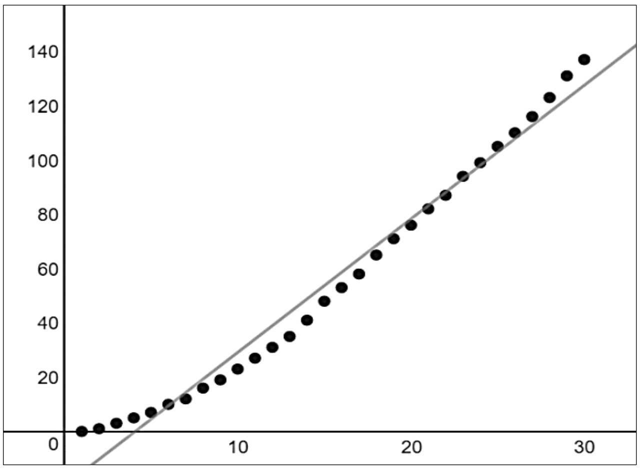
Com os dados da tabela 8, os alunos construíram um gráfico cartesiano colocando a deformação do elástico (ΔL) no eixo das ordenadas, e o números de bolinhas de gude (n) no eixo das abcissas.

Os gráficos construídos revelaram que para um número pequeno de bolinhas de gude suportadas o comportamento não era linear e, portanto, não era proporcional à força exercida. Sendo assim, a conclusão foi que o elástico não obedecia exatamente à Lei de Hooke. Porém, a partir de um certo número de bolinhas, o gráfico tomara a forma aproximada de uma função afim. Foi neste momento que a seguinte questão foi proposta aos alunos:

Analisando o gráfico construído, vocês diriam que o elástico obedece exatamente à Lei de Hooke, ou não? Por quê?

Na terceira aula dupla, os dados coletados e tabelados foram inseridos no software de calculadora gráfica Desmos, onde uma reta que melhor se ajustava aos dados foi obtida, bem como uma equação que permitia saber qual seria a variação sofrida pelo elástico dependendo do número de bolas de gude inseridas no copo, esse procedimento foi realizado por cada equipe.

**Figura 48 –** Gráfico elaborado com os dados do grupo P.

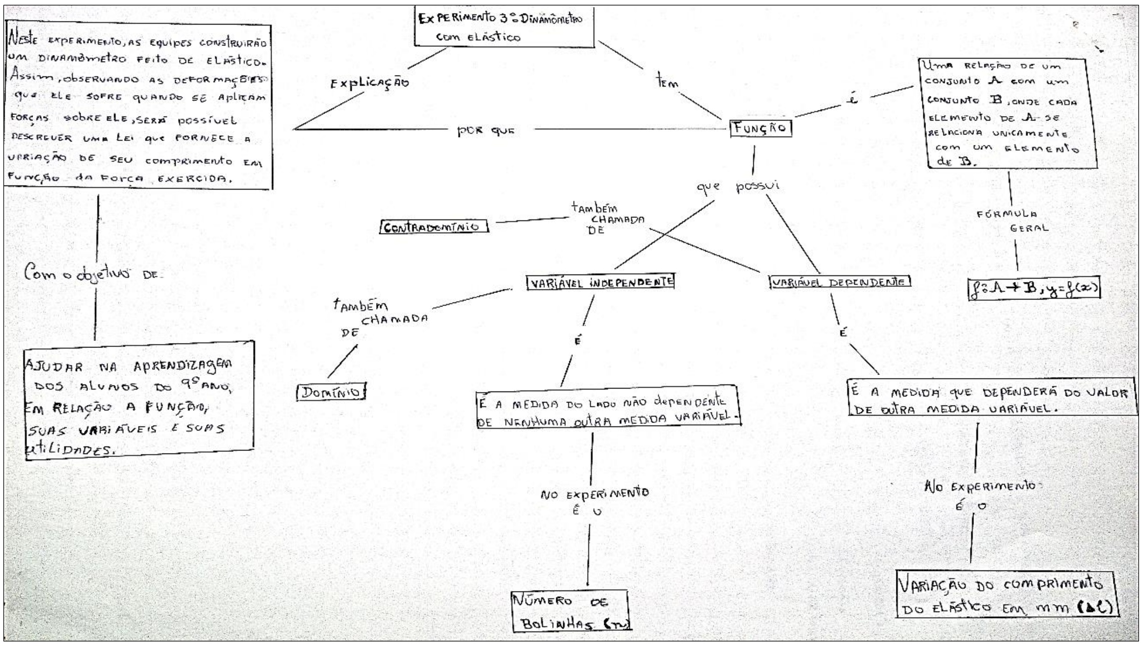



Fonte: Gráfico gerado no aplicativo Desmos.

Todo o envolvimento com o experimento proporcionou aos alunos uma percepção da importância do estabelecimento de uma relação funcional entre duas variáveis, no que se refere ao fornecimento de um instrumento de previsão. Ficou claro que as situações experimentais têm certas limitações, por exemplo, o gráfico ficou linear só a partir de certo valor (figura 48), e a partir de um determinado número de bolinhas de gude, o elástico ficava muito rígido e o gráfico novamente não era mais uma reta, pois o elástico estava prestes a se romper. Se a lei de Hooke fosse realmente aplicada sobre o elástico, deveríamos ter um gráfico linear, o que tínhamos era uma aproximação razoável, mas ficou claro que não estávamos trabalhando em situações ideais, isto é, o material do elástico não sofria deformações plásticas permanentes (a constante característica *k* da borracha não permanecia constante com a variação da força aplicada sobre ela). A ideia de fórmula foi reforçada com esse experimento, bem como a relevância de se transcender limitações físicas imediatas para se compreender um fenômeno físico como um todo.

## 4.7.2 Resultados de P1

**Figura 49** – Mapa conceitual do experimento 3

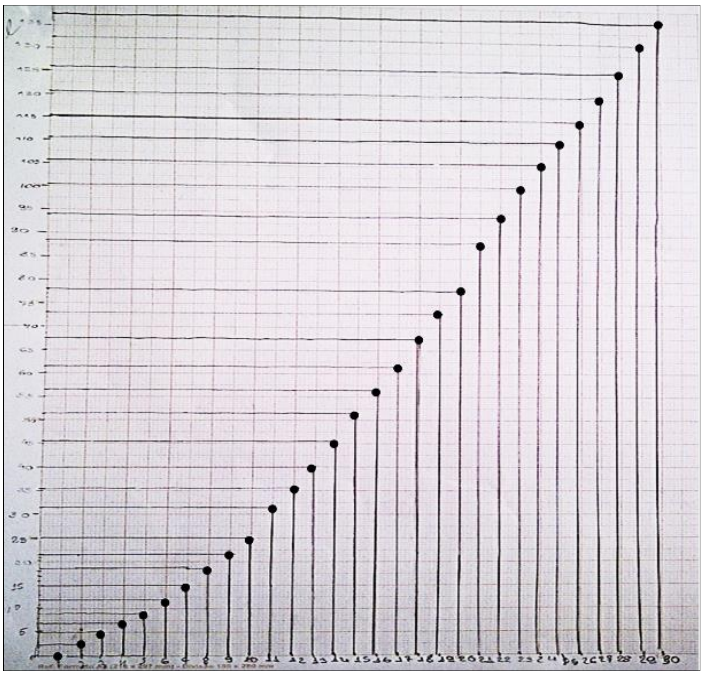



**Explicação:** Neste experimento, cada equipe tinha que construir um dinamômetro feito de elástico. Devemos colocar uma a uma bolinha por vez no copinho para medirmos qual foi a diferença do início até o final. Neste trabalho havia função, porque tinha duas variáveis, uma independente e a outra dependente, sendo elas respectivamente, o número de bolinhas (n) e a variação do comprimento do elástico em mm (ΔL). Ou seja, possui duas variáveis n e ΔL, sendo que a cada valor de n resulta uma única variação de comprimento ΔL, a variação pode ser observada pelo gráfico, portanto pode ser considerada função e afim depois de certo ponto, ou seja, segue a lei de Hooke depois de certo ponto.

**Figura 50** – Tabela do experimento 3

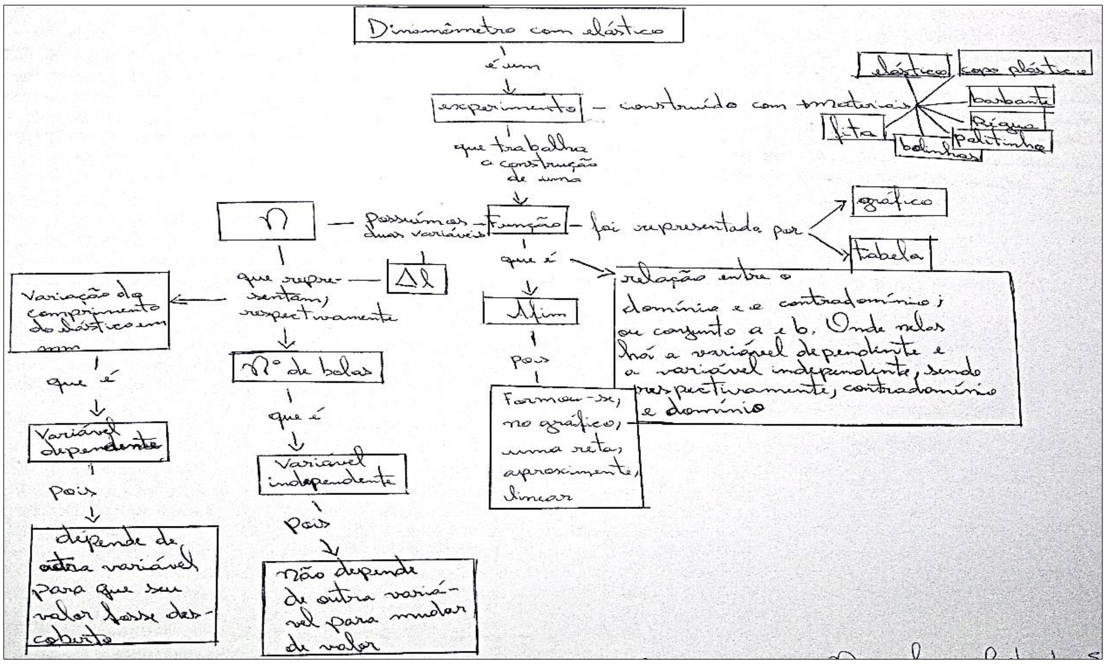
| Número de bolinhas (n) | Variação do comprimento do elástico em mm (ΔL) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0,1 | 1 | 0,4 | 4 | 2,5 |
| 3 | 0,3 | 3 | 0,7 | 7 | 5 |
| 4 | 0,5 | 5 | 0,9 | 9 | 7 |
| 5 | 0,7 | 7 | 1,1 | 11 | 9 |
| 6 | 1 | 10 | 1,4 | 14 | 12 |
| 7 | 1,2 | 12 | 1,8 | 18 | 15 |
| 8 | 1,6 | 16 | 2,1 | 21 | 18,5 |
| 9 | 1,9 | 19 | 2,4 | 24 | 21,5 |
| 10 | 2,3 | 23 | 2,7 | 27 | 25 |
| 11 | 2,7 | 27 | 3,6 | 36 | 31,5 |
| 12 | 3,1 | 31 | 4 | 40 | 35,5 |
| 13 | 3,5 | 35 | 4,5 | 45 | 40 |
| 14 | 4,1 | 41 | 5 | 50 | 45,5 |
| 15 | 4,8 | 48 | 5,5 | 55 | 51,5 |
| 16 | 5,3 | 53 | 6 | 60 | 56,5 |
| 17 | 5,8 | 58 | 6,5 | 65 | 61,5 |
| 18 | 6,5 | 65 | 7 | 70 | 67,5 |
| 19 | 7,1 | 71 | 7,5 | 75 | 73 |
| 20 | 7,6 | 76 | 8 | 80 | 78 |
| 21 | 8,2 | 82 | 9,5 | 95 | 88,5 |
| 22 | 8,7 | 87 | 10,1 | 101 | 94 |
| 23 | 9,4 | 94 | 10,7 | 107 | 100,5 |
| 24 | 9,9 | 99 | 11,2 | 112 | 105,5 |
| 25 | 10,5 | 105 | 11,6 | 116 | 110,5 |
| 26 | 11 | 110 | 12 | 120 | 115 |
| 27 | 11,6 | 116 | 12,5 | 125 | 120,5 |
| 28 | 12,3 | 123 | 12,9 | 129 | 126 |
| 29 | 13,1 | 131 | 13,4 | 134 | 132,5 |
| 30 | 13,7 | 137 | 13,8 | 138 | 137,5 |

**Figura 51** – gráfico do experimento 3



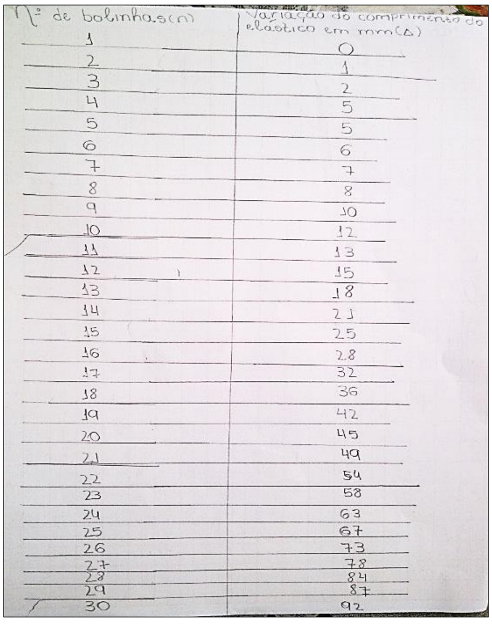
## 4.7.3 Resultados de R1

**Figura 52** – Mapa conceitual do experimento 3



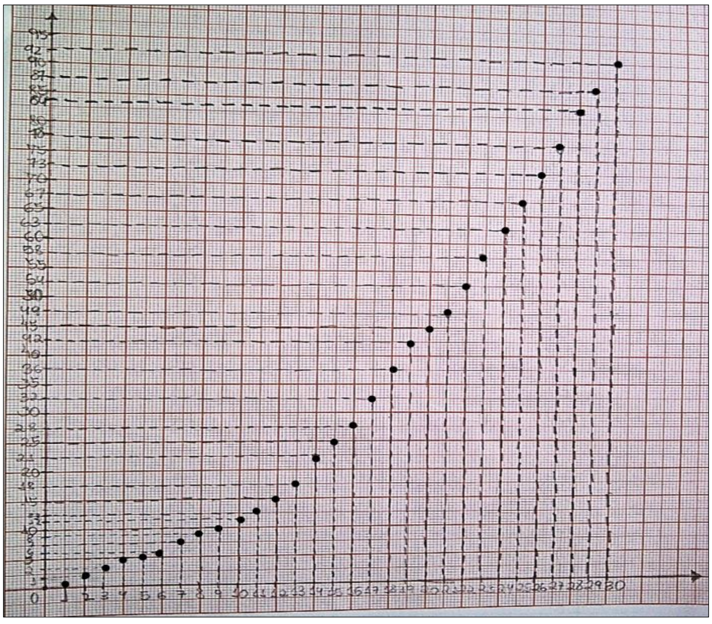

**Explicação:** Dinamômetro com elástico é um experimento que foi construído a partir de um copo plástico, possuindo três furos com um barbante, amarramos no topo um elástico e colocamos um palito, que ficará na direção da régua, para marcar os centímetros. Este experimento é uma função afim, pois segue uma reta linear. A variável dependente é representada por ΔL, que é a variação do comprimento do elástico em mm. E a variável independente, representada por n, que é o número de bolinhas, nas quais serão colocadas de uma em uma, até colocarmos todas as trinta ao longo da experiência, fizemos uma tabela e a preenchemos em mm, que é a variação do elástico, ΔL é dependente pois depende das bolinhas para alterar o valor e n é independente pois não depende de outra variável para mudar o valor.

**Figura 53** – Tabela do experimento 3



| Nº de bolinhas (n) | Variação do comprimento do elástico em mm (Δ) |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 5 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 7 |
| 8 | 8 |
| 9 | 10 |
| 10 | 12 |
| 11 | 13 |
| 12 | 15 |
| 13 | 18 |
| 14 | 21 |
| 15 | 25 |
| 16 | 28 |
| 17 | 32 |
| 18 | 36 |
| 19 | 42 |
| 20 | 45 |
| 21 | 49 |
| 22 | 54 |
| 23 | 58 |
| 24 | 63 |
| 25 | 67 |
| 26 | 73 |
| 27 | 78 |
| 28 | 84 |
| 29 | 87 |
| 30 | 92 |

**Figura 54** – Gráfico do experimento 3



### 4.8 Análise *a posteriori* das sequências didáticas desenvolvidas

Na primeira sequência didática, algo interessante foi observado. Antes das confecções das caixas, a hipótese de muitos alunos era a de que a maior altura x corresponderia ao maior volume, ou seja, havia uma ideia quase unânime de que quanto maior, maior: uma ideia rudimentar de proporcionalidade dominava as sugestões dos alunos. Na prática, conforme as atividades iam se desenvolvendo, os alunos foram percebendo que, a partir de certo ponto, quanto maior a altura, menor era o volume; entrou em debate, portanto, o conceito de ponto de máximo. A confecção do gráfico e a explicação de como interpretá-lo esclareceram como o fenômeno se comportava, explicitando que nem toda relação entre duas variáveis é linear. Embora os alunos já tivessem sido iniciados no conceito de função e trabalhado, como apontou o professor regente, com os principais modelos funcionais referentes ao 1º ano do ensino médio, suas imagens conceituais eram muito empobrecidas para suportar uma definição operacional, pois significar apenas o modelo linear limita em muito a utilização do conceito de função. Por isso apresentar o conceito de função dentro de múltiplos contextos parece ser uma escolha sensata. Além disso, os alunos achavam que o gráfico da função que modelava o primeiro experimento era uma parábola, simplesmente porque o formato do gráfico de $y = 4x^3 - 102x^2 + 630x$, dentro da restrição adotada, $1 \leq x \leq 10$, assemelha-se ao referido gráfico, mas para refutar tal perspectiva discutimos sobre a simetria do gráfico de uma parábola, característica não presente no gráfico do primeiro experimento. A comparação entre a primeira e segunda numerações mostrou que a nossa percepção visual é limitada, nesse contexto, a Matemática surgiu como um instrumento mais objetivo, mais preciso para fazer determinadas inferências, pois ela transcende as limitações da experimentação, fato melhor evidenciado quando o problema foi resolvido mediante a representação algébrica, na terceira aula dupla.

Na segunda sequência didática, houve uma certa desconfiança sobre o fato de existir uma relação funcional entre as variáveis $i$ (número do lançamento) e $Q_i$ (quadrados restantes). Solicitei que algum aprendiz apresentasse uma explicação. Embora simples, e fazendo uso da definição enunciada, disse **S1**: *"todo lançamento corresponde a alguma quantidade de quadradinhos restantes e cada lançamento gera apenas uma quantidade de quadradinhos"*, o que pareceu esclarecedor para a maioria dos participantes. Durante a elaboração do gráfico, foi levantada a pergunta: *se continuássemos a plotar pontos, o gráfico intersectaria o eixo dos x?* Para responder a essa pergunta tivemos que deduzir um modelo ideal, ou seja, o que aconteceria se desprezássemos todas as imperfeições de realização do experimento?

Chegamos, fazendo uma analogia ao lançamento de uma moeda, à ideia de que após cada lançamento teríamos metade dos quadradinhos para cada cor, concluímos deduzindo a fórmula $Q_i = 240.0,5^i$. De posse da fórmula, poderíamos saber qual seria a quantidade de quadrados restantes seja qual fosse o número do lançamento. Apesar de ser um caso discreto, o experimento mostrou-se muito útil para discussões sobre o modelo exponencial.

O objetivo mais geral da terceira sequência didática era apresentar de forma mais dinâmica como se dá a relação funcional entre duas grandezas, a partir de uma lei física. A ideia era acrescentar um pouco de movimento à imagem conceitual dos alunos relativamente ao tema funções, pois apenas entender que funções são relações entre dois conjuntos que obedecem a características especiais não contribui muito para tal. Já discutimos que o conceito de função teve sua origem na Física como instrumento para modelar matematicamente situações de movimento, por isso a ideia de variação é essencial para compreender esse conceito matemático. No intuito de saber se a variação de comprimento em um elástico era proporcional à força aplicada sobre ele, os alunos estavam diante de uma situação realmente significativa em relação ao conceito de função; ao coletar os dados, tabulá-los e construir o gráfico, os aprendizes puderam vislumbrar uma situação prática onde o modelo linear se apresentava. Constatou-se que a terceira SD causou certa perplexidade nos participantes, pois eles achavam curioso o padrão obedecido pelo gráfico que surgia diante de seus olhos a partir de suas próprias medições, nesse contexto, afirmou **S4**: *"não imaginava que era possível uma função existir na vida real"*. A afirmação de **S4** faz-nos lembrar o quanto o ensino de funções é desvinculado de situações práticas e significativas para os aprendizes.

Em relação aos mapas conceituais, principalmente nos primeiros intentos, os alunos tiveram certa dificuldade para elaborá-los e cometeram alguns equívocos. Muitas vezes esqueciam de conectar os conceitos por meio de palavras-chave, o que inviabilizava a análise das relações entre os conceitos, alguns deixavam os conceitos "ilhados", não os relacionando com os demais, e outros não sabiam quais palavras-chave usar. Conforme as atividades avançavam e diferentes mapas iam sendo socializados, as dificuldades supramencionadas iam se atenuando, mas não foram completamente superadas. Apesar dos equívocos, os mapas conceituais auxiliaram os alunos servindo como um recurso de aprendizagem, sendo que a elaboração dos mapas exigia que alunos retomassem os conceitos já abordados nas sequências didáticas e os organizasse levando em conta uma hierarquia conceitual. Enquanto ferramentas gráficas para a representação da estrutura cognitiva, eles serviram para avaliar indícios de aprendizagem significativa. As lacunas deixadas pelos equívocos na construção dos mapas conceituais foram preenchidas pelas explicações dos mapas. Todas as explicações seguiram o mesmo modelo das explicações dos participantes **P1** e **R1**, quer dizer, o aprendiz dava uma explicação de como ocorreram as atividades e tentava utilizar a definição enunciada para explicar porque a relação entre as variáveis da então SD era funcional, essas explicações exigiam do aprendiz máxima transformação do conhecimento adquirido. Observe a explicação de **P1** (figura 32) para porque a relação entre a altura x e o volume da caixa, na SD1, era funcional: *"esse experimento apresenta uma relação em que a cada valor de x se relaciona um único valor de volume, pois não é possível que uma mesma altura se relacione com dois valores diferentes de volume"*. No geral, a participação dos mapas conceituais foi fundamental, pois, como podemos observar nas produções de **P1** e **R1**, evidenciou relações válidas entre conceitos que apontam para uma imagem conceitual coerente e organizada.

Observou-se que as atividades práticas foram modelando as concepções dos alunos sobre a importância das múltiplas representações do conceito de função, solapando qualquer concepção mono registro apreendida pelos mesmos. Os contras e prós do uso de tabelas, gráficos e fórmulas foram constantemente discutidos. Percebia-se alunos discutindo sobre os padrões numéricos identificados nas tabelas e as limitações destas, sobre o porquê deste ou daquele ponto estar fora da curva, o que, segundo eles, sugeria novos cálculos, ou sobre a ideia de como deduzir uma fórmula. O recurso a uma pluralidade de representações semióticas fez com que os alunos constatassem a importância delas para a aquisição do conceito de função; inclusive, as formas de representar o conceito de função foram citadas por quase todos os participantes em suas definições de função dadas no questionário final, o que não ocorreu no teste de sondagem. Em suma, o favorecimento da operacionalização da definição de função parece ter oferecido aos aprendizes um ponto de referência que propiciou a articulação entre as múltiplas representações do referido conceito. Para complementar esse ponto de vista, vamos aos resultados do questionário final.

### 4.9 O questionário final

O questionário final (ver apêndice B) foi aplicado no último encontro e guiou-se basicamente pelos mesmos pontos que direcionaram a construção do teste de sondagem. As respostas dadas a este questionário proporcionaram importantes dados a respeito do impacto das sequências didáticas na imagem conceitual dos aprendizes em relação ao conceito de função. Temos, então, uma oportunidade para constatar qual foi a contribuição que o favorecimento da operacionalização trouxe para a coordenação das múltiplas representações do conceito de função e, consequentemente, para a aprendizagem significativa desse conceito.

Na **questão 1**, o aprendiz deveria fazer a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico e, ainda, fazer tratamentos neste último. Além disso, o respondente deveria classificar as variáveis em dependente e independente.

O objetivo da **questão 2** era similar ao da questão anterior, a única diferença se referia ao nível de complexidade da interpretação e do tratamento.

Já na **questão 3**, o respondente deveria fazer a conversão da representação tabular para a representação algébrica, e saber trabalhar com a generalização formulada. Deveria, ainda, operacionalizar a definição de função no sentido de utilizá-la para explicar porque havia uma relação funcional entre as variáveis x e y.

A **questão 4** exigia que o aprendiz soubesse explicar quando um gráfico cartesiano representa uma relação funcional. Esperava-se que o aluno soubesse fazer essa explicação baseando-se na definição que adotou, pois tal ação forneceria indícios de uma definição que alcançou certa operacionalização.

A **questão 5**, assim como a anterior, versa sobre a identificação de relações funcionais, mas agora dentro do registro de representações por diagramas, que é, geralmente, o ponto de partida da formalização do conceito de função.

A **questão 6** é exatamente a mesma apresentada no teste de sondagem aplicado no primeiro encontro. Como a definição conceitual expressa parte do conteúdo da estrutura cognitiva relativamente ao conceito em questão, as respostas apresentadas nesta questão revelaram a evolução da imagem conceitual dos alunos.

Por meio da **questão 7** pretendeu-se captar a perspectiva dos participantes acerca das atividades desenvolvidas. Na fala dos alunos pode-se perceber quais foram os altos e baixos das sequências didáticas, e o que pode ser descartado, aperfeiçoado ou melhor adaptado para futuros projetos que visem à operacionalização da definição de função.

## 4.10 Resultados e discussão do questionário final

### 4.10.1 Resultados e discussão da questão 1

*Questão 1*: Suponha que, para determinado modelo de carro, o consumo médio de combustível seja:

- 15 km/l para o modelo tradicional;
- 22 km/l para o modelo híbrido (funciona a base de combustível e eletricidade).

Com base nessas informações, responda ao que se pede.

a) Chamando de *D* a distância total que o veículo pode percorrer com motor híbrido e de *L* o volume de combustível, escreva uma fórmula que associe *D* e *L*.

b) Identifique as variáveis dependente e independente.

c) Com 40 litros de combustível, quantos quilômetros um carro com motor híbrido pode percorrer? E o modelo de carro tradicional? Qual a diferença de distância percorrida entre os dois modelos?

d) Para percorrer uma distância de 1.100 km, quantos litros de combustível o modelo híbrido requer?

**Tabela 9** – Questão 1: frequências de acertos e erros

| Item | Acertos | Erros | Acertos (%) | Erros (%) |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 18 | 2 | 90 | 10 |
| **B** | 20 | 0 | 100 | 0 |
| **C** | 16 | 4 | 80 | 20 |
| **D** | 17 | 3 | 85 | 15 |

Esta questão representa um típico contexto referente ao tema funções no 1º ano do ensino médio. Ela exige a elaboração de uma fórmula a partir de um contexto enunciado e que o indivíduo saiba utilizá-la, solicita também a classificação de variáveis em dependentes e independentes. Observa-se por meio da tabela 9 que os aprendizes efetuaram com sucesso, em sua maioria, tudo aquilo exigido pela questão. Mas o valor informativo dos resultados desta questão não reside nos números da tabela 9, mas sim nos processos realizados pelos alunos, que demonstraram certa organização e clareza no que estavam fazendo. Observe a algumas respostas.

**Figura 55** – Resposta de P1 à questão 1

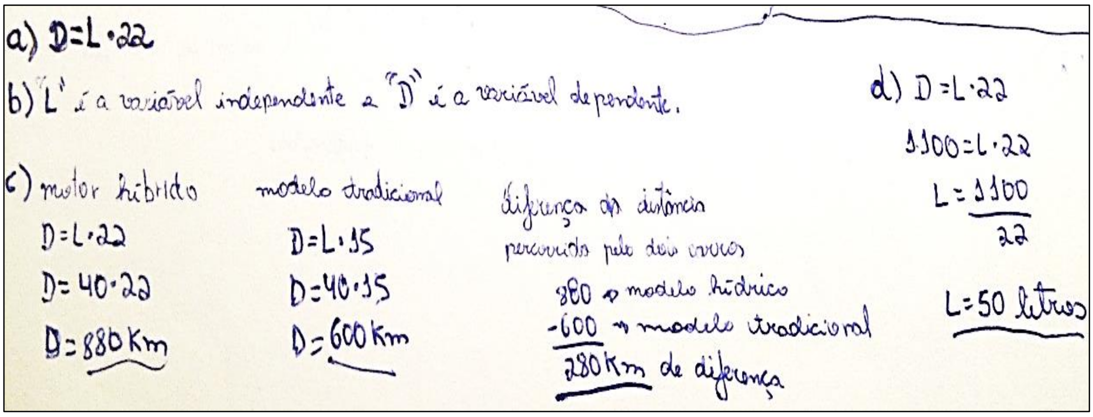
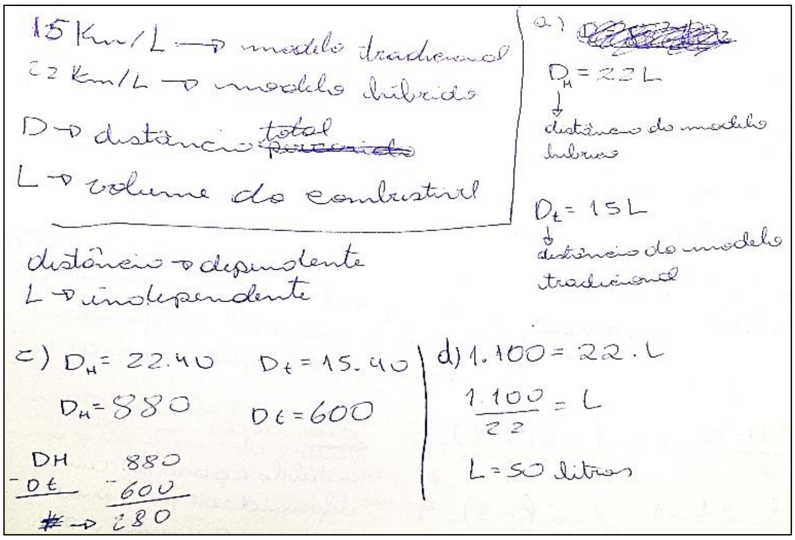
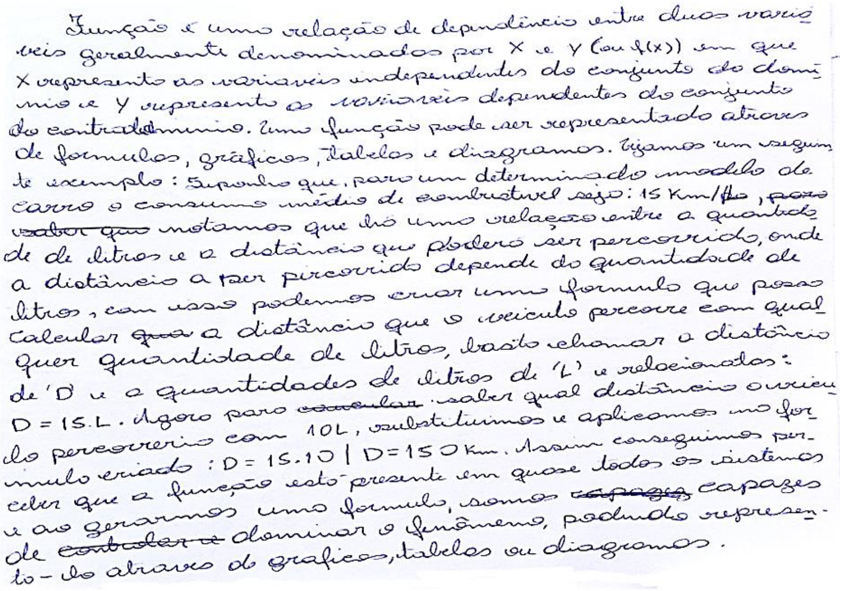



**Figura 56** – Resposta de S1 à questão 1




Os respondentes **P1** (figura 55) e **S1** (figura 56) representam muito bem as atitudes dos demais respondentes quanto à conversão para o registro algébrico e ao tratamento dentro desse registro. Parece-nos que o uso constante da definição apresentada, durante as sequências didáticas, seja para explicar a existência de uma relação funcional entre variáveis, seja para evocar o pensamento funcional durante a resolução dos problemas, facilitou as generalizações por meio de fórmulas. O sucesso das respostas dadas pela maioria dos alunos aponta para uma definição de função que gerenciou a construção das fórmulas e conferiu significados ao contexto enunciado. Esse fato tem como exemplo a definição de função dada por **S1**, observe.

**Figura 57** – Definição de função de S1 apresentada na questão 6



**S1**: Função é uma relação de dependência entre duas variáveis geralmente denominadas por x e y (ou f(x)) em que x representa as variáveis independentes do conjunto do domínio e y representa as variáveis dependentes do conjunto do contradomínio. Uma função pode ser representada através de fórmulas, gráficos, tabelas e diagramas. Vejamos um seguinte exemplo: Supondo que, para um determinado modelo de carro o consumo médio de combustível seja: 15 km/L, notamos que há uma relação entre a quantidade de litros e a distância que poderá ser percorrida, onde a distância a ser percorrida depende da quantidade de litros, com isso podemos criar uma fórmula que possa calcular a distância que o veículo percorre com qualquer quantidade de litros, basta chamar a distância de ‘D’ e a quantidades de litros de ‘L’ e relacioná-las: D=15.L. Agora para saber qual distância o veículo percorreria com 10 L, substituímos e aplicamos na fórmula criada: D=15.10 / D=150 km. Assim conseguimos perceber que a função está presente em quase todos os sistemas e ao gerarmos uma fórmula, somos capazes de dominar o fenômeno, podendo representá-lo através de gráficos, tabelas ou diagramas.

A definição supracitada, resposta de **S1** dada à questão 6, explicita como a coerência da resposta desse aprendiz à questão 1 (figura 56) dependeu de uma definição operacional, quer dizer, uma definição operacional pode ser fundamental para a interpretação do enunciado de um problema sobre funções. **S1** cita como exemplo na questão 6, afim de enriquecer sua definição de função, o contexto da questão 1, fazendo uma espécie de aplicação da sua definição a esse contexto, o que sugere a compatibilidade entre definição conceitual e imagem conceitual. Além disso, **S1** (figura 57) parece ter entendido a noção de fórmula em seu sentido mais amplo, quando afirma: “*conseguimos perceber que a função está presente em quase todos os sistemas e ao gerarmos uma fórmula, somos capazes de dominar o fenômeno”*.

Os principais erros, questões *c* e *d*, foram em relação ao tratamento dentro do registro algébrico, que se resumia à resolução de equações do 1º grau. Embora o tratamento dentro do registro algébrico estivesse presente nas sequências didáticas, o foco das atividades era a construção de uma definição significativa por parte do aluno e o favorecimento de conversões, o que pode ter favorecido esses resultados.

4.10.2 Resultados e discussão da questão 2

*Questão 2*: Um loteamento apresenta seus terrenos todos com mesma característica: formato retangular com comprimento medindo 5 metros a mais que a largura *x* do terreno.

a) Escreva a fórmula que dê a área *y* em função de *x*.

b) Usando a fórmula, qual é a área para *x*=6 metros?

c) Qual deve ser o valor de *x* para que a área seja de 150 m²?

d) Identifique as variáveis dependente e independente.

**Tabela 10** – Questão 2: frequências de acertos e erros

| Item | Acertos | Erros | Acertos (%) | Erros (%) |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 16 | 4 | 80 | 20 |
| **B** | 13 | 7 | 65 | 35 |
| **C** | 9 | 11 | 45 | 55 |
| **D** | 16 | 4 | 80 | 20 |

Tanto esta questão quanto a questão 1 foram escolhidas para comporem este questionário final tendo em vista os resultados da questão 2 do teste de sondagem, no qual os alunos mesmo tendo apreendido o padrão de desenvolvimento da sequência apresentada, não conseguiram, em sua maioria, elaborar uma fórmula que o descrevesse. Para os aprendizes, escrever uma expressão algébrica que modele uma relação funcional, ou seja, transcrever para o registro algébrico a lei de correspondência de uma função, mesmo em contextos simples, não é tarefa fácil, como foi observado no decurso das sequências didáticas.

Em termos de tratamento (e de interpretação), a presente questão, por exigir a resolução de equações de 2º grau, é um pouco mais complexa que a questão 1, que requeria a resolução de equações de 1º grau, por isso há mais erros nesta questão do que na questão anterior, mesmo se tratando de problemas que requeriam procedimentos similares de resolução. A tabela 10 ilustra bem esse fato, apontando que os erros se concentraram nos itens *b* e *c*, exatamente os que exigiam tratamentos algébricos. Já os itens *a* e *d*, que exigiam, respectivamente, a construção de uma fórmula e a classificação das variáveis foram os que mais concentraram respostas corretas. Emparelhando as interpretações de *b/c* e *a/d*, pode-se inferir que mesmo os alunos tendo êxito em fazer a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico e entendendo como se dava a relação de dependência entre as variáveis do problema, não conseguiram, em sua totalidade, empreender com sucesso a atividade cognitiva de tratamento, essa dedução corrobora a seguinte afirmação de Duval (2012, p.272): "A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento". As figuras 58 e 59 ilustram essa independência entre conversão e tratamento.

**Figura 58** – Resposta de R2 à questão 2

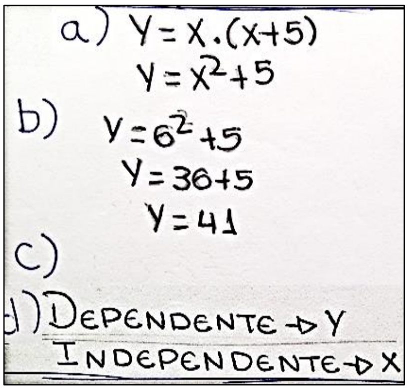
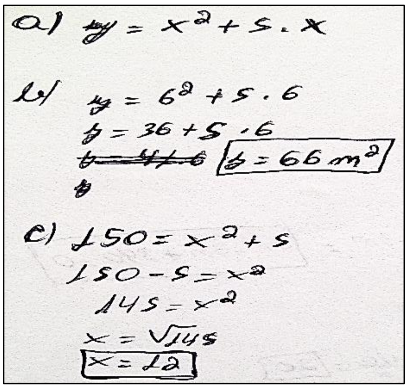
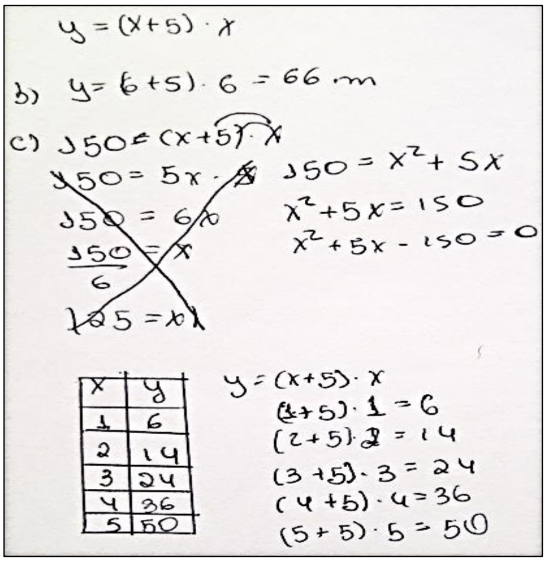



**Figura 59** – Resposta de Q4 à questão 2




Embora o respondente **R2** (figura 58) tenha conseguido construir a fórmula exigida pelo problema e classificado corretamente as variáveis, ele não respondeu corretamente ao item *b*, pois não aplicou a propriedade distributiva no item *a*, em vez de $y = x.(x+5) = x^2 + 5x$, ele obteve o seguinte desenvolvimento $y = x.(x+5) = x^2 + 5$, o que comprometeu a resolução do item *b*. Do mesmo modo, o respondente **Q4** (figura 59) apresentou uma apropriada representação algébrica da situação-problema, mas não conseguiu resolver, no item *c*, a equação do segundo grau, essa foi a principal dificuldade dos respondentes como mostra a tabela 10. No entanto, houve quem, diante da dificuldade de resolver a equação do 2º grau, recorreu à representação tabular para contornar a dificuldade no tratamento algébrico, observe a figura 60.

**Figura 60** – Resposta de T1 à questão 2



Nota-se que **T1** (figura 60) tentou resolver a equação do 2º grau, item *c*, mas não conseguiu, o que o levou a marcar um ‘x’ sobre a questão. Diante dessa dificuldade, **T1** tentou utilizar a representação tabular, desenvolvendo 5 iterações, mas infelizmente parou, provavelmente por entender as limitações da representação tabular; eram necessárias 10 iterações para ele chegar à resposta correta. A atitude de **T1** indica que o recurso à pluralidade de representações pode propiciar benefícios para o processo de ensino e aprendizagem de um conceito matemático, neste caso, a tentativa do respondente de recorrer a outro registro de representação se justifica pelo que Duval (2012) chama de complementaridade dos registros.

4.10.3 Resultados e discussão da questão 3

*Questão 3*: Com base nas informações da tabela a seguir, responda:

| **x** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |

a) Qual é a fórmula que associa a cada elemento *x* da primeira linha um elemento *y* da segunda linha?

b) Calcule, usando a fórmula, o valor de *y* para *x*=1000.

c) Podemos dizer que entre os elementos da primeira e segunda linhas há uma relação funcional? Justifique.

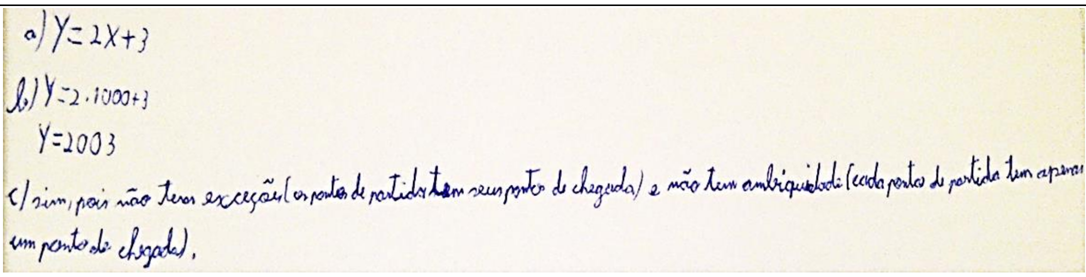
**Tabela 11** – Questão 3: frequências de acertos e erros

| Item | Acertos | Erros | Acertos (%) | Erros (%) |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 13 | 7 | 65 | 35 |
| **B** | 13 | 7 | 65 | 35 |
| **C** | 15 | 5 | 75 | 25 |

A questão 5 do teste de sondagem e a presente questão têm praticamente os mesmos objetivos: proporcionar dados acerca da conversão da representação tabular para a representação algébrica por parte dos aprendizes, o que nos remete, novamente, à dificuldade de generalizar dados por meio de fórmulas. A questão 5 do teste de sondagem computou o pior resultado do referido teste, 85% dos participantes responderam errado à questão, embora seja privilegiada a atual situação, pelo fato de os alunos terem participado de sequências didáticas que abordavam o tema função sobre vários aspectos, os erros ainda persistiram, mesmo que diminutos. Essa persistência, ou pausada e gradativa capacidade de conversão de registros, deve ser considerada algo comum dentro de um referencial de aprendizagem significativa, pois, como afirma Moreira (2012, p.53), “a avaliação da aprendizagem significativa deve ser predominantemente formativa e recursiva. É necessário buscar evidências de aprendizagem significativa, ao invés de querer determinar se ocorreu ou não”. Na mesma linha, Duval (2012) afirma que a atividade cognitiva de conversão supõe uma abordagem desenvolvimentista dentro de um contexto em que o recurso a pluralidade de registros é fundamental.

O principal erro cometido por aqueles que tentaram resolver esta questão foi transcrever de forma incorreta a situação para o registro algébrico. Como ocorreu nas questões 1 e 2. Os demais resolveram corretamente o problema, mostrando um uso consciente da definição enunciada para explicar porque havia na questão uma relação funcional. Veja algumas respostas.

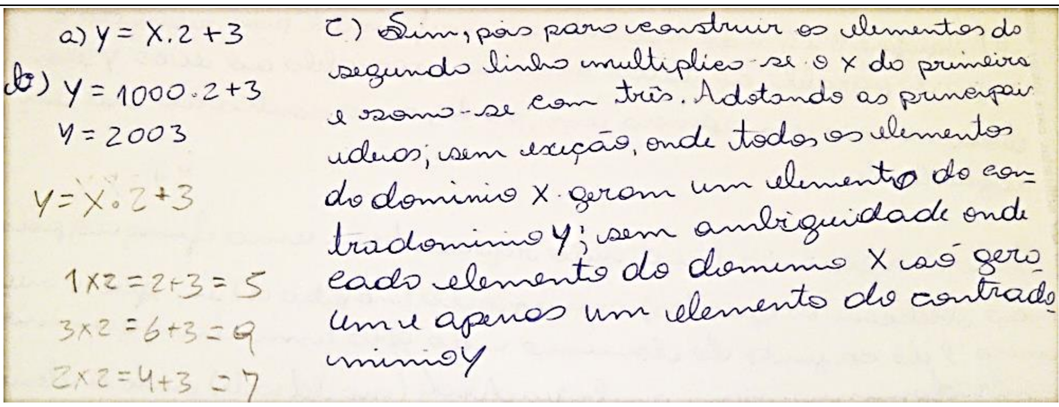
**Figura 61** – Resposta de Q1 à questão 3



a) Y=2X+3
b) Y=2.1000+3
Y=2003
c) sim, pois não tem exceção (os pontos de partida tem seus pontos de chegada) e não tem ambiguidade (cada ponto de partida tem apenas um ponto de chegada).

**Q1**: sim, pois não tem exceções (os pontos de partida tem seus pontos de chegada) e não tem ambiguidade (cada ponto de partida tem apenas um ponto de chegada).

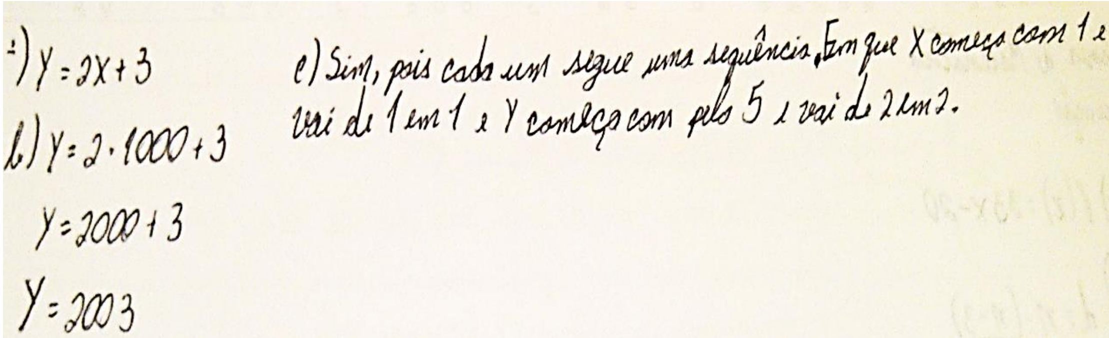
**Figura 62** – Resposta de S1 à questão 3



a) y = X.2+3
b) y = 1000.2+3
y = 2003
y = X.2+3
1x2 = 2+3 = 5
3x2 = 6+3 = 9
2x2 = 4+3 = 7
c) Sim, pois para construir os elementos da segunda linha multiplica-se o x da primeira e soma-se com três. Adotando as principais ideias; sem exção, onde todos os elementos do dominio X geram um elemento do contradominio Y; sem ambiguidade onde cada elemento do dominio X só gera um e apenas um elemento do contradominio Y

**S1**: Sim, pois para construir os elementos da segunda linha multiplica-se o x da primeira e soma-se com três. Adotando as principais ideias; sem exceção, onde todos os elementos do domínio X geram um elemento do contradomínio Y; sem ambiguidade onde cada elemento do domínio X só gera um e apenas um elemento do contradomínio Y.

**Figura 63** – Resposta de P4 à questão 3



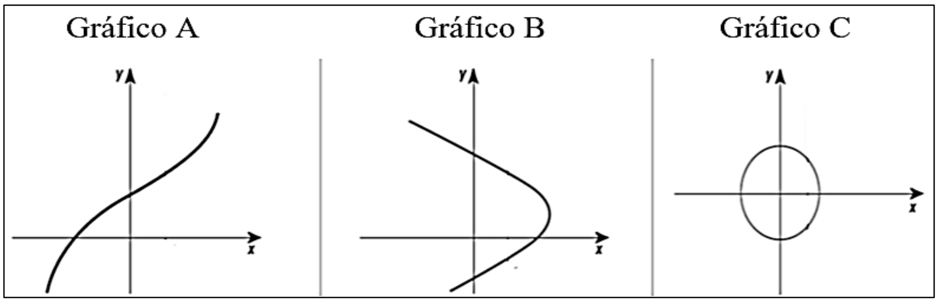

**P4**: Sim, pois cada um segue uma sequência. Em que X começa com 1 e vai de 1 em 1 e Y começa com pelo 5 e vai de 2 em 2.

**Q1** (figura 61) e **S1** (figura 62), assim como a maioria dos respondentes, utilizaram a definição de função que foi discutida e trabalhada durante as sequências didáticas, para explicar porque os dados da tabela representavam o conceito de função. Eles recorreram, especificamente, às duas condições - sem exceção e sem ambiguidades - necessárias para que uma lei de correspondência seja unívoca, ou seja, represente, de fato, uma relação funcional. Em sua justificativa, **P4** (figura 63) baseou-se no padrão de variação dos números da primeira e segunda linhas. **P4** entendeu, pelo menos de forma prática, que uma função afim transforma uma progressão aritmética em outra, estabelecendo, portanto, uma generalização.

As respostas de **P4** e **T1** (figura 60, questão 2) são exemplos de como o enriquecimento da imagem conceitual, seja utilizando o conceito dentro de múltiplos contextos, seja recorrendo a uma pluralidade de representações, pode equipar o aluno com diversas ideias que o torna capaz de procurar outras maneiras de resolver um problema. A apreensão destas ideias (variação, dependência, regularidade, generalização etc.) subsidiam a aprendizagem da definição formal do conceito de função, e esta, por sua vez, serve para conectar tais ideias num todo coerente, por isso deve haver uma relação dialética entre imagem conceitual e definição conceitual. **P4** percebeu como a sequência estava variando e, por meio dessa percepção, foi capaz de justificar porque aquela relação era funcional, enquanto **T1**, sem lembrar-se de como se resolvia uma equação do segundo grau, construiu uma tabela na tentativa de resolver a questão.

4.10.4 Resultados e discussão da questão 4

*Questão 4*: Dos gráficos abaixo, qual(is) não representa(m) uma função? Justifique sua resposta.




Nesta questão, todos os participantes conseguiram identificar quais gráficos não representam uma função. A justificativa baseou-se principalmente na definição enunciada. Houve quem utilizou a regra da paralela juntamente com a definição. Confira algumas justificativas.

**Figura 64** – Justificativa de T2 **Figura 65 –** Justificativa de S2 referente à B e C não serem gráficos de funções

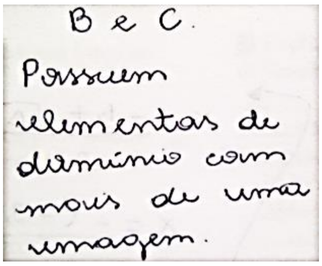
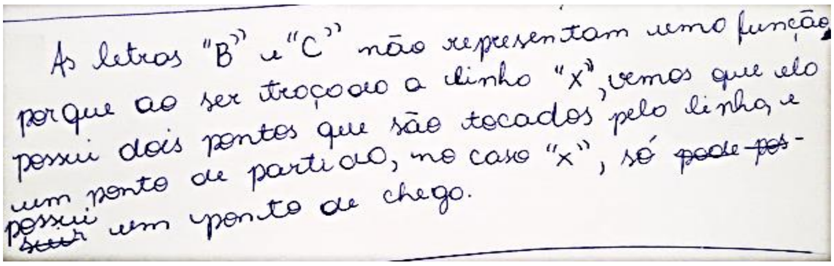
|  |  |
|---|---|
| **T2**: B e C possuem elementos de domínio com mais de uma imagem. | **S2**: As letras “B” e “C” não representam uma função, porque ao ser traçada a linha “x”, vemos que ela possui dois pontos que são tocados pela linha, e um ponto de partida, no caso “x”, só possui um ponto de chegada. |

**Figura 66** – Justificativa de Q1 referente à B e C não serem gráficos de funções

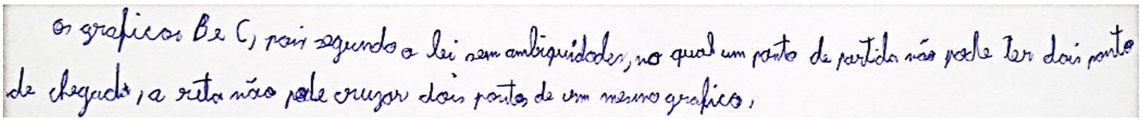
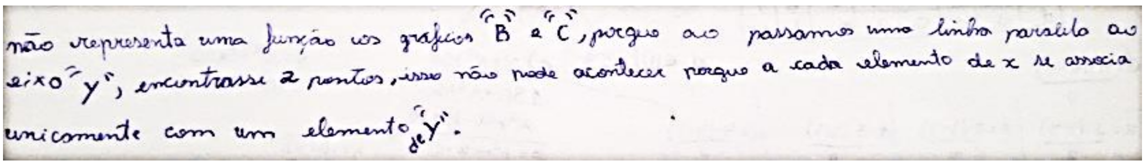
|  |
|---|
| **Q1**: os gráficos B e C, pois segundo a lei sem ambiguidades, no qual um ponto de partida não pode ter dois pontos de chegada, a reta não pode cruzar dois pontos de um mesmo gráfico. |

**Figura 67** – Justificativa de P1 referente à B e C não serem gráficos de funções

|  |
|---|
| **P1**: não representa uma função os gráficos “B” e “C”, porque ao passamos uma linha paralela ao eixo “y”, encontrasse 2 pontos, isso não pode acontecer porque a cada elemento x se associa unicamente com um elemento de “y”. |

Tanto esta questão quanto a próxima centram-se na atividade cognitiva de formação. Essa atividade é fundamental, assim como o tratamento e a conversão, para caracterizar um sistema semiótico como um registro de representação. A formação deve respeitar regras de conformidade que, neste caso, são *sem exceção* e *sem ambiguidades*. Segundo Duval (2012), as regras de conformidade têm a função de assegurar o reconhecimento das representações semióticas e a possibilidade de tratamentos. As respostas de **T2**, **S2**, **Q1** e **P1**, que sintetizam as respostas dos demais aprendizes, mostram como os participantes se apropriaram de forma significativa das duas regras de conformidade e as utilizaram com clareza para fazer as identificações. Como as regras de conformidade possibilitam o tratamento, a análise dos resultados das questões 1, 2 e 3 sugere que as atividades de tratamento efetuadas naquelas questões foram melhoradas devido à compreensão unânime das duas condições que a lei de correspondência tem de satisfazer para representar uma relação funcional. E no caso desta questão e da próxima, o entendimento dessas regras auxiliou na conversão, e isso pode ser observado pela forma lúcida com que os aprendizes utilizaram as regras para justificar porque os gráficos ou diagramas representavam ou não o conceito de função. É bom salientar, portanto, que essas duas condições (regras de conformidade) são o cerne da definição que foi trabalhada durante todas as sequências didáticas, isso quer dizer que os aprendizes se basearam na definição enunciada para fazer identificações, tratamentos e conversões, ou seja, os alunos operacionalizaram a definição de função.

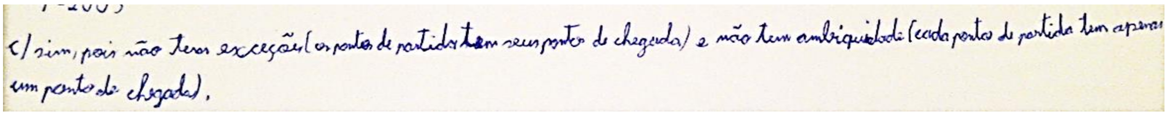
Embora a regra da paralela se encaixe no *acréscimo de terminologias novas*, fator que consideramos favorecer o isolamento das representações, seu uso, nesta questão, foi consciente, no sentido de o aluno saber o porquê de tal macete, ou seja, saber justificá-lo, baseando-se na definição que enunciou. **Q1** (figura 66) exemplifica esse fato, quando justifica quais gráficos não representam uma função: *"os gráficos B e C, pois segundo a lei sem ambiguidades, no qual um ponto de partida não pode ter dois pontos de chegada, a reta não pode cruzar dois pontos de um mesmo gráfico"*.

O acréscimo de terminologias novas é prejudicial para a apreensão de um conceito matemático quando não favorece a relação entre as representações semióticas, o aluno pode memorizá-las e empreender corretamente as identificações, mas isso não o auxiliará na compreensão do conceito, pois "se essa terminologia não constitui uma ferramenta prática para lidar com situações interessantes – exteriores ou interiores à Matemática – ela constitui um vocabulário que meramente se memoriza sem se compreender nem valorizar" (PONTE, 1990, p.6). Sendo assim, também podemos supor que **Q1** e todos os demais alunos, que responderam corretamente a esta e à próxima questão, simplesmente memorizaram as duas condições como se fossem terminologias novas, o que recairia no problema da *memorização da definição*, analisado por Saraiva e Teixeira (2009).

É bem possível que a memorização esteja presente, mas ela mesma não pode ser descartada durante a análise de um processo de aprendizagem significativa, pois, como salienta Moreira (2009a), a aprendizagem mecânica e a significativa não são pontuais, ou é ou não é, elas estão em extremos opostos de um mesmo contínuo, onde há casos intermediários, e uma aprendizagem mecânica pode desenvolver-se, gradativamente, em significativa.

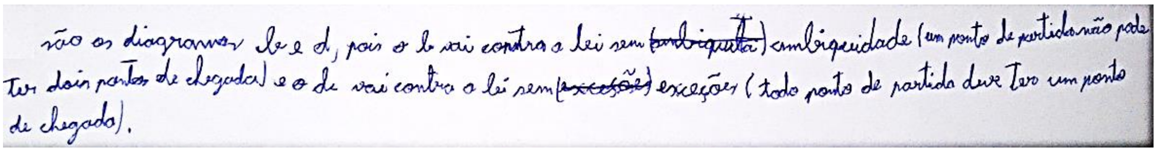
O problema da memorização baseia-se numa contradição entre definição conceitual e imagem conceitual, por exemplo, o aluno define função corretamente, mas não sabe identificar o gráfico de uma função, o que não foi o caso. Os respondentes não demonstram uma incompatibilidade entre o que enunciaram e o que fizeram. Vejamos outras respostas de **Q1**.

**Figura 68** – Explicação de Q1 para porque há uma relação funcional entre os conjuntos X e Y da questão 3


Q1/ sim, pois não tem exceção (os pontos de partida tem seus ponto de chegada) e não tem ambiguidade (cada ponto de partida tem apenas um ponto de chegada).

**Q1**: sim, pois não tem exceções (os pontos de partida tem seus pontos de chegada) e não tem ambiguidade (cada ponto de partida tem apenas um ponto de chegada).

**Figura 69** – Explicação de Q1 para porque os diagramas b e d da questão 5 não representam uma relação funcional

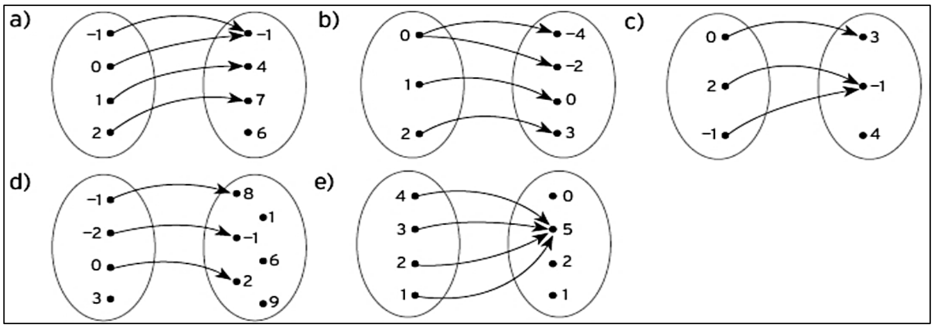

não os diagramas b e d, pois o b vai contra a lei sem ~~ambiguidade~~ ambiguidade (um ponto de partida não pode ter dois pontos de chegada) e o d vai contra a lei sem ~~exceções~~ exceções (todo ponto de partida deve ter um ponto de chegada).

**Q1:** não os diagramas b e d, pois o b vai contra a lei sem ambiguidade (um ponto de partida não pode ter pode ter dois pontos de chegada) e o d vai contra a lei sem exceções (todo ponto de partida deve ter um ponto de chegada).

As respostas de **Q1** (figuras 66, 68 e 69) indicam que o mesmo soube adaptar sua definição para cada contexto enunciado, o que nos leva a acreditar que as novas informações, discutidas durante as sequências didáticas, não foram armazenadas na memória desse aprendiz de maneira literal e arbitrária, o que enfraquece a hipótese de simples memorização. Tais respostas sugerem evidências de aprendizagem significativa do conceito de função, dado que esse respondente, que representa bem os demais, mostra, por meio de suas produções, ter adquirido, de certo modo, significados claros, precisos e transferíveis.

### 4.10.5 Resultados e discussão da questão 5

*Questão 5*: Identifique quais dos diagramas, a seguir, não representam uma função. Justifique sua resposta.




Assim como na questão anterior, todos os participantes conseguiram identificar quais diagramas não representavam o conceito de função, apoiando-se, exclusivamente, na definição enunciada. Nota-se, como mencionamos na questão anterior, um uso consciente da definição adotada durante as sequências didáticas. Veja algumas respostas.

**Figura 70** – Explicação de T3 para porque os diagramas b e d não representam uma relação funcional

- B e d não representam função pois ~~(razão)~~ possuem ambiguidade e excessão respectivamente

**T3**: B e d não representam função pois possuem ambiguidade e exceção respectivamente.

**Figura 71** – Explicação de T1 para porque os diagramas b e d não representam uma relação funcional

As alternativas b e d não representam função. Na alternativa b está errada pois a flecha parte do 0 para o -4 e o -2, o que não pode acontecer já que um dos conceitos pede "sem ambiguidades". Na d acontece a falta de uma chegada para 3, deixando-a em excessão.

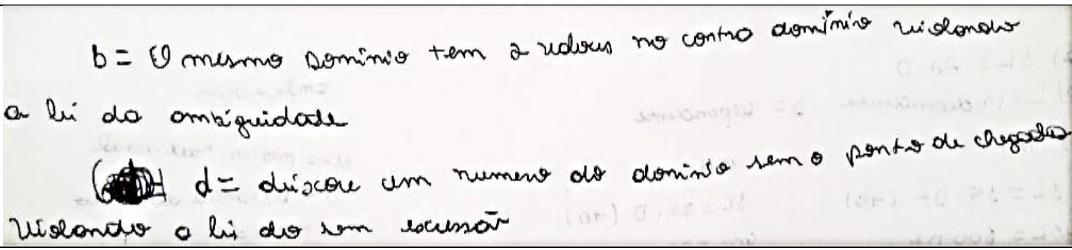
**T1:** As alternativas b e d não representam função. Na alternativa b está errada pois a flecha parte do 0 para o –4 e o –2, o que não pode acontecer já que um dos conceitos pede “sem ambiguidades”. Na d acontece a falta de uma chegada para 3, deixando-a em exceção.

**Figura 72** – Explicação de S3 para porque os diagramas b e d não representam uma relação funcional

R= "b" e "d"
b, pois um ponto de partida pode ter apenas um ponto de chegada, não havendo ambiguidade, e o "0" tem dois pontos de chegada.
d, pois não pode deixar faltar nenhum elemento do conjunto domínio, não pode haver exceções.

**S3**: R = “b” e “d”: b, pois um ponto de partida pode ter apenas um ponto de chegada, não havendo ambiguidade, e o “0” tem dois de chegada; d, pois não pode deixar faltar nenhum elemento do conjunto domínio, não pode haver exceções.

**Figura 73** – Explicação de P3 para porque os diagramas b e d não representam uma relação funcional



**P3**: b = O mesmo domínio tem 2 valores no contradomínio violando a lei da ambiguidade; d = deixou um número do domínio sem o ponto de chegada violando a lei do sem exceção.

Observa-se que a definição, que foi apresentada na aula-organizador prévio e cuja operacionalização foi constantemente exemplificada durante as atividades, foi adaptada com sucesso para o contexto dos diagramas (figuras 70, 71, 72 e 73). As respostas supracitadas retratam com certo primor as respostas dos demais aprendizes, que também se basearam na definição que enunciaram para fazer suas justificativas. A representação por diagramas constitui-se numa tentativa de introduzir função como relação binária. Embora essa interpretação seja a mais geral e formal, é a mais estática. Os alunos deixaram bem claro nas respostas dadas à questão 1 do teste de sondagem, foram unânimes, que se apropriaram da referida interpretação de função, mas isso não os auxiliaram em nada nas demais questões do mesmo teste. Então, por que insistir aqui em definir função como relação binária?

É oportuno lembrar que no teste de sondagem os alunos apenas memorizaram a definição de função como relação binária, não atribuindo, assim, nenhum significado para a mesma. Como todos tinham memorizado essa interpretação de função, alguns de forma deficitária, o pesquisador optou por utilizá-la como subsunçor para o conceito de função, ou como um protótipo para uma definição mais operacional, daí, para o aperfeiçoamento desse protótipo, entrou em cena a manipulação de uma variável de comando já discutida: *introduzir o conceito de função como uma relação entre quantidades variáveis para, posteriormente, defini-lo como relação entre conjuntos*. No início da aula-organizador prévio, o conceito de função foi apresentado como uma relação entre conjuntos, e durante a mesma, o conceito de função foi discutido por meio do trabalho com sequências e proporcionalidade, levando-se em conta a noção de variação, i.e., a ideia de duas grandezas que variam uma dependendo da outra. Ao longo de todas as sequências didáticas usava-se a ideia de variação, e concluía-se explicando as relações funcionais em termos de relação entre conjuntos, diálogo este que ofereceu a possibilidade da aquisição de significados.

Assim, conforme discutíamos o conceito de função, seja na aula-organizador prévio, seja durante a realização das atividades, a imagem conceitual dos alunos era pouco a pouco enriquecida, a ponto de ser capaz de sustentar a definição formal apresentada, o que possibilitou o uso efetivo dessa definição. Percebe-se, ao fazermos um paralelo entre o teste de sondagem e este questionário, que o protótipo de definição apresentado na questão 1 daquele teste é muito diferente da definição presente neste questionário final, mesmo se tratando da mesma interpretação de função, pois no teste de sondagem a definição foi apresentada como uma mera formalidade, enquanto aqui ela foi utilizada com eficácia para explicações, tratamentos e conversões.

4.10.6 Resultados e discussão da questão 6

*Questão 6*: Explique com suas palavras o significado do conceito matemático de função.

Como vem sendo discutido neste trabalho, a concepção de função como relação binária, a mais utilizada no ensino de funções, não contribui muito para que o aprendiz compreenda e saiba usar a ideia de que funções indicam variação, ou seja, a ideia de uma relação de dependência entre duas grandezas em que a variação de uma implica a variação da outra. No entanto, as respostas dadas à questão 1 do teste de sondagem demonstraram a unanimidade da interpretação de função como relação binária por parte dos alunos. Assim, um desafio impôs-se: se devemos utilizar aquilo que o aluno já sabe, uma das variáveis de comando levantadas, como base para novos conhecimentos, então como fomentar a aprendizagem significativa do conceito de função, sendo que o que os alunos já sabem é uma interpretação estática de função?

A ideia para superar esse obstáculo foi a de inserir o subsunçor supramencionado dentro de um contexto pautado num diálogo entre as duas interpretações de função: como relação binária e como relação entre quantidades variáveis. Durante as atividades falava-se em termos de variação, nas discussões sobre as respostas dadas às perguntas apresentadas no início de cada SD, falava-se em relações binárias. Além disso, o conceito de função foi trabalhado por meio de atividades práticas dentro de três contextos diferentes, o que enriqueceu mais ainda as ideias de variação, dependência, correspondência etc. A interação entre o contexto construído e aquele subsunçor modificou este último, ampliando a sua teia de significados e o seu alcance. Observe algumas respostas.

**Figura 74** – Definição de função enunciada por S3

**S3**: Função= Relação entre dois conjuntos não vazios, que apresentam três ingredientes principais: domínio, contra-domínio e a imagem, podendo ser representados em formas de tabelas, fórmulas e gráficos e diagramas de flechas, na função é usado duas principais regras (leis): sem exceção $\Rightarrow$ no conjunto A (domínio) não pode deixar faltar nenhum elemento. Sem ambiguidades $\Rightarrow$ um ponto de partida só tem um ponto de chegada mas, um ponto de chagada pode ter pode ter mais de um ponto de partida.

**Figura 75** – Definição de função enunciada por R3

**R3**: Função é uma relação entre dois conjuntos formado por três ingredientes que são um ponto de partida chamado domínio e um ponto de chegada chamado contradomínio e uma regra, a lei de correspondência (o domínio tem que estar relacionados), que segue duas normas que são:

- todo domínio tem que estar relacionado com o contradomínio, estar em um mesmo conjunto;
- todo domínio deve estar relacionado a um único contradomínio.

Podendo ser representado em gráficos, diagramas, tabelas etc.

**Figura 76** – Definição de função enunciada por R4

**R4**: Função é a relação entre dois conjuntos, em que um deles depende do valor do outro, e se um deles for modificado, o outro também será. Os dois conjuntos recebem o nome de domínio e contradomínio, que também são referidos como ponto de partida e ponto de chegada, um sendo dependente e outro independente.

As definições dadas por **S3**, **R3** e **R4** representam muito bem a interpretação de função como relação entre conjuntos, como relação binária. **S3** e **R3** definiram função quase que de forma integral em relação à definição apresentada na aula-organizador prévio, inclusive descrevendo as duas condições que a lei de correspondência deve satisfazer para representar uma função. **R4** (figura 76) também usa a mesma interpretação de **S3** e **R3**, mas acrescenta uma informação mais dinâmica a sua definição: *"se um deles for modificado, o outro também será"*, fazendo uma espécie de mistura entre função como dependência entre conjuntos e função como instrumento de estudo de variações. Como assinalamos, na questão 1 do teste de sondagem a concepção de função como relação binária foi unânime, mas deficitária, sem detalhes ou informações claras que orientasse o aluno na aplicação do conceito de função, aqui, por conseguinte, as definições parecem mais claras, coerentes e detalhadas. Observe, por exemplo, como **R3** definira função no teste de sondagem.

**Figura 77** – Definição de função enunciada por R3 no teste de sondagem

| |
|---|
| relaçaõ entre algo dependente e independente |
| **R3**: relação entre algo dependente e independente. |

Além daqueles que definiram função como relação binária, também houve aqueles que definiram função dentro de um contexto mais prático, no qual a ideia de variação foi central. Não devemos esquecer das combinações, como a feita por **R4**. Veja os exemplos a seguir.

| **Figura 78** – Definição enunciada por S4 | **Figura 79** – Definição enunciada por T4 |
|---|---|
| Funçaõ é a relaçaõ entre elementos de diferentes conjuntos (dominio e contradominio) e o resultado dessa relaçaõ é a imagem. Um exemplo de funçaõ é quando você vai andar de taxi, você paga um preço fixo e o outro depende do quanto você andar, o total a pagar (dependente) sera resultado da quantidade de quilômetros (independente) vezes um valor mais o valor fixo. | Função a relação existente entre duas grandezas, ~~[illegible]~~ que podem ser classificadas em variáveis dependente e independente. As funções podem ser representadas por meio de gráficos, tabelas e diagramas. Ex: Quando vamos a um supermercado, o valor total da conta dependerá da quantidade de produtos e unidades diferentes que a pessoa comprar. Nesse caso, a variável dependente será o valor total da conta, pois ele depende do número de produtos comprados, que é a variável independente. |
| **S4**: Função é a relação entre elementos de diferentes conjuntos (domínio e contradomínio) e o resultado dessa relação é a imagem. Um exemplo de função é quando você vai andar de taxi, você paga um preço fixo e o outro depende do quanto você andar, o total a pagar (dependente) será resultado da quantidade de quilômetros (independente) vezes um valor mais o valor fixo. | **T4**: Função a relação existente entre duas grandezas, que podem ser classificadas em variáveis dependente e independente. As funções podem ser representadas por meio de gráficos, tabelas e diagramas. Ex: Quando vamos a um supermercado, o valor total da conta dependerá da quantidade de produtos e unidades diferentes que a pessoa comprar. Nesse caso, a variável dependente será o preço total da conta, pois ele depende do número de produtos comprados, que é a variável independente. |

**S4** (figura 78) recorre à ideia de dependência entre duas quantidades variáveis, assim como **T4** (figura 79). O primeiro usa a relação preço da corrida x quantidade de quilômetros rodados para exemplificar sua definição, enquanto, o segundo, usa a relação preço da compra x quantidade comprada. Os demais alunos que optaram por essa interpretação, endossaram suas definições por meio da explicação dos contextos trabalhados nas sequências didáticas.

De resto, pode-se inferir que a aplicação das sequências didáticas, concebidas e aplicadas considerando-se as varáveis de comando *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, favoreceu o desenvolvimento da imagem conceitual dos aprendizes, o que lhes possibilitou a apreensão da definição formal do conceito de função, e esta assimilação, por sua vez, tornou a estrutura cognitiva do conceito de função um todo coerente, o que refletiu em definições pessoais mais compatíveis com as formais e mais capazes de auxiliar os alunos no trabalho com o referido conceito. As repostas supramencionadas apontam para a seguinte situação: há uma convergência, de certo modo, da interpretação de função como relação entre conjuntos para a interpretação de função como quantidades variáveis. Os múltiplos contextos em que o conceito de função foi trabalhado, a exemplificação constante, por parte do pesquisador, da definição apresentada, bem como o trabalho com as duas interpretações de função forneceu aos alunos recursos cognitivos para que eles assumissem uma postura ativa na construção dos seus próprios conhecimentos funcionais, enunciando definições pessoais criativas e condizentes com as formais, mas, acima de tudo, como apontam os resultados das questões anteriores, operacionais.

#### 4.10.7 Resultados e discussão da questão 7

*Questão 7*: As atividades realizadas ajudaram você a compreender melhor o conceito de função? Caso afirmativo, justifique.

Os pontos de vista dos participantes, ou seja, a forma com que os respondentes encararam as sequências didáticas, possibilitaram o esclarecimento de alguns pontos, reforçando alguns argumentos já discutidos neste trabalho e lançando luz sobre situações geralmente inacessíveis ao pesquisador.

Houve certa convergência das respostas dadas à questão 7. Dois aspectos foram muito comuns nas respostas dos participantes: 1) *o caráter dinâmico das atividades*: que os respondentes chamaram de atividades práticas, lúdicas, baseadas em problemas do dia a dia, ou da vida real, ou seja, atividades que propunham discutir o conceito de função recorrendo a problemas concretos, com referência na realidade; 2) *o caráter interativo das atividades*: que se refere à possibilidade de intercâmbio de informações entre os alunos de um mesmo grupo ou de grupos diferentes, ou seja, refere-se à questão do trabalho em grupo.

Observe cinco respostas[16] que exemplificam os dois aspectos sobreditos.

**P3**: *Sim, pois nelas foram ressaltados de forma* ***dinâmica e interativa*** *os principais pontos da função, nas atividades foi possível a compreensão das relações entre as variáveis de uma determinada função, é importante ressaltar também os conceitos de domínio e contradomínio e como conseguimos mostrar as regras de sem ambiguidade e sem exceções por meio das*

[16] As respostas foram transcritas quase que de forma integral, foram feitas apenas algumas correções ortográficas, e foram mantidas as concordâncias, as pontuações etc., não comprometendo, portanto, as construções originais.

*tabelas e gráficos. [...] A função foi compreendida e aprendida em sua parte literal e aprofundada com um recurso utilitário,* ***o mapa conceitual****, que dividiu conhecimentos, acertos e erros. Com a confecção de gráficos e tabelas, os erros foram sendo observados e entendidos. A prática das atividades foi essencial para a distinção dos tipos de função que foram aprendidas e para que aprendêssemos o conceito, de certa forma também nos trouxe a ideia de por que que* ***o trabalho em grupo e a responsabilidade são fatores de grande importância****.*

**R1**: *Sim. Pois por meio de cada experimento, pudemos ver a natureza de cada função, como se comportam e como acontecem. [...] Em cada experimento vimos como é uma função, e que há diversos tipos. Ao construirmos uma tabela estávamos estabelecendo a ligação de função, aprendida em sala. E a partir dessa tabela construímos o gráfico, que será responsável por mostrar o comportamento desta função, que será responsável pela nomenclatura que será dada a ela. De forma geral, não só aprendi, como vi como é uma função, seus comportamentos e alguns de seus tipos. Também construímos fórmulas, que fizeram com que víssemos a relação entre as variáveis. O experimento também fez com que saíssemos daquelas "mesmices", nos apresentando algo novo e diferente aos nossos olhos, trazendo algo* ***dinâmico e interativo****.*

**T4**: *Sim. Muitas vezes é difícil aprendermos algum conceito ou significado e lembrar sempre dele, por isso fazemos atividades, com o objetivo de exercitar os nossos conhecimentos e fixá-los em nossa mente. Por isso as atividades realizadas foram de extrema importância, pois com elas foi possível tirar dúvidas e ao mesmo tempo aprimorar nossos conhecimentos sobre função, que* ***por não possuir um só conceito****, torna seu entendimento mais difícil. As atividades também foram de extrema importância para que a turma compreendesse o tema abordado de uma maneira mais* ***descontraída e lúdica****,* ***aumentando o interesse por parte significativa dos alunos sobre o assunto****.*

**T3**: *Sim, pois graças aos exercícios realizados em sala conseguimos* ***ver na prática*** *os conceitos de função como sem ambiguidade e sem exceção, também conseguimos trabalhar com* ***exemplos da vida real*** *sem ser exemplos perfeitos presentes no livro e com atividades em grupo também* ***acabamos prestando mais atenção*** *nas coisas, saindo daquele mesmo ambiente de sala de aula, com as atividades práticas também podemos* ***compartilhar e trocar informações com os amigos****.*

**R4**: *Sim. Pois essas atividades mostraram a função para nós de uma* ***forma lúdica****, saindo dos conceitos e cálculos do livro, que para muitos são uma grande dificuldade, mostrando-nos* ***na prática*** *como função é e nos fazendo pensar em como ela pode ser* ***útil em nosso dia a dia****, tornando mais fácil a sua compreensão, visto que, fazendo esses experimentos, tornou-se*

> *melhor a visualização de como a função funciona, e até mesmo* ***nos fez ver a função com outros olhos****, deixando para trás aquela ideia de que a função é apenas um cálculo, e entendendo a presença dela no mundo e em nossos dias.*

As cinco respostas referenciadas explicitam, de certa maneira, a influência da variável *apresentar o conceito de função dentro de múltiplos contextos*. Considerando esta variável, apresentou-se o conceito de função dentro de três contextos interessantes, concretos, em que toda a terminologia relativamente ao conceito de função foi apresentada como ferramenta prática para a resolução de problemas sobre variação. A referida variável obedeceu à seguinte colocação de Ponte (1990, p.8): "a forma mais natural de construir este conceito [função] é fazer apelo à sua relevância em função de necessidades práticas e relacioná-lo com muitas outras ideias matemáticas". Além disso, na terceira aula dupla de cada sequência didática, as repostas eram discutidas e o conteúdo era formalizado, sendo que no decurso das atividades era permitida e incentivada a troca de informações entre os participantes. Tudo isso para motivar uma atitude positiva diante das atividades, ou seja, para fomentar uma disposição para aprender significativamente o conceito de função. Segundo Ausubel et al. (1980):

> Durante a aprendizagem de recepção significativa, as variáveis motivacionais e de atitudes podem energizar todos ou determinados aspectos do campo de aprendizagem. Elas incidem de modo catalítico e inespecífico sobre o processo de interação cognitiva, resultando na emergência de significados por aumentar o esforço, a atenção e a prontidão imediata (p.338-339).

Observa-se que os respondentes **P3** e **R1** se referem às atividades como *dinâmicas e interativas*. **T4** diz que o tema funções foi abordado de uma maneira *"mais descontraída e lúdica, aumentando o interesse por parte significativa dos alunos sobre o assunto"*. Já **T3** afirma: "*conseguimos trabalhar com exemplos da vida real sem ser exemplos perfeitos presentes no livro e com atividades em grupo também acabamos prestando mais atenção nas coisas".* **R4** declara: *"essas atividades mostraram a função para nós de uma forma lúdica"*, e conclui dizendo que: *"até mesmo nos fez ver a função com outros olhos, deixando para trás aquela ideia de que a função é apenas um cálculo, e entendendo a presença dela no mundo e em nossos dias*". Acreditamos, baseando-nos não só nas respostas mesmas, mas também nas observações, que as declarações dos respondentes revelam que eles tiveram uma atitude positiva ante as atividades, no sentido de querer relacionar de maneira não arbitrária e não literal as novas informações com seus conhecimentos prévios, dado o interesse dos mesmos em querer participar das atividades consideradas por eles como dinâmicas e interativas. Ou seja, há indícios de que a segunda condição para a ocorrência da aprendizagem significativa, ter disposição para aprender significativamente o conceito, foi satisfeita.

Houve ainda a questão do intercâmbio de significados, que favoreceu ainda mais a disposição para aprender significativamente o conceito de função. **T3** ilustra bem o aspecto interativo das atividades quando afirma: "*com as atividades práticas também podemos compartilhar e trocar informações com os amigos"*. **P3** faz a seguinte declaração sobre as atividades: *"de certa forma também nos trouxe a ideia de por que que o trabalho em grupo e a responsabilidade são fatores de grande importância"*. Já **T4** fala sobre a complexidade do conceito de função que *"por não possuir um só conceito, torna seu entendimento mais difícil"*, ou seja, o conceito de função tem vários outros conceitos girando em torno dele, o que dificulta sua aprendizagem. Logo, as interações entre os participantes foram fundamentais devido à complexidade do conceito em jogo, pois como afirmam Ausubel et al. (1980, p.385):

> A instrução individualizada é muito mais eficaz do que a instrução coletiva, a não ser no caso das situações de aprendizagem em que o material é mais controvertido e os alunos necessitam de fecundação cruzada e exposição a outros pontos de vista.

As quatro declarações a seguir discorrem sobre alguns dos impactos das sequências didáticas, do ponto de vista dos participantes.

> **R3**: *Sim, o conceito de função é bem amplo e complicado sendo difícil de compreender de primeira vista, com os experimentos **vimos o conceito a partir de assuntos já abordados**, o que facilitou a aprendizagem, além de ser uma **atividade lúdica e interativa**.*

> **S4**: *Sim, pois através desses experimentos eu pude notar que todas as coisas têm um padrão, e que boa parte desses padrões podem ser representados por funções. **Nas ideias iniciais na cabeça de muitos indivíduos, o conceito de função seria a relação entre elementos de conjuntos distintos**, mas ao realizar esses experimentos e analisar o comportamento desses diferentes tipos de funções, pude perceber que seu conceito é mais amplo do que parece e que há várias formas que ela pode assumir.*

> **P4**: *Sim. [...] Ao terminarmos de ter feito as atividades **na hora de fazer a prova dissertativa nos ajudou porque sabíamos como fazer e por onde começar**, já tínhamos uma noção de como aquilo era pra ser feito, não foi como entrar de cabeça sem saber se vai acertar ou não, porque já sabíamos com experiência própria de como fazer o certo.*

> **S1**: *As atividades realizadas em sala puderam esclarecer os conceitos teóricos de função, pois com os experimentos foi possível perceber que praticamente em tudo há função, como por*

> *exemplo no primeiro experimento, onde o volume das caixas que eram feitas dependiam da altura, partindo desse princípio após encontrarmos a relação de dependência, verificávamos se o fenômeno se encaixava nos conceitos, e pouco a pouco conseguimos perceber cada vez mais as características de uma função, podendo ter domínio sobre o fenômeno, sendo capaz de prever qual seria o volume de uma caixa que tivesse uma "altura x" ou qual altura teria se soubéssemos apenas seu volume, essas relações foram percebidas em todas as outras atividades, esclarecendo ainda mais o conceito que apesar de bastante amplo é possível compreendê-lo e percebê-lo em diversas ocasiões, podendo prever diversos fenômenos, apenas dominando sua função.*

A variável *levar em consideração aquilo que o aluno já sabe* é alvo dos comentários de **R3**, segundo tal respondente: *"com os experimentos vimos o conceito a partir de assuntos já abordados, o que facilitou a aprendizagem"*. Enquanto isso, **S4** fala sobre qual seria a concepção inicial dos alunos acerca do conceito de função, para o respondente: *"nas ideias iniciais na cabeça de muitos indivíduos, o conceito de função seria a relação entre elementos de conjuntos distintos"*; ou seja, **S4** relata que a interpretação inicial dos alunos era a de função como relação binária, essa afirmação é verdadeira como mostraram os resultados do teste de sondagem. Esse respondente inicia a questão 7 dizendo: "*através desses experimentos eu pude notar que todas as coisas têm um padrão, e que boa parte desses padrões podem ser representados por funções"*, o que sugere uma convergência do entendimento de função como relação entre conjuntos para a compreensão de que funções exprimem variação. O respondente **P4** relata que após as atividades ficou mais seguro para realizar o teste final, segundo ele: *"ao terminarmos de ter feito as atividades na hora de fazer a prova dissertativa nos ajudou porque sabíamos como fazer e por onde começar"*. **S1**, que fez um resumo de como foram desenvolvidas as atividades, afirma: *"as atividades realizadas em sala puderam esclarecer os conceitos teóricos de função, pois com os experimentos foi possível perceber que praticamente em tudo há função"*.

Acreditamos que o caráter prático das atividades, bem como a possibilidade de interações entre os participantes facilitou a operacionalização da definição de função, pois as situações diferenciadas possibilitaram o enriquecimento da imagem conceitual deles, o que potencializou a assimilação das duas regras de conformidade, que são a base para a compreensão da definição enunciada: sem exceção e sem ambiguidades. Tal fato é discutido por **P3**: "*nas atividades foi possível a compreensão das relações entre as variáveis de uma determinada função, é importante ressaltar também os conceitos de domínio e contradomínio* *e como conseguimos mostrar as regras de sem ambiguidade e sem exceções por meio das tabelas e gráficos*", por **T4**: "*graças aos exercícios realizados em sala conseguimos vê na prática os conceitos de função como sem ambiguidade e sem exceção"*, e, de certo modo, por **S1**: "*com os experimentos foi possível perceber que praticamente em tudo há função, como por exemplo no primeiro experimento, onde o volume das caixas que eram feitas dependiam da altura, partindo desse princípio após encontrarmos a relação de dependência, verificávamos se o fenômeno se encaixava nos conceitos, e pouco a pouco conseguimos perceber cada vez mais as características de uma função".* As atividades foram também importantes no sentido de esclarecer como se davam as relações de dependência entre as variáveis, como afirma **R1**: "*também construímos fórmulas, que fizeram com que víssemos a relação entre as variáveis".* Além disso, a exposição a outros pontos de vista fez-se necessário, pois o conteúdo funções é demasiado complexo, atributo que os participantes **R3**, **S4** e **S1** chamaram de amplo.

Assim, dentro do que foi exposto, entendemos que, por meio das sequências didáticas, foi possível modelar as concepções iniciais dos participantes, baseadas numa interpretação estática de função, e utilizando estes conhecimentos prévios foi possível elevar suas definições de função de uma condição de inércia para uma condição operacional, pois como afirma **T4**: *"as atividades realizadas foram de extrema importância, pois com elas foi possível tirar dúvidas e ao mesmo tempo aprimorar nossos conhecimentos sobre função".*

### 4.11 Análise *a posteriori* do questionário final

Entendemos que os dados do questionário final apontam para uma definição de função que, de fato, foi utilizada pelos alunos, sendo que a mesma foi útil para identificações, como mostram os resultados das questões 4 e 5, para transformações, pois possibilitaram juntamente com o recurso à pluralidade de representações novas estratégias de resolução de problemas, e, sobretudo, para conversões, onde, pautados na compreensão das regras de conformidade, que lhes conferiram um aumento na capacidade de interpretação, graças à aquisição de significados, os aprendizes foram capazes de transitar com espontaneidade entre as várias representações do conceito de função.

As definições formais apresentadas na questão 6 são mais claras e detalhadas do que aquelas apresentadas no teste de sondagem. Já as definições pessoais apresentadas, são mais coerentes com as definições formais. Além disso, nota-se uma compatibilidade entre as definições conceituais enunciadas e a imagem conceitual dos participantes, que pode ser vislumbrada mediante a produção escrita dos mesmos. Ou seja, as definições enunciadas pelos alunos se mostraram mais aptas para gerir a articulação entre as múltiplas representações do conceito em questão. Percebe-se, ainda, que as definições enunciadas na questão 6 sugerem uma certa evolução de uma interpretação mais estática para uma interpretação mais dinâmica de função, quer dizer, o conceito subsunçor modificado, fruto da interação cognitiva entre o novo e o prévio, como mostra a produção escrita, parece ter assimilado a ideia de variação, de interdependência.

Os alunos permaneceram, mesmo que de forma mais tênue em relação ao teste de sondagem, com dificuldades para generalizar dados por meio de fórmulas, ou seja, fazer conversões para o registro algébrico e, sobretudo, fazer tratamentos dentro desse registro. Como o foco das atividades era possibilitar a construção de uma definição significativa, operacional, o tratamento algébrico ficou em segundo plano, o que consideramos ter propiciado a permanência dessa situação. Sendo assim, parece-nos viável, para futuros projetos que visem ao favorecimento da operacionalização, uma segunda etapa que focalize a questão da generalização por meio de fórmulas e do tratamento algébrico.

Para ocorrer a aprendizagem significativa do conceito de função, além de haver uma disponibilidade de conceitos subsunçores específicos e relevantes para ancorar esse conceito, outra condição deve ser satisfeita: o aluno deve ter disposição para aprender significativamente o conceito em jogo. No teste de sondagem, conceitos subsunçores foram identificados, a ideia de sequência, de proporcionalidade direta e de função como relação binária, e serviram como base para a aquisição de novos significados, o que corresponde ao cumprimento da primeira condição. Já a disposição para aprender significativamente o conceito de função, foi alavancada pelo caráter dinâmico e interativo das sequências didáticas, como relataram os aprendizes na questão 7.

Todas as sequências didáticas foram elaboradas a partir da intenção de oportunizar a construção, por parte dos alunos, de uma definição que funcionasse como um ponto de referência para as demais representações semióticas do conceito de função. Ao estudar o tema funções, o aprendiz se depara com muitos outros conceitos que orbitam o de função, ou seja, para compreendê-lo o aluno deve adquirir muitos outros significados, fato que levou alguns alunos a retratarem o conceito de função como amplo, na sétima questão. Entender a definição como um ponto de referência faz-se, então, essencial, devido ao fato de o conceito de função estar mergulhado em um mar de terminologia abstrata; nesse caso, a explicação dos porquês por meio da definição pode facilitar o diálogo entre os registros, favorecendo a construção de significados. Se o aluno não tiver um norte dentro da estrutura de apresentação do conceito de função, que facilite a articulação entre as representações e una todos os outros conceitos em um todo coerente, é muito provável que ele desenvolva uma atitude de simplesmente memorizar o máximo possível dessa terminologia afim de conseguir os escores necessários para a aprovação, atitude que obstaculiza a aprendizagem significativa desse conceito. Essa disposição para aprender mecanicamente o conceito de função conduz naturalmente a um isolamento dos registros de representação, pois dentro de cada registro macetes são criados para identificar se isso ou aquilo representa uma função, mas totalmente desconexos, o que inviabiliza a construção semântica do conceito. Mas não é qualquer definição que pode servir como um elo conector das representações semióticas, como foi visto no teste de sondagem, cujas definições foram apresentadas como uma mera formalidade, sendo descartadas de qualquer raciocínio logo após enunciadas; a definição deve alcançar a operacionalização, ou seja, deve ser capaz de gerir as atividades cognitivas de formação, tratamento e, sobretudo, de conversão.

A data de início da investigação foi estratégica no sentido de os alunos já terem sido apresentados à definição formal do conceito de função e trabalhado, como bem apontou o professor regente, com todos os principais modelos funcionais: linear, quadrático, exponencial e logarítmico, concernentes ao 1º ano do ensino médio. O professor regente estava ministrando normalmente sua disciplina ao longo do desenvolvimento das SDs, o que insere um fator de confusão, porque a evolução dos alunos poderia ser fruto de, por exemplo, uma nova abordagem do professor, mas o docente estava trabalhando com novos conteúdos e sendo constantemente impulsionado para frente, dado a responsabilidade de "fechar" seus conteúdos. O que aconteceu de diferente, nesse meio tempo, foi o desenvolvimento das SDs pautadas no favorecimento da operacionalização da definição de função. Por isso acreditamos que a operacionalização alcançada pelos alunos, evidenciada no questionário final, foi fruto da aplicação das sequências didáticas baseadas nas cinco variáveis de comando levantadas. Além disso, consideramos que a operacionalização da definição foi a responsável pelo sucesso dos alunos em articular as múltiplas representações do conceito de função e, consequentemente, pela a aprendizagem significativa desse conceito.

## 5 CONCLUSÃO

Durante o levantamento de um quadro teórico geral sobre o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função, as análises preliminares, fomos naturalmente conduzidos ao estudo dos obstáculos à aprendizagem desse conceito. As conclusões das pesquisas estudadas indicavam vários fatores que dificultam a aprendizagem do conceito de função. Contudo, a imersão nos textos e a busca por um ponto de convergência nos revelaram aquela que consideramos ser a principal dificuldade, a que nutre as demais, a dificuldade de articular as múltiplas representações do conceito de função, ou o isolamento de registros de representação semiótica. Entendemos, por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, o verdadeiro significado do obstáculo que o isolamento de registros impunha ao processo de aquisição do conceito de função. Não que a falta de articulação entre as várias representações impeça a compreensão do referido conceito, mas torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações em que deveriam realmente ser utilizados, o que nos levou, consoante os pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa, a caracterizar esse tipo de aprendizagem, que não possibilita a coordenação entre as representações do conceito de função, como mecânica.

Como, dentro Teoria dos Registros de Representação Semiótica, promover a articulação implica a construção semântica do conceito, favorecer a articulação era o mesmo que fomentar a aquisição de significados por parte dos alunos. E era esse tipo de aprendizagem que pretendíamos subsidiar desde o início, uma aprendizagem significativa. A equação era simples, *articulação = compreensão do conceito*. No entanto, dado a complexidade do conceito de função: várias representações, muita terminologia abstrata e vários outros conceitos girando em torno dele, fomos impulsionados a considerar uma outra variável para a equação supramencionada. Logo, um estudo pormenorizado sobre a tradição de ensino do tema função foi empreendido. Nele detectamos um fator que muito favorece o isolamento de representações, que chamamos de *acréscimo de terminologias novas para identificar cada representação*. Segundo esse fator, dentro de cada representação criam-se macetes para saber identificar se uma tabela, gráfico ou diagrama representam o conceito de função, como se cada representação tivesse sua própria definição de função. Percebemos, portanto, que dentro de um mar de terminologia abstrata o aprendiz fica sem um ponto de referência, algo que oriente as suas interpretações de situações que envolvem relações funcionais entre variáveis. Nesse contexto, pautados nos conceitos de Imagem Conceitual e Definição Conceitual, passamos a considerar que a definição de função poderia ser o ponto de referência que orientasse o aluno diante de tantas representações e termos abstratos. Não uma definição inerte, enunciada apenas como uma mera formalidade que não será utilizada para nada, abandonada logo após enunciada, ou seja, uma definição isolada, restrita a ela mesma, mas sim uma definição operacional. Uma definição operacional é aquela que auxilia o aprendiz a estabelecer/identificar relações funcionais entre variáveis, a identificar/explicar, baseando-se na definição dada, se determinada tabela, gráfico ou diagrama representa uma função, ou seja, é uma concepção de definição que gerencia a coordenação das múltiplas representações. Assim, a equação passou a ser: *operacionalização* = *articulação* = *compreensão do conceito de função*, ou *operacionalização* + *articulação* = *aprendizagem significativa do conceito de função*. Em suma, a operacionalização da definição passou a ser o estopim do processo de aprendizagem significativa do conceito de função. Logo, um novo desafio surgiu: como favorecer a operacionalização da definição de função?

As análises preliminares apontaram que o ensino convencional privilegiava uma concepção estática de função, no qual uma robusta terminologia abstrata era apresentada e pouca ênfase era dada a situações práticas. A partir dessas especificidades, tentamos, na análise *a priori*, propor um conjunto de variáveis que julgamos favorecer a operacionalização da definição de função, foram elas:

*A.* introduzir o conceito de função como uma relação entre quantidades variáveis para, posteriormente, defini-lo como relação entre conjuntos.
*B.* apresentar o conceito de função dentro diferentes contextos;
*C.* enunciar uma definição de função que realmente seja utilizada;
*D.* levar em consideração aquilo que o aprendiz já sabe;
*E.* recorrer a diferentes registros de representação semiótica.

De acordo com o exposto, conduzimos este trabalho com o objetivo de: *Compreender como sequências didáticas pautadas na busca pela operacionalização podem favorecer a aprendizagem significativa do conceito de função no primeiro ano do Ensino Médio.*

O próprio enunciado do objetivo geral revela o que pretendíamos fazer e o que esperávamos conseguir com tal intervenção. A ideia era aplicar três sequências didáticas baseadas nas variáveis de comando *A, B, C, D* e *E*, afim de compreender se o favorecimento da construção de uma definição operacional por parte dos alunos os conduziriam a uma aprendizagem significativa do conceito de função. Três foram os enfoques que utilizamos para a análise dos dados coletados e verificação de nossa hipótese: 1) a evolução da imagem conceitual dos alunos e da possibilidade de uso consciente da definição; 2) o desempenho dos alunos relativamente à evolução de suas estratégias de resolução de problemas e; 3) a superação da dificuldade de articular as múltiplas representações do conceito de função, pois se uma aprendizagem mecânica privilegia o isolamento de representações, então a coordenação das representações conduz a um caminho oposto, ao caminho da aprendizagem significativa.

O contexto da pesquisa apresentava dois aspectos deliberadamente escolhidos, que assegurariam uma condição vantajosa para a realização da investigação: 1) o conceito de função fora abordado de forma estática pelo professor regente, o mesmo considerou apenas o contexto dos livros; 2) os alunos já haviam sido iniciados no conceito de função. O aspecto (1) era necessário, pois se o professor regente já trabalhasse com as variáveis *A, B, C, D* e *E* seria complicado discutir as diferenças de impacto na imagem conceitual dos alunos que a abordagem estática e a abordagem pautada na busca pela operacionalização provocariam. O aspecto (2) era importante, pois pretendíamos compreender quais eram as contribuições da operacionalização da definição para o ensino do tema funções para alunos já iniciados, porque nem sempre o professor tem a missão de iniciar os alunos no tema funções, mas se eles já foram iniciados e apresentam dificuldades, que podem se estender para outros temas da Matemática e de outras disciplinas, o favorecimento da operacionalização da definição poderia auxiliar o docente a efetuar uma nova abordagem do conteúdo.

Um teste de sondagem foi aplicado no primeiro encontro, tinha como principal objetivo identificar alguns conceitos já estabelecidos na estrutura cognitiva dos aprendizes que servissem como âncora para o conceito de função. Além disso, pretendíamos saber se os alunos utilizariam as definições que enunciaram e se eles tinham alguma prática em fazer conversões entre registros de representação. Dos resultados do teste de sondagem, concluímos que:

- os alunos tinham dificuldade de transcrever algebricamente situações;
- os alunos tinham dificuldade de identificar gráficos;
- os alunos não foram capazes de relacionar as fórmulas das funções mais comuns trabalhadas no 1º ano do ensino médio com as suas respectivas representações gráficas;
- as definições apresentadas não foram utilizadas, sendo abandonadas logo após enunciadas;

- todas as definições enunciadas eram interpretações deficitárias da ideia de função como relação entre conjuntos;
- os conceitos de sequência, proporcionalidade direta e a interpretação de função como relação entre conjuntos poderiam ser utilizados como conceitos subsunçores.

Em suma, os resultados do teste de sondagem evidenciaram que o contexto da pesquisa estava de acordo com o quadro teórico geral levantado. Ficou claro que a definição enunciada pelos alunos no teste de sondagem não subsidiou em nada as suas ações ao longo do teste, ou seja, os aprendizes não alcançaram a operacionalização da definição de função. E não conseguiram articular as várias representações do conceito de função; o isolamento de representações fez-se presente nos resultados do referido teste. Principalmente, os aprendizes não tinham desenvolvido uma imagem conceitual que suportasse o entendimento da definição que enunciaram.

Após o teste de sondagem, foram desenvolvidas três sequências didáticas orientadas pelas variáveis *A, B, C, D* e *E*. Cada sequência didática foi centrada num experimento, ou seja, numa atividade prática, onde toda a terminologia relativamente ao conceito de função foi utilizada como ferramenta para a resolução de problemas com referência na realidade. A ideia de trabalhar com atividades práticas se justifica pelo fato de elas serem mais propícias a instigarem os alunos, a motivarem os mesmos a aprenderem significativamente o conceito de função, ou seja, são mais capazes de subsidiar o cumprimento da segunda condição para a ocorrência da aprendizagem significativa, tapando as lacunas que o ensino exclusivamente livresco pode deixar. Através dos resultados provenientes do desenvolvimento das sequências didáticas, deduzimos que:

- os aprendizes passaram progressivamente a utilizar suas definições para explicar porque determinadas relações eram funcionais;
- os participantes perceberam a real importância das representações semióticas para a compreensão do conceito de função;
- os alunos começaram a entender os significados e limitações de cada uma das representações semióticas do conceito de função;
- os alunos apresentavam uma ideia de que em toda função, quanto maior for o x, maior será o y, concepção solapada ao longo do desenvolvimento das atividades;
- as atividades práticas serviram para enriquecer a imagem conceitual dos alunos, que era restrita ao modelo linear;

- os padrões que os experimentos mostravam em seus resultados levaram os alunos a compreenderem o significado das ideias de dependência, regularidade e variação, essenciais para o conceito de função.

No geral, as atividades práticas foram modelando as concepções dos alunos sobre a importância das múltiplas representações do conceito de função, solapando qualquer concepção mono registro apreendida por eles. Os contras e prós do uso de tabelas, gráficos e fórmulas foram constantemente discutidos. Percebia-se alunos discutindo sobre os padrões numéricos identificados nas tabelas e as limitações destas, sobre o porquê deste ou daquele ponto estar fora da curva, o que, segundo eles, sugeria novos cálculos, ou sobre a ideia de como deduzir uma fórmula. O recurso a uma pluralidade de representações semióticas fez com que os alunos constatassem a importância delas para a aquisição do conceito de função; inclusive, as formas de representar o conceito de função foram citadas por quase todos os participantes em suas definições de função dadas no questionário final, o que não ocorreu no teste de sondagem.

No último encontro, um questionário final foi aplicado. Ele foi inspirado basicamente nos mesmos pontos que direcionaram a elaboração do teste de sondagem. Através dos resultados do questionário final foi possível constatar qual foi a contribuição que o favorecimento da operacionalização trouxe para a coordenação das múltiplas representações do conceito de função e, consequentemente, para a aprendizagem significativa desse conceito. A partir dos resultados do questionário final, concluímos que:

- todos os aprendizes utilizaram as definições que enunciaram para explicar corretamente porque os gráficos e diagramas apresentados eram, ou não, funcionais;
- houve alunos que utilizaram novas estratégias para tentar resolver os problemas apresentados, recorrendo a outros registros de representação;
- as definições apresentadas pelos alunos eram mais detalhadas do que aquelas apresentadas no teste de sondagem, às vezes contextualizadas com exemplos, ou seja, elas se mostraram mais aptas para gerir a articulação entre as múltiplas representações do conceito de função;
- as definições enunciadas sugerem uma certa evolução de uma interpretação mais estática para uma interpretação mais dinâmica de função, quer dizer, o conceito

subsunçor modificado, fruto da interação cognitiva entre o novo e o prévio, parece ter assimilado a ideia de variação, de padrão, de dependência entre variáveis;

- os alunos permaneceram, mesmo que de forma mais tênue em relação ao teste de sondagem, com dificuldades para generalizar dados por meio de fórmulas;
- a disposição para aprender significativamente o conceito de função foi alavancada pelo caráter dinâmico e interativo das sequências didáticas;
- as definições foram utilizadas pelos alunos para conversões, onde, pautados na compreensão das regras de conformidade, que lhes conferiram um aumento na capacidade de interpretação, graças à aquisição de significados, os aprendizes foram capazes de transitar com certa espontaneidade entre as representações do conceito de função.

Em síntese, as sequências didáticas foram aplicadas afim de fazer evoluir as limitadas imagens conceituais dos participantes, que já haviam sido apresentados ao conceito de função, mas não tinham atribuído significação ao mesmo, ou seja, a ideia era ampliar a substância da estrutura cognitiva dos alunos referente ao conceito de função. A evolução da imagem conceitual dos alunos possibilitou-lhes compreender a definição formal de função, sendo que a assimilação desta deixou suas imagens conceituais mais coerentes com a estrutura formal do conteúdo, o que favoreceu a compatibilidade entre aquilo que eles evocavam e aquilo que eles enunciavam. O produto final desse esforço, mas não totalmente acabado, foi uma definição utilizada de forma consciente por parte do aprendiz, uma definição que auxiliou os alunos a unirem os termos abstratos que orbitam o conceito de função em um todo coerente, uma definição que guiou eles durante identificações, tratamentos e, sobretudo, conversões, ou seja, uma definição operacional.

Os alunos apresentaram um bom desempenho durante as sequências didáticas, ou seja, dentro de múltiplos contextos que requeriam máxima transformação do conhecimento adquirido eles conseguiram responder às perguntas levantadas e explicar as relações funcionais baseando-se na definição de função, organizando hierarquicamente seus conhecimentos através de mapas conceituais devidamente explicados. Os alunos mostraram no questionário final saber fazer as articulações exigidas, contrariando a possibilidade de uma aprendizagem puramente mecânica. Além disso, utilizamos os subsunçores identificados e, mediante atividades práticas, instigamos os participantes a aprenderem significativamente o conceito de função. Por isso, acreditamos que há evidências de aprendizagem significativa do conceito de função. Como tudo partiu do favorecimento da operacionalização da definição de função, acreditamos que a operacionalização desencadeia o processo de aquisição do conceito de função. Logo, *deve-se operacionalizar para articular e articular para compreender*.

Em resumo, os resultados das experimentações sugerem que os alunos adquiriram algum significado, o que confere certo sucesso ao favorecimento da operacionalização da definição de função. No entanto, algumas perguntas ficam em aberto: será que a facilitação da operacionalização da definição de outros conceitos matemáticos pode propiciar a aprendizagem significativa dos mesmos? Quais variáveis de comando manipular em cada caso? As mesmas levantadas neste trabalho? Adaptações das variáveis levantadas neste trabalho? O favorecimento da operacionalização é eficiente, no sentido de fomentar a aprendizagem significativa, para *iniciar* alunos no conceito de função, ou em outro conceito? Quais são as implicações da operacionalização da definição a longo prazo?

# REFERÊNCIAS


ALMOULOUD; S. A; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n.1, p. 62-77, 2008.

ALVARENGA, K.; BARBOSA, C. V.; FERREIRA, G. M. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C. até o século XX. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 9, n. 1, p. 159-178, 2014.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193-217.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Educational psychology: a cognitive view**. 2. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1978.

______. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Tradução de: Lígia Teopisto, Lisboa: Paralelo Editora, LDA, 2003.

ÁVILA, G. Evolução do conceito de função e integral. **Revista Matemática Universitária**, São Paulo, n. 1, p. 14-46, jun. 1985.

BOTELHO, L.; REZENDE, W. Um breve histórico do conceito de função. **Caderno Dá Licença**, v. 6, p. 65-75, dez. 2007.

BOYER, C. B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, Ltda, 1951. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/nedir/disciplinas-Pagina/Caraca_ConceitosFundamentais.pdf>. Acesso em: 20 dez. 2015.

COSTA, A. C. **Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

DAHLBERG, I. Teoria do conceito. **Revista Ciência da Informação**, Rio de Janeiro, v.7, n.2, p. 101-107, jul./ dez. 1978.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012, p. 167-188.

DASSIE, B. A.; CARVALHO; J. B. P. F.; ALMEIDA, R. C. M.; REZENDE, W. M. O conceito de função em livros didáticos para a escola brasileira. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA, 5, 2010, Recife. **Anais...** Recife: EDUMATEC/UFPE, 2010. CD ROM.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

______. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. Proponentes: José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, Paraná, v.2, n.3, p.10-34, jul./ dez. 2013.

FILHO, M. S. M.; MENEZES, J. E. Como os alunos do ensino médio estão construindo e interpretando gráficos de funções polinomiais 1º e 2º graus. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM, 10, 2010, Salvador. **Anais...** Salvador, 2010.

FONSECA, V. G.; SANTOS, A. R.; NUNES, W. V. Estudo epistemológico do conceito de função: uma retrospectiva. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM, 11, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba, 2013.

FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2012, p. 77-111.

KLEINER, I. Evolution of the function concept: a brief survey**. The College Mathematics Journal**, Washington, D.C., v. 20, n. 4, p. 282-300, set. 1989. Disponível em: <www.maa.org/pubs/Calc_ar ticles/ma001.pdf >. Acesso em: 15 ago. 2016.

KRAMARSKI, B. Making sense of graphs: does metacognitive instruction make a difference on students' mathematical conceptions and alternative conceptions? **Learning and Instruction**, 14, 593-619, 2004.

LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes do ensino da matemática. **Revista do professor de matemática**, n.41, p.1-6, 1999.

______. Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio. **Revista do professor de matemática**, n. 46, p.43-51, 2001.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. Vol. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: ______. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012, p. 233-246.

MARTINS, L. P. **Análise da Dialética Ferramenta-Objeto na construção do conceito de função**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC - SP, 2006.

McDERMOTT, L. C.; ROSENQUIST, M. L.; van ZEE, E. H. Student difficulties in connecting graphs and physics: examples from kinematics. **American Journal of Physics**, Woodbury, v. 55, n. 6, p. 503-513, jun. 1987.

MONTEIRO, C. E. F. Interpretação de gráficos: atividade social e conteúdo de ensino. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO – ANPEd, 22, 1999, Caxambu. **Anais...** Caxambu, 1999. 1 CD-ROM.

MOREIRA, M. A. **Pesquisa em educação em ciências: métodos qualitativos**. Texto de Apoio n° 14. Publicado em Actas del PIDEC, 2002. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/pesqquali.pdf> Acesso em: 26 maio 2016.

______. **Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências**: comportamentalismo, construtivismo e humanismo. Porto Alegre, 2009a. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios5.pdf> Acesso em: 20 fev. 2015.

______. **Subsídios didáticos para o professor pesquisador em ensino de ciências**: mapas conceituais, diagramas v e organizadores prévios. Porto Alegre, 2009b. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios3.pdf> Acesso em: 5 fev. 2015.

______. **Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências:** a teoria da aprendizagem significativa. Porto Alegre, 2009c. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios6.pdf> Acesso em: 10 jan. 2015.

______. ¿Al final, qué es aprendizaje significativo? **Revista Qurriculum**, La Laguna, Espanha, n. 25, p. 29-56, mar. 2012.

NOVAK, J. D., CAÑAS, A. J. A teoria subjacente aos mapas conceituais e como elaborá-los e usá-los**. Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v.5, n.1, p. 9-29, jan./ jun. 2010. Disponível em: <http://www.periodicos.uepg.br>. Acesso em: 10 mar. 2015.

PAIS, L. C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PIRES, R. F.; SILVA, B. A. Função: concepções daquele que ensina e daquele que aprende. **EM TEIA**, v. 5, n. 3, p.1-25, 2015.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de matemática. **Educação e Matemática**, APM, Portugal, n. 15, p.3-9, 1990.

REZENDE, W. M. **Uma análise histórica-epistêmica da operação de limite**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1994.

RÜTHING, D. Some definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. **The Mathematical Intelligencer**, v. 6, n. 4, p. 72-77, 1984.

SAJKA, M. A. A secondary school student's understanding of the concept of function: a case study. **Educational Studies in Mathematics**, 53, p. 229-254, 2003.

SARAIVA, M. J.; TEIXEIRA, A. M. Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. **Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)**, Palermo, Italy, n.19, p.83-95, 2009. Disponível em: <http://math.unipa.it/~grim/TSG24_ICMI11_Saraiva-Teixeira_QRDM_Supl4_09.pdf>. Acesso em: 14 dez. 2015.

SFARD, A. Operational origins of mathematical objetcs and the quandary of reification: the case of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy. M. A. A. notes, Washington, D.C., v. 25, p. 59-84, 1992.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy. M. A. A. Notes, Washington, D.C., v. 25, p. 25-58, 1992.

SILVA, M. H. M.; REZENDE, W. M. Análise histórica do conceito de função. **Caderno Dá Licença**, v. 2, p. 28-33, 1999.

SMOLE, K. C. S., CENTURIÓN, M. R., DINIZ, M. I. S. V. A Interpretação Gráfica e o Ensino de Funções. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 14, 1989.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics: with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

YOUSCHKEVICH, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 16, n. 1, p.37-85, 1976.

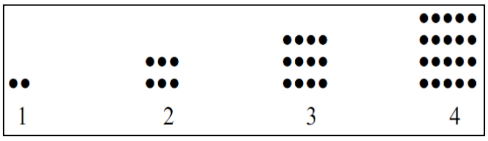
# APÊNDICE A – Teste de Sondagem

### Questão 1

Explique com suas palavras o significado do conceito matemático de função.

### Questão 2

Na sequência abaixo, cada número corresponde à posição de um conjunto de pontos, conforme mostra a figura.




Sendo assim, responda ao que se pede.

a) Desenhe a 5ª figura da sequência.

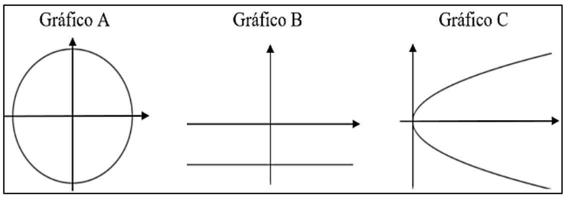
b) Explique com suas próprias palavras como podemos descobrir quantos pontos haverá em uma posição qualquer, sabendo apenas o número desta posição.

c) Escreva uma fórmula matemática que relacione o número de pontos e sua respectiva posição na formação da sequência.

d) Quantos pontos haverá na 20ª posição?

### Questão 3

Observe os gráficos cartesianos abaixo.




Agora, escreva dentro dos parênteses *S*, se o gráfico representa uma função, e *N*, caso não represente.

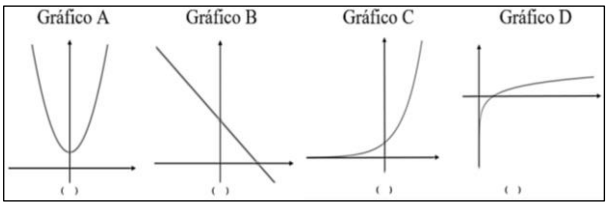
Gráfico A (   ) Gráfico B (   ) Gráfico C (   )

### Questão 4

Associe cada expressão dada ao esboço gráfico mais adequado.

(a) $y = \log x$ (b) $y = x^2 + 1$

(c) $y = 2^x$ (d) $y = -x + 5$




### Questão 5

Preencha a tabela abaixo, considerando que ela representa uma função de X em Y. Lembre-se de que *n* representa um número qualquer do domínio.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | 5 | | 8 | 9 | *n* |
| Y | 3 | 5 | 7 | | 15 | 17 | 19 | |

### Questão 6

Nas situações a seguir, estão descritas algumas relações de dependência entre duas variáveis. Em cada item, procure decidir qual é a variável independente (aquela que pode ser fixada previamente) e qual é a variável dependente (aquela que depende dos valores da variável independente). Escreva dentro dos parênteses *D*, se a variável for dependente, e *I*, se a variável for independente.

a) O comprimento do lado de um quadrado e o seu perímetro.

Perímetro (   ) Comprimento do lado (   )

b) Número de erros em uma prova e a nota obtida.

Número de erros (   ) Nota (   )

c) A área de um círculo e o comprimento do raio.

Comprimento do raio (   ) Área (   )

d) A quantidade de canetas que alguém compra e o preço pago por elas.

Quantidade (   ) Preço (   )

e) O espaço percorrido por um corpo em queda livre no vácuo e o tempo transcorrido desde o instante em que ele começou a cair.

Espaço (   ) Tempo (   )

### Questão 7

Se em 2 horas, 4 torneiras despejam 900 litros de água em um tanque. Então, quantos litros despejam 10 dessas torneiras em 4 horas?

## APÊNDICE B – Questionário Final

**Questão 1**

Suponha que, para determinado modelo de carro, o consumo médio de combustível seja:

- 15 km/l para o modelo tradicional;
- 22 km/l para o modelo híbrido (funciona a base de combustível e eletricidade).

Com base nessas informações, responda ao que se pede.

a) Chamando de *D* a distância total que o veículo pode percorrer com motor híbrido e de *L* o volume de combustível, escreva uma fórmula que associe *D* e *L*.

b) Identifique as variáveis dependente e independente.

c) Com 40 litros de combustível, quantos quilômetros um carro com motor híbrido pode percorrer? E o modelo de carro tradicional? Qual a diferença de distância percorrida entre os dois modelos?

d) Para percorrer uma distância de 1.100 km, quantos litros de combustível o modelo híbrido requer?

**Questão 2**

Um loteamento apresenta seus terrenos todos com mesma característica: formato retangular com comprimento medindo 5 metros a mais que a largura *x* do terreno.

a) Escreva a fórmula que dê a área *y* em função de *x*.

b) Usando a fórmula, qual é a área para $x = 6$ metros?

c) Qual deve ser o valor de *x* para que a área seja de 150 m²?

d) Identifique as variáveis dependente e independente.

**Questão 3**

Com base nas informações da tabela a seguir, responda:

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |

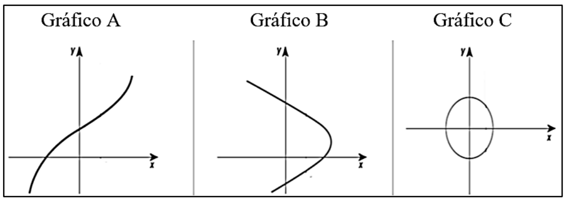
a) Qual é a fórmula que associa a cada elemento *x* da primeira linha um elemento *y* da segunda linha?

b) Calcule, usando a fórmula, o valor de *y* para $x = 1000$.

c) Podemos dizer que entre os elementos da primeira e segunda linhas há uma relação funcional? Justifique.

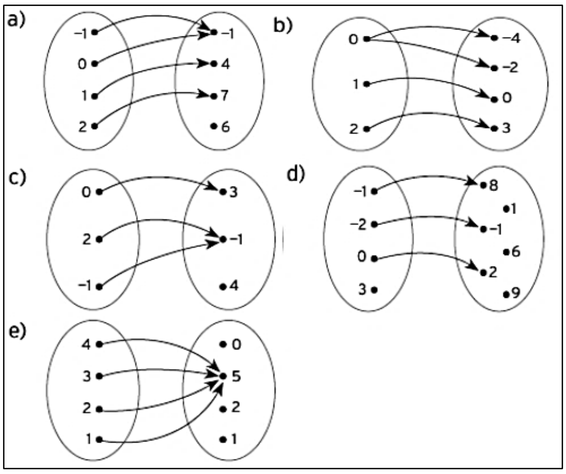
**Questão 4**

Dos gráficos abaixo, qual(is) não representa(m) uma função? Justifique sua resposta.




**Questão 5**

Identifique quais dos diagramas, a seguir, não representam uma função. Justifique sua resposta.




**Questão 6**

Explique com suas palavras o significado do conceito matemático de função.

**Questão 7**

As atividades realizadas ajudaram você a compreender melhor o conceito de função? Caso afirmativo, justifique.

## APÊNDICE C – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Caros pais ou responsáveis,

Seu filho (a) está sendo convidado (a) para participar da pesquisa “**O conceito de função: da modelagem matemática à aprendizagem significativa**[17]”. A investigação estará sob a responsabilidade do pesquisador Jerson Sandro Santos de Souza, Pós-Graduando - PPGECIM/UFAM, e sob a orientação do Prof. Dr. Leandro de Oliveira Souza.

O objetivo da pesquisa é analisar como sequências didáticas pautadas nos princípios da modelagem matemática (uma estratégia de ensino de matemática) favorecem a aprendizagem significativa do conceito matemático de função. A participação nessa pesquisa se dará por meio de contribuições ao responder questionários, da participação em atividades baseadas nos princípios da modelagem matemática e da realização de testes envolvendo o conceito de função.

A participação é voluntária, seu filho (a) não terá nenhum tipo de despesa para participar desta pesquisa, pois todo o material necessário para o desenvolvimento das sequências didáticas ficará a cargo do pesquisador responsável, e as atividades serão realizadas no âmbito da escola em tempo convencional de aula. Nada será pago pela participação do (a) mesmo (a), a vantagem se constituirá no conhecimento adquirido durante a execução do projeto.

Seu filho (a) será esclarecido (a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O (a) Senhor (a) poderá retirar o consentimento ou interromper a participação do seu filho (a) em qualquer momento da pesquisa, seja antes ou depois da coleta dos dados, independente do motivo e sem nenhum prejuízo ou penalidade.

De acordo com a Resolução CNS 466/12, item V, “Toda pesquisa com seres humanos envolve riscos em tipos e gradações variadas”. A mesma resolução no seu item II.22 define como risco da pesquisa a “possibilidade de danos à dimensão física, psíquica, moral, intelectual, social, cultural ou espiritual do ser humano, em qualquer pesquisa e dela decorrente”. Os riscos da presente pesquisa são mínimos que, neste caso, podem advir do manuseio de algumas ferramentas nas atividades didáticas

[17] O referido título reporta-se ao primeiro interesse do autor, no caso, a Modelagem Matemática como estratégia de ensino. As considerações da banca, no entanto, no exame de qualificação, ampliaram os horizontes da pesquisa, o que exigiu novas leituras e mudanças de percurso. Nesse sentido, o foco do estudo passou a ser a definição como elemento conector das múltiplas representações do conceito de função. Esta mudança exemplifica a maleabilidade de uma abordagem essencialmente qualitativa.

(por exemplo, acidente no manuseio de tesoura), do constrangimento devido a não compreensão de alguma etapa do desenvolvimento da pesquisa, ou, ainda, de *bullying* na sala de aula. Mas o pesquisador ficará atento para coibir tais atitudes dos demais participantes, agindo com profissionalismo ético, não permitindo tais situações e comunicando, caso necessário, ao CEP/CONEP para as devidas providências que resguardam a integridade dos participantes.

A participação na pesquisa contribuirá para entendermos como uma aprendizagem que fundamenta a construção de significados claros, precisos e transferíveis pode ser favorecida a partir de atividades concretas, onde a resolução de problemas com referência realidade e a construção de modelos são as suas características principais. Os resultados da pesquisa serão analisados e publicados, mas a identidade dos participantes não será divulgada, sendo guardada em sigilo. Quando terminarmos a pesquisa, os resultados serão apresentados para a comunidade acadêmica e publicados em revistas nacionais de educação.

O pesquisador responsável tomará os cuidados necessários para o cumprimento do que foi citado acima. Para qualquer informação, o (a) Senhor (a) poderá entrar em contato com os pesquisadores responsáveis: Jerson Sandro Santos de Souza - Pós-Graduando – PPGECIM/UFAM (fone: 99298-8843, e-mail: jersoncobain@gmail.com); Leandro de Oliveira Souza - FACIP/UFU (fone: 9811-3277, e-mail: olilean@gmail.com), ou ainda com o Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UFAM, na Rua Teresina, 495, Adrianópolis, Manaus-AM, telefone (92) 3305-1181, ramal 2004.

Consentimento Pós–Informação

Eu, ..............................................................................................................., li as informações acima, recebi explicações sobre a natureza, riscos e benefícios do projeto. Autorizo a participação do meu filho (a) e compreendo que posso retirar o consentimento e interrompê-lo a qualquer momento, sem penalidades ou prejuízos. Este documento é emitido em duas vias originais, assinadas por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada um de nós.

Manaus,________de_________________de 2016.

Nome do (a) filho (a): ____________________________________________________

_______________________________________
Assinatura do (a) responsável

_______________________________________
Assinatura do pesquisador responsável

## APÊNDICE D – Termo de Assentimento – TA

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS**

**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

### TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa "**O conceito de função: da modelagem matemática à aprendizagem significativa**". Neste estudo, pretendemos investigar como sequências didáticas pautadas nos princípios da modelagem matemática (uma estratégia de ensino de matemática) favorecem a aprendizagem significativa do conceito de função. Para tal, adotaremos os seguintes procedimentos: questionários, observação do desenvolvimento das atividades e registro da produção dos participantes.

Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar, e assinar um termo de consentimento. Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu, não terá nenhum problema se desistir.

Você não terá nenhum tipo de despesa para participar desta pesquisa, pois todo o material necessário para o desenvolvimento das sequências didáticas ficará a cargo do pesquisador responsável e as atividades serão realizadas no âmbito da escola em tempo convencional de aula. Nada será pago por sua participação, a vantagem se constituirá no conhecimento adquirido durante a execução do projeto.

De acordo com a Resolução CNS 466/12, item V, "Toda pesquisa com seres humanos envolve riscos em tipos e gradações variadas". A mesma resolução no seu item II.22 define como risco da pesquisa a "possibilidade de danos à dimensão física, psíquica, moral, intelectual, social, cultural ou espiritual do ser humano, em qualquer pesquisa e dela decorrente". Os riscos desta pesquisa são mínimos que, neste caso, podem advir do manuseio de algumas ferramentas nas atividades didáticas (por exemplo, acidente no manuseio de tesoura), do constrangimento devido a não compreensão de alguma etapa do desenvolvimento da pesquisa, ou, ainda, de *bullying* na sala de aula. Mas o pesquisador ficará atento para coibir tais possíveis atitudes dos demais participantes, agindo com profissionalismo ético, não permitindo tais situações e comunicando, caso necessário, ao CEP/CONEP para as devidas providências que resguardam a integridade dos participantes.

A participação na pesquisa contribuirá para entendermos como uma aprendizagem que fundamenta a construção de significados claros, precisos e transferíveis pode ser favorecida a partir de atividades concretas, onde a resolução de problemas com referência realidade e a construção de modelos são as suas principais características. Os resultados da pesquisa serão analisados e publicados, mas a identidade dos participantes não será divulgada, sendo guardada em sigilo. Quando terminarmos a pesquisa, os resultados serão apresentados para a comunidade acadêmica e publicados em revistas nacionais de educação.

O pesquisador responsável tomará os cuidados necessários para o cumprimento do que foi citado acima. Para qualquer informação, você poderá entrar em contato com os pesquisadores responsáveis: Jerson Sandro Santos de Souza - Pós-Graduando – PPGECIM/UFAM (fone: 99298-8843, e-mail: jersoncobain@gmail.com); Leandro de Oliveira Souza - FACIP/UFU (fone: 9811-3277, e-mail: olilean@gmail.com), ou ainda com o Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UFAM, na Rua Teresina, 495, Adrianópolis, Manaus-AM, telefone (92) 3305-1181, ramal 2004.

Este termo de assentimento encontra-se impresso em duas vias originais: sendo que uma será arquivada pelo pesquisador responsável e a outra será fornecida a você.

Consentimento Pós-Informação

Eu, ............................................................................................................................, fui informado (a) dos objetivos da presente pesquisa, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar dessa pesquisa, sabendo que não vou ganhar nada e que posso sair quando quiser. Recebi uma cópia deste termo e esclareci todas as minhas dúvidas.

Manaus, _______de _______________de 2016.

_______________________________________ _________________________________

Assinatura do menor Assinatura do pesquisador responsável