UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

ESTUDO DA FRAÇÃO CONTÍNUA E SUAS APLICAÇÕES

RUI GUILHERME DE DEUS CARVALHO RIBEIRO

MANAUS
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

RUI GUILHERME DE DEUS CARVALHO RIBEIRO

ESTUDO DA FRAÇÃO CONTÍNUA E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira

MANAUS
2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R484e

Ribeiro, Rui Guilherme de Deus Carvalho
Estudo da fração contínua e suas aplicações / Rui Guilherme de Deus Carvalho Ribeiro. 2019
63 f.: il.; 31 cm.

Orientadora: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Frações Contínuas. 2. Teoria dos Números. 3. Aplicações. 4. Historia das frações contínuas. I. Oliveira, Prof. Dr. Disney Douglas de Lima II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

RUI GUILHERME DE DEUS CARVALHO RIBEIRO

ESTUDO DA FRAÇÃO CONTÍNUA E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 18 de outubro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Presidente

Nilomar V. de Oli

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Membro

Nadime Mustafa Moraes

Profa. Dra. Nadime Mustafa Moraes
Membro Externo

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros e profundos agradecimentos a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que esse momento chegasse:

Primeiramente a Deus. Sei que tudo acontece com a Tua permissão e sem o Senhor nada seria possível. Toda honra e toda glória seja dada a Ti. Amém!

A meu pai e minha mãe que não podem estar aqui comigo nesse momento tão feliz da minha vida.

A minha esposa Denise por ter sido tão compreensiva comigo, que sempre me auxiliaram nos momentos de dificuldade, mostrando um caminho alternativo para seguir em frente.

A Universidade Federal do Amazonas, pela oportunidade de estudo e amadurecimento intelectual.

Ao Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira, pela paciência na orientação e sugestões para a conclusão do trabalho.

Aos colegas de turma, que tornaram a matemática ainda mais prazerosa em suas companhias.

A todos vocês, um muito obrigado!

RESUMO

Este trabalho pretende apresentar a Teoria das Frações Contínuas como modelo estrategico para criar aproximações dos conjuntos dos números Racionais e Irracionais, expondo o contexto histórico e seus avanços relativos as possibilidades dos segmentos comensuráveis e incomensuráveis, utilizando os convergentes das frações contínuas finitas e infinitas para o entendimento e significado da Teoria como também mostrando a importância da boa aproximação e utilização do modelo em diferentes áreas do conhecimento. O tema existe na grade curricular do ensino fundamental e médio, porém, permanece uma grande dificuldade de apresentar a conversão dos conjuntos dos números racionais para os Reais, como também, pelo motivo de não haver nos livros didáticos o modelo das Frações Contínuas para tratar do nível de complexidade que o assunto apresenta. Portanto, exponho como sugestão que esse assunto seja tratado e debatido na Educação Básica, mas não como um tema curricular, e sim como um instrumento para aplicação em diversos conteúdos já previstos nos anos finais do Ensino Fundamental e Médio. A produção do referencial teórico foi realizada a partir de artigos, dissertações, teses, livros e sites referente ao trabalho de pesquisa.

Palavras-chave: Frações Contínuas, Teoria dos Números, Aplicações.

ABSTRACT

This dissertation aims to present the Theory of Continuous Fractions as a strategic model to create approximations of the sets of Rational and Irrational numbers, exposing the context and its advances relative to the possibilities of commensurable and incommensurable segments, using the converging finite and infinite continuous fractions for the understanding and meaning of the Theory as well as showing the importance of good approximation and use of the model in different areas of knowledge. The theme exists in the curriculum of teaching however, there remains a great difficulty to present the sets of rational numbers for the Real, but also because the Fractions Continuous model to deal with the level of complexity that the subject presents. Therefore, I suggest that this subject be treated and debated in Basic Education, but not as a curricular theme, but as an instrument for application in various contents already foreseen in the final years of Elementary and Middle School. The production of the theoretical reference was made from articles, dissertations, theses, books and websites referring to the research work.

Keywords: Continuous Fractions, Number Theory, Applications.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto dos números inteiros não negativos.
$\mathbb{Z}^+_*$	Conjunto dos números inteiros não nulos e não negativos.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
Pol	Polígono.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$\equiv$	Congruente.
$\cong$	Aproximado.
$\sim$	Semelhante.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\cap$	Interseção.
$\cup$	União.
$\in$	Pertence.
$\notin$	Não pertence.
$//$	Paralelo.
$\perp$	Perpendicular.
M_G	Média Geométrica.
M_P	Média Proporcional.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
$A\widehat{B}C$	Medida do ângulo ABC.
$\widehat{B}$	Ângulo B.
$o.p.v$	Opostos pelo vértice.
$\triangle$	Triângulo.
$S_\triangle$	Área do triângulo.
S_C	Área do Círculo.
S_Q	Área do Quadrado.
$\blacksquare$	Indica o fim de uma demonstração.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A matemática está presente em tudo, desde pequenos cálculos do cotidiano a proposições e teoremas de mais alta complexidade [7].

As frações contínuas por exemplo são apresentadas nessa dissertação como uma importante ferramenta para a compreensão do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) e o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$), com a sua união formando o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) .

Já na educação básica é visível a dificuldade da transição entre os conjuntos racionais e reais. Assim como na história da matemática, em que se destaca a suposta crise do pensamento pitagórico causada pela descoberta de segmentos incomensuráveis [5], esse assunto apresenta grande dificuldade na aprendizagem, sendo apresentado como um amontoado de regras, quase sempre sem nenhuma aplicação ao ensino fundamental.

Objetivo do trabalho de pesquisa não é propor um conteúdo a mais, e sim a utilização das frações contínuas como um modelo estratégico mais elegante para as aproximações dos números imensuráveis. No entanto, os conteúdos já são oferecidos no ensino fundamental, porém, não são apresentados conforme a utilização do modelo das Frações Contínuas.

Assim os aspectos do contexto histórico integram à matemática e às habilidades a serem desenvolvidas, expondo as necessidades de resgatar as motivações que propiciaram o desenvolvimento das frações contínuas e suas aplicações à Teoria dos Números, bem como apresentando uma base sólida teórica sobre seus fundamentos e contribuindo para suas diversas aplicações.

A relevância do trabalho de pesquisa foi apresentar as dificuldades que o professores tem em lecionar no ensino fundamental a união dos números racionais com o Irracionais gerando um novo conjunto dos números reais.

Apoiado no modelo das Frações Contínuas é uma ferramenta que permite que o professor possa explorar mais sobre essa união de tal forma que o aluno possa compreender com mais facilidade o conteúdo e não tenham dificuldade quando ingressarem no ensino médio.

Capítulo 1

Breve comentário histórico

No decorrer deste capítulo, daremos ênfase à história da matemática para compreender com mais detalhes a teoria das frações contínuas. A exposição e o conhecimento do desenvolvimento da matemática, com o contexto histórico, certamente contribui de maneira significativa para o avanço do aprendizado da disciplina. Citarei grandes cientistas que contribuíram para o avanço da teoria das Frações Contínuas. [2]

1.1 A suposta crise no pensamento Pitagórico

Pitágoras de Samos (c.570 - c.495 a.C.) era um pensador e místico, acredita-se que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales de Mileto, seria muito provável pois a diferença de idades entre eles seria de meio século e geograficamente, Mileto e Samos, eram próximas. Por terem interesses semelhantes explica-se pelo fato de Pitágoras também ter viajado pelo Egito e Babilônia, possivelmente também até a Índia. De volta ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona, hoje sul da Itália, onde fundou a Escola Pitagórica que era dedicada ao estudo dos números por acreditar que Deus, quando criou o mundo tinha seguido padrões numéricos: a harmonia do Universo, o movimento dos planetas, a vida animal e a vegetal, o som, a luz, enfim, todas as coisas podiam ser explicadas por meio de números. [6]

Através da descoberta da relação dos segmentos incomensuráveis, por muitos atribuída aos pitagóricos, na tentativa de determinar a medida da diagonal de um quadrado de lado 1 (um)

Podemos hoje facilmente verificar aplicando o Teorema de Pitágoras, que a diagonal do quadrado de lado 1 é $\sqrt{2}$.

A Escola Pitagórica Acreditava que "Tudo é número ", Muitos historiadores acreditam que a crise no Pensamento Pitagórico, com a descoberta dos discípulos de Pitágoras de que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de retas incomensuráveis [3].

Segundo Howard Eves [4], "deve ter sido um choque aos pitagóricos descobrir que há pontos na reta que não correspondem a números inteiros e nem a razão de dois números inteiros."

Conforme estudos feitos, não é possível obter um período exato dos primeiros registros em que surgiu a ideia do conceito de frações contínuas na história da matemática, embora já tenham sido encontrados vestígios em toda a escrita da antiga matemática grega e árabe. Com a formulação do Algoritmo de Euclides (325 a.C.-265 a.C.), existem grandes possibilidades de que as civilizações tivessem utilizado tal algoritmo para o cálculo do máximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros positivos e também no conceito das frações contínuas, assim como aplicamos na expansão dos números racionais. Entretanto, não há evidências de que o desenvolvimento da teoria tenha sido concreto. À medida que os matemáticos estudavam as aproximações de números reais por números racionais, surgiam as representações das frações contínuas para um número real arbitrário. Somente mais adiante, com o avanço da matemática pura, tais representações foram vistas como as melhores aproximações que poderiam ser obtidas.

1.2 Cientistas que contribuíram para o avanço da Teoria das Frações Contínuas

Há a necessidade de relacionar as Frações Contínuas com Euclides (300 A.C.) e Arquimedes (287-212 A.C), não por qualquer indício histórico mas pelo fato desses teóricos terem apresentado resultados que coincidem perfeitamente nesta Teoria como se verá um pouco mais à frente. [4],

1.2.1 Ariabata (476-550) e a Matemática Indiana

Ariabata foi o primeiro dentre os grandes matemáticos-astrônomos da Idade Clássica. Estabelecendo um quadro comparativo com os outros cientistas da época, pode ser considerado notável pois apresentou contribuições em diversas áreas do conhecimento, tendo em vista o amplo repertório nas aplicações práticas.

Em 499 d.C., criou a obra Aryabhatiya. Este livro apresenta regras de cálculo para astronomia, conceitos matemáticos e vários outros problemas. Ensina a elevar ao quadrado e ao cubo, a extrair raízes quadradas e cúbicas. Ariabata deu uma indicação muito próxima para π, registrou que: "Some quatro a cem, multiplique por oito e então adicione sessenta e dois mil. O resultado é aproximadamente a circunferência de um círculo de diâmetro vinte mil. Por esta regra, a relação da circunferência para o diâmetro é dada."Em outras palavras, π é dado aproximadamente pelo quociente $\frac{62832}{2000}$ que é igual a 3,1416. Com isso, é possível perceber uma estimativa razoável para o valor exato de π, com as três primeiras casas decimais.

Foi considerado o primeiro astrônomo a tentar medir a circunferência da Terra desde Eratóstenes (200 a.C.), calculando a circunferência do planeta em 24.835 milhas, apenas $0,2\%$ menor que o valor real de 24,902 milhas. Tal valor permaneceu como o mais preciso durante mais de mil anos.

O Aryabhatiya foi traduzido para o latim no século XIII, antes do tempo de Copérnico. Por esta tradução, matemáticos europeus puderam saber os métodos para calcular as áreas de triângulos, volumes de esferas bem como a raiz quadrada e cúbica, enquanto é também provável que o trabalho de Ariabata teve influência na astronomia européia.

Dentro do contexto da teoria dos números, um de seus livros é dedicado para resolver equações lineares indeterminadas. Nos tempos atuais, o algoritmo descrito na resolução de tais equações é denominado algoritmo ariabata.

1.2.2 Bombelli (1526 - 1572)

Foi um algebrista italiano nascido em Bologna, o mais importante da história da matemática da Itália, pioneiro no estudo sobre os números imaginários: sua principal publicação sobre álgebra, Algebra, composto de cinco volumes, levando em consideração que os livros IV e o V estavam incompletos e só foram editados no ano seguinte à sua morte.

No campo da teoria das frações contínuas, o matemático desenvolveu um método para obter a expansão em frações contínuas de raízes quadradas. Consiste na seguinte expressão:

$$x = \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + ...}}}$$

Na sequência de igualdades acima,$\sqrt{N}$ é o número real que desejamos obter a expansão por meio de frações contínuas, a^2 é o maior quadrado perfeito menor do que N e $b = N - a^2$.

A veri?cação de tal expressão é fornecida abaixo.

Considerando$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b}$, tem-se então que:

$$N = a^2 + b$$

e, consequentemente,

$$N - a^2 = b$$

Fatorando a diferença de quadrados:

$$(\sqrt{N} - a)(\sqrt{N} + a) = b$$

Logo:

$$\sqrt{N} = a + \frac{b}{\sqrt{N} + a}$$

Aplicando a igualdade acima para $\sqrt{N}$, no denominador da fração que aparece no segundo membro, concluímos:

$$\sqrt{N} = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\sqrt{N} + a} + a} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{\sqrt{N} + a} + a}$$

Repetindo indefinidamente o processo, obtemos a expressão inicial para x.

Bombelli utilizou esse resultado, para determinar uma representação em frações contínuas de $\sqrt{3}$, atribuindo a = 3 e b = 4.

Com isso, chegou a:

$$\sqrt{13} = \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ldots}}}}}$$

1.2.3 Brouncker (1620-1684)

Foi um matemático inglês que adquiriu o doutorado pela universidade de Oxford, em 1647. Além disso, um dos fundadores da Royal Society e o seu segundo presidente.

Realizações matemáticas de Brouncker inclui trabalhos sobre frações contínuas e logaritmos através de cálculo por séries infinitas. Em 1655, ele forneceu uma expansão na forma de fração contínua do número real $\frac{4}{\pi}$.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ldots}}}}}$$

1.2.4 Euler (1707 - 1783)

Leonhard Euler foi um importante matemático e cientista suíço, considerado um dos maiores estudiosos da matemática, em sua época.

Nasceu na Basileia, Suíça, no dia 15 de abril de 1707. Filho de Paul Euler, ministro protestante e Margaret Brucker, com um ano de idade mudou-se com a família para a cidade de Riehen, onde passou grande parte de sua infância. Foi educado por seu pai que lhe ensinou os primeiros conceitos da matemática. Com 7 anos começou a estudar com um professor particular e a ler textos diversos.

Em 1720, com 13 anos de idade, retornou para a Basileia para estudar e se preparar para o curso de Teologia na Universidade local. Em 1723, com 16 anos, recebeu o grau de Mestre em Artes, com uma dissertação que comparava os sistemas de Filosofia Natural de Newton e Descartes.

Atendendo ao desejo da família, matriculou-se na Faculdade de Teologia. Embora muito religioso, não demostrou entusiasmo com o estudo de Teologia e nas horas vagas se dedicava ao estudo da matemática. Com o incentivo do matemático Johan Bernoulli, que descobriu seu talento para a matemática, Euler ingressou no curso de matemática e ao concluí-lo, em 1726, foi convidado para a Universidade de São Petersburgo, na Rússia.

Em 1727, como não fora selecionado para a cadeira de Física da Universidade da Basiléia, mudou-se para a Rússia. Filiou-se à Academia de Ciências quando entrou em contato com grandes cientistas, como Jacob Hermann, Daniel Bernoulli, e Christian Goldback. Entre 1727 e 1730, quando os recursos para financiar o ingresso de cientistas estrangeiros na Academia foram suspensos, Euler serviu como médico-tenente na Marinha Russa.

Em 1730, assumiu o cargo de professor de Física da Academia. Em 1732 substituiu Daniel Bernoulli como professor de Matemática. Em 1734 se casou com a suíça Katharina Gsell e juntos tiveram 13 filhos. Nessa época, Euler publicou diversos textos, entre eles, o livro "Mecânica"(1736-37), quando apresentou extensivamente a dinâmica Newtoniana na forma de análise matemática. Euler conquistou reputação internacional, recebendo menção honrosa da Academia de Ciências de Paris.

Em 1741, preocupado com a constante turbulência na Rússia, Euler deixou São Petersburgo e seguiu pra a Academia de Ciências de Berlim, onde permaneceu durante 25 anos. Em 1744 foi nomeado diretor da seção de Matemática da Academia.

Escreveu diversos trabalhos utilizando uma matemática inovadora. Uma de suas maiores realizações foi o desenvolvimento do método dos algoritmos como qual conseguiu,porexemplo, fazer a previsão das fases da lua, com a finalidade de obter informações para a elaboração de tabelas para ajudar o sistema de navegação.

Entre suas contribuições mais conhecidas na matemática moderna estão: a introdução da função gama, a analogia entre o cálculo infinitesimal e o cálculo das diferenças finitas, quando discutiu minunciosamente todos os aspectos formais do Cálculo Diferencial e Integral, da época. Foi o primeiro matemático a trabalhar com as funções seno e cosseno. Em 1760, iniciou o estudo das linhas de curvatura e começou a desenvolver um novo ramo da matemática denominado Geometria Diferencial.

Durante sua permanência em Berlim, Euler escreveu mais de 200 artigos sobre Física, Matemática e Astronomia e três livros de análise matemática. Escreveu mais de 200 cartas para a Princesa da Alemanha, que mais tarde foram publicadas em 3 volumes, que tratavam sobre os mais diversos assuntos, como Filosofia Natural, Religião, Física e Matemática. Em 1766, Euler voltou para a Rússia.

Conseguiu escrever o primeiro texto abrangente em que explicava as propriedades de frações contínuas. Euler demonstrou que os racionais são escritos como frações contínuas finitas e provou que a representação dos irracionais é na forma de fração contínua infinita. Uma constante matemática estudada nesse contexto é o número e. É interessante saber que o número e, definido por $e= lim_{n \longrightarrow \infty}(1+\frac{1}{n})^2$, cujo o valor aproximado é $2,718181...$, se escreve como e $= [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, ...]$.

Leonhard Euler faleceu em São Petersburgo, Rússia, no dia 18 de setembro de 1783.

1.2.5 Heinrich Lambert (1728 - 1777)

Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) foi um matemático, astrônomo, físico e filósofo que forneceu a primeira prova rigorosa que o valor de π (a relação entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro) é um número irracional, o que significa que não pode ser expresso como o quociente entre dois números inteiros.

Lambert era filho de um alfaiate, Lukas Lambert, casado com Elisabeth Schmerber, em 1724. Ao longo de toda a sua infância, Lambert cresceu em circunstâncias pobre se teve que deixar a escola com apenas 12 anos, para poder ajudar o seu pai. No entanto, Lukas morreu em 1747, deixando Elisabeth viúva com cinco meninos e duas meninas. No seio destas circunstâncias difíceis, Lambert utilizou bem o pouco ensino que havia recebido, juntamente com alguma formação em francês e latim, continuando os seus estudos sem professor. Foi, em grande parte, um autodidata que começou bem jovem com investigações geométricas e astronômicas através de instrumentos projetados e construídos pelo próprio.

Trabalhou algum tempo como escriturário, secretário e editor. Depois, em 1748, começou a dar aulas como professor particular e utilizou esse estatuto para obter acesso a boas bibliotecas, que usou para aperfeiçoamento dos seus conhecimentos. Em 1759, Lambert decidiu renunciar ao seu cargo para se estabelecer em Augsburg (Alemanha). Em 1764, foi para Berlim e foi apenas quatro anos depois que Lambert publicou a obra que comprova o fato de que π é um número irracional. Em 1774, em Berlim, tornou-se editor do Astronomisches Jahrbuch oder Ephemeriden (Anuário de Astronomia e de Efemérides), um almanaque astronômico.

Entre as suas obras mais importantes encontram-se Photometria (1760; "Fotometria"); Die Theorie der Parallellinien (1766; "A teoria das linhas paralelas"), que contem resultados mais tarde incluídos na geometria não-euclidiana; e Pyrometrie(1779;"Pirometria"). Aprincipal obra filosófica de Lambert, Neues Organon(1764), contem uma análise de uma grande variedade de questões, entre elas a lógica formal, a probabilidade e os princípios da ciência. Lambert partilhava correspondência com Immanuel Kant (1724 a 1808), e foi dos primeiros a reconhecer que as nebulosas espirais eram galáxias em forma de disco, tal como a Via Láctea.

Lambert fez o primeiro desenvolvimento sistemático das funções hiperbólicas. É também responsável por muitas inovações no estudo do calor e da radiação. O último livro de Lambert, intitulado Pyrometrie (Berlim, 1779), abordou as questões da medição do calor. Na publicação, Lambert não tratou apenas dos fenômenos de irradiação, mas também da reflexão de calor, embora não tenha realizado demonstrações acerca deste último. Lambert também levou em consideração o efeito sensorial do calor no corpo humano e tentou fornecer-lhe uma formulação matemática. Apesar de ter morrido com apenas 49 anos, Lambert produziu e publicou mais de 150 trabalhos.

Forneceu a primeira demonstração de que o número π é irracional, usando frações contínuas para calcular tan(x) através da relação

$$\cfrac{1}{\frac{1}{x} - \cfrac{1}{\frac{3}{x} - \cfrac{1}{\frac{5}{x} - \ldots}}}$$

Lambert usou essa expressão para concluir que se x é um número racional não-nulo, então tan(x) não pode ser um número racional. Sendo assim, como $tan\frac{\pi}{4} = 1$, então π não pode ser racional.

1.2.6 Louis Lagrange (1736 - 1813)

Lagrange é geralmente considerado um matemático francês, mas na realidade ele nasceu em Turim, Itália, e foi batizado com o nome Giuseppe Lodovico Lagrangia. Seu pai, Giuseppe Francesco Lodovico Lagrangia era tesoureiro do escritório público de trabalhos e fortificações de Turim. Sua mãe era filha única de um médico de Cambiano, perto de Turim. Lagrange era o primogênito de um total de onze filhos, dos quais, apenas ele e mais um irmão atingiram a idade adulta. Lagrange se interessou pela matemática quando recebeu uma cópia do livro de Halley de 1693 sobre o uso da álgebra em óptica.

Apesar de seu pai ter um cargo relativamente importante, a família de Lagrange não era rica. Talvez nós tenhamos que agradecer ao pai de Lagrange pela sua situação economicamente modesta, pois o próprio Lagrange disse: "Se eu tivesse sido rico, provavelmente não teria dedicado a minha vida à matemática".

Lagrange foi uma criança prodígio. Basicamente autodidata, aos 19 anos foi indicado para ser professor universitário da Escola Real de Artilharia de Turim. Membro fundador da Academia Real de Ciências de Turim, Lagrange recebeu um convite para suceder Euler na Academia de Berlim, onde permaneceu por 20 anos. Posteriormente mudou-se para Paris, após um convite de Frederico, o grande, para a Academia de Ciências de Paris.

Lagrange ganhou incontáveis prêmios e publicou inúmeros trabalhos de alta qualidade em várias áreas da ciência, dentre eles: a teoria dos números; teoria das funções; cálculo de probabilidades; teoria dos grupos; equações diferenciais; mecânica dos fluidos; mecânica analítica e mecânica celeste. Sua vida foi quase que inteiramente dedicada à ciência.

Dentro da teoria dos números, demonstrou que as raízes irracionais de equações quadráticas tem expansão na forma de fração contínua periódica.

Capítulo 2

Frações Contínuas

A teoria de frações contínuas é dos mais belos assuntos da matemática elementar, sendo ainda hoje tema de pesquisa.

Nas inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, a passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ é sem dúvida a mais complicada conceitualmente e a representação de um número real está diretamente ligado à própria noção de número real.

De fato, o conceito de número natural é quase um conceito primitivo. Já um número inteiro é um número natural com sinal que pode ser + ou - , e um número racional é um número inteiro e um natural não nulo. Por outro lado, dizer o que é um número real é tarefa bem mais complicada, mais há coisas que podemos dizer sobre eles. Uma propriedade essencial de $\mathbb{R}$ é que todo número real pode ser bem aproximado por números racionais. Efetivamente, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $k = \lfloor \text{ x } \rfloor \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x - k < 1$. Podemos escrever a representação de

$$x - k = 0, a_1 a_2 ... a_n ..., \quad a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\},$$

o que significa que se $r_n = a_n + 10.a_{n-1} + 100.a_{n-2} + ... + 10^{n-1}.a_1$, entao $\frac{r_n}{10^n} \leq x - k < \frac{r_{n+1}}{10^n}$, e portanto $k + \frac{r_n}{10^n}$ é uma boa aproximação racional de x, no sentido de que o erro $|x - (k + \frac{r_n}{10^n})|$ é meno do que $\frac{1}{10^n}$, que é um número bem pequeno se n for grande. A apresentação de um número real fornece pois uma sequência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10.

Dando qualquer $x \in \mathbb{R}$ e q natural nao nulo existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{p}{q} \leq x \leq \frac{p+1}{q}$ (basta tomar $p = \lfloor qx \rfloor$), e portanto $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q}$ e $|x - \frac{p+1}{q}| \leq \frac{1}{q}$.

Em particular há aproximações de x por racionais com denominador q com erro menos do que $\frac{1}{q}$. A representação decimal de x equivale a dar essas aproximações para os denominadores q que são potência de 10, e tem méritos como sua praticidade para efetuar cálculos que a fazem a mais popular das representações dos números reais. Por outro lado, envolve a escolha arbitrária da base 10, e oculta frequentemente aproximações racionais de x muito mais eficientes do que as que exibe.

Por exemplo:

$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{700} < \left|\pi - \frac{314}{100}\right|$ e $\left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{3000000} < \left|\pi - \frac{3141592}{1000000}\right|$

Mostram que $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são melhores aproximações de π que aproximações decimais com denominadores muito maiores, e de fato são aproximações muito mais espetaculares do que se podia esperar.

O objetivo desta seção é apresentar uma outra maneira de representar números reais, a representação por *frações contínuas* , que sempre fornece aproximações racionais supreendentemente boas, e de fato fornece todas as aproximações excepcionalmente boas, além de ser natural e conceitualmente simples. Boa parte desta exposição é baseada em.

Definimos recursivamente

$$\alpha_0 = x, \;\; a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$$

$$e, \; se \; \alpha_{\;n} \notin \mathbb{Z}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} \; para \; todo \; n \; \in \mathbb{N}$$

$. \, Se, para \; algum \; n, \alpha_n = a_n \; temos :$

$$x = \alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] \stackrel{\text{def}}{=\!=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Se não denotamos

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...] \stackrel{\text{def}}{=\!=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

O sentido dessa última notação ficará claro mais tarde. A representação acima se chama *representação por frações contínuas* de x.

Exmplo:

Vamos escrever $\alpha = \sqrt{3}$ em forma de uma fração contínua:

Usando o algoritmo acima, vamos calcular $\sqrt{3}$, em forma de uma fração contínua.

Sabendo que $a_0 = \lfloor b_0 \rfloor$.

Visto que $\sqrt{3}$, está entre $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$, logo podemos afirmar que a parte inteira de $\sqrt{3}$ é maior que 1 (um) e menor que 2(dois).

Assim

$$b_1 = \frac{1}{b_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \text{ Logo, } b_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, a_1 = \lfloor b_1 \rfloor = 1.$$
$$b_2 = \frac{1}{b_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} \Rightarrow \sqrt{3} + 1. \text{ Logo, } b_2 = \sqrt{3} + 1,\ \ a_2 = 2.$$
$$b_3 = \frac{1}{b_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - 2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \text{ Logo, } b_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2},\ \ a_3 = 1.$$
$$b_4 = \frac{1}{b_3 - a_3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} \Rightarrow \sqrt{3} + 1. \text{ Logo, } b_4 = \sqrt{3} + 1,\ \ a_4 = 2.$$
$$b_5 = \frac{1}{b_4 - a_4} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - 2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \text{ Logo, } b_5 = \frac{\sqrt{3}+1}{2},\ \ a_5 = 1.$$

Por se tratar de um número irracional, a divisão vai continuar infinitamente.
podemos escrever $\sqrt{3}$ em forma de ma fração contínua:

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + ...}}}}}}$$

$$\alpha = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...].$$

A figura dá uma interpretação geométrica para a representação de um número por frações contínuas. Enchemos um retângulo 1 x x com quadrados de forma "gulosa ", isto é, sempre colocando o maior quadrado possível dentro do espaço ainda livre. Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, ...$ indicam o númeor de quadrados de cada tamanho. Na figura, se os lados do retangulo são $c < d$ então

$$\frac{d}{c} = [1; 2, 2, 1, ...]$$

Pois temos $a_0 = 1$ quadrado grande, $a_1 = 2$ quadrados menores, $a_2 = 2$ quadrados ainda menores, $a_3 = 1$ quadrados ainda ainda menores, em um número grande não desenhado de quadrados ainda ainda ainda menores (a_4 é grande). Deixamos a verificação de que esta descrito geométrica corresponde à descrição algébrica acima a cargo do leitor.

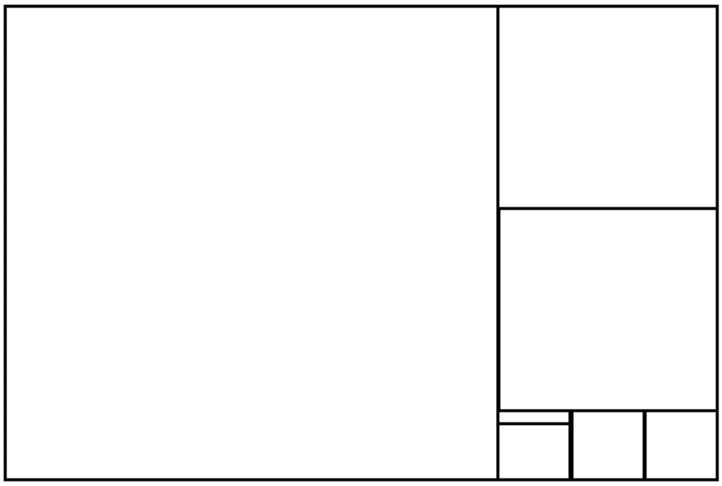

Figura 2.1: Enchimento do retângulo 1 x x de forma gulosa.

Note que, se a representação por frações contínuas de x for finita então x é claramente racional.

Reciprocamente, se $x \in \mathbb{Q}$, sua representação será finita, e seus coeficientes a_n vêm do algoritmo de Euclides: se $x = p/q$ $(com\ q > 0)$ temos

$$\begin{array}{ll} p = a_0 q + r_1 & 0 \le r_1 < q \\ q = a_1 r_1 + r_2 & 0 \le r_2 < r_1 \\ r_1 = a_2 r_2 + r_3 & 0 \le r_3 < r_2 \\ \vdots & \vdots \\ r_{n-1} = a_n r_n & \end{array}$$

Temos então

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}}$$

$$= ... = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n].$$

Isso já e uma vantagem da representação por frações contínuas (além de não depender de escolhas artificiais de base), pois o reconhecimento de racionais é mais simples que na representação decimal.

Proposição 2.1. *Dada uma sequência (finita ou infinita) $t_0, t_1, t_2... \in \mathbb{R}$ tal que $t_k > 0$, para todo $k \geq 1$, definimos sequências (x_m) e (y_m) por $x_0 = t_0,\ y_0 = 1,\ x_1 = t_0t_1 + 1,\ y_1 = t_1,\ x_{m+2} = t_{m+2}x_{m+1} + x_m, y_{m+2} = t_{m+2}y_{m+1} + y_m, \forall m \geq 0$. Temos então*

$$[t_0; t_1, t_2, ..., t_n] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{t_n}}}} = \frac{x_n}{y_n}, \forall n \geq 0.$$

Além disso, $x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1} = (-1)^n, \forall n \geq 0$.

Demonstração: A prova será por indução em n. Para $n = 0$ temos $[t_0] = t_0 = t_0/1 = x_0/y_0$. Para $n = 1$, temos $[t_0; t_1] = t_0 + 1/t_1 = \frac{t_0t_1+1}{t_1} = x_1/y_1$ e, para $n = 2$, temos:

$$[t_0; t_1, t_2] = t_0 + \frac{1}{t_1 + 1/t_2} = t_0 + \frac{t_2}{t_1t_2 + 1} = \frac{t_0t_1t_2 + t_0 + t_2}{t_1t_2 + 1}$$

$$= \frac{t_2(t_0t_1 + 1) + t_0}{t_2t_1 + 1} = \frac{t_2x_1 + x_0}{t_2y_1 + y_0} = \frac{x_2}{y_2}.$$

Suponha que a afirmação seja válida para n . Para $n + 1$ em lugar de n temos

$$[t_0; t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}] = [t_0; t_1, t_2, ..., t_n + \frac{1}{t_{n+1}}]$$

$$= \frac{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})x_{n-1} + x_{n-2}}{(t_n + \frac{1}{t_{n+1}})y_{n-1} + y_{n-2}}$$

$$= \frac{t_{n+1}(t_nx_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{t_{n+1}(t_ny_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}}$$

$$= \frac{t_{n+1}x_n + x_{n-1}}{t_{n+1}y_n + y_{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$$

Vamos agora mostrar, por indução, a segunda afirmação. Temos

$$x_1y_0 - x_0y_1 = (t_0t + 1) - t_0t_1 = 1 = (-1)^0$$

e, se $x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1} = (-1)^n$ para algum valor de n , então

$$x_{n+2}y_{n+1} - x_{n+1}y_{n+2} = (t_{n+2}x_{n+1} + x_n)y_{n+1} - (t_{n+2}y_{n+1} + y_n)x_{n+1}$$

$$= -(x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

Nos próximos resultados, $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$ será um número real, e $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right) n \in \mathbb{N}, \dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ será a sequência de reduzidas da fração contínua de x.

Corolário 2.2 *As sequências (p_n) e (q_n) satisfazem as recorrências*

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \quad e \quad q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$$

para todo $n \geq 0$, com $p_0 = a_0, p_1 = a_0a_1 + 1, q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$. Além disso,

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração: As sequências (p_n) e (q_n) definidas pelas recorrências acima satisfazem, pela proposição anterior, as igualdades

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] \; e \; p_{n+1}q_n - p_nq_n + 1 = (-1)^n, \forall n \geq 0.$$

Como $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que os p_n, q_n dados pelas recorrêsncias acima são primos entre si. Além disso, também segue da recorrência que $q_n > 0, \forall n \geq 0$. Esses fatos implicam que $\left(\frac{p_n}{q_n}\right) n \in \mathbb{N}$ é a sequência de reduzidas da fração contínua de x.

Proposição 2.3 *Sejam $a_0, a_1, ..., a_n$ inteiros com $a_k > 0, \forall k \geq 1$, e seja $(p_k/q_k)_{k\geq 0}$, a sequência de reduzidas da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$. Então o conjunto dos números reais cujo representação por franções contínuas começa com $a_0, a_1, ..., a_n$ é o intervalo*

$$I(a_0, a_1, ..., a_n) = \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \cup \{[a_0, a_1, ..., a_n, \alpha], \alpha > 1\}$$

$$= \begin{cases} [\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}) & \textit{se n é par} \\ (\frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}] & \textit{se n é impar.} \end{cases}$$

disso, a função $G : (1, +\infty) \to I(a_0, a_1, ..., a_n)$ dada por $G(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, \alpha]$ é monótona, sendo crescente pra n ímpar e decrecente para n par.

Demostração: É sificiente notar que, como na prova do corolário anterior, $G(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, \alpha] = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{(\alpha q_n + q_{n-1})q_n}$, e portanto G é crescente para n ímpar e decrecente para n par. Assim, como $G(1) = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ *e* $\lim_{\alpha \to +\infty} G(\alpha) = \frac{p_n}{q_n}$ temos

$$G((1, +\infty)) = \begin{cases} (\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}) & \textit{se n é par} \\ (\frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}) & \textit{se n é impar.} \end{cases}$$

Portanto,

$$I(a_0, a_1, ..., a_n) = \{\frac{p_n}{q_n}\} \cup \{[a_0, a_1, ..., a_n, \alpha], \alpha > 1\}$$

$$= \{\frac{p_n}{q_n}) \cup G((1, +\infty))$$

$$= \begin{cases} [\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}) & \textit{se n é par} \\ (\frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}] & \textit{se n é impar.} \end{cases}$$

Exmplo 2.4 Temos

Vamos escrever $\alpha = \sqrt{3}$ em forma de uma fração contínua:
Usando o algoritmo visto no inicio do capitulo, vamos supor que $\alpha_0 = b_0 = \sqrt{3}$.
Sabendo que $a_0 = \lfloor b_0 \rfloor$.
Visto que $\sqrt{3}$, está entre $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$, logo podemos afirmar que a parte inteira de $\sqrt{3}$ e maior que 1 (um) e menor que 2(dois). Assim

$b_1 = \frac{1}{b_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Logo $b_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, a_1 = \lfloor b_1 \rfloor = 1$.
seguinte

$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, ...]$, portanto

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{107}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}...$$

$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ..., 1, 1, 2n, ...]$

$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, ...]$ pois

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = ...$$

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, ...]$ pois

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}} = ...$$

Isto prova em particular que $\sqrt{2}$ e $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ são irracionais, pois suas frações contínuas são infinitas. Daí segue também que $\sqrt{2}-1 = [0; 2, 2, 2, ...]$ *e* $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = [0; 1, 1, 1, 1, ...]$ são pontos fixos da transformação de *Grauss g*.

2.1 Reduzidas e Boas Aproximações

Teorema 2.11 *Temos, para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| x - \frac{P_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

Além disso,

$$\left| x - \frac{P_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad ou \quad \left| x - \frac{P_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Demonstração: O número x sempre pertence ao segmento de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ cujo comprimento é

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}\right|=\frac{1}{q_nq_{n+1}}\Rightarrow\left|x-\frac{P_n}{q_n}\right|\leq\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{q_n^2}.$$

Além diss, se

$$\left|x-\frac{P_n}{q_n}\right|\geq\frac{1}{2q_n^2}\quad e\quad\left|x-\frac{P_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\geq\frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

então

$$\frac{1}{q_nq_{n+1}}=\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|+\left|x-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\geq\frac{1}{2q_n^2}+\frac{1}{2q_{n+1}^2}\Rightarrow q_{n+1}=q_n,$$

absurdo.

Observação 2.12 De fato $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$. Quanto maior for a_{n+1} melhor será a aproximação $\frac{p_n}{q_n}$ de x.

Teorema 2.13 (Hurwitz, Markov) *Para todo α irracional e todo inteiro $n\geq 1$, temos*

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

para pelo menos um racional

$$\frac{p}{q}\in\left\{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\frac{p_n}{q_n},\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right\}$$

Em particular, a desigualdade acima tem infinitas soluções racionais p/q.

Demonstração: Suponha que o teorema seja falso. Então, pela proposição 1.4, existe α irracional, $n\geq 1$ com $\alpha_n+\beta_n\leq\sqrt{5},\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}\leq\sqrt{5}$ e $\alpha_{n+2}+\beta_{n+2}\leq\sqrt{5}$. Devemos portanto ter $a_{n+1}=a_{n+2}=1$ já que claramente $a_k\leq 2$ para $k=n,n+1,n+2$ e se algum $a_k=2$ com $k=n+1,n+2$, teríamos $a_k+\beta_k\geq 2+\frac{1}{3}>\sqrt{5}$, absurdo.

Sejam $x=1/\alpha_{n+2}$ *e* $y=\beta_{n+1}$. As desigualdades acima se traduzem em

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{y}\leq\sqrt{5},\quad 1+x+y\leq\sqrt{5}\quad e\quad\frac{1}{x}+\frac{1}{1+y}\leq\sqrt{5}.$$

Temos

$$1+x+y\leq\sqrt{5}\Rightarrow 1+x\leq\sqrt{5}-y$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+x}+\frac{1}{y}\geq\frac{1}{\sqrt{5}-y}+\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{5}}{y(\sqrt{5}-y)}$$

e portanto $y(\sqrt{5}-y)\geq 1\Rightarrow y\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Por outro lado temos

$$x \leq \sqrt{5} - 1 - y \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-1-y} + \frac{1}{1+y} = \frac{\sqrt{5}}{(1+y)(\sqrt{5}-1-y)}$$

e portanto $(1+y)(\sqrt{5}-1-y) \geq 1 \Rightarrow y \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, e portanto devemos ter $y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, o que é absurdo pois $y = \beta_{n+1} = \dfrac{q_{n-1}}{q_n} \in \mathbb{Q}$.

Observação 2.14 Em particular provamos que $|\alpha - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tem infinitas soluções racionais $\dfrac{p}{q}$, para todo α irracional. O número $\sqrt{5}$ é o maior com essa propriedade. De fato, se

$$\varepsilon > 0, \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2},$$

temos

$$\left|q(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - p\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q}$$

$$\Rightarrow \left|q(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - p\right|\left|q(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) - p\right| < \frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right|}{\sqrt{5}+\varepsilon},$$

ou seja

$$|p^2 - pq - q^2| < \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5}\right| / (\sqrt{5}+\varepsilon).$$

Se q é grande, $1/q^2$ é pequeno, e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}$ é muito próximo de 0, donde o lado direito da desigualdade é muito próximo de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\varepsilon} < 1$, absurdo, pois $|p^2 - pq - q^2| \geq 1$, de fato se $p^2 - pq - q^2 = 0$ teriamos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\},$$

o que é absurdo, pois $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Outra maneira de ver que, para todo $\varepsilon > 0$, $|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)^2}$ tem apenas um número finito de soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é observar que as melhores aproximações racionais de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ são as reduzidas $\frac{p_n}{q_n}$ de sua fração contínua $[1;1,1,1,1,...]$ (ver próxima seção), para as quais temos $|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2}$, com $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$ se aproximando cada vez mais de

$$[1;1,1,1,...] + [0;1,1,1,...] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}.$$

2.2 Boas Aproximações são Reduzidas

O próximo teorema (e seu corolário 2.17) caracteriza as reduzidas em termos do erro reduzindo da aproximação de $x\ por p/q$, o qual é, pordefinição, $|qx - p|$, a razão entre $|x - p/q|$ e o erro máximo d aproximação por falta com denominador q, que é $1/q$.

Teorema 2.15 *Para todo* $p, q \in \mathbb{Z}, com\ 0 < q < q_{n+1}$ *temos*

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|.$$

Além disso, se $0 < q < q_n$ *a desigualdade acima é estrita.*

Demonstração: Como $mdc(p_n, q_n) = 1$, temos que se $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ então $p = kp_n\ e\ q = kq_n$ para algum inteiro $k \neq 0$ e nesse caso o resultado é claro. Assim, podemos supor que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ de modo que

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

já que $q < q_{n+1}$. Assim, $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}\ e\ \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ e portanto

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$$

o que implica

$$|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Além disso, a igualdade so pode ocorrer se $x = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1} \geq 2,\ e\ q_{n+1} > 2q_n$, pois numa fração contínua finita, como no algoritmo de Euclides, o último coeficiente a_n é sempre maior que 1. Nesse caso, se $q < q_n$, teremos

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

$$\geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_n + 1} > \frac{1}{qq_{n+1}}$$

o que implica

$$|qx - p| > \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|.$$

Corolário 2.16 *Para todo* $q < q_n$,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|$$

Corolário 2.17 *se $|qx - p| < |q'x - p'|$, para todo p' e $q' \leq q$ tais que $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, então p/q é uma reduzida da fração contínua de x.*

Demonstração: Tome n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Pelo teorema, $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$, e portanto $p/q = p_n/q_n$.

Teorema 2.18 *Se $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de x.*

Demonstração: seja n tal que $q_n \leq q \leq q_{n+1}$. Sumponha que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Como na demonstração do teorema anerior, $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_n+1}$ e assim $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Temos duas possibilidades:

a) Se $q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$ então $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$, absurdo.

b) Se $q < \frac{q_{n+1}}{2}$,

$$\begin{aligned} \left|x - \frac{p}{q}\right| &\geq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \\ &\geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} \\ &> \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2} \end{aligned}$$

o que também é um absurdo.

Dando $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos a $ordem$ de α por

$$ord\ \alpha = sup\left\{v > 0 \left| |\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^v} \text{ tem infinitas soluções } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right\}$$

Observamos que a ordem de todo número irracional pode ser calculado a partir de sua fração contínua.

Teorema 2.19 *Seja α um número irracional, e sejam $[a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$ sua fração contínua e $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ suas convergentes. Então*

$$ord\ \alpha = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{ln\ q_{n+1}}{ln\ q_n} = 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{ln\ a_{n+1}}{ln\ q_n}.$$

Demonstração: Sabemos que as melhores aproximações por racionais são obtidas a partir das convergentes da fração contínua, assim para calcular a ordem, basta calcular a ordem gerada pelas convergentes. Sejas $s_n > 0$ um número real tal que $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q^s n_n}$. Como foi provado no Capítulo 3 $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ e

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{n}\right| > \frac{1}{2}\left(\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{p_n}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Logo temos que

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q^s n_n} \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

e tomando o logaritmo obtemos

$$ln\ 2 + ln\ q_n + ln\ q_{n+1} \geq s_n ln\ q_n \geq ln\ q_n + ln\ q_{n+1}.$$

Portanto

$$ord\ \alpha = \limsup_{n\to\infty} s_n = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{ln\ q_{n+1}}{ln\ q_n}.$$

Para mostrar a segunda igualdade, observemos que $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, assim

$$a_{n+1}q_n < q_{n+1} < (a_{n+1} + 1)q_n,$$

agora tomando o logaritmo e dividindo por $ln\ q_n$ obtemos

$$\frac{ln\ a_{n+1}}{ln\ q_n} + 1 < \frac{ln\ q_{n+1}}{ln\ q_n} < \frac{ln(a_{n+1} + 1)}{ln\ q_n} + 1,$$

portanto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{ln\ q_{n+1}}{ln\ q_n} = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{ln\ a_{n+1}}{ln\ q_n}$$

Observe que usando a fração contínua de *e* (ver exercícios), é possível provar que $ord(e) = 2$.

2.3 Frações Contínuas Periódicas

Nesta seção provremos que os números reais com fração contínua periódica são eatamente as raízes de equações do segundo grau com coeficientes inteiros.

Lembramos que na representação de x por fração contínua, a_n, α_n são defnidos por recursão por

$$\alpha_0 = x, \quad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$$

e temos

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Isso dá uma prova explícita do fato de que se a fração contínua de x é periódica, então x é raiz de uma equação do segundo grau com coeficiente inteiros. De fato, se $\alpha_{n+k} = \alpha_n, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} > 0$ segue que

$$\frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}},$$

então $Ax^2 + Bx + C = 0$, onde

$$A = q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1}$$

$$B = p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n+k-1} - p_{n+k-2}q_{n-1} - P_{n-1}q_{n+k-1}$$

$$C = p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1}$$

Note que o coeficiente de x^2 é não-nulo, pois $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ é uma fração irredutível de denominador q_{n-2}, pois $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (1)^n,\ e\ \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-1}}$ é uma fração irredutível de denominador $q_{n+k-2} > q_{n-2}$, donde $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-1}}$, logo $q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \neq 0$.

Vamos provar agora um resultado devido a Lagrange segundo o qual se x é uma *irracionalidade quadrática,* isto é, se x é um irracional do tipo $r + \sqrt{s}, r, s \in \mathbb{Q}, s > 0$, então a fração contínua de x é periódica, *i.e.,* existem $n \in \mathbb{N} e k \in \mathbb{N} > 0$ com $\alpha_{n+k} = \alpha_n$. Neste caso, existem a, b, c inteiros tais que $ax^2 + bx + c = 0$, com $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional. como $x = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$, temos

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = 0 \\ \Rightarrow\ & a\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right) + c = 0 \\ \Rightarrow\ & A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + c(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2} \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2. \end{aligned}$$

Note que $C_n = A_{n-1}$. Vamos provar que existe $M > 0$ talque $0 < |A_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $0 < |C_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = aq_{n-1}^2\left(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right),$$

onde x e $\overline{x}$ são as raízes de $aX^2 + bX + c = 0$, mas

$$\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1 \Rightarrow |A_n| = aq_{n-1}^2 \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \left|\overline{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$
$$\leq a\left(|\overline{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right)$$
$$M = a(|\overline{x} - x| + 1).$$

Notemos agora que, pra qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac$$

Portanto

$$B_n^2 \leq 4A_nC_n + b^2 - 4ac \leq 4M^2 + b^2 - 4ac$$
$$\Rightarrow B_n \leq M' = \sqrt{4m^2 + b^2 - 4ac}$$

Provamos assim que $A_n, B_n\ e\ C_n$ estão uniformemente limitados, donde há apenas um número finito de possíveis equações $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$, e portanto de possíveis valores de α_n Assim, necessariamente $\alpha_{n+k} = \alpha_n$ para alguma escolha de $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} > 0$.

Capítulo 3

Determinando as Frações Contínuas com auxílio da calculadora e o microsoft office Excel 2016

Neste capitulo o foco foi concentrado na demostração da Fração Contínua com o auxílio da calculadora e do software excel. [8]

3.1 Utilizando a calculadora

Utilizando uma calculadora científica podemos facilmente escrever a fração contínua de um número $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ qualquer, fazendo o seguinte processo.

1º. $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$;

2º. Digitando o número α, e teclando =, aparecerá a aproximação decimal;

3º. Subtraindo a parte inteira, e clicando na tecla x^{-1} (inverso);

4º. A parte intera do resultado obtido é a_{i+1}, onde i é o numero de vezes que foi realizado o processo;

5º. Se $\alpha \epsilon \mathbb{Q}$, o processo é finito, onde repetimos o processo até resultar em um número inteiro, se $\alpha \epsilon \mathbb{Q}$ o processo nao termina, sendo periódico se α é algébrico de grau 2 e não periódico se α é transcedente ou algébrico de grau distinto de 2.

3.1.1 Fração propria

Tomaremos como exemplo a fração: $\frac{3}{8}$

1º fazemos a divisão na calculadora, note que o resultado esta entre zero e um.

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

Figura 3.1: Representação fotografica da divisão de 3 por 8

Obs: sempre que for uma fração propria o primeiro coeficiente vai ser 0 (zero).

2º pegamos o resultado da divisão de 3 por 8 e calculamos seu inverso:

$$0,375^{-1} = 2,66666666667$$

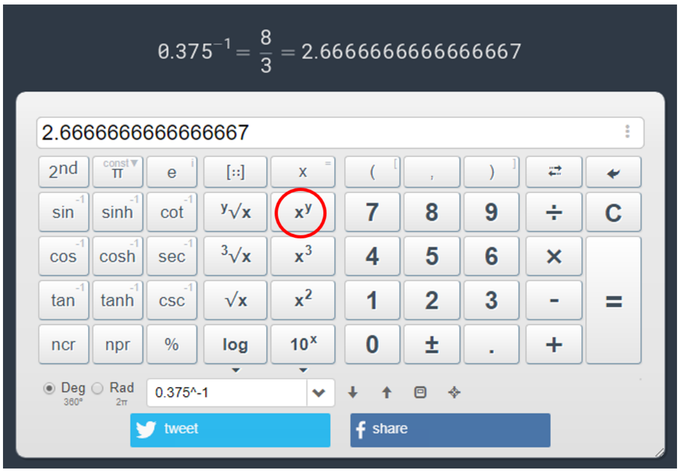

Figura 3.2: Representação fotografica de como calcular o inverso

3º subtraindo a parte inteira temos:

$$2,66666667 - 2 = 0,6666667$$

Obs: A parte inteira que foi subtraida e nosso novo coeficiente.

Figura 3.3: Representação fotografica subtraindo a parte inteira

4º O processo fica se repetindo ate chegar num número inteiro se for finito, caso seja infinito ele vai ficar se repetindo infinitamente.

Logo poderiamos demonstrar atraves do modelo de frações contínuas

$$\frac{3}{8} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = [0; 2, 1, 2]$$

Onde temos os coeficientes que sao:$[0; 2, 1, 2]$.

e nossas frações integrantes: $\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}$

3.1.2 $\sqrt{2}$ em Frações Contínuas com o auxílio da calculadora

Exemplo 3.1 $\sqrt{2} = 1.414213562...$
Solução: $a_1 = \lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$
Tomando $\alpha = \sqrt{2}$ e realizando o processo descrito em 3.1;
resultando em: 2.414213562... . Logo,

$$a_2 = 2,$$

repetindo o processo à partir do 3º item;
resultando em: 2.414213562... . Logo,

$$a_3 = 2,$$

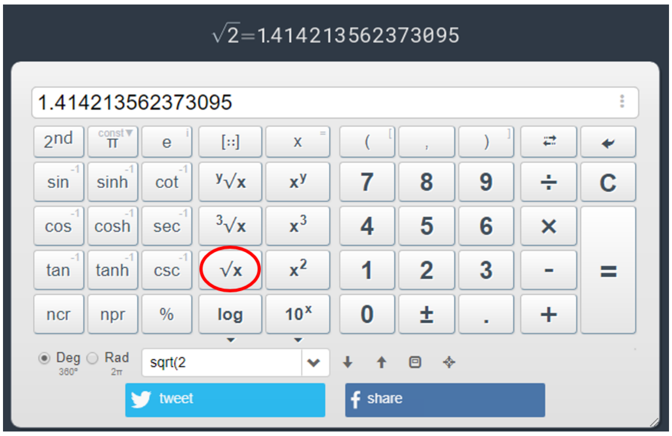

Figura 3.4: Com o auxílio da calculadora pra se determinar um valor aproximado de $\sqrt{2}$

Figura 3.5: Calculando o inverso da diferença

repetindo o processo à partir do 4º item;
resultando em: $2.414213562...$. Logo,

$$a_4 = 2,$$

repetindo o processo à partir do 5º item;
resultando em: $2.414213562...$. Logo,

$$a_5 = 2,$$

repetindo o processo à partir do 6º item;
resultando em: $2.414213562...$. Logo,

$$a_6 = 2,$$

Assim ,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + ...}}}}} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...]$$

De onde podemos determinar os seguintes convergentes, que resultam em boas aproximações racionais de $\sqrt{2}$.

$$C_1 = 1;$$

$$C_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

$$C_3 = \frac{2.3+1}{2.2+1} = \frac{7}{5} = 1,4;$$

$$C_4 = \frac{2.7+3}{2.5+2} = \frac{17}{12} = 1,4166666666666;$$

$$C_5 = \frac{2.17+7}{2.12+5} = \frac{41}{29} = 1.413793103;$$

Por fim, podemos observar que C_4 oferece uma excelente aproximação racional de $\sqrt{2}$, na qual o erro é manor do que $\dfrac{1}{3000000}$.

3.1.3 Númeor π em Frações Contínuas

Sabendo que $\pi \cong 3,141592653589...$
Temos como solução: $a_1 = \lfloor \pi \rfloor = 3$.

Tomando $\alpha = \pi$ e realizando o processo descrito em 3.1;
resultando em: 7,062513306. Logo,

$$a_2 = 7,$$

repetindo o precesso a partir do 3º item;
resultando em 15,99659441. Logo,

$$a_3 = 15,$$

repetindo o precesso a partir do 3º item;
resultando em 1,003417231. Logo,

$$a_4 = 1,$$

repetindo o precesso a partir do 3º item;
resultando em 292,6345907. Logo,

$$a_5 = 292,$$

repetindo o precesso a partir do 3º item;
resultando em 1,575818815. Logo,

$$a_6 = 1.$$

Assim,

$$\pi \cong 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}} = [3; 7, 15, 1, 292, 1, ...]$$

De onde podemos determinar os seguintes convergentes, que resultam em boas aproximações racionais do número π.

$C_1 = 3;$

$C_2 = 3 + \dfrac{1}{7} = \dfrac{22}{7} = 3,142857143;$

$C_3 = \dfrac{15.22 + 3}{15.7 + 1} = \dfrac{333}{106} = 3,141509434;$

$C_4 = \dfrac{1.33 + 22}{2.106 + 7} = \dfrac{355}{113} = 3,14159292;$

$C_5 = \dfrac{292.355 + 333}{292.113 + 106} = \dfrac{103993}{33102} = 3,141592653.;$

Por fim, podemos observar que C_4 oferece uma excelente aproximação racional de π, na qual o erro é manor do que $\dfrac{1}{3000000}$.

3.2 Utilizando o microsoft office Excel 2016

Utilizando o Software Excel podemos facilmente descobri os coeficientes e os convergentes atraves de uma planilha eletronita que mostrarei ao longo deste capitulo. [9]

Escrever a fração contínua de um número $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ qualquer, fazendo o seguinte processo.

1º. Abra o programa Excel, no meu caso estou utilizndo o microsoft office Excel 2016.

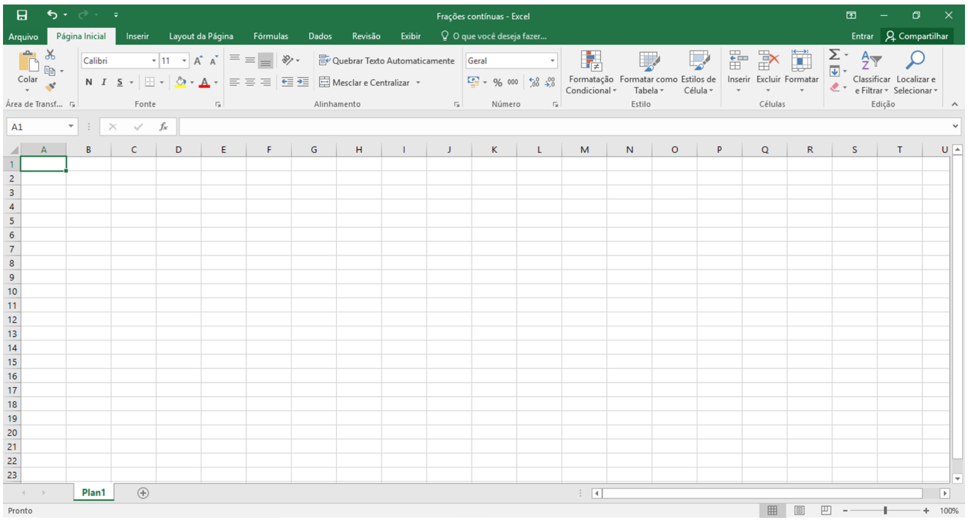

Figura 3.6: Microsoft office Excel 2016

2º. Selecione quatro células e nomeias como:

Na primera célula (Numero real - B2); na segunda (Parte inteira - C2); na terceira (parte decimal - D2) e na quarta (Inverso da parte decimal - E2).

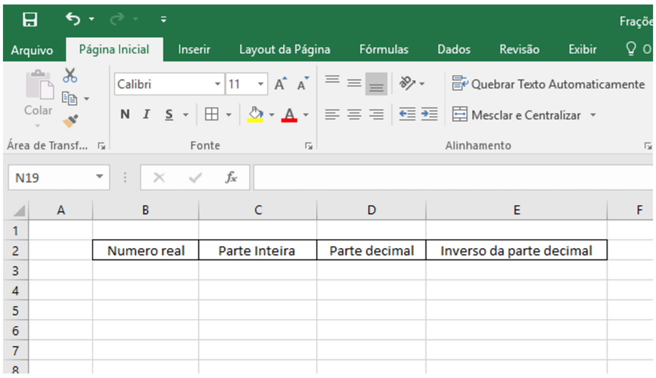

Figura 3.7: demonstração do segundo passo

Na célula (B2) podemos usar tanto uma fração como podemos usar um número decimal.

Na célula (C2) vamos determinar a parte inteira de um número real que foi inserido na célula B2 com a formula =INT(B2).

Na célula (D2) vamos determinar a parte decimal pela formula =B2-C2 (subtrair o numero real por sua parte inteira).

Na célula (E2) vamos daterminar o inverso da parte decimal pela seguinte formula =(1/D2) (para calcular o inverso precisamos somente dividir 1 (um) pela parte decimal).

Lembrando que a parte inteira vai ser nosso coeficientes e o inverso da pate decimal vai ser nosso novo número real.

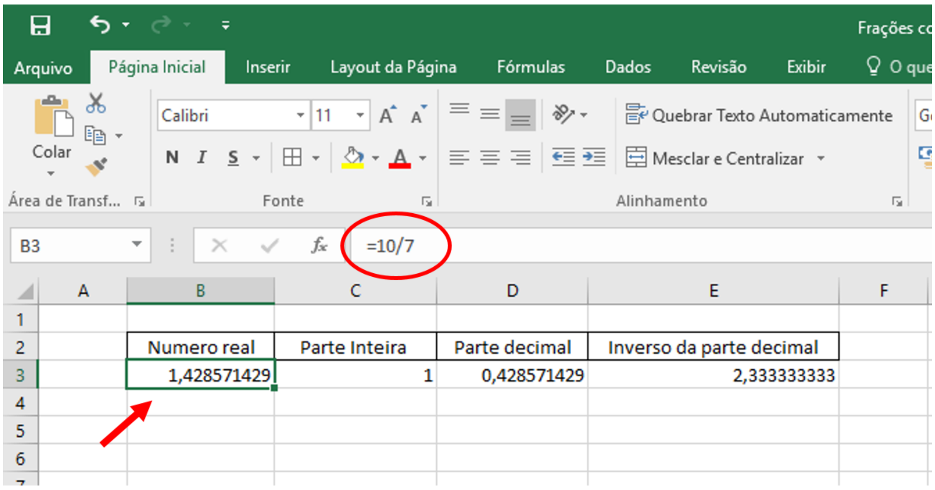

Figura 3.8: exemplo utilizando a fração 10 / 7

Agora e so repetir o precesso, se for um número racional esse processo vai ser finito até que o inverso de como resultado um numero inteiro, caso seja um numero irracional divisão será infinita.

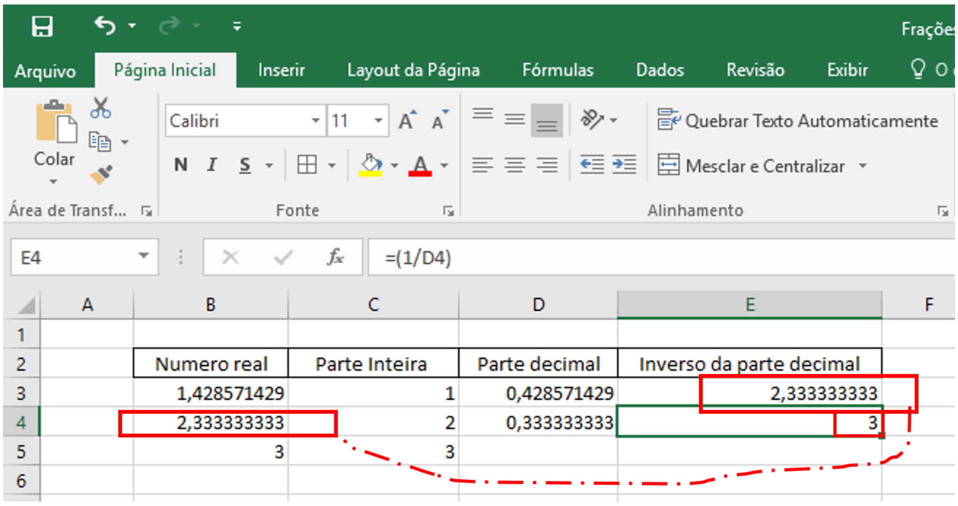

Figura 3.9: exemplo utilizando a fração 10 / 7 cont...

3.2.1 Representando o número π pelo Excel 2016

B4	3,14159265358979

	A	B	C	D	E
1					
2		Dados		**Coeficientes**	
3		Insira o valor Real		[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, ...]	
4		3,1415926535897900			
5					
6					
7		Numero real	Parte Inteira	Parte decimal	Inverso da parte decimal
8		3,14159265358979000	3	0,1415926535897900000	7,0625133059312100000
9		7,06251330593121000	7	0,0625133059312066000	15,9965944066446000000
10		15,99659440664460000	15	0,9965944066445560000	1,0034172310548200000
11		1,00341723105482000	1	0,0034172310548181700	292,6345874652040000000
12		292,63458746520400000	292	0,6345874652042200000	1,5758269030387900000
13		1,57582690303879000	1	0,5758269030387870000	1,7366329963444600000
14		1,73663299634446000	1	0,7366329963444590000	1,3575281109623100000
15		1,35752811096231000	1	0,3575281109623100000	2,7969828646716400000
16		2,79698286467164000	2	0,7969828646716360000	1,2547321207614800000
17		1,25473212076148000	1	0,2547321207614780000	3,9256925942856000000

Figura 3.10: Determinando os 10 primeiros coefcientes

G	H	I	J
Convergentes	Numerador	Denominador	Aproximação
1	3	1	3,0000000000000000000000
2	22	7	3,1428571428571400000000
3	333	106	3,1415094339622600000000
4	355	113	3,1415929203539800000000
5	103993	33102	3,1415926530119000000000
6	104348	33215	3,1415926539214200000000
7	208341	66317	3,1415926534674400000000
8	312689	99532	3,1415926536189400000000
9	833719	265381	3,1415926535810800000000
10	1146408	364913	3,1415926535914000000000

Figura 3.11: Determinando os 10 primeiros convergentes

Capítulo 4

Números Irracionais na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

4.1 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular [1], no que se contempla à área de matemática, diz que ela deve ser vista como um processo de contínuo aperfeiçoamento. Seu estudo não deve se limitar há um conjunto de conceitos, assim como mostra a História da Matemática, deve-se buscar as inquietações, a formulação, o teste e a validação das hipóteses, o contra exemplos, o desenvolvimento de linguagens, levando o individuo a novas formas de pensar que levem à reflexão e ações de maneira crítica sobre as questões com que se depara.

Para assim atingir os objetivos propostos, dividiremos em cinco eixos de aprendizagem, sendo estes:

Números e Operações;
Geometria;
Grandezas e Medidas;
Álgebra e Funções;
Estatística.

Ao longo do ano, cada um dos eixos recebe um destaque diferente, ressaltando que essa divisão é feita para facilitar à analise do conjunto de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento e como eles se relacionam, não podendo dividi-los, assim, as articulações devem ser o foco das atenções. O documento enfatiza que a matemática nos oferece modelos para compreender a realidade, e que no ambiente escolar pode assim estar envolvida nas praticas sociais, de outras áreas de conhecimento ou, até mesmo, contextos da própria matemática.

As noções de conjuntos numéricos iniciam no Ensino Fundamental, com grande destaque ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, e com a introdução aos números racionais $\mathbb{Q}$. A BNCC tem como objetivo que o educando associe as frações ao resultado de uma divisão e à ideia de parte de um todo, reconhecendo as características dos números naturais e decimais no que se refere à leitura, escrita e ordenação. No decorrer muitos conceitos com os quais os estudantes já vivenciaram são revistos com um grau maior de dificuldade, por meio de sucessivas descobertas de possibilidades e conceitos. No campo dos números constroem-se os números inteiros negativos, os racionais e os irracionais tendo, assim, adquirido o conhecimento sobre o conjunto dos números reais, percebendo assim como identificá-los, compará-los e ordená-los, associando corretamente esses números na reta numérica.

Para investigar a noção de número, é preciso desafiar o educando diante de problemas nos quais os números racionais não sejam suficientes para resolvê-los, já no oitavo ano do ensino fundamental II, levando-os a perceber a necessidade dos números irracionais, que serão trabalhados de forma sistemática no nono ano do mesmo seguimento, oportunizando os mesmos a resolverem problemas como a medida das diagonais de polígonos.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular, nessa etapa é importante trabalhar com aproximação e erro, utilizando, como ferramenta metodologica o uso da calculadora, na qual apresenta arredondamento para os números racionais, que resultam em decimais com muitas casas ou dízimas periódicas, e para os números irracionais.

Assim, nas operações aritméticas e algébricas com os irracionais, o estudande deve ser conduzido a efetuá-las seguindo regras operatórias análogas às que são válidas para os racionais ou, então, no caso de radicais, operar com potências de expoente fracionários.

A proposta apresenta as seguintes habilidades que os educandos devem obter até o fim do Ensino Fundamental II:

- Reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio na relação com pontos na reta numérica;
- Compreender e efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes negativos e fracionários;
- Compreender a relação entre potenciação e radiciação, efetuar cálculos com potências de expoentes naturais e aplicar esse conhecimento na representação de notação científica;
- Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

No estudo das grandezas e medidas, sertificasse que é necessário uma intervençao sobre a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos, principalmente dos racionais para os reais, partir da utilização de números irracionais para representação de medidas de segmentos incomensuráveis, sendo importante ampliar o conhecimento sobre a circunferência e tomar cuidado com a apresentação, por vezes inapropriada do número π como a razão entre as medidas do comprimento e do diâmetro da circunferência, sem destacar o fato de pelo menos uma dessas medidas ser um número irracional.

Tendo como objeto final, que o estudante tenha compreendido a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos dos naturais aos reais, sistematizando procedimentos de cálculo e propriedades para resolver problemas do cotidiano, de outras áreas do conhecimento e da própria matemática. As áreas da matemática devem ser proferidas, por exemplo em relação à números e Operações e Álgebra e Funções, o estudante pode ordenar números reais, localizando-os na reta numérica, compreendendo as noções de intervalo, densidade e completude do conjunto dos números reais, no contexto de equações e inequações.

O documento BNCC apresenta o pilar de que cada estudante tem o direito de aprender ao cursar a Educação Básica em cada uma de suas etapas e em cada componente curricular. Aqui foi apresentado, de forma sintética, as principais ideias, nas quais a utilização das Frações Contínuas não como conteúdo específico, mas sim como um facilitador para compreensão, exploração e aprofundamento dos conteúdos associados à teoria dos números, em especial o conjunto dos números reais pode desempenhar um importante papel na aquisição destes conhecimentos pelos estudantes. Vale ressaltar que o documento não substitui as Diretrizes Curriculares de cada sistema de Ensino e nem os limita.

4.2 Divisão dos conteúdos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Os conteúdos estão organizados em três grandes áreas e a matemática pertence à Ciências da Natureza e Matemática, que ainda inclui Física, Química e Biologia. Para os organizadores a contextualização é imprescíndivel, mas esta necessita ser equilibrada com a capacidade de abstração, criando um ciclo contextualizar/ abstrair/ contextualizar/ abstrair. A abstração é uma ferramente para construção do conhecimento em todas as áreas, não se deve em nome de um utilitarismo imediatista privar os alunos de temas epistemológica e culturalmente relevantes.

O conceito de aproximação é muito relevante no documento, que ressalta que os números irracionais, por exemplo, só existem na realidade concreta, inclusive nos computadores, por meio de suas aproximações racionais. Ressaltando ainda que um cálculo aproximado, em geral, é tão importante quanto um cálculo exato, desde que se cumpra os procedimentos matemáticos bem explicitados, em geral, uma aproximação é ótima se, e somente se, tenhamos permanentemente condições de melhorá-la, tanto quanto se queira.

Os conteúdos básicos foram divididos em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações. No que se refere aos Números, as situações de aprendizagem podem estar apoiadas na História, por exemplo, a ampliação dos números naturais para inteiros por causa das necessidades prementes do desenvolvimento comercial e financeiro dos séculos XV e XVI, ou em situações concretas de medida, em que se pode articular desde a relação entre notação decimal e fracionária de um número até a ampliação para o campo real, como a necessidade de utilizar as raízes para represen- tar, por exemplo, a diagonal de um quadrado de lado 1.

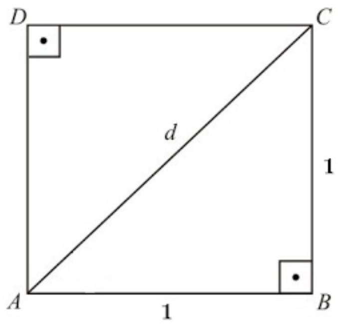

Figura 4.1: Quadrado de lado 1x1

Ressaltamos que no Ensino Fundamental os números racionais surgem de relações entre os inteiros e a motivação básica para a compreensão dos irracionais envolve grandezas incomensuráveis, e ao fim desta modalidade deseja-se que o estudante saiba produzir no campo numérico real, o que constitui porta de entrada para aprofundar, sistematizar e estabelecer novas relações. O sapiência de sucessões numéricas, números irracionais e aproximações racionais usadas em problemas práticos.

Por fim, o documento ressalta que compreender o significado é mais importante do que a utilidade prática, sendo assim, a História da Matemática é muito importante para que os significados sejam construídos.

Vamos destacar os seguintes momentos do Ensino Fundamental II, em que se trabalha as habilidades;

- 8º ano - 1º Bimestre: Números Racionais na transformação de decimais finitos em fração e de dízimas periódicas em fração geratriz, desenvolvendo as habilidades de relacionar frações e razões, bem como as condições nas quais uma razão pode ser expressa como dízima periódica, bem como saber calcular a fração geratriz de uma dízima;

- 9^o ano - 1^o Bimestre: Conjuntos Numéricos, Números irracionais e Potenciação e Radiciação de Reais. Compreendendo a necessidade da ampliação dos conjuntos numéricos, saber ordenar os números na reta real e incorporar a ideia básica de que os números irracionais só podem ser utilizados em contextos práticos por meio de suas aproximações racionais, sabendo calcular a aproximação racional de um número irracional;

- 9^o ano - 4^o Bimestre: O número π, compreender o significado do π como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e a área da circunferência;

4.3 Nos Livros Didáticos

A escolha da coleção do material didáticos que irei apresentar deve-se ao fato de ser adotado pela instituição que leciono: COLEGIO PALAS ATENA.

Sendo este:

SOUZA, joaquim; PATARO, Patricia.Vontade de saber Matemática, 3ed.; São Paulo. FTD. 2015

4.3.1 Ensino Fundamental

O conjunto dos números irracionais é introduzido no 8^o ano do Ensino Fundamental II, o texto de introdução remete aos pitagóricos a descoberta dos números irracionais, na busca de determinar a medida da diagonal de um quadrado de lado 1.

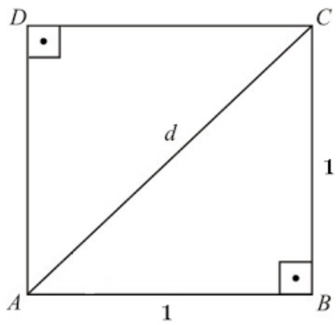

Figura 4.2: Diagonal do quadrado igual a $\sqrt{2}$

O breve texto não apresenta o conceito de grandezas incomensuráveis, e de forma muito superficial cita a comunidade pitagórica. Logo após, apresenta um número racional com representação decimal na forma de dízima periódica, e a aproximação decimal de $\sqrt{3}$ pedindo que o estudante observe que no último caso não ocorre a periodicidade, sendo essa uma característica dos números irracionais.

Em seguida, são apresentados alguns exemplos de números irracionais com suas respectivas aproximações decimais. Também é apresentado o diagrama dos conjuntos numéricos, onde pode-se observar que o conjunto dos números racionais e irracionais são disjuntos, enquanto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, mas sem aprofundar este conceito, na mesma página tem uma caixa de texto que indica que o número π é irracional, podendo ser obtido pela razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência, citando que vários povos ao longo da história realizaram aproximações para π, fazendo referência a Bíblia que apresenta aproximação de π como 3. Ainda na mesma página ilustra-se como representar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica utilizando compasso.

Na primeira lista de atividades, pede-se que classifique alguns números como racionais e irracionais, atividade com a utilização da calculadora para operar com medidas de perímetro e diâmetro de circunferências e determinar a sua razão. Também é proposto um desafio, no qual se busca contextualizar o número irracional π num problema de irrigação, cujo uma área circular é irrigada por um pivô central.

Retomando conceitos teóricos, o livro apresenta a relação entre os conjuntos numéricos e destaca algumas propriedades do conjunto dos números irracionais, além da posição de diversos números reais na reta. A seguir, temos mais algumas atividades para fixar esses conceitos, e a unidade encerra, com uma atividade onde são explicitados os passos para representar $\sqrt{5}$ no GEOGEBRA, percebendo algumas características geométricas, relacionando área de quadrado, medida do lado e raio de circunferência.

Observamos de forma clara que muito do que se pede na BNCC está sendo atendido no livro didático, mas é perceptível que, apesar de citar fatos da História da Matemática, não buscou-se contextualizar estes conceitos dentro da própria História. Além disso, deve-se atentar à necessidade de explicitar alguns conceitos teóricos evitando, assim, que os estudantes aprendam conceitos equivocados, por exemplo, ao relacionar o número π a razão entre o perímetro da circunferência com o seu diâmetro, não se explicitou que ao menos uma dessas grandezas é irracional, podendo levar a falsa impressão de que este número possa ser representado pela razão de dois números racionais. Ressaltamos que compreendo que no 8º ano o objetivo é introduzir o assunto que será aprofundado no 9º ano, mas entendemos que essa introdução poderia enfatizar os aspectos históricos, possibilitando aos estudandes sensibilizarem-se com as questões que motivaram o avanço da matemática.

No 9º ano, o estudo é voltado a radiciação, propriedades, simplificação, operações dos radicais e racionalização dos denominadores, relacionando alguns conceitos aos aspectos geométricos e utilizando as ferramentas como apoio tecnológico. Embora reconheça a importância do domínio das técnicas operatórias que são apresentadas, falta o aprofundamento dos conjuntos numéricos, e a conceitualização das características do conjunto dos números reais.

Ao expor o conjunto dos números racionais, observa-se a possibilidade de realizar divisões que eram impossíveis no conjunto dos números inteiros, retoma a representação decimal dos números racionais, apresentando que o matemático holandês Simon Stevin(1548-1620) do século

XVI, foi quem a sistematizou em seu livro "A dízima", publicado em 1585. Ainda, reapresenta a fração geratriz, relaciona os números racionais à medida de grandezas e ordena os números racionais na reta numérica.

Após, expõe os números irracionais, apresentando a ideia de segmentos de reta incomensuráveis, ilustrando essa situação com a diagonal do quadrado de lado 1, utiliza-se da representação decimal e calculadora para aproximar a $\sqrt{2}$, ilustrando assim, a ideia de aproximações sucessivas para mostrar que esse número é irracional, cita o número π e o número de ouro ϕ como números irracionais, mostrando que o primeiro refere-se a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro e o segundo a razão entre dois segmento, onde $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, ilustra ainda que o número π já foi escrito com 1,2 trilhões de casa decimais e que o número de ouro fora utilizado em pinturas de Leonardo da Vinci.

O autor propõe uma leitura na qual relata a crise dos incomensuráveis no pensamento pitagórico e a resistência dos matemáticos com os números irracionais que perdurou até o século XIX, até George Cantor fundamentá-los adequadamente. Na sequência há uma demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional. Por fim, define-se o conjunto dos números reais, apresentando a reta real, após define-se a desigualdades entre números reais, módulo de um número real e a distância entre dois pontos na reta real.

O referido livro embora apresente a ideia de que números irracionais não possuem representação na forma de fração e nem decimal, podendo apenas ser bem aproximados por estes, não apresenta uma forma sistemática de realizar boas aproximações de números irracionais por racionais, o que poderia ser feito com a utilização das frações contínuas.

Capítulo 5

Aplicações das Frações Contínuas em problemas cotidianos e alguns exemplos

5.1 Olimpíada Brasileira de matemática nas escolas publicas e particulares (OBMEP)

5.1.1 OBMEP-2018 Questão 10, primeira fase nível 2

Na igualdade abaixo, a, b e c são números inteiros positivos. Qual é o valor de c?

$$\frac{10}{7} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$$

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 7
Resolução:(alternativa b)

$$\frac{10}{7} = \frac{7+3}{7} = 1 + \frac{3}{7} = \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{6+1}{3}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}$$

Logo, a = 1, b = 2 e c = 3 satisfazem a expressão do enunciado.

Não há outra solução além de c = 3. Veja uma outra maneira de resolver a questão:

De acordo com o enunciado, a, b, c ≥ 1. como $1 < \dfrac{10}{7} < 2$, segue que a = 1. De fato, se a

$\geq$2, deveríamos ter $\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}} < 0$, o que não ocorre. Consequentemente, $\dfrac{10}{7} = 1 + \dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}$.

Basta encontrar b e c tais que $\dfrac{3}{7} = \dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}} = \dfrac{c}{bc+1}$.

A partir dessa igualdade de frações, concluímos que $7c = 3(bc+1)$. Como 3 e 7 são números primos, segue que 3 divide c, bem como 7 divide $(bc+1)$. Portanto, existem dois números naturais positivos m e n satisfazendo $c = 3me(bc+1) = 7n$.

Assim, $7nc = (bc+1)(3m) = 3(bc+1)m = 7cm$, o que garante que $m = n$. Logo, $bc+1 = b(3m)+1 = 7n = 7m$ e, então, $1 = 7m - 3bm = m(7-3b)$. Consequentemente, m = 1, pois m divide 1 e é positivo. Segue que $c = 3m = 3$ e também que $b = 2$, pois $3b+1 = 7$.

5.2 O número de Ouro

5.2.1 Um pouco da história do número ϕ o número de ouro

Envolto em muito mistério e características divinas, o número ϕ desperta há muito tempo a curiosidade e o desejo de muitos matemáticos em encontrar as suas ilimitadas aplicações. Phi é, na verdade, a pronuncia da letra ϕ grega, inicial do nome Fídeas, escultor e arquiteto grego responsável pela construção do Partenon, em Atenas.

O misterioso ϕ é também conhecido como número de ouro. Devido as suas incontáveis aplicações, muitos o condirem como sendo uma oferta de Deus ao mundo. Ele é simbolicamente representado por ϕ.

Uma maneira de encontrar a representação numérica de ϕ é através da razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, , que equivale à dízima não periódica 1,61803398...Sendo assim, é um número irracional,encontrado a partir da razão áurea (razão de ouro, divina proporção etc.). Dados dois pontos A e B, em extremidades opostas de um segmento de reta, um ponto X divide AB em uma razão áurea se X pertence ao segmento AB e $\frac{AX}{XB} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398...$

O reconhecimento do número de ouro se faz há tanto tempo quanto os nossos registros históricos conseguem alcançar. No Egito Antigo, por exemplo, as pirâmides de Gizé foram construídas tendo por base a razão de ouro: A razão entre a altura de uma face e metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro. Já no Papiro de Rhind menciona uma razão sagrada, que se entende como sendo a razão áurea.

O templo Partenon, construído entre 447 e 433 a.C.,contém a razão de Ouro no retângulo que contêm a fachada (Largura/Altura). Na estrela pentagonal, os pitagóricos também utilizaram a razão áurea; Endoxus, matemático grego, utilizou os seus estudos sobre proporções para estudar a secção que se crer ser a secção áurea; Fibonacci utilizou a razão áurea na solução do famoso problema dos coelhos e nos presentou como que hoje conhecemos como as equência de números de Fibonacci; importante contribuição e utilização para evolução do número de ouro foi dada, também, por Leonardo Da Vinci, por exemplo, em uma de suas pinturas mais famosas: o Homem Vitruviano. Da Vinci utilizou a razão áurea para garantir a perfeição de suas obras.

5.2.2 A construção e a representação em frações contínuas do número de ouro

No Livro [10], Euclides nos fornece a seguinte definição: "Um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo."

Com a finalidade de encontrar o número de ouro, divide-se um segmento em outros dois de comprimentos a e b, conforme a figura abaixo:

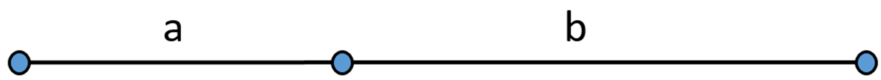

Figura 5.1: Seguimento de comprimento a + b

De acordo com a de?nição de Euclides, temos que:

$$\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Logo:

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

e, consequentemente,

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

onde uma das raízes da equação anterior é $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Repetindo indefinidamente a equação acima, é possível obter a representação do número ϕ, como segue abaixo:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}}$$

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}}}$$

Portanto, a representação em frações contínuas do número de ouro é dada por:$\phi = [1; 1, 1, 1, 1, 1, ...]$
Abaixo estão indicadas as cinco primeiras aproximações:

$$1 = \frac{1}{1}$$

$$[1; 1] = \frac{2}{1}$$

$$[1; 1, 1] = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$[1; 1, 1, 1] = \frac{5}{3}$$

$$[1; 1, 1, 1, 1] = \frac{8}{5} = 1,6$$

Uma propriedade interessante que surge nesses cálculos são os termos das sequência de Fibonacci. Observe que, nos numeradores das frações que aparecem como resultado em cada processo, temos respectivamente os números 1, 2, 3, 5 e 8. Apartir daí, podem ser descritos alguns termos dessa sequência, onde o termo geral é dado por

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n, \ \ n \geq 2 \ \ com \ \ a_1 = 1 \ \ e \ \ a_2 = 1$$

Além disso, observa-se certa lentidão com que os resultados desse processo se aproximem do valor exato de ϕ. Com base nessa análise, talvez o número de ouro seja o mais irracional dos números irracionais.

Conhecendo a representação na forma de frações contínuas do número de ouro, podemos obter a sua representação geométrica por meio das coberturas de forma "gulosa", conforme mencionamos no capítulo 2. Como cada coe?ciente da representação na forma de frações contínuas de ϕ é igual a unidade, a cada etapa da cobertura será necessário somente um maior quadrado dentro do espaço ainda livre.

5.3 Calendário Gregoriano

O Calendário Gregoriano teve a sua origem na Europa no século XV, promulgado pelo Papa Gregório XIII(1502-1585) em 24 de Fevereiro do ano 1582, em substituição ao calendário juliano, mais antigo, implantado pelo líder romano Júlio César (100 a.C.- 44 a.C.) em 46 a.C., sendo utilizado oficialmente pela maioria dos países. Por razões históricas, além da convenção e praticidade, o calendário gregoriano foi adotado para demarcar o ano civil no mundo inteiro, facilitando o relacionamento entre as nações do resto do globo.

Se divide em 12 meses, sendo que Janeiro, Março, Maio, Julho, Agosto, Outubro e Dezembro possuem 31 dias, e os demais, Abril, Junho, Setembro e Novembro, 30 dias, com exceção do mês de fevereiro que oscila entre 28 e 29 dias, a depender dos anos bissextos.

Entre as mudanças, foram omitidos dez dias do calendário juliano, excluindo os dias entre 5 a 14 de outubro de 1582, ditando que o dia imediato à quinta-feira, 4 de outubro, fosse sexta-feira, 15 de outubro. Com isso, os anos seculares só são considerados bissextos se forem divisíveis por 400. Sendo assim, a diferença (atraso) de três dias em cada quatrocentos anos observada no calendário juliano passaram a não existir. Corrigiu-se também a medição do ano solar, passando a medir um ano gregoriano em uma média de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos.

A seguir, serão apresentadas a solução por frações contínuas e a solução decretada pelo Papa Gregório XIII para esse calendário:

5.3.1 Solução do problema do calendário através de frações contínua

O ano trópico, aquele que marca as estações, tem a duração média de 365 dias 5 horas 48 minutos e 46 segundos = 365, 242199 dias. O calendário Juliano, estabelecido em 45 a.C., considera a aproximação 1 ano = 365 dias 6 horas = 365, 25 dias, ou seja, tinha uma diferença de cerca de 11 minutos. Esta diferença de 11 minutos, em cem anos, causava um desvio de 18h 43min 20s

Esta aproximação causou um problema: as estações reais haviam retrocedido treze dias em relação ao calendário Juliano. Em 1582, o papa Gregório III convocou sábios para resolver este problema. Desde 45 a.C. até 1582, se passaram 1627 anos. O desvio acumulado desde então era de 12dias 16h 36min 38s.

Para tal, principiou-se em se calcular o desvio proporcionado para um dia. Se em 1 ano o desvio é de 11 min 14s (674 s), então um dia proporciona o desvio dado por 128,19 anos. Assim, ocorre aproximadamente desvio de 128 anos para cada dia, ou seja, de cerca de 3 dias em cada 400 anos. Isto provocou uma pequena alteração na intercalação de três anos de 365 dias e um ano de 366 dias, que já era própria do calendário juliano.

Enquanto a duração média do ano Juliano era de 365 dias 6h, com a retirada de três dias do calendário gregoriano, o valor passou a ser $365\frac{97}{400}$ dias = 365,242500 dias, isto é, 365dias 5horas 49min 12s. O que ainda causa uma diferença de cerca de 26 segundos do valor real. A duração média de 1 ano é 365, 242199 dias. Daí, obtemos a fração $\frac{5h48min46s}{1dia} = \frac{20926}{86400} = \frac{10463}{43200}$.

A fração contínua correspondente ao 1º ano é [365; 4, 7, 1, 3, 5, 64].

O 1º convergente é 365 dias.

O 2º convergente é dado por:

$$365 + \frac{1}{4}\ dias$$

Própria do calendário Juliano.

O 3º convergente é dado por:

$$365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}} = 365 + \frac{7}{29}$$

Ou seja, 7 anos bissextos a cada 29 anos.

O 4º convergente é dado por:

$$365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1}}} = 365 + \frac{8}{33}$$

Ou seja, 8 anos bissextos a cada 33 anos.

O 5º convergente é dado por:

$$365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}} = 365 + \frac{31}{128}$$

Ou seja, 8 anos bissextos a cada 33 anos.

O 5º convergente é dado por:

Logo, ao total dos 400 anos, existem aproximadamente 97 anos bissextos.

Isto é uma incrível coincidência, pois não há indícios do uso de frações contínuas nos procedimentos de correção do calendário gregoriano.

5.3.2 Solução decretada pelo Papa Gregório XIII

Acostumou-se a começar cada ano novo em 1 de Janeiro. Poucos anos seculares se consideram bissextos, só aqueles que sejam divisíveis por 4 e não sejam terminados em duplo zero, exceto os divisíveis por 400. Deste modo, evita-se o desfasamento de um dia em cada cem anos. O ano bissexto ocorre a cada quatro anos após o último ano bissexto.

5.4 Problema da Engrenagem [Adaptado de Sanches; Salomão (2003)].

Um fabricante de relógios precisa produzir dois tipos de rodas dentadas na razão $\sqrt{2} : 1$. É impraticável que estas rodas tenham mais que 20 dentes. Encontre algumas possibilidades para os números de rodas que irão aproximar a razão desejada, utilizando as aproximações dadas pelos convergentes consecutivos de uma fração contínua simples.

A Relação de transmissão, da coroa (engrenagem maior) para o pinhão (engrenagem menor), pode ser representada por $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$ onde "x" representa o número de dentes da coroa e "y" representa o número de dentes do pinhão, com "x" e "y" inteiros positivos.

Para representar a raiz na forma de frações contínuas, a primeira solução que encaminhamos é o que denomino procedimento aritmético. Este consiste em escrever, seqüencialmente, os convergentes, até se obter uma fração que responda a questão, ou seja, que respeite a condição de contorno dada pelo limite de 20 dentes, para a engrenagem maior (coroa).

(1º convergente)

$$c_0 = \sqrt{2} = 1,4142136 = 1$$

(2º convergente)

$$c_1 = \sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + 0,4142136 = 1 + \frac{1}{2,4142136} \approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(3º convergente)

$$c_2 = 1 + 0,4142136 = 1 + \frac{1}{2,4142136} = 1 + \frac{1}{2 + 0,4142136} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{2,4142133}} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

(4º convergente)

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,4142133}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 0,4141133}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,4142151}}} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{17}{12}$$

O 4º convergente revela que o nº de dentes da coroa seria 17 e o do pinhão 12, com aproximação dada por: $\frac{17}{12} = 1,4166667$, o que proporciona uma aproximação correta até a ordem das centenas, que para um par de engrenagens usuais é satisfatória.

Determinando-se o 5º e o 6º convergente, tem-se:

$$c_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2,4142151}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 0,4142151}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,414046}}}} \approx \frac{41}{29}$$

$$c_5 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,414046}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0,414046}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142658}}}}}} \approx \frac{99}{70}$$

Observa-se, nos seis primeiros convergentes, que existe uma repetição do algarismo 2. Será que tal conjectura é verdadeira? Para verificá-la, de modo mais geral, podemos escrever um segundo procedimento, de natureza algébrica. De $\sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + \frac{1}{x_1}$, donde $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1}$.

Ainda, de $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$. que racionalizando o resultado: $x_1 = \sqrt{2} + 1$

Daí, $x_1 = \sqrt{2} + 1$. como $\sqrt{2} > 1$, então: $x_1 = \sqrt{2} + 1 = 1 + 1 + \frac{1}{x_2} = 2 + \frac{1}{x_2}$. Assim:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}}. \ De : x_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = x_1$$

Assim, por substituições sucessivas:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_3 + ...}}} = [1; 2, 2, 2, ...] = [1; \overline{2}]$$

Este algoritmo exemplifica que um número irracional tem representação infinita na forma de fração contínua simples periódica. De modo geral, nem, todo número irracional tem representação periódica. Lagrange, em 1770, demonstrou que somente os números irracionais algébricos têm representação periódica.

Credita-se que o uso de frações contínuas remonte aos séculos XVI, XVII e XVIII, porém há indícios que outros povos antigos conhecessem rudimentos desse tema. Segundo Boyer (1973), os primeiros passos remontam a Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), de Bolonha, que escreveu algumas raízes quadradas na forma de frações contínuas.

Assim, um terceiro procedimento, também de natureza algébrica, para expressar o número $\sqrt{2}$ na forma de uma fração contínua, consiste em escrever a equação polinomial $x+1=\sqrt{2}$. Elevando-se ao quadrado ambos os lados, desenvolvendo o 1º membro e ordenando os termos em "x"no 1º membro, temse: $(x+1)^2=2 \Rightarrow x^2+2x+1=2 \Rightarrow x^2+2x=1$. O próximo passo é fatorar o 1º membro e isolar "x", de modo que: $x^2+2x=1 \Rightarrow x(x+2)=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2+x}$.

Deste modo, no denominador do 2º membro está presente a incógnita "x", que novamente por ser substituída, de modo recorrente, resultando a expressão em forma de fração contínua.

$$x=\frac{1}{2+x} \Rightarrow x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}} \Rightarrow x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}}} \Rightarrow x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}}$$

Como $x+1=\sqrt{2}$, então:

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}} \Rightarrow \sqrt{2}=x+1=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}}=[1;2,2,2,2,...]$$

Um quarto procedimento para expressar uma fração contínua é dado por Bombelli (séc XVI). Consiste na expressão:

$$x=\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+...}}}.$$

A demonstração de tal expressão é fornecida abaixo.

$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b}$, tem-se:

$N = a^2 + b \Rightarrow N - a^2 = b \Rightarrow (\sqrt{N} - a).(\sqrt{N} - a) = b \Rightarrow (\sqrt{N} - a) = \dfrac{b}{\sqrt{N} + a}$.

Mas:

$\sqrt{N} - a = \dfrac{(\sqrt{N} - a).(\sqrt{N} + a)}{\sqrt{N} + a} = \dfrac{N - a^2}{\sqrt{N} + a} = \dfrac{b}{\sqrt{N} + a} = \dfrac{b}{2a + \sqrt{N} - a}$.

E aplicando-se sucessivamente o resultado acima:

$\sqrt{N} - a = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \sqrt{N} - a}} = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + ...}}} \Rightarrow \sqrt{N} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + ...}}}$.

Aplicando-se tal procedimento para a representação de $\sqrt{2}$ como fração contínua simples, tem-se:

$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} = 1 + \cfrac{1}{2.1 + \cfrac{1}{2.1 + \cfrac{1}{2.1 + ...}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + ...}}} = [1; 2, 2, ...] = [1; \overline{2}]$

Em 1572, Bombelli utilizou a seguinte aproximação para representar a raiz quadrada de 13.

Considerando a = 3 e b = 4, de $x = \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 4}$, tem-se:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + ...}}}$$

Em 1737, Euler escreve $\sqrt{13}$ como uma fração contínua. Para esse quinto procedimento, inicialmente consideremos, de modo geral, dado um irracional x, podemos escrevê-lo como:

$x = a_0 + \dfrac{1}{x_1}$, onde $0 < \dfrac{1}{x_1} < 1$.

Também: $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2}$, onde $0 < \dfrac{1}{x_2} < 1$. Assim $x = a_0 + \dfrac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2 + ...}}$

Para o cálculo de $\sqrt{2}$, considere:

$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 \Rightarrow a_0 = 1$ e $\dfrac{1}{x_1} = \sqrt{2} - 1$. Ainda $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}.\dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1$.

Daí:

$\sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} + 1) - 2 \Rightarrow a_1 = 2$ e $\dfrac{1}{x_2} = (\sqrt{2} + 1) - 2$.

Ainda

$x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}.\dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1 = x_1$.

Resulta em:

$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + ...}}}} = [1; 2, 2, ...] = [1; \overline{2}]$

Vale observar que as técnicas delineadas valorizam o uso da operação de racionalização como procedimento algébrico de resolução, que será retomado somente posteriormente, no estudo de limites.

Considerações Finais

Esta Dissertação teve como principal motivação a compreensão do conjunto dos números reais, em particular a união dos racionais com os irracionais formando o conjuntos dos números reais.

O estudo da Fração Contínua, e apresentado com uma importante ferramenta para a compreenção dos números racionais e irracionais. Foi apresentado suas caractéristicas das frações contínuas finitas e infinitas, em conjunto com os números racionais e irracionais, respectivamente, dando as devidas importâncias aos convergentes, que fornecem as melhores aproximações racionais à um número real α qualquer, com erro tão pequeno, quanto se necessita.

Buscando facilitar a compreensão dos alunos com os numeros imensuraveis, foi proposto a utilização de uma calculadora científica com as orientações do professor pra que se ache suas melhores aproximações. Buscando dismistificar a idea que $\pi = 3,14$.

Referências Bibliográficas

[1] LEI DE DIRETRIZES E BASES. da educação nacional. *LDBEN. Lei*, 1996.

[2] Carl B Boyer and Uta C Merzbach. *História da matemática*. Editora Blucher, 2019.

[3] LIMA Elon Lages. Números e funções reais. *Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro*, 2013.

[4] Howard Whitley Eves. *Introdução à história da matemática*. Unicamp, 1995.

[5] Carlos Henrique Barbosa GONÇALVES and Claudio Possani. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na grécia antiga. *Matemática Universitária*, (47):16–24, 2010.

[6] Cristiane Raquel Kern, Marcelo Nascimento da Silva, and Lisa Brönstrup Heusner. Teorema de pitágoras. *Feira Regional de Matemática do RS*, 1(1), 2018.

[7] Maria Aparecida Lopes. Introdução à teoria dos números e números primos. 2012.

[8] Francisco MP LORENTE. Utilizando a calculadora nas aulas de matemática. *http://www. diaadiaeducacao. pr. gov. br/portals/pde/arquivos/371-4. pdf/phpsessid*, 200905041:6095955, 2009.

[9] Wayne Winston. *Microsoft Excel data analysis and business modeling*. Microsoft press, 2016.