

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

LUCIANE ALCÂNTARA DA SILVA

ENSINO DO CONCEITO DE FRAÇÃO: UMA ATIVIDADE MEDIADA POR RECURSOS
Á LUZ DA GÊNESE INSTRUMENTAL E DOS CAMPOS CONCEITUAIS

MANAUS-AM

2024

LUCIANE ALCÂNTARA DA SILVA

ENSINO DO CONCEITO DE FRAÇÃO: UMA ATIVIDADE MEDIADA POR RECURSOS
Á LUZ DA GÊNESE INSTRUMENTAL E DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Amazonas - UFAM, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

MANAUS-AM

2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586e Silva, Luciane Alcântara da
Ensino do conceito de fração: uma atividade mediada por recursos á luz da Gênese Instrumental e dos Campos Conceituais / Luciane Alcântara da Silva . 2024
163 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Francisco Eteval da Silva Feitosa
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Fração. 2. artefato. 3. Gênese Instrumental. 4. Orquestração Instrumental. 5. tcc. I. Feitosa, Francisco Eteval da Silva. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

LUCIANE ALCÂNTARA DA SILVA

ENSINO DO CONCEITO DE FRAÇÃO: UMA ATIVIDADE MEDIADA POR RECURSOS À LUZ DA GÊNESE INSTRUMENTAL E DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática/PPG-ECIM da Universidade Federal do Amazonas/UFAM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Francisco Eteval da Silva Feitosa

Prof. Dr. Francisco Eteval da Silva Feitosa
Presidente da Banca



Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Membro Interno

Darlane Cristina Maciel Saraiva

Profa. Dra. Darlane Cristina Maciel Saraiva
Membro Externo

Dedico este trabalho aos meus pais e amigos que sempre me incentivaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela oportunidade de cursar o mestrado, e por me conceder força e coragem durante esse percurso.

Aos meus amados pais, Amarildo Gama da Silva e Lúcia Helena Muniz de Alcântara que com todo esforço me proporcionaram uma vida digna, de amor e boa educação. Os mais valiosos ensinamentos eu aprendi com vocês.

As minhas queridas irmãs, Leyce, Amanda, Fernanda e Aline, que sempre foram meu suporte, me incentivaram e acreditaram em todas as minhas escolhas.

Meu especial agradecimento, aos meus tios Marlene, Marlúcia e Amarivaldo, minha amada avó Cleunildes e meu namorado Rodrigo, por terem me acolhido com todo cuidado e amor durante minha caminhada acadêmica, e por terem dedicado atenção e oração para que fosse possível essa conquista.

Agradeço ao meu orientador Prof^o. Dr. Francisco Eteval pela confiança que me concedeu para o desenvolvimento desse projeto. Sua condução, disponibilidade e comprometimento foram fundamentais para a qualidade desse trabalho.

Aos meus professores e colegas pelos valiosos aprendizados, por compartilharem dos seus conhecimentos e experiência que tanto contribuíram para meu amadurecimento e crescimento profissional.

Aos meus parceiros nessa jornada, Lucas e Yana, que tive a oportunidade de conhecer e compartilhar de muitas alegrias e angústias. Obrigada por toda ajuda, contribuição, e trabalhos desenvolvidos juntos. Percorremos uma difícil caminhada e juntos, com toda honra, chegamos ao final dela, com a certeza de que a parceria continuará além desse ciclo.

Meus sinceros agradecimentos, a você prezado leitor, pelo tempo disponibilizado a leitura deste trabalho e pelo interesse de estudo aos processos de ensino e aprendizagem de matemática.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes” (Isaac Newton, 1676).

RESUMO

Este estudo apresenta resultados de uma pesquisa qualitativa com procedimentos de uma pesquisa-ação realizada na escola Estadual Cacilda Braule Pinto localizada na cidade de Manaus. A intervenção consistiu na aplicação de uma Sequência de Orquestração Instrumental que teve como objetivo analisar o processo de Gênese Instrumental por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental em situações que envolvem o conceito de fração, com suporte dos artefatos discos de frações, régua de frações e esquadros. Compreende-se a Gênese Instrumental como o processo cognitivo de transformação do artefato em instrumento. Nesse sentido, buscou-se como aporte teórico: a Teoria da Instrumentação de Rabardel, para interpretação dos processos da Gênese Instrumental; A Orquestração Instrumental (OI), sendo definida por Trouche como uma configuração didática e seus modos de exploração e articulação, e que constitui um suporte a Gênese Instrumental dos estudantes; A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud, fornecendo subsídio para construção do campo conceitual da fração; E a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, como referência para apreensão do objeto matemático. Pelo exposto, a análise dos dados desse estudo recorreu à técnica da triangulação, para articulação dos dados gerados da avaliação diagnóstica, observação e vídeo-gravação. As informações alcançadas foram interpretadas através do modelo S.A.C.I de Rabardel e dos componentes dos esquemas de Vergnaud. Estes foram pertinentes para descrever os processos de Instrumentalização e Instrumentação dos estudantes durante as atividades instrumentadas. Onde os resultados demonstram a apropriação dos três artefatos e o desenvolvimento de instrumentos capazes de atender as diferentes situações do campo conceitual da fração. No entanto, as situações que envolvem a fração como número, assim como aquelas voltadas para os esquadros devem ser revistas, uma vez que os estudantes não apresentaram bom desempenho. Desse modo, a Gênese Instrumental dos estudantes demonstrou ser gradativa, principalmente quanto aos esquadros, exigindo um período de médio a longo prazo para o desenvolvimento de competências complexas.

Palavras-chave: Fração; artefatos; Gênese Instrumental; Orquestração Instrumental, TCC.

ABSTRACT

This study presents the results of qualitative research using action research procedures carried out at the Cacilda Braule Pinto State School in the city of Manaus. The intervention consisted of applying a sequence of Instrumental Orchestration that aimed to analyze the process of Instrumental Genesis by 9th grade students in situations involving the concept of fraction, with the support of fraction discs, fraction rulers and squares. Instrumental genesis is understood as the cognitive process of transforming the artifact into an instrument. In this sense, we sought theoretical support: Rabardel's Instrumentation Theory, to interpret the processes of instrumental genesis; Instrumental Orchestration (IO), defined by Trouche as a didactic configuration and its modes of exploration and articulation, which supports the students' instrumental genesis; Vergnaud Conceptual Fields Theory (CFT), providing support for the construction of the fraction conceptual field; and Duval's Semiotic Representation Registers theory, as a reference for grasping the mathematical object. The data analysis in this study used the triangulation technique to articulate the data generated from the diagnostic assessments, observation and videotaping. The information obtained was interpreted using Rabardel S.A.C.I model and Vergnaud's schema components. These were relevant to describing the students' processes of Instrumentalization and Instrumentation during the instrumented activities. The results show the appropriation of the three artifacts and the development of instruments capable of dealing with different situations in the conceptual field of fractions. However, the situations involving fractions as numbers, as well as those involving squares, should be reviewed, as the students did not perform well. In this way, the students' Instrumental Genesis proved to be gradual, especially with regard to squares, requiring a medium to long term period for the development of complex skills.

Keywords: Fraction; Artifact; Instrumental genesis; Instrumental Orchestration; CFT.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Critério de Inclusão e Exclusão.....	22
Quadro 2 – Etapas da revisão	23
Quadro 3 – Significados da Fração.....	42
Quadro 4 – Processo de operação multiplicativa.....	45
Quadro 5 – Campo Conceitual da fração.....	48
Quadro 6 – Registros de representação da fração.....	50
Quadro 7 – Formação e Conversão de representação.....	52
Quadro 8 – Formação, tratamento e conversão de representação	52
Quadro 9 – Técnicas e Instrumentos da pesquisa.....	64
Quadro 10 - Organização dos encontros.....	70
Quadro 11 – Análise da situação 1	83
Quadro 12 – Análise da situação 2	84
Quadro 13 – Análise da situação 3	85
Quadro 14 – Análise da situação 4	85
Quadro 15 – Análise da situação 5	86
Quadro 16 – Análise da situação 6	88
Quadro 17 – Distribuição do quantitativo de acertos e erros para cada situação	96
Quadro 18 – Elementos de análise.....	104
Quadro 19 – Enquadramento dos processos realizados por cada equipe	110
Quadro 20 – Enquadramento dos processos realizados por cada equipe	118
Quadro 21 – Enquadramento dos processos realizados por cada dupla	125
Quadro 22 – Quantitativo de acertos e erros de cada questão	127
Quadro 23 – Invariantes Operatórios para Q6.....	138
Quadro 24 – Interações entre os polos referentes ao disco de fração	145
Quadro 25 - Interações entre os polos referente a régua de fração.....	145
Quadro 26 - Interação entre os polos referente ao esquadro.....	146

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Quantidade contínua.....	43
Figura 2 – Quantidade discreta	43
Figura 3 - Correspondência	44
Figura 4 -Divisão	44
Figura 5 – Reta numérica.....	46
Figura 6 - Modelo de S.A.I.....	58
Figura 7 - Modelo de S. A. C. I.	58
Figura 8 – Discos de frações.....	73
Figura 9 – Réguas de Frações	76
Figura 10 - Compasso.....	79
Figura 11 - Régua	79
Figura 12 - Ações instrumentada da situação 1	89
Figura 13 - Ação instrumentada da situação 2.....	90
Figura 14 - Ação instrumentada da situação 3.....	91
Figura 15 - Ação Instrumentada da situação 4	92
Figura 16 - Ação instrumentada da situação 5.....	93
Figura 17 - Ação Instrumentada da situação 6	94
Figura 18 - Resposta 1 para Q1	97
Figura 19 - Resposta 1 para Q2	97
Figura 20 – Resposta 2 para Q2.....	97
Figura 21 - Resposta 2 para Q3	98
Figura 22 - Resposta 1 para Q3	98
Figura 23 - Resposta 2 para Q4	99
Figura 24 - Resposta 1 para Q4	99
Figura 25 - Resposta 3 da Q4	100
Figura 28 - Resposta 2 para Q5-a	100
Figura 27 - Resposta 1 para Q5-a	100
Figura 26 - Resposta 4 da Q4	100
Figura 29 - Resposta 1 para Q5-b	101
Figura 30 - Resposta 2 para Q5-b.....	101

Figura 33 - Resposta 3 para Q6	102
Figura 31 - Resposta 1 para Q6-a	102
Figura 32 - Resposta 1 para Q6-b	102
Figura 35 - Resposta da Equipe 4 para Q1	106
Figura 36 - Ação Instrumentada da E.1 para Q1	106
Figura 37 - Ação Instrumentada da E.4 para Q1	106
Figura 34 – Resposta da Equipe 1 para Q1.....	106
Figura 38– Resposta da E.4 para Q2	107
Figura 39– Ação Instrumentada da E4 para Q2.....	107
Figura 40 - Resposta da E.5 para Q2	108
Figura 41 - Ação Instrumentada da E.5 para Q2	108
Figura 42 - Resposta da E.1 para Q2	109
Figura 43 - Resposta da E.3 para Q2	109
Figura 44 - Resposta da E.5 para Q7	109
Figura 45 - Ação Instrumentada da E.2 para Q1	113
Figura 46 - Ação Instrumentada da E.3 para Q1	113
Figura 47 - Resposta da E.1 para Q1	113
Figura 48 - Ação instrumentada 1 da E.1 para Q1	114
Figura 49 - Ação Instrumentada 2 da E.1 para Q1	114
Figura 51 - Ação Instrumentada da E.3 para Q2	115
Figura 50 - Resposta da E.3 para Q2	115
Figura 52 - Resposta da E.4 para Q3	115
Figura 53 - Ação Instrumentada da E.4 para Q3	115
Figura 54 - Resposta da E.5 para Q5	116
Figura 55 – Ação Instrumentada da E.5 para Q5.....	116
Figura 56 – Ação Instrumentada da E.1 para Q6.....	117
Figura 57 - Resposta da E.1 para Q6	117
Figura 58 – Resposta da dupla A para Q1	121
Figura 59– Resposta da dupla B para Q1	121
Figura 60– Resposta da dupla C para Q2	122
Figura 61– Técnica de uso dos esquadros	122
Figura 62– Resposta da dupla B para Q2	123

Figura 63– Resposta da dupla D para Q2	123
Figura 64- Ação Instrumentada da dupla A para Q3	123
Figura 65– Resposta da dupla A para Q3	123
Figura 66 - Ação Instrumentada da dupla E para Q3	124
Figura 67 - Resposta da dupla E para Q3	124
Figura 68 - Resposta da E.5A para Q1	128
Figura 69 - Resposta da E.2B para Q2	129
Figura 70 - Ação Instrumentada da E.2B para Q2.....	129
Figura 71 - Resposta da E.4B para Q3	131
Figura 72 - Ação Instrumentada da E.4B para Q3.....	131
Figura 73 - Ação Instrumentada da E.3B para Q3.....	133
Figura 74 - Resposta da E.3B para Q3	133
Figura 75 - Resposta da E.1A para Q3	134
Figura 76 - Resposta da E5B para Q4	135
Figura 77 - Ação Instrumentada da E5B para Q4.....	135
Figura 78 - Ação Instrumentada da E1B para Q4.....	137
Figura 79 - Resposta da E1B para Q4	137
Figura 80 - Resposta da E3A, E5A e E4A para Q4.....	137
Figura 81 - Resposta da E1B para Q6	139
Figura 82 - Ação Instrumentada da E1B para Q6.....	139
Figura 83 - Ação Instrumentada da E3B para Q6.....	140
Figura 84 - Resposta da E3B para Q6	140
Figura 85 - Modelo SACI referente a atividade da OI-4	145

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO	13
1.1.ESTRUTURA DO PROJETO	19
CAPÍTULO II	20
1.REVISÃO DE LITERATURA	20
CAPÍTULO III	29
3.1.NÚMERO RACIONAL	29
3.1.1Corpo de frações de um Domínio de Integridade	29
3.1.2.Corpo de Frações de um Domínio Ordenado	31
CAPÍTULO IV	34
GÊNESE INSTRUMENTAL	34
4.1.TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	34
4.1.1.Situações	36
4.1.2.Esquemas	37
4.1.3.Invariantes Operatórios	39
4.2.CAMPO CONCEITUAL DAS FRAÇÕES	41
4.3.REGISTRO DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DA FRAÇÃO	49
4.4.ABORDAGEM INSTRUMENTAL	54
4.5.ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL	60
CAPÍTULO V	63
METODOLOGIA	63
5.1.TIPO DE PESQUISA	63
5.2.PROCEDIMENTO METODOLOGICO	64
5.2. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DA PESQUISA	64
5.4. ANÁLISE DE DADOS	66
5.5. SUJEITOS E CENÁRIO DA PESQUISA	67
5.5.1. Critério de seleção dos participantes	68
5.5.2. Critério de Exclusão dos participantes	68
5.6. ASPECTOS ÉTICOS DA PESQUISA	68
5.6.1. Riscos e Benefícios	69
5.6.1.1. Riscos	69
5.6.1.2. Benefícios	69
5.7. ETAPAS NO CAMPO DA PESQUISA	69
CAPÍTULO VI	72
SEQUÊNCIA DE ORQUESTRAÇÕES INSTRUMENTAIS APRIORI	72
6.1. ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL 1 – OI1	72
6.1.1. Orquestração Instrumental 1.1	72
6.1.1.1. Configuração Didática	72
6.1.1.2. Modo de Execução	73
6.1.2. Orquestração Instrumental 1.2	74

6.1.2.1. Configuração Didática	74
6.1.2.2. Modo de Execução	75
6.2. ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL 2 – OI2	75
6.2.1. Orquestração Instrumental 2.1	75
6.2.1.1. Configuração Didática	76
6.2.1.2. Modo de Execução	77
6.2.2. Orquestração Instrumental 2.2	77
6.2.2.1. Configuração Didática	77
6.2.2.2. Modo de Execução	78
6.3. ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL 3 – OI3	79
6.3.1. Orquestração Instrumental 3.1	79
6.3.1.1. Configuração Didática	79
6.3.1.2. Modo de Execução	80
6.3.2. Orquestração Instrumental 3.2	81
6.3.2.1. Configuração Didática	81
6.3.2.2. Modo de Execução	81
CAPÍTULO VII	83
ANÁLISE APRIORI DAS SITUAÇÕES-PROBLEMAS	83
7.1. SITUAÇÕES-PROBLEMAS DA AVALIAÇÃO <i>A PRIORI</i>	83
7.2. SITUAÇÕES-PROBLEMAS NA ATIVIDADE COLETIVA INSTRUMENTADA.....	88
8. ANÁLISE E DISCUSSÕES DAS INFORMAÇÕES	96
10. CRONOGRAMA	149
11. CONSIDERAÇÕES FINAIS	150
REFERÊNCIAS	154
APÊNDICE A — Avaliação <i>A priori</i>	162
APÊNDICE B – Regras de Ação	163

1. INTRODUÇÃO

O estudo de fração começa no início da vida escolar dos estudantes. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNC), as preliminares desse conceito devem ser desenvolvidas no 2º ano do ensino fundamental, inserido em problemas envolvendo significado de dobro, metade, triplo e terça parte. É importante que esses conceitos estejam bem estabelecidos na estrutura cognitiva¹ dos estudantes, uma vez que estes abrem caminhos para o aprofundamento dos diferentes significados de fração, suas propriedades e operações no 6º ano e progressivamente até o 8º ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018).

A BNCC recomenda que no 6º ano do Ensino Fundamental o conceito de fração seja abordado em significados de parte-todo, quociente, equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações. No 7º ano é recomendado o ensino da fração como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. Além de habilitar os estudantes a comparar e ordenar números racionais na reta numérica e em diferentes contextos. Enquanto que no 8º ano deve-se trabalhar a fração geratriz para estudo de dízimas periódicas.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) o estudo dos números racionais, com significado de parte/todo, quociente, razão e operador, são propostos no terceiro ciclo (6º a 7º ano) e quarto ciclo (8º e 9º ano) do ensino fundamental, buscando que o discente nessas etapas possa reconhecer os números racionais em sua representação fracionária e decimal, frações equivalentes e localizar os números racionais na reta numérica. “A consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo do terceiro e quarto ciclos, que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema” (Brasil, 1998, p.103)

A BNCC pontua ainda que, para aprendizagem matemática nos anos finais do ensino fundamental “precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação” (BRASIL, 2018, p.298). Para Lorenzato (2010), essas potencialidades podem ser construídas em processos vivenciados pelo corpo humano, entre o conhecimento físico (adquirido pelo material real

¹ “[...] armazenamento organizado de informação, de conhecimentos, na memória do ser que aprende [...]” (MOREIRA, 1999, p.12).

concreto) e o conhecimento matemático (adquirido através do desenvolvimento das percepções).

Nesse sentido, os documentos normativos recomendam o uso de recursos didáticos e materiais, como livros, vídeos, malhas quadriculadas, ábacos, jogos, softwares de geometria dinâmica entre outros, para despertar o interesse e representar contextos significativos dos objetos matemáticos para os estudantes. Entretanto, tais materiais devem possibilitar o exercício da reflexão em prol da formalização dos conceitos.

Logo, para que os materiais concretos ou tecnologias digitais se apresentem como recurso didático no ensino de fração, é necessário que o seu uso resulte no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, processo a qual exige o professor considerar a necessidade de seus estudantes e o fazer matemático por eles manifestados. No que concerne, o estudo de Silva (2019a), Neto (2015), Alencar (2012), Bussolotto (2019) e Vilaça (2018), evidenciam que o par artefato-instrumento constitui uma estratégia viável ao desenvolvimento cognitivo sobre os conceitos matemáticos, uma vez que os processos da Gênese Instrumental permitem analisar as ações instrumentadas dos estudantes.

A Gênese Instrumental foi conceituada por Rabardel (1995) em seu método didático conhecido como Abordagem Instrumental, a qual permite analisar a aprendizagem dos estudantes em ação nas atividades mediadas por instrumentos. Compreende-se a Gênese Instrumental como o processo cognitivo de transformação do artefato em instrumento de atividade.

Dessa forma, o problema desta pesquisa apresenta-se sob o seguinte questionamento: Como se dá o processo de Gênese Instrumental dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental em situações que envolvem o conceito de fração?

A necessidade de mais uma investigação sobre o conceito de fração decorre das dificuldades enfrentadas comumente pelos estudantes na Educação Básica. Apesar do amplo conjunto de pesquisas desenvolvidas no campo da Educação Matemática, as quais exploram a fração por meio do uso de materiais didáticos e tecnologias digitais visando superar as dificuldades na aprendizagem desse conceito, percebe-se que este ainda se mantém como uma temática recorrente nas pesquisas.

Isso amplia a atenção para além da aprendizagem dos estudantes, mas também para o ensino do professor e para a forma como os recursos didáticos são abordados em sala de aula. Uma explicação que merece consideração é a possibilidade de os professores estarem apenas inserindo os materiais concretos ou tecnológicos digitais em vez de integrá-los ao seu ensino.

A diferença entre o professor inserir e integrar um instrumento em sua prática pedagógica é especificada por Bittar (2011).

Inserir um novo instrumento na prática pedagógica significa fazer uso desse instrumento sem que ele provoque aprendizagem, usando-o em situações desconectadas do trabalho em sala de aula. [...] A integração desse instrumento na prática pedagógica do professor significa que ele passa a fazer parte do arsenal de que o professor dispõe para atingir seus objetivos. Implica em fazer uso do instrumento de forma que este contribua com o processo de aprendizagem do aluno, que lhe permita compreender, ter acesso, explorar diferentes aspectos do saber em cena (p. 159).

Para tanto, esta pesquisa integrou os materiais discos de frações, régua de frações e esquadros para ensino do conceito de fração, onde as atividades instrumentadas foram direcionadas à luz da Orquestração Instrumental (OI) de Trouche e da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud. Na concepção da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, os artefatos tornam-se instrumentos semióticos para a apreensão do objeto matemático, ao passo que permitem a representação da fração frente a uma classe de situações. Tais teorias permitiram o embasamento teórico para responder as seguintes questões norteadoras:

- Que tipos de situações compõe o campo conceitual da fração no processo de aprendizagem?
- Como favorecer a Gênese Instrumental dos artefatos esquadros, régua de frações e disco de frações no processo de ensino-aprendizagem do objeto matemático fração?
- Como descrever o processo de Instrumentalização e Instrumentação dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental em tarefas que envolvem frações?
- Quais os invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes em frente à classe de situações distintas do campo conceitual das frações?

A aprendizagem de um conceito matemático na perspectiva da TCC exige que o estudante vivencie uma diversidade de situações para o desenvolvimento de suas competências cognitivas, uma vez que um conceito não se desenvolve em apenas um tipo de situação, mas em uma variedade delas. Nesse sentido, a classe de situações das frações elaborada para este estudo foi fundamentada em Campos, Magina e Nunes (2006), pois, segundo as autoras, a aprendizagem do conceito de fração pode ter maior êxito quando este é trabalhado em situações em que a fração possui significados de parte-todo, quociente, operador multiplicativo, medida e número.

Para favorecer o desenvolvimento da Gênese Instrumental dos artefatos integrados, foi executado uma Sequência de Orquestração Instrumental sucedida em um total de oito aulas, com a participação de 46 estudantes do 9º ano do ensino fundamental da Escola Estadual Cacilda Braule Pinto, localizada na cidade de Manaus.

No decorrer das intervenções, especificamente após a aplicação da avaliação diagnóstica, duas mudanças precisaram ser realizadas. Na primeira, as situações envolvendo as operações de adição e subtração de frações presente na avaliação diagnóstica foram excluídas nas atividades instrumentadas, e incluídas as situações envolvendo a fração como medida. A segunda mudança aconteceu com os artefatos, pois a priori, a régua e compasso foram escolhidos para compor o conjunto de artefatos a serem integrados nas atividades instrumentadas para as situações envolvendo a fração como número, o que justifica a menção desses artefatos nos Capítulos 6 e 7, mas por decisão Ad Hoc optou-se por fazer uso dos esquadros, visto que estes compartilham da mesma técnica instrumentada para localização das frações na reta numérica, atendendo adequadamente as mesmas situações.

Pelo contexto, esta pesquisa assumiu um caráter qualitativo, pois, segundo Minayo et. al. (1994), a pesquisa qualitativa se preocupa com aspectos da realidade que não podem ser mensurado, uma vez que sua abordagem permeia questões particulares do indivíduo, como crenças, valores, atitudes, etc. Quanto ao procedimento de investigação, este se caracterizou como pesquisa-ação, visto que é uma pesquisa de campo onde o “investigador se envolve diretamente com o objeto de estudo para que ocorra uma mudança no meio. Ele identifica um problema, cria um plano de intervenção e depois analisa as alterações que ocorrem a partir do seu projeto” (BORGES, 2020, p.68).

A intervenção realizada na escola Escola Estadual Cacilda Braule Pinto teve como proposito analisar o processo de Gênese Instrumental dos estudantes do 9º ano do ensino fundamental em situações que envolvem o conceito de fração, com suporte dos artefatos discos de frações, régua de frações e esquadros.

Para processo investigativo buscou-se propor atividades com situações do campo conceitual da fração no processo de aprendizagem; Aplicar uma Sequência de Orquestração Instrumental com a integração dos artefatos esquadros, régua e discos de frações no processo de ensino-aprendizagem do objeto matemático fração; Descrever os processos de Instrumentalização e Instrumentação dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental em tarefas que envolvem fração; Identificar os componentes dos esquemas mobilizados pelos estudantes em frente à classe de situações distintas do campo conceitual da fração.

A temática deste estudo foi motivada pela experiência profissional da pesquisadora em sala de aula, na qual observou dificuldades dos estudantes com o conceito de fração. Embora o ensino de fração tenha início na vida escolar, foi perceptível durante sua atuação profissional e reforçado em leituras sobre o tema que muitos estudantes que chegam aos anos finais do ensino fundamental enfrentam dificuldades em operações que envolvem números fracionários. Isso se deve ao fato de que a aprendizagem de fração nos anos iniciais não ocorreu de forma significativa.

Referindo-se ao conceito de fração Nunes e Bryant (1997, p.191) afirmam que:

[...] as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba.

Logo, torna-se necessário compreender como os pensamentos matemáticos dos estudantes se organizam diante de distintas situações, pois, como lembram Nunes e Bryant (1997), o que a criança pensa ser matemática difere do que o professor define como conhecimento matemático. Portanto, ao identificar os esquemas por meio da prática matemática do discente, torna-se possível verificar as competências que cada um possui para a aprendizagem do conceito de fração, bem como as eventuais dificuldades na formação desse conceito matemático.

Tal ideia se constitui na perspectiva de que o conhecimento se constrói no meio, isso porque, por mais que o conhecer seja um processo cognitivo, de competência individual, a construção do pensamento formal ocorre na interação com o outro. Logo, o indivíduo não aprende sozinho, tão pouco aprende unicamente no social. Dessa forma, o professor desempenha um papel essencial para aquisição de conceitos pelos estudantes, criando situações que possam gerar conflitos cognitivos e proporcionando um espaço estimulante para que o estudante se sinta motivado a aprender e, assim, seja capaz de ser agente construtor do seu próprio conhecimento.

Em razão da quantidade de pesquisas já desenvolvidas sobre o ensino e aprendizagem de frações, torna-se necessário destacar três pontos que distinguem esta pesquisa das demais. O primeiro refere-se ao conjunto de artefatos integrados nas situações didáticas para trabalhar a fração em diferentes significados, tais como os discos, as régua de frações e os esquadros.

Esses artefatos possibilitam a diversidade de representações semióticas e, principalmente, o desenvolvimento da Gênese Instrumental dos estudantes.

É evidente a existência de pesquisas de intervenção com o uso de discos e régua de frações, porém este estudo buscou investigar como os estudantes se apropriam desses artefatos em situações envolvendo frações com significados de parte-todo, quociente, operador multiplicativo e medida. Nesse caso, o esquadro foi adotado para situações em que a fração se apresenta com significado de número.

O segundo ponto diz respeito à abordagem didática que foi desenvolvida para o ensino-aprendizagem de fração, em face de uma Sequência de Orquestração Instrumental. Enquanto o terceiro se refere ao estudo dos esquemas, mobilizados no desenvolvimento da Gênese Instrumental, à luz dos conceitos-chaves da TCC e da Abordagem Instrumental.

Diante do exposto, acredita-se que os resultados identificados poderão contribuir como embasamento para outras pesquisas no âmbito da educação matemática. Além disso, o limite epistemológico da pesquisa abre espaço para o surgimento de novas perspectivas sobre a aquisição dos conceitos matemáticos, produção de conhecimento matemático, ou mesmo sobre as dificuldades que impedem a aprendizagem desses conceitos, as quais puderam ser identificadas através do fazer matemático dos estudantes.

1.1 ESTRUTURA DO PROJETO

Este trabalho está organizado em onze capítulos, descritos a seguir para um panorama geral sobre o estudo proposto.

No capítulo 1 é apresentada uma introdução da temática, expondo o problema da pesquisa, justificativa, objetivos e questões norteadoras.

O capítulo 2, “Revisão de Literatura” descreve as investigações e análises realizadas sobre as pesquisas que contemplam o tema da dissertação, que envolve “Gênese Instrumental” e o conceito de fração em olhar da Teoria dos Campos Conceituais.

O capítulo 3 intitulado “Fundamentação matemática” constitui uma perspectiva matemática neste estudo, em uma abordagem a estrutura algébrica da fração.

O capítulo 4 intitulado “Gênese Instrumental” apresenta as teorias que subsidiam a abordagem didática desde estudo. Desse modo, são sintetizadas a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, incluindo o Campo Conceitual da Fração; Registros de Representação Semiótica de Duval contextualizada á fração; A teoria da Abordagem Instrumental de Rabardel; e a Orquestração Instrumental de Trouche.

O capítulo 5 é descrito o caminho metodológico da pesquisa, quanto aos objetivos, fins e procedimento, bem como o método adotado para análise e interpretação dos dados e a descrição das etapas de execução no campo da pesquisa.

O capítulo 6 intitulado “Sequência de Orquestrações” apresenta as orquestrações que foram planejadas a priori para o favorecimento das Gêneses Instrumentais. E no capítulo 7 encontram-se as análises a priori das situações matemáticas.

O capítulo 8 refere-se aos resultados alcançados em cada orquestração aplicada. E o capítulo 9 apresenta a síntese dos resultados considerando as observações da pesquisadora.

Os capítulos 10 e 11 tratam-se, respectivamente, do cronograma e das considerações finais desse estudo.

CAPÍTULO II

1. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. GÊNESE INSTRUMENTAL

Talvez, até este momento ainda existam interrogações quanto à Abordagem Instrumental como modelo de aprendizagem em matemática. Desse modo, buscou-se investigar trabalhos publicados que se apoiam nesta teoria. Pois, as análises dessas pesquisas científicas são importantes para compreender as perspectivas e características identificadas quanto a “Gênese Instrumental” no processo de ensino e aprendizagem em matemática. E principalmente, permitem um novo olhar ao uso de materiais concretos para o desenvolvimento do conceito de fração.

O estudo de Neto (2015), por exemplo, identificou que o processo de Gênese Instrumental apresenta uma ferramenta adequada para o estudo do desenvolvimento cognitivo sobre função de uma variável real. Resultado alcançado a partir de uma sequência de atividades com um grupo de estudantes do 2º e 3º ano do ensino médio.

Para Silva (2019b) o processo de Gênese Instrumental, de uma dupla de estudantes do 9º ano considerando o Excel, resultou na evolução sobre o conhecimento de raciocínio proporcional, aspectos identificados pela mobilização dos esquemas de utilização pelos estudantes. Apesar de pontuar as dificuldades em compreender os esquemas dos sujeitos, o autor considera que:

O estudo da gênese instrumental pode ajudar os professores em sua prática letiva quanto a criar condições de uso de artefatos úteis e a apropriação deles por alunos. Este processo contribui para o entendimento dos esquemas pré-existentes dos alunos e a consequência formulação de situações potenciais (atividades instrumentais) por professores (Silva, 2019b, p.23).

De acordo com a pesquisa de Alencar (2012), a Gênese Instrumental possibilitou que professores que lecionam matemática na educação básica criassem estratégias de ensino e aprendizagem com o uso do GeoGebra a partir do desenvolvimento de oficinas que envolveram construção de triângulos, soma de triângulos, construção de retas, gráficos de funções e inequações

Nesse mesmo viés, Bussolotto (2019) analisou o processo de Gênese Instrumental pessoal e profissional do GeoGebra 3D em estudantes do Ensino Médio Normal/Magistério

sobre geometria espacial. A teoria de Rabardel possibilitou o autor a análise da apropriação da tecnologia pelos estudantes, a partir da identificação dos esquemas de utilização, apesar de ressaltar que os mesmos apresentaram processos de Gênese instrumental distintos, além da complexidade que envolve tal processo.

Fundamentado na OI e teoria da Instrumentação, o estudo de Vilaça (2018) analisou o Geoplano como recuso didático para resolução de situações específicas que envolvem quadriláteros, como a construção de quadriláteros. No entanto para situações teóricas como conceituar e definir as características dos quadriláteros, o geoplano mostrou-se dispensável para resolução das tarefas. Esta conclusão é resultado da execução de oficinas com estudantes de um curso de licenciatura em matemática, em que utilizaram o geoplano durante algumas atividades envolvendo as características dos quadriláteros.

Os resultados apresentados pelas pesquisas demonstram que as potencialidades dos artefatos podem auxiliar os estudantes na resolução de situações matemáticas específicas. Isso porque, os artefatos também apresentam limites, dos quais não são capazes de atender todas as situações envolvendo determinado conceito.

As pesquisas supracitadas fazem parte do banco de dados da BDTD, identificadas a partir da busca por “Gênese Instrumental”. E como analisado, a aprendizagem por meio de artefato-instrumento constitui uma estratégia viável ao desenvolvimento cognitivo sobre os conceitos matemáticos, uma vez que o estudo dos processos que englobam a Gênese Instrumental permite analisar as ações instrumentadas.

Diante das análises das pesquisas, observa-se que os objetos matemáticos são tratados, em geral, por mediação de tecnologias digitais. Apenas um, dos cinco trabalhos identificados integrou artefato concreto, igualmente, uma pesquisa abordou o artefato simbólico. No entanto, compreendendo que a grande parte das escolas públicas do estado do Amazonas, a exemplo das escolas ribeirinhas, não possuem acesso a tecnologias digitais. O presente estudo optou-se, para o desenvolvimento da Gênese Instrumental por materiais concretos e acessíveis, como os esquadros, régua de frações e discos de frações. Ressalta-se que a quantidade de artefatos busca atender a classe de situações das frações.

2.2. O ENSINO DE FRAÇÃO FUNDAMENTADO NA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A revisão de literatura sobre fração se faz essencial para compreender as perspectivas e características identificadas nas pesquisas científicas quanto a esse conceito matemático, e

como a abordagem da fração a partir de um enfoque da Teoria dos Campos Conceituais permite o seu ensino, e sua aprendizagem aos estudantes do ensino fundamental.

O levantamento bibliográfico foi realizado no banco de dados de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Periódicos CAPES, além das bibliotecas digitais, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e Google Acadêmico.

O levantamento das pesquisas aconteceu em três etapas. A primeira consistiu na leitura dos títulos e resumos das pesquisas, aquelas que satisfaziam ou possivelmente poderia atender o critério estabelecido, foram pré-selecionadas. Na segunda etapa foi realizada uma leitura da introdução e conclusão desses trabalhos. Na terceira etapa, ocorreu a classificação dos trabalhos que seriam incluídos e dos que seriam removidas, ou por não atenderem a questão da pesquisa ou por serem duplicados.

Devido a quantidade de pesquisas com abordagem ao conceito de fração buscou-se delimitar a revisão em pesquisas que tratam de ensino de fração com aporte teórico da TCC. Os critérios de análise consistiram em:

Quadro 1- Critério de Inclusão e Exclusão

Critério de inclusão	Critério de exclusão
Trabalho extraído do portal Periódico CAPE, Teses e dissertações CAPES, BDTD; Google Acadêmico.	Trabalhos de outros bancos de dados.
Artigos, monografias, dissertações e teses	Trabalhos publicados fora do intervalo de tempo estabelecido.
Trabalhos publicados nos últimos cinco anos (2019 a 2023).	
Pesquisas de intervenção pedagógica	Pesquisa que não for resultado de intervenção.
Enfoque a ensino de fração	Enfoque a ensino de fração que não estão fundamentadas na TCC
Pesquisas brasileiras que incluem como sujeito da pesquisa alunos do ensino fundamental II.	Pesquisas brasileiras que incluem como sujeito da pesquisa professores do ensino fundamental II ou alunos que não são desse nível de ensino.

Fonte: elaborado pelos autores (2022)

A primeira palavra-chave definida para todos os bancos de dados foi “Campos Conceituais”, delimitado ao período de tempo entre 2019 a 2023, e conforme a quantidade de

resultados gerados em cada banco de dados a palavra-chave “fração” foi aplicada para refinamento, bem como as opções de filtragem oferecidas em cada fonte.

No banco de dados do Periódicos CAPES a busca por “Campos Conceituais” gerou um total de 2.067 resultados. Dessa forma, foi aplicado como segunda palavra-chave “Fração”, gerando 4 trabalhos publicados, onde 2 foram coletados para leitura mais aprofundada. Em Teses e Dissertações da CAPES a palavra-chave “Campos Conceituais” alcançou 964 resultados, sendo necessário definir a área de conhecimento para “Multidisciplinar” e “Ciências Exatas e da Terra”. O refinamento indicou 315 pesquisas, das quais 5 delas foram coletadas. No banco de dados da BDTD a pesquisa por “Campos Conceituais” obteve 1.244 trabalhos. Para refinar as buscas aplicou-se também como palavra-chave “fração”, gerando 9 pesquisas, onde 4 dessas foram coletadas.

Para alcançar uma quantidade de trabalhos mais expressiva em relação àquela coletada na CAPES e na BDTD, optou-se por realizar a pesquisa também no Google Acadêmico. Neste último, a palavra-chave “Campos Conceituais”, delimitado ao período de 2019 a 2023, apresentou 2.770 resultados. Como filtragem, foram acrescentadas as palavras-chaves “Fração” e “Ensino Fundamental” na busca, resultando em um total de 361 trabalhos, dentre eles, 14 foram coletados. No Quadro 2 é possível observar as pesquisas que fazem parte da revisão bibliográfica que comportam o universo desse estudo.

Quadro 2 – Etapas da revisão

Banco de dados	Coletadas	Removidas	Incluídas	Trabalhos revisados
Periódicos CAPES	2	0	2	Castro e Barbosa (2020); Eisermann, Schulz e Fuchs (2021);
Teses e Dissertações CAPES	5	4	1	Junior (2019)
BDTD	4	3	1	Silva (2019a)
Google Acadêmico	14	8	6	Sampaio e Marrey (2020); Oliveira (2021); Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019); Amaral (2021); Santos e Fonseca (2019); Salustiano (2019).

Fonte: elaborado pelos autores (2023)

A pesquisa de Castro e Barbosa (2020) teve como objetivo identificar as contribuições da compreensão do significado de medida, em situações de quantidades intensivas, para a aprendizagem dos Números Racionais em sua representação fracionária para estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. A investigação foi fundamentada na TCC e nas ideias teóricas de Nunes et. al. (2012), e se desenvolveu na aplicação de pré-teste, intervenção e pós-teste. Porém, no referido trabalho não é possível identificar como ocorreu o processo de intervenção, uma vez que os autores descrevem e comparam apenas os resultados entre pré-teste e pós-teste. Nessas duas atividades, as situações trabalhadas envolveram a fração com significado de parte-todo, quociente, operador multiplicativo, medida e número. Sendo que, nos dois teste os estudantes apresentaram melhor desempenho na fração como parte-todo, e uma maior dificuldade na fração como número, seguido da fração como quociente. Os pesquisadores ainda realizaram a aplicação de um segundo pós-teste, na qual os resultados indicaram um menor índice de acertos nas situações da fração como operador multiplicativo, seguido da fração como quociente.

O trabalho desenvolvido por Eisermann, Schulz e Fuchs (2021) apresenta resultados de uma intervenção realizada com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, que teve como objetivo de analisar as potencialidades de uma aprendizagem sobre o conteúdo de fração pautada na Teoria dos Campos Conceituais. Para Tal, os pesquisadores realizaram uma sequência didática para trabalhar situações envolvendo o conceito de fração em diferentes campos conceituais (aritmética álgebra e geometria). Nessas situações, foi possível identificar que os autores trabalharam, principalmente, a fração com sentido de parte-todo e número, além de frações próprias, impróprias, número misto, e frações equivalentes. Nas atividades desenvolvidas com os estudantes, foram incluídos como recursos didáticos as dobraduras, jogo da memória de frações e o software GeoGebra. Na qual, segundo Eisermann, Schulz e Fuchs (2021), oportunizaram que a Sequência Didática alcançasse resultados positivos, ao passo que resultou numa aprendizagem significativa sobre fração.

Nesse sentido, Eisermann, Schulz e Fuchs (2021) pontuam que é essência que o conceito de fração seja explorado em diferentes situações, incluindo a relação com conceitos aritméticos, algébricos e geométricos para minimizar a fragmentação dos saberes; e em diferentes tipos de representação para o processo de conceitualização.

Os resultados de Junior (2019) são reflexos de uma Sequência Didática planejada à luz da TCC e da Engenharia Didática e aplicada com 30 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental com objetivo de desenvolver uma Sequência Didática que sensibilizasse o

sistema cognitivo dos estudantes para a obtenção do conceito de fração. As atividades aplicadas incluíram situações da fração com significado de parte-todo, frações equivalentes, ordem de frações, e operações de adição e subtração de frações.

Junior (2019) conclui que a sequência didática sobre o conceito de fração ajudou na compreensão dos estudantes diante de problemas no campo aditivo dos Naturais e facilitou no desempenho dos mesmos nas situações com cálculos no conjunto dos números racionais.

A investigação de Silva (2019a) foi motivada a verificar quais conhecimentos os estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental revelam na resolução de problemas que envolvem conceito de fração. Os problemas aplicados aos 5 estudantes entrevistados envolveram fração como parte-todo, quociente e medida. Os resultados apontam que a maior parte das noções que esses estudantes possuem sobre fração deriva dos conhecimentos de situações de divisão, visto que nas situações aplicadas, as crianças recorreram principalmente aos esquemas de distribuição e partição.

Dessa forma, Silva (2019a) salienta para a necessidade de apresentar aos estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental os números fracionários abordando todos os seus significados, como parte-todo, divisão, número, operador multiplicativo e medida, em situações que promovam a mobilização dos esquemas que eles já possuem.

Para Sampaio e Marrey (2020) o aporte teórico da TCC e das Situações Didáticas lhes permitiram compreender e inferir sobre os conhecimentos de números racionais dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. Na qual, foi aplicado um Sequência Didática envolvendo situação com significado de parte-todo e quociente, com intuito de verificar se eles conseguiriam considerar que um mesmo inteiro pode ser dividido em diferentes partes e que as quantidades podem ser as mesmas. As situações implicaram em questionamentos e discussões por parte dos estudantes, o que ajudou os pesquisadores acompanhar a construção e o aprimoramento de suas hipóteses.

No mesmo viés, Oliveira (2021) desenvolveu em sua pesquisa atividades referenciadas no pressuposto teórico de Vergnaud e Duval, com finalidade de analisar o processo de ensino e de aprendizagem do número racional, com o significado de frações. As situações trabalhadas com 28 estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental envolveram fração como parte-todo, medida, porcentagem, e as noções de ordem e equivalência de frações. Os materiais discos de fração e papel quadriculado apresentaram-se como recursos semióticos para tratamento e conversão do objeto matemático frente às situações trabalhadas. Os resultados de Oliveira (2021) indicam que os estudantes apresentaram maior dificuldade em

noções de equivalência de fração, mas que “a utilização do aspecto relacional, para o conceito de fração e de tratamento e conversões entre representações, foi fundamental para a elaboração do significado do número racional como fração e para sua ordenação” (p.17).

A pesquisa de Amorin, Etcherverria e Oliveira (2019) é resultado de uma investigação realizada com 565 estudantes do 5º ao 9º do Ensino Fundamental que buscou identificar as dificuldades desses estudantes quanto aos significados da fração como parte-todo, número, operador multiplicativo, quociente e medida. O estudo se limitou em discutir apenas o desempenho dos estudantes em um problema envolvendo fração como operador multiplicativo. E de acordo com os autores, os dados demonstraram pouco desempenho dos estudantes neste tipo de situação, “pois não alcançou o patamar de 40% e que não há um crescimento contínuo de ano para ano, apesar dos professores afirmarem trabalhar com questões semelhantes a apresentada neste estudo” (idem, p.206). Além de que, os estudantes também apresentaram dificuldade em identificar a fração em situações envolvendo quantidade discreta e a concepção da fração como dois números inteiros separados por um traço.

À vista disso, Amorin, Etcherverria e Oliveira (2019) recomendam que o ensino de números racionais deva acontecer ao longo de todo o Ensino Fundamental, permitindo que os estudantes se apropriem do conceito de fração a partir do confronto em diferentes situações.

O conceito de fração foi abordado no estudo de Amaral (2019) em situações de equivalência, ordem e comparação de frações, frações próprias e impróprias, aplicadas aos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental em aulas baseadas nas fases 4A- *Instructional Model*. O objetivo da intervenção foi investigar benefícios e limitações da aprendizagem do conceito de frações pela perspectiva de medição. No qual, constatou que tal perspectiva favoreceu a construção do conceito matemático, onde os estudantes repetentes apresentaram avanços significativos na aprendizagem, outrossim, promoveu a colaboração e participação dos estudantes. Entretanto a pesquisadora ressalta para o tempo de ensino exigido para eficiência das aulas propostas em Ações da 4A- *Instructional Model*, sendo necessária uma quantidade de tempo e aula maior que as aulas tradicionais.

O estudo de Santos e Fonseca (2019), que teve como objetivo investigar as dificuldades de 20 estudantes 7º ano do Ensino Fundamental na aprendizagem de fração, identificou que as principais dificuldades a esse conceito estão relacionadas às operações de adição e subtração de fração com denominadores diferentes, visto que os estudantes não apresentaram habilidades em aplicar o cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.). A mesma dificuldade também foi apontada no trabalho de Salustiano (2019), que analisou as

concepções apresentadas por 88 estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental em relação a alguns dos conteúdos de fração. Além das questões envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, foram apresentadas aos estudantes situações da fração como parte-todo e operador, sendo o primeiro como maior índice de acertos.

Em consoante a isto, Santos e Fonseca (2019) e Salustiano (2019) argumentam que é necessário um olhar sob as concepções dos estudantes frente às atividades envolvendo o conteúdo de fração, pois identificar as dificuldades que impedem a sua aprendizagem permitirá não apenas a sua superação, mas também contribuirá para o processo de aquisição do conceito de fração.

Em síntese aos trabalhos analisados, verifica-se que são poucas as pesquisas desenvolvidas que se preocupam em abordar o ensino e aprendizagem do conceito de fração em seus diferentes significados, sendo a maior parte das investigações centradas na fração como parte-todo. Da quantidade de pesquisas analisadas, apenas uma apresentou a fração nos cinco significados (parte-todo, quociente, operador multiplicativo, medida e número) como recomendados por Nunes et. al. (2012). Observa-se também que as situações mais recorrentes nessas pesquisas envolvem noções como equivalência e as operações de frações.

Segundo os PCNs, as frações equivalentes são importantes para que os estudantes sejam capazes de resolver problemas que envolvem a comparação de números fracionários e efetuar cálculos com esses números (Brasil, 1998).

Das pesquisas analisadas, metade delas identificaram as situações que os estudantes apresentaram maior dificuldades, são elas: Equivalência e operações de frações com denominadores diferentes para estudantes do 7º ano; e tarefas envolvendo fração como número, quociente e operador multiplicativo para estudantes do 5º ano do ensino fundamental.

Em relação aos materiais didáticos integrados nas intervenções realizadas, foi identificado material concreto manipulável e tecnologia digital em três estudos. Recursos essenciais para apreensão do conceito de fração, uma vez que para Duval (2012) a organização de ao menos dois tipos de registros é importante para atividade matemática, pois permite o tratamento e conversões de representações.

Diante do exposto, buscou-se delinear o presente estudo nas lacunas identificadas na literatura e nas recomendações destacadas nos trabalhos analisados. A pesquisa se ocupou em construir o campo conceitual da fração para estabelecer a classe de situações que dão sentido

ao conceito e as representações semióticas que permitem a compreensão da fração nessas diferentes situações.

CAPÍTULO III FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo comporta a estrutura algébrica da fração, onde se busca explicar brevemente como o corpo dos números racionais configura-se como corpo de fração de um domínio de integridade, e delinear a fração como uma classe de equivalência. A fundamentação faz-se necessária, uma vez que aborda o significado de equivalência e ordenação de frações, esquemas estes importantes para compreender a fração presente em determinadas situações matemáticas. Além de que, através da estrutura algébrica da fração será possível identificar os teoremas-em-ação verdadeiros, ou seja, proposições reconhecidas cientificamente e ensinadas no contexto escolar.

3.1. NÚMERO RACIONAL

A forma fracionária é apresentada no conjunto dos números racionais, como representação algébrica sendo $\frac{a}{b}$, em que a e $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Tem-se como representação numérica em forma de fração, por exemplo: $\{\frac{2}{3}, \frac{-5}{9}, \frac{13}{4}, \dots\}$. Desse modo, o valor de b deve ser diferente de zero, pois a fração é representação de uma divisão, portanto, $b=0$ não tem significado uma vez que não se pode encontrar o valor do quociente (Q). Portanto, a descrição algébrica do conjunto dos números racionais é:

$$Q = \{x \mid x = \frac{a}{b}, a \text{ e } b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}.$$

Para compreender a associação do conjunto dos números racionais e o corpo da fração a partir do conjunto dos inteiros, deve-se considerar que a fração $\frac{a}{b}$ é formada pelo par ordenado (a, b) e a relação de igualdade, conforme demonstrado na Imagem:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow a \cdot b' = a' \cdot b$$

A relação apresentada acima “é o ponto de partida para definir o corpo² de fração de um domínio³ qualquer. Em particular, quando o domínio é \mathbb{Z} obtemos o corpo dos números racionais” (HEFEZ, 2002, p.35).

3.1.1 Corpo de frações de um Domínio de Integridade

² Um domínio de integridade é um anel associativo, comutativo, com unidade tal que se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$ (SILLER, 2018, p.6).

³ “Um corpo é um anel de divisão comutativo” (SILLER, 2018, p.6).

Seja A um domínio de integridade, para construir um corpo k (corpo de frações) desse domínio, considere B como subconjunto de A :

$$B = \{(a, b) \in A \times A' \mid b \neq 0\}$$

Para (a, b) e (a', b') pertencentes ao conjunto B , está definida a seguinte relação binária:

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a \cdot b' = a' \cdot b$$

Como representação numérica temos, por exemplo, que: sendo $(2, 4) \sim (3, 6)$. Isso significa que, o par ordenado $(2, 4)$ está relacionado ao par ordenado $(3, 6)$, se somente se o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Sendo assim, os pares $(2, 4)$ e $(3, 6)$, são equivalentes. Esta relação satisfaz as seguintes propriedades:

- Reflexividade: $(a, b) \sim (a, b)$ para todo $(a, b) \in B$;
Por exemplo: $(2, 4) \sim (2, 4)$ para todo par ordenado $(2, 4)$ pertencente ao conjunto B ;
- Simetria: Se $(a, b) \sim (a', b')$, então $(a', b') \sim (a, b)$;
Por exemplo: Se $(2, 4) \sim (3, 6)$, então $(3, 6) \sim (2, 4)$. Isso significa que $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 \rightarrow 12 = 12$ e $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6 \rightarrow 12 = 12$;
- Transitividade: Se $(a, b) \sim (a', b')$ e se $(a', b') \sim (a'', b'')$, então $(a, b) \sim (a'', b'')$;
Por exemplo: Sendo os pares ordenados $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(5, 10)$, logo se, $(2, 4) \sim (3, 6)$ e $(3, 6) \sim (5, 10)$, logo $(2, 4) \sim (5, 10)$.

Uma relação binária que satisfaz as três propriedades mencionadas é chamada de relação de equivalência. Entende-se que a igualdade é uma relação de equivalência, e a classe de equivalência de um par ordenado (a, b) pertencente ao conjunto cartesiano $A \times A$, é um conjunto de todos os pares ordenados equivalentes ao par (a, b) . Esse conjunto tem notação:

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in B \mid (x, y) \sim (a, b)\}.$$

A fração $\frac{a}{b}$ é a classe de equivalência do elemento (a, b) do conjunto B , e (a, b) o representante da classe $\frac{a}{b}$. Exemplificando: Considere a classe de equivalência

$$\frac{1}{2} = \{(x, y) \in B \mid (x, y) \sim (1, 2)\}.$$

Assim, o elemento $(2, 4)$ pertence à classe de equivalência $\frac{1}{2}$ pois, $(2, 4) \sim (1, 2)$, visto que $2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$. Por outro lado, o elemento $(1, 3)$ não pertence a essa classe de equivalência, pois $1 \cdot 2 \neq 1 \cdot 3$.

Seja K conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de B :

$$K = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in A \text{ com } b \neq 0 \right\}.$$

Logo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e somente se $(a, b) \sim (c, d)$ e se e somente se, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Assim como, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$.

Sendo (a, b) , (a', b') , (c, d) e (c', d') pertencentes ao conjunto B , está definido a seguinte relação:

- $(a, b) \sim (a', b') \wedge (c, d) \sim (c', d') \Leftrightarrow (ad \pm bc, bd) \sim (a'd' \pm b'c', b'd')$, logo $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \rightarrow \frac{c'}{d'} \rightarrow \frac{ad \pm bc}{bd} = \frac{a'd' \pm b'c'}{b'd'}$;
- $(a, b) \sim (a', b') \wedge (c, d) \sim (c', d') \Leftrightarrow (ac, bd) \sim (a'c', b'd')$, logo $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$;
- $(a, b) \sim (a', b') \wedge (c, d) \sim (c', d') \Leftrightarrow (ad, bc) \sim (a'd', b'c')$, logo $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \rightarrow \frac{ad}{bc} = \frac{a'd'}{b'c'}$.

As operações definem que K é um corpo. Por K ser formado pelos elementos de A , logo é uma extensão desse conjunto. Desse modo, K é o corpo de frações de A , uma vez que ele contém todas as classes de equivalência dos pares ordenados do conjunto B . Essa representação condiciona que o corpo de frações de Z é o corpo dos números racionais Q .

3.1.2. Corpo de Frações de um Domínio Ordenado

Considerando dois elementos x e y de um domínio ordenado⁴, logo existe uma relação binária $x \leq y$ que satisfaz as seguintes propriedades:

O₁. Reflexividade: para todo $a \in A$, temos que $a \leq a$;

O₂. Antisimetria: Para todos $a, b \in A$, se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a=b$;

O₃. Transitividade: Para todos $a, b, c \in A$, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$;

O₄. Totalidade: Dados $a, b \in A$, tem-se que é verdadeiro uma das asserções $a \leq b$ ou $b \leq a$.

O_A. Adição: Para quaisquer, $a, b, c \in A$, se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$.

O_M. Multiplicação: Para quaisquer, $a, b, c \in A$, se $a \leq b$ e $c \geq 0$, então $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Sendo $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$ com $b > 0$ e $d > 0$. E seja K o corpo de frações de A , tem-se que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d} \in K$. Define-se que:

⁴ “Um Anel Ordenado é um anel $(A, +, \cdot)$ equipado com uma relação de ordem total \leq compatível com as operações (soma e multiplicação)” (SCALA, 2018, p.37).

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d \leq c \cdot b.$$

Se A é um domínio ordenado, e K o corpo de frações de A . logo K é um corpo ordenado se satisfaz as propriedades mencionadas. Verificando, temos:

$$O_1. \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}. \text{ Por exemplo: se } \frac{1}{2} \in k, \text{ logo } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \rightarrow 2 \leq 2.$$

$$O_2. \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ e } \frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}, \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \text{ Por exemplo: } \frac{1}{2} \leq \frac{2}{4} \text{ e } \frac{2}{4} \leq \frac{1}{2}, \text{ então } \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \rightarrow 4 = 4;$$

$$O_3. \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ e } \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}, \text{ então } \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}. \text{ Por exemplo: } \frac{1}{2} \leq \frac{2}{4} \text{ e } \frac{2}{4} \leq \frac{3}{5}, \text{ então } \frac{1}{2} \leq \frac{3}{5} \rightarrow 5 \leq 6.$$

$$O_A. \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}, \text{ então } \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}. \text{ Por exemplo: } \frac{1}{2} \leq \frac{2}{4}, \text{ então } \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \leq \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \rightarrow \frac{11}{10} \leq \frac{22}{20}.$$

$$O_M. \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ e } \frac{e}{f} \geq 0, \text{ então } \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}. \text{ Por exemplo: } \frac{1}{2} \leq \frac{2}{4} \text{ e } \frac{3}{5} \geq 0, \text{ então } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \leq \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \rightarrow \frac{3}{10} \leq \frac{6}{20}.$$

Portanto isso determina que, se A é um domínio ordenado, então o seu corpo de frações k é um anel ordenado.

3.2. DEFININDO OS TEOREMAS-EM-AÇÃO VERDADEIROS

A síntese matemática do corpo de frações permite identificar as proposições científicas que devem ser consideradas no ensino do conceito de fração. Essas proposições são fundamentais para que seja possível classificar os teorema-em-ação mobilizados pelos estudantes durante as resoluções das situações matemáticas.

Teorema-em-ação é um conceito abordado na TCC (aprofundado no próximo capítulo), como sendo, conhecimento implícito expressado como proposições para resolução de um problema. Esta possui validade local, pois pode ser verdadeira somente para certas situações.

No início deste capítulo verificou-se que a fração pode ser representada algebricamente por $\frac{a}{b}$, em que a e $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Dessa forma, esta proposição pode ser identificada como teorema-em-ação verdadeiro para situação da fração com significado de parte-todo. Em relação a equivalência de frações sua representação é $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cd$, sendo assim, será utilizado desta proposição como referencia para o teorema-em-ação verdadeiro para situações que envolvem equivalência de frações.

Foi identificado ainda o corpo de frações de um domínio ordenado como $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d \leq c \cdot b$, que representará o teorema-em-em-ação verdadeiro na situação em que a fração possui

significado de número. Para as relações em um domínio de integridade as representações algébricas do corpo de frações $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ constituirá, respectivamente, o teorema implícito em situações envolvendo a operação de adição e subtração de frações. A relação representada por $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ será classificada como teorema-em-ação verdadeiro para situações de operações de multiplicação de frações, e que inclui situações da fração como operador multiplicativo. Enquanto que a representação $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ implicará no teorema verdadeiro para situações com operações de divisão de frações, e quando a fração possuir significado de medida.

CAPÍTULO IV GÊNESE INSTRUMENTAL

Este capítulo dedica-se a compreender o processo de Gênese Instrumental. Para isso, é pertinente percorrer sobre os elementos conceituais da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, uma vez que seus conceitos-chaves estão presentes na abordagem didática adotado neste estudo. Em seguida, buscou-se traçar o campo conceitual da fração, identificando seus diferentes significados. Posteriormente, adentra-se na teoria dos Registros de Representação Semióticas de Duval, destacando a importância de diferentes representações simbólicas para o ensino de fração.

Dado as teorias introdutórias, é viável compreender o processo da Gênese instrumental na ótica da Teoria Abordagem Instrumental de Rabardel, percorrendo suas etapas e elementos. Não excluindo os fatores que possibilitam esse processo cognitivo, isto é, a configuração de uma OI. Dessa forma, buscou-se apresentar o conceito e elementos fundamentais da Teoria da Orquestração Instrumental de Trouche, como suporte teórico da situação didática proposta.

4.1 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A teoria dos Campos Conceituais foi elaborada por Gérard Vergnaud⁵ em 1977. É uma teoria cognitivista compreendida como neopiguetiana, uma vez que sua gênese epistemológica se desenvolve na psicologia de Piaget, mais precisamente, amplia e redireciona ideias sobre o desenvolvimento cognitivo diante a complexidade lógica geral. A interligação de uma teoria a outra se articula, principalmente, no estudo do funcionamento cognitivo, que está relacionada ao conceito de esquema.

Enquanto para Piaget a construção do conhecimento, por esquemas (schema, assim introduzido por ele), seria resultado da interação sujeito e objeto. Para Vergnaud, o conhecimento resultaria da interação sujeito-situação. Onde o desenvolvimento cognitivo depende das situações e conceitualizações específicas para lidar com elas, isso porque, os esquemas são adaptados às situações (Vergnaud, 2009a).

⁵ Gerárd Vergnaud (1933-2021) foi um psicólogo, pesquisador francês e desenvolvedor da Teoria dos Campos Conceituais. Foi diretor emérito de pesquisa do Centre National de La Recherche Scientifique (CNRS) em 1999 (Rogalskj; Robert, 2021).

Outra contribuição importante que cerne a teoria de Vergnaud são as ideias de Vygotsky sobre o desenvolvimento cognitivo, que está centrada na interação do indivíduo com o meio, bem como no processo de comunicação pelo uso da linguagem, representação simbólica e o papel da mediação para a evolução do conhecimento (Vergnaud, 2009a).

Na TCC o esquema é a ligação entre a representação e a ação do sujeito diante uma determinada situação. O destaque da teoria de Vergnaud, é que para ele o conhecimento está organizado em campos conceituais a domínio do indivíduo, ou seja, a estrutura cognitiva se dá pelo sentido do conteúdo conceitual por parte do estudante na interação em certa situação.

Segundo Moreira (2002, p.8), o campo conceitual nas ideias de Vergnaud, trata-se de “[...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente entrelaçados durante o processo de aquisição”. Trata-se, portanto, de uma unidade de estudo que propiciará sentido aos problemas de aquisição observados na conceitualização do real pelo indivíduo.

A definição de conceito para Vergnaud (1993) é pautada no triplete de conjunto, S (situações), I (invariantes operatórios) e R (representações simbólicas), sendo representados por $C = (S, I, R)$, onde:

S Conjunto de situações que dão sentido ao conceito (referência);
 I Conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado);
 R Conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (Vergnaud, 1993, p.8).

Três questões levaram Vergnaud (1983a) ao conceito de campo conceitual:

(1) Uma situação não constitui todas as propriedades de um conceito; pois o domínio de um conceito exige experiência e maturidade, portanto uma única situação não é capaz de formular uma definição esclarecedora sobre um conceito para o estudante. Para isso seria necessário referir-se em situações diversas;

(2) Uma situação não envolve um só conceito. A exemplo de conceito de fração que envolve conceito de divisão, multiplicação e número racional. Para que o estudante aprenda o conceito de fração o professor precisa analisar o alcance dos estudantes aos demais conceitos;

(3) A formação e apropriação de todas as propriedades de um conceito é um processo que leva um longo prazo, meses e anos. Assim, por exemplo, para que o estudante seja capaz de compreender as propriedades de fração, este deve ter percorrido períodos de sua vida ao

estudo de números racionais, divisão e multiplicação, caso contrário ele apresentará dificuldades na aprendizagem de fração, que exigirá mais tempo para apropriação do conteúdo dada à diversidade das situações e conceitos. No entanto, as dificuldades não devem ser ignoradas, pois só podem ser superadas se forem confrontadas.

No desenvolvimento do estudo sobre as estruturas cognitivas, Vergnaud (1993) destaca que os conceitos matemáticos se organizam em estruturas complexas. No que diz respeito ao âmbito de educação matemática, se interessou em estudar principalmente em campos conceituais aditivos e multiplicativos. As estruturas aditivas atendem conceitos de adição, subtração e conceitos envolvendo ambas as operações. Nas estruturas multiplicativas estão envolvidos conceitos de multiplicação, divisão e conceitos em combinação com tais operações (Vergnaud, 1993).

Apesar da teoria de Vergnaud está ligada a psicologia, ela tem importantes contribuições para a didática da matemática, uma vez que além evidenciar como se processa a aquisição do conhecimento, enfoque aos aspectos das estruturas aditivas e estruturas multiplicativas, ela também apresenta uma perspectiva teórica sobre a melhor forma de trabalhar o ensino permitindo inferir e analisar as lacunas entre o conhecimento prévio e o conhecimento científico diante o conteúdo conceitual elaborado pelo estudante, na situação trabalhada em sala de aula pelo professor.

4.1.1. Situações

A definição de situação para Vergnaud está ligada ao sentido de tarefas, “[...] a ideia é que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades específicas devem ser bem conhecidas” (Vergnaud, 1993, p.9). Essas tarefas são referentes às atividades atribuídas ao indivíduo, e que ele deve enfrentar para desempenho de suas potencialidades e construção de novos conhecimentos. Isso porque, o conhecimento não é um saber pronto, mas sim construtivo, e esta construção surge da capacidade do indivíduo em fazer relações entre elementos e circunstâncias.

Nessa perspectiva Moreira (2002, p.20) salienta que:

A construção do conhecimento pelo aprendiz não é um processo linear, facilmente identificável. Ao contrário, é complexo, tortuoso, demorado, com avanços e retrocessos, continuidades e rupturas. O conhecimento prévio é determinante no progressivo domínio de um campo conceitual, mas pode também, em alguns casos, ser impeditivo.

Para Vergnaud (1993), o sentido de situações está ligado a duas ideias, variedade e história. A primeira, ele entende que em um campo conceitual existem variedades de situações e que estas variedades são meios possíveis para que o indivíduo desenvolva novos significados conceituais. A segunda refere-se aos conhecimentos que são formados pelas situações confrontadas e que progressivamente o indivíduo domina, e das quais moldam os conhecimentos já existentes. Para Vergnaud (1996a, p. 167, tradução nossa) são as situações que dão sentido aos conceitos, pois “o sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes⁶”.

Ao elaborar uma situação-problema, o professor precisa levar em conta as competências matemáticas de seus estudantes para resolvê-las. Pois, ao confrontar certas situações o sujeito precisa ser capaz de encontrar significados, interpretá-los e criar ligações com conceitos que ele já tem, podendo deste modo, construir novos sentidos e resolver a questão que lhe são apresentadas.

4.1.2. Esquemas

Para Vergnaud (1993, p.2) o esquema é “a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada”. Uma classe de situação refere-se à estrutura matemática da relação que permite analisar a situação considerada, e o contexto específico do problema que ela apresenta (Vergnaud, 1989). Desse modo, o domínio de uma determinada situação significa que o estudante é capaz de analisar e reconhecer o tipo de problema permitindo-o usar relações e propriedades para resolução desta.

Essas classes mencionadas por Vergnaud (2009a), referem-se a dois momentos distintos. Quando o indivíduo possui, em seu repertório de esquemas, competências necessárias para resolução sobre uma determinada situação. Outra classe de situação é quando o indivíduo não possui todas as competências necessárias para resolução de uma determinada tarefa, resultando a um tempo de reflexão e exploração. Competência no sentido de Vergnaud, refere-se a ação do sujeito considerada adequada para tratamento de situações.

Para Vergnaud (1996a), é o esquema que organiza e dá sentido juntamente com as ações e as representações simbólicas. Por isso, um esquema pode ser moldado, transformado, construído, e excluído no decorrer do processo. Em consequência, ele é assimilador,

⁶ “Astolfi (2002, p.3) define que os significantes correspondem a modos de representações verbais, escritos, gráficos, pictóricos e esquemas daqueles significados precedentes” (Zanella; Barros, 2014).

antecipador e dinâmico. Isso porque, não é o comportamento que é invariante, e sim a organização. Para cada situação, os esquemas geram condutas diferentes. Os esquemas segundo Rabardel (2014):

Não são, portanto, apenas unidades epistêmicas que organizam o conhecimento geral, esses conhecimentos, têm também um aspecto prático e finalizado que lhes permite gerar procedimentos adequados. O esquema é um quadro que atribui significados e desempenha uma função que é essencialmente de planejamento (p.84, tradução nossa).

A construção de esquemas é resultado de uma composição de fatores em que Vergnaud (1990) denomina de “ingredientes de esquemas”, são eles:

- Metas e antecipação: o indivíduo cria um objetivo a se atingir diante as situações de confronto, portanto ao desenvolver esquemas ele se direciona a um ponto e antever seus efeitos;
- Regras de ação: refere-se aos passos sequencialmente elaborados de informações para o controle dos resultados de ação;
- Invariantes operatórios (discutido na próxima seção): são os conhecimentos usados nos esquemas;
- Possibilidade de inferência: na disponibilidade dos três ingredientes anteriores (metas de antecipação, regras de ação e invariantes operatórios) o indivíduo possui competência para sua ação imediata sobre a situação.

Quanto mais esquema o indivíduo for capaz de arquitetar, mais serão as condições de solução sobre uma tarefa. O desenvolvimento cognitivo será resultado do repertório de esquemas. Quanto mais vasto, melhor se dará seu desenvolvimento. No entanto, se o indivíduo não dispuser de capacidades necessárias para solucionar um problema, ele buscará refletir e explorar na tentativa de utilização de vários esquemas (Barros; Boaventura, 2019).

Portanto, compreende-se que os esquemas são construído da cognição⁷ e por consequência, particular de cada indivíduo, para resultar uma ação ou uma operacionalização cognitiva. Logo estabelecem concepções, competências e representações. Por isso, o professor deve ter ciência que em uma situação matemática, cada estudante seguirá um caminho para chegar a um resultado. O importante é produzir estímulos para que os discentes busquem resolver os desafios apresentados.

⁷ Ato de conhecer

4.1.3. Invariantes Operatórios

A resolução de problema que cada estudante desenvolve se constitui diante a sua compreensão sobre os conceitos envolvidos. Desse modo, cada discente desenvolverá esquemas diferentes dentro de um tempo diferente, visto que, a apropriação sobre os procedimentos e significado de um conceito é subjetiva de cada indivíduo.

Nesse contexto, parece fundamental a análise da ação operatória do estudante diante uma classe de situações, para que o professor identifique a existência do domínio sobre conceitos matemáticos, e a capacidade do estudante de reagir em determinado problema. Conforme Zanella e Barros (2014) quando os esquemas são colocados em ação constitui-se o que compreendemos de Invariantes Operatórios, este se refere a conceitos (na compreensão do sujeito) contidos nos esquemas, é a forma que ele organiza seus conhecimentos para domínio de uma situação, com uso de objetos, propriedades e relações. São aspectos que não podem ser observados, mas podem ser constatados diante do comportamento.

Vergnaud (1996a) distingue invariantes operatórios em teorema-em-ação e conceito-em-ação, respectivamente classificados como, proposição e função proposicional. O primeiro é entendido como uma sentença considerada como verdadeira pelo indivíduo que o integra ao esquema sobre o significado real do conceito. O segundo refere-se a um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento contido no esquema e considerado pelo indivíduo como pertinente (Moreira, 2002).

São os conceitos de ação que compõem e estruturam os teoremas em ação desenvolvidos pelo estudante. Esses teoremas são dedução lógica criada pelo sujeito para se chegar a uma solução. Na percepção do estudante as explicativas podem ser corretas, porém, na linguagem natural dos conceitos elas podem falsas ou verdadeiras. Os conceitos em ação, não são proposições, são conceitos implícitos que comportaram propriedades e relações, dessa forma nas situações as quais são evocados, os conceitos em ação podem ser relevantes ou não para construção do conhecimento científico, nesta situação o professor tem um papel essencial para julgamento de validade, no sentido de serem ou não necessários para formação dos conceitos científicos.

Por exemplo, se o estudante afirma que “dois terços está localizado na reta numérica entre os números dois e três”. Compreende-se que o teorema-em-ação mobilizado, é falso, e que o conceito envolvido trata-se do conjunto dos números naturais, este não pode ser classificado como falso, pois é um conceito implícito que o estudante utilizou para chegar a

uma conclusão. Logo, observa-se que os esquemas que o sujeito mobiliza têm importantes componentes conceituais que podem ser identificados e interpretados.

De acordo com Vergnaud (1989), os Invariantes Operatórios possibilitam a inferência às regras de ação pertinente para cada situação específica, sendo necessárias quando teoremas e conceitos em atos são implícitos. As inferências consistem nas modificações ou substituições de esquemas pelo indivíduo a partir da avaliação entre os invariantes operatórios e o cálculo em termos de metas, antecipação e regras, essas mudanças possibilitam o avanço do indivíduo em relação aos seus esquemas anteriores, ao enfrentar novas situações ou problemas (Lucena, 2021).

O professor tem papel essencial para que as articulações nos esquemas dos estudantes sejam feitas adequadamente, pois Moreira (2002, p.18) salienta que a princípio:

A maioria desses conceitos e teoremas-em-ação permanecem totalmente implícitos, mas eles podem também ser explícitos ou tornarem-se explícitos e aí entra o ensino: ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos, e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito. É nesse sentido que conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornarem-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos, mas isso pode levar muito tempo.

Os conceitos atribuídos nos esquemas podem não se mostrarem explicitáveis ou conscientes pelo sujeito diante uma situação. Pela falta de domínio de uma linguagem matemática, os conhecimentos de sua ação não serão explicativos enquanto conceito científico. Os teoremas em ação apenas se tornam verdadeiros quando são explícitos. Porém os conhecimentos implícitos também são essenciais para orientar o desenvolvimento cognitivo uma vez que permite o professor identificar o pensamento matemático do estudante, função está, fundamental atribuída ao seu papel como mediador.

Portanto, o professor tem papel essencial para o desenvolvimento e progresso cognitivo, agindo como mediador entre os invariantes que são constituídos das experiências primeiras e aqueles de natureza científica. Pois, é necessário desconstruir cognitivamente o estudante, conforme a necessidade deste. É preciso identificar os conhecimentos prévios que servirão ou não servirão como base de apoio para que o discente aprenda. E distinguir entre continuidade e rupturas. Quais conhecimentos ele deve abandonar para que novos conhecimentos sejam construídos (Moreira, 2002).

Os conhecimentos prévios, assim como podem ser uma ancoragem para o novo conhecimento, podem torna-se um empecilho para a aprendizagem do conhecimento

científico, agindo como um obstáculo epistemológico⁸. Isso porque, um conceito mal interpretado estabelecido na estrutura cognitiva do estudante tende a dificultar ou impedir a aquisição do real.

Nessa perspectiva, obstáculo epistemológico pode ser interpretado como um obstáculo pedagógico, visto que, em se tratando de educação, o que o estudante acredita saber pode ofuscar o que realmente ele precisa aprender.

Nesse contexto, Moreira (2002) evidencia que a teoria de Vergnaud se apresenta como um bom referencial de análise de resolução de problemas. Uma vez que a conceitualização do real pode ser identificada e analisada nos invariantes operatórios, possibilitando o professor compreender as filiações e rupturas entre os conhecimentos dos estudantes. Desse modo, é importante o estudo de conceitos-chaves da TCC para compreender como essa teoria pode se constituir como referencial pedagógico para o ensino de matemática, especialmente, para o ensino de fração.

4.2. CAMPO CONCEITUAL DAS FRAÇÕES

Na TCC o conceito de fração está incluindo no campo das estruturas multiplicativas, essa estrutura está dividida em relação ternária e quaternária, dos quais implicam em um ou várias multiplicações ou divisões e permitem analisar situações como: proporções simples e múltiplas, razão, fração, quociente, número racional, divisor, etc. (Vergnaud, 1993).

Entretanto Vergnaud (1983b) ressalta que diferente dos números racionais as entidades envolvidas nas estruturas multiplicativas, como a fração e razão, não aparecem como números puros, e sim como medidas e relações. O que leva a dificuldade na formação desses conceitos.

A dificuldade na conceitualização da fração leva as dificuldades em sua aprendizagem, isso porque, ao contrário do número racional que tem um conceito definido, a fração pode ser definida como parte de um todo, como uma medida (quando não pode ser expresso com um número inteiro), ou como um par ordenado m/n de símbolos; ou mesmo como uma relação que une duas magnitudes do mesmo tipo (Vergnaud, 1983b).

Outra questão apontada pelo autor, que leva a dificuldade na aprendizagem de fração, é o fato dos estudantes do ensino fundamental se basearem na definição de número inteiro, que pode representar uma quantidade pela operação de contagem. Enquanto que a fração não

⁸ Obstáculo epistemológico são conhecimentos mal estabelecidos que resistam ao novo conhecimento, o científico, resultando na estagnação e regressão da ciência (Bachelard, 1996).

representa uma quantidade, mas uma relação entre duas quantidades. O que explica os estudos de Nunes e Bryant (2018), no qual as crianças apresentam melhor desempenho em quantidade discreta, onde a partição da quantidade pode ser realizada por contagem, do que em quantidade contínua, que não se sabe a medida. Por isso, para que a aprendizagem de fração seja significativa ao estudante é necessário que ele seja apresentado a diferentes situações dos quais aborde diferentes significados ao conceito de fração.

Campos, Magina e Nunes (2006) identificam que o conceito fração pode ser trabalhado em cinco significados, estes estudados por Nunes e Bryant (2003) e Kieran (1988), que são: a fração como parte-todo, número, medida, quociente e operador multiplicativo. Cavalcanti e Guimarães (2008) foram além desses, buscaram categorizar as diferentes situações que dão significado a fração presente nos livros didáticos. No Quadro 3, adaptado de Cavalcanti e Guimarães (2008, p.2), é identificado a classe de situações que envolvem o conceito de fração encontrado pelos autores.

Quadro 3 – Significados da Fração

Significado	Definição
Parte/todo	Partição de um todo em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$. Um procedimento de dupla contagem, das partes do todo e das partes tomadas, geralmente é o suficiente para solucionar o problema.
Quociente	A fração indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo que uma variável corresponde ao numerador e a outra ao denominador.
Probabilidade	A fração representa a chance de um evento ocorrer. (número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis).
Operador multiplicativo	A fração é um valor escalar aplicado a uma quantidade, ou seja, um multiplicador da quantidade indicada.
Número	A fração é um número em si, não sendo necessário que expresse uma relação ou contexto para ser compreendida numa dada situação.
Medida	Comparação na qual a fração está relacionada à pergunta quantas vezes? Neste caso, uma determinada parte é tomada como referência para se medir uma outra.
Razão	A fração refere-se a quantidades intensivas, nas quais a

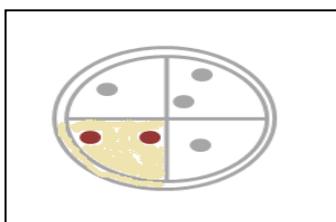
	quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.
--	--

Fonte: Adaptado de Cavalcanti e Guimarães (2008).

A fração como **parte todo** caracteriza-se pelo uso do procedimento de partição, em que o todo (objeto ou figura) é dividido em partes iguais. A parte tomada será o numerador e o todo será o denominador da fração. A partição pode se dar em quantidade que pode ser contínua ou discreta. Diz-se contínua quando a parte obtida de uma figura ou objeto é tomado por cortes de medidas iguais, ou seja, a parte é tomada da mesma natureza (área, comprimento, largura, volume, etc.). A quantidade discreta ocorre por somatória dos elementos divididos de um todo, nesse caso a parte é tomada da mesma natureza, porém formando um novo conjunto ou subconjunto (conjunto de copos, conjunto de roupas, conjunto de maçãs, etc).

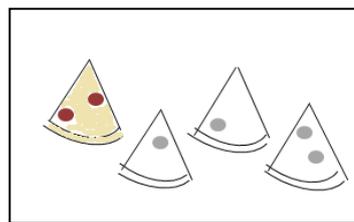
No exemplo: Uma pizza foi dividida entre 4 pedaços. Maria comeu um pedaço. Que fração representa a quantidade de pizza que Maria comeu?

Figura 1 – Quantidade contínua



Fonte: elaborado pelos autores (2023)

Figura 2 – Quantidade discreta



Fonte: elaborado pelos autores (2023)

Nas Figuras 1 e 2 pode-se observar a representação figural da quantidade de pizza que Maria comeu, em quantidade contínua e em quantidade discreta. A fração correspondente, portanto, será $\frac{1}{4}$, o numerador refere-se a parte que foi pintada e o denominador as partes que todo foi partido ou a total de pedaços. O processo de partição “é entendida não como a atividade de cortar algo em partes de qualquer forma, mas como um processo que deve ser orientado desde o início pelo objetivo de obter um número pré-determinado de partes iguais” (Nunes; Bryant, 2018, P. 18, tradução nossa)

No significado de **quociente** a fração tem o papel de divisão, em situações quando o dividendo é menor que o divisor. Nesse tipo de situação Nunes e Bryant (2018) e Campos et al. (2014) evidenciaram em seus estudos o uso de diagrama e esquemas de correspondência pelas crianças, em que os mesmos fazem associação de cada parte dividida do todo ao seu

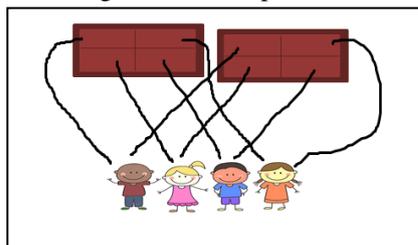
destinatário. De acordo com Nunes e Bryant (2018, p.11, tradução nossa) “a diferença entre partição e divisão de correspondência é que na partição há um único todo (isto é, quantidade ou medida) e na correspondência há duas quantidades (ou medidas)”. Neste ultimo, a criança precisa estabelecer a relação entre as quantidades.

Figura 3 - Divisão

$$\frac{2 \text{ (barras de chocolate)}}{4 \text{ (primos)}}$$

Fonte: elaborado pelos autores (2023).

Figura 4 - Correspondência



Fonte: elaborado pelos autores (2023).

Observe o exemplo: Carla distribuiu 2 barras de chocolate para seus 4 primos igualmente. Quantos pedaços de chocolate cada irmão de Carla irá receber?

Nesse exemplo é possível perceber a existência de duas quantidades distintas para duas variáveis, a quantidade de barras de chocolate e a quantidade de primos, sendo que a quantidade de barras é menor comparado ao número de primos. Nesse caso a fração é uma divisão de barras por crianças. O esquema de divisão e correspondência pode seguir conforme apresentado, respectivamente, na Figura 3 e 4.

Em situações que a fração tem significado de parte-todo e quociente, exige do estudante esquemas relacionais de partição, divisão ou correspondência. Tais esquemas possibilita o discente ter noção de quantidade, pois ele pode compreender, por exemplo, que, quanto mais partes ele corta o todo, menores serão as partes. Possibilita também a ter noção de equivalência, na percepção, por exemplo, de que se tiverem o dobro do número de partes, cada parte seria reduzida para metade no tamanho (Nunes; Bryant, 2018).

A fração em situações de **probabilidade** representa a possibilidade de um evento acontecer diante de determinado evento. Em situações do tipo “que fração representa a chance de tirar cara em um único lançamento de uma moeda?”, a probabilidade é medida pelo número de casos favoráveis dentro das possibilidades possíveis. Neste caso, a fração representa a relação entre a quantidade de lançamento e a quantidade de faces da moeda, logo

sua representação numérica será $\frac{1}{2}$. O numerador indica apenas um lançamento, e o denominador indica as duas faces da moeda, cara e coroa.

Portanto, em situações de probabilidade a fração tem significado de medida, uma vez que envolve a comparação entre duas grandezas. Neste contexto Merline (2005) e Moutinho (2005) salientam que as situações de probabilidade, razão e porcentagem, este último não mencionado por Cavalcanti e Guimaraes (2008) e por isso não será discutido nesse estudo, não representam significado de fração, pois essas situações já envolvem significados de medida e operador multiplicativo.

No entanto, salientamos que as situações que são apresentadas por Cavalcanti e Guimarães (2008) são situações encontradas nos livros didáticos das séries iniciais e que vão dar sentido a conceito de fração, por tal foram consideradas na discussão.

O significado como **operador multiplicativo** tem o papel de transformação. Nesse caso, a fração representa uma ação modificadora sobre um número ou uma quantidade. Especificamente em quantidades discretas a fração $\frac{a}{b}$ atuará como multiplicativo divisor, o numerador será o multiplicador e b divisor (MOUTINHO, 2005). A compreensão de fração como operador multiplicativo é:

Particularmente útil no estudo de equivalência de representações de racionais na forma de frações e, na operação de multiplicação. Desta forma, o problema de encontrar representações equivalentes a uma dada representação na forma de fração é o de encontrar uma função que realiza as mesmas transformações de entrada e de saída, como se fosse uma máquina (Zanella, 2013, p.31).

A analogia feita pela autora pode ser esquemática no Quadro 2, ao exemplo: Em uma classe com 28 estudantes, $\frac{2}{4}$ são meninas. Quantas meninas têm nessa classe?

Quadro 4 – Processo de operação multiplicativa

Entrada inicial	Operador multiplicativo	Saída final
28 alunos	Multiplicar a quantidade inicial por 2, e dividir o resultado por 4; ou dividir por 4, e o resultado multiplicar por 2.	14 meninas

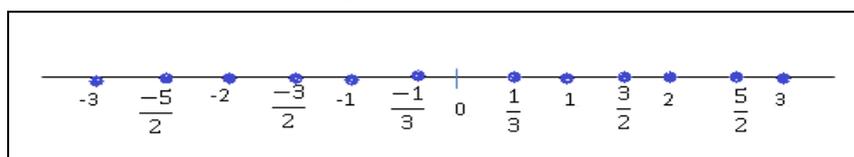
Fonte: elaborado pelos autores (2023).

No Quadro 4 observa-se a transformação que o valor inicial sofre no processo. Nessa questão espera-se que o sujeito perceba a fração como multiplicador da quantidade de estudantes. A resolução poderá seguir como: $28 \times \frac{2}{4} = \frac{56}{4}$, operando a divisão temos que na classe tem 14 meninas.

O significado de fração como um **número** possibilita o estudante compreender a fração não apenas como relação ou sobreposição de dois números inteiros, mas também como número. Um número que deve quantificar certas grandezas em situações que essas quantidades não podem ser representadas por um número inteiro (Nunes; Bryant, 2018).

Segundo Merlini (2005) a capacidade de visualizar a fração como um número posicionado na reta numérica exige que o estudante desenvolva esquema de ordem. A noção de ordenação, ou seja, a noção de que o número fracionário está localizado sob uma ordem numérica, inclui a ideia de comparação e equivalência de fração. A autora ressalta ainda que “ao admitir a fração com o significado de número, não é necessário fazer referência a uma situação específica ou a um conjunto de situações para nos remeter a essa idéia” (Merlini, 2005, p.27). Desse modo, é comum o número fracionário está presente em questões do tipo “onde está localizada a fração $\frac{3}{2}$?”.

Figura 5 – Reta numérica



Fonte: elaborado pelos autores (2023).

A fração $\frac{3}{2}$ deverá ser marcada em um ponto entre 1 e 2, como se pode observar na Figura 5. Esse tipo de situação deve levar o estudante a perceber que existem infinitos números fracionários à direita e a esquerda de $\frac{3}{2}$, essa percepção de ordem possibilita o sujeito a identificar, por exemplo, que $\frac{1}{3} > \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$ (um terço é maior que três meio, e que três meio é menor que cinco meio). Ao comparar uma fração à outra ele descobrirá quem pode ser maior, menor ou mesmo que frações diferentes podem representar o mesmo número, assim como, compreender que o número fracionário pode ser representado em forma ordinal ou decimal (Merlini, 2005).

O significado de fração como **medida** representa a relação entre duas grandezas, estas podem ser intensivas ou extensivas. “Quando a medida de uma quantidade se baseia na comparação de duas quantidades da mesma natureza e na lógica parte-todo, dizemos que a medida se refere a uma quantidade extensiva” (Nunes et al., 2005, p. 122). A medida de quantidade extensiva depende da extensão da quantidade total, ou seja, quantas vezes certa quantidade poderá ser mensurada ou adicionada ao total. Esse tipo de quantidade se divide em contínua e discreta. Conforme exemplificado abaixo:

- Quantidade extensiva contínua: Quantas canecas de $\frac{2}{3}$ litro são necessárias para encher um balde de 18 litros?
- Quantidade extensiva discreta: Numa caixa encontra-se 5 bolinhas de gude de cor azul e 7 de cor verde. Qual a fração que representa a quantidade de bolinhas de gude azul dessa caixa?

Observa-se que estas situações-problemas apresentam quantidades extensivas, pois a medida de uma quantidade se dá pela comparação de outra, ambas sendo de mesma natureza, litro para litro e bolinha de gude para bolinha de gude. O primeiro exemplo refere a quantidade contínua, uma vez que trabalha a quantidade de volume, e o segundo exemplo envolve quantidade discreta por trata-se de um conjunto de um mesmo objeto.

A medida de uma quantidade intensiva é a relação entre duas grandezas de naturezas distintas. Nas palavras de Santana (2012, p.60), “a aplicabilidade das frações no contexto das quantidades intensivas somente é possível quando duas unidades podem ser reunidas em um todo [...]”. Esse tipo de quantidade se divide em contínua e discreta. A seguir observar-se situações-problemas de medida em nesse tipo de quantidade:

- Quantidade Intensiva Contínua: Para fazer certa quantidade de suco são necessários 2 copos de concentrado de limão para 4 copos de água. Que fração representa a medida de concentrado de limão em relação ao total de suco?
- Quantidade Intensiva Discreta: Antônio comprou 5 bilhetes da escola. Sabendo que o sorteio será feito com um total de 35 bilhetes. Qual a chance de Antônio ser sorteado?

Observa-se que os dois exemplos apresentam situações-problemas envolvendo quantidades intensivas, pois estão tratando de medidas em quantidades de diferente natureza, concentrado de limão e suco, assim como, bilhetes comprados e o total de bilhetes do sorteio.

A primeira situação também apresenta quantidade contínua, uma vez envolve volume, enquanto a segunda situação apresenta quantidade discreta por trata-se de um conjunto de

objetos (bilhetes). Para a resolução dessas situações o estudante deve elaborar esquemas relacionais, pois ao medir uma quantidade por outra ele relacionará proporcionalmente duas grandezas.

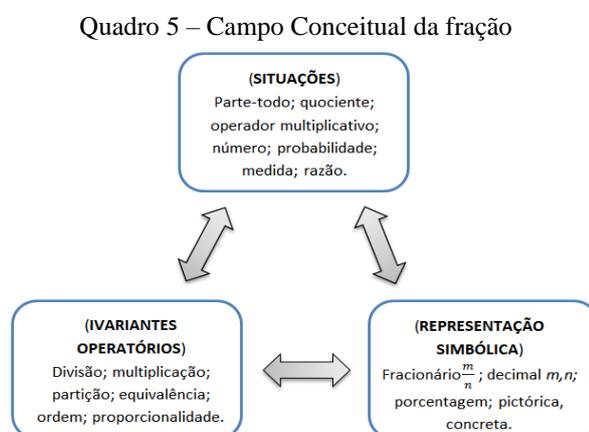
A fração como representação da medida de quantidades intensivas está ligada a situações em que a fração também tem significado de **razão**, isso porque a fração surge da relação entre duas grandezas distintas. Enquanto “a interpretação de razão transmite a noção de grandeza relativa, utilizada como comparação” (Zanella, 2013, p.30). Porém a fração ao significado de razão deve ser resultado da comparação parte-todo, quando se deve indicar uma divisão ou quantidade. Como no exemplo em que, $\frac{2}{6}$ é a medida de concentrado de limão em comparação a quantidade de suco.

Fazendo a distinção entre razão e fração, podemos descrever a relação entre as quantidades da seguinte forma:

- Razão (parte-parte): 2 copos de concentrado de limão está para 4 copos de água, medindo tem-se $\frac{2}{4}$;
- Fração (parte-todo): $\frac{2}{6}$ de suco concentrado está para $\frac{4}{6}$ de água.

Observa-se que a fração como razão representa uma relação da parte (numerador) e o total de suco (denominador). Neste sentido, como salientam Moutinho (2005) e Merline (2005), para resolução desse tipo de situação utiliza-se o significado de medida.

Pelo contexto, o campo conceitual da fração se constitui no conjunto de diferentes situações que envolvem a fração em seus diferentes significados, o conjunto de esquemas mobilizados e as representações simbólicas que dão sentido ao conceito matemático. Conforme se verifica na esquematização sob o triplete de Vergnaud, no Quadro 5:



Fonte: elaborado pelos autores (2023)

Portanto, percebe-se que a notação a/b não é em si o conceito de fração, trata-se de uma representação algébrica do objeto matemático, essencial para expressar o significado daquilo que é abstrato e que não se pode acessar e comunicar. A conceitualização da fração não se dá apenas pelo uso adequado de notações matemáticas, que não deixa de ser essencial para a construção do conhecimento científico, mas principalmente, pela experiência do estudante nas resoluções de situações, pelas quais estabelecem significados do conceito de fração.

As representações, no sentido apresentado, permitem ações e interações de pensamentos matemáticos no real, numa articulação entre significado (invariante operatório) e significante (representações simbólicas). Em se tratando das representações de objetos matemáticos, a ideia de significante desencadeia o uso de representações semióticas para o processo de apreensão do conceito de fração.

4.3. REGISTRO DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DA FRAÇÃO

Considerando que a matemática é puramente formal e opera com a dedução de símbolos⁹, para que o indivíduo seja capaz de compreender e interpretar objetos matemáticos¹⁰ é necessário instrumento de representações (Oliveira, 2009).

As representações podem se formar em signos¹¹, que juntos formam uma linguagem sistematizada dando um corpo e sentido aos objetos matemáticos. Nessa perspectiva Santana (2018, p.59) reitera que “o processo de aprender matemática requer lidar com a aprendizagem da linguagem matemática. Isso implica considerar a representação semiótica¹² como um dos elementos fundamentais para o processo de apreensão conceitual”.

⁹“Uma imagem evocada mentalmente ou um objeto simbólico materialmente escolhido intencionalmente para designar uma classe de ações ou objetos. Assim, a imagem mental de uma árvore simboliza na mente as árvores em geral, uma determinada árvore de que o indivíduo se recorda ou certa ação relativa às árvores etc” (Piaget, 2008, p.185 apud Ferraz; Tassinari, 2015, p.66).

¹⁰ Entidade abstrata.

¹¹“Um signo, ou representâmen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isso cria na mente dessa pessoa um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa do seu objeto” (Henriques; Almouloud, 2016, p. 468).

¹² Duval (2012, p.269) define representações semióticas como sendo “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento”.

Diante o contexto, Duval¹³ desenvolveu a ideia de Registros de representação semióticas. A abordagem cognitiva dessa teoria tem por base a compreensão do conhecimento matemático, este adquirido na relação entre objetos matemáticos e representações simbólicas. Essa relação acontece quando o indivíduo apreende ou produz de uma representação semiótica (semiose) ao mesmo tempo em que ele apreende o conceito de um objeto matemático (noesis) (Duval, 2012).

Segundo Duval (2012) é importante que um objeto matemático seja relacionado a diversas representações, como figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural etc. Essa variedade de representação de um objeto se configura em um sistema de representações semióticas. Onde o professor pode escolher registro¹⁴ de representações mais adequada a cada situação. Assim como o estudante compreender os sentidos de determinado objeto matemático por meios de diferentes registros, ao mesmo tempo, perceber a distinção entre o objeto e a sua representação. Para o teórico, saber diferenciá-los é o ponto estratégico para aquisição de conceitos matemáticos.

A fração, por exemplo, apresenta variedades de registros de representação semióticas, como apresentado no Quadro 6, este adaptado de Maranhão e Iglioni (2003, p. 59).

Quadro 6 – Registros de representação da fração

Representação não discursiva		Representação discursiva	
Registro figural	Registro concreto	Registro simbólico	Registro de língua natural
Contínuo 	Disco de fração ¹⁵ 	Número $\frac{1}{2}$; 0,5; 21,34%; $\frac{1}{2}$; 1:2; $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$	Linguagem natural usual “Doze sobre vinte é igual a três sobre cinco”; “Doze vinte sete avos é igual a três quintos”

¹³ Raymond Duval é um filósofo, psicólogo francês e professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale que desenvolveu pesquisas importantes no Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques (IREM). Em 1995 Duval apresenta a mais importante de suas obras, “Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels”, trata-se da primeira publicação da Teoria dos Registros de Representação Semióticas (Freitas; Rezende, 2013).

¹⁴ “[...] sistemas semióticos que são utilizados em matemática e que preenche uma função específica de transformação de representações semióticas. Isso significa dizer que nenhuma representação pode ser considerada de forma isolada. As representações semióticas devem ser descritas em função do registro nas quais foram produzidas e que determinam o seu conteúdo” (Duval; 2018, p.8).

¹⁵ <https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-754063324-disco-de-fracoes-em-eva-jogo-educativo-matematica-JM>

Discreto ¹⁶ 	Régua de fração ¹⁷ 	Algébrico $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, a e $b \in \mathbb{Z}$; a/b ; a, b ; $R(a, b, c, d)$	Linguagem natural “existe uma relação R entre a, b, c e d”
---	--	--	---

Fonte: adaptado de Maranhão e Iglioni (2003).

Observa-se que a fração é o objeto matemático em estudo podendo ser representado por figuras, símbolos numéricos e algébricos, materiais concretos e linguagem. Em que cada registro, contém regras e características específicas, que produzem diferentes sentidos a fração. Os registros podem ser discursivos ou não. São discursivas quando expressam discurso de mensagem sobre o objeto matemático.

Duval (2012, p.269), ressalta ainda que “as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento”. Isso porque, a conceitualização de um conteúdo matemático acontece quando o sujeito é capaz de mobilizar ao menos dois tipos de registro para um mesmo objeto matemático. Essa organização de diferentes registros permite três importantes atividades cognitivas, pontuadas por Duval (2012), são elas:

- Formação: se refere a construção de uma representação semiótica em um registro dado, baseada nas regras de identificação e reconhecimento desse registro;
- Tratamento: corresponde a transformação de uma representação a outra de um mesmo registro. Desse modo, é entendida como uma transformação interna de um registro;
- Conversão: refere-se a uma transformação de uma representação a outra de registro distinto. Portanto, a conversão é entendida como a transformação externa de um registro.

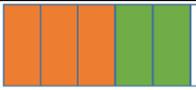
As atividades cognitivas nos registros de representação semióticas do conceito de fração podem ser demonstradas no seguinte exemplo: O Sr. Quintino está pintando o muro da sua casa. No primeiro dia pintou três sétimos do muro, no dia seguinte dois sétimos.

- (a) Represente por meio de uma figura, a parte do muro pintada no primeiro dia e a parte pintada no segundo dia. Use cores diferentes para cada um dos dias.

¹⁶ <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/4ano/matematica/representando-fracoes-com-numeros/259>

¹⁷ <https://www.jottplay.com.br/produto/reguas-de-fracoes-67-pecas/256>

Quadro 7 – Formação e Conversão de representação

Registro em língua natural		Registro figural
Três sétimos	Conversão →	
Dois sétimos		

Fonte: elaborado pelos autores (2023)

- (b) Que fração do muro foi pintada nos dois dias? Represente por meio de uma figura a parte pintada.

Quadro 8 – Formação, tratamento e conversão de representação

Registro em língua natural		Registro simbólico-numérico
Três sétimos	Conversão →	$\frac{3}{7}$
Dois sétimos		$\frac{2}{7}$
Registro figural		↓ Tratamento
	Conversão ←	$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

Fonte: elaborado pelos autores (2023)

Na situação-problema apresentada, a representação da fração foi formada em registro figural, em registro simbólico numérico e registro de língua natural. A questão (a) permite que o estudante possa converter uma representação a outra de um registro diferente, como demonstrado no Quadro 7. Nesse caso, o registro de língua natural é utilizado para a interpretação do problema envolvendo a fração, onde este é transformado em uma representação figural. A questão (b) permite que o estudante possa tratar e converter as representações da fração. Observa-se (Quadro 8) que o tratamento se dá pela soma de frações com registro numérico, e a partir desde, ocorre à conversão para representação figural.

Os registros de representações semióticas são essenciais tanto para a elaboração de um problema matemático, como para o desenvolvimento da resolução desde. Observa-se que o Quadro 8 apresenta três registros diferentes para a resolução da questão, no entanto, apenas a representação figural seria necessária para o atendimento do enunciado. Porém os demais registros são importantes para dar significado a situação em que a fração está envolvida, permitindo o discente desenvolver esquemas para a elaboração de uma resposta, isso porque, cada registro exige tratamentos diferentes, logo, trabalhos cognitivo diferentes.

O registro concreto, por exemplo, é um meio complementar para representação de objetos matemáticos quando os registros discursivos não são suficientes para produzir um

significado ao estudante. Seja porque as situações a qual o conceito está envolvido são dissociadas da realidade do discente, seja porque representações simbólicas de objetos matemáticos dificulta a compreensão dos conceitos, uma vez que o estudante não consegue perceber a praticidade de tais objetos simbólicos no seu dia a dia.

É importante observar também que em um conceito matemático pode estar incluído vários objetos matemáticos, neste sentido, torna-se viável que tal conteúdo seja abordado em diferentes representações, caso contrário, o estudante terá acesso apenas a uma parte desse conteúdo. Ball (1993, p. 162, tradução nossa) evidência que:

Contextos de representações frutíferas são enquadrados de forma suficientemente clara para facilitar o desenvolvimento de uma boa compreensão e habilidade matemática nos estudantes. Barras de fração, diagramas de tartes, linhas numéricas - todas elas podem ajudar a concentrar os alunos em certas características-chaves das frações, tais como os significados dos termos fracionários. Ao mesmo tempo, o contexto é suficientemente aberto para oferecer aos estudantes oportunidades de explorar - para fazer conjecturas e seguir tangentes matemáticas importantes.

Portanto, compreende-se que o objeto matemático apenas pode ser acessível por meio das representações e quanto maior a variedades de registros mais possibilidade o professor terá de desenvolver situações que serão significativas ao estudante, assim como, mais variedade de simbolização eles terão de expressarem seus conhecimentos.

As representações simbólicas ao mesmo tempo em que propicia o desenvolvimento cognitivo representa uma forma de comunicação entre o estudante e professor, uma vez que permite o professor “perceber a matemática através da mente do aprendiz enquanto percebe a mente do aprendiz através da matemática” (Ball, 1993, p.158, tradução nossa). Pois, segundo Vergnaud (2009b), “[...] os meios utilizados pela criança, os caminhos que ela toma para resolver um problema ou atingir um dado objetivo numa determinada tarefa escolar, são profundamente enraizados na representação que ela faz da situação”.

Nessa perspectiva, Colombo, Flores e Moretti (2007) articulam as teorias de Duval e Vergnaud no que se refere a representações de objetos matemáticos, uma vez que ambas trataram de formação de conceitos. No entanto, enquanto que para Duval a representação é referencia para a aquisição do conceito matemático, para Vergnaud, a representação está ligada a linguagem.

Vergnaud (1996b) argumenta que as representações simbólicas expressam uma forma de linguagem, uma vez que a linguagem tem como função, a comunicação. A comunicação do que o estudante entende e como ele compreende a matemática, e com o que o professor carrega de conhecimento matemático. Portanto, sem símbolos e sem palavras não há

conceitos, pois não poderia haver meio de expressão. Por isso a linguagem e os símbolos matemáticos são essenciais na conceitualização e na ação.

O que se busca esclarecer neste estudo, entre a percepção de Duval e Vergnaud, é a ideia de que as representações de objetos matemáticos são essenciais para a aprendizagem de matemática, mas como lembra Vergnaud (2009b), não devem ser restritas a símbolos e signos (significantes), pois nela estão contidas também sentidos, conceito e noções matemáticas (significados). As representações são também meios dos quais é possível analisar tanto os conhecimentos postos em ação, como os processos de transmissão de conhecimento (Vergnaud, 1985). Logo, são as representações que possibilitam a compressão e a inferência.

Desse modo, tratando-se de registros de representações semióticas, o uso de materiais concretos (esquadros, discos e réguas de frações) em situações didáticas pode revelar-se como um bom material didático, pois, ao passo que permitem que objetos matemáticos sejam visíveis, palpáveis e significativos na medida em que este é manipulado pelo estudante a fim de explorar e testar ideias matemáticas, é possível criar estratégia didática para organizar a estrutura cognitiva do estudante formalizando seus conhecimentos, com o objetivo de promover uma aprendizagem ativa sobre o conceito de fração.

4.4. ABORDAGEM INSTRUMENTAL

O uso de artefato como método construtivo de conhecimento, discutido aqui neste estudo, parte da teoria da Ação Instrumental¹⁸ proposta por Rabardel¹⁹ (1995), que a descreve como uma abordagem antropotécnica, uma vez que situa-se na análise dos fatos técnicos e psicológicos. Segundo Henriques (2021, p.251) a Abordagem Instrumental²⁰ “refere-se à aprendizagem da utilização/integração/aplicação de ferramentas tecnológicas ou qualquer outro recurso que se apresenta como instrumento na pesquisa, no ensino e na aprendizagem”.

¹⁸ A teoria Instrumentada de Rabardel tem como base uma perspectiva antropocêntrica, com referência teórica a abordagem sócio-histórica de Vygotsky, Teoria da Atividade de Leontiev e a Epistemologia genética de Piaget.

¹⁹ Pierre Rabardel (1945 – 2021) foi pesquisador, professor de psicologia e ergonomia, francês, da Universidade de Paris 8 em 1993. Em seus últimos anos dedicou-se a escultura, fotografia e escrita de romances. Dentre seus trabalhos destaca-se o desenvolvimento do modelo de atividade instrumentada, a Abordagem Instrumental. (Paris, 2021).

²⁰ A abordagem instrumental de Rabardel é uma proposta de modelo de análise e orientação de comportamento instrumentado que visa o desenvolvimento da capacidade do sujeito de saber fazer e agir em situações, principalmente voltado para técnica e design de novas tecnologias, dessa forma, ser capaz de atingir seus objetivos. Está abordagem se constitui de um viés pragmático e construtivista, com base nos conhecimentos de Rabardel em psicologia e ergonomia (Rabardel, 2005).

A abordagem Instrumental é um método didático que se caracteriza pela mobilização de um determinado produto (concreto ou abstrato) para a construção de um pensamento racional lógico. Na didática matemática, esta abordagem propõe um modelo de aprendizagem matemática que se ampara na dialética *artefato-instrumento* (Bellemain; Trouche, 2019).

Segundo Rabardel (1995), artefato²¹ é um objeto ou mecanismo que tem uma finalidade, é algo que existe por alguma coisa e para alguma coisa, podendo ser concreto (livro, lápis, celular, mesa, calculadora, etc) ou abstrato (fórmulas, símbolos, vetores, coordenadas, etc). Por tanto, no contexto de abordagem instrumental, artefato deve ser compreendido mais do que uma “coisa que sofreu transformação de origem humana”, mais principalmente, uma coisa que pode ser usada como solução para um problema ou classes de problemas (Rabardel, 1995). Para Bellemain e Trouche (2019, p.107) artefato “[...] é um produto da atividade humana, que se caracteriza por suas *potencialidades*²², seus *limites* seus *affordance*²³”.

O instrumento é uma entidade mista, constituída pelo artefato mais a sua parte funcional, ou seja, é o esquema de utilização desse objeto, que pode ser resultante da própria construção do sujeito ou mesmo de apropriação de esquemas constituídos socialmente. Portanto, o termo instrumento, é usado por Rabardel (1995, p.49, tradução nossa) “para designar o artefato em situação, registrado em um uso, em uma relação instrumental à ação do sujeito, como meio deste”.

O instrumento segundo Pereira, Santana e Silva (2016):

Não existe em si mesmo, torna-se portador de uma multiplicidade de valores de sentido para o sujeito. Então, torna-se um instrumento, quando o sujeito é capaz de atribuir significados e integrar o seu valor funcional, de um determinado artefato, a sua atividade. Portanto, mobilizados por um artefato ou parte desse artefato, o instrumento pode ser considerado pelo sujeito, como uma extensão de um objeto, uma parte funcional (p. 8).

No entanto, Bittar (2011), pontua que na transformação de instrumento, ele não é algo acabado, e sim, algo que pode ser reelaborado, moldado e reorganizado conforme a necessidade do sujeito diante as atividades. Para Rabardel (2005, p.257), um “instrumento se

²¹ O termo “artefato” é adotado por Rabardel (1995) como articulação entre uma perspectiva tecnocêntrica e uma perspectiva antropocêntrica, onde um objeto pode ser considerado tanto do ponto de vista técnico como do ponto de vista de suas funções, e algo que pode ser transformado pelo homem.

²² “A potencialidade é um conjunto de qualidades de um artefato (ferramenta ou comando, material concreto manipulável a mão livre...) associado aos conhecimentos de um instrumento capaz de permitir ao sujeito agir sobre um objeto do saber, visando solucionar problemas em torno deste objeto de maneira eficiente e, eventualmente dinâmica” (Henriques, 2019, p. 46).

²³ “a qualidade de um objeto que permite ao indivíduo identificar sua funcionalidade sem a necessidade de prévia explicação” (Bellemain; Trouche, 2019, p. 107).

enriquece de acordo com suas mobilizações na singularidade de situações de ação”. Neste sentido, todo instrumento é conhecimento, pois conforme o instrumento é utilizado, reutilizado e adaptado ele torna-se um meio de capitalizar as experiências acumuladas (Rabardel, 1995).

A organização da ação que permite a apropriação do artefato é denominada por Rabardel (1995) como esquemas de utilização (E.U.), que leva o sujeito a encontrar possibilidades de uso para o objeto diante uma situação envolvida. Logo, um artefato pode ter várias funções, uma vez que ele pode mobilizar diferentes esquemas, portanto, vários instrumentos. Por vezes, os esquemas são retirados do repertório do indivíduo, sendo necessária a adaptação diante a necessidade do novo artefato. Ou na falta de esquemas em sua estrutura cognitiva, é necessário desenvolver esquemas inteiramente novos.

Neste sentido, o instrumento é o resultado do trabalho cognitivo, pela construção lógica racional sobre um artefato diante uma situação. Em situações, por exemplo, que o estudante precisa usar a calculadora para resolver um cálculo; a fórmula de Bháskara para encontrar o valor de uma raiz; Geogebra para construir um gráfico; demanda uma esquematização lógica, para a ação do sujeito sobre a situação com o uso do objeto.

De acordo com Rabardel e Folcher (2004), os esquemas de utilização têm tanto um caráter individual como social. Individual porque sua existência se constitui pela singularidade da elaboração e história dos esquemas por cada indivíduo, ou seja, a partir das características específicas que cada pessoa possui. E tem caráter social, uma vez que os esquemas são postos em ação e compartilhados em comunidades ou em grupos sociais. Isso porque, o instrumento é construído para atender a necessidade do sujeito em sua realidade, possibilitando o outro compreender e interpretar sua ação.

De acordo com Rabardel (1995) os esquemas mobilizados na atividade instrumentada constituem uma classe de esquemas de utilização que englobam Esquemas de Uso (E.Us.), Esquema de Ação Instrumentada (E.A.I.) e/ou Esquemas de Atividade Coletiva Instrumentada (E.A.C.I). Suas mobilizações são relativas às dimensões da atividade: tarefas primárias e secundárias, ou dimensões individuais ou coletivas.

Os Esquemas de Uso referem-se aos esquemas de primeiro nível, por formarem um conjunto de esquemas que juntos resultam na ação global a situação-problema. Eles estão relacionados com as atividades secundárias, ou seja, atividades específicas diretamente relacionadas com os artefatos (Rabardel, 2011).

Os Esquemas de ação instrumentada de acordo com Rabardel (2011) são constituídos dos esquemas de primeiro nível e estão associadas às tarefas primárias (tarefas principais), atividades em que o artefato é meio de realização. Por isso, E.A.I. refere-se à ação direcionada pelo objetivo principal, em que ocorre a transformação do artefato em instrumento dada a situação.

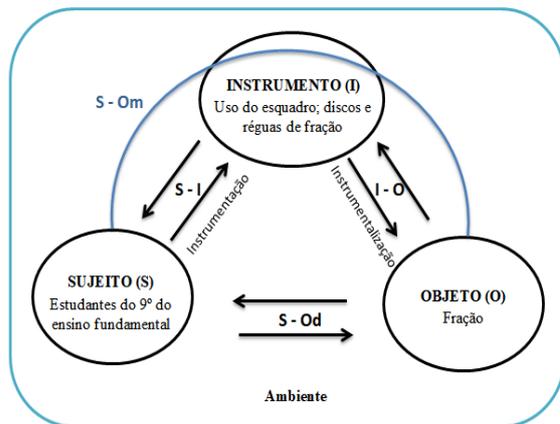
Quando um instrumento é compartilhado no coletivo ou quando o coletivo trabalha com a mesma classe de instrumentos, então são mobilizados Esquemas de Atividade Coletiva Instrumentada. Onde os esquemas individuais, a partir das informações transmitidas uns com os outros, se integram para alcançar um objetivo comum (Rabardel, 2011).

Suponha uma atividade remota em que dois ou mais sujeitos utilizam o editor de texto online (artefato) para produzir um texto, podendo dessa forma, trabalharem simultaneamente. Cada sujeito mobilizará individualmente E.U.s., que consiste, por exemplo, em abrir o programa de edição, compreender as ferramentas e configurações do editor. Com base nesses esquemas, os sujeitos são capazes de mobilizar E.A.I para digitalizar o texto com as formatações configuradas. A escolha da formatação bem como as ideias contidas no texto foi de escolha coletiva, ou seja, dos E.A.C.I. Resultando ao final do processo, um texto, onde é possível os sujeitos compartilharem do mesmo instrumento.

O processo de transformação do artefato em instrumento é denominado por Rabardel (2005) como Gênese Instrumental. No contexto de abordagem instrumental, o termo “gênese” é compreendido como “desenvolvimento” de entidade, instrumento que se desenvolve durante a atividade (Bellemain; Trouche, 2019). No entanto, cabe ressaltar que o artefato só tem relação com instrumento quando o sujeito consegue elaborar esquemas de uso para este. Logo, o processo de Gênese instrumental é um processo de aprendizado, que pode levar minutos ou vários anos, dependendo da natureza da atividade ou do artefato, ou mesmo da habilidade do sujeito (Contamines; George; Hotte, 2003).

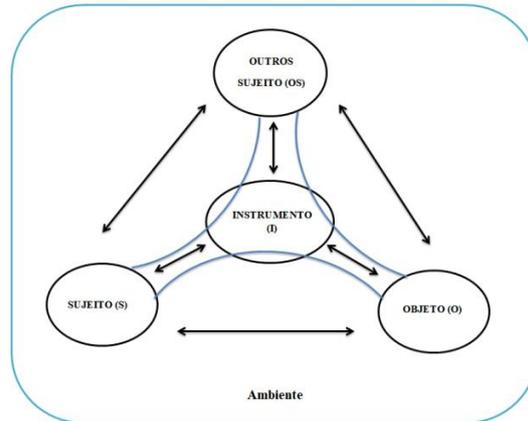
A Gênese Instrumental se constitui na relação tríade entre sujeito-instrumento-objeto, como pode ser observado a seguir.

Figura 6 - Modelo de S.A.I.



Fonte: Adaptado de Rabardel (1995, p.53)

Figura 7 - Modelo de S. A. C. I.



Fonte: Adaptado de Rabardel (1995, p.52)

Na Figura 6 é demonstrado o modelo denominado de Situações de Atividade Instrumentada – S.A.I. de Rabardel (1995), onde o sujeito refere-se ao agente da ação, o instrumento trata-se do produto da ação, e o objeto é aquele a quem o sujeito dirige sua ação com o instrumento, neste caso, a fração. Esses três polos interagem em um ambiente propício para atividade instrumentada. Na Figura 7 observa-se a relação tétrade que é formada quando estiverem envolvidos outros sujeitos na atividade instrumentada.

Segundo Rabardel (1995) a relação entre S-Od é a interação direta entre o sujeito e o objeto, em geral, quando o sujeito utiliza de técnicas já formalizadas. I-O é a interação entre o instrumento e o objeto, quando o sujeito personaliza o artefato de acordo com o objeto em situação, sendo resultado dos E.U.s e estabelecido no processo compreendido como Instrumentalização. S-I é a interação entre sujeito e o instrumento, quando o sujeito é capaz de utilizar o artefato para realização da atividade, sendo resultado dos E.A.I. e estabelecido no processo compreendido como Instrumentação. S-Om é a interação entre o sujeito e objeto, pela mediação do instrumento.

Incluindo o quarto polo na relação (OS), como apresentado no Quadro 10, conclui-se uma interação do tipo S-OS caracterizada pela interação direta entre os sujeitos, e S-OSm como sendo a relação entre os sujeitos medida pelo instrumento (este resultado dos E.A.C.I.). A relação entre os sujeitos constitui a medição colaborativa, assim denominada por Rabardel (1995).

No desenvolvimento de Gênese Instrumental ocorrem dois processos essenciais e não independentes denominados por Rabardel (1995) como Instrumentalização e Instrumentação. A Instrumentalização é o processo dirigido para o artefato, que configura a exploração do

sujeito para conhecimento das propriedades, limites e potencialidades do artefato. É aqui que evidencia a mediação epistêmica, interação S-Om, voltada para familiaridade do objeto.

A Instrumentação é o processo voltado para o sujeito, onde ocorre a assimilação do artefato a esquemas já constituídos. O sujeito integra as potencialidades do artefato às atividades de uso, ou seja, atribui uma função ao artefato. Neste processo evidencia a mediação pragmática, interação S-Om, constituída pela transformação, gestão, regulação etc., do artefato (Rabardel, 1995).

As mediações mencionadas fazem parte da atividade produtiva, onde as ações acontecem em prol da realização da atividade. No entanto, Rabardel (1995) argumenta que as mediações podem extrapolar o tempo da atividade, pois a atividade instrumentada gera uma terceira e importante mediação por instrumento, nesse caso, voltada para o próprio sujeito, a mediação reflexiva. Nesta mediação, o sujeito se conhece, se administra e se transforma isso porque, a atividade exige novas funções psicológicas que devem ser operadas para transformação do artefato em instrumento. Nesse sentido, a mediação reflexiva acontece na temporalidade da atividade construtiva, onde ocorre desenvolvimento da Gênese Instrumental (Rabardel, 1995).

No âmbito da educação matemática o processo de Gênese Instrumental pode se desenvolver em consonância com prática pedagógica do professor em sala de aula, pela integração de novos materiais que sejam por iguais acessíveis e contextualizados, propiciando a aprendizagem na presença de tecnologias ou qualquer outro recurso. Neste processo, o foco principal é o estudante e o desenvolvimento de seu conhecimento.

Em Abordagem Instrumental são os invariantes operacionais, base dos esquemas, que orientam o uso dos artefatos sobre a situação envolvida. Eles são relativamente resistentes, visto que são formados pelo decorrer de vários ciclos de uso. Eles podem ser moldados, reajustados, e podem evoluir no confronto com as novas circunstâncias de ensino (novos recursos disponíveis, desempenho didático na sala de aula, etc.). (Bellemain; Trouche, 2019, p. 118). A desestabilidade dos invariantes operatórios pode contribuir, juntamente com a mediação do professor, para o processo de aprendizagem do estudante, ao passo que um conhecimento implícito pode ser configurado em um conhecimento mais elaborado, explícito e científico.

Em geral, compreende-se que a Abordagem Instrumental possibilita o uso de tecnologia ou qualquer outro recurso como ferramenta para construção do conhecimento matemático, sendo este resultado da atividade cognitiva ao par artefato-instrumento. Logo

esta abordagem abre espaço para o desenvolvimento de atividades didáticas instrumentadas em aulas de matemática a partir da incorporação de materiais didáticos como auxílio para o processo de ensinar e aprender matemática.

4.5. ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL

Considerar o desenvolvimento de Gênese Instrumental é necessário reconhecer uma peça essencial para efetividade deste processo, o professor, pois é este que tem a responsabilidade de criar ambientes frutíferos que possibilite a aquisição do conhecimento dos estudantes mediante os artefatos disponíveis. Este é um aspecto relevante que não possui espaço de discussão na Abordagem Instrumental. É sob essa lacuna que Trouche²⁴ (2004) desenvolveu o conceito de Orquestração Instrumental, posteriormente complementada por Drive et. al. (2010).

A ideia de OI é uma metáfora a uma orquestra musical, onde o professor tem papel central, o “maestro”. E como uma banda de Jazz, permite espaço de improvisação dos estudantes (músicos). A escolha da partitura é determinada pelo maestro assim como escolha da configuração didática é do professor (Trouche; Drijvers, 2014). Para Gitirana e Lucena (2021, p.369):

OI enquanto modelo teórico-metodológico tem se revelado flexível e frutífero no que concerne à criação de arquiteturas de ensino com suporte de tecnologias, em especial, as digitais. Também tem favorecido o desenvolvimento dos sujeitos nos processos de resolução de situações matemáticas com integração de tecnologias, considerando as restrições e condições apresentadas.

A OI é definida por Trouche (2003) por configuração didática e seus modos de exploração e articulação, que busca orientar os sujeitos para o desenvolvimento de Gênese Instrumental. De acordo com Trouche (2005a, p.126, tradução nossa) uma OI é:

Um arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente, realizado por um agente (professor) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar os aprendizes nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos.

Conforme Trouche (2005a) é um arranjo sistemático, pois como todo método a orquestração requer a composição de elementos (organização dos artefatos e sujeitos em um

²⁴ Luc Troche (1953- Oran, Argélia) é professor em matemática, sendo desde 2019 emérito da l'École Normale Supérieure de Lyon. Dentre suas pesquisas em educação matemática destacam-se a Orquestração Instrumental e Abordagem Documental da Didática, este último desenvolvido com seus colaboradores, (Gueudet, Pepin & Trouche 2012). (Trouche, 2020).

ambiente) em uma ordem de procedimento, a fim de atingir o objetivo traçado. O professor ao integrar um recurso tecnológico, ou qualquer outro artefato a sua prática pedagógica, precisa estabelecer um planejamento para tornar esse processo em uma experiência eficiente e construtiva, tanto para ele quanto para o estudante. Caracteriza-se como arranjo intencional, justamente porque sua organização didática é estabelecida por um pensamento a priori (Trouche, 2005a). A OI é uma estrutura arquitetada pelo professor a fim de atingir um objetivo, que é a aprendizagem do estudante no uso do artefato, ou seja, cria-se um ambiente favorável para o desenvolvimento de Gênese Instrumental.

Nesse panorama, Trouche e Drijvers (2014, p.5, tradução nossa) salienta que:

A noção de orquestração instrumental proposta por Trouche (2004, 2005) na educação matemática não se aplica apenas aos episódios de discussões e parece ser mais precisa, visando definir a gestão do espaço e do tempo de um ambiente de aprendizagem, de acordo com as diferentes etapas da tarefa a ser executada.

Desse modo, Drijvers et al. (2010) distingue três elementos dos quais norteiam e estruturam uma OI, a configuração didática, modo de execução e performance didática, sendo as duas primeiras elaborados por Trouche (2004). A configuração didática diz respeito ao esquema estrutural da OI elaborada pelo professor, ou seja, a composição do planejamento mediante as escolhas didáticas e às análises a priori. Trata-se da organização do ambiente de ensino e os artefatos escolhidos. Compõe a configuração didática: a gestão dos recursos, a gestão do tempo, a organização dos participantes, e as tarefas.

O modo de execução refere-se à previsão de como a OI deve ser utilizada com base na situação proposta e na configuração didática desenvolvida pelo professor. Visto que, tais artifícios permitem a previsão de determinadas situações que possam vir a surgir no decorrer do processo e, possibilita o professor estabelecer suportes técnicos para o controle em situações imprevistas. É a forma que o professor integrará o artefato na situação didática sob a intencionalidade de atingir seus objetivos (Drijvers et al., 2010).

A performance didática, caracterizada por Drijvers et al. (2010), consiste no desempenho da OI diante da situação arquitetada, em que “envolve as decisões ad hoc²⁵ tomadas durante o ensino, sobre como realmente executar o ensino promulgado na configuração didática escolhida e modo de exploração” (Drijvers et al., 2010, p.215). Na performance didática o professor analisa os detalhes e aspectos relevantes manifestados

²⁵ Decisões não planejadas (Lucena; Gitirana; Trouche, 2018).

durante a execução da OI, pois é na real interação entre o professor e os estudantes que é possível verificar as intenções e o sucesso da situação didática.

Lucena, Gitirana e Trouche (2018) evidenciam que a performance didática constitui-se em eventos previstos, estabelecidas na análise a priori, e eventos imprevistos, que exigem decisões ad hoc e geram reações ah hoc. Esse tipo de reação dos estudantes também não é prevista pelo professor e “[..] podem ser motivadas, por exemplo, por causa das características da situação, dos conhecimentos exigidos para a resolução da situação, da habilidade ou não no uso dos artefatos disponibilizados, [...] do tempo de resolução, etc.” (Lucena; Gitirana; Trouche, 2018, p. 241).

A Performance Didática permite a flexibilidade de uma orquestração, uma vez que, nesta fase o professor pode fazer ajustes, tomadas de decisões ah hoc, com base por exemplo no conhecimento ou dificuldades dos seus estudantes e reações ah hoc. Esses ajustes podem levar em mudanças dos elementos da orquestração caso necessários, assim como no planejamento inicial. Essa concepção evidencia que toda orquestração evolui durante sua execução (Bellemain; Trouche, 2019).

Cada componente que constitui o modelo de OI é essencial para o sucesso da atividade prática em sala de aula. Pois, “é com base neste modelo, também, que o professor pode refletir sobre a experiência por ele adquirida após cada vivência de orquestração, e se esta conseguiu atender aos objetivos pré-estabelecidos” (Muniz; Gitirana; Lucena, 2021, s.p.).

Portanto, enquanto na Abordagem Instrumental o foco é o estudante, na OI o elemento central é o professor, desse modo, é importante que este tenha a sensibilidade em compreender a importância do planejamento e organização durante a elaboração e execução da Orquestração Instrumental, como também, analisar a eficiência dos procedimentos didáticos, ou mesmo, do artefato escolhido para propiciar o desenvolvimento da Gênese Instrumental dos seus estudantes diante da situação matemática.

CAPÍTULO V METODODLOGIA

Neste capítulo, aborda-se o percurso metodológico da pesquisa, enquanto sua abordagem, aos fins, procedimento, técnica, instrumentos e método de análise de dados, dos quais possibilitam a construção da realidade enquanto objeto de conhecimento diante da linguagem científica.

5.1. TIPO DE PESQUISA

No caminho em analisar a Gênese Instrumental dos estudantes, a abordagem qualitativa se comportou adequadamente para melhor entendimento dos fenômenos. Isso porque, adentrar no campo cognitivo requer do pesquisador um olhar não apenas sob o sujeito mais toda complexidade sociocultural que constitui sua natureza. Para Minayo et. al. (1994), a pesquisa qualitativa se preocupa com aspectos da realidade que não podem ser mensurado, uma vez que sua abordagem permeia questões particulares do indivíduo, como crenças, valores, atitudes, experiências, etc. Conforme Taquette e Borges (2020, p.70) a pesquisa qualitativa implica:

uma relação mais próxima do pesquisador com o objeto de pesquisa em que há interação. Essa relação deve ser dialógica, reflexiva, de modo que seja possível entender o não visto, o não falado, o não explícito. Devido a essa interação, o pesquisador também é parte do que está sendo investigado. Na pesquisa qualitativa a interação é objetiva e descritiva do fenômeno.

Nesse sentido, este estudo exprime princípios de pesquisa qualitativa descritiva, uma vez que está centrada a uma problemática socioeducacional, envolvida com seres humanos que carregam saberes, opiniões e ideias, e que estão embasadas sob um contexto na qual se busca dar voz e reproduzi-las. A descrição das características de um grupo ou fenômeno deve ser resultado da perspectiva alcançada na atuação prática do pesquisador (Gil, 2008).

Quanto à natureza, apresenta-se como uma pesquisa aplicada, pois o conhecimento produzido tem a intencionalidade de amenizar ou mesmo solucionar as dificuldades no ensino e aprendizagem de fração. Para Taquette e Borges (2020), esse tipo de pesquisa tem objetivo de produzir conhecimento que possa ser efetivamente aplicado na vida real, contribuindo para mudanças de fenômenos semelhantes.

5.2 PROCEDIMENTO METODOLOGICO

O procedimento de investigação do presente estudo intervém da pesquisa-ação, uma vez que, estar “[...] voltada para a descrição de situações concretas e para a intervenção ou ação orientada em função da resolução de problemas efetivamente detectados nas coletividades consideradas” (Thiollent, 2011 p.15). Esse procedimento possibilitou o processo de intervenção da realidade educacional investigada, promovendo mudanças baseada no objetivo de melhorá-la, juntamente com a participação e colaboração dos sujeitos envolvidos no processo cíclico resultante de ação e reflexão. O pressuposto vai ao encontro da definição de Thiollent (2011, p.20) sobre a pesquisa-ação.

É um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

Taquette e Borges (2020, p.68) acrescentam que a pesquisa-ação é uma pesquisa de campo onde o “investigador se envolve diretamente com o objeto de estudo para que ocorra uma mudança no meio. Ele identifica um problema, cria um plano de intervenção e depois analisa as alterações que ocorrem a partir do seu projeto”.

5.2. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DA PESQUISA

As técnicas e instrumentos utilizados em campo estão apresentados no Quadro 9, e posteriormente discutidos.

Quadro 9 – Técnicas e Instrumentos da pesquisa

Técnica de coleta de dados	Instrumento de coleta de dados	Dados produzidos
Avaliação diagnóstica	Folhas (A4) de atividades	Registro cursivo resultante das respostas dos estudantes.
Observação	Diário de bordo (papel, lápis/caneta para registro cursivo).	Registro cursivo resultante das observações do pesquisador.
Filmagem	Câmera do celular (pesquisador)	Vídeo da ação instrumentada.

Fonte: elaborada pelos autores (2023)

Cientes de que buscar evidências da mobilização de invariantes operatórios pelos estudantes é por vezes uma tarefa complexa, uma vez que encontra-se nos seus esquemas e

estes “caracterizam-se por serem simultaneamente estruturais e funcionais, pois são organizações, produto da atividade cognitiva do sujeito” (Zanella; Barros, 2014, p.23). Foi necessário o auxílio de uma variedade de instrumentos e técnicas de coleta de dados para uma melhor compreensão do fenômeno.

A **avaliação diagnóstica** foi aplicada anteriormente a intervenção, e será conhecida como avaliação a priori. Neste momento foi aplicada a **folha de atividade** contendo uma classe de situações-problemas de fração. O objetivo consistiu em sondar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o conceito de fração. Dessa forma, as provas respondidas constituíram uma rica fonte de dados, isso porque, a avaliação diagnóstica segundo Silva, Silva e Alves (2014, p.16):

Tem a função de diagnóstico, assumindo dois propósitos que são, em primeiro lugar, determinar o nível de aprendizado pelo educando e em segundo descobrir as causas ou circunstâncias que dificultam a aprendizagem no decorrer do processo de aprendizagem.

Os invariantes operatórios dos estudantes, por vezes podem ser expressos não apenas pela linguagem escrita, mas também pela linguagem oral e gestual, principalmente diante atividade coletiva em que os sujeitos estão em constante interação, compartilhando informações e expondo concepções. Desse modo, o processo de intervenção exigiu da pesquisadora a **observação** como técnica de coleta dados. Pois a observação, como afirma Gil (2008, p.100) tem “[...] como principal vantagem, em relação a outras técnicas, a de que os fatos são percebidos diretamente, sem qualquer intermediação. Desse modo, a subjetividade, que permeia todo o processo de investigação social, tende a ser reduzida”.

De acordo com Minayo et. al. (1994), a observação possibilita o alcance de informações em detalhes que não são obtidos por meio de perguntas, e justamente por serem resgatadas da própria realidade, transmitem os aspectos mais imponderáveis e evasivos da vida real. No entanto, tais observações não se limitam ao registro visual, tão bem, as informações devem ser transferíveis para instrumentos que auxiliem o pesquisador o armazenamento dos dados, para posteriormente, a análise dos mesmos.

Neste estudo, os registros das informações sob as observações feitas em campo foram transcritos no **diário de bordo**, com auxílio de papel e caneta. Ainda segundo Minayo et. al. (1994), o diário do observador é um instrumento em que se pode recorrer a qualquer momento da investigação para registro de informações, sobre o qual o pesquisador se debruça para construir detalhes dos quais pode agregar em dados para pesquisa.

Compreendendo que acompanhar o desenvolvimento cognitivo é um processo que demanda atenção minuciosa sobre os estudantes, no que diz respeito as suas expressões gestuais, orais, descritivas, e principalmente as interações uns com os outros, a **filmagem** também foi adotada durante a atividade coletiva instrumentada para coleta de dados.

A filmagem torna-se um auxílio importante para capturar maior quantidade de informações sob o maior número de estudantes, no período de aula disponível para as atividades didáticas. Ademais, “o vídeo pode auxiliar também o pesquisador a desprender-se de seus valores, sentimentos, atitudes que podem conferir tons subjetivos ao seu olhar, influenciando as notas de campo realizadas no decorrer da observação participante” (Pinheiro; Kakehash; Angelo, 2005, p.718).

Pinheiro, Kakehash e Angelo (2005, 718) argumentam que a filmagem é indicada para:

Estudo de ações humanas complexas difíceis de serem integralmente captadas e descritas por um único observador, minimizando a questão da seletividade do pesquisador, uma vez que a possibilidade de rever várias vezes as imagens gravadas direciona a atenção do observador para aspectos que teriam passado despercebidos, podendo imprimir maior credibilidade ao estudo.

Sob a mesma perspectiva Garcez, Duarte e Eisenberg (2011), salientam que o vídeo permite capturar elementos presentes nas interações, nos comportamentos e discursos, assim como possibilita a revisão dos fenômenos de interesse, podendo visualizar o material em diferentes possibilidades, acelerando, saltando, passando, congelando e repetindo as imagens caso necessário. Fatores que contribuem para uma boa interpretação do material.

Como esperado, a integração dos artefatos estimulou significativas reações nos estudantes, que foram válidas para compreender o desenvolvimento da Gênese Instrumental, mas que não seria possível sua captação apenas pelo olhar da pesquisadora em relação à demanda de estudantes. A filmagem com o uso do aparelho celular teve a capacidade de atender a necessidade da pesquisadora durante a intervenção, seja no auxílio na coleta de dados, seja pela acessibilidade e praticidade do instrumento.

5.4. ANÁLISE DE DADOS

Para análise do processo de Gênese Instrumental o procedimento utilizado foi a técnica de triangulação, pois segundo Taquette e Borges (2020) a triangulação possibilita uma interpretação dos dados mais próximo da realidade, uma vez que consiste em uma

compreensão multidimensional, e neste caso, através de diferentes técnicas de coletas de dados e perspectivas teóricas. Para Santos et. al. (2020) a articulação entre diferentes pontos de vistas é o que possibilita a compreensão, em diferentes níveis de profundidades, do fenômeno dentro de sua complexidade. Dessa, forma, permitindo uma melhor transparências sobre as evidencias levantadas e aumentando a credibilidade do estudo.

De acordo com Taquette e Borges (2020), as análises dos dados da pesquisa qualitativa iniciam-se durante o processo de coleta de dados, como pré-análise, porém é necessário o tratamento das informações recolhidas em campo para o mapeamento dos dados. Segundo a autora, o tratamento dos dados pode ser dividido em três etapas: descrição, análise e interpretação.

A etapa das descrições, segundo Taquette e Borges (2020), configura-se pela organização dos materiais textuais. Em que os dados podem ser agrupados e classificados em diferentes estruturas, como por exemplo, por tipo de interlocutor, por local de coleta de dados, ou por tipo de instrumento de coleta. Neste sentido, foram organizadas as folhas de atividades, as filmagens dos encontros, gravações e anotações das observações, e transcritas as informações nelas contidas.

A etapa de análise se configura pelas leituras e compreensão dos dados textuais, dos sentidos das falas e ações, buscando-se ir além da descrição. A etapa da interpretação consiste numa síntese entre a fundamentação teórica e os dados empíricos da pesquisa (Taquette; Borges, 2020).

Através dos dados coletados das observações, folhas de atividades, e filmagens, buscou-se identificar os conceitos-em-ação, teoremas-em-ação, e as ações de organização e desenvolvimento dos estudantes nas situações. Logo, a interpretação dos dados ocorreu pelos componentes dos esquemas de Vergnaud e pelo modelo S.A.C.I de Rabardel, onde através deste ultimo, buscou-se indícios de interações e mediações manifestadas na atividade instrumentada, bem como os processos de Instrumentalização e Instrumentação, como apresentado na Figura 6 e 7. Uma vez que, como salienta Rabardel (1995), a Abordagem Instrumental fornece elementos teóricos adequados para o estudo da ação instrumentada do sujeito.

5.5.SUJEITOS E CENÁRIO DA PESQUISA

A intervenção foi realizada com a participação de 46 estudantes do 9º ano do ensino fundamental do turno matutino da Escola Estadual Cacilda Braule Pinto. A escola está localizada na zona leste da cidade de Manaus e atende no total de 1137 estudantes entre as modalidades Ensino Fundamental II e da de Educação de Jovens e Adultos (EJA) fundamental e médio. A infraestrutura da escola inclui rampas de acessibilidade, quadra esportiva, 12 salas de aula, refeitório, e sala para estudo que dispõe de computadores e biblioteca.

A preferência por estudantes do 9º ano se baseia na justificativa de que os eles tenham estudado o conceito de fração em seus diferentes significados e operações ao longo dos níveis anteriores. Quanto à escolha da turma, esta ocorreu por recomendação do professor de matemática da escola, que disponibilizou de suas aulas para a realização das intervenções.

No tempo em aconteceu os encontros, a cidade de Manaus estava passando por uma onda de fumaça, o que impediu que as atividades fossem realizadas no refeitório da escola, local que possui espaço adequado para realização das atividades instrumentadas. Em relação à substituição de artefato da régua e compasso para os esquadros, esta ocorreu devido à questão de segurança, em razão das ocorrências de violências de estudantes nas proximidades da escola e dentro de outras escolas públicas da cidade. Além disso, os esquadros também compartilham das mesmas técnicas para localização da fração na reta numérica que a régua e o compasso.

5.5.1. Critério de seleção dos participantes

O perfil do participante é estudante do 9º do ensino fundamental da escola pública que foi realizado a intervenção, cujos pais e/ou responsável assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

5.5.2. Critério de Exclusão dos participantes

Sujeitos da turma convidada para realização da OI que não apresentarem o TCLE assinado pelos pais e/ou responsáveis, e/ou os estudante que não estiveram presente em nenhuma das atividades aplicadas.

5.6. ASPECTOS ÉTICOS DA PESQUISA

A execução da Orquestração Instrumental entrou em vigor após a autorização dos responsáveis dos participantes, uma vez que os sujeitos da pesquisa tratavam-se de menores de idade. Apenas foram inclusos para análise os dados gerados (seja o instrumento de coleta de dados utilizado) dos sujeitos devidamente autorizados.

5.6.1. Riscos e Benefícios

5.6.1.1.Riscos

Cientes de que as atividades poderiam provocar danos psíquicos, morais ou físicos aos participantes, todo cuidado foi tomado na execução deste projeto. Buscando evitar danos como cansaço ou aborrecimento aos sujeitos nas atividades, medo em responder as situações-problemas, desconforto e constrangimento nas atividades desenvolvidas, ou pela observação ou pela gravação de vídeo por parte da pesquisadora, o direito do sigilo e privacidade foram garantidos aos participantes através do TCLE.

Quaisquer registros de audiovisual ou documental dos sujeitos passaram pela concordância dos mesmos, na qual foi garantida a preservação do sigilo e privacidade dos participantes. Os sujeitos também foram informados que todo registro audiovisual ficará restrito a esta pesquisa, usadas apenas para interpretação dos dados por parte da pesquisadora, desse modo, vedada ao público externo.

5.6.1.2.Benefícios

A aplicação das Orquestrações Instrumentais foi benéfica aos participantes quanto ao desenvolvimento das Gêneses Instrumentais resultados dos esquemas de utilização dos artefatos discos e réguas de frações, e esquadro, bem como, a evolução do conhecimento ao conceito de fração e a promoção da interação colaborativa entre os participantes, essenciais para formação do caráter social.

No que se refere ao contexto socioeducacional, as OI's possibilitará que professores de matemática contextualizem um cenário didático ao modelo teórico desenvolvido neste estudo para o desenvolvimento da Gênese Instrumental de seus estudantes, contribuindo para a qualidade da educação matemática.

5.7. ETAPAS NO CAMPO DA PESQUISA

No Quadro 10 podem ser analisados as etapas e os processos realizados em cada encontro. Deve-se ressaltar que a avaliação *a priori* foi realizada individualmente, enquanto que as atividades instrumentadas ocorreram em dimensão coletiva (atividade coletiva Instrumentada). As situações em que a fração possui significado de número foram trabalhadas em diferente encontro dos demais significados, devido a integração do artefato diferente (esquadro) para esta situação, outrossim, buscou-se respeitar o tempo que os estudantes levaram para realização dos processos Instrumentalização e Instrumentação dos diferentes artefatos/instrumento no tempo de aula disponíveis para a realização das atividades.

Quadro 10 - Organização dos encontros

Encontro	Etapa	Atividade
1º		Entrega dos termos de assentimento e consentimentos aos estudantes.
2º	Avaliação <i>a priori</i>	Aplicação das folhas de prova para diagnóstico dos conhecimentos prévios dos participantes sobre o conceito de fração.
3º	Seqüência de Orquestrações Instrumentais	OI-1 Processo de Instrumentalização e Instrumentação do artefato disco de fração. Este momento foi apresentado aos participantes os materiais mencionados para que os mesmo pudessem conhecer as possibilidades e limites de cada artefato a partir da sua manipulação.
4º		OI-2 Processo de Instrumentalização e Instrumentação do artefato régua de fração. Neste encontro foi apresentado aos estudantes o material mencionado para conhecimento das possibilidades e limites do artefato a partir da sua manipulação.
5º		
6º		OI-3 Processo de Instrumentalização e Instrumentação do artefato esquadro. Para este momento, foi apresentado aos estudantes o artefato para que pudessem conhecer e manipula-los, a fim de encontrar possibilidades de uso para este.
7º		OI-4 Processo de Instrumentação dos artefatos (discos de frações, régua de frações, esquadros). Este momento foi apresentado aos estudantes os materiais concretos mencionados juntamente a folha de atividades contendo as situações-problemas com os diferentes significados da fração.
8º		

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

As situações-problemas aplicadas na avaliação *a priori* podem ser analisadas, no Apêndice A. A Seqüência de Orquestrações é composta pela Orquestração Instrumental 1 – OI1, Orquestração Instrumental 2 – OI2, Orquestração Instrumental – OI3, elaboradas para favorecer a Gênese Instrumental dos estudantes, respectivamente, quanto aos artefatos discos de frações, régua de frações, e esquadros; e Orquestração Instrumental 4 para o

desenvolvimento instrumental dos três artefatos diante a classe de situações-problemas da fração. As OIs serão aprofundadas no próximo capítulo.

CAPÍTULO VI

SEQUÊNCIA DE ORQUESTRAÇÕES INSTRUMENTAIS APRIORI

Neste capítulo são apresentadas as orquestrações instrumentais planejadas antes das intervenções no campo da pesquisa, que inclui a configuração didática e modo de execução. A etapa do desempenho didático é descrito no capítulo da análise dos dados.

6.1. ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL 1 – OI1

A OI1 será executada para promover a Gênese Instrumental dos estudantes quanto ao artefato disco de fração. Dessa forma, a OI se divide em duas orquestrações instrumentais, uma correspondendo ao processo de Instrumentação e outra a Instrumentalização.

6.1.1. Orquestração Instrumental 1.1

Essa orquestração consiste no processo de Instrumentalização dos discos de frações, em que tem como objetivo manipular e conhecer as propriedades e limites dos artefatos.

6.1.1.1. Configuração Didática

- **Artefato:** Os discos de frações são materiais concretos em formato de círculos feitos de plásticos ou madeira, que permite a representação concreta da fração. O pacote ou caixa de discos normalmente contém 12 discos, havendo um disco inteiro e os demais divididos em peças do mesmo tamanho, onde cada peça representa uma fração do inteiro. O diâmetro dos discos varia de cada material. No entanto, para este estudo optou-se pelos discos de frações de material de papel cartão, demonstrado na Figura 8, por ser acessível e por possibilitar a confecção de maior quantidade de peças, além de permitir os estudantes utilizarem tanto a parte colorida do papel quanto a parte inversa (não colorida).

Figura 8 – Discos de frações



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

- **Situação Matemática:** Será aplicado tarefas que exigem os estudantes reconhecerem cada peça do disco com uma fração do todo, e que sejam capazes de identificar qual peça pode representa qual número fracionário. Questões do tipo “Que disco representa a fração $\frac{1}{4}$?” ou “Represente a fração $\frac{2}{5}$ ” deverão compor as tarefas para que os discentes sejam capazes de passarem pelo processo de Instrumentalização.
- **Gestão dos sujeitos:** Para esse momento os estudantes serão divididos em equipes e organizados em círculos para melhor interação entre seus componentes. As equipes ficaram dispersas pela sala, onde cada uma receberá discos de fração e as atividades matemáticas, essas necessárias para passagem dessa etapa da Gênese Instrumental.
- **Gestão de Recursos:** Para o processo de Instrumentalização, primeiramente, cada equipe receberá os discos de frações, para que possam fazer o reconhecimento, manipulação e exploração dos mesmos. Em seguida será entregue tarefas envolvendo fração, as quais possibilitem os estudantes conhecerem as características e funções do artefato. As questões serão impressas em folhas A4 e entregue para cada equipe.
- **Gestão do tempo:** O processo de Instrumentalização dos discos de frações deverá ocorrer em 50 minutos.

6.1.1.2. Modo de Execução

- **Mediação Pedagógica e didática:** Para o início da OI1, a professora/pesquisadora terá a responsabilidade de apresentar os artefatos aos estudantes, aspecto que deverá caracterizar o processo de Instrumentalização. Para isso, deverá ser trabalhado questões que permitem os

estudantes conhecerem as características e propriedades dos artefatos, logo a professora/pesquisadora terá como função neste momento, instruir e orientar os estudantes diante as situação didática.

- **Mediação para organização da sala de aula:** A professora/pesquisadora deverá ter o controle do tempo de atividade, considerando o encontro deverá ocorrer em 50 minutos, dessa forma, evitar que as atividades extrapolem o tempo programado. Para a organização da sala de aula, a professora/pesquisadora deve também manter a ordem dos estudantes durante as atividades, os instruindo na formação das equipes, na entrada e saída da sala e intervindo, se necessário, àqueles que apresentarem comportamentos indisciplinados que possa atrapalhar o desenvolvimento das atividades.

6.1.2. Orquestração Instrumental 1.2

A orquestração será executada para promover o processo de Instrumentação dos discos de frações, que tem como objetivo o uso do artefato para a resolução das situações-problemas envolvendo a fração.

6.1.2.1. Configuração Didática

- **Artefatos:** os discos de frações são materiais que permitem as operações concretas de frações, podendo trabalhar noções básica para esse conceito matemático. Como a ideia de conservação de área, ou seja, a noção de que a quantidade considerada deve permanecer invariável, mas a sua forma ou posições é que se modificam e que podem levar a novas divisões. E a ideia de equivalência de área, através da sobreposição das peças, demonstrando as igualdades e diferenças entre as partes, permitindo os estudantes construir classes de equivalência, noções essas que levam a capacidade de operações com fração.

- **Situação Matemática:** as situações a serem resolvidas com uso do artefato compreendem a fração com significado de parte-todo, quociente, operador multiplicativo, adição e subtração de frações.

- **Gestão dos sujeitos:** Para o processo de Instrumentação os estudantes serão divididos em equipes, os quais ficarão organizados em círculos para melhor interação entre seus componentes. As equipes devem ficar dispersas pela sala, onde receberão os discos de frações e as folhas de provas necessárias para as passagens dessa etapa da Gênese Instrumental.

- **Gestão dos recursos:** serão aplicadas as situações-problemas envolvendo os significados da fração (parte-todo, quociente, operador multiplicativo) e as operações de adição e subtração de frações. As questões serão impressas em folhas de A4 e entregue para cada grupo, juntamente com os artefatos.

- **Gestão do tempo:** O processo de Instrumentação dos discos de frações deverá ocorrer em 100 minutos.

6.1.2.2. Modo de Execução

- **Mediação Pedagógica e Didática:** Durante a intervenção a professora/pesquisadora terá a responsabilidade de aplicar as situações-problemas aos estudantes, onde os mesmos deverão resolver com uso dos discos de fração. O objetivo é o desenvolvimento da Gênese Instrumental. A professora/pesquisadora tem a função de observar as interações, realizando filmagens durante o desenvolvimento das atividades, além de agir como mediador e instrutor quando necessário.

- **Mediação para organização da sala de aula:** A professora/pesquisadora deverá ter o controle do tempo de atividade, considerando que a aula deverá ocorrer em 100 minutos, dessa forma, evitar que as atividades extrapolem o tempo programado. Em caso dos estudantes não conseguirem responder as situações-problemas em um único tempo de aula, a professora/pesquisadora deverá organizar outro encontro, se possível, para os termos das resoluções das questões. Para a organização da sala de aula, a professora/pesquisadora deve também manter a ordem durante as atividades, instruindo os estudantes na formação das equipes, na entrada e saída da sala de aula e intervindo em caso de comportamentos indisciplinados que possa atrapalhar o desenvolvimento das atividades.

6.2. ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL 2 – OI2

A OI2 será executada para promover a Gênese Instrumental dos estudantes quanto ao artefato régua de frações. Essa OI se divide em duas orquestrações instrumentais que correspondem ao processo de Instrumentação e Instrumentalização.

6.2.1. Orquestração Instrumental 2.1

Essa orquestração consiste no processo de Instrumentalização, logo, tem como objetivo manipular e conhecer as propriedades e limites da régua de fração.

6.2.1.1. Configuração Didática

- **Artefatos:** A régua de fração é um material concreto em formato retangular feito de plástico ou madeira, que permite a representação gráfica da fração. O pacote ou caixa das régua de frações, em geral, contém de 10 a 12 régua, sendo uma única régua inteira (representando o todo) e os restantes devem estar repartidas em peças do mesmo tamanho (representando a fração do todo). O comprimento da régua pode variar de material para material. Este estudo optou-se pelas régua de fração de material de papel cartão (Figura 9), por ser acessível e por possibilitar a confecção de maior quantidade de peças, além de permitir os estudantes utilizarem tanto a parte colorida do papel quanto a parte inversa (não colorida).

Figura 9 – Régua de Frações



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

- **Situação Matemática:** Será aplicado tarefas que exigem os estudantes reconhecerem cada régua e duas divisões em partes iguais, compreendendo cada peça como sendo uma fração do todo. Atividades que levem os estudantes a identificarem qual peça pode representa qual número fracionário. Questões do tipo “Que régua representa a fração $\frac{1}{4}$?” ou “Represente a fração $\frac{2}{5}$ ” deverão compor as tarefas para que os discentes sejam capazes de passarem por este processo de Instrumentalização.

- **Gestão dos sujeitos:** Para o processo de Instrumentalização os estudantes serão divididos em equipes e organizados em círculos para melhor interação entre os colegas. As equipes ficaram dispersas pela sala, onde cada uma receberá as régua de frações e as atividades matemáticas necessárias para a passagem dessa etapa da Gênese Instrumental.

- **Gestão de Recursos:** Para o processo de Instrumentalização, primeiramente, cada equipe receberá os artefatos, para que possam fazer o reconhecimento, manipulação e exploração das régua. Em seguida será entregue tarefas envolvendo fração, as quais possibilitem os estudantes conhecerem as características e funções do artefato. As questões serão impressas em folhas A4 e entregue para cada equipe.
- **Gestão do tempo:** O processo de Instrumentalização das régua de frações deverá ocorrer em 50 minutos.

6.2.1.2. Modo de Execução

- **Mediação Pedagógica e didática:** Para o início da OI2, a professora/pesquisadora terá a responsabilidade de apresentar os artefatos aos estudantes, aspecto que deverá caracterizar o processo de Instrumentalização. Para isso, deverá ser trabalhado questões que os permitem conhecerem as características e propriedades dos artefatos, logo a professora/pesquisadora terá como função neste momento, instruir e orientar os estudantes nas situações didáticas.
- **Mediação para organização da sala de aula:** A professora/pesquisadora deverá ter o controle do tempo de atividade, considerando o processo deverá ocorrer em 50 minutos, dessa forma, evitar que as atividades extrapolem o tempo programado. Para a organização da sala de aula, a professora/pesquisadora deve também manter a ordem e organização durante as atividades, instruindo os estudantes na formação das equipes, na entrada e saída da sala, e àqueles que apresentarem comportamentos indisciplinados que possa atrapalhar o desenvolvimento das atividades.

6.2.2. Orquestração Instrumental 2.2

A orquestração será executada para promover o processo de Instrumentação das régua de frações, que tem como objetivo o uso do artefato para a resolução das situações-problemas envolvendo fração.

6.2.2.1. Configuração Didática

- **Artefatos:** As régua de frações são materiais que permitem as operações concretas de frações, podendo trabalhar noções básica para o conceito de fração. Como a ideia de

conservação de área, ou seja, a noção de que a quantidade considerada deve permanecer invariável, mas a sua forma ou posições é que se modificam e que podem levar a novas divisões. E a ideia de equivalência de área, através da sobreposição das peças, demonstrando as igualdades e diferenças entre as partes, permitindo os estudantes construir classes de equivalência, noções essas que levam a capacidade de operações com fração.

- **Situação Matemática:** As tarefas que os estudantes deverão resolver com a apropriação dos artefatos se apresentam como situações-problemas envolvendo a fração com significado de parte-todo, quociente, operados multiplicativo, e adição e subtração de frações.

- **Gestão dos sujeitos:** os estudantes serão divididos em equipes e organizados em círculos para melhor interação entre seus componentes. As equipes ficarão dispersas pela sala, onde cada uma receberá régua de frações e as folhas de provas, necessárias para as passagens dessa etapa da Gênese Instrumental.

- **Gestão dos recursos:** Para o processo de Instrumentação serão aplicadas as situações-problemas envolvendo os significados da fração (parte-todo, quociente, operador multiplicativos) e as operações de adição e subtração de frações. As questões serão impressas em folhas de A4 e entregue para cada grupo, juntamente com os artefatos.

- **Gestão do tempo:** O processo de Instrumentação das régua de frações deverá ocorrer em 100 minutos.

6.2.2.2. Modo de Execução

- **Mediação Pedagógica e Didática:** Durante a intervenção a professora/pesquisadora terá a responsabilidade de aplicar as situações-problemas aos estudantes, onde os mesmos deverão resolver com uso das régua de frações. O objetivo é o desenvolvimento da Gênese Instrumental. A professora/pesquisadora tem a função de observar as interações, realizando filmagens durante o desenvolvimento das atividades, além de agir como mediador e instrutor quando necessário.

- **Mediação para organização da sala de aula:** A professora/pesquisadora deverá ter o controle do tempo de atividade, considerando que o encontro deverá ocorrer em 100 minutos, dessa forma, evitar que as atividades extrapolem o tempo programado. Em caso dos estudantes não conseguirem responder as situações-problemas em um único tempo de aula, a professora/pesquisadora deverá organizar outro encontro, se possível, para os termos das resoluções das questões. Para a organização da sala de aula, a professora/pesquisadora deve

também manter a ordem durante as atividades, instruindo os estudantes na formação das equipes, na entrada e saída da sala e intervindo em caso de comportamentos indisciplinados que possa atrapalhar o desenvolvimento das atividades.

6.3. ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL 3 – OI3

A OI3 será executada para promover a Gênese Instrumental dos estudantes quanto aos artefatos régua e compasso. Desse modo, a OI se dividi em duas orquestrações, uma para o processo de Instrumentalização e outra para a Instrumentação.

6.3.1. Orquestração Instrumental 3.1

Essa orquestração consiste no processo de Instrumentalização, logo, tem como objetivo manipular e conhecer as propriedades e limites da régua e compasso.

6.3.1.1. Configuração Didática

- **Artefatos:** A régua é um instrumento de medida, em que contém um escalar, normalmente de centímetro. Para este estudo será utilizado régua de 30cm como demonstrado na Figura 10.

Figura 11 - Régua



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Figura 10 - Compasso



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

O compasso (Figura 11) é um instrumento de desenho para construir graficamente arcos e circunferências, podendo ser usado para marcar medidas com base a uma distância ou escalar dado, portanto ele é ajustável (até certo ponto) para atender a comprimento necessário,

o que também justifica a escolha dessa ferramenta para este projeto. Ele é constituído por duas hastes, uma de ponta seca e a ponta de grafite. A ponta seca, em forma de agulha, serve para fixar o objeto no papel. Enquanto a ponta de grafite serve para marcar um ponto de localização ou traçar uma circunferência.

- **Situação Matemática:** Será aplicado tarefas que permitem os estudantes aprenderem a manusear a régua e compasso como auxílio para localizar a fração na reta numérica. Questão do tipo “Construa uma reta numérica” e “localize a fração $1/2$ ” deverão compor as tarefas para que os discentes sejam capazes de passarem pelo processo de Instrumentalização.

- **Gestão dos sujeitos:** Para o processo de Instrumentalização os estudantes serão divididos em equipes e organizados em círculos para melhor interação entre seus integrantes. As equipes ficaram dispersas pela sala, onde cada uma receberá réguas e compassos, além das atividades matemáticas necessárias para as passagens das etapas da Gênese Instrumental.

- **Gestão de Recursos:** Para o processo de Instrumentalização cada equipe receberá réguas e compassos, para que possam fazer o reconhecimento, manipulação e exploração dos artefatos. Em seguida será entregue tarefas envolvendo fração, as quais possibilitem os estudantes conhecerem as características e funções dos artefatos. As questões serão impressas em folhas A4 e entregue para cada equipe.

- **Gestão do tempo:** O processo de Instrumentalização da régua e compasso deverá ocorrer em 50 minutos.

6.3.1.2. Modo de Execução

- **Mediação Pedagógica e didática:** Para o início da OI3, a professora/pesquisadora terá a responsabilidade de apresentar os artefatos aos estudantes, aspecto que deverá caracterizar o processo de Instrumentalização. Para isso, deverá ser trabalhado questões que permitam os discentes conhecerem as características e propriedades dos artefatos. Sendo assim, a professora/pesquisadora terá como função neste momento, instruir e orientar os participantes nas situações didáticas.

- **Mediação para organização da sala de aula:** A professora/pesquisadora deverá ter o controle do tempo de atividade, considerando que esse processo deverá ocorrer em 50 minutos, dessa forma, evitar que as atividades extrapolem o tempo programado. Para a organização da sala de aula, a professora/pesquisadora deve também manter a ordem durante as atividades, instruindo os estudantes na formação das equipes, na entrada e saída da sala e

intervindo em caso de ocorrência de comportamentos indisciplinados que possa atrapalhar o desenvolvimento das atividades.

6.3.2. Orquestração Instrumental 3.2

A orquestração será executada para promover o processo de Instrumentação da régua e compasso, que tem como objetivo o uso dos artefatos para a resolução das situações-problemas envolvendo a fração.

6.3.2.1. Configuração Didática

- **Artefato:** A régua e compasso são materiais que permitem a localização das frações na reta numérica a partir do desenho geométrico, que consiste na construção de reta e na divisão de segmentos em partes iguais. Na capacidade de localizar as frações na reta numérica os estudantes podem identificar que uma fração é maior, menor ou igual a outra. Dessa forma, a régua e compasso, ambos de material plástico, serão usados como artefatos para situações em que a fração tem significado de número. O objetivo é a construção da reta numérica e a localização dos números fracionários. A régua deverá auxiliar o discente na construção do segmento de reta e o compasso para medir as distâncias dos pontos de localização onde deverão ser traçados segmentos de retas.

- **Situação matemática:** As tarefas que os estudantes deverão resolver com a apropriação dos artefatos constituem-se as situações-problemas envolvendo a fração com significado de número.

- **Gestão dos sujeitos:** os estudantes serão divididos em equipes e organizados em círculos para melhor interação entre seus componentes. As equipes ficaram dispersas pela sala, onde cada uma receberá as régua e compassos, e as folhas de provas necessárias para as passagens dessa etapa da Gênese Instrumental.

- **Gestão dos recursos:** Para o processo de Instrumentação serão aplicadas as situações-problemas envolvendo a fração com significados de números. As questões serão impressas em folhas de A4 e entregue para cada grupo, juntamente com os artefatos.

- **Gestão do tempo:** O processo de Instrumentação da régua e compasso deverá ocorrer em 100 minutos.

6.3.2.2. Modo de Execução

- **Mediação Pedagógica e Didática:** Durante a intervenção a professora/pesquisadora terá a responsabilidade de aplicar as situações-problemas aos estudantes, onde os mesmos deverão resolver com uso da régua e compasso. O objetivo é o desenvolvimento da Gênese Instrumental. A professora/pesquisadora tem a função de observar as interações, realizando filmagens durante o desenvolvimento das atividades, além de agir como mediador e instrutor quando necessário.

- **Mediação para organização da sala de aula:** A professora/pesquisadora deverá ter o controle do tempo de atividade, considerando que o encontro deverá ocorrer em 100 minutos, dessa forma, evitar que as atividades extrapolem o tempo programado. Em caso dos estudantes não conseguirem responder as situações-problemas em um único tempo de aula, a professora/pesquisadora deverá organizar outro encontro, se possível, para os termos das resoluções das questões. Para a organização da sala de aula, a professora/pesquisadora deve também manter a ordem durante as atividades, instruindo os estudantes na formação das equipes, na entrada e saída da sala e intervindo em caso de comportamentos indisciplinados que possa atrapalhar o desenvolvimento das atividades.

CAPÍTULO VII

ANÁLISE APRIORI DAS SITUAÇÕES-PROBLEMAS

7.1. SITUAÇÕES-PROBLEMAS DA AVALIAÇÃO A *PRIORI*

Nas situações-problemas da avaliação *a priori* busca-se identificar os conhecimentos dos estudantes sobre o conceito de fração, que esquemas são mobilizados, que registros de representações semióticas eles fazem uso para resolução das questões. Por isso, para os momentos do diagnóstico dos conhecimentos dos estudantes não serão postas representações figurais ou materiais concretos. Portanto, as situações deverão ser resolvidas individualmente.

Na **situação1**: “Fernanda adora ler livros, das três estantes que tem em seu quarto, ela já conseguiu preencher duas apenas com livros que coleciona. Determine a fração que representa a quantidade de estantes com livros de Fernanda”.

A fração apresenta significado de parte-todo, em representação de quantidades contínua. Onde de um total 3 estantes são tomadas apenas 2. Os esquemas como quantidade, contagem e partição devem ser mobilizados para resolução da questão. No Quadro 11 podem ser observadas as possíveis respostas para esta situação:

Quadro 11 – Análise da situação 1

Resposta	Conceito-em-ação	Teoremas-em-ação	Teorema-em-ação: Verdadeiro ou falso
$\frac{2}{3}$	Fração	A fração que representa n partes de um todo de m, é dada por $\frac{n}{m}$.	Verdadeiro
$\frac{3}{2}$	Fração	A fração que representa n partes de um todo de m, é dada por $\frac{m}{n}$.	Falso
$\frac{1}{2}$	Razão	A fração que representa n partes de um todo de m, é dada por $\frac{p}{n}$.	Falso
$\frac{2}{1}$	Razão	A fração que representa n partes de um todo de m, é dada por $\frac{n}{p}$.	Falso

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

- Na primeira resposta, o estudante é capaz de estabelecer a comparação das partes em relação ao todo, logo, é capaz de determinar a divisão do todo em partes iguais, compreendendo que cada parte é uma fração do inteiro (todo);
- Para a segunda resposta o estudante apresenta noção das partes em relação ao todo, porém ao representar a fração ele estabelece a posição incorreta das partes e do todo.

- Na terceira e quarta possíveis respostas, o estudante desconsidera o todo, estabelecendo uma comparação entre as partes.

Na **situação 2**: “Lucas comprou dois bolos e dividiu igualmente entre seus quatro irmãos. Que fração representa a quantidade de fatias de bolo que cada irmão de Lucas recebeu?”

A fração tem significado de quociente, em que a quantidade de bolos é menor que a quantidade de pessoas. Para a resolução da situação o estudante deve possuir as noções de quantidade, partição, divisão ou correspondência. Desse modo, as respostas esperadas para esta situação podem ser identificadas no Quadro 12.

Quadro 12 – Análise da situação 2

Resposta	Conceito-em-ação	Teoremas-em-ação	Teorema-em-ação: Verdadeiro ou falso
$\frac{2}{4}$	Divisão	$\frac{a}{b}$ em que $a=q.b+r$, com $0 \leq r \leq b-1$	Verdadeiro
$\frac{1}{2}$	Divisão	$\frac{a}{b}$ em que $a=q.b+r$, com $0 \leq r \leq b-1$	Verdadeiro
$\frac{4}{2}$ ou $\frac{2}{1}$	Divisão	$\frac{a}{b}$ em que $b=q.a+r$, com $0 \leq r \leq b-1$	Falso
$\frac{1}{4}$	Divisão	$\frac{a}{b}$ em que $a=q.b+r$, com $0 \leq r \leq b-1$	Falso
8	Multiplicação	a.b	Falso

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

- Na primeira resposta o estudante compreende a fração como divisão, sendo o numerador a quantidade de fatias (considerando os dois bolos) para cada irmão e o denominador a quantidade de pessoas;
- A segunda resposta o estudante atribui o significado de divisão e realiza a simplificação;
- Para a terceira possível resposta o estudante é capaz de identificar a divisão, porém inverte o numerador pelo denominador;
- Na quarta resposta o estudante considera apenas um bolo como o todo;
- A última resposta o estudante realiza a multiplicação da quantidade de bolos pela quantidade de pessoas.

Na **situação 3**: “A professora Marta pediu para que seus alunos recortassem 15 bandeirinhas para festa da escola, porém apenas $\frac{3}{5}$ dessa quantidade foram entregues. Quantas bandeirinhas foram entregues a professora Marta?”

A fração possui significado de operador multiplicativo, considerando quantidades discretas. Para resolução da questão os estudantes devem mobilizar a noção de quantidade, divisão e multiplicação. Como possíveis respostas, espera-se:

Quadro 13 – Análise da situação 3

Questão	Resposta	Conceito-em-ação	Teoremas-em-ação	Teorema-em-ação: Verdadeiro ou falso
15. $\frac{3}{5}$	9	Multiplicação e divisão.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	Verdadeiro
15. $\frac{3}{5}$	25	Multiplicação e divisão.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{cb}{ad}$	Falso
15. $\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	----	---	---

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

- Para primeira resposta, o estudante é capaz de compreender a fração como operador multiplicativo, em que o numerador da fração $\frac{3}{5}$ age como multiplicador (15×3) e o denominador como divisor ($45 \div 5$);
- Na segunda possível resposta, o estudante usa o numerador como divisor e o denominador com multiplicador;
- A terceira resposta o estudante apenas retira a fração dada no enunciado, logo não mobiliza conceitos e teoremas-em-ação.

Na **situação 4**: “Isabel foi a feira com certa quantia. Gastou $\frac{2}{5}$ em tapioca, $\frac{1}{3}$ em pé de moleque, $\frac{1}{6}$ em mandioca, $\frac{3}{4}$ em farinha, $\frac{4}{7}$ em tucumã e $\frac{6}{8}$ ela gastou em tucupi. Organize o gasto em iguarias, frutas e legumes que Isabel fez na feira e responda: Com o quê ela gastou mais e com o quê ela gastou menos na feira?”

A fração tem significado de número, o problema apresentado tem a intenção de contextualizar a fração como quantificador de grandezas em relação as compras de Isabel. Para a resolução da questão os estudantes devem manifestar a noção de ordem; equivalência ou divisão. No Quadro 14 são apresentadas as possíveis respostas quanto à ordem das frações.

Quadro 14 – Análise da situação 4

Resposta	Conceito-em-ação	Teoremas-em-ação	Teorema-em-ação: Verdadeiro ou falso
$\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$	Ordem numérica com números fracionários.	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, se somente se, $a \cdot d < b \cdot c$, considerando o conjunto dos números naturais.	Verdadeiro
$\frac{2}{5}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{6}{8}$	---	---	---
$\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{6}{8}$	Ordem numérica com números naturais.	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, se $a < c$	Falso

1/3; 1/6; 2/5; 3/4; 4/7; 6/8	Ordem numérica com números naturais.	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, se $a < c$ e se $a = c$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, se $b < d$	Falso
---------------------------------	--------------------------------------	--	-------

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

- Na primeira resposta o estudante é capaz de mobilizar o esquema de ordem e equivalência de frações;
- Para o segundo tipo de resposta, é possível que o estudante apenas ordene as frações de acordo como é apresentado no enunciado, logo não mobiliza teorema e conceito-em-ação.
- Para a terceira resposta o estudante ordena as frações de acordo com os seus numeradores.
- Na quarta resposta o estudante usa a mesma ideia apresentada na resposta anterior, mas nas frações com mesmo numerador ele tira como referência o denominador das frações.

Na **situação 5**: Pedro distribuiu algumas de suas figurinhas repetidas, 2/10 ele entregou a João, 5/10 a Camila. A) Que fração das figurinhas de Pedro foram distribuídas entre João e Camila? B) Que fração representa a quantidade de figurinhas que Camila ganhou a mais que João?

Deve-se operar a adição e subtração de frações com denominadores iguais. Tratando de quantidade discreta, espera-se que os estudantes compreendam o numerador da fração como uma parte das figurinhas e o denominador a quantidade total de elementos. Nesse caso, como se trata do mesmo todo, as frações apresentam os mesmos denominadores sendo necessário somar ou subtrair os numeradores.

Para a resolução da questão os esquemas a respeito da noção de adição e subtração com números inteiros, equivalência e ordem, devem ser mobilizados. No Quadro 15 são identificadas as possíveis respostas para a adição e subtração das frações:

Quadro 15 – Análise da situação 5

Questão	Resposta	Conceito-em-ação	Teorema-em-ação	Teorema-em-ação: verdadeiro ou falso
a) $\frac{5}{10} + \frac{2}{10}$	a) $\frac{7}{10}$	Adição e subtração de números naturais; adição e subtração de frações com denominadores iguais;	a) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	Verdadeiro
b) $\frac{5}{10} - \frac{2}{10}$	b) $\frac{3}{10}$		b) $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$	Verdadeiro
a) $\frac{5}{10} + \frac{2}{10}$	a) $\frac{7}{10}$	Adição de números naturais; adição de frações com	a) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	Verdadeiro

$b) \frac{5}{10} - \frac{2}{10}$	$b) \frac{7}{10}$	denominadores iguais;	$b) \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	Falso
$a) \frac{5}{10} + \frac{2}{10}$	$a) \frac{7}{20}$	Adição e subtração de números naturais;	$a) \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c+c}$	Falso
$b) \frac{5}{10} - \frac{2}{10}$	$b) \frac{3}{20}$		$b) \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c+c}$	Falso
$a) \frac{5}{10} + \frac{2}{10}$	$a) \frac{2}{10}$ e $\frac{5}{10}$	---	---	---
$b) \frac{5}{10} - \frac{2}{10}$	$b) \frac{5}{10}$			

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

- Na primeira resposta o estudante é capaz de operar a adição e subtração de frações com denominadores iguais;
- Para a segunda possível resposta o estudante é capaz de operar a adição de frações com denominadores iguais, porém o mesmo interpreta a letra (b) como sendo uma soma, pela existência das palavras “ganhou” e “mais”;
- Na terceira resposta ao invés de ser conservado o denominador, o estudante realiza a soma dos denominadores.
- Para quarta possível resposta o estudante não compreende que na letra (a) deve ocorrer uma soma de frações e que a letra (b) uma subtração de frações, logo não mobiliza conceitos e teoremas-em-ação.

Na **situação 6**: Uma pizza foi dividida em 8 pedaços. Marina recebeu $\frac{1}{2}$ da pizza e Tadeu recebeu $\frac{2}{8}$. A) Quanto de pizza foi distribuído entre Marina e Tadeu? B) Quanto de pizza Marina recebeu a mais que Tadeu? C) Quanta da pizza não foi distribuído?

Devem ser realizadas as operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes em quantidade contínuas. Espera-se que os estudantes percebam que o elemento em questão (pizza) está dividido em diferentes partes, sendo o numerador da fração representando uma parte do todo e o denominador representando o todo em que a parte foi tomada. Por isso é necessário que as frações sejam elevadas ao mesmo denominador. Desse modo, espera-se que os estudantes manifestem a noção de adição e subtração com números inteiros, equivalência e ordem. As possíveis respostas para as operações nesta situação podem ser analisadas no Quadro 16:

Quadro 16 – Análise da situação 6

Questão	Resposta	Conceito-em-ação	Teorema-em-ação	Teorema-em-ação: Verdadeiro ou falso
a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{8}$	a) $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$	Multiplicação, adição, subtração e divisão.	a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$	Verdadeiro Verdadeiro
a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{8}$	a) $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$	Multiplicação, adição, subtração e divisão.	a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	Verdadeiro Falso
a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{8}$ b) $\frac{2}{8} - \frac{1}{2}$	a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{6}$	Adição, subtração	a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$	Falso Falso
a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{8}$	a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{2}$	---	---	---

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

- Na primeira resposta o estudante é capaz de operar a adição e subtração de frações com denominadores diferentes;
- Para segunda resposta o estudante realiza a adição de frações corretamente, porém na letra (b) ele não compreende que deve ocorrer uma subtração de frações, devido à palavra “mais” na pergunta;
- Para terceira possível resposta o estudante realiza a adição de frações somando o numerador com numerador e denominador com denominador. Para subtração de frações ele segue o mesmo procedimento além de tirar $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{8}$.
- Na quarta resposta o estudante não compreende que na letra (a) deve ocorrer uma soma, nesse caso, ele apenas apresenta as frações dadas no enunciado. E na letra (b) o estudante não compreende que deve ocorrer uma subtração de frações, apresentando a fração da pizza que Mariana recebeu. Nesse caso, o estudante não mobiliza conceitos e teoremas-em-ação.

7.2. SITUAÇÕES-PROBLEMAS NA ATIVIDADE COLETIVA INSTRUMENTADA

As situações-problemas para o momento da atividade coletiva instrumentada, especificamente para o processo de Instrumentação, serão aplicadas após a apresentação dos artefatos aos estudantes, onde em grupos deverão compartilhar do mesmo instrumento, dessa forma, chegar à resolução das situações. Assim sendo, serão aplicadas situações-problemas para cada significado da fração, incluindo entre elas, as mesmas questões trabalhadas na avaliação *a priori*.

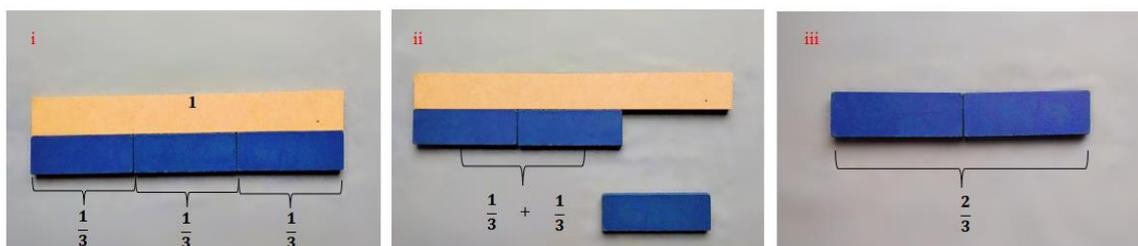
Portanto, para demonstração da possibilidade da resolução dos problemas com uso dos discos de frações, régua de frações e régua e compasso, buscou-se fazer a análise das ações instrumentadas das situações da avaliação *a priori*. Logo, devem-se considerar os mesmos teoremas-em-ação verdadeiros apresentados anteriormente, as mesmas possíveis respostas, além dos mesmos esquemas para a resolução dos problemas. No entanto, espera-se que nesse caso os estudantes mobilizem também esquemas de utilização, uma vez que deverão fazer o uso dos artefatos.

Duas reações podem ser esperadas para a resolução das situações. A primeira é a possibilidade do não uso dos artefatos e a segunda é ao uso dos artefatos. Para a segunda possibilidade, seguem as demonstrações das ações esperadas com o uso dos discos de frações, régua de frações, régua e compasso, para as resoluções dos problemas envolvendo fração.

Como apresentado na avaliação *a priori* a **situação 1** apresenta significado de parte-todo, podendo ser resolvida com as régua de frações. Portanto, a ação esperada para resolução do problema, deverá ser:

- i. Representar a régua de fração que contém 3 peças como sendo a quantidade de estantes, logo identificar que cada peça como sendo $\frac{1}{3}$ do total de estantes de Fernanda;
- ii. Contar as peças que devem representar a quantidade de estantes ocupadas com livros, portanto, considerar duas das três peças;
- iii. Concluir que $\frac{2}{3}$ do total de estantes foi preenchido.

Figura 12 - Ações instrumentada da situação 1

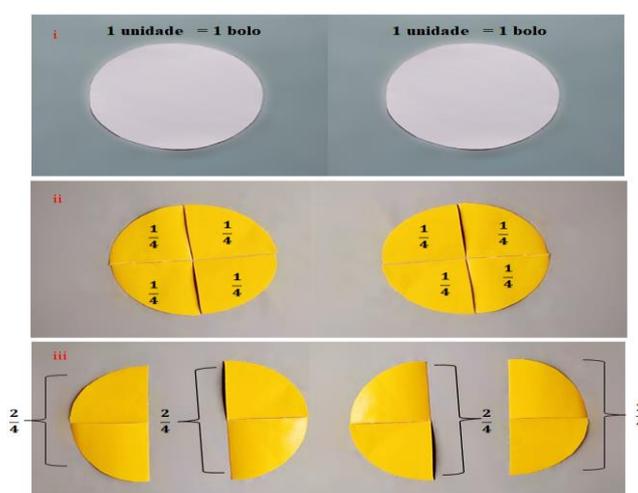


Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

A **situação 2**, que envolve a fração como quociente, pode ser resolvida com os discos de frações. A ação esperada no processo de Instrumentação, usando o artefato, deverá ser:

- i. Representa os discos inteiros como sendo os bolos de Lucas;
- ii. Considerar os discos inteiros pelos discos com quatro peças, esta última representando a quantidade de irmão de Lucas.
- iii. Somar o pedaço do primeiro bolo com o pedaço do segundo bolo que cada irmão recebeu, sendo $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, dessa forma, concluir que cada irmão ficará com $\frac{2}{4}$ dos bolos.

Figura 13 - Ação instrumentada da situação 2



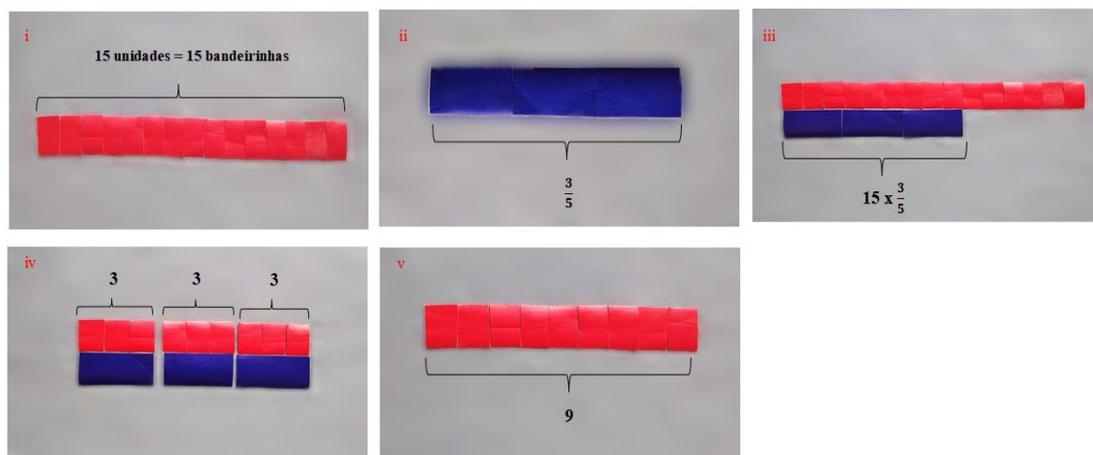
Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Para resolução da **situação 3**, em que a fração tem significado de operador multiplicativo, os estudantes podem fazer uso das régua de frações. Através dos esquemas de ação coletiva instrumentada, ação esperada pelos estudantes no processo de Instrumentação, deverá ser:

- i. Representar as régua com quinze peças como a quantidade de bandeirinhas que a professora Marta pediu;
- ii. Identificar as régua que representam a fração $\frac{3}{5}$;
- iii. Sobrepor as três peças da régua de 5 na régua de 15, esse processo consiste na multiplicação de $15 \times \frac{3}{5}$;
- iv. Contar quantas peças da régua de 15 cada peça da régua de 5 é capaz de cobrir, esse processo consiste em encontrar o valor da multiplicação;

- v. Concluir que 9 peças restaram da régua de 15, logo, 9 bandeirinhas foram recortadas e entregue a professora.

Figura 14 - Ação instrumentada da situação 3



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

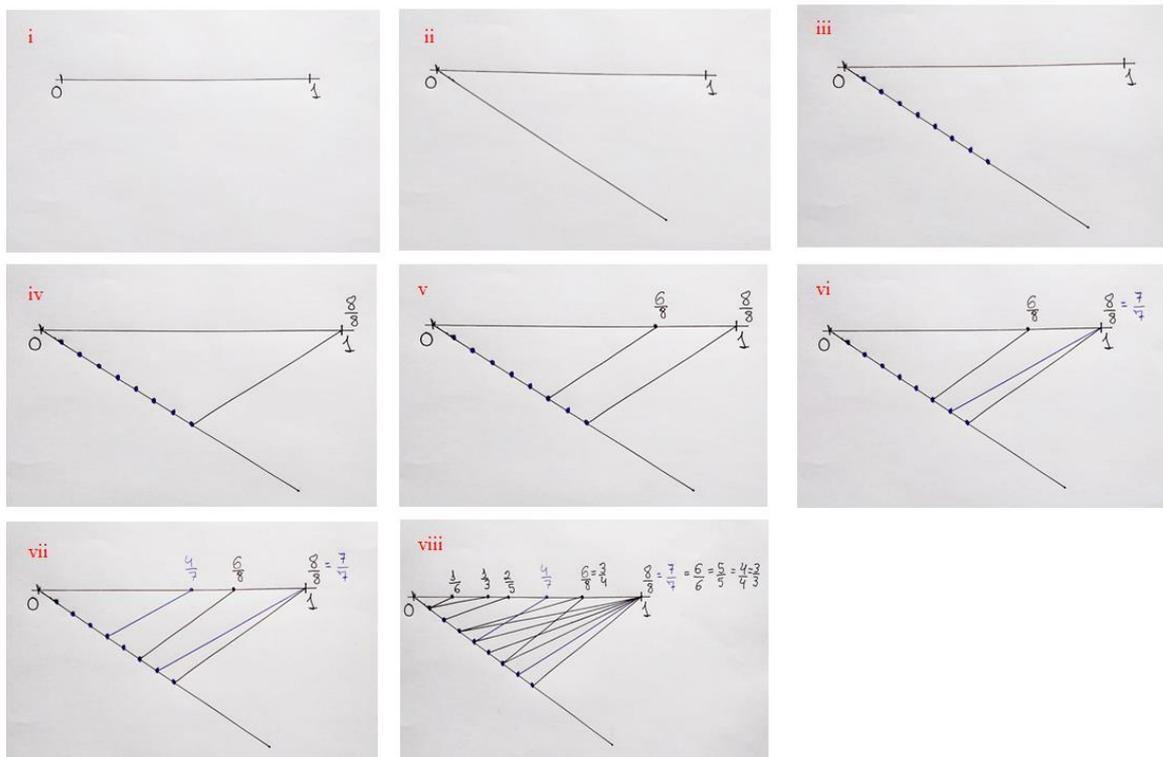
Na **situação 4**, espera-se que os estudantes construam uma reta numérica, como uso dos artefatos régua e compasso, para localizar as frações, dessa forma, conseguir organizar as frações em ordem crescente e assim identificar quem colocou a menor e maior quantidade de óleo. A localização das frações dependerá do escalor que o grupo considerar, visto que a régua ser um auxílio para traçar retas, enquanto o compasso será o auxílio para traçar os pontos e a distância considerada.

Para localizar as frações na reta numérica com régua e compasso a ação esperada para o processo de Instrumentação através dos esquemas de ação coletiva instrumentada deverá ser:

- i. Construir a reta que será a reta numérica (noção de reta numérica), e traçar um segmento de reta 01;
- ii. Traçar uma reta transversal de origem ao ponto 0 da reta numérica com qualquer inclinação;
- iii. Dividir igualmente a reta transversal com o uso do compasso conforme indicar o denominador da fração, considerando a fração $\frac{6}{8}$, a reta transversal deverá ser dividida igualmente em 8 partes;
- iv. Construir uma reta do último ponto de divisão da reta transversal até o ponto 1 da reta numérica (localização da fração $\frac{8}{8}$);

- v. Construir uma reta paralela à última reta traçada. Considerando o numerador da fração $\frac{6}{8}$, a reta paralela deve sair do sexto ponto de divisão da transversal até tocar a reta numérica. O ponto que cada reta paralela tocar na reta numérica corresponde a posição de uma fração;
- vi. Realizar o mesmo processo com as demais frações. Para a fração $\frac{4}{7}$ a reta de referência (para construção de retas paralelas) deve sair do sétimo ponto de divisão da transversal até o ponto 1 da reta numérica (localização da fração $\frac{7}{7}$);
- vii. Construir um reta paralela a última reta traçada, considerando o numerador da fração $\frac{4}{7}$, a reta paralela deve sair do quarto ponto de divisão da transversal até tocar na reta numérica. O ponto que cada reta paralela tocar na reta numérica corresponde a posição de uma fração;
- viii. Realizar o mesmo processo com as demais frações.

Figura 15 - Ação Instrumentada da situação 4

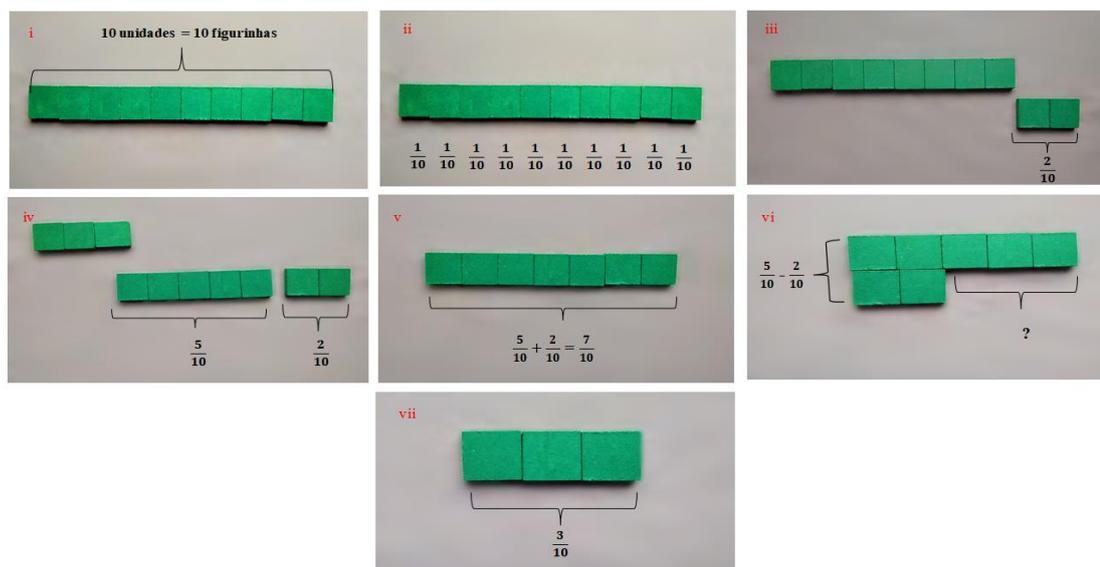


Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

As régua de frações podem ser usadas para resolver a adição e subtração de frações com denominadores iguais na **situação 5**, a ação esperada no processo de Instrumentação através dos esquemas de ação coletiva instrumentada deverá ser:

- i. Considerar a régua de dez peças como representação da quantidade de figurinhas de Pedro;
- ii. Identificar que cada peça representa uma fração do todo, ou seja $1/10$;
- iii. Pegar duas dessas peças como sendo as figurinhas que João recebeu, representando $2/10$ da quantidade de figurinha de Pedro;
- iv. Pegar cinco dessas peças como sendo as figurinhas que Camila recebeu, representando $5/10$ da quantidade de figurinha de Pedro;
- v. Juntar as peças de Camila e de João e observar que juntas formam $7/10$ das figurinhas de Pedro, procedimento de adição das frações;
- vi. Sobrepor nas peças de Camila as peças de João e observar que a parte de Camila é maior que a parte de João;
- vii. Observar a quantidade de peças que não foi coberta (3 peças), representando que Camila tem $3/10$ de figurinhas a mais que João.

Figura 16 - Ação instrumentada da situação 5

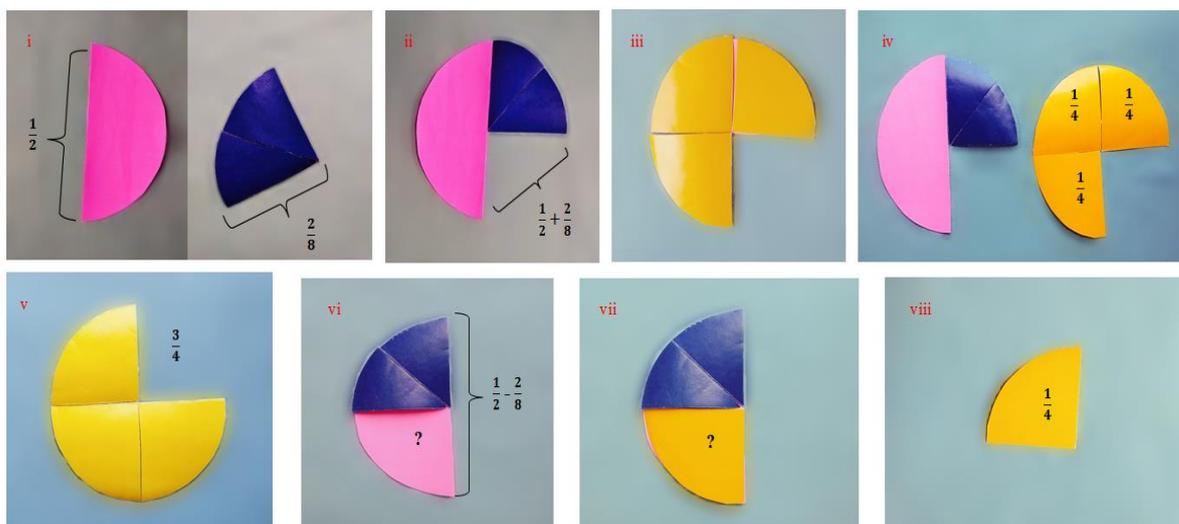


Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Usando os discos de frações para resolver a situação de adição e subtração de frações com denominadores diferentes na **situação 6**, a ação esperada para o processo de Instrumentação deverá ser:

- i. Representar uma peça de um disco que represente $\frac{1}{2}$ da pizza que Mariana recebeu e uma peça que represente $\frac{2}{8}$ da pizza que Tadeu recebeu;
- ii. Para a soma das frações devem-se juntar ambas as peças formando a parte da pizza que foi distribuída;
- iii. Sobrepor nas peças que formam a pizza as peças de outro disco que cubram igualmente $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{8}$. Esse processo é importante para que as diferentes peças (diferentes frações) sejam elevadas a peças iguais (mesmo denominador);
- iv. Contar quantas peças desse novo disco foi preciso usar para cobrir as peças que representam os pedaços de pizza;
- v. Identificar que fração a $\frac{3}{4}$ corresponde às peças sobrepostas;
- vi. Para subtração das frações, em relação às peças que representam $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{8}$ sobrepor a menor peça sobre a maior, a parte não coberta da peça maior corresponde ao resultado da subtração;
- vii. Verificar qual a maior peça de outro disco que cobre igualmente o espaço não coberto;
- viii. Identificar que a fração $\frac{1}{4}$ corresponde a peça usada.

Figura 17 - Ação Instrumentada da situação 6



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

As ações instrumentadas devem ser dirigidas dos esquemas de utilização, E.U.s., E.A.I., e E.A.C.I., visto que as situações-problemas deverão ser realizadas em grupos. Ressalta-se que, as ações e os caminhos escolhidos pelos estudantes para a resolução das situações podem ser bastante diferentes daquelas aqui apresentadas, uma vez que são resultados dos esquemas as quais mobilizaram, e como entende-se, os esquemas estão na mente dos sujeitos.

8. ANÁLISE E DISCUSSÕES DAS INFORMAÇÕES

8.1. ANÁLISE DA AVALIAÇÃO A PRIORI

A avaliação diagnóstica ocorreu no dia 8 de agosto de 2023, em dois tempos de 45 minutos cada. Os dados apresentados são resultados provenientes das respostas de 40 participantes. É importante destacar que as respostas dos participantes foram confrontadas com as possíveis respostas levantadas anteriormente à investigação, conforme abordado no Capítulo 7. A análise está organizada por situação-problema e a distribuição e o quantitativo de acertos estão expostos no Quadro 17.

Quadro 17 – Distribuição do quantitativo de acertos e erros para cada situação

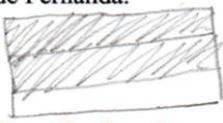
Cartão de Atividade 01 – Avaliação a priori			
Situação	Questão	Acertos por estudante	Erros por estudante
Parte-todo	Q1	29	10
Quociente	Q2	25	14
Operador	Q3	21	16
Número	Q4	6	25
Adição de frações com denominadores iguais	Q5a	27	10
Subtração de frações com denominadores iguais	Q5b	23	14
Adição de frações com denominadores diferentes	Q6a	16	22
Subtração de frações com denominadores diferentes	Q6b; Q6c	16	19

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Na situação problema envolvendo a fração com significado de **parte-todo** foi registrado um total de 29 acertos, evidenciando o uso do teorema-em-ação verdadeiro onde “a fração que representa n partes de um todo m , é dada por $\frac{n}{m}$ ” e conceito-em-ação de fração. Nessa quantidade também foi observado o uso de registro figural contínuo em 6 respostas, como demonstrado na Figura 18.

Figura 18 - Resposta 1 para Q1

Questão 1 - Fernanda adora ler livros, das três estantes que tem em seu quarto, ela já conseguiu preencher duas apenas com livros que coleciona. Determine a fração que representa a quantidade de estante com livros de Fernanda.



$$\frac{2}{3}$$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Entre a quantidade de participantes foi identificado 10 respostas incorretas para Q1, sendo que sete delas se enquadram no tipo 2, caso em que o estudante apresenta teorema-em-ação falso onde “a fração que representa n partes de um todo de m, é dada por $\frac{m}{n}$ ”, ou seja, ocorre a troca do numerado pelo denominador da fração. As demais respostas não foram previstas e não foi possível a identificação dos invariantes operatórios.

Na situação em que a fração possui significado de **quociente** foi identificado 25 acertos, sendo que em sete respostas foi evidenciado registro figural contínuo. Do total de acertos identifica-se vinte respostas tipo 1 e duas apresentam tipo 2, como pode ser observado respectivamente na Figura 19 e Figura 20.

Figura 19 - Resposta 1 para Q2

Questão 2 - Lucas comprou dois bolos e dividiu igualmente entre seus quatro irmãos. Que fração representa a quantidade de fatias de bolo que cada irmão de Lucas recebeu?

2 bolos
4 irmãos
a fração que representa a quantidade de fatias é $\frac{2}{4}$

$$x = \frac{2}{4}$$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 20 - Resposta 2 para Q2

Questão 2 - Lucas comprou dois bolos e dividiu igualmente entre seus quatro irmãos. Que fração representa a quantidade de fatias de bolo que cada irmão de Lucas recebeu?

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Fonte : dados da pesquisa (2023)

Os teoremas-em-ação identificados das respostas ilustradas nas Figuras 19 e 20 são considerados verdadeiros, sendo $\frac{a}{b}$ em que $a=q.b+r$, com $0 \leq r \leq b-1$, o que implica na mobilização do conceito-em-ação de divisão. Das 14 respostas incorretas da Q2 foi

identificado que duas apresentam a respostas tipo 4 e quatro delas apresentam o tipo 3, em que há a inversão do numerador pelo denominador da fração. Em três respostas os estudantes mobilizaram teorema-em-ação não esperado, onde representaram a fração corretamente, mas realizaram uma divisão incorreta em que $\frac{2}{4} = 2$. As outras cinco respostas não foram esperadas e não foi possível a identificação dos invariantes operatórios.

Na situação problema envolvendo a fração com significado de **operador multiplicativo** houve um total de 21 respostas corretas evidenciando o uso do teorema-em-ação verdadeiro, sendo $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ (Figura 21). Das 16 repostas incorretas analisadas nesta questão duas se classificam como tipo 3, situação em que há apenas uma reprodução da fração apresentada no enunciado da questão; e uma delas apresenta a resposta tipo 2, teorema-em-ação que o estudante usa o numerador como divisor e o denominador com multiplicador. As demais respostas não foram esperadas e não foi possível identificar o teorema-em-ação utilizado.

Figura 21 - Resposta 1 para Q3

Questão 3 – A professora Marta pediu para que seus alunos recortassem 15 bandeirinhas para festa da escola, porém apenas 3/5 dessa quantidade foram entregues. Quantas bandeirinhas foram entregues a professora Marta?

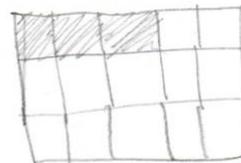
$$\frac{15 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{45}{5} = 9 \quad \text{⑨}$$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 22 - Resposta 2 para Q3

Questão 3 – A professora Marta pediu para que seus alunos recortassem 15 bandeirinhas para festa da escola, porém apenas 3/5 dessa quantidade foram entregues. Quantas bandeirinhas foram entregues a professora Marta?

$$\frac{3}{15}$$



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Na Figura 21 observa-se a resposta de um estudante que apresenta o teorema-em-ação verdadeiro, na qual identifica-se a mobilização dos conceitos de multiplicação e divisão. Enquanto a Figura 22 apresenta um teorema-em-ação falso e um registro figural contínuo usado para resolução da questão. Neste último, nota-se que o estudante dispõe da noção da fração como parte de um todo quando ele considera 3 partes de um total de 15, mas dada a situação a resposta é incorreta. Dessa forma, o estudante não conseguiu retirar uma fração de um inteiro.

Das 37 respostas analisadas na Q3, dez delas apresentam ao menos dois tipos de registros de representação semiótica mobilizados, o registro numérico incluído a mudança de representação por tratamento (cálculos) e registro figural contínuo ou discreto.

Na situação em que a fração possui significado de **número** houve um total de 6 acertos, considerando que três delas apresentam a organização das frações em ordem crescente ou decrescente corretamente, e três apresentam respostas corretas quanto a pergunta da questão relacionada ao maior e menor gasto. Na figura 23 pode ser observado o primeiro caso, em que evidencia a resposta tipo 1, com teorema-em-ação verdadeiro $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ e conceito-em-ação de ordem numérica. Na Figura 24 observa-se o segundo caso, mas nesta situação não é possível identificar teorema-em-ação em uso.

Figura 24 - Resposta 1 para Q4

Questão 4 – Isabel foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{2}{5}$ em tapioca, $\frac{1}{3}$ em pé de moleque, $\frac{1}{6}$ em mandioca, $\frac{3}{4}$ em farinha, $\frac{4}{7}$ em tucumã e $\frac{6}{8}$ ela gastou em tucupi. Organize o gasto em iguarias, fruta e legume que Isabel fez na feira e responda: Com o quê ela gastou mais e com o quê ela gastou menos na feira?

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 23 - Resposta 2 para Q4

Questão 4 – Isabel foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{2}{5}$ em tapioca, $\frac{1}{3}$ em pé de moleque, $\frac{1}{6}$ em mandioca, $\frac{3}{4}$ em farinha, $\frac{4}{7}$ em tucumã e $\frac{6}{8}$ ela gastou em tucupi. Organize o gasto em iguarias, fruta e legume que Isabel fez na feira e responda: Com o quê ela gastou mais e com o quê ela gastou menos na feira?

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Na quarta questão também foi identificado 25 respostas erradas, sendo que cinco se apresentam como tipo 3, caso em o estudante ordena as frações com referência aos numeradores, como observado na resposta ilustrada na Figura 25; e seis apresentam como tipo 4, situação em há apenas uma reprodução da ordem apresentada no enunciado da questão, como se vê na Figura 26, e que percebe-se que o estudante também realizou a divisão do numerador pelo denominador das frações para chegar ao maior e menor gasto.

Figura 25 - Resposta 3 da Q4

Questão 4 – Isabel foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{2}{5}$ em tapioca, $\frac{1}{3}$ em pé de moleque, $\frac{1}{6}$ em mandioca, $\frac{3}{4}$ em farinha, $\frac{4}{7}$ em tucumã e $\frac{6}{8}$ ela gastou em tucupi. Organize o gasto em iguarias, fruta e legume que Isabel fez na feira e responda: Com o quê ela gastou mais e com o quê ela gastou menos na feira?

$\frac{6}{8}, \frac{4}{7}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$
 ela gastou mais em tucupi, e menos em pé de moleque

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 28 - Resposta 4 da Q4

Questão 4 – Isabel foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{2}{5}$ em tapioca, $\frac{1}{3}$ em pé de moleque, $\frac{1}{6}$ em mandioca, $\frac{3}{4}$ em farinha, $\frac{4}{7}$ em tucumã e $\frac{6}{8}$ ela gastou em tucupi. Organize o gasto em iguarias, fruta e legume que Isabel fez na feira e responda: Com o quê ela gastou mais e com o quê ela gastou menos na feira?

$\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{4}{7}, \frac{6}{8}$
 Ela gastou mais com farinha ($\frac{3}{4}$) e em tucupi ($\frac{6}{8}$).
 Ela gastou menos em pé de moleque ($\frac{1}{3}$).

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Na questão envolvendo a operação de adição de fração com denominadores iguais foram identificados 27 acertos, sendo que desse total, sete respostas apresentam o cálculo da operação de adição e duas apresentam registro figural contínuo, como pode ser observado respectivamente na Figura 27 e Figura 28.

Figura 27 - Resposta 1 para Q5-a

Questão 5 - Pedro distribuiu algumas de suas figurinhas repetidas, $\frac{2}{10}$ ele entregou a João, $\frac{5}{10}$ a Camila.

- a) Que fração representa as figurinhas de Pedro que foram distribuídas entre João e Camila?

$$\frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$

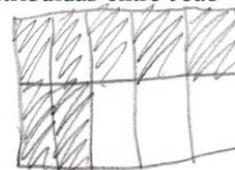
Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 26 - Resposta 2 para Q5-a

Questão 5 - Pedro distribuiu algumas de suas figurinhas repetidas, $\frac{2}{10}$ ele entregou a João, $\frac{5}{10}$ a Camila.

- a) Que fração representa as figurinhas de Pedro que foram distribuídas entre João e Camila?

$$\frac{7}{10}$$



Fonte: dados da pesquisa (2023)

As respostas demonstradas na Figura 27 e 28 apresentam-se corretamente, sendo que na primeira é possível identificar o teorema-em-ação verdadeiro, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ e conceito-em-ação de adição com números naturais, e na segunda o estudante realiza a contagem mobilizando a noção da fração como parte de um todo.

Quanto as 10 respostas que se apresentam incorretamente na letra a da Q5, uma se classifica como tipo 4 e outra apresenta a resposta tipo 3, situação em que o estudante além de realizar a soma do numeradores, o mesmo também soma os denominadores. Nas demais respostas não foi possível a identificação os invariantes operatórios.

A questão sobre operação de subtração de fração com denominadores iguais resultou em um total de 23 acertos, na qual apenas duas delas apresentam o cálculo da operação de subtração, evidenciando o uso do teorema-em-ação verdadeiro $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ e a mobilização do conceito-em-ação de subtração de números naturais, como pode ser observado na Figura 29.

Figura 29 - Resposta 1 para Q5-b

a) Que fração representa a quantidade de figurinhas que Camila ganhou a mais que João?

$$\frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 30 - Resposta 2 para Q5-b

a) Que fração representa a quantidade de figurinhas que Camila ganhou a mais que João?

$$\frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$


Fonte: dados da pesquisa (2023)

Na letra b da Q5, que por erro de edição apresenta-se como letra a, foram identificado 14 respostas incorretas, das quais quatro não foram possível interpretar os teoremas-em-ação e nove delas se classificam na resposta tipo 4, e uma resposta apresenta o tipo 2, situação em que o estudante realiza a adição ao invés de uma subtração de frações, podendo ser analisada na Figura 30, neste caso o conceito de adição não é pertinente para a situação-problema.

Nas questões envolvendo as operações de adição e subtração de fração com denominadores diferentes foi identificado em cada questão 16 acertos, sendo que treze respostas se apresentam como tipo 1 para a operação de adição (Figura 31) e oito se classificam como tipo 1 para a operação de subtração, como demonstrado na Figura 32.

Figura 32 - Resposta 1 para Q6-a

Questão 6 - Uma pizza foi dividida em 8 pedaços. Marina recebeu $\frac{1}{2}$ da pizza e Tadeu recebeu $\frac{2}{8}$.

- a) Quanto de pizza foi distribuído entre Marina e Tadeu?

$$\frac{6}{8}$$



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 33 - Resposta 1 para Q6-b

- b) Quanto de pizza Marina recebeu a mais que Tadeu?

$$\frac{2}{8}$$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

As demais respostas corretas não foram esperadas, dessa forma não apresentam nenhum dos teoremas-em-ação identificados, como pode ser visto na Figura 33. Entretanto, esse tipo de resposta é classificada como correta, uma vez que não é especificado no enunciado da questão que a resposta deveria ser em número fracionário.

Figura 31 - Resposta 3 para Q6

Questão 6 - Uma pizza foi dividida em 8 pedaços. Marina recebeu $\frac{1}{2}$ da pizza e Tadeu recebeu $\frac{2}{8}$.

$$\frac{2}{8} = 0,25 = 2 \quad 0,5 = 4 \quad 2 + 4 = 6 - 8 = 4 - 2 = 2$$

- a) Quanto de pizza foi distribuído entre Marina e Tadeu?

6 pedaços.

- b) Quanto de pizza Marina recebeu a mais que Tadeu?

2 pedaços.

- c) Quanta da pizza não foi distribuído?

2 pedaços.

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Na questão sobre adição de fração com denominadores diferentes foi identificado 22 respostas incorretas, sendo seis delas do tipo 4 e uma resposta tipo 3, caso em que o estudante realiza a adição de frações somando o numerador com numerador e denominador com denominador. As demais respostas não foram esperadas e não foi possível a identificação dos invariantes utilizados. Na questão envolvendo subtração de fração com denominadores diferente constatou-se 19 respostas erradas, onde três delas classifica-se como tipo 4.

Com base na análise das informações apresentadas, identifica-se que os estudantes apresentaram maior conhecimento da fração com significado de parte-todo, seguido das situações envolvendo operações de adição e subtração com denominadores iguais, e as situações em que a fração apresentou significado de quociente e operador multiplicativo, na qual mais da metade dos estudantes apresentaram bom desempenho.

Assim como os resultados de Santos e Fonseca (2019) e Salustiano (2019), foi identificado que os estudantes apresentaram dificuldade em operações de adição e subtração de fração com denominadores diferentes. A maior parte das respostas incorretas nessas situações não apresenta nenhum indício de cálculo de adição e subtração, apenas duas delas apresentaram uma tentativa de resolução por meio da multiplicação. Entretanto o índice de menor desempenho ocorreu na situação que incluía a fração como número, sendo a questão que também menos apresentou tentativa de resolução pelos estudantes.

O uso do registro figural foi analisado principalmente na primeira, segunda e sexta questão. Porém, a fração estava representada incorretamente na maioria das figuras ilustradas pelos estudantes, a exemplo da situação com a fração como parte-todo, onde verificou-se que, quatro das seis respostas que utilizaram o registro figural apresentaram esse tipo de erro gráfico, mas ainda assim os estudantes responderam corretamente a questão. Dessa forma, percebe-se que esses estudantes não compreendem o real sentido da fração, uma vez que não conseguiram estabelecer uma relação das partes ao todo, noção básica desse conceito.

A falta de concordância de registro figural ao registro numérico nos contexto supracitado vai ao encontro das afirmações feitas por Nunes e Bryant (1997), em que o conhecimento em fração pode ser enganoso, pois as crianças podem parecer compreender fração, falam de forma coerente sobre esse conceito, conseguem resolver alguns problemas fracionários, mas ainda assim, não possuem a compreensão completa da fração.

8.2. ANÁLISE DAS ATIVIDADES COLETIVAS INSTRUMENTADAS

As informações estão organizadas por OI, sendo que, em cada uma está descrito o desempenho didático conforme sua execução e a performance dos estudantes em cada situação. A partir das análises dessas informações é possível inferir sobre a Gênese Instrumental do disco de fração, régua de fração e esquadro.

A análise dos processos de Instrumentação e Instrumentalização consiste em observar os esquemas de utilização através das ações dos estudantes. Pois um artefato restringe as ações e molda a realização das tarefas. “A constituição de um instrumento é também a

constituição de um corpo de conhecimento sobre o objeto da atividade” (Trouche, 2003, s.p., tradução nossa). Nesse sentido, a interpretação das informações coletadas durante as atividades instrumentadas neste estudo se concentra em dois enfoques, identificados no Quadro 18.

Quadro 18 – Elementos de análise

Enfoque 1 - Componentes do Esquema	
Metas e antecipações	Condições para agir nas situações.
Regras de Ação	
Invariantes operatórios	
Possibilidade de inferência	
Enfoque 2 - Modelo S.A.C.I.	
S-Od	Interações entre os polos (sujeito-instrumento-objeto-sujeito)
I-O	
S-I	
S-Om	
S-OS	

Fonte: elaborado pelos autores (2023)

Para cada OI as informações serão discutidas por tarefas realizadas pelos estudantes e na ordem que elas aparecem nas folhas de atividades.

8.2.1. Orquestração Instrumental 1

8.2.1.1. Desempenho Didático da OI-1

A intervenção ocorreu no dia 11 de setembro de 2023 para o processo de Instrumentalização e Instrumentação dos discos de frações, desenvolvida em dois tempos de 45 minutos cada. No início da intervenção, a professora/pesquisadora formou as equipes, optando por organizá-los em grupos de oito integrantes. As cinco equipes formadas foram dispersas pela sala de aula e organizados em formato circular para promover uma melhor interação entre os participantes. Em seguida, foram entregues os artefatos e as folhas de atividade para cada equipe, seguindo das orientações e instruções para a realização das tarefas. As folhas de atividade possuíam seis questões intencionadas á manipulação dos discos de frações.

Durante este processo, a professora/pesquisadora se dividiu na ação de registrar as ações dos estudantes, por vezes com o auxílio do aparelho celular para registro de imagens e videogravação, por vezes do diário de bordo para registro das observações. Outra ação se deteve na mediação, que se estendeu desde o controle de comportamentos indisciplinados até a pronta resposta às dúvidas dos estudantes. Além disso, em vários momentos houve a necessidade de instruir as equipes quanto à colaboração entre os integrantes para responder as questões.

Quanto às reações ad hoc, observou-se pouca colaboração entre os estudantes, que devido a quantidade de integrantes em cada equipe alguns estudantes não se empenharam em participar da atividade. Em média três estudantes de cada equipe buscava participar ativamente para resolução das questões, mesmo após as instruções feitas de que todos os estudantes deviam participar. Foi observado que os estudantes que ficavam responsáveis em responder as questões era os que possuíam maior conhecimento sobre fração, desse modo, alguns deles evitaram usar o artefato em certas questões e buscaram responder através de cálculo. Outra reação não esperada foi o tempo que os estudantes se detiveram apenas nas duas primeiras questões, das quais eram aparentemente as mais simples.

8.2.1.2. Atividades coletivas Instrumentadas da OI-1

As equipes receberam um pacote contendo 12 discos de material de papel cartão, sendo 11 repartidos em partes iguais e 1 disco inteiro que representava a unidade. Como mencionado anteriormente, nas folhas de atividades continham 6 questões, sendo que cada uma objetivava a compreensão de noções e significados da fração.

A primeira tarefa continha perguntas relacionadas diretamente ao artefato, logo, visava o processo de Instrumentalização dos discos de frações. A questão, que pode ser analisada na Figura 34 e Figura 35, intencionava a manipulação das peças afim de que os estudantes compreendessem a fração com sentido de parte-todo. Desse modo, era necessário que as equipes formassem os discos e observassem as diferenças entre as peças e os discos formados.

Figura 37 – Resposta da Equipe 1 para Q1

Questão 1 – Analise as peças entregues e responda:

- Quantos discos inteiros contém no pacote? 1
- Todas as peças do pacote tem o mesmo tamanho? Não
- Separe as peças que possui o mesmo tamanho. Você consegue formar outros discos com as peças que você separou? Sim
- Quantos discos podem ser formados? 4 discos
- Qual a diferença entre os discos que você consegue perceber? Por o quantidade e látex
- Escolha qualquer disco, exceto o disco inteiro (branco). O disco escolhido é formado por quantas peças? 5. Sabendo que uma fração é composta pelo numerador (que fica em cima), que corresponde a quantidade de partes tomadas, e o denominador (que fica em baixo), que corresponde a quantidade de partes do todo. Que fração representa cada peça do disco que você escolheu? $\frac{1}{5}$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 34 - Resposta da Equipe 4 para Q1

Questão 1 – Analise as peças entregues e responda:

- Quantos discos inteiros contém no pacote? 1
- Todas as peças do pacote tem o mesmo tamanho? Não
- Separe as peças que possui o mesmo tamanho. Você consegue formar outros discos com as peças que você separou? Sim
- Quantos discos podem ser formados? 5
- Qual a diferença entre os discos que você consegue perceber? Cor e tamanho
- Escolha qualquer disco, exceto o disco inteiro (branco). O disco escolhido é formado por quantas peças? 12. Sabendo que uma fração é composta pelo numerador (que fica em cima), que corresponde a quantidade de partes tomadas, e o denominador (que fica em baixo), que corresponde a quantidade de partes do todo. Que fração representa cada peça do disco que você escolheu? $\frac{1}{12}$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

A tarefa ilustrada nas Figuras 36 e 37 evidencia a utilização dos discos no processo de Instrumentalização. Assim, é possível verificar a ação instrumentada dos estudantes durante a execução da tarefa, na qual a Equipe 1 (Figura 36) utilizou a própria carteira para organizar os discos e a Equipe 4 (Figura 37) optou por organizar o material no chão da sala.

Figura 35 - Ação Instrumentada da E.1 para Q1



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 36 - Ação Instrumentada da E.4 para Q1



Fonte: dados da pesquisa (2023)

A Figura 36 demonstra a colaboração da equipe 1 para a realização da primeira tarefa, onde observa-se a distribuição das peças e formação dos discos por cada integrante. Essa colaboração foi observada em todas as equipes, assim como, o processo de Instrumentalização.

Dos resultados da avaliação a priori, é possível concluir que a maioria dos estudantes tinha a compreensão da fração como parte-todo. Entretanto, a atividade é pertinente por ser a base para as demais questões, isso porque, as ações instrumentadas na primeira tarefa permitem o desenvolvimento dos primeiros esquemas de uso necessários para a estruturação das ações nas outras questões, como a formação e representação dos discos, a sobreposição e comparação das peças.

Dessa forma, a partir dos esquemas desenvolvidos na primeira tarefa é possível a evolução, assimilação e acomodação dos esquemas nas demais atividades, pois como afirma Rabardel (1999, p.7, tradução nossa) os esquemas de utilização possuem o poder de assimilador “[...] permitem a repetição da ação assegurando sua adaptação aos aspectos variáveis de objetos e situações pertencentes à mesma classe. Eles têm capacidades de acomodação para aplicar a objetos, classes de situações diferentes”.

Enquanto a primeira tarefa estava relacionada as característica e transformação do material, a segunda questão voltava-se a uma função a que os discos poderiam exercer, e no qual buscava a compreensão da fração como quociente. Já a pergunta **D** da segunda tarefa refere-se mais precisamente á equivalência de frações. Assim, para encontrar as frações que cabem igualmente na fração $\frac{1}{2}$ os estudantes deviam selecionar a peça que representasse esta fração e a partir dela encontrar as peças de outras régua que coubessem na peça de referencia ($\frac{1}{2}$). A ação instrumentada na referida tarefa contempla o processo de Instrumentação dos discos de frações.

Figura 38– Resposta da E.4 para Q2

- Questão 2** - Considere o disco inteiro a sua unidade e responda:
- Se repartir o disco pela metade, quantas partes terá o disco? 2. Que fração poderá representar cada peça desse disco? $\frac{1}{2}$.
 - Se repartir o disco em três partes iguais, que fração representa cada peça desse disco? $\frac{1}{3}$. Considerando esse mesmo disco, pegue apenas duas das três partes em que o disco está repartido, que fração do disco representa a quantidade que você pegou? $\frac{2}{3}$.
 - Se repartir o disco em quatro partes iguais, que fração poderá representar cada peça do disco? $\frac{1}{4}$. Agora, considere apenas duas dessas partes. Que fração pode representar as partes do disco que você pegou? $\frac{2}{4}$. As duas partes que você pegou é maior, menor ou igual a $\frac{1}{2}$ do disco? igual.
 - Quais são as outras frações que cabem igualmente a $\frac{1}{2}$? $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, etc.

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 39–Ação Instrumentada da E4 para Q2



Fonte: dados da pesquisa (2023)

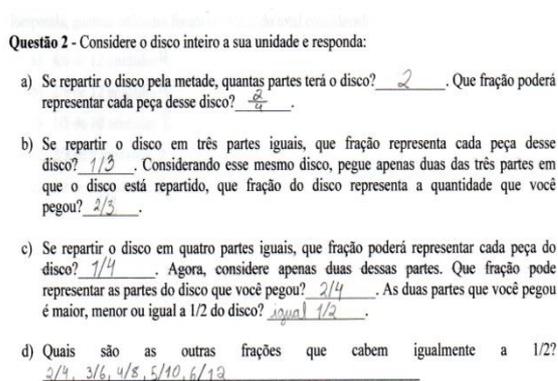
Na Figura 38 observa-se a resposta apresentada pela Equipe 4 e a Figura 39 é possível verificar a ação instrumentada para a execução da letra D, onde o estudante realiza a

comparação das peças azuis ($2/4$) com a peça rosa ($1/2$). Portanto, as **Regras de ação** podem ser interpretadas como:

- i. Seleção das peças;
- ii. Representação da fração $1/2$ pela peça rosa e a fração $2/4$ pelas peças azuis;
- iii. Comparação entre as diferentes peças;
- iv. Conclusão da equivalência entre as peças azuis e a rosa.

A tarefa ilustrada na Figura 40 evidencia a Instrumentação da Equipe 5 para a segunda questão. Entretanto, observa-se uma incoerência na letra A, uma vez que a pergunta refere-se ao disco com duas peças, nesse caso a fração $1/2$. Ação Instrumentada da Equipe 5 para a resolução da letra D pode ser analisada na Figura 41, na qual verifica-se que o estudante realiza uma comparação entre as peças rosa claro ($1/8$) com as peças rosa escuro ($1/10$).

Figura 40 - Resposta da E.5 para Q2



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 41 - Ação Instrumentada da E.5 para Q2



Fonte: dados da pesquisa (2023)

A partir das informações acima, as **Regras de ações** podem ser interpretadas através da organização das seguintes ações:

- i. Seleção das peças;
- ii. Formação das partes dos discos com as peças semelhantes;
- iii. Comparação entre as partes 1, 2 e 3;
- iv. Conclusão da equivalência entre as partes 1 e 2, e a não equivalência com a parte 3;
- v. Representação da fração $4/8$ pela parte 2 e a fração $5/10$ pela parte 1;

As folhas de atividade evidencia que a segunda tarefa foi realizada por todas as equipes, porém apenas a Equipe 2 não respondeu a letra D. As equipes 1 e 3 responderam corretamente a está pergunta, entretanto não há evidência do uso dos discos. E como podem ser analisadas nas Figuras 42 e 43, as equipes incluíram frações equivalentes a $1/2$ que não

poderia ser resultado dos discos, uma vez que o disco repartido em maior quantidade contém apenas 12 unidades.

Figura 42 - Resposta da E.1 para Q2

Questão 2 - Considere o disco inteiro a sua unidade e responda:

- a) Se repartir o disco pela metade, quantas partes terá o disco? 2. Que fração poderá representar cada peça desse disco? $\frac{1}{2}$.
- b) Se repartir o disco em três partes iguais, que fração representa cada peça desse disco? $\frac{1}{3}$. Considerando esse mesmo disco, pegue apenas duas das três partes em que o disco está repartido, que fração do disco representa a quantidade que você pegou? $\frac{2}{3}$.
- c) Se repartir o disco em quatro partes iguais, que fração poderá representar cada peça do disco? $\frac{1}{4}$. Agora, considere apenas duas dessas partes. Que fração pode representar as partes do disco que você pegou? $\frac{2}{4}$. As duas partes que você pegou é maior, menor ou igual a $\frac{1}{2}$ do disco? igual.
- d) Quais são as outras frações que cabem igualmente a $\frac{1}{2}$?
 $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{10}$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 43 - Resposta da E.3 para Q2

Questão 2 - Considere o disco inteiro a sua unidade e responda:

- a) Se repartir o disco pela metade, quantas partes terá o disco? 2. Que fração poderá representar cada peça desse disco? $\frac{1}{2}$.
- b) Se repartir o disco em três partes iguais, que fração representa cada peça desse disco? $\frac{1}{3}$. Considerando esse mesmo disco, pegue apenas duas das três partes em que o disco está repartido, que fração do disco representa a quantidade que você pegou? $\frac{2}{3}$.
- c) Se repartir o disco em quatro partes iguais, que fração poderá representar cada peça do disco? $\frac{1}{4}$. Agora, considere apenas duas dessas partes. Que fração pode representar as partes do disco que você pegou? $\frac{2}{4}$. As duas partes que você pegou é maior, menor ou igual a $\frac{1}{2}$ do disco? IGUAL.
- d) Quais são as outras frações que cabem igualmente a $\frac{1}{2}$?
 $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{10}$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

As demais questões foram respondidas pelas cinco equipes, porém não há evidência do uso dos discos para resolução dessas questões. As equipes, em geral evitavam usar o artefato quando a questão poderia ser resolvida com cálculo numérico. A exemplo da Equipe 5, que quando questionado pela professora/pesquisadora que explicasse o procedimento utilizado para resposta da sexta tarefa (Figura 44) argumentou ter utilizado o cálculo.

Figura 44 - Resposta da E.5 para Q7

Questão 7 - As frações abaixo indicam a quantidade que deve ser retirada de cada unidade. Responda, quantas unidades foram retiradas do total considerado:

- a) $\frac{4}{6}$ de 12 unidades 10
- b) $\frac{2}{8}$ de 12 unidades 9
- c) $\frac{1}{5}$ de 10 unidades 8
- d) $\frac{2}{3}$ de 9 unidades 3
- e) $\frac{3}{4}$ de 8 unidades 2

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Na Figura 44 é possível observar a resposta registrada pela E.5. A letra **a** da questão ilustrada apresentava anteriormente como resposta o número 10. Ao ser analisada pela professora/pesquisadora, a mesma questionou a equipe o procedimento utilizado para responder a questão, na qual a estudante responde “Porque tirou quatro de seis, ficou 2. E tirou dois de doze, ficou dez”. Através da fala da estudante é possível identificar o uso de um **teorema-em-ação** falso, composto pelo **conceito-em-ação** de subtração de número naturais,

conceito que não é pertinente dada a situação. Á vista disso, a professora/pesquisadora instruiu a equipe utilizar os artefatos. Entretanto, como observado na resposta apresentada pela equipe, conclui-se que a estudantes não fez uso dos discos de frações para está questão.

Como as três primeiras tarefas demandaram das equipes tempo significativo de resolução, as demais questões foram respondidas com tempo mínimo, contribuindo para que os estudantes não utilizassem os discos, pois os mesmos sentiam-se dificuldade de manusear as peças. Está dificuldade estava relacionada a falta de colaboração das equipes, que ocorreu apenas na primeira tarefa, e a falta de organização do material, isso porque, depois da primeira tarefa os estudantes não mantinham os discos formandos.

A Instrumentalização e Instrumentação consistem no desenvolvimento dos esquemas de utilização, no qual só podem ser identificados nas ações instrumentadas pelos estudantes. Entretanto, apesar dos dois processos contribuírem conjuntamente “[...] dependendo da situação, um dos processos possa ser mais desenvolvido ou proeminente do que o outro, ou pode até ser o único implementado” Béguin e Rabardel (2000, p.181). É o caso das Equipes 1, 2 e 3 que não conseguiram estabelecer o processo de Instrumentação do disco de fração, como demonstra o Quadro 19.

Quadro 19 – Enquadramento dos processos realizados por cada equipe

Tarefa	Esquema	Instrumentalização - [I-O]	Instrumentação - [S-I]	Equipes
1	Parte-todo	Agrupamento de peças; reconhecimento das peças de cada disco; formação de discos; reconhecimento das diferenças entre os discos; contagem dos discos; seleção de peças;		Todas
2	Quociente e Equivalência	Seleção de peças; divisão dos discos; representação dos discos; Comparação e/ou sobreposição das peças;	Uso dos discos para encontrar frações equivalentes.	Eq.4 e Eq. 5

Fonte: dados da pesquisa (2023)

No Quadro 19 é possível identificar que apenas as equipes 4 e 5 demonstraram desenvolver o processo de Gênese Instrumental coletivo do disco de fração. Ressalta-se que, todas as tarefas, com exceção da primeira, poderiam ser resolvidas sem o uso do artefato.

Dessa forma, apenas o registro escrito não é capaz de comprovar o desenvolvimento do processo de Instrumentação. Portanto o Quadro 19 demonstra apenas as equipes das quais foram possíveis coletar evidências das ações instrumentadas através do registro escrito, fotográfico e/ou filmagem.

A partir das informações coletadas verificou-se que a atividade instrumentada, apenas em relação a primeira tarefa, estabeleceu a relação Instrumento-Objeto [I-O] em todas as equipes, na qual os estudantes atribuíram aos discos (instrumento/artefato) uma possibilidade de ação sobre o objeto, ou seja, a representação das frações pelas peças dos discos. O processo de Instrumentalização conforme Béguin e Rabardel (2000) está relacionado aos atributos e propriedades inerentes ao artefato, dessa forma, sendo um processo duradouro ou mesmo permanente. Outra interação observada foi a relação Sujeito-Sujeito [S-Os], constatada principalmente ao início da atividade, para o agrupamento das peças e formação dos discos de frações pelas equipes.

A relação Sujeito-Instrumento [S-I] foi identificada apenas na Equipe 4 e 5, onde os estudantes conseguiram adaptar a segunda tarefa ao artefato, ou seja, a comparação entre as peças para encontrar as frações equivalentes. A Instrumentação é um processo através do qual as restrições e potencialidades de um artefato moldam o sujeito (Rabardel, 1995). Assim sendo, apenas as Equipes 4 e 5 estabeleceram a relação sujeito e objeto mediada pelo instrumento [S-Om], nesse caso, a interação entre os estudantes e a fração com mediação do instrumento disco de fração.

As interações entre os polos (sujeito-instrumento-objeto) constituíram uma parte das situações de atividade instrumentada, apenas as que puderam ser identificadas. “Mas o instrumento está presente, e essa presença é constitutiva da tríade e das múltiplas interações que dela resultam e formam assim um núcleo comum, característico da classe de situações de atividade instrumentada” (Rabardel, 1995, p.44, tradução nossa).

O artefato é enriquecido por situações em que é posto pelo sujeito como meio de sua ação, pois a variedade de situações permite o desenvolvimento de um conjunto de esquemas de uso em que o artefato pode ser inserido para formar o instrumento (Rabardel, 1995). Portanto, o uso dos discos restrito apenas na primeira tarefa não possibilita a evolução desses esquemas, impedindo a promoção de competência necessária para a resolução das situações-problemas envolvendo fração.

8.2.2. Orquestração Instrumental 2

8.2.2.1. Desempenho Didático da OI-2

A intervenção ocorreu no dia 13 e 14 de setembro de 2023 para o processo de Instrumentalização e Instrumentação das régua de frações, desenvolvida em um tempo de aula de 45 minutos cada encontro. Ao início da intervenção, a professora/pesquisadora primeiramente instruiu a formação das equipes, as mesmas formadas no encontro anterior. Os cinco grupos foram novamente dispersos pela sala de aula e organizados em formato circular para melhor interação entre os sujeitos. Em seguida, foi entregue os artefatos e as folhas de atividade para as equipes, seguindo das orientações e instruções para a realização das tarefas.

Durante este processo, a professora/pesquisadora se dividiu na ação de registrar as ações dos estudantes, por vezes com o auxílio do aparelho celular para registro de imagens e videogravação, por vezes do diário de bordo para registro das observações. Outra ação se deteve na mediação, para controlar os comportamentos indisciplinados, para tirar dúvidas dos estudantes, ou mesmo para instruir a colaboração entre os integrantes das equipes para responder as questões.

As folhas de atividade continham tarefas similares às aplicadas na OI-1, neste caso para as régua de frações. Entretanto, como na primeira atividade os estudantes ocuparam um tempo significativo apenas nas duas primeiras questões, optou-se por diminuir a quantidade de questões e perguntas para a segunda atividade. Logo, as equipes utilizaram as régua de frações para a realização de cinco questões. A primeira questão objetivava o processo de Instrumentalização e as demais o processo de Instrumentação das régua de frações.

Em virtude do número de membros em cada equipe, alguns estudantes não se empenharam em participar das atividades, em média apenas três de cada equipe procuravam contribuir ativamente para resolução das questões, mesmo após as instruções feitas de que todos os estudantes deviam participar. Nem todas as equipes conseguiram responder todas as questões no tempo disponível.

8.2.2.2. Atividade Coletiva Instrumentada da OI-2

Cada equipe recebeu um pacote contendo 16 régua de material de papel cartão, sendo uma inteira representando a unidade e 15 repartidas em partes iguais. Além disso, receberam folhas de atividades com 5 questões, sendo que cada uma objetivava a compreensão de noções e significados da fração.

O objetivo da primeira tarefa era a Instrumentalização das régulas de frações. Para isso, a questão possuía perguntas sobre o artefato, a fim de induzir os estudantes à manipulação das peças. Dessa forma, ação instrumentada permitiu os estudantes conhecerem as potencialidades e os limites das régulas, ao mesmo tempo em que desenvolviam as noções da fração como parte de um todo. Portanto, para execução da questão era necessário que os estudantes formassem as régulas com as peças entregues no pacote, como pode ser observado na Figura 45 e Figura 46.

Figura 45 - Ação Instrumentada da E.2 para Q1



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 46 - Ação Instrumentada da E.3 para Q1



Fonte: dados da pesquisa (2023)

É possível notar nas figuras acima expostas que as equipes buscavam utilizar tanto o espaço disponível nas carteiras quanto o chão da sala para que pudessem explanar as peças e construir as régulas. Na primeira tarefa, os estudantes deviam formar as régulas com as peças do pacote e compreender as diferenças entre as peças e as régulas por eles montadas. A formação das régulas neste momento inicial era importante para facilitar às equipes responderem às demais questões, pois o desenvolvimento dos esquemas de uso nessa tarefa permitiria os estudantes agissem nas demais questões.

Figura 47 - Resposta da E.1 para Q1

Questão 1 – Analise as peças entregues e responda:

a) Quantas régulas inteiras contêm no pacote? 1

b) Todas as peças do pacote tem o mesmo tamanho? Não

c) Separe as peças que possui o mesmo tamanho. Você consegue formar outras régulas com as peças que você separou? Sim

d) Quantas régulas podem ser formadas? 15

e) Qual a diferença entre as régulas que você consegue perceber? a cor e o tamanho

f) Escolha qualquer régula, exceto a inteira (branco). A régula escolhida é formada por quantas peças? 2. Que fração representa cada peça da régula que você escolheu? 1/2.

Fonte: dados da pesquisa (2023)

A Figura 47 ilustra as respostas apresentadas pela Equipe 1 à primeira questão. Em relação à pergunta *e* assim como a E.1 as demais equipes também identificaram a diferença entre as régua, principalmente quanto às cores, tamanhos das peças e a quantidade de peças das régua. Na Figura 48 e 49 é possível verificar a colaboração da equipe 1 para realização da tarefa, na primeira demonstra que estudantes agruparam inicialmente as peças por tamanho e cor, e a segunda observa-se que cada integrante formou as régua.

Figura 48 - Ação instrumentada 1 da E.1 para Q1



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 49 - Ação Instrumentada 2 da E.1 para Q1



Fonte: dados da pesquisa (2023)

As condutas manifestadas pela equipe 1 na primeira tarefa demonstra um caráter colaborativo entre os estudantes, que também foi observado nas demais equipes. As folhas de atividades esclarecem que todas as equipes conseguiram responder as perguntas dessa questão, o que evidencia a utilização das régua para o processo de Instrumentalização.

Enquanto a primeira tarefa referia-se mais precisamente as característica e transformação do material, a segunda questão estava relacionada mais a uma função a que as régua poderiam exercer na situação, como observa-se a Figura 50. A pergunta *d* da segunda tarefa refere-se a equivalência de frações, para encontrar as frações que cabem igualmente na fração $1/3$, os estudantes deviam selecionar a peça que representasse esta fração e a partir dela encontrar as peças de outras régua que coubessem na peça de referencia ($1/3$). Das cinco equipes, apenas a Equipe 5 não respondeu a letra *d* dessa questão.

Figura 51 - Resposta da E.3 para Q2

Questão 2 - Considere a régua inteira a sua unidade e responda:

a) Se repartir a régua pela metade, quantas partes terá a régua? 2. Que fração poderá representar cada peça dessa régua? $\frac{1}{2}$.

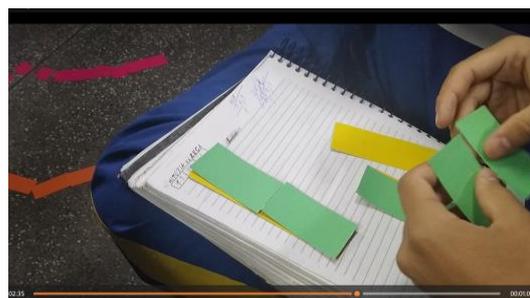
b) Se repartir a régua em três partes iguais, que fração representa cada peça dessa régua? $\frac{1}{3}$. Considerando essa mesma régua, pegue apenas duas das três partes em que a régua está repartida, que fração representa a quantidade que você pegou? $\frac{2}{3}$.

c) Se repartir a régua em quatro partes iguais, que fração poderá representar cada peça da régua? $\frac{1}{4}$. Agora, considere apenas duas dessas partes. Que fração pode representar as partes da régua que você pegou? $\frac{2}{4}$. As duas partes que você pegou é maior, menor ou igual a $\frac{1}{2}$ da régua? igual $\frac{2}{4}$.

d) Quais são as outras frações que cabem igualmente a $\frac{1}{3}$? $\frac{2}{6}, \frac{4}{12}, \frac{8}{24}$. Como você utilizou o material para encontrar essas frações? Reparti $\frac{1}{3}$ de (poucas) régua(s) e, assim, comparando elas com $\frac{1}{3}$, encontrei os resultados.

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 50 - Ação Instrumentada da E.3 para Q2



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Na Figura 51 poder ser analisada o uso das régua pela Equipe 3 para encontrar as frações equivalentes a $\frac{1}{3}$. Nota-se que o estudante seleciona as peças verdes ($\frac{1}{6}$) e mede com a peça amarela ($\frac{1}{3}$). A partir da comparação entre as peças, o estudante conclui que em uma peça amarela é igual a duas peças verdes ($\frac{2}{6}$), resultado que pode ser verificado na Figura 50. Nesse sentido, as ações instrumentadas para a execução da letra d da segunda tarefa, indicam as **Regras de ação** dos esquemas de utilização desenvolvido pelo estudante da equipe 3, como sendo:

- i. Seleção das peças;
- ii. Representação da fração $\frac{1}{3}$ pela peça amarela;
- iii. Comparação entre as peças verde com a peça amarela;
- iv. Conclusão que duas peças verdes são iguais a uma única peça amarela;
- v. Representação da fração $\frac{2}{6}$ por duas peças verdes;
- vi. Conclusão de que $\frac{2}{6}$ é equivalente a fração $\frac{1}{3}$.

A terceira tarefa também se tratava de equivalência de frações, neste caso os estudantes deviam selecionar as peças que representavam cada fração e medir umas com as outras. A Figura 52 ilustra a resposta apresentada pela Equipe 4. Além desta apenas a Equipe 1 respondeu a questão.

Figura 52 - Resposta da E.4 para Q3

Questão 3 - Marque com a letra correspondente as frações que representam a mesma quantidade das frações destacadas:

(A) $\frac{5}{10}$ (B) $\frac{4}{12}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

(E) $\frac{9}{15}$ (F) $\frac{8}{15}$ (G) $\frac{8}{16}$ (H) $\frac{5}{15}$ (I) $\frac{6}{15}$ (J) $\frac{1}{2}$

• Justifique sua resposta utilizando o material e explique como utilizou:

Usei a régua! Coloquei os 8 quadrinhos do $\frac{5}{10}$ ao lado do $\frac{8}{16}$ e vi que $\frac{5}{10}$ é o mesmo que $\frac{8}{16}$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 53 - Ação Instrumentada da E.4 para Q3



Fonte: dados da pesquisa (2023)

A Figura 53 demonstra o procedimento utilizado pela Equipe 4, onde o estudante seleciona a peça rosa ($1/2$), as peças vermelhas ($1/10$) e as azuis ($1/16$), e compara umas com as outras. A partir das ações instrumentadas manifestada pela equipe 4, as **Regras de ação** podem ser interpretadas como:

- i. Seleção das peças;
- ii. Representação da fração $1/2$ pela peça rosa;
- iii. Comparação entre as peças vermelhas e azuis com a peça rosa;
- iv. Conclusão de que cinco peças vermelhas e oito peças azuis são iguais a uma peça rosa;
- v. Representação da fração $5/10$ pelas peças vermelhas e $8/16$ pelas peças azuis;
- vi. Conclusão de que a fração $5/10$, $8/16$ e $1/2$ são equivalentes.

A quarta tarefa, que por erro de edição se apresenta como Questão 5, pode ser visualizada na Figura 54. Essa tarefa demandava o procedimento necessário para compreender a fração como medida. Neste contexto, os estudantes deveriam selecionar as peças que representassem as frações em questão e verificar, por meio da sobreposição de peças, quantas peças da segundo fração cobriam igualmente na peça referente à primeira. Foi analisado que todas as equipes responderam à quinta questão; no entanto, todas apresentaram pelo menos uma resposta incorreta.

Na Figura 55 é possível analisar o uso das régua pela Equipe 5 para responder à primeira pergunta da quarta tarefa. Como observado, os estudantes selecionaram a régua 14 (azul) e a régua 7 (marrom), e verificaram pela sobreposição das peças que a fração $1/14$ cabe duas vezes na fração $1/7$. Entretanto, apesar da Equipe 5 demonstrar saber manusear as régua para responder as perguntas, verifica-se na Figura 54 que a letra **b** e **c** foram respondidas incorretamente.

Figura 54 - Resposta da E.5 para Q5

Questão 5 – Responda:

- a) Quantas vezes $1/14$ cabe na fração $1/7$? $\textcircled{2}$
- b) Quantas vezes $1/15$ cabe na fração $2/3$? $\textcircled{5}$
- c) Quantas vezes $1/12$ cabe na fração $1/4$? $\textcircled{9}$
- d) Quantas vezes $1/10$ cabe em $1/2$? $\textcircled{5}$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 55 – Ação Instrumentada da E.5 para Q5



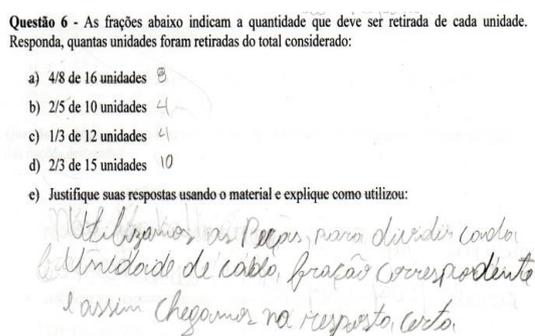
Fonte: dados da pesquisa (2023)

As ações instrumentadas pelo estudante da Equipe 5 para responder a letra A da quarta tarefa são resultados dos esquemas de utilização e a sequência que essas ações são manifestadas implicam as **Regras de ações** integradas nesses esquemas, sendo elas:

- i. Seleção das peças;
- ii. Representação da fração $1/14$ pela peça azul e da fração $1/7$ pela peça marrom;
- iii. Formação da régua 14 (azul);
- iv. Sobreposição da régua marrom na régua azul;
- v. Contagem das peças azuis que são cobertas por cada peça marrom;
- vi. Conclusão de que duas peças azuis cabem em uma peça marrom;

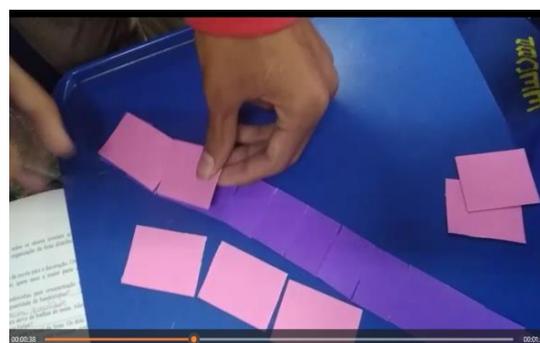
A quinta tarefa (Questão 6) foi planejada para que as equipes trabalhassem com procedimento de fração como operador multiplicativo. As folhas de atividades indicam que das cinco equipes, somente a Equipe 2 não realizou a questão. Para responder a essa tarefa, os estudantes deveriam selecionar a régua que possuía a quantidade de peças igual à unidade que estava sendo considerada, assim como selecionar as peças que representassem a fração referente. Dessa maneira, por meio da sobreposição das peças os estudantes deveriam verificar quantas unidades (peças) são cobertas pela fração.

Figura 57 – Resposta da E.1 para Q6



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 56 - Ação Instrumentada da E.1 para Q6



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Na Figura 57 observa-se o momento capturado em que a Equipe 1 realiza o procedimento supracitado para responder à letra A da questão 6, esta podendo ser analisada na Figura 56, sendo a régua 16 (lilás) representando as 16 unidades e as peças da régua 8 (rosa) representando a fração $1/8$. Através da ação instrumentada manifestada pela Equipe 1, as **Regras de ação** do esquema de utilização desenvolvido para responder à letra A da tarefa podem ser descrita como a:

- i. Seleção das peças;
- ii. Formação da régua 16 (lilás);
- iii. Representação da fração $\frac{4}{8}$ pelas peças rosa;
- iv. Sobreposição de quatro peças rosa nas peças lilás;
- v. Contagem das peças lilás cobertas pelas peças rosa;
- vi. Conclusão de que oito peças lilás foram cobertas.

A Gênese Instrumental consiste no desenvolvimento dos esquemas de utilização, e que puderam ser constatados nas ações manifestadas pelos estudantes durante a atividade instrumentada. No processo de Instrumentalização ocorre a mobilização do esquema de uso, este correspondente psicológico de um gesto, elemento da atividade. O processo de Instrumentação se constitui no desenvolvimento do esquema de ação instrumentada, o correspondente psicológico de uma técnica instrumentada (Trouche, 2003, s.p.). No Quadro 20, é possível identificar as equipes que demonstraram desenvolver o processo de Gênese Instrumental coletivo da régua de fração.

Quadro 20 – Enquadramento dos processos realizados por cada equipe

Tarefa	Esquema	Instrumentação	Instrumentalização	Equipes
1	Parte-todo		Agrupamento de peças; reconhecimento das peças de cada régua; formação das régua; reconhecimento das diferenças entre as régua; contagem das régua; seleção de peças;	Todas
2	Quociente e equivalência	Uso das régua para encontrar frações equivalentes.	Seleção de peças; divisão das régua; representação das régua; Comparação e/ou sobreposição das peças;	Eq.1; Eq.2; Eq.3; Eq. 5
3	Equivalência			Eq. 4
4	Operador	Uso das régua para encontrar o produto da fração com um número inteiro.	Seleção das peças; representação das régua; Comparação e/ou sobreposição das peças;	Eq.1; Eq. 4; Eq. 5
5	Medida	Uso das régua para medir duas frações diferentes		Eq.4

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Salienta-se que todas as tarefas, exceto a primeira, poderiam ser resolvidas sem o uso do artefato. Dessa forma, apenas o registro escrito não é capaz de comprovar o desenvolvimento do processo de Instrumentação. Portanto, o Quadro 20 identifica apenas as equipes das quais foi possível coletar evidências das ações instrumentadas através do registro escrito, fotográfico e/ou filmagem.

A partir das informações apresentadas, foi possível verificar que a atividade instrumentada estabeleceu a relação I-O (Instrumentalização) em todas as cinco equipes, onde os estudantes personalizaram a régua (artefato/instrumento) de acordo com o objeto em situação (fração). Segundo Rabardel (2005) “O movimento correlativo de instrumentalização é aquele pelo qual um sujeito põe em forma, pode-se dizer que se conforma à sua pessoa, o que lhe é dado fora para torna-lo seu próprio instrumento” (p.257, tradução nossa). A interação S-Os também foi identificada em todas as equipes, principalmente em relação à primeira tarefa, na qual as equipes realizaram o agrupamento das peças e formação das réguas de frações.

No Quadro 20, observa-se que as cinco equipes conseguiram construir o instrumento em pelo menos uma das tarefas aplicadas, um desenvolvimento significativo comparado a atividade instrumentada dos discos de frações. Isso porque, segundo Rabardel (2004), o instrumento uma vez constituído pode ser manifestado em todas as situações de uma mesma classe, uma vez que essas situações possuem características semelhantes que permitem a coordenação de esquemas de utilização já desenvolvidos. “O reconhecimento de invariantes é, pois, a chave da generalização do esquema” (Vergnaud, 1993, p.5). Dessa forma, o instrumento se adapta de forma flexível à variabilidade das situações considerando as restrições e o objetivo de cada uma.

Nesse contexto, as cinco equipes também estabeleceram a relação S-I, onde a régua de fração foi meio de realização da tarefa pelos estudantes. De acordo com Béguin e Rabardel (2000) “no processo de instrumentação o sujeito se desenvolve, enquanto no processo de instrumentalização é o artefato que evolui” (p.181, tradução nossa). Portanto, compreende-se a relação S-Om constituída na atividade instrumentada pelas equipes como a interação entre os estudantes e a fração por mediação do instrumento régua de fração.

8.2.3. Orquestração Instrumental 3

8.2.3.1. Desempenho Didático da OI-3

A intervenção ocorreu no dia 18 de setembro de 2023 para o processo de Instrumentalização e Instrumentação do esquadro, desenvolvida em dois tempos de aula de 45 minutos cada. A priori o artefato escolhido para este processo seria a régua e o compasso, no entanto, devido questão de segurança dos estudantes optou-se por utilizar o esquadro, uma vez que este instrumento atendia igualmente as situações da fração que deveriam ser trabalhadas. Outra decisão tomada foi a formação de duplas ao invés de equipes, devido a pouca participação dos estudantes nas atividades anteriores, e pelo fato de que, o esquadro permitir uma estruturação de ações de nível muito mais individual do que coletivo.

Dessa forma, no início da intervenção a professora/pesquisadora informou a turma que formassem duplas, a intenção de que os próprios estudantes escolhessem com quem realizariam a atividade era para que a proximidade dos estudantes resultasse numa maior interação e participação. Com um total de 20 duplas formadas, foi entregue dois esquadros e as folhas de atividades para cada uma. Em seguida, os estudantes foram orientados e instruídos para o desenvolvimento das tarefas. As folhas de atividades incluíam três questões intencionadas a manipulação e conhecimento do esquadro, as duas primeiras para promover o processo de Instrumentalização e a última para o processo de Instrumentação.

Durante este processo, a professora/pesquisadora se dividiu na ação de registrar as ações dos estudantes, por vezes com o auxílio do aparelho celular para registro de imagens e videogravação, por vezes do diário de bordo para registro das observações. Outra ação se deteve na mediação, para controlar os comportamentos indisciplinados e para tirar dúvidas dos estudantes. Para a realização da atividade, foi necessário a professora/pesquisadora explicar sobre os conceitos de reta, segmento de reta, retas paralelas e reta transversal.

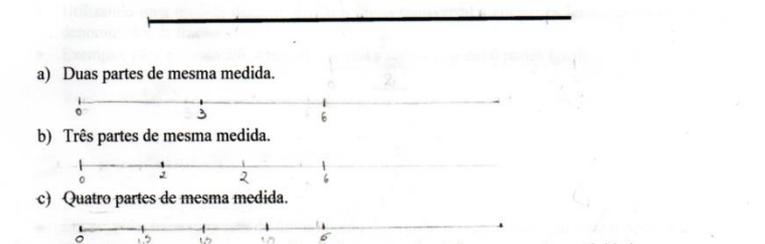
Como reações dos estudantes as decisões tomadas, houve uma maior participação durante a atividade. No entanto, também houve maior quantidade de dúvidas por partes dos estudantes, o que dificultou em certos momentos o registro de dados pela professora/pesquisadora que tentava atender a demanda de dúvidas. Nem todas as duplas conseguiram responder todas as questões no tempo disponível.

8.2.3.2. Atividade Coletiva Instrumentada da OI-3

Cada dupla recebeu dois esquadros juntamente com a folha de atividade, na qual incluía questões intencionadas a manipulação do artefato assim como ao conhecimento de suas potencialidades. Dessa forma, a primeira questão, por exemplo, os estudantes deviam utilizar um esquadro para dividir um segmento de reta em partes iguais, procedimento necessário para localizar a fração na reta numérica com o artefato.

Figura 58 – Resposta da dupla A para Q1

Questão 1– Usando a régua, represente um segmento de reta qualquer. Divida esse segmento de reta em:

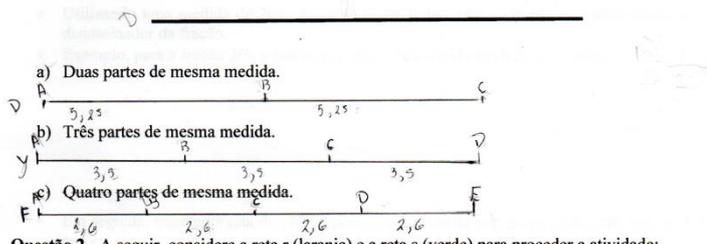


Fonte: dados da pesquisa (2023)

Na primeira tarefa, ilustrada na Figura 58, apenas cinco duplas realizaram-na corretamente, ou seja, utilizaram o esquadro para traçar a reta e dividi-la igualmente. Para a execução da questão os estudantes poderiam utilizar uma medida padrão para dividir o segmento em partes iguais, por exemplo, utilizar 2cm para cada parte. Ou, como optado pela dupla B (Figura 59), utilizar a mesma medida para todas as retas construídas, dessa forma, apenas dividir essa medida pela quantidade de partes consideradas, encontrando assim a medida necessária para cada parte.

Figura 59– Resposta da dupla B para Q1

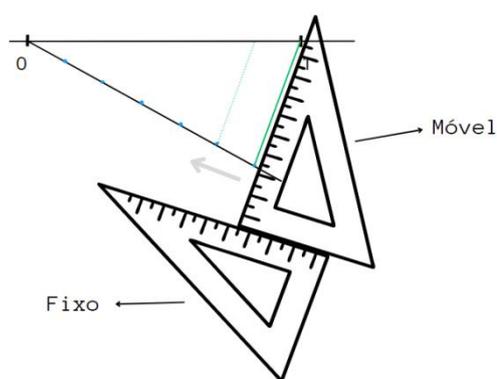
Questão 1– Usando a régua, represente um segmento de reta qualquer. Divida esse segmento de reta em:



Fonte: dados da pesquisa (2023)

A segunda tarefa consistiu em utilizar os artefatos para traçar retas paralelas, sendo um esquadro fixo como apoio ao outro, como demonstrado na Figura 60. O objetivo da tarefa era que, além dos estudantes trabalharem a técnica de traçar retas paralelas com os esquadros, que eles percebessem que as inclinações das retas paralelas dependem da quantidade de partes que está sendo considerado na transversal; perceber essa diferença é importante, uma vez que as localizações das frações dependem da inclinação correta das paralelas. Daí a necessidade dos estudantes utilizarem cores diferentes para diferentes paralelas, para uma melhor percepção.

Figura 60– Técnica de uso dos esquadros

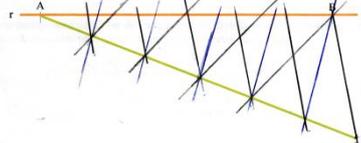


Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 61–Resposta da dupla C para Q2

Questão 2 - A seguir, considere a reta r (laranja) e a reta s (verde) para proceder a atividade:

- Divida a reta s em 6 partes iguais, e com uma **caneta preta**, ligue o ponto 6 (último ponto de divisão) ao ponto B da reta r . Em seguida trace retas paralelas a reta B6, com auxílio do esquadro.
- Com uma caneta azul, ligue o ponto 5 ao ponto B na reta r e trace retas paralelas a reta B5.
- As retas paralelas azuis tocam a reta r no mesmo ponto que as retas paralelas pretas? *Sim.* Porque? *Porque o ângulo são iguais por serem alternadas.*
- Com uma **caneta vermelha**, ligue o ponto 4 ao ponto B na reta r e trace retas paralelas a reta B4.
- As retas paralelas vermelhas tocam a reta r no mesmo ponto que as retas paralelas pretas? *Não.*



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Das 20 duplas apenas 6 conseguiram realizar a segunda tarefa corretamente, como identifica-se na Figura 61 a resposta apresentada pela dupla C. Foi observado que 5 duplas conseguiram construir retas paralelas corretamente, mas conforme mudava a cor (a inclinação) os estudantes tendenciaram as diferentes paralelas a se tocarem na reta r , o que só deveria ocorrer no ponto B e na segunda reta vermelha (2/4) com a terceira reta preta (3/6). Este tipo de situação pode ser observado na Figura 62 e 63.

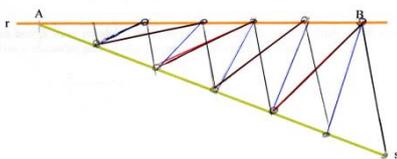
Figura 62– Resposta da dupla D para Q2

Questão 2 - A seguir, considere a reta r (laranja) e a reta s (verde) para proceder a atividade:

a) Divida a reta s em 6 partes iguais, e com uma caneta preta, ligue o ponto 6 (último ponto de divisão) ao ponto B da reta r . Em seguida trace retas paralelas a reta B6, com auxílio do esquadro.

b) Com uma caneta azul, ligue o ponto 5 ao ponto B na reta r e trace retas paralelas a reta B5.

c) As retas paralelas azuis tocam a reta r no mesmo ponto que as retas paralelas pretas? Sim. Porque? porque elas são paralelas, então os pontos



d) Com uma caneta vermelha, ligue o ponto 4 ao ponto B na reta r e trace retas paralelas a reta B4.

e) As retas paralelas vermelhas tocam a reta r no mesmo ponto que as retas paralelas pretas? Sim.

Fonte: dados da pesquisa (2023)

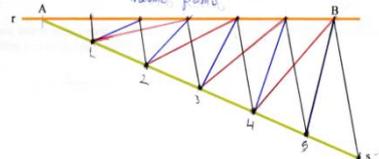
Figura 63–Resposta da dupla B para Q2

Questão 2 - A seguir, considere a reta r (laranja) e a reta s (verde) para proceder a atividade:

a) Divida a reta s em 6 partes iguais, e com uma caneta preta, ligue o ponto 6 (último ponto de divisão) ao ponto B da reta r . Em seguida trace retas paralelas a reta B6, com auxílio do esquadro.

b) Com uma caneta azul, ligue o ponto 5 ao ponto B na reta r e trace retas paralelas a reta B5.

c) As retas paralelas azuis tocam a reta r no mesmo ponto que as retas paralelas pretas? Sim. Porque? porque quando ligamos elas se encontram no mesmo ponto



d) Com uma caneta vermelha, ligue o ponto 4 ao ponto B na reta r e trace retas paralelas a reta B4.

e) As retas paralelas vermelhas tocam a reta r no mesmo ponto que as retas paralelas pretas? Sim.

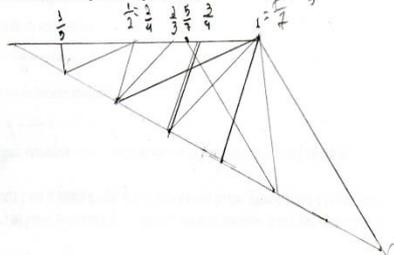
Fonte: dados da pesquisa (2023)

Observa-se que nas duas duplas (Figura 62 e 63) as respostas da letra C e E são parecidas, uma vez que ambos tendenciaram as retas vermelhas e azuis a tocarem no mesmo ponto que as retas pretas tocam na reta r . É de referir que, todas as duplas chegaram pelo menos na tentativa de realização desta atividade, porém as 9 duplas restante ou não realizaram a divisão da transversal em partes iguais, ou não conseguiram construir as retas paralelas corretamente.

O objetivo da terceira tarefa era que os estudantes trabalhassem os procedimentos necessários para localizar as frações na reta numérica. Além das questões anteriormente realizadas os estudantes tinham na ficha de atividade um exemplo para a orientação desta tarefa. Entretanto, apenas as Duplas A, C e D conseguiram localizar as frações. Na Figura 64 observa-se a resposta apresentada pela dupla A.

Figura 64- Resposta da dupla A para Q3

- Seguindo esse procedimento, localize as seguintes frações: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{7}$. Em seguida, responda:
- Qual a menor fração da reta?
 - Qual a maior fração da reta?
 - A fração $\frac{2}{3}$ está localizada próxima a que número?



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 65–Ação Instrumentada da dupla A para Q3



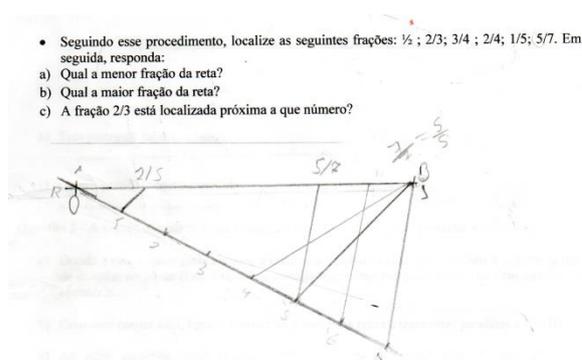
Fonte: dados da pesquisa (2023)

A Figura 65 evidencia o uso dos esquadros pela Dupla A para a execução da tarefa. As ações instrumentadas da estudante indicam as **Regras de ação** para localização da fração $5/7$, como sendo:

- i. Construção da reta numérica;
- ii. Demarcação de um segmento de início 0 e final 1;
- iii. Construção da reta transversal ao ponto 0 da reta numérica e de qualquer inclinação;
- iv. Divisão da reta transversal em 7 partes iguais;
- v. Construção de uma reta do último ponto de divisão da transversal ao ponto 1 da reta numérica;
- vi. Registro da localização $7/7$;
- vii. Construção de uma reta paralela à última reta traçada, saindo do quinto ponto de divisão da transversal até a reta numérica;
- viii. Registro da localização da fração $5/7$ [...]

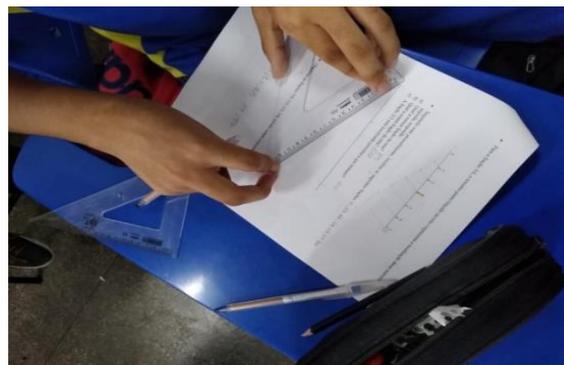
As ações descritas foram executadas para a localização da fração $5/7$, por limites de laudas a regras de ação para a localização das demais frações podem ser analisadas no Apêndice B. Na Figura 66, é possível analisar a resposta da dupla E, onde verifica-se que os estudantes estavam seguindo o procedimento correto, mas devido a falta de tempo não foi possível os estudantes completarem a tarefa como observa-se na Figura 67.

Figura 66 - Resposta da dupla E para Q3



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 67 - Ação Instrumentada da dupla E para Q3



Fonte: dados da pesquisa (2023)

As duplas foram orientadas a localizar as frações em ordem de maior denominador para facilitar o processo de execução da tarefa. Dessa forma, como a Dupla E apresenta comandos semelhantes a Dupla A a regra de ação, descritas anteriormente, pode ser interpretada para ambas.

As quatro duplas que apresentaram o procedimento esperado para localização das frações com os esquadros, não necessariamente realizaram de forma correta as tarefas anteriores. As duplas C e E, a exemplo, conseguiram realizar a segunda tarefa, mas não a primeira. A dupla D, não conseguiu executar a primeira e na segunda apresentou a situação tendenciosa de tocar as diferentes retas no mesmo ponto. A Dupla A realizou a primeira corretamente e na segunda apresentou o mesmo caso que a dupla D.

Tais observações demonstram a característica da Instrumentalização, como processo duradouro ou permanente. Entretanto, é importante ressaltar que como o uso dos esquadros para a localização da fração na reta numérica demanda ações restritas ou mesmo complexas, os esquemas de uso mobilizados apenas na primeira questão não é suficiente para capacitar os estudantes a resolverem situações-problemas envolvendo a fração com sentido de número com os esquadros, no qual poderá ser confirmada posteriormente, no próximo tópico.

A Instrumentalização dos esquadros consiste no desenvolvimento de esquemas de uso e que puderam ser constatados nas ações manifestadas pelos estudantes. Como afirma Contamines, George e Hotte (2003) “este processo aplica-se às características do artefato, à prescrição de utilização fornecida pelo conceitualizador e ao papel que desempenha o artefato na ação do assunto” (p.9, tradução nossa). No Quadro 21 é possível identificar que das 20 duplas apenas 11 estabeleceram a relação I-O, o que significa que de 40 estudantes apenas 22 deles conseguiram instrumentalizar os esquadros.

Quadro 21 – Enquadramento dos processos realizados por cada dupla

Tarefa	Instrumentação [S-I]	Instrumentalização [I-O]	Duplas
1		Construção de retas e segmentos de reta; Divisão de uma reta em partes iguais.	A; B; E; F; G; H; I
2		Construção de retas e segmentos de reta; Divisão de uma reta em partes iguais; construção de retas paralelas e reta transversal;	C; E; H; I; J; K
3	Uso dos esquadros para localizar frações na reta numérica.	Construção de uma reta numérica, Construção da reta transversal e reta paralela; divisão da reta transversal em partes iguais;	A; C; D; E

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Das duplas que estabeleceram o processo de Instrumentalização, mas não que não houve a evolução dos esquemas de uso, apenas as Duplas I e J não localizaram frações na reta numérica. Na folha de atividade da Dupla J encontra-se evidencia da tentativa de resolução da

questão, porém a dupla optou por apagar o registro. Enquanto a Dupla I apenas conseguiu construir uma reta numérica e uma transversal, o que compreende que a dupla não teve tempo de realizar a tarefa. Quanto as duplas B, F, G e H é possível concluir que não estabeleceram o processo de Instrumentação, ou porque não utilizaram os esquadros para localizar as frações, ou porque localizaram incorretamente.

A relação S-I foi reconhecida em apenas quatro duplas, das quais foram capazes de aplicar a técnica instrumentada aos esquadros para encontrar as frações na reta numérica. A mobilização dos E.A.C.I. (Esquema de Ação Coletiva Instrumentada) pelas duplas implicou no processo de Instrumentação. Para Contamines, George e Hotte (2003) “ao longo do processo de instrumentação, é o usuário que evolui e que aprende. Esses são os esquemas de uso que evoluíram, se transformaram, foram criados, incorporados aos esquemas já existentes” (p. 8, tradução nossa). Resultando assim no desenvolvimento da Gênese Instrumental que se define na relação S-Om constituída pelas quatro duplas.

É importante ressaltar que apesar da maioria dos estudantes não conseguirem articular a possibilidade de uso dos esquadros - restrições das ações – objetivos das tarefas, a professora/pesquisadora observou uma participação ativa dos estudantes nesta atividade, colaborando para o estabelecimento da relação S-Os. Ainda que a maior parte dos estudantes não tenha conseguido desenvolver esquemas de utilização deve-se considerar que a Instrumentação é um processo de aprendizagem, e que o tempo de aprendizagem dos estudantes é diferente do tempo de ensino.

8.2.4. Orquestração Instrumental 4

8.2.4.1. Desempenho Didático da OI-4

A intervenção ocorreu no dia 20 e 21 de setembro de 2023 para o processo de Instrumentalização e Instrumentação dos artefatos disco de fração, régua de fração e esquadro, desenvolvida em um tempo de aula de 45 minutos cada encontro.

Para a quarta OI a folha de atividade incluía as mesmas situações-problemas aplicadas na Avaliação a *Priori*, com o objetivo de desenvolver a Instrumentação dos artefatos considerando o Campo Conceitual da Fração. Entretanto, pelo pouco tempo de aula para a realização das Orquestrações Instrumentais, as situações-problemas que incluía as operações de adição e subtração de frações e que estavam inclusas na Avaliação a *Priori* não foram incluídas nas atividades instrumentadas. Esta decisão foi tomada pelo fato de que, a exclusão

dessas situações não interferiria no Campo Conceitual da fração, que como discutido nos capítulos anteriores, é formada pelas situações em que a fração tem significado de parte-todo, quociente, número, operador multiplicativo e medida. Este último significado também não estava presente na Avaliação *a Priori*, mas foi incluída nas atividades instrumentadas por se mostrar pertinente no Campo conceitual da fração.

Para o processo de Instrumentação, os estudantes foram divididos em equipes de 4 integrantes, pois equipes formadas por muitos integrantes como ocorrido na segunda e terceira OI poderia resultar na falta de participação dos estudantes, e em contrapartida, duplas seria inviável para professora/pesquisadora orienta-los no tempo disponível para este processo. Após a formação das equipes, os artefatos e a folha de atividade foram entregue pela professora/pesquisadora seguido das orientações e instruções para atividade.

Como reações *ad hoc*, foi observada uma maior participação dos estudantes comparada as OI-1 e OI-2. Entretanto, ainda houve certa resistência ao uso dos artefatos para resolução de algumas situações-problemas por algumas equipes, na qual será descrita mais detalhadamente a seguir.

8.2.4.2. Atividade Coletiva Instrumentada da OI-4

No Quadro 22 verifica-se o quantitativo de acertos e erro da atividade aplicada na OI-4 e os significados da fração presente nas situações-problemas. Nesta orquestração estava presente um total de 40 estudantes, onde foram divididos em equipes de quatro integrantes, logo, os resultados apresentados referem-se ao total de 10 equipes.

Quadro 22 – Quantitativo de acertos e erros de cada questão

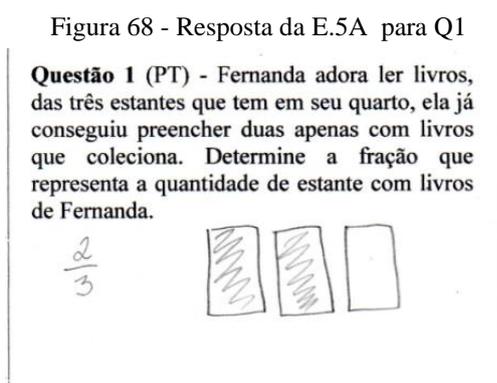
Significado	Sigla	Questão	Acertos por equipe	Erros por equipe
Parte-todo	PT	Q1	8	2
Quociente	Q	Q2	7	3
Operador	OM	Q3	9	1
Número	N	Q4	4	3
Medida	M	Q6	5	3

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Para evidências de interações e esquemas dos participantes serão transcritos alguns diálogos entre a professora/pesquisadora (**P**) e os estudantes (**E**).

Parte-todo

Na situação-problema envolvendo a fração com sentido de parte-todo foi identificado um total de 8 acertos e duas respostas incorretas que se classificam na resposta tipo 2, onde à inversão do numerador pelo denominador da fração. Para esta tarefa não há evidência da ocorrência do processo de Instrumentação por nenhuma equipe. Porém, no registro escrito de duas equipes é possível identificar o uso do registro figural, conforme ilustrado na Figura 68.



Fonte: dados da pesquisa (2023)

As situações-problemas envolvendo fração são tarefas que podem ser resolvidas tanto por registro figural quanto com o material concreto. E como identificado na avaliação diagnóstica a maioria dos estudantes já possuíam o conhecimento da fração como parte de um todo, o que implicou na resistência do uso dos artefatos uma vez que os estudantes não sentiram necessidades de utilização.

Quociente

Na situação-problema em que a fração possui significado de quociente houve um total de 7 acertos, sendo que quatro deles apresentam a resposta tipo 1 e três apresentam o tipo 2. Há evidência do processo de Instrumentação do disco de fração na Equipe 2B. Nesta equipe, observada pela professora/pesquisadora os estudantes discutiam sobre a resposta correta para a situação da divisão de dois bolos para quatro irmãos, como poder ser analisado na Figura 69. O diálogo sobre a questão é transcrito a seguir:

P: Que fração ficaria? (referindo-se pergunta do enunciado da questão).

E1: oito sobre quatro.

E2: Pra mim dois sobre quatro.

P: Lembrem-se que para repartição do bolo vocês devem considerar a quantidade de pessoas.

E3: Ele vai dividir o bolo pra quatro irmãos. Então poderia dividir no meio...

E1: Mais poderia dividir em quatro pedaços um bolo.
 E3: Então ele vai dividir em quatro pedaços e dar um pra cada um (fazendo a representação com as peças do disco de 4 e distribuindo para os colegas).
 E2: No meu caso não. No meu caso é só dividir no meio (fazendo a representação com as peças do disco de 2).
 E3: Então qual é o certo?
 P: Nos dois casos a quantidade distribuída para cada irmão não é a mesma?
 E3: Então os dois tá certo (referindo-se a fração $1/2$ e $2/4$).

A Figura 70 ilustra a resposta apresentada pela E.2B, em é possível identificar como **Invariante Operatório** mobilizado na resolução da situação-problema o teorema-em-ação verdadeiro, $\frac{a}{b}$ em que $a=q.b+r$, com $0 \leq r < b-1$, e o conceito-em-ação de divisão. O diálogo, bem como, as filmagens permitiu identificar como **Regras de ação** os comandos:

- I. Escolha do artefato;
- II. Seleção dos discos;
- III. Representação do disco de dois como sendo duas partes de um bolo e o disco de quatro como quatro fatias de um bolo;
- IV. Correspondência da quantidade de peças (fatias) para quatro integrantes da equipe (quatro irmão);
- V. Repetição dos comandos anteriores para representar o segundo bolo;
- VI. Conclusão de que quatro pessoas ficaram com duas peças do disco de 4.

Figura 69 - Ação Instrumentada da E.2B para Q2



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 70 - Resposta da E.2B para Q2

Questão 2 (Q) – Lucas comprou dois bolos e dividiu igualmente entre seus quatro irmãos. Que fração representa a quantidade de fatias de bolo que cada irmão de Lucas recebeu?

$$\frac{2}{4}$$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

As ações ordenadas dos estudantes da E.2B indicam além dos elementos já citados, as **Metas** e **Possibilidade de Inferência**, uma vez que como afirma Vergnaud (2009), os gestos tratam-se de operações de pensamento, logo a sequência de ações descritas se atribui aos objetivos traçados e a decisões tomadas pelos estudantes no decorrer decurso temporal.

Nas seguintes falas “*Então poderia dividir no meio*” e “*Mais poderia dividir em quatro pedaços*” identifica-se **antecipações** dos esquemas dos estudantes para **meta** que seria dividir o bolo igualmente para quatro pessoas. Consta-se a **inferência** sobre o esquema uma vez que estudante 1 a princípio responde “*oito sobre quatro*”, mas que há uma alteração de pensamento ao decorrer das operações realizadas pela equipe. A situação apresentada pela E.2B demonstra a importância da atividade coletiva, como pontado por Rabardel (2004) “os artefatos cujo uso é público e observável em detalhe pelos restantes membros do coletivo criam boas condições para a aquisição de competências, mas também para a tomada de decisões confiável porque é controlável por uma multiplicidade de atores” (p.137, tradução nossa).

Dentre todas as ações possíveis, os comandos descritos mostrou-se para a equipe a mais eficaz para solução da situação-problema. “As regras de ação constitui um nível relativamente próximo da ação observável” (Vergnaud, 1985, p.250, tradução nossa). A organização da ação dos estudantes, que estar condicionada a possibilidade de uso dos discos, configura-se a evolução dos E.Us., logo a evidência o Processo de Instrumentação. Pois conforme afirma Trouche (2005b) este processo “está relacionada com a emergência de esquemas no sujeito (isto é, a forma como o artefato contribuirá para pré-estruturar a ação do sujeito, para a realização da tarefa em questão)” (s.p., tradução nossa).

No diálogo acima transcrito verifica-se quatro tipos de interação diante da situação de atividade instrumentada. A interação S-I, uma vez que o instrumento disco de fração é meio de ação dos estudantes sobre a situação matemática, através do desenvolvimento dos E.A.C.I. A relação do tipo I-O, onde os estudantes acomodam o artefato na situação-problema, utilizando os discos como representação das frações, processo que envolve a Instrumentalização do artefato. “Todo sujeito, no curso de sua atividade, adapta o artefato aos seus hábitos e ao seu projeto” (Bellemain; Trouche, 2019, p.109). Este processo se constitui da mobilização do E.Us. como, seleção das peças, formação de discos com as peças e atribuição de funções a elas.

E a interação S-Os que pode ser evidenciada atrás do diálogo direto dos estudantes acima citado, como também as interações de distribuição das peças entre os mesmo como pode ser observado pela professora/pesquisadora. A Figura 67 constata a relação S-Om, na qual os estudantes interagem com objeto matemático mediado pelo instrumento disco de fração, interação que implica no desenvolvimento da Gênese Instrumental.

Dos integrantes que compõem a E.2B, apenas dois apresentam resposta correta quanto a esta mesma situação que foi aplicada na avaliação diagnóstica. E como pode ser analisado na OI-1 a equipe ainda não havia se instrumentado com os discos quanto à tarefa envolvendo fração com significado de quociente.

Operador Multiplicativo

Na situação-problema em que a fração possui significado de operador foi identificado um total 9 acertos, e um erro na qual não foi possível identificar o teorema-em-ação utilizado pela equipe. Quanto ao processo de Instrumentação há evidência da ocorrência em duas equipes. Na Figura 72 e no diálogo abaixo pode ser constatada a ação instrumentada da Equipe 4B.

Figura 71 - Resposta da E.4B para Q3

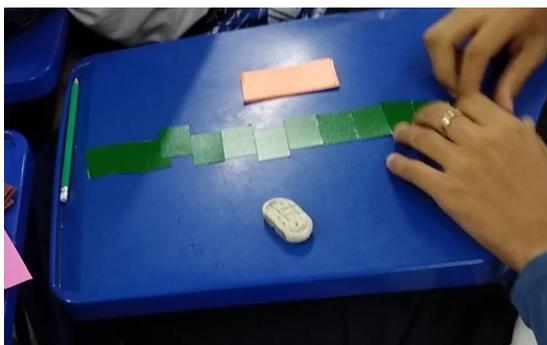
Questão 3 (OM) – A professora Marta pediu para que seus alunos recortassem 15 bandeirinhas para festa da escola, porém apenas $\frac{3}{5}$ dessa quantidade foram entregues. Quantas bandeirinhas foram entregues a professora Marta?

9 bandeirinhas

$$P_2 = 9$$

Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 72 - Ação Instrumentada da E.4B para Q3



Fonte: dados da pesquisa (2023)

P: Como você chegou a este resultado? (se referindo a resposta apresentada pela equipe e que pode ser analisada na Figura 71).

E1: Como aqui ta falando três quintos, eu peguei três de cinco (pegando três peças da régua de cinco) e botei no de quinze (referindo as peças da régua de quinze), quinze bandeirinhas.

E1: Aí tive duvida se era quantas foram entregues ou quantas não foram entregues....

E2: Como aqui diz (aponta para o enunciado da questão) quantas foram entregues, então a gente pegou as peças que tava em baixo da laranja (referindo as peças da régua de quinze que estavam coberta pelas três peças da régua cinco) e deu nove.

E1: nove bandeirinhas.

Observa-se que a E4B mobilizou implicitamente o **teorema-em-ação** verdadeiro, $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$, em que a fração se apresenta como um produto escalar composto pelos **conceitos-em-ação** de multiplicação e divisão. Para alcançar este resultado, os estudantes apresentaram os comandos descritos abaixo e que correspondem as **Regras de ação**:

- i. Escolha do artefato;

- ii. Seleção das régua;
- iii. Representação das bandeirinhas pelas peças da régua de quinze (peças verdes);
- iv. Representação de $3/5$ pelas três peças da régua de cinco (peças laranjadas);
- v. Sobreposição das peças das peças verdes nas peças laranjadas;
- vi. Contagem da quantidade das peças verdes que couberam nas peças laranjadas;
- vii. Conclusão que couberam nove peças.

Segundo Vergnaud (1996) “A automatização é evidentemente uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da ação” (p. 158, tradução nossa). Esse controle de conduta pelos estudantes representa **Possibilidade de inferência**, que é constatada na fala “*deu nove bandeirinhas*”, e onde percebe-se a disponibilidade do estudante de agir na situação. Está mesma informação sugere a existência da relação do tipo S-I, onde o estudante interage com o instrumento régua de fração para solução da situação-problema através do desenvolvimento dos E.A.C.I. “A instrumentação é, portanto, este processo pelo qual as restrições e potencialidades de um artefato condicionarão de forma duradoura a ação de um sujeito para resolver um determinado problema” (Trouche, 2005b, s.p., tradução nossa).

Identifica-se a relação S-Om, uma vez que a equipe interage com a fração por mediação do instrumento régua de fração, e no que constitui a Gênese Instrumental. Diante das informações, verifica-se também outras interações, como na fala “*Como aqui ta falando três quintos, eu peguei três de cinco*”, pode-se analisar uma relação do tipo I-O na qual o instrumento “régua de fração” interage com o objeto fração $3/5$ existente no enunciado da questão, através da mobilização E.Us. (Esquema de Uso). Segundo Trouche (2005b) “a instrumentalização é relativa à personalização do artefato pelo sujeito” (sp., tradução nossa). Essa personalização se dá na seleção de peças que atender a situação, a formação de régua e a atribuição de função á elas, como a representação das frações.

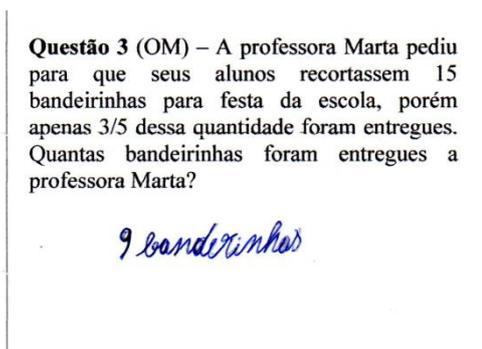
Dos integrantes que compõem a E.4B apenas um estudante soube responder corretamente a está mesma situação-problema na avaliação diagnóstica. Em relação aos esquemas já mobilizados na OI-2, os estudantes desta equipe faziam parte da E4, equipe na qual foi evidenciado o processo de Instrumentação das régua de frações na tarefa envolvendo a fração com significado de operador multiplicativo. O que demonstra o poder de ação instrumentada com as régua de fração dos estudantes neste tipo de tarefa.

Na Equipe 3B pode ser analisada a ocorrência do Processo de Instrumentação das régua de frações (Figura 74). Através da Figura 73 observa-se o **teorema-em-ação**

verdadeiro, $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$, composto pelos **conceitos-em-ação** de multiplicação e divisão, mobilizados implicitamente pela equipe. As **Regras em ação** podem ser interpretadas através das condutas manifestada pelo estudante, como:

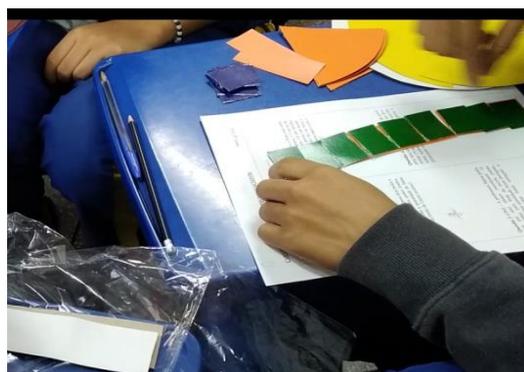
- i. Escolha do artefato;
- ii. Seleção da régua;
- iii. Representação de $3/5$ pelas três peças da régua de cinco (peças laranjadas);
- iv. Representação das bandeirinhas pelas peças da régua de quinze (peças verdes);
- v. Sobreposição das peças verde sobre as peças laranjadas na posição horizontal;
- vi. Correção da posição das peças verdes nas laranjadas;
- vii. Contagem da quantidade das peças verdes que couberam nas peças laranjadas;
- viii. Conclusão que couberam nove peças.

Figura 73 - Resposta da E.3B para Q3



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 74 - Ação Instrumentada da E.3B para Q3



Fonte: dados da pesquisa (2023)

A sequência de ações manifestadas, bem como a informações disponível pela equipe resultou na capacidade de agir na situação-problema “9 bandeirinhas”. “A associação do sujeito dos artefatos à sua ação conduz, portanto, a uma reorganização da atividade ligada a uma variação na abertura do campo das ações possíveis” (Rabardel, 2004, p. 140, tradução nossa). A **inferência** pode ser identificada no momento observado em que há uma mudança na operação pelos estudantes. Isso porque, ao sobrepor as peças verdes o estudante primeiramente orientou-a incorretamente²⁶, dessa forma, as peças verdes não cabiam

²⁶ Todas as régua possuem o mesmo tamanho, ou seja, a mesma largura e comprimento, que pode ser medido e comparado com a régua inteira contida no pacote. Se a régua for formada com as peças em orientação errada, o tamanho da régua ultrapassa a unidade considerada (régua inteira).

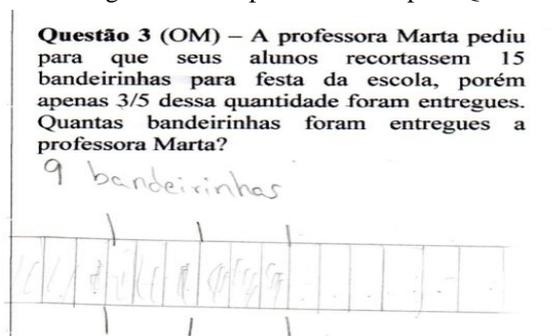
corretamente nas peças laranjadas, mas o erro foi logo identificado por outra estudante da equipe que mudou imediatamente a posição das peças.

Nas informações apresentadas identifica-se a relação I-O, constituindo o Processo de Instrumentalização, em que as régua permitiram aos estudantes a possibilidade de ação sobre a situação, e que configura-se nas ações manifestada pelos estudantes como a seleção de peças, a formação de régua com as peças selecionadas e a atribuição da função de representação de frações. O desenvolvimento e a coordenação desses esquemas de uso resultaram no E.A.C.I., ou seja, a adaptação dos esquemas na situação, e que implicaram na interação S-I, a Instrumentação dos estudantes ao uso das régua de frações. Identifica-se também a relação S-Om, ao passo que os estudantes atuam sobre o instrumento régua de fração e não diretamente sobre o objeto fracionário, resultando no desenvolvimento da Gênese Instrumental.

Dos integrantes que compõem a E.3B, apenas um deles respondeu corretamente está mesma situação-problema aplicada na avaliação diagnóstica. É possível identificar também nas informações levantadas da OI-2, que apesar dos estudantes dessa equipe desenvolverem esquemas de uso, os mesmos não haviam se instrumentado com régua de frações na tarefa que envolvia a fração com significado de operador multiplicativo. O que demonstra a evolução desses esquemas e a capacidade dos estudantes de ação instrumentada com as régua de fração em diferente contexto.

Nas demais equipes não há evidência que comprovem o uso do artefato para a resolução da situação-problema. Os dados indicam que a Equipe 1A não utilizou as régua de frações, mas sim o registro figural contínuo como pode ser compreendido na Figura 75 e no diálogo abaixo.

Figura 75 - Resposta da E.1A para Q3



Fonte: dados da pesquisa (2023)

P: Como vocês chegaram a este resultado? ? (se referindo a resposta apresentada pela equipe e que pode ser analisada na Figura 75).

E1: A gente botou quinze retângulos e separou em cinco partes, daí a gente contou que cada parte deu três retângulos. E como aqui diz três de cinco (aponta para o enunciado da questão), contamos que três de cinco deu nove retângulos.

P: Vocês utilizaram o artefato ou apenas desenharam?

E1: desenhou, porque ficar procurando (referindo-se as peças das régua) dá mais trabalho.

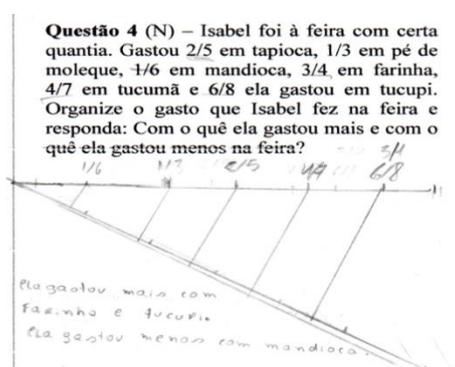
Observa-se através da fala do estudante que o mesmo não fez uso dos artefatos para a resolução do problema. No momento que ocorreu o diálogo a aula já estava finalizando, dessa forma o mais prático para a equipe foi utilizar o registro figural, uma vez que encontrar as peças necessárias e formar a régua para execução da tarefa levaria mais tempo.

Dos integrantes que compõem a E.1A, três deles responderam corretamente a esta situação-problema que foi aplicada na avaliação diagnóstica. E apesar de optarem por não fazer uso dos artefatos para esta tarefa, na OI-2 foi possível identificar que os estudantes se instrumentaram com as régua de frações na tarefa que envolveu a fração como operador multiplicativo.

Número

Na situação em que a fração tem sentido de número foi identificado três respostas incorretas e quatro respostas certas, entre estas apenas a Equipe 5B apresentou números fracionários em ordem correta. Além disso, das quatro equipes que apresentam respostas corretas, três incluía pelo menos um estudante que conseguiu resolver esta situação-problema na avaliação diagnóstica, dentre elas a E.5B. Entretanto, foi observado o uso dos esquadros somente em duas equipes, na E.5B e E.1B.

Figura 76 - Resposta da E5B para Q4



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 77 - Ação Instrumentada da E5B para Q4



Fonte: dados da pesquisa (2023)

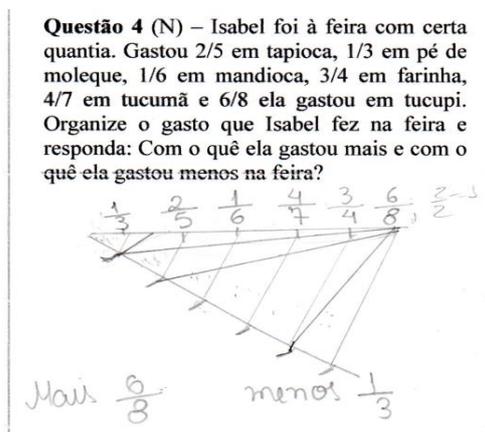
Na Figura 76 é possível analisar a resolução da Equipe 5B, na qual observa-se a construção da reta numérica para a localização das frações. Apesar da equipe apresentar uma localização correta, as informações levantadas na filmagem, bem como as medidas da divisão da reta transversal e a inclinação das retas paralelas indicam que a equipe não utilizou os comandos esperados para o uso dos esquadros nesta situação-problema. Ou seja, ocorreu o uso dos esquadros apenas para a construção das retas (Figura 77), mas não para localizar os números fracionários. Para compreender a diferença dos comandos mobilizados pela equipe e aqueles esperados nesta pesquisa, analisar a Figura 15 no Capítulo 7.

Portanto, conclui-se que não houve a evolução dos esquemas de uso mobilizado pelos estudantes da E.5B, visto que não apresentaram a técnica instrumentada aos esquadros. Logo os esquemas desenvolvidos foram suscetíveis de assimilação, uma vez que ocorre a mobilização de esquemas para a construção de retas, mas não houve acomodação como não ocorreu diversificação de uso dos esquadros. “O processo de acomodação leva à transformação dos esquemas disponíveis, à sua fragmentação e reorganização, que gradualmente produzem novas composições esquemas tendo sua própria zona de assimilação” (Rabardel, Foucher, 2004, s.p., tradução nossa).

O E.Us. pode ser identificado na construção da reta numérica, reta transversal e retas paralelas. No qual constata a interação do tipo I-O, em que ocorre a Instrumentalização dos esquadros pela equipe. A Instrumentalização é um processo de personalização do artefato, é portanto um processo de diferenciação de artefatos, pelo qual cada usuário coloca esse artefato em suas mãos. (Trouche, 2005b, s.p., tradução nossa). E a interação S-Od, posto que, a equipe apresenta uma ordenação das frações que não é resultado dos esquadros, logo, uma relação direta com o objeto matemático.

Assim como na equipe E.5B, a equipe 1B fez o uso do artefato para a resolução da situação-problema, porém não houve a construção do instrumento. Isso pode ser analisado na Figura 78, onde se observa explicitamente a construção da reta numérica com a localização incorreta das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$, assim como a inclinação das retas paralelas e a quantidade de partes em que a reta transversal foi dividida.

Figura 78 - Resposta da E1B para Q4



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 79 - Ação Instrumentada da E1B para Q4

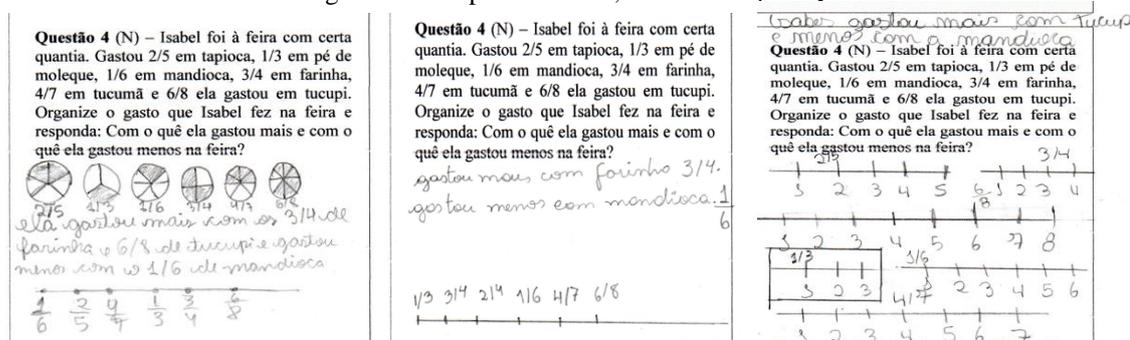


Fonte: dados da pesquisa (2023)

A Figura 80 evidencia o processo de Instrumentalização dos esquadros, onde a equipe 1B atribui a função de construir retas ao artefato, logo o E.U.s. pode ser identificado na construção da reta numérica, reta transversal, na divisão da reta transversal e na construção de retas paralelas. Tais ações constituíram a interação I-O. Já o não uso dos esquadros para a localização das frações implica em uma interação S-Od, constatada na ação direta dos estudantes com a fração.

As demais equipes também não aplicaram a técnica instrumentada para localização das frações na reta numérica. O esquadro foi utilizado apenas para construção de reta como verifica-se na figura abaixo.

Figura 80 - Resposta da E3A, E5A e E4A para Q4



Fonte: dados da pesquisa (2023)

A primeira resposta da Figura 80 ilustra a resposta da Equipe 3A, onde é possível identificar o uso do registro figural contínuo. A equipe apresenta uma resposta correta, onde $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ são as frações com maior valor e $\frac{1}{6}$ o menor. Entretanto, verifica-se que a equipe organiza as frações incorretamente. O mesmo caso pode ser analisado na segunda resposta, esta apresentada pela Equipe 5A. Já na terceira resposta percebe-se que a Equipe 4A também apresenta uma resposta esperada, porém não há registro da ordenação das frações, e não é possível identificar o teorema-em-ação utilizado pela equipe. Dessa forma, não se pode concluir o meio ou o recurso utilizado pelos estudantes para chegar a solução da questão.

Porém, a E.3A e a E.5A incluía pelo menos um estudante que, como mencionado anteriormente, apresentou a resposta correta nesta situação-problema na avaliação diagnóstica. Dos quatro integrantes da E.5A duas estudantes conseguiram instrumentalizar os esquadros. Enquanto que, dos três equipes apenas a equipe E.4A incluía um estudante que se instrumentou na atividade da OI-3, mas como demonstra os resultados, não houve acomodação dos E.A.I. situação-problema da Q4.

Medida

A situação-problema envolvendo a fração com significado de **medida** resultou um total de cinco acertos. Por ser um significa incluído posteriormente a aplicação da avaliação diagnóstica não foi possível uma descrição da análise *a priori* dessa questão. À vista disso, no Quadro 23 pode ser observado o conceito-em-ação e teorema-em-ação verdadeiro que se aplica na resposta correta da situação-problema.

Quadro 23 – Invariantes Operatórios para Q6

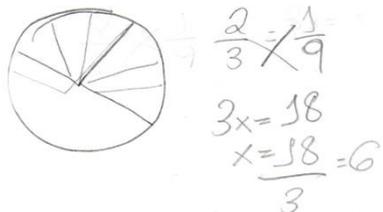
Resposta	Conceito-em-ação	Teorema-em-ação verdadeiro
6	Multiplicação e divisão de números naturais.	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Fonte: elaborado pelos autores (2023)

Os **Invariantes Operatórios** identificados no Quadro 23 podem ser observados na Figura 81, resposta apresentada pela E.1B. Apesar da equipe fazer uso do registro figural e do registro numérico com mudança de representação por tratamento (cálculo), foi analisado o uso dos discos de frações para a resolução da questão como identificado

Figura 81 - Resposta da E1B para Q6

Questão 6 (M) - Paulo deixou $\frac{2}{3}$ de pizza para seus amigos. Sabendo que cada um deve retirar $\frac{1}{9}$ dessa quantidade, de forma que não sobre nenhum pedaço, em quantas partes a pizza pode ser repartida?



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 82 - Ação Instrumentada da E1B para Q6



Fonte: dados da pesquisa (2023)

A ação instrumentada para situação-problema ilustrada na Figura 81 deve resultar da representação das frações pelos discos e na sobreposição das peças. A Figura 82 constata este procedimento adotado pela E.1B, onde a estudante sobrepõe no disco lilás ($\frac{1}{9}$) o disco amarelo ($\frac{1}{3}$). Neste momento, a professora/pesquisadora observou que equipe demonstrava incerteza quanto a quantidade de peças amarelas que deviam ser consideradas, como descrito no diálogo entre a professora e os estudantes.

- P: A peça amarela representa que quantidade?
 E1: essa fração (aponta para a fração $\frac{2}{3}$ do enunciado).
 P: Essa fração significa considerar duas partes de três, certo?
 E1: Sim.
 E2: Então a gente tem que usar só duas dessa? (referindo-se a duas peças amarelas).
 P: Por quê?
 E2: Pra ficar igual a fração.
 E1: Então esse resto eu tiro? (referindo-se as peças lilás que estavam sob a peça amarela que foi retirada).
 E2: tira.

A **possibilidade de inferir** é constatada na mudança de raciocínio, onde a princípio a equipe estava considerando todo o disco amarelo e ao final do diálogo compreende que deviam ser consideradas apenas duas partes. Também é possível interpretar certa **antecipação** pela estudante na frase “*Então a gente usa só duas dessa?*”. Dessa forma, a **Regra de ação** manifestada pela E.1B pode ser identificada como:

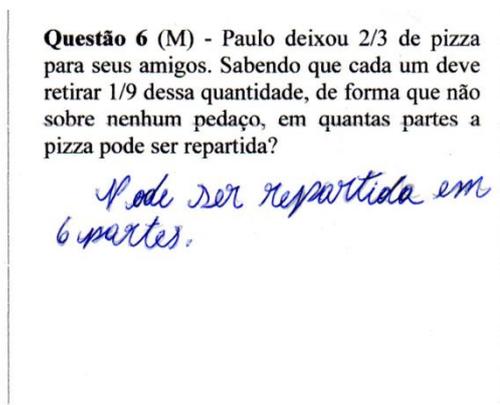
- i. Escolha do artefato;
- ii. Seleção dos discos;
- iii. Representação da fração $\frac{2}{3}$ pelo disco amarelo e da fração $\frac{1}{9}$ pelo disco lilás;
- iv. Sobreposição do disco amarelo no disco lilás;

- v. Correção da representação da $2/3$ por duas peças amarelas;
- vi. Contagem das peças lilás cobertas pelas peças amarelas;
- vii. Conclusão que 6 peças lilás foram cobertas.

As ações instrumentadas indicam a existência da relação I-O, onde o disco representa as frações consideradas na situação-problema, interação que constitui o Processo de Instrumentalização. Quanto que o Processo de Instrumentação pode ser constatado na relação S-I, na qual o disco torna um instrumento ao possibilitar a equipe concluir que a pizza poderá ser repartida em 6 partes. Através do diálogo descrito anteriormente, também é possível constatar a relação S-Os, onde identifica-se a interação das estudantes com a professora/pesquisadora e entre as integrantes da equipe.

Na Equipe 3B também verifica-se a Instrumentação quanto aos discos de frações. Na Figura 83 encontra-se a resposta apresentada pela equipe resultado do desenvolvimento dos E.A.C.I., que indica a mobilização do **teorema-em-ação** verdadeiro. A ação instrumentada da E3B para a resolução da situação-problema envolvendo fração como medida é demonstrada na Figura 84.

Figura 83 - Resposta da E3B para Q6



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Figura 84 - Ação Instrumentada da E3B para Q6



Fonte: dados da pesquisa (2023)

Assim como na equipe anterior que apresentou dúvida quanto a quantidade de peças que deviam ser consideradas, o estudante da E.3B também apresentou esta dúvida, neste caso em relação a quantidade de peças do disco de 9, como é descrito no diálogo a seguir:

E1: Seria dois terços, então teria que pegar dois de três? (referindo-se a duas peças do disco de três) E um nono teria que pegar um de nove é? (referindo a uma peça do disco de nove)

P: Isso.

E1: É porque eu peguei esse um aqui e tirei (referindo a 3/9 do disco de nove). Mais é pra tirar ou ele fica inteiro?

P: Um novo é a quantidade de pizza que cada amigo deve tirar, certo?

E1: sim. Esse aqui (apontando para as peças lilás)

P: Então a quantidade de partes retiradas deve ser considerada em relação a quantidade de bolo. Qual a quantidade de bolo?

E1: Esse aqui, dois terços (apontando para peças amarelas).

P: Agora, você acha que deve manter a todo o disco lilás ou só as partes que cobrem as peças amarelas?

E1: so as partes que cobrem a amarela.

P: Quantas peças são?

E1: seis.

Através da fala do estudante é possível identificar alguns elementos dos esquemas, como **antecipação** na pergunta “*Seria dois terços, então teria que pegar dois de três e um nono teria que pegar um de nove é?*”. Isso porque, o estudante tem como **objetivo** representar as frações com as peças dos discos, mas antes de agir ele busca prever se aquela ação é a correta perguntando para professora/pesquisadora. Para Moreira (2002, p.12) “Um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; pode também esperar certos efeitos ou certos eventos”.

A **possibilidade de inferência** implica na possibilidade de agir “*so as partes que cobrem a amarela*”, ao final do diálogo o estudante sabe que não deve considerar o disco lilás inteiro (disco de 9), resultado na ação final que é a contagem das peças. Tais elementos dos esquemas permitiram que o estudante organizasse suas ações para a resolução da situação. “Os esquemas organizam as condutas do sujeito a partir de um recorte do real em objetos, propriedades e relações de diferentes níveis e recorrendo a tomadas de posição sobre o real (teoremas-em-ato)” (Vergnaud, 1985, p. 10).

- i. Escolha do artefato;
- ii. Seleção dos discos;
- iii. Representação da fração $2/3$ por duas partes do disco amarelo;
- iv. Representação da fração $1/9$ por uma parte do disco lilás;
- v. Sobreposição do disco de lilás em $2/3$ do disco amarelo;
- vi. Exclusão de três partes do disco lilás;
- vii. Contagem das peças lilás sobrepostas nas peças amarelas;
- viii. Conclusão de que seis peças lilás cabem igualmente em duas peças amarelas;

Como pode ser identificada no Quadro 19, nenhuma das duas equipes mencionadas que passaram pelo Processo de Instrumentação na situação-problema da Q6 havia construído

instrumentos na OI-1 para tarefa envolvendo fração como medida. O que demonstra a evolução dos esquemas de uso para E.A.C.I., e a capacidade de ação instrumentada em novas situações.

9. SÍNTESE DOS RESULTADOS

No início do capítulo anterior foi apresentado o diagnóstico dos conhecimentos dos estudantes quanto ao conceito de fração. Posteriormente, seguiram as quatro Orquestrações instrumentais. A primeira objetivou a apropriação dos estudantes ao disco de fração, a segunda à régua de fração, a terceira à apropriação dos esquadros e a última Orquestração Instrumental intencionava a adaptação dos artefatos/instrumentos em situações-problemas envolvendo a fração.

Para sintetizar as informações levantadas e as observações feitas em campo, destacam-se cinco pontos principais de discussão: Resultado dos processos da Gênese Instrumental dos artefatos/instrumentos nas quatro orquestrações; Enquadramento das mediações e relações proporcionadas pela atividade instrumentada; Observação do uso da linguagem como acompanhamento das ações dos estudantes; as Restrições impostas pelo uso dos artefatos/instrumentos nas situações; e o uso das representações semióticas da fração.

1 – Sequência de Orquestração Instrumental

Na OI-1, foi possível identificar que os estudantes conseguiram mobilizar esquemas de uso para o processo de apropriação do artefato. As ações de distribuição de peças, organização e agrupamento das peças quanto a cores e tamanhos permitiram as equipes conhecerem as características e potencialidades dos discos de frações. Entretanto, a maioria dos estudantes não permitiu a evolução desses esquemas, uma vez que resistiram em fazer uso dos artefatos para as demais tarefas. Apenas duas equipes passaram pelo processo de Instrumentação quanto à segunda tarefa.

Na OI-2, foi analisado que os estudantes também se apropriaram das régua de fração e conseguiram, pelo menos em uma tarefa, construir o instrumento das régua. Tanto na primeira orquestração quanto na segunda, o momento de maior socialização e contribuição das equipes ocorreu na primeira tarefa, a qual estava voltada para o processo de Instrumentalização dos artefatos. Nas duas OI, as equipes utilizaram o espaço das carteiras e/ou chão da sala de aula para formar os discos e as régua de frações.

Na OI-3, houve a apropriação dos esquadros pelos estudantes e a aplicação da técnica instrumentada para a localização das frações na reta numérica, ainda que os E.A.I. tenha sido

mobilizados por uma quantidade mínima de estudantes. E apesar da quantidade de tarefas aplicadas na OI-3 ter sido menores que nas orquestrações anteriores e a participação dos estudantes tenha sido maior nesta OI, o uso dos esquadros mostrou-se mais difícil de apropriação pelos estudantes no tempo de ocorrência das intervenções.

Na OI-4 é possível inferir que os estudantes se apropriaram dos discos e réguas de frações, principalmente nas situações em que a fração tem significado de operador multiplicativo e medida. Entretanto, para a situação da fração como número, não houve a construção dos instrumentos dos esquadros, apesar dos estudantes terem mobilizarem esquemas de uso para a construção de retas. Dessa forma, entende-se que não houve a evolução dos E.U.s. ao artefato esquadro por partes das esquipas, uma vez que não houve a adaptação desses esquemas na situação-problema. “Os processos de acomodação e assimilação podem ser longos e difíceis, ou mesmo impossíveis” Béguin e Rabardel (2000, p. 183).

No caso em que os estudantes atribuíram funções aos artefatos nas situações das três primeiras orquestrações, mas não na última, conclui-se que os estudantes passaram apenas pelo primeiro nível de Instrumentalização. Neste nível, o artefato é momentaneamente instrumentalizado, relacionado a uma ação singular diante da tarefa em que esta função busca atender. Neste caso, as atividades dos estudantes foram orientadas apenas para a realização das tarefas das primeiras orquestrações. É o que Rabardel (1995) denomina de Atividade Produtiva, onde as ações se manifestam para atingir os objetivos da situação. Compromisso, intervenções, iniciativas são manifestados em prol do cumprimento da atividade. Dessa forma, a temporalidade da Atividade Produtiva é de curto a médio prazo. O que justifica a competência dos estudantes nas situações das três primeiras OI e a ausência destas habilidades na última orquestração.

Enquanto que no segundo nível da Instrumentalização “[...] a função adquirida é mantida a longo prazo como uma propriedade do artefato em relação a uma classe de ações, objetos de atividade e situações. A instrumentalização é duradoura, senão permanente” (Rabardel, 1994, p.114, tradução nossa). Neste caso, a atividade dos estudantes além de se orientarem para a Atividade Produtiva, ela perpassou pela Atividade Construtiva, sendo esta referente a manutenção, o aumento e reconfiguração dos recursos do sujeito para a Atividade Produtiva. Trata-se da evolução de esquemas, enriquecimento do repertório dos esquemas capazes de promover meios e condições de ação para atividades futuras. A temporalidade da atividade construtiva é de médio a longo prazo, do qual permite o desenvolvimento do sujeito,

da personalidade e profissionalismo, ou seja, da própria Gênese Instrumental (Rabardel, 1995).

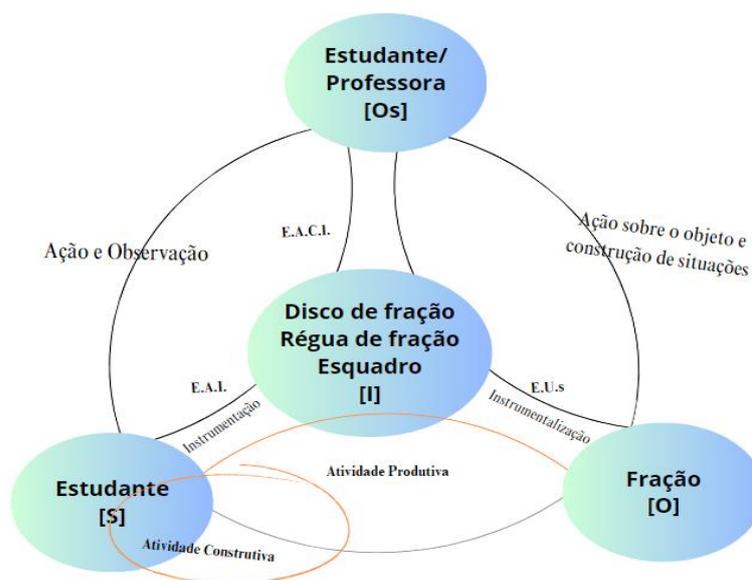
Os indícios da ocorrência da atividade construtiva nas primeiras orquestrações podem ser analisados no desempenho dos estudantes na OI-4, onde estudantes que somente haviam instrumentalizado os discos de fração na OI-1 demonstraram poder de agir nas situações-problemas da fração como quociente e medida, e estudantes que havia se instrumentado com as régua de frações na OI-2 conseguiram agir na situação-problema envolvendo a fração como operador multiplicativo com uso deste instrumento. Essa competência que os estudantes apresentaram em diferentes situações referentes a diferentes OIs é resultado dos E.U. desenvolvidos nas Atividades Mediadas por Instrumentos, que possibilitaram o desenvolvimento da Gênese Instrumental dos discos e régua de frações.

2 – Atividade Mediada por Instrumento

As quatro Orquestrações Instrumentais promoveram atividade mediadas que poderiam ser esquematizadas para demonstração das relações existentes entre os quatro polos (sujeito-instrumento-objeto-sujeito). No entanto, por limitações de pesquisa, optou-se por fazer a representação do modelo SACI da atividade desenvolvida na OI-4, na qual foram trabalhadas situações-problemas envolvendo a fração com diferentes significados. Para cada questão, os estudantes optaram por usar determinado artefato, mas como foi analisado anteriormente, para situação-problema em que a fração tem significado de parte-todo, não há evidências do uso de artefato por nenhuma equipe.

As relações identificadas não se referem a uma única equipe, uma vez que para cada situação-problema foi identificadas ações instrumentalizadas de diferentes equipes. Dessa forma, a apresentação do modelo SACI dos artefatos/instrumentos na Figura 85 demonstra as interações que foram propícias de observação e que garantem a potencialidades dos discos de fração e régua de fração para promoção de atividades mediadas por instrumentos.

Figura 85 - Modelo SACI referente a atividade da OI-4



Fonte: elaborado pelos autores (2023)

Quadro 24 – Interações entre os polos referentes ao disco de fração nas situações-problemas da fração como quociente e medida

S-Od	Interação direta estudante e objeto
I-O	Interação do instrumento disco de fração e objeto
S-Os	Interação estudante e estudante
S-Os	Interação estudante e professora/pesquisadora
S-I	Interação estudante e o instrumento
S-Om	Interação estudante e objeto mediada pelo instrumento disco de fração
S-Om	Interação estudante e objeto mediada pelo professor e instrumento

Fonte: elaborado pelos autores (2023)

Quadro 25 - Interações entre os polos referente a régua de fração na situação-problema da fração como operador multiplicativo

S-Od	Interação direta estudante e objeto
I-O	Interação do instrumento disco de fração e objeto
S-Os	Interação estudante e estudante
S-Os	Interação estudante e professora/pesquisadora
S-I	Interação estudante e o instrumento
S-Om	Interação estudante e objeto mediada pelo instrumento disco de fração
S-Om	Interação estudante e objeto mediada pelo professor e instrumento

Fonte: elaborado pelos autores (2023)

Quadro 26 - Interação entre os polos referente ao esquadro na situação-problema da fração como número

S-Od	Interação direta estudante e objeto
I-O	Interação do instrumento e objeto
S-Os	Interação estudante e estudante
S-Os	Interação estudante e professora/pesquisadora

Fonte: elaborado pelos autores (2023)

Conforme observado no Quadro 26, o artefato esquadro foi o que gerou menos interações entre os polos, uma vez que os estudantes não elaboraram instrumentos na situação-problema da fração como número.

A relação dos estudantes com a professora/pesquisadora ocorreu principalmente por meio de observação, e quando necessário, as interações se deram por meio de instruções e orientações. Por meio do modelo SACI, também é possível observar a existência da Gênese Instrumental da Professora/pesquisadora. Isso porque, embora o foco de análise deste estudo seja nas ações e mediações dos estudantes, isso não exclui a atividade produtiva e construtiva que a professora/pesquisadora realizou para compreender a viabilidade desses instrumentos diante da variedade de situações envolvendo a fração, como pode ser identificado nas demonstrações das ações instrumentadas apresentadas no Capítulo 7. Conforme argumentado por Rabardel (1999), a utilização didática de artefatos implica que o professor antecipe e gere o seu próprio desenvolvimento instrumental para controle das situações de ensino, ou seja, no sentido de construir instrumentos para sua prática docente.

3 – Atividade da linguagem na ação

Como pontuado, as análises das informações foram conduzidas com dois enfoques: os componentes dos esquemas de Vergnaud e modelo SACI de Rabardel. Em que a mediação existente entre os quatro polos pode ser constatada através das ações instrumentadas, registrada por fotografias e filmagens, bem como os componentes dos esquemas. Estes últimos, por sua vez, contêm elementos que só podem ser identificados quando expressos pela linguagem e, em uma atividade coletiva como essa, a partir do registro de diálogos entre os estudantes. Porém, nas três primeiras Orquestrações, em relação aos componentes dos esquemas, somente foi possível a análise das regras de ações.

Acredita-se que a falta de diálogo nos registros de videogravação das três primeiras orquestrações se deve à pouca colaboração entre os integrantes das equipes, como mencionado anteriormente, onde a participação ativa foi observada em poucos estudantes. Sendo esses estudantes os que possuíam conhecimento sobre frações, eles se encarregavam de

responder às questões, não sentindo a necessidade de externalizar seu raciocínio ou dialogar informações com os colegas, uma vez que suas ações eram automáticas. Como afirmado por Vergnaud (1993), a atividade de linguagem como acompanhamento das ações ocorre apenas quando o sujeito precisa planejar e controlar suas ações em situações não dominadas. Isso também justifica o fato de ter ocorrido uma maior interação entre os estudantes na última OI, já que eles foram divididos em grupos menores. Consequentemente, uma vez que o estudante que possuía conhecimento sobre frações não estava presente em determinado grupo, a responsabilidade pela resolução das situações-problema recaiu sobre os demais, resultando em maior diálogo entre as equipes devido à necessidade da atividade de linguagem para representar a relação das ações e situações.

4 – Restrições e Atividade necessária

De acordo com Rabardel (1995), todo instrumento implica restrições, as quais o sujeito deve gerenciar diante da singularidade de cada atividade. Duas restrições relacionadas aos discos e régua de frações podem ser identificadas: A primeira refere-se à quantidade de peças, pois a possibilidade de resolução para uma situação-problema ocorre quando há uma unidade inserida dentro do limite da quantidade de peças. Por exemplo, o pacote de discos de frações entregue aos estudantes continha 12 discos, e nas régua de frações eram um total de 16 régua, logo, apenas era possível incluir no máximo 16 unidades nas questões envolvendo quantidade discreta ou contínua para que fosse possível a resolução com os artefatos.

A segunda restrição dos discos está relacionada às formas geométricas das peças, pois, para que fosse possível a associação dos artefatos nas situações-problemas, optou-se por incluir objetos com os mesmos formatos com os quais os estudantes estivessem familiarizados, como pizza, bolo, barra de chocolate, entre outros. Dessa forma, a própria estrutura do artefato restringiu as ações dos estudantes, bem como limitou as situações em que a fração estava incluída.

Os esquadros por sua vez, restringem as ações dos estudantes ao passo que implicam em técnica instrumentada específica para a localização da fração na reta numérica. Logo, as sequências de ações são pré-estabelecidas para que os estudantes sejam capazes de fazer uso desse instrumento neste tipo de situação. Para Rabardel (1995, p.269, tradução nossa) “quando o sujeito associa artefatos à sua ação, produz uma reorganização da ação que está relacionada a uma variação na aparência dos campos de ações possíveis, mas ao mesmo tempo, como analisamos, com a ação exigida pela gestão das diversas formas de restrições”. O que por conjectura, explicaria a dificuldade e resistência do uso dos esquadros, pois a

estruturação dessas ações limitou o campo de ações possíveis dos estudantes e que consequentemente resultou em restrições dos seus modos de ação.

5- Atividade de representação semiótica da fração

Além de que, os esquadros não apresentam interação direta com a fração como os discos e as réguas de fração, mas sim uma relação mediada por outro instrumento semiótico, a reta numérica. Sendo assim, constitui na coordenação de três tipos de registro, do concreto para o gráfico, e do gráfico para o numérico, resultando em uma maior dificuldade para atividade cognitiva dos estudantes.

Observou-se também uma necessidade quanto ao uso do cálculo numérico para representar a fração, mesmo em casos que os estudantes sentiam dificuldade de resolução, como na situação da fração como medida, operador multiplicativo e número. Neste último em especial, os estudantes prefeririam analisar os numeradores e denominadores ou realizar a divisão para organizar as frações na reta numérica, o que se tornou obstáculo para a construção de esquemas de utilização para esses estudantes.

Essa resistência ao uso de outros registros que não o registro numérico, demonstra a concepção dos estudantes sobre a matemática intrinsecamente ligada a fórmulas e cálculos. Mas como afirma Paulos (1993, p. 41) “a matemática não é sobre cálculos [...] A matemática é pensar — sobre números e probabilidades, acerca de relação e lógica, ou sobre gráficos e variações—, porém, acima de tudo, pensar”.

Dessa forma, na perspectiva de Duval (2018) nenhuma representação deve ser manifestada de forma isolada, pois a coordenação de diferentes registros para um mesmo objeto matemático permite diversas tarefas cognitivas, centradas em objetos, propriedades e algoritmos, bem como nas formas de ver e de raciocinar.

10. CRONOGRAMA

Atividade	Jan/22	Fev/22	Mar/22	Abr/22	Mai/22	Jun/22	Jul/22	Ago/22	Set/22	Out/22	Nov/22	Dez/22
Discussão teórica e determinação dos objetivos			x	x								
Identificação das fontes				x	x							
Elaboração do projeto – escrita teórica				x	x	x	x	x	x	x		
Elaboração do projeto – escrita metodológica										x	x	x
Atividade	Jan/23	Fev/23	Mar/23	Abr/23	Mai/23	Jun/23	Jul/23	Ago/23	Set/23	Out/23	Nov/23	Dez/23
Elaboração do projeto – escrita metodológica	x	x										
Elaboração da orquestração instrumental	x	x										
CEP			x									
Defesa do projeto de pesquisa				x								
Reajuste no projeto e na Sequência de Orquestração Instrumental					x	x	x					
Execução das Orquestrações Instrumentais								x	x			
Análise dos dados									x	x	x	x
Escrita da Dissertação									x	x	x	x
Atividade	Jan/24	Fev/24	Mar/24	Abr/24	Mai/24	Jun/24	Jul/24	Ago/24	Set/24	Out/24	Nov/24	Dez/24
Escrita da Dissertação	x	x										
Defesa da Dissertação			x									

Fonte: elaborado pelos autores (2023)

11. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Á luz da Teoria da Orquestração Instrumental, uma sequência de Orquestração foi planejada, ajustada e executada para favorecer a Gênese Instrumental dos discos de fração, régua de fração e dos esquadros. Esta pesquisa buscou a integração dos três artefatos para atender a uma classe de situação, ou seja, para a construção de instrumentos capazes de atender as situações em que a fração tem significado de parte-todo, quociente, operador multiplicativo, medida e número. Portanto, o desenvolvimento da Gênese Instrumental abrangeu não apenas um instrumento, mas a construção de sistemas de instrumentos.

Em consonância a isto, o objetivo deste estudo foi analisar o processo de Gênese Instrumental dos estudantes do 9º ano do ensino fundamental em situações que envolvem o conceito de fração, com suporte dos artefatos régua de frações, discos de frações e esquadros.

A partir das informações apresentadas é possível inferir que as Orquestrações permitiram a Gênese Instrumental dos três artefatos, mas os resultados apontam para necessidade de ajustes e mudanças para situações que envolvem o uso dos esquadros, uma vez que os estudantes não apresentaram bom desempenho nas atividades com este instrumento.

Com aporte teórico da Abordagem Instrumental foi possível descrever os Processos de Instrumentação e Instrumentalização através das ações dos participantes. E no qual o Modelo SACI mostrou-se pertinente para caracterizar os processos nas atividades coletivas instrumentadas, constituindo subsídios para analisar a transformação dos artefatos em instrumentos em diferentes situações.

A transformação do disco de fração, régua de fração e esquadro em entidade mista (artefato + esquemas de utilização) como descrita por Rabardel (1995), implica em inferir os esquemas dos estudantes a partir de suas condutas, no qual foi possível através dos componentes dos esquemas de Vergnaud. Em virtude disso, a TCC mostrou-se fundamental não apenas para construção da classe de situações da fração, mas também para compreender os conhecimentos implícitos e explícitos em operação.

Assim, conclui-se que Gênese Instrumental dos estudantes do 9º ano do ensino fundamental se dá em médio ao longo prazo, pois, apesar de que instrumentos tenham sido desenvolvidos eles não atenderam todas as situações que dão sentido ao conceito de fração na temporalidade das Intervenções. Para Trouche (2003), a “Gênese” não se refere apenas ao início, mas o desenvolvimento do instrumento. Logo, quanto maior variabilidade de situações em que o estudante enfrenta maior torna-se o seu repertório de esquemas, possibilitando

competência para agir em diferentes situações, uma vez que seu esquema evolui conforma a variância e adaptabilidade.

Como está pesquisa dialoga principalmente com duas teorias cognitivas, uma que se concentra nos fatos psicológicos da aprendizagem por conceito, enquanto a outra nos fatos técnicos-psicológicos da aprendizagem por instrumento é possível afirma que “A temporalidade da Conceitualização acontece na mesma temporalidade da Gênese Instrumental”. Para Trouche, qualquer processo de Instrumentação é um processo de conceitualização uma vez que a gênese se dá justamente na construção de esquemas, sendo estes, portador dos invariantes, o conhecimento operacional.

Entretanto, é importante salientar que os sistemas de instrumentos construídos pelos estudantes não necessariamente resultaram na aquisição do conceito de fração. Visto que a apropriação do instrumento é um processo progressivo da Gênese Instrumental, que depende das competências complexas dos estudantes, logo, se a conceitualização está subjacente à ação, o processo de apropriação do conceito de fração dos participantes também está em construção, uma vez que depende das situações que eles progressivamente ainda devem dominar. Partilhando da perspectiva de Vergnaud, em que a formação de um conceito acontece em um longo período de tempo.

Mas é importante compreender que o tempo da aprendizagem sobre um conceito, ou o tempo que o estudante é capaz de transformar um artefato em instrumento, não depende apenas do planejamento de um ambiente frutífero a isso, mas principalmente das competências e da disposição do estudante em querer aprender. Muitos dos instrumentos construídos dos discos de frações, régua de frações e esquadros não apresentaram evolução e adaptação nas situações aplicadas na última orquestração, em geral, devido à resistência do uso dos artefatos.

Por último, é relevante apontar as principais dificuldades enfrentadas no decorrer das intervenções no campo da pesquisa, pois muitas delas refletiram nos resultados que foram apresentados. Além disso, acredita-se que ao tomar conhecimento dessas dificuldades outras pesquisas poderão antecipar decisões a fim de evitá-las, buscando alcançar melhores resultados, no sentido de desenvolver a Gênese Instrumental em maior número de estudantes possível.

A primeira dificuldade diz respeito ao tempo, dado que, as intervenções foram realizadas em um total de 8 aulas de 45 minutos cada, sendo que cada artefato foi trabalhado em duas aulas. Porém, os resultados e as observações feitas evidenciam que dois tempos de

aulas não são suficientes para garantir o desenvolvimento instrumental para a maioria dos estudantes. Todavia, essa questão pode estar associada ao segundo ponto de dificuldade enfrentado na pesquisa: o quantitativo dos participantes. Isso porque, cada encontro contou com a participação de 40 estudantes, o que, embora represente a média de alunos que os professores enfrentam diariamente em sala de aula, tornou-se uma dificuldade a ser enfrentada pela professora/pesquisadora, uma vez que a mesma buscava se dividir nessas duas funções, ora tentando tirar as dúvidas dos estudantes e lidar com comportamentos indisciplinados, que resultaram no desfoco em certos momentos da investigação; ora no registro dos dados, em observação e gravação.

Ressalta-se que, a Gênese Instrumental é um processo que demanda atenção e observação do pesquisador, uma vez que seus indícios se manifestam nos comportamentos e interações durante o momento de resolução das situações matemáticas. Dessa maneira, uma quantidade de 40 estudantes para uma pesquisadora no tempo de 45 minutos, tornou-se um obstáculo no decorrer da investigação, pois influenciou no controle do ambiente de pesquisa, ao passo que a professora/pesquisadora não conseguiu atender todas as dúvidas dos estudantes ou mesmo orientá-lo adequadamente durante cada processo. O fato de que a maioria dos estudantes constantemente esperava o comando da professora para a execução das tarefas também dificultava o andamento das atividades.

A terceira questão a ser destacada está relacionada ao uso do artefato, dado que, como já mencionado, nas atividades realizadas para o Processo de Instrumentação dos discos e régua de frações houve pouca participação dos estudantes, aqueles que buscavam resolver as situações tentavam ao máximo evitar usar os artefatos. Um dos motivos pode estar relacionado ao espaço que os mesmos tinham disponível para espalhar as peças, usando tanto o espaço da mesa das carteiras quanto o chão da sala, o que dificultava o manuseio das peças. Desta maneira os estudantes consideravam que o mais prático era fazer uso do cálculo.

Pelo exposto, acredita-se que se as dificuldades apontadas pudessem ser previstas este trabalho poderia ter alcançado resultados mais precisos, considerando a quantidade de elementos de análise, de orquestrações executadas, de artefatos/instrumentos integrados e de participantes da pesquisa. Portanto, compreende-se que este estudo deixa uma lacuna, ao passo que não é possível afirmar a ocorrência da Gênese Instrumental individual dos participantes. Para que isso fosse possível seria necessária a aplicação da avaliação final individual, mas por limite de tempo (para realização de mais intervenções) não foi possível nesta pesquisa. Contudo, esta lacuna não descredibiliza as evidências aqui expostas, as quais

foram explanadas ao rigor e transparência, bem como, congruentes com os objetivos da investigação. As informações discutidas mostram-se essenciais para pesquisas em desenvolvimento, não apenas no âmbito da educação matemática mais em qualquer cenário de ensino e aprendizagem que aborde os conceitos científicos em uma perspectiva técnico-cognitiva.

Em consoante a isto, algumas recomendações podem ser consideradas a futuras pesquisas. Levar em conta o nível de estágio de desenvolvimento dos participantes é essencial para a escolha do artefato, ou vice-versa, pois o material concreto para os estudantes na fase da adolescência não se torna tão atrativo, em vista de que a maioria deles já se encontra no que Piaget denomina de estágio de operatório-formal ou para Johannot (1947) onde o raciocínio matemático encontra-se no nível de representação gráfica. Por conseguinte, se viável, recomenda-se a integração de tecnologia digital que permitem a representação da fração em uma variedade de situações.

Outra sugestão é considerar uma quantidade mínima de participantes, principalmente se forem do Ensino Fundamental e/ou Médio, em razão de que, permitirá um maior controle do ambiente de pesquisa ao investigador, tanto para instruções quanto para os registros de dados diante a atividade instrumentada dos estudantes; ou que a quantidade de participante seja proporcional à quantidade de pesquisadores.

Este projeto trata-se do que Trouche (2003) denomina de recurso educacional, capaz de promover uma dialogicidade entre pesquisadores, professores e estudantes em um processo contínuo de desenvolvimento, ensino e aprendizagem. Pois não se trata de apresentar um protótipo em sua versão final, mais de possibilitar a abertura de um sistema de design colaborativo de um recurso matemático, onde através da relação dialética entre esses três atores criam-se instrumentos matemáticos para prática de sala de aula.

Assim como todo instrumento evolui pela história das ações do estudante, a Orquestração Instrumental também evolui conforme a sua execução.

Em suma, acredita-se que as Sequências de Orquestrações Instrumentais aqui apresentadas se bem gerenciadas permitem a Gênese Instrumental dos discos de frações, régua de frações e esquadros para o processo de conceitualização da fração. As OI's podem ser adotadas, expandidas e contextualizadas em diferentes cenários educacionais que buscam assim como o presente estudo, a melhoria do processo de ensinar e aprender matemática.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, S. V. **A Gênese Instrumental na interação com GeoGebra: proposta de uma oficina para professores de matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.
- AMARAL, C. A. N. **Conceito de fração pela perspectiva de medição: uma abordagem baseada no 4a-instructional modelo utilizando as barras de cuisenaire e conduzida por um lesson study.** Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2021.
- AMORIM, M. E.; etcheverria, T. C.; OLIVEIRA, M. R. S. de. Fração com o Significado de Operador Multiplicativo: Aprendizagem e Ensino. **JIEEM**, v.12, n.2, p. 199-206, 2019. DOI: <http://dx.doi.org/10.17921/2176-5634.2019v12n2p199-206>.
- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico: Contribuição para uma psicanálise do conhecimento.** Tradução Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BARROS, R. A.; BOAVENTURA, T. S. Desenvolvimento dos Campos Conceituais Aditivos e Multiplicativos no Ensino dos Números Negativos: Uma análise crítica de livros didáticos. **Perspectiva da Educação Matemática**, v.12, nº 28, 2019.
- BALL, D.L. Halves, pieces and twos: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. in Carpenter, T.P.; Fennema, E.; Romberg, T.A. (eds.). **Rational Numbers: An Integration of Research.** Lawrence Erlbaum, Hillsdale, p. 157–195, 1993.
- BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista.** Curitiba: Editora UFPR, p. 157-171, 2011.
- BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. Compreender o Trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Olline.** V. 9, n. 1, 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é a base.** Brasília: MEC, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Ensino de 5ª a 8ª Séries. Brasília-DF: MEC/SEF, 1998.
- BUSSOLOTTO, D. **Gênese Instrumental do GeoGebra 3D: um estudo no Ensino Médio Normal/Magistério.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.
- CALDEIRA, M. F. T. H. S. A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática. **Actas do X Congresso Internacional Galego Português de Psicopedagogia.** Braga: Universidade do Minho, 2009.

CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educ. Mat. Pesqui.**, São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 125-136, 2006.

CAMPOS, T. M. M. et. al. Uso de situações quocientes no ensino de frações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática - JIEEM**. V.7 (3), 2014.

CASTRO, F. C. de; BARBOSA, H. H. J. Quantidades intensivas: análise de uma intervenção com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. **Ensino e Multidisciplinaridade**, v. 6, n. 2, p. 1-20, 2020.

CAVALCANTI, E. M.; GUIMARÃES, G.L. O significado de frações em livros didáticos das Séries Iniciais. **Anais do 2º SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Recife** – PE, de 28 de julho a 01 de agosto de 2008.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R., MORETTI, M. T. Reflexões em torno da representação semiótica na produção de conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. **Educ. Mat. Pesqui.**, São Paulo, v. 9, n. 2, pp. 181-203, 2007.

CONTAMINES, j.; GEORGE, S.; HOTTE, R. Approche instrumentale des banques de ressources éducatives. **Sciences et Techniques Educatives**, 10, hors série, p. 157-178, 2003.

CRUZ, M. S. S. **Resolvendo adição de fração através de estimativas: um estudo exploratório**. 2003. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva). Centro de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.

DRIJVERS, P. et. al. The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, 2010.

DUVAL, R Como analisar a questão crucial da Compreensão em matemática?. Tradução Méricles T. Moretti. **REVEMAT: R. Eletr. de Edu. Matem.**, Florianópolis (SC), v.13, n.2, p.1-27, 2018.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT: R. Eletr. de Edu. Matem.** Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

EISERMANN, L. I.; SCHULZ, J. A. T.; FUCHS, M. J. Teoria dos Campos Conceituais: integrando Aritmética, Geometria e Álgebra no Ensino de Frações. **Revista DYNAMIS. FURB, BLUMENAU**, v.27, n.1, p. 42 – 58, 2021.

FERRAZ; A. A.; TASSINARI, R. P. **Como é possível o conhecimento matemático? As estruturas lógico-matemáticas a partir da Epistemologia Genética**. 1ª ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2015.

FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paraense de Educação Matemática (RPEM)**. Campo Mourão, Pr, v.2, n.3, jul-dez. 2013.

GARCEZ, A.; DUARTE, R.; EISENBERG, Z. Produção e análise de videogravações em pesquisas qualitativas. *Rev. Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 37, n.2, p. 249-262, mai./ago. 2011.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GITIRANA, V.; LUCENA, R. Orquestração instrumental on-line: um modelo pensado a partir do ensino remoto. *Revista Educação, Matemática e Pesquisa – EPM*, v.23, n. 3, p. 362-398. São Paulo, 2021.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. v. 1, 3ª ed. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2002.

HENRIQUES, Afonso. Abordagem Instrumental e aplicações. **Educação Matemática Pesquisa - EMP**, São Paulo, v.23, n. 3, p. 247-280, 2021.

HERIQUES, A.; ALMOULOU, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. *Rev. Ciência & Educação*, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

JUNIOR, I. P. S. **O Ensino de Frações para o 6º ano do Ensino Fundamental utilizando a resolução de problemas a partir da visão de Vergnaud**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

KIERAN, T. Personal Knowledge of Rational Numbers: its Intuitive and Formal Development. In: HIEBERT, J. e BEHR, M. **Number Concepts and Operations in Middle Grades**. Hillsdale, New Jersey, Erlbaum, 1988.

LORENZATO, S. **Educação Infantil e Percepção Matemática**. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. **Para Aprender Matemática**. 3ª ed. rev. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2010.

LUCENA, R.; GITIRANA, V.; TROUCHE, L. O ensino de matemática com a integração de recursos digitais: um olhar sob à luz da Orquestração Instrumental. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 5, n. 3, p.238-261, 2018.

LUCENA, R. Orquestrações Instrumentais como pivot da Formação Docente: vivência e reflexão teórico-prática na Metaorquestração Instrumental. In: IGLIORI, S. B. C. **Compreender o trabalho dos professores brasileiros do ensino básico: uma abordagem pelos recursos**. São Paulo : Blucher, 2021.

MARANHÃO, M. C. S. A. IGLIORI, S. B. C. Registros de Representação e Números Racionais. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **A aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: 2003.

MEIRA, L. Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. **Temas de Psicologia**, Ribeirão Preto-SP, v.2, n. 3, p. 59-71, 1994.

MERLINE, V. L. **O Conceito de Fração em seus Diferentes Significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª a 6ª série do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2005.

MINAYO, M. C. S., et. al. **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1994.

MOUTINHO, L. V. **Frações e seus diferentes significados: um estudo com alunos da 4ª e 8ª série do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2005.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **rev. Investigações em Ensino de Ciências**. Porto Alegre: Rio Grande do Sul, v 7 (1), p.7-29, 2002.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

MUNIZ, M.; GITIRANA, V.; LUCENA, R. Orquestração instrumental on-line para a aprendizagem de função no contexto de ensino remoto. **VI Congresso sobre Tecnologias na Educação**, 24-27 de agosto de 2021.

NETO, A. L. X. **Um estudo da Gênese Instrumental para função de uma variável real com várias sentenças**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

NUNES, T. et al. **Educação Matemática 1: números e operações numéricas**. São Paulo: Cortez, 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Criança fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T.; BRYANT, P. Paper 3: **Understanding Rational Numbers and Intensive Quantities. Key Understandings in Mathematics Learning**. ed. Nuffield Foundation, London, 2018. Available in: <<https://www.nuffieldfoundation.org/project/key-understandings-in-mathematics-learning>> Access at: 17/05/2022.

NUNES, T.; BRYANT, P. The effect of situations on children's understanding of fractions. **British Society for Research on the Learning of Mathematics**, jun. 2003.

OLIVEIRA, R. G. Número Racional com o Significado de Fração: aspecto relacional, ordenação, equivalência e representações. **Revista Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, SP, v. 18, 2021, pp. 1-19 – e021025, 2021. DOI: [10.37001/remat25269062v18id521](https://doi.org/10.37001/remat25269062v18id521).

OLIVEIRA, E. A. M. Pragmatismo e o Caráter Abstrato do Objeto Matemático nas Regulae ad Directionem Ingenii. **Cad. Hist. Fil. Ci.** Campinas, Série 3, v. 19, n. 1, p. 89-114, jan.-jun, 2009.

PARIS. Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM). **Hommages à Pierre Rabardel**. Société d'Ergonomie de Langue Française (SELF), 2021. Disponível em: <<https://ergonomie-self.org/wp-content/uploads/2021/10/hommages-pierre-rabardel.pdf>> Acesso em: 5 de jan. de 2013.

PAULOS, J. A. **Mas aliá de los números**. Barcelona: Tusquets Editores, 1993.

PEREIRA, J. W.; SILVA, A. D. P. R.; SANTANA, W. M. G. de;. A abordagem instrumental e a apropriação do artefato tecnológico Apprenti Géomètre 2 em uma situação proposta. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

PINHEIRO, E. M.; KAKEHASKI, T. Y.; ANGELO, M. O uso de filmagem em pesquisas qualitativas. **Rev. Latino-AM Enfermagem**, v.13, nº 5, Ribeirão Preto, 2005.

RABARDEL, P; BÉGUIN, P. Designing for instrument-mediated activity. **Conservatoire National des arts et métiers**. Paris, 2000.

RABARDEL, P.; FOLCHER V. Hommes, Artefacts, Activités : perspective instrumentale. In P. Falzon (Eds) **L 'ergonomie**, PUF, 251-268, 2004.

RABARDEL, P. Instrument, activité et développement du pouvoir d'agir. in LORINO, P.; TEULIER, R. **Entre connaissance et organisation : l'activité collective La Découverte Recherches**, p. 251-265, 2005.

RABARDEL, P. **Los Hombres y las Tecnologías: visión cognitiva de los instrumentos cognitivos**. Tradución de Martin Acosta Gempeler. Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2011.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains**. Armand Colin, p.239, 1995.

RABARDEL, P. Principes pour la constitution d'une didactique professionnelle. In: MERRI, M. **Activité Humaine ET Conceptualisation**. Toulouse: Presses Universitaires du Midi, 2007 (gerado em 02 de março de 2020). Disponível na Internet: <<http://books.openedition.org/pumi/5920>>

ROGALSKI, J.; ROBERT, A. Gérard Vergnaud (1933 - 2021). **Revue française de pédagogie**. nº 213, p. 145 - 148, 2021.

SAMPAIO, A. C. P. H.; MARREY, A. G. O desenvolvimento do significado da relação partetodo dentro dos números racionais positivos, tendo como referência a teoria dos Campos Conceituais. **Revista Veras**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 105-117, 2020. DOI: 10.14212/veras.vol10.n1.ano2020.art390.

SANTANA, L. E. L. **A Conversão entre Representações Semióticas: uma análise no domínio das frações à luz de Duval e Vergnaud**. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

SANTANA, L. E. L. **Saberes conceituais e didáticos de pedagogos em formação, acerca de fração**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2012.

SANTOS, K. S. et. al. O uso de triangulação múltipla como estratégia de validação em um estudo qualitativo. **Rev. Ciência e Saúde Coletiva**, 25 (2), p.655-664, 2020.

SANTOS, R. dos.; FONSECA, S. S. da. Dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em Aprender Fração. **RIS – Revista Insignare Scientia**, vol. 2, n.1, 2019.

SALUSTIANO, F. R. F. **Uma Análise das Dificuldades que Permeiam o Processo de Aprendizagem de Estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola do Município de Caruaru em relação à fração**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019.

SCALA, L. **Notas de Álgebra 1**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2018. Disponível em:<<http://www.im.ufrj.br/~lucascal/ensino/20211/algebra2/notasalgebra1.pdf>>. Acesso em: 06 de jun. de 2022.

SILLER, T. E. **Os Teoremas de Wedderburn e de Jacobson sobre comutatividade**. Monografia (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2018.

SILVA M. P. da. **Resoluções de Problemas de Fração de crianças do 3º ano do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019a.

SILVA, J. A. da; SILVA, M. J. da; ALVES, S. C. **A aplicação da avaliação diagnóstica no ambiente escolar: um olhar reflexivo**. Monografia (Graduação em Pedagogia) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa: UFPB, 2014.

SILVA, R. A. da. **O Raciocínio Proporcional e o Uso do Excel: Um olhar para a Gênese Instrumental**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019b.

SILVA, S. de C. R. da; SCHIRLO, A. C. Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel: Reflexões para o ensino de Física ante a nova realidade social. **Imagens da Educação**, Maringá, v. 4, n. 1, p.36-42, 2014.

TAQUETTE, S. R.; BORGES, L. **Pesquisa Qualitativa para Todos**. Rio de Janeiro: Vozes, 2020.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa-ação**. 18ª ed. São Paulo: Cortez, 2011.

TROUCHE, L. An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In: **The didactical challenge of symbolic calculators**. Springer, Boston, MA, p. 137-162, 2005a.

TROUCHE, L. Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. **Le calcul sous toutes ses formes, Inspection générale de mathématiques**, Saint-Flour, France, 2005b.

TROUCHE, L.. **Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations**. 2003.

TROUCHE, L. **Curriculum Vitae**. Plataforma Academia, 2020. Disponível em: <<https://ens-lyon.academia.edu/LucTrouche/CurriculumVitae>>. Acesso em: 8 de jan. 2023.

TROUCHE, L. Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, 9, 281–307, 2004.

TROUCHE, L.; Drijvers, P. Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. **Teaching Mathematics and its Applications**, Oxford University Press (OUP): Policy A - Oxford Open Option A, 2014.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Evolução das relações entre a Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e a Didática da Matemática**. Editora: Instituto Paiget. Lisboa, 1996a.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade : problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Tradução Maria Lucia Faria Moro. Curitiba : Ed. da UFPR, 2009b.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels**. Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, no. S6, pp. 47-50, 1989. Disponível em: http://www.numdam.org/item/PSMIR_1989__S6_47_0/

VERGNAUD, G. **La théorie de champs conceptuels. Recherches en Didactique de Mathématiques**. v. 10, n.2.3, p. 133-170. Pensée Sauvage: Grenoble, França, 1990.

VERGNAUD, G. **Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação**. Tradução de Ana Franchi e Dione Luchesi de Carvalho. Revista Psychologie Française, n. 30, 1985.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press Inc., p. 127-174, 1983b.

VERGNAUD, G. O que aprender? In: Bittar, M.; Muniz, A. C (Orgs). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais** (1ª edição). Curitiba: Editora CVR. 2009a.

VERGNAUD, G. Quelques problèmes théoriques de la didactique a propos d'un exemple: les structures additives. **Atelier International d'Eté: Recherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures**, França, 26 de junho a 13 de julho, 1983a.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: Projeto Fundação – Instituto de Matemática – UFRJ, p. 1-26, 1993.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, p. 155-191, 1996b.

VILAÇA, M. M. **Investigando o processo de Gênese Instrumental de Licenciandos em Matemática ao utilizarem o Geoplano durante a realização de atividades sobre quadriláteros**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

ZANELLA, M. S. **Um Estudo Teórico sobre as Estruturas Aditivas e Multiplicativas de Números Racionais e sua Representação Fracionária**. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática). Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, 2013.

ZANELLA, M. S.; BARROS, R. M. O. **Teoria dos campos conceituais: situações problemas da estrutura aditiva e multiplicativa de naturais**. Curitiba: Editora CRV, 2014.

APÊNDICE A — Avaliação *A priori*

CARTÃO DE ATIVIDADE 01 – AVALIAÇÃO A PRIORI

DATA: __/__/__

Aluno (a):
Série:

Questão 1 - Fernanda adora ler livros, das três estantes que tem em seu quarto, ela já conseguiu preencher duas apenas com livros que coleciona. Determine a fração que representa a quantidade de estante com livros de Fernanda.

Questão 2 - Lucas comprou dois bolos e dividiu igualmente entre seus quatro irmãos. Que fração representa a quantidade de fatias de bolo que cada irmão de Lucas recebeu?

Questão 3 - A professora Marta pediu para que seus alunos recortassem 15 bandeirinhas para festa da escola, porém apenas $\frac{3}{5}$ dessa quantidade foram entregues. Quantas bandeirinhas foram entregues a professora Marta?

Questão 4 - Isabel foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{2}{5}$ em tapioca, $\frac{1}{3}$ em pé de moleque, $\frac{1}{6}$ em mandioca, $\frac{3}{4}$ em farinha, $\frac{4}{7}$ em tucumã e $\frac{6}{8}$ ela gastou em tucupí. Organize o gasto em iguarias, fruta e legume que Isabel fez na feira e responda: Com o quê ela gastou mais e com o quê ela gastou menos na feira?

Questão 5 - Pedro distribuiu algumas de suas figurinhas repetidas, $\frac{2}{10}$ ele entregou a João, $\frac{5}{10}$ a Camila.

- a) Que fração representa as figurinhas de Pedro que foram distribuídas entre João e Camila?

- b) Que fração representa a quantidade de figurinhas que Camila ganhou a mais que João?

Questão 6 - Uma pizza foi dividida em 8 pedaços. Marina recebeu $\frac{1}{2}$ da pizza e Tadeu recebeu $\frac{2}{8}$.

- a) Quanto de pizza foi distribuído entre Marina e Tadeu?

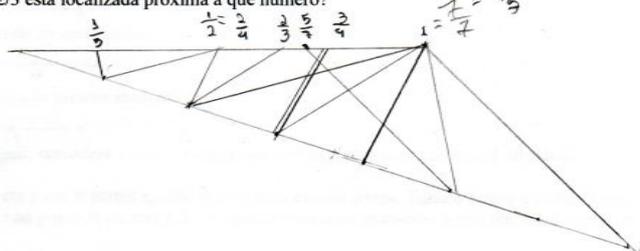
- b) Quanto de pizza Marina recebeu a mais que Tadeu?

- c) Quanta da pizza não foi distribuído?

APÊNDICE B – Regras de Ação

Regras de ação da dupla A para localização das frações na reta numérica aplicada a técnica instrumentada dos esquadros na terceira tarefa da OI-3.

- Seguindo esse procedimento, localize as seguintes frações: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{7}$. Em seguida, responda:
 - a) Qual a menor fração da reta?
 - b) Qual a maior fração da reta?
 - c) A fração $\frac{2}{3}$ está localizada próxima a que número?



<p>ix. Construção da reta numérica;</p> <p>x. Demarcação de um segmento de início 0 e final 1;</p> <p>xi. Construção da reta transversal ao ponto 0 da reta numérica e de qualquer inclinação;</p> <p>xii. Divisão da reta transversal em 7 partes iguais;</p> <p>xiii. Construção de uma reta do último ponto de divisão da transversal ao ponto 1 da reta numérica;</p> <p>xiv. Registro da localização $\frac{7}{7}$;</p> <p>xv. Construção de uma reta paralela à última reta traçada, saindo pelo quinto ponto de divisão da transversal até a reta numérica;</p> <p>xvi. Registro da localização da fração $\frac{5}{7}$;</p> <p>xvii. Construção de uma reta do quinto ponto de divisão da reta transversal ao ponto 1 da reta numérica;</p> <p>xviii. Registro da localização $\frac{5}{5}$;</p> <p>xix. Construção de uma reta paralela à última reta traçada, saindo do primeiro ponto de divisão da transversal até tocar na reta numérica;</p> <p>xx. Registro da localização da fração $\frac{1}{5}$;</p> <p>xxi. Construção de uma reta, do quarto ponto de divisão da transversal ao ponto 1 da reta numérica;</p>	<p>xxii. Registro da localização $\frac{4}{4}$;</p> <p>xxiii. Construção de uma reta paralela à última reta traçada, saindo do terceiro ponto de divisão da transversal até tocar na reta numérica;</p> <p>xxiv. Registro da localização da fração $\frac{3}{4}$;</p> <p>xxv. Construção de uma reta paralela à última reta traçada, saindo do segundo ponto de divisão da transversal até tocar na reta numérica;</p> <p>xxvi. Registro da localização da fração $\frac{2}{4}$;</p> <p>xxvii. Construção de uma reta do terceiro ponto de divisão da transversal até o ponto 1 da reta numérica;</p> <p>xxviii. Registro da localização $\frac{3}{3}$;</p> <p>xxix. Construção de uma reta paralela à última reta traçada, saindo do segundo ponto de divisão da transversal até tocar na reta numérica;</p> <p>xxx. Registro da localização da fração $\frac{2}{3}$;</p> <p>xxxi. Construção de uma reta, do segundo ponto de divisão da transversal até o ponto 1 da reta numérica;</p> <p>xxxii. Registro da localização $\frac{2}{2}$;</p> <p>xxxiii. Construção de uma reta paralela à última reta traçada, saindo do primeiro ponto de divisão da transversal até tocar na reta numérica;</p> <p>xxxiv. Registro da localização da fração $\frac{1}{2}$.</p>
---	--

