

Universidade Federal da Amazonas  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Estruturas trianguladas em quocientes da categoria de Bondarenko

Gustavo Pereira Costa

MANAUS – AM  
2024

Universidade Federal da Amazonas  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Estruturas trianguladas em quocientes da categoria de Bondarenko

por

Gustavo Pereira Costa

sob a orientação de

Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve  
(Orientador)

Manaus – AM  
2024

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

C837e Costa, Gustavo Pereira  
Estruturas trianguladas em quocientes da categoria de  
Bondarenko / Gustavo Pereira Costa . 2024  
79 f.: 31 cm.

Orientador: Germán Benitez Monsalve  
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do  
Amazonas.

1. Categorias trianguladas. 2. funtores. 3. álgebras. 4. matrizes  
por blocos. I. Monsalve, Germán Benitez. II. Universidade Federal  
do Amazonas III. Título

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Gustavo Pereira Costa

Estruturas trianguladas em quocientes da categoria de Bondarenko, Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática.

## BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve (Presidente) Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Viktor Bekkert (Membro Externo) Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG

Prof. Dr. Luis Enrique Ramirez (Membro Externo) Universidade Federal do ABC - UFABC

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela vida que me concedeu, e à minha família por me proporcionar capacidade e apoio para continuar aprendendo. Aos meus pais, que me incentivaram a prosseguir nos estudos e sempre me apoiaram, expresse minha gratidão. Gostaria também de agradecer à Alice pelo apoio incondicional durante esta fase da minha vida, e ao meu filho e ao meu irmão A. Victor por serem meus melhores amigos.

Ao professor Germán Benitez por ter aceito me orientar e também por ser um grande amigo, e aos professores do seminário de álgebra e de k-teoria pelas críticas e sugestões.

Aos amigos do curso de Pós-Graduação UFAM, em particular ao Raimundo, Cristiano, Roseane, Matheus (Hudson/Chaves), Wanessa, Erick, Dzoara, Edwin, Eder, Paola, Diego Paiva e Daniel que foram fundamentais para o meu desenvolvimento, também aos membros da banca pelos comentários e sugestões feitas. Agradeço ao secretário Felipe pela ajuda burocrática. Por fim, gostaria de agradecer a FAPEAM pelo apoio financeiro.

# Resumo

Em 2003 V. Bekkert e H. Merklen em [2] introduzem a categoria Bondarenko com o objetivo de classificar objetos indecomponíveis na categoria derivada de álgebras gentle, posteriormente A. Franco, H. Giraldo e P. Rizzo usam as mesmas técnicas no caso de álgebras SUMP em [8]. No presente trabalho, realizamos pesquisas sobre a categoria de Bondarenko, mostramos que um determinado quociente desta categoria possui uma estrutura triangular e relacionamos triângulos da categoria de homotopia de projetivos de uma álgebra SUMP com triângulos de um determinado quociente da categoria de Bondarenko associado à mesma álgebra SUMP.

**Palavras chave:** Categorias trianguladas, funtores, álgebras, matrizes por blocos

# Abstract

In 2003, V. Bekkert and H. Merklen introduced the Bondarenko category in [2] with the aim of classifying indecomposable objects in the derived category of Gentle algebras. Subsequently, A. Franco, H. Giraldo, and P. Rizzo applied similar techniques in the case of SUMP algebras in [8]. In the current study, we have conducted research on the Bondarenko category. We demonstrate that a specific quotient of this category possesses a triangular structure. Furthermore, we establish a connection between triangles in the homotopy category of projectives of a SUMP algebra and triangles in a particular quotient of the Bondarenko category associated with the same SUMP algebra.

**Keywords:** Triangulated category, functor, algebras, block matrices

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Categorias Trianguladas . . . . .	15
1.2 Álgebras SUMP . . . . .	20
1.3 Categoria de Complexos e de Homotopia . . . . .	22
<b>2 Categoria de Bondarenko</b>	<b>29</b>
2.1 Aditividade de Bondarenko . . . . .	32
<b>3 O quociente <math>\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})</math> da categoria de Bondarenko</b>	<b>37</b>
3.1 Estrutura triangulada para $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . . . . .	38
<b>4 O quociente <math>\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})</math> da categoria de Bondarenko</b>	<b>49</b>
4.1 Estrutura triangulada para $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ . . . . .	51
<b>5 A categoria <math>s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})</math></b>	<b>63</b>
5.1 O Funtor . . . . .	66
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>80</b>



# Lista de Símbolos

$A$  - álgebra

$\mathbb{k}Q$  - álgebra de caminhos

$e_i$  - caminho trivial associado ao vértice  $i$  em  $Q_0$

$s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  - categoria de Bondarenko

$\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  - categoria quociente de Bondarenko

$\mathcal{C}$  - categoria

$\mathbb{k}$  - corpo

$\mathcal{Y}$  - conjunto linearmente ordenado

$\mathbb{Z}$  - conjunto dos números inteiros

$Q_0$  - conjunto de vértices

$Q_1$  - conjunto de flechas

$\mathbf{M}$  - conjunto de caminhos maximais

$\mathbf{Pa}$  - conjunto de todos os caminhos em  $Q$

$r(B_i)$  - denotará o número de linhas da faixa horizontal  $B_i$

$c(B^i)$  - denotará o número de colunas da faixa vertical  $B^i$

$\sigma$  - involução

$\mathbb{O}$  - matriz zero linhas e zero colunas

$\mathbf{C}_T$  - objeto associado ao morfismo  $T$  em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$

$Q$  - quiver

# Introdução

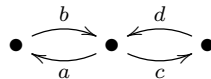
As categorias trianguladas é uma ferramenta muito importante, pois permite generalizar alguns conceitos fundamentais e oferece uma valiosa estrutura abstrata para compreender as relações entre áreas da matemática.

Seguindo essa linha de raciocínio, questionamo-nos se a categoria construída por V. Bondarenko e Y. Drozd em [3, 5] possui uma estrutura triangulada. Visto que neste trabalho provamos que, em geral, essa categoria não é abeliana. Tendo em mente que essa categoria foi fundamental para V. Bekkert e H. Merklen em [2] para classificar todos os objetos indecomponíveis da categoria derivada de álgebras gentle, e considerando sua conexão com a categoria derivada, que possui uma estrutura triangulada, é razoável pensar na existência de uma estrutura triangulada para a categoria de Bondarenko.

Essa categoria teve origem nas investigações dos Módulos Indecomponíveis de Harish-Chandra que foi iniciada por D. Zhelobenko em [18]. Neste trabalho, o problema de classificação de módulos indecomponíveis sobre o grupo de Lorentz é condensado à análise de representações 2-nilpotentes de um quiver composto por dois vértices e três flechas:  $a, b, c$ , sujeitas à relação  $ab = ca = 0$ .



Este problema foi resolvido em 1968 por I. Gelfand e V. Ponomarev em [10]. Seguindo a mesma linha de raciocínio, no Congresso Internacional de Matemática em 1970, I. Gelfand em [9] propôs o problema de classificação das representações indecomponíveis 2-nilpotentes do seguinte quiver<sup>1</sup>, de modo que  $ba = dc$ .



Tal problema tem sua versão equivalente em matrizes e resolvida por L.A. Nazarova e A.V. Roiter em [13], posteriormente V. Bondarenko e W. Crawley Boevey estendem a classe de matrizes, de modo que conseguem descrever explicitamente todas as representações indecomponíveis do quiver de Gelfand, usando métodos completamente diferentes (ver [4, 6]). Além disso, ressaltamos que no trabalho de V. Bondarenko e Y. Drozd em [5] a categoria de Bondarenko é usada para descrever representações de álgebras locais

$$\langle a, b : a^2 = b^2 = 0, a^2 = (ba)^n b \rangle$$

sobre um corpo  $\mathbb{k}$  e também usada com o objetivo de classificar representações de grupos quasidiedrais que são reduzidos para um problema matricial e que foi resolvido

<sup>1</sup>Depois chamado de quiver de Gelfand

no artigo já citado. Além disso, há um caso especial que foi resolvido pelo próprio V. Bondarenko em [3], mas foi no trabalho de V. Bekkert e H. Merklen, em [2], que ganhou o nome de categoria de Bondarenko denotada por  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Em [2] e [5] foi comentado, que esta categoria é aditiva. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada no Capítulo 2 do presente trabalho.

O objetivo deste trabalho é mostrar que categoria quociente da categoria de Bondarenko é triangulada. E por fim, mostrar que o funtor definido por V. Bekkert e H. Merklen em [2] é triangularizável. Neste sentido, o trabalho está estruturado da seguinte maneira:

Inicialmente, no primeiro capítulo são apresentados conceitos preliminares para o desenvolvimento do trabalho, tais como álgebras SUMP, Categoria de homotopia e Categorias trianguladas. Tais técnicas apresentadas aqui serão ferramentas úteis para o desenvolvimento de exemplos para uma melhor exposição da teoria.

No segundo capítulo, vamos estudar a categoria de Bondarenko. Vamos começar com a definição da categoria de Bondarenko e demonstrar que, de fato, é uma categoria. Além disso, mostraremos de maneira explícita a sua soma direta e provaremos que tal categoria é uma  $\mathbb{k}$ -categoria e também que em geral esta categoria não é abeliana. Por fim, apresentaremos um algoritmo para construir um objeto associado a um morfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

No terceiro capítulo, definimos a uma categoria quociente  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  da categoria de Bondarenko  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , também introduzimos um autofuntor  $[-] : \kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k}) \longrightarrow \kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  e uma família de triângulos. Finalizamos o capítulo mostrando que  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é uma categoria triangulada.

No capítulo quarto definimos uma categoria quociente  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  da categoria de Bondarenko  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , também introduzimos um autofuntor  $\{1\}$  sobre  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  e uma família de triângulos, finalmente mostramos que  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  é uma categoria triangulada.

Por fim, no capítulo quinto usando as técnicas abordadas em [2, 8], vamos construir um poset associado a álgebra SUMP  $A = \mathbb{k}Q/I$ , e uma involução muito esperta sobre o poset para definir a categoria de Bondarenko associada a álgebra SUMP  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ , tal construção nos permite definir o seguinte funtor  $\mathbf{F} : \mathbf{C}^b(\text{proj}A) \longrightarrow s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ . O qual nos permitirá relacionar triângulos distinguidos de  $\mathbf{K}^b(\text{proj}A)$  com os triângulos distinguidos de  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste trabalho partiremos do pressuposto de que o leitor possui um certo conhecimento em Teoria de Categorias. Vamos iniciar este capítulo, introduzindo notações, terminologia e alguns conceitos fundamentais da teoria de categorias e categorias trianguladas. Em particular, exploraremos aspectos básicos sobre a categoria de complexos de cadeias sobre uma álgebra  $A$ .

Daqui em diante, neste trabalho, utilizaremos a notação  $\mathcal{C}$  para denotar uma categoria, cuja classe de objetos é representada por  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  ou simplesmente por  $\mathcal{C}$ . Quanto aos morfismos, denotaremos  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  ou simplesmente  $f : X \rightarrow Y$ .

Para evitar ambiguidades, deixamos claro que, ao referenciar a composição de morfismos, utilizaremos  $fg$  em vez de  $f \circ g$ . A composição será tratada no sentido das flechas, ou seja, dados  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  e  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ , então  $fg \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ .

Por fim, para indicar a cardinalidade de um conjunto  $X$ , usaremos  $|X|$ , e para indicar morfismo identidade será usado  $\text{Id}_X$ , para qualquer  $X \in \mathcal{C}$ . Utilizaremos  $\mathbb{k}$  para denotar o corpo qualquer. Para uma compreensão mais aprofundada da teoria de categorias, recomendamos consultar fontes adicionais. [7, 12].

**Definição 1.1.** Um objeto  $X \in \mathcal{C}$  é chamado de **objeto zero** se existe um único morfismo saindo de  $X$  e um único morfismo chegando em  $X$ .

**Definição 1.2.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , dizemos que  $f$  é:

- (i) Um **monomorfismo**, se dado  $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$  com  $gf = hf$  tem-se  $g = h$ .
- (ii) Um **epimorfismo**, se dado  $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  com  $fg = fh$  tem-se  $g = h$ .
- (iii) Um **mono-split**, se existe um  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  tal que  $fg = \text{Id}_X$ .
- (iv) Um **epi-split**, se existe um  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  tal que  $gf = \text{Id}_Y$ .
- (v) Um **isomorfismo**, se é mono-split e epi-split.

**Definição 1.3.** A **soma direta (coproduto)** de uma coleção de objetos  $\{C_i\}_{i \in L}$ , é um objeto,

$$\bigoplus_{i \in L} C_i$$

junto com morfismos em  $\mathcal{C}$  (chamados de **inclusões**)  $u_j : C_j \rightarrow \bigoplus_{i \in L} C_i$  para todo  $j \in L$ , satisfazendo a seguinte propriedade universal: para qualquer  $Y \in \mathcal{C}$  e qualquer

família de morfismos  $g_j : C_j \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$ , existe um único morfismo  $g : \bigoplus_{i \in L} C_i \rightarrow Y$  tal que o seguinte diagrama é comutativo, para cada  $j \in L$

$$\begin{array}{ccc} C_j & \xrightarrow{u_j} & \bigoplus_{i \in L} C_i \\ g_j \downarrow & \swarrow \exists! g & \\ Y & & \end{array}$$

**Definição 1.4.** Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dita **aditiva** se:

- (i)  $\mathcal{C}$  possui objeto zero.
- (ii) Para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  é um grupo abeliano.
- (iii) Para quaisquer morfismos  $f, f' : X \rightarrow Y$  e  $g, g' : Y \rightarrow Z$  em  $\mathcal{C}$ , tem-se:

$$(f + f')g = fg + f'g \quad e \quad f(g + g') = fg + fg'.$$

- (iv) Para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$  existe a soma direta  $X \oplus Y \in \mathcal{C}$ .

**Observação 1.5.**

1. Uma categoria que satisfaz (i), (ii), (iii) é chamada **Categoria pré-aditiva**.
2. Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dita uma  **$\mathbb{k}$ -categoria** se ela é aditiva e para quaisquer objetos  $X$  e  $Y$  em  $\mathcal{C}$ , o conjunto de morfismos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  é um  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial.

O seguinte teorema nos fornece uma ferramenta para mostrar que a soma direta entre objetos da categoria  $\mathcal{C}$ , ainda é um objeto na categoria  $\mathcal{C}$ , quando  $\mathcal{C}$  é pré-aditiva.

**Teorema 1.6.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria pré-aditiva.  $\mathcal{C}$  admite soma direta (coproduto) de seus objetos se, e somente se, para todo par de objetos  $X, Y \in \mathcal{C}$ , existe  $Z \in \mathcal{C}$  e morfismos  $\tilde{\iota}_X, \iota_Y, \pi_X$  e  $\tilde{\pi}_Y$  em  $\mathcal{C}$

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\iota}_X} \\ \xleftarrow{\pi_X} \end{array} Z \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\pi}_Y} \\ \xleftarrow{\iota_Y} \end{array} Y$$

tais que  $\tilde{\iota}_X \pi_X = \text{Id}_X$ ,  $\iota_Y \tilde{\pi}_Y = \text{Id}_Y$  e  $\pi_X \tilde{\iota}_X + \tilde{\pi}_Y \iota_Y = \text{Id}_Z$ .

*Demonstração.* Ver [7]. □

**Definição 1.7.** Seja  $\mathcal{C}$  uma  $\mathbb{k}$ -categoria,  $\mathcal{I}$  uma coleção de morfismos e  $\mathcal{I}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \mathcal{I}$ . Dizemos que  $\mathcal{I}$  é um **ideal bilateral** em  $\mathcal{C}$  quando satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer  $X, Y, W$  e  $Z \in \mathcal{C}$ .

- (i) O morfismo nulo  $0 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  pertence ao  $\mathcal{I}$ .
- (ii) Se  $f, g \in \mathcal{I}(X, Y)$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{k}$ , então  $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{I}$ .
- (iii) Se  $f \in \mathcal{I}(X, Y)$  e  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ , então a composição  $fg \in \mathcal{I}(X, Z)$ .
- (iv) Se  $f \in \mathcal{I}(X, Y)$  e  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ , então a composição  $hf \in \mathcal{I}(W, Y)$ .

Dado um ideal bilateral de uma  $\mathbb{k}$ -categoria, vamos definir a categoria quociente.

**Definição 1.8.** Seja  $\mathcal{C}$  uma  $\mathbb{k}$ -categoria e seja  $\mathcal{I}$  um ideal bilateral de  $\mathcal{C}$ . A **categoria quociente**  $\mathcal{C}/\mathcal{I}$  é dada seguinte forma

$$(i) \text{ Obj}(\mathcal{C}/\mathcal{I}) = \text{Obj}(\mathcal{C}).$$

$$(ii) \text{ Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/\mathcal{I}(X, Y), \text{ para cada } X, Y \in \mathcal{C}.$$

**Observação 1.9.** Sempre que  $\mathcal{C}$  é uma  $\mathbb{k}$ -categoria,  $\mathcal{C}/\mathcal{I}$  também o é.

**Definição 1.10.** Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria aditiva e  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$ .

- (i) O **kernel** de  $f$  é um par  $(K, k)$ , em que  $K \in \mathcal{C}$  e  $k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K, X)$  tal que  $kf = 0$  satisfazendo a seguinte propriedade universal: Para qualquer par  $(K^*, k^*)$ , em que  $K^* \in \mathcal{C}$  e  $k^* \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K^*, X)$  com  $k^*f = 0$ , existe um único morfismo  $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K^*, K)$  tal que  $k^* = uk$ , ou seja o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow \exists! u & \nearrow k^* & & \\ & & K^* & & \end{array}$$

Denotaremos o kernel de  $f$  por  $\ker(f)$  e dizemos que  $k$  é a inclusão associada.

- (ii) O **cokernel** de  $f$  é um par  $(Q, q)$ , em que  $Q \in \mathcal{C}$  e  $q \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Q)$  tal que  $fq = 0$  satisfazendo a seguinte propriedade universal: Para qualquer par  $(Q^*, q^*)$ , em  $Q^* \in \mathcal{C}$  e  $q^* \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Q^*)$  com  $fq^* = 0$ , existe um único morfismo  $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q^*)$  tal que  $q^* = qu$ , ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{q} & Q \\ & & \searrow q^* & & \swarrow \exists! u \\ & & & & Q^* \end{array}$$

Denotaremos o cokernel de  $f$  por  $\text{coker}(f)$  e dizemos que  $q$  é a projeção associada.

**Definição 1.11.** Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dita **abeliana** se é aditiva, todo morfismo em  $\mathcal{C}$  possui kernel e cokernel, todo monomorfismo é o kernel de seu cokernel e todo epimorfismo é o cokernel de seu kernel.

**Exemplo 1.12.** A categoria de grupos abelianos denotada por  $\text{Ab}$  é uma categoria abeliana, mas a categoria dos grupos (não necessariamente abelianos) não é abeliana. Também tem a categoria módulos sobre uma  $\mathbb{k}$ -álgebra  $A$ , denotada por  $A\text{-mod}$ , a qual também é categoria abeliana.

**Definição 1.13.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas categorias, um funtor **covariante** (respectivamente, **contravariante**)  $F$  é uma aplicação  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  que satisfaz:

$$(i) \text{ Se } X \in \mathcal{C}, \text{ então } F(X) \in \mathcal{D}.$$

$$(ii) \text{ Se } f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \text{ então } F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \text{ (respectivamente, } F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))).$$

(iii) Se  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ , então  $F(fg) = F(f)F(g)$  (respectivamente,  $F(fg) = F(g)F(f)$ ).

(iv)  $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$ , para todo  $X \in \mathcal{C}$ .

**Exemplo 1.14.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria e  $\text{Ab}$  a categoria de grupos abelianos como definida em 1.12

1. O funtor covariante  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ , é definido por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X)$  para qualquer  $X \in \mathcal{C}$  e por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, f) =: f^*$ , onde para qualquer  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .

$$\begin{array}{ccc} f^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Y) \\ \eta & \longmapsto & \eta f \end{array}$$

2. O funtor contracovariante  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ , onde  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M)$  para qualquer  $X \in \mathcal{C}$  e  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, M) =: {}^*f$  para qualquer  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

$$\begin{array}{ccc} {}^*f : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M) \\ \beta & \longmapsto & f\beta \end{array}$$

**Definição 1.15.** Sejam  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  dois funtores. Uma **transformação natural**  $\Psi : F \rightarrow G$  é uma família  $\Psi = \{\Psi_X\}_{X \in \mathcal{C}}$  de morfismos  $\Psi_X : F(X) \rightarrow G(X)$  em  $\mathcal{D}$  tal que, para qualquer  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$  o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\Psi_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\Psi_Y} & G(Y) \end{array}$$

Dizemos que  $\Psi$  é um **isomorfismo natural**, se para qualquer  $X \in \mathcal{C}$ , se cumpre que  $\Psi_X : F(X) \rightarrow G(X)$  é um isomorfismo em  $\mathcal{D}$ , e o denotaremos por  $F \cong G$ .

**Definição 1.16.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas categorias aditivas, um funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é chamado **funtor aditivo** se  $F(0) \cong 0 \in \mathcal{D}$  e se dados dois objetos  $X, Y \in \mathcal{C}$ , existe um isomorfismo  $F(X \oplus Y) \cong F(X) \oplus F(Y)$ .

## 1.1 Categorias Trianguladas

As Categorias Trianguladas foram introduzidas de forma independente por D. Puppe em meados de 1962 (ver [14]) e J. Verdier em meados de 1963 (ver [17]). Embora, os axiomas de Puppe fossem menos abrangentes, faltando o axioma octaedro TR6, Puppe foi motivado pela categoria de homotopia estável, enquanto Verdier foi motivado pela categoria derivada de uma categoria abeliana, a qual ele também definiu, desenvolvendo ideias de Alexander Grothendieck. Nesta seção, abordaremos as categorias trianguladas, as quais estão munidas de um “funtor translação”, e uma classe de “triângulos distinguidos”. Vamos apresentar a definição de categoria triangulada feita por J. Verdier (ver [17]).

**Definição 1.17.** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria aditiva. Um funtor  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  é chamado **funtor translação** de  $\mathcal{C}$ , se  $T$  é um autofuntor de categorias.

**Definição 1.18.** Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria aditiva e  $T$  um funtor translação. Um **triângulo** é uma sextupla  $(X, Y, Z, f, g, h)$ , onde  $X, Y, Z$  são objetos em  $\mathcal{C}$  e  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  e  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, T(X))$  são morfismos. Gráficamente é uma sequência da seguinte forma

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$$

**Definição 1.19.** Sejam  $(X, Y, Z, f, g, h)$  e  $(X', Y', Z', f', g', h')$  triângulos, um **morfismo de triângulos**

$$(X, Y, Z, f, g, h) \longrightarrow (X', Y', Z', f', g', h')$$

é dado por morfismos  $u : X \longrightarrow X'$ ,  $v : Y \longrightarrow Y'$  e  $w : Z \longrightarrow Z'$  em  $\mathcal{C}$ , tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & T(X') \end{array}$$

Denotaremos este morfismo por  $(u, v, w)$ .

Os triângulos do último diagrama são isomorfos se, e somente se,  $u : X \longrightarrow X'$ ,  $v : Y \longrightarrow Y'$  e  $w : Z \longrightarrow Z'$  forem isomorfismos em  $\mathcal{C}$ .

Agora estamos prontos para a definição de Categoria triangulada.

**Definição 1.20.** Uma **categoria triangulada** é uma tripla  $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ , em que

- (i)  $\mathcal{C}$  uma categoria aditiva.
- (ii)  $T$  é um funtor translação.
- (iii)  $\mathcal{T}$  é uma família de triângulos chamados de **triângulos distinguidos**, que cumprem as seguintes condições:

TR1 Qualquer triângulo isomorfo a um triângulo distinguido é distinguido.

TR2 Para qualquer  $X \in \mathcal{C}$ , o triângulo da forma  $X \xrightarrow{\text{Id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$  é distinguido.

TR3 Para qualquer morfismo  $f : X \longrightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$ , existe um triângulo distinguido da forma  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ .

TR4 O triângulo  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$  é distinguido se, e somente se,

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} T(Y)$$

é um triângulo distinguido.



TR5 Sejam  $(X, Y, Z, f, g, h)$  e  $(X', Y', Z', f', g', h')$  triângulos distinguidos, dados os morfismos  $u : X \longrightarrow X'$  e  $v : Y \longrightarrow Y'$  em  $\mathcal{C}$ , tal que  $fv = uf'$ , então existe  $w : Z \longrightarrow Z'$ , de modo que

$$(u, v, w) : (X, Y, Z) \longrightarrow (X', Y', Z')$$

seja um morfismo de triângulos, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow \exists w & & \downarrow T(u) \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & T(X') \end{array}$$

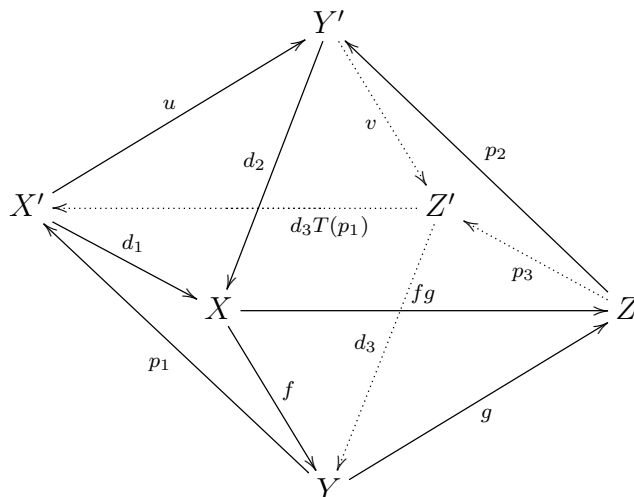
TR6 (*Axioma do octaedro*)

Se  $(X, Y, X', f, p_1, d_1)$ ,  $(X, Z, Y', fg, p_2, d_2)$  e  $(Y, Z, Z', g, p_3, d_3)$  são triângulos distinguidos, então existe triângulo distinguido  $(X', Y', Z', u, v, d_3T(p_1))$ , de modo que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p_1} & X' & \xrightarrow{d_1} & T(X) \\ \text{Id}_X \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow \exists u & & \downarrow T(\text{Id}_X) \\ X & \xrightarrow{fg} & Z & \xrightarrow{p_2} & Y' & \xrightarrow{d_2} & T(X) \\ \downarrow f & & \downarrow \text{Id}_Z & & \downarrow \exists v & & \downarrow T(f) \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{p_3} & Z' & \xrightarrow{d_3} & T(Y) \\ & & & & \downarrow d_3T(p_1) & \swarrow T(p_1) & \\ & & & & T(X') & & \end{array}$$

**Observação 1.21.**

- (i) Uma categoria que satisfaz TR1-TR5 é chamada de **Categoria Pré-Triangulada**.
- (ii) O último axioma é chamado **Axioma do Octaedro**, porque pode ser representado na forma de um octaedro



## Triângulos distinguidos vs Sequências exatas curtas

Daqui em diante veremos alguns propriedades das categorias pré-trianguladas e denotaremos o funtor translação por  $T$ .

**Proposição 1.22.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria pré-triangulada. A composição de morfismos consecutivos em triângulos distinguidos é zero.*

*Demonstração.* Seja  $(X, Y, Z, f, g, h)$  um triângulo distinguido em  $\mathcal{C}$ , vejamos que  $fg = 0$ . Para este fim, consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\text{Id}_X} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(X) \\ \text{Id}_X \downarrow & & f \downarrow & & & & \downarrow T(\text{Id}_X) \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) \end{array}$$

onde o triângulo  $(X, X, 0, \text{Id}_X, 0, 0)$  é um triângulo distinguido pelo TR2 e como no diagrama acima o primeiro quadrado é comutativo, pelo TR5 existe  $u : 0 \rightarrow Z$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\text{Id}_X} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(X) \\ \text{Id}_X \downarrow & & f \downarrow & & u \downarrow & & \downarrow T(\text{Id}_X) \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) \end{array}$$

Portanto,  $fg = 0u = 0$ . Por outro lado, usando o TR4 temos que  $(Y, Z, T(X), g, h, -T(f))$  é distinguido em  $\mathcal{C}$  e será o mesmo raciocínio para  $gh = 0$ .  $\square$

**Definição 1.23.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria pré-triangulada e  $\mathcal{A}$  uma categoria abeliana. O funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  é dito **Functor Cohomológico** se  $F$  associa todo triângulo distinguido*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X),$$

de  $\mathcal{C}$  à uma sequência exata longa da forma

$$\dots \longrightarrow F^n(X) \xrightarrow{F^n(f)} F^n(Y) \xrightarrow{F^n(g)} F^n(Z) \xrightarrow{F^n(h)} F^{n+1}(X) \xrightarrow{F^{n+1}(f)} \dots$$

no caso  $F$  covariante, respectivamente, da forma

$$\dots \longrightarrow F^{n+1}(X) \xrightarrow{F^{n+1}(f)} F^n(Z) \xrightarrow{F^n(h)} F^n(Y) \xrightarrow{F^n(g)} F^n(X) \xrightarrow{F^n(f)} \dots,$$

para o caso  $F$  contravariante. Onde  $F^n = FT^n$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Observação 1.24.** *É de se notar que do TR4, para que  $F$  seja um functor cohomológico, é suficiente provar que para qualquer triângulo distinguido  $(X, Y, Z, f, g, h)$  tem-se que a sequência*

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

é exata.

Com a seguinte proposição, vamos mostrar que os funtores definidos no Exemplo 1.14 são cohomológicos.

**Proposição 1.25.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria pré-triangulada. Para todo  $M \in \mathcal{C}$ ,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab} \quad e \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

*são funtores cohomológico.*

*Demonstração.* Pela Observação 1.24 é suficiente mostrar que para qualquer triângulo distinguido  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$  a sequência

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Y) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Z)$$

é exata. Pela Proposição 1.22 temos que  $fg = 0$ , então  $f^*g^* = 0$ , isto implica que  $\mathrm{Im}(f^*) \subseteq \ker(g^*)$ . Para a outra inclusão, seja  $u \in \ker(g^*) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Y)$ , logo  $ug = 0$  assim temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\mathrm{Id}_M} & M & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(M) \\ & & \downarrow u & & \downarrow 0 & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) \end{array}$$

onde  $(M, M, 0, \mathrm{Id}_M, 0, 0)$  é um triângulo distinguido por TR2. Agora, por TR4 e TR5 existe  $v : M \rightarrow X$  tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\mathrm{Id}_M} & M & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(M) \\ \downarrow v & & \downarrow u & & \downarrow 0 & & \downarrow T(v) \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) \end{array}$$

Portanto,  $f^*(v) = u$ , então  $u \in \mathrm{Im}(f^*)$ . Logo, se prova que  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$  é um functor cohomológico.  $\square$

O seguinte corolário é considerado o Lema dos 5 para triângulos.

**Corolário 1.26.** *No axioma TR5, se  $u, v$  são isomorfismos, então  $w$  é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Do TR5 temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & T(X') \end{array}$$

Agora, aplicando os funtores cohomológicos  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', -)$  e  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$  obtemos as seguintes sequências exatas

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Y) & \xrightarrow{g^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z) & \xrightarrow{h^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', T(X)) \xrightarrow{T(f)^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', T(Y)) \\ \downarrow u^* & & \downarrow v^* & & \downarrow w^* & & \downarrow T(u)^* \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X') & \xrightarrow{f'^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Y') & \xrightarrow{g'^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z') & \xrightarrow{h'^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', T(X')) \xrightarrow{T(f')^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', T(Y')) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(Y), Z) & \xrightarrow{*T(f)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(X), Z) & \xrightarrow{*h} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z) & \xrightarrow{*g} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \xrightarrow{*f} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\
\uparrow *T(v) & & \uparrow *T(u) & & \uparrow *w & & \uparrow *v & & \uparrow *u \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(Y'), Z) & \xrightarrow{*T(f')} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(X'), Z) & \xrightarrow{*h'} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z) & \xrightarrow{*g'} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', Z) & \xrightarrow{*f'} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Z)
\end{array}$$

Como os funtores são invariantes por isomorfismos, temos que

$$u^*, v^*, T(u)^*, T(v)^*, *u, *v, *T(u), *T(v)$$

são isomorfismos na categoria  $\mathrm{Ab}$  e pelo Lema dos cinco para categoria de grupos abelianos, obtemos que  $w^*, *w$  são isomorfismos em  $\mathrm{Ab}$ . Portanto, existem  $p, q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$  tais que  $w^*(p) = \mathrm{Id}_{Z'}$ ,  $*w(q) = \mathrm{Id}_Z$ , o qual implica que  $w$  é um isomorfismo em  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Definição 1.27.** *Sejam  $(\mathcal{C}_1, T_1, \mathcal{T}_1)$  e  $(\mathcal{C}_2, T_2, \mathcal{T}_2)$  duas categorias trianguladas. Um funtor aditivo  $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  é dito **triangularizável**, se existe um isomorfismo natural  $\eta : F \circ T_1 \rightarrow T_2 \circ F$  e a imagem de cada triângulo em  $\mathcal{T}_1$  via o funtor  $F$  é um triângulo  $\mathcal{T}_2$ .*

## 1.2 Álgebras SUMP

Ao longo desta seção, serão apresentadas algumas definições preliminares de extrema relevância para o desenvolvimento do Capítulo 4. Por fim, ao final desta seção, serão fornecidos exemplos estratégicos que serão usados ao longo do trabalho.

Seja  $Q = (Q_0, Q_1)$  um quiver, onde  $Q_0$  é o conjunto de vértices e  $Q_1$  é o conjunto de flechas. Se  $w$  é uma flecha,  $s(w)$  denotará seu ponto de partida e  $t(w)$  denotará seu ponto final. Um caminho  $a$  de comprimento  $l(a) = n \geq 1$  é uma sequência da forma  $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ , onde cada  $a_i$  é uma flecha tal que  $t(a_i) = s(a_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , vale a pena destacar que o ponto de partida do caminho é  $s(a) = s(a_1)$  e o ponto final do caminho é  $t(a) = t(a_n)$ , graficamente por  $a : s(a) \rightarrow t(a)$ . Também associaremos a cada vértice  $i \in Q_0$  um caminho  $e_i$  de comprimento 0 (também chamado de **caminho trivial**).

O  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial com base o conjunto de todos os caminhos do quiver  $Q$  tem estrutura de álgebra associativa, a qual é chamada de **álgebra de caminhos** e denotada por  $\mathbb{k}Q$ , com produto descrito da seguinte forma:

$$a \cdot b = \begin{cases} ab, & \text{se } t(a) = s(b) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde  $ab$  é a concatenação dos caminhos.

Ao longo do trabalho, todas as nossas  $\mathbb{k}$ -álgebras serão sempre da forma  $\mathbb{k}Q/I$  e de dimensão finita. Para mais detalhes, recomendamos consultar [15].

Agora, seja  $A$  uma  $\mathbb{k}$ -álgebra e  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos. Dizemos que  $A$  é **básica** se os  $A$ -módulos projetivos à esquerda de  $P_i = Ae_i$  e  $P_j = Ae_j$  não são isomorfos para todos  $i \neq j$ . A  $\mathbb{k}$ -álgebra  $A = \mathbb{k}Q/I$  é básica e os projetivos  $P_i = Ae_i$  com  $i \in Q_0$  são todos os projetivos indecomponíveis.

O seguinte lema estabelece uma base para o conjunto de homomorfismos de  $A$ -módulos  $\mathrm{Hom}_A(P_i, P_j)$  em função dos caminhos  $w : i \rightarrow j$  não nulos em  $\mathbb{k}Q/I$ .

**Lema 1.28.** O  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial  $\text{Hom}_A(P_i, P_j)$  tem como base todos os homomorfismo

$$\begin{aligned} p(w) : P_i &\longrightarrow P_j \\ u &\longmapsto p(w)(u) = uw. \end{aligned}$$

com  $w : i \longrightarrow j$  não nulo em  $\mathbb{k}Q/I$ .

*Demonstração.* Ver [16, Corolário 2.12, p. 45].  $\square$

Denotemos por  $\mathbf{Pa}$  o conjunto de todos os caminhos em  $Q$  que não se anulam em  $\mathbb{k}Q/I$ , respectivamente, denotaremos por  $\mathbf{Pa}_{\geq 1}$  o conjunto de todos os caminhos não triviais em  $Q$  que não se anulam em  $\mathbb{k}Q/I$ .

**Definição 1.29.** Um caminho  $w$  não nulo em  $A = \mathbb{k}Q/I$  é dito **maximal**, se para todo  $a, b \in Q_1$ , tal que  $t(a) = s(w)$  e  $t(w) = s(b)$  temos que  $awb \in I$ . Denotemos por  $\mathbf{M}$  o conjunto dos **caminhos maximais**.

**Observação 1.30.** Um caminho não trivial  $w$  em  $Q$  pertence a  $\mathbf{Pa}$  se, e somente se, e um subcaminho de um caminho maximal  $\tilde{w}$  que não esteja em  $I$  (isto é, um elemento de  $\mathbf{M}$ ). Este caminho máximo tem a forma  $\tilde{w} = \tilde{u}w\tilde{v}$ , onde  $\tilde{u}$  e  $\tilde{v} \in \mathbf{Pa}$ . Para referência futura, o caminho  $\tilde{u} \in \mathbf{Pa}$  é chamado de **completação à esquerda** de  $w$ .

**Definição 1.31.** A álgebra  $A = \mathbb{k}Q/I$  é chamada de **álgebra string** se satisfaz as seguintes condições:

- (i) Para todo vértice  $i \in Q_0$  existem no máximo duas flechas que começam (respectivamente, terminam) em  $i$ .
- (ii) Dada uma flecha  $a \in Q_1$ , existe no máximo uma flecha  $b \in Q_1$  com  $s(b) = t(a)$  e  $ab \notin I$ .
- (iii) Dada uma flecha  $a \in Q_1$ , existe no máximo uma flecha  $c \in Q_1$  com  $s(a) = t(c)$  e  $ca \notin I$ .
- (iv) O ideal  $I$  é gerado por caminhos de comprimento igual ou maior que dois.

Na próxima definição será apresentada uma nova classe de álgebras conhecida como álgebras gentle, a qual foi introduzida por Assem e Skowroński em [1].

**Definição 1.32.** Uma álgebra string  $A = \mathbb{k}Q/I$  é chamada **álgebra gentle** se satisfaz as seguintes condições:

- (i) Dado uma flecha  $a \in Q_1$ , há no máximo uma flecha  $b \in Q_1$  com  $s(b) = t(a)$  e  $ab \in I$ .
- (ii) Dado uma flecha  $a \in Q_1$ , há no máximo uma flecha  $c \in Q_1$  com  $s(a) = t(c)$  e  $ca \in I$ .
- (iii) O ideal  $I$  é gerado por caminhos de comprimento dois.

Uma propriedade das álgebras gentle é que dois caminhos máximos diferentes não podem ter uma flecha comum, veja [2, Lemma 3]. Motivados por essa propriedade, os autores em [8] consideraram outra classe de álgebras que contém a classe das álgebras gentle, permitindo estender diversos resultados do artigo [2]. Vamos definir tal álgebra.

**Definição 1.33.** Uma álgebra string  $A = \mathbb{k}Q/I$  é chamada álgebra **SUMP**<sup>1</sup> se  $A$  tem a propriedade de que todo caminho se estende por um único caminho maximal.

**Exemplo 1.34.**

1. Seja  $Q$  o quiver dado por,

$$Q : 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$

com as relações  $I = \langle ac, bd \rangle$ . Então  $\mathbb{k}Q/I$  será uma álgebra gentle, SUMP e string com o conjunto maximal  $\mathbf{M} = \{ad, bc\}$ .

2. [8] Para o seguinte quiver

$$Q : 1 \xrightarrow{a} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 3$$

$\mathbb{k}Q$  será apenas um álgebra string que não é gentle e nem SUMP, pois  $\mathbf{M} = \{ab, ac\}$ , note que a flecha  $a$  aparece em dois caminhos maximais. Mas, se  $I = \langle ab, ac \rangle$ , então  $\mathbb{k}Q/I$  será SUMP com o conjunto maximal  $\mathbf{M} = \{a, b, c\}$ , mas não é gentle porque  $ac$  e  $ab$  estão em  $I$ .

### 1.3 Categoria de Complexos e de Homotopia

Esta seção abrange as definições fundamentais acerca de categorias de complexos de cocadeia, suas propriedades e alguns resultados técnicos que servirão para o desenvolvimento do Capítulo 4. Para mais detalhes recomenda-se consultar as referências [11, 12]. Ademais, assumiremos que  $\mathcal{C}$  é uma categoria aditiva.

**Definição 1.35.** Um **complexo**  $\mathbf{X}^\bullet$  consiste de duas seqüências  $(\mathbf{X}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  e  $(\partial_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , onde cada  $\mathbf{X}^n$  é um objeto em  $\mathcal{C}$  e cada  $\partial_X^n : \mathbf{X}^n \rightarrow \mathbf{X}^{n+1}$  (chamado de **diferencial**) é um morfismo em  $\mathcal{C}$  sujeito a condição  $\partial_X^n \partial_X^{n+1} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\mathbf{X}^\bullet : \quad \dots \longrightarrow \mathbf{X}^{n-1} \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} \mathbf{X}^n \xrightarrow{\partial_X^n} \mathbf{X}^{n+1} \longrightarrow \dots$$

Um **morfismo** do complexo  $\mathbf{X}^\bullet$  para o complexo  $\mathbf{Y}^\bullet$  é a seqüência  $f^\bullet = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de morfismos  $f^n \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}^n, \mathbf{Y}^n)$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{X}^\bullet : & \dots & \longrightarrow & \mathbf{X}^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & \mathbf{X}^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & \mathbf{X}^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ f^\bullet \downarrow & & & f^{n-1} \downarrow & & f^n \downarrow & & f^{n+1} \downarrow & & \\ \mathbf{Y}^\bullet : & \dots & \longrightarrow & \mathbf{Y}^{n-1} & \xrightarrow{\partial_Y^{n-1}} & \mathbf{Y}^n & \xrightarrow{\partial_Y^n} & \mathbf{Y}^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

**Observação 1.36.** Os complexos sobre  $\mathcal{C}$  e os morfismos entre esses complexos formam uma categoria chamada de **categoria dos complexos** que será denotada por  $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ . Além disso, se  $\mathcal{C}$  é uma categoria aditiva, então  $\mathbf{C}(\mathcal{C})$  também será aditiva.

<sup>1</sup>SUMP é uma abreviação do inglês de String Unique Maximal Property.

**Exemplo 1.37.**

1. Qualquer objeto  $M$  em  $\mathcal{C}$ , torna-se um complexo concentrado na componente  $n$  da seguinte forma

$$\mathbf{M}^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{M}^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

onde  $\mathbf{M}^n = M$ . Note que  $\mathbf{M}^\bullet$  é um objeto em  $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ .

2. Considere o seguinte quiver,

$$Q : 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3$$

com as relações  $I = \langle ac, bd \rangle$ . Dado que os projetivos indecomponíveis da álgebra gentle  $A = \mathbb{k}Q/I$  são:

$$\begin{aligned} P_1 &= Ae_1 = \text{span}_{\mathbb{k}}\{e_1\}, \\ P_2 &= Ae_2 = \text{span}_{\mathbb{k}}\{e_2, a, b\}, \\ P_3 &= Ae_3 = \text{span}_{\mathbb{k}}\{e_3, c, d, ad, bc\}, \end{aligned}$$

podemos definir um morfismo de complexos em  $\mathbf{C}(A\text{-mod})$ . da seguinte forma

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & P_1 & \xrightarrow{p(a)} & P_2 & \xrightarrow{p(b)} & P_3 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow \begin{matrix} (p(e_1) & p(ad)) \end{matrix} & & \downarrow p(e_2) & & \downarrow p(e_3) & & & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & P_1 \oplus P_3 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} p(a) \\ 0 \end{pmatrix}} & P_2 & \xrightarrow{p(b)} & P_3 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

3. Considere o quiver,

$$Q : 1 \xrightarrow{a} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{b} \\ \xrightarrow{c} \end{array} 3$$

com as relações  $I = \langle ab, ac \rangle$ . Os projetivos indecomponíveis da álgebra SUMP  $A = \mathbb{k}Q/I$  são:

$$\begin{aligned} P_1 &= Ae_1 = \text{span}_{\mathbb{k}}\{e_1\}, \\ P_2 &= Ae_2 = \text{span}_{\mathbb{k}}\{e_2, a\}, \\ P_3 &= Ae_3 = \text{span}_{\mathbb{k}}\{e_3, b, c\}. \end{aligned}$$

Podemos definir o complexo  $\mathbf{C}(A\text{-mod})$  da forma

$$\mathbf{P}^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{\partial_P^1} P_2 \oplus P_2 \xrightarrow{\partial_P^2} P_3 \oplus P_3 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

onde

$$\partial_P^1 = \begin{pmatrix} p(a) & 0 \\ 0 & p(e_2) \end{pmatrix} \quad e \quad \partial_P^2 = \begin{pmatrix} p(b) & p(c) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Todos os morfismos de  $\mathbf{P}^\bullet$  para  $\mathbf{P}^\bullet$  em  $\mathbf{C}(A\text{-mod})$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P}^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 \oplus P_2 & \xrightarrow{\partial_P^1} & P_2 \oplus P_2 & \xrightarrow{\partial_P^2} & P_3 \oplus P_3 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ \varphi^\bullet \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & \downarrow \varphi^3 & & \downarrow & & \\ \mathbf{P}^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 \oplus P_2 & \xrightarrow{\partial_P^1} & P_2 \oplus P_2 & \xrightarrow{\partial_P^2} & P_3 \oplus P_3 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

são da seguinte forma

$$\varphi^1 = \begin{pmatrix} p(e_1)\alpha & p(a)\beta \\ 0 & p(e_2)\gamma \end{pmatrix}, \quad \varphi^2 = p(e_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad e \quad \varphi^3 = p(e_3) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

em que  $\alpha, \beta$  e  $\gamma \in \mathbb{k}$ .

Para ver isto, note-se que

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} p(e_1)\alpha_{11} & p(a)\alpha_{12} \\ 0 & p(e_2)\alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = p(e_2) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = p(e_3) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

para alguns  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij} \in \mathbb{k}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Do fato que  $\partial_P^1 \varphi^2 = \varphi^1 \partial_P^1$  e que

$$\varphi_1 \partial_P^1 = \begin{pmatrix} p(e_1)\alpha_{11} & p(a)\alpha_{12} \\ 0 & p(e_2)\alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(a) & 0 \\ 0 & p(e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(a)\alpha_{11} & p(a)\alpha_{12} \\ 0 & p(e_2)\alpha_{22} \end{pmatrix},$$

$$\partial_P^1 \varphi_2 = \begin{pmatrix} p(a) & 0 \\ 0 & p(e_2) \end{pmatrix} p(e_2) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(a)\beta_{11} & p(a)\beta_{12} \\ p(e)\beta_{21} & p(e_2)\beta_{22} \end{pmatrix},$$

temos  $\alpha_{11} = \beta_{11}$ ,  $\alpha_{12} = \beta_{12}$ ,  $\alpha_{22} = \beta_{22}$ ,  $\beta_{21} = 0$ . Por outro lado, da condição  $\partial_P^2 \varphi^3 = \varphi^2 \partial_P^2$ , e que

$$\varphi_2 \partial_P^2 = p(e_2) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ 0 & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(b) & p(c) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(b)\beta_{11} & p(c)\beta_{11} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_P^2 \varphi_3 = \begin{pmatrix} p(b) & p(c) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} p(e_3) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(b)\gamma_{11} + p(c)\gamma_{21} & p(b)\gamma_{12} + p(c)\gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue-se  $\gamma_{11} = \beta_{11}$ ,  $\gamma_{12} = 0$ ,  $\gamma_{22} = \beta_{11}$ ,  $\gamma_{21} = 0$ . Portanto, tomando  $\alpha_{11} = \alpha$ ,  $\alpha_{12} = \beta$  e  $\alpha_{22} = \gamma$ , podemos concluir que

$$\varphi^1 = \begin{pmatrix} p(e_1)\alpha & p(a)\beta \\ 0 & p(e_2)\gamma \end{pmatrix}, \quad \varphi^2 = p(e_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad e \quad \varphi^3 = p(e_3) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

A seguir, apresentaremos os elementos da categoria de complexos que são essenciais para o Capítulo 4. Entre eles, destacam-se os complexos limitados inferiormente e superiormente. Além disso, forneceremos definições para o funtor translação, cone, bem como algumas noções relacionadas a complexos radicais.

## Complexos limitados inferiormente e superiormente

- Seja  $\mathbf{X}^\bullet$  um complexo sobre  $\mathcal{C}$ . Dizemos que  $\mathbf{X}^\bullet$  é um complexo **limitado inferiormente** (respectivamente, **superiormente**) quando existe  $m \in \mathbb{Z}$ , tal que  $\mathbf{X}^n = 0$  para todo  $n < m$  (respectivamente,  $n > m$ ).
- Um complexo é dito **limitado** quando é limitado inferiormente e superiormente.
- Um complexo é dito **concentrado de grau**  $n$  quando  $\mathbf{X}^m = 0$  para todo  $m \neq n$ .

Denotaremos por  $\mathbf{C}^b(\mathcal{C})$  a subcategoria plena de  $\mathbf{C}(\mathcal{C})$  cujos objetos são complexos limitados.



## Functor translação

Sejam  $\mathbf{X}^\bullet$  um complexo em  $\mathbf{C}(\mathcal{C})$  e  $p \in \mathbb{Z}$ . Podemos definir um novo complexo  $\mathbf{X}^\bullet[p]$ , o qual chamaremos de  $p$ -ésima translação de  $\mathbf{X}^\bullet$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{X}^n[p] := \mathbf{X}^{n+p} \text{ e } \partial_{\mathbf{X}[p]}^n := (-1)^p \partial_{\mathbf{X}}^{n+p},$$

e se  $f^\bullet : \mathbf{X}^\bullet \rightarrow \mathbf{Y}^\bullet$  é um morfismo de complexos, também podemos definir um novo morfismo  $f^\bullet[p]$  de  $\mathbf{X}^\bullet[p]$  em  $\mathbf{Y}^\bullet[p]$  da seguinte forma:

$$f^n[p] := f^{n+p}.$$

Assim, podemos definir o seguinte functor  $[p] : \mathbf{C}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{C})$ , o qual será chamado de **functor translação por  $p$** .

Notemos que  $[p]$  é um autofunctor de  $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ , pois  $[p] \circ [-p] = [-p] \circ [p] = \text{Id}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}$ . Além disso,  $[p]$  é um autofunctor quando restrito a subcategoria de complexos  $\mathbf{C}^b(\mathcal{C})$ .

## Cone do complexo

Sejam  $\mathbf{X}^\bullet$  e  $\mathbf{Y}^\bullet$  objetos em  $\mathbf{C}(\mathcal{C})$  e  $f^\bullet : \mathbf{X}^\bullet \rightarrow \mathbf{Y}^\bullet$  um morfismo. O **cone do morfismo  $f^\bullet$**  é o seguinte complexo em  $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ , o qual para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , terá a seguinte configuração:

$$\mathbf{C}(f)^\bullet := \mathbf{X}^{n+1} \oplus \mathbf{Y}^n \text{ e } \partial_{\mathbf{C}(f)}^n := \begin{pmatrix} -\partial_{\mathbf{X}}^{n+1} & f^{n+1} \\ 0 & \partial_{\mathbf{Y}}^n \end{pmatrix}$$

O complexo descrito acima será denotado por  $\mathbf{C}(f)^\bullet$ . Além disso,  $\mathbf{C}(f)^\bullet$  é relacionado com  $\mathbf{X}^\bullet[1]$  e  $\mathbf{Y}^\bullet$  via os seguintes morfismos:  $\iota_{\mathbf{Y}}^\bullet : \mathbf{Y}^\bullet \rightarrow \mathbf{C}(f)^\bullet$ , onde  $\iota_{\mathbf{Y}}^n = (0 \quad \text{Id}_{\mathbf{Y}^n})$  e  $\pi_{\mathbf{X}[1]}^\bullet : \mathbf{C}(f)^\bullet \rightarrow \mathbf{X}^\bullet[1]$ , onde  $\pi_{\mathbf{X}[1]}^n = \begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbf{X}^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Exemplo 1.38.** *Vamos considerar os projetivos no item 2 do Exemplo 1.37. Consideremos os complexos*

$$\mathbf{X}^\bullet : \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbf{P}^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

com  $\mathbf{P}^n = P_2$  e

$$\mathbf{Y}^\bullet : \dots \rightarrow \mathbf{P}^{n-1} \xrightarrow{\partial_{\mathbf{Y}}^{n-1}} \mathbf{P}^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

com  $\mathbf{P}^{n-1} = P_1$  e  $\partial_{\mathbf{Y}}^{n-1} = p(a)$ . Notemos que  $\mathbf{X}^\bullet$  e  $\mathbf{Y}^\bullet$  são objetos em  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$ , onde  $\text{proj}A$  é a subcategoria plena dos módulos projetivos de  $A\text{-mod}$ . Agora, definamos o morfismo de  $\mathbf{X}^\bullet$  para  $\mathbf{Y}^\bullet$  em  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{X}^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{P}^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ f^\bullet \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{\mathbf{P}^n} & & \downarrow & & \\ \mathbf{Y}^\bullet : & \dots & \longrightarrow & \mathbf{P}^{n-1} & \xrightarrow{\partial_{\mathbf{Y}}^{n-1}} & \mathbf{P}^n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Logo, o complexo  $\mathbf{C}(f)^\bullet$  é da seguinte forma,

$$\mathbf{C}(f)^\bullet : \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbf{P}^n \oplus \mathbf{P}^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{Id}_{\mathbf{P}^n} \\ \partial_{\mathbf{Y}}^{n-1} \end{pmatrix}} \mathbf{P}^n \rightarrow 0 \dots$$

## Homotopia

Sejam  $f^\bullet, g^\bullet : \mathbf{X}^\bullet \rightarrow \mathbf{Y}^\bullet$  morfismos em  $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ . Dizemos que  $f^\bullet$  e  $g^\bullet$  são **homotópicos**, ou seja,  $f^\bullet \sim g^\bullet$ , se existe uma família  $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de morfismos  $s^n : \mathbf{X}^n \rightarrow \mathbf{Y}^{n-1}$  em  $\mathcal{C}$  satisfazendo a seguinte condição:

$$f^n - g^n = s^n \partial_Y^{n-1} + \partial_X^n s^{n+1}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Assim, diremos que a família  $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de morfismos é uma **homotopia** de  $f^\bullet$  e  $g^\bullet$ . Graficamente, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{X}^\bullet := & \dots & \longrightarrow & \mathbf{X}^{n-1} & \xrightarrow{\partial_X^{n-1}} & \mathbf{X}^n & \xrightarrow{\partial_X^n} & \mathbf{X}^{n+1} & \xrightarrow{\partial_X^{n+1}} & \dots \\ g^\bullet \downarrow & & & g^{n-1} \downarrow & & g^n \downarrow & & g^{n+1} \downarrow & & \\ f^\bullet & & & f^{n-1} & & f^n & & f^{n+1} & & \\ \mathbf{Y}^\bullet := & \dots & \longrightarrow & \mathbf{Y}^{n-1} & \xrightarrow{\partial_Y^{n-1}} & \mathbf{Y}^n & \xrightarrow{\partial_Y^n} & \mathbf{Y}^{n+1} & \xrightarrow{\partial_Y^{n+1}} & \dots \end{array}$$

$\swarrow s^n$        $\swarrow s^{n+1}$

Notemos que “ $\sim$ ” é uma relação de equivalência. Agora, definamos o seguinte conjunto

$$H(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet) := \{f^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet) \mid f^\bullet \sim 0^\bullet\}.$$

tal conjunto  $H(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet)$  munido da soma, será um subgrupo abeliano de  $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet)$ . Vale notar que para nós, o complexo zero é denotado por  $0^\bullet$ , equanto o morfismo nulo entre dois complexos quaisquer será denotado por  $0^\bullet$ .

**Definição 1.39.** Dizemos que o morfismo  $f^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet)$  é uma **equivalência homotópica**, se existe um morfismo  $g^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(\mathbf{Y}^\bullet, \mathbf{X}^\bullet)$ , tal que  $f^\bullet g^\bullet \sim \text{Id}_{\mathbf{Y}^\bullet}$  e  $g^\bullet f^\bullet \sim \text{Id}_{\mathbf{X}^\bullet}$ .

Explicaremos melhor essa definição com o seguinte exemplo:

**Exemplo 1.40.** Vamos considerar o complexo  $\mathbf{C}(f)^\bullet$  construído no Exemplo 1.38,

$$\mathbf{C}(f)^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_2 \oplus P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} p(e_2) \\ p(a) \end{pmatrix}} P_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z}^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ g^\bullet \downarrow & & & & & \begin{pmatrix} -p(a) & p(e_1) \end{pmatrix} \downarrow & & \begin{pmatrix} p(e_2) \\ p(a) \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{C}(f)^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_1 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ h^\bullet \downarrow & & & & & \begin{pmatrix} 0 \\ p(e_1) \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{Z}^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Reparemos que,  $g^\bullet h^\bullet = \text{Id}_{\mathbf{Z}^\bullet}$ , por outro lado temos,

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{C}(f)^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} p(e_2) \\ p(a) \end{pmatrix}} & P_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
h^\bullet \downarrow & & & & & \begin{pmatrix} 0 \\ p(e_1) \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\mathbf{Z}^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
g^\bullet \downarrow & & & & & \begin{pmatrix} -p(a) & p(e_1) \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\mathbf{C}(f)^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} p(e_2) \\ p(a) \end{pmatrix}} & P_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Para ver que  $h^\bullet g^\bullet \sim \text{Id}_{\mathbf{C}(f)^\bullet}$ , basta considerar  $s^n = \begin{pmatrix} p(e_2) & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{C}(f)^\bullet := & \cdots & \longrightarrow & P_2 \oplus P_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} p(e_2) \\ p(a) \end{pmatrix}} & P_2 & \longrightarrow & \cdots \\
\text{Id}_{\mathbf{C}(f)^\bullet} - h^\bullet g^\bullet \downarrow & & & \begin{pmatrix} p(e_2) & 0 \\ p(a) & 0 \end{pmatrix} \downarrow & & \begin{pmatrix} p(e_2) & 0 \end{pmatrix} \swarrow & & \downarrow p(e_2) \\
\mathbf{C}(f)^\bullet := & \cdots & \longrightarrow & P_2 \oplus P_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} p(e_2) \\ p(a) \end{pmatrix}} & P_2 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Portanto, tanto  $g^\bullet$  quanto  $h^\bullet$  são equivalências homotópicas.

Agora, iremos introduzir uma nova categoria, a qual é chamada de **categoria de homotopia** e a denotaremos por  $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ . Esta será definida da seguinte maneira:

- $\text{Obj}(\mathbf{K}(\mathcal{C})) = \text{Obj}(\mathbf{C}(\mathcal{C}))$ .
- $\text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{C})}(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet) := \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet) / \text{H}(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet)$ , para todo  $\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet$  em  $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ .

Os **triângulos standard** em  $\mathbf{C}(\mathcal{C})$  são da forma

$$\mathbf{X}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \mathbf{Y}^\bullet \xrightarrow{\iota_Y^\bullet} \mathbf{C}(f)^\bullet \xrightarrow{\pi_{\mathbf{X}[1]}^\bullet} \mathbf{X}^\bullet[1].$$

Denotemos por  $\Delta$  a coleção de triângulos em  $\mathbf{K}(\mathcal{C})$  que são isomorfos a um triângulo standard em  $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ .

**Teorema 1.41.** *A categoria  $\mathbf{K}(\mathcal{C})$  é triangulada, com autofunctor  $[1]$  e família de triângulos distinguidos  $\Delta$ .*

*Demonstração.* Veja em [11, ]. □

A categoria de homotopia de  $\mathbf{C}^b(\mathcal{C})$  será denotada por  $\mathbf{K}^b(\mathcal{C})$ .

Observe que, no Exemplo 1.40, o complexo  $\mathbf{Z}^\bullet$  é homotopicamente equivalente ao complexo  $\mathbf{C}(f)^\bullet$ . Em outras palavras,  $\mathbf{Z}^\bullet$  é isomorfo ao complexo  $\mathbf{C}(f)^\bullet$  em  $\mathbf{K}^b(\text{proj} A)$ .

## Complexos minimais

O **radical** de um  $A$ -módulo  $X$  é a interseção de todos seus submódulos maximais e será denotado por  $\text{rad}X$ . Dizemos que um homomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  de  $A$ -módulos é um **morfismo radical** se  $\text{Im}f \subseteq \text{rad}Y$ .

Com a noção de morfismo radical, podemos definir um complexo radical.

**Definição 1.42.** *Seja  $\mathbf{X}^\bullet$  um complexo em  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$ . O complexo  $\mathbf{X}^\bullet$  é dito **minimal**, se  $\text{Im}(\partial_X^n) \subseteq \text{rad}\mathbf{X}^{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .*

Com a definição acima, podemos construir a categoria dos complexos projetivos minimais  $\mathfrak{p}(A)$ , da seguinte forma:

- $\text{Obj}(\mathfrak{p}(A)) =$  Coleção de todos os complexos projetivos minimais.
- $\text{Hom}_{\mathfrak{p}(A)}(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet) := \text{Hom}_{\mathbf{C}^b(\text{proj}A)}(\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet)$ , para quaisquer  $\mathbf{X}^\bullet, \mathbf{Y}^\bullet \in \mathfrak{p}(A)$ .

Ou seja,  $\mathfrak{p}(A)$  é uma subcategoria plena de  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$ .

**Exemplo 1.43.** *Do Exemplo 1.40, temos que o complexo  $\mathbf{Z}^\bullet$  é um complexo em  $\mathfrak{p}(A)$ , mas  $\mathbf{C}(f)^\bullet$  não é um objeto em  $\mathfrak{p}(A)$ .*

# Capítulo 2

## Categoria de Bondarenko

Neste capítulo, definiremos classes específicas de matrizes, destacando algumas de suas propriedades. Além disso, estabeleceremos que essas matrizes determinam uma categoria, a qual será chamada de “categoria de Bondarenko” e será denotada por  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . De agora em diante,  $\mathcal{Y}$  denotará um conjunto linearmente ordenado.

**Definição 2.1.** *Seja  $B$  uma matriz por blocos não necessariamente quadrada, na qual todas as entradas de todos os blocos pertencem ao corpo  $\mathbb{k}$ . Dizemos que  $B$  é uma matriz indexada por  $\mathcal{Y}$ , se é da forma:*

$$B = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & \cdots & j & \cdots \\ \hline \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ i & \cdots & B_i^j & \cdots \\ \hline \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right),$$

onde  $i$  e  $j$  são elementos de  $\mathcal{Y}$  (pode ser infinito). Denotaremos tal matriz por  $B = (B_i^j)_{i,j \in \mathcal{Y}}$ .

No presente trabalho, as matrizes em questão serão sempre finitas. Não está descartada a possibilidade de existirem faixas horizontais (que denotaremos por  $B_i$ ) ou verticais (que denotaremos por  $B^i$ ) vazias. No decorrer deste trabalho, todas as matrizes por blocos terão a propriedade adicional de que, todas as submatrizes na mesma faixa horizontal tem o mesmo número de linhas e todas as submatrizes na mesma faixa vertical tem o mesmo número de colunas

Ademais, para uma compreensão mais clara da definição anterior, apresentaremos a matriz  $B$  no formato de uma tabela, na qual os elementos do conjunto linearmente ordenado serão exibidos em azul, enquanto os blocos da matriz  $B$  serão destacados em preto.

**Exemplo 2.2.** *Considere o seguinte poset  $\mathcal{Y} = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3\}$ . Alguns exemplos, de matrizes indexadas por  $\mathcal{Y}$  são:*

$$B = \left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_3 \\ \hline \alpha_1 & B_{\alpha_1}^{\alpha_1} & B_{\alpha_1}^{\alpha_3} \\ \alpha_2 & B_{\alpha_2}^{\alpha_1} & B_{\alpha_2}^{\alpha_3} \end{array} \right), C = \left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline \alpha_1 & C_{\alpha_1}^{\alpha_1} & C_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ \alpha_2 & C_{\alpha_2}^{\alpha_1} & C_{\alpha_2}^{\alpha_2} \\ \alpha_3 & C_{\alpha_3}^{\alpha_1} & C_{\alpha_3}^{\alpha_2} \end{array} \right), D = \left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline \alpha_1 & D_{\alpha_1}^{\alpha_1} & D_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ \alpha_2 & D_{\alpha_2}^{\alpha_1} & D_{\alpha_2}^{\alpha_2} \end{array} \right).$$

Agora, repare que a faixa horizontal  $B_{\alpha_3}$  da matriz  $B$  é vazia.

A seguinte definição nos permitirá realizar uma análise de quando matrizes indexadas por  $\mathcal{Y}$  são compatíveis, ou seja, quando é possível realizar multiplicação por blocos entre essas matrizes. No entanto, antes de prosseguir, vamos estabelecer algumas notações.:

**Notação 2.3.** Seja  $B = (B_i^j)_{i,j \in \mathcal{Y}}$  uma matriz por blocos indexada por  $\mathcal{Y}$ . Para cada  $i \in \mathcal{Y}$  fixado:

- (i)  $r(B_i)$  denotará o número de linhas da faixa horizontal  $B_i$ .
- (ii)  $c(B^i)$  denotará o número de colunas da faixa vertical  $B^i$ .

**Definição 2.4.** Sejam  $B$  e  $C$  duas matrizes indexadas por  $\mathcal{Y}$ . Dizemos que  $B$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $C$ , se a faixa vertical de  $B$  é compatível com a faixa horizontal de  $C$ , ou seja, se  $r(C_x) = c(B^x)$  para cada  $x \in \mathcal{Y}$ . Em outras palavras, podemos multiplicar por blocos  $B$  por  $C$ .

**Definição 2.5.** Seja  $B$  uma matriz indexada por  $\mathcal{Y}$ . Dizemos que  $B$  é uma matriz  $\mathcal{Y}$ -autocompatível se for  $\mathcal{Y}$ -compatível consigo mesma.

**Exemplo 2.6.** Do Exemplo 2.2, a matriz  $D$  é  $\mathcal{Y}$ -autocompatível. Mas, a matriz  $B$  não é  $\mathcal{Y}$ -autocompatível, pois  $c(B^{\alpha_2}) = r(B_{\alpha_3}) = 0$ , enquanto  $r(B_{\alpha_2}) \neq 0$  e  $c(B^{\alpha_3}) \neq 0$ .

**Definição 2.7.** Seja  $\sigma$  uma involução sobre  $\mathcal{Y}$  e  $B$  uma matriz indexada por  $\mathcal{Y}$ . Dizemos que  $B$  é uma  $\sigma$ -matriz se, para quaisquer  $x$  e  $y$  em  $\mathcal{Y}$ , tal que  $\sigma(x) = y$ , as seguintes condições são satisfeitas:

$$r(B_x) = r(B_y) \quad e \quad c(B^x) = c(B^y).$$

**Exemplo 2.8.** Consideremos o poset  $\mathcal{Y} = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3\}$  como no Exemplo 2.2, definimos a involução  $\sigma$  sobre  $\mathcal{Y}$ , dada por  $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$ , e  $\sigma(\alpha_3) = \alpha_3$ . A matriz  $D$  é uma  $\sigma$ -matriz, se  $r(D_{\alpha_1}) = r(D_{\alpha_2}) = c(D^{\alpha_1}) = c(D^{\alpha_2})$ .

**Definição 2.9.** Seja  $(\mathcal{Y}, \sigma)$  um poset com involução. Denominaremos uma matriz  $B$  como uma **matriz de Bondarenko** se:

- (i)  $B$  é uma  $\mathcal{Y}$ -autocompatível.
- (ii)  $B$  é  $\sigma$ -matriz.
- (iii)  $B^2 = 0$ .

No trabalho de V. Bekkert e H. Merklen em [2], as matrizes de Bondarenko são chamadas de  $\mathcal{Y}$ -matriz.

**Exemplo 2.10.** Do Exemplo 2.8

$$D = \left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline \alpha_1 & D_{\alpha_1}^{\alpha_1} & D_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ \alpha_2 & D_{\alpha_2}^{\alpha_1} & D_{\alpha_2}^{\alpha_2} \end{array} \right)$$

é uma matriz de Bondarenko se,  $D_{\alpha_1}^{\alpha_1} = D_{\alpha_2}^{\alpha_1} = D_{\alpha_2}^{\alpha_2} = 0$ .

**Definição 2.11.** Seja  $(\mathcal{Y}, \sigma)$  um poset com involução. Uma  $\sigma$ -matriz  $B$  é dita de  $\sigma$ -matriz especial quando satisfaz as seguintes condições:

- (i) Se  $j < i$ , então  $B_i^j = 0$ , onde  $<$  é a relação de ordem no poset  $\mathcal{Y}$ . Ou seja, todos os blocos abaixo da diagonal (por blocos) principal são 0.
- (ii) Se  $\sigma(x) = y$ , então  $B_x^x = B_y^y$ .

**Exemplo 2.12.** Seja  $\mathcal{Y} = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3\}$ , com a involução definida  $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$ ,  $\sigma(\alpha_2) = \alpha_1$  e  $\sigma(\alpha_3) = \alpha_3$ . A matriz indexada por  $\mathcal{Y}$

$$B = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \hline \alpha_1 & B_{\alpha_1}^{\alpha_1} & B_{\alpha_1}^{\alpha_2} & B_{\alpha_1}^{\alpha_3} \\ \alpha_2 & B_{\alpha_2}^{\alpha_1} & B_{\alpha_2}^{\alpha_2} & B_{\alpha_2}^{\alpha_3} \end{array} \right)$$

será uma  $\sigma$ -matriz especial, quando  $B_{\alpha_1}^{\alpha_1} = B_{\alpha_2}^{\alpha_2}$  e  $B_{\alpha_2}^{\alpha_1} = 0$ , isto é

$$B = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \hline \alpha_1 & B_{\alpha_1}^{\alpha_1} & B_{\alpha_1}^{\alpha_2} & B_{\alpha_1}^{\alpha_3} \\ \alpha_2 & 0 & B_{\alpha_2}^{\alpha_2} & B_{\alpha_2}^{\alpha_3} \end{array} \right)$$

Neste exemplo destacamos com vermelho a diagonal por blocos.

**Definição 2.13.** Para um  $\mathcal{Y}$  e involução  $\sigma$  sobre  $\mathcal{Y}$  fixados, a **Categoria de Bondarenko**  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é definida da seguinte forma:

- $\text{Obj}(s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})) =$  Todas as matrizes de Bondarenko.
- $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C) =$  Todas as matrizes  $T$  tais que
  - (i)  $T$  é uma  $\sigma$ -matriz especial.
  - (ii)  $B$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $T$  e  $T$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $C$ .
  - (iii)  $BT = TC$ .

E a composta de morfismos sendo a multiplicação de matrizes por blocos. Vale a pena frizar no fato que, a composta será no sentido das flechas.

**Observação 2.14.**

- (i) Uma vez que as matrizes  $T$  são triangulares superiores por blocos, para ter um isomorfismo  $T$  na categoria  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , é necessário e suficiente que os blocos diagonais  $T_i^i$  de  $T$  sejam todos invertíveis.
- (ii) Na Proposição 2.22, mostraremos explicitamente a soma direta em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

Neste trabalho denotaremos por  $\mathbb{O}$  a matriz com zero linhas e zero colunas.

**Observação 2.15.**  $\mathbb{O}$  é um objeto em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , além disso, é vacuamente o objeto zero em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Para ver que  $\mathbb{O} \in s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , notemos que

- (i) Para cada  $x \in \mathcal{Y}$ , temos que  $r(\mathbb{O}_x) = 0 = c(\mathbb{O}^x)$ , logo a partição vertical de  $\mathbb{O}$  é compatível com partição horizontal de  $\mathbb{O}$ .
- (ii) Para cada  $x, y \in \mathcal{Y}$  tal que  $\sigma(x) = y$ , temos  $r(\mathbb{O}_x) = 0 = r(\mathbb{O}_y)$ .
- (iii) Por vacuidade, podemos concluir que  $\mathbb{O}^2 = 0$ .

## 2.1 Aditividade de Bondarenko

Em [2] e [5], é afirmado, sem apresentação de prova, que a categoria de Bondarenko  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é uma  $\mathbb{k}$ -categoria. O propósito desta seção é demonstrar essa afirmação. Para alcançar esse objetivo, começaremos mostrando que a categoria é pré-aditiva e concluiremos apresentando a operação de soma direta entre dois objetos em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Finalmente, demonstraremos que, de forma geral, a categoria  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  não é abeliana.

**Lema 2.16.** *Sejam  $T, S \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$ , então  $T + S \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$  com a soma de matrizes.*

*Demonstração.*

- (i) Visto que  $T$  e  $S$  são morfismos, podemos afirmar que  $r(T_x) = c(B^x) = r(S_x)$ , o que implica que  $r((T + S)_x) = c(B^x)$  para cada  $x \in \mathcal{Y}$ . Dessa forma, concluímos que  $B$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $T + S$ . (O mesmo raciocínio se aplica a  $C$ ).
- (ii) Dados os morfismos  $BT = TC$  e  $BS = SC$ , segue que  $BT + BS = TC + SC$ , resultando em  $B(T + S) = (T + S)C$ .
- (iii) Se  $j < i$ , então  $T_i^j = 0$ ,  $S_i^j = 0$ , logo  $(T + S)_i^j = 0$ . Além disso, se  $\sigma(x) = y$ , segue-se que  $T_x^x = T_y^y$  e  $S_x^x = S_y^y$ , assim  $(T + S)_x^x = (T + S)_y^y$ . Portanto, podemos afirmar que  $T + S$  é uma  $\sigma$ -matriz especial.

Portanto,  $T + S$  é morfismo. □

**Proposição 2.17.** *A categoria  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é pré-aditiva com a soma usual de matrizes.*

*Demonstração.* Sejam  $B$  e  $C$  objetos em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Precisamos considerar dois casos:

- (i) Quando  $B = \mathbb{O}$  ou  $C = \mathbb{O}$ , neste caso, dado que  $\mathbb{O}$  é o objeto zero em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , a soma em  $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$  será definida de maneira trivial, ou seja,  $\mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$ . Assim,  $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$  é um grupo abeliano.
- (ii) Por outro lado, quando  $B, C \neq \mathbb{O}$ , a soma em  $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$  é a soma usual de matrizes. Das propriedades da soma de matrizes, concluímos que  $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$  é um grupo abeliano. Além disso, pelas propriedades do produto de matrizes por blocos, o produto distribui com a soma de matrizes. Pelo Lema 2.16, temos que a soma de morfismos em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é um morfismo. □

Denotaremos o morfismo nulo em  $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$  por  $\mathbf{0}_B^C$  ou simplesmente por  $\mathbf{0}$  quando não houver confusão. Além disso, para qualquer  $B \in s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , neste trabalho representaremos o suporte de  $B$  por  $\text{Supp}(B) := \{x \in \mathcal{Y} \mid B_x \neq \emptyset\}$ .

**Notação 2.18.** *Para qualquer morfismo  $T \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$ , definimos a matriz  $\mathbf{C}_T = \left( (\mathbf{C}_T)_i^j \right)_{i, j \in \mathcal{Y}}$ , onde cada  $(i, j)$ -ésimo bloco tem a forma*

$$(\mathbf{C}_T)_i^j = \begin{pmatrix} -B_i^j & T_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{pmatrix}.$$

Para cada  $i, j \in \text{Supp}(\mathbf{C}_T) = \text{Supp}(B) \cup \text{Supp}(C)$ , podemos visualizar tais blocos na tabela a seguir



$\begin{pmatrix} -B_i^j & T_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{pmatrix}$	$j \in \text{Supp}(B) \cap \text{Supp}(C)$	$j \in \text{Supp}(B) \setminus \text{Supp}(C)$	$j \in \text{Supp}(C) \setminus \text{Supp}(B)$
$i \in \text{Supp}(B) \cap \text{Supp}(C)$	$\begin{pmatrix} -B_i^j & T_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -B_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} T_i^j \\ C_i^j \end{pmatrix}$
$i \in \text{Supp}(B) \setminus \text{Supp}(C)$	$\begin{pmatrix} -B_i^j & T_i^j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -B_i^j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} T_i^j \end{pmatrix}$
$i \in \text{Supp}(C) \setminus \text{Supp}(B)$	$\begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} C_i^j \end{pmatrix}$

Observe que, para o morfismo identidade  $\text{Id}_B : B \rightarrow B$ , todos os blocos da matriz  $\mathbf{C}_{\text{Id}_B}$  são da forma

$$\begin{pmatrix} -B_i^j & (\text{Id}_B)_i^j \\ (\mathbf{0}_B^B)_i^j & B_i^j \end{pmatrix}_{i,j \in \mathcal{Y}}.$$

**Lema 2.19.**  $\mathbf{C}_T$  é um objeto em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , para qualquer  $T \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(A, B)$ .

*Demonstração.*

- (i)  $\mathbf{C}_T$  é  $\mathcal{Y}$ -autocompatível, pois para cada  $x \in \mathcal{Y}$ , temos que  $r((\mathbf{C}_T)_x) = r(B_x) + r(C_x) = c(B^x) + c(C^x) = c((\mathbf{C}_T)^x)$ .
- (ii)  $\mathbf{C}_T$  é  $\sigma$ -matriz, porque para cada  $x, y \in \mathcal{Y}$  com  $\sigma(x) = y$ , temos que  $r((\mathbf{C}_T)_x) = r(B_x) + r(C_x) = r(B_y) + r(C_y) = r((\mathbf{C}_T)_y)$ . O mesmo para a faixa vertical.
- (iii) Por fim,  $\mathbf{C}_T^2 = 0$ , pois  $B^2 = 0$ ,  $C^2 = 0$ ,  $TC = BT$  e

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_T^2)_i^j &= \left( \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} -B_i^k & T_i^k \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^k & C_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B_k^j & T_k^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_k^j & C_k^j \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sum_{k \in \mathcal{Y}} B_i^k B_k^j & \sum_{k \in \mathcal{Y}} (T_i^k C_k^j - B_i^k T_k^j) \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j & \sum_{k \in \mathcal{Y}} C_i^k C_k^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (B^2)_i^j & (TC - BT)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j & (C^2)_i^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para todo  $i, j \in \mathcal{Y}$ . Portanto,  $\mathbf{C}_T$  é um objeto em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . □

**Notação 2.20.** Em termos da Notação 2.18, serão introduzidas as seguintes matrizes associadas aos pares ordenados de objetos  $(B, C)$

$$\begin{aligned} \tilde{\iota}_B &:= \left( (\text{Id}_B)_i^j \quad (\mathbf{0}_B^C)_i^j \right)_{i,j \in \mathcal{Y}}, & \iota_C &:= \left( (\mathbf{0}_C^B)_i^j \quad (\text{Id}_C)_i^j \right)_{i,j \in \mathcal{Y}}, \\ \pi_B &:= \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{pmatrix}_{i,j \in \mathcal{Y}} & e & \tilde{\pi}_C := \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^C)_i^j \\ (\text{Id}_C)_i^j \end{pmatrix}_{i,j \in \mathcal{Y}}. \end{aligned}$$

Por exemplo, o  $(i, j)$ -ésimo bloco de  $\tilde{\iota}_B$  é

$$(\tilde{\iota}_B)_i^j = \left( (\text{Id}_B)_i^j \quad (\mathbf{0}_B^C)_i^j \right)$$

e tem  $r(B_i)$  linhas e  $c(B^j) + c(C^j)$  colunas. Para  $i \in \text{Supp}(B)$  e  $j \in \text{Supp}(B) \cup \text{Supp}(C)$  podemos ilustrar com a seguinte tabela os blocos:

$(\text{Id}_B)_i^i \quad (\mathbf{0}_B^C)_i^j$	$j \in \text{Supp}(B) \cap \text{Supp}(C)$	$j \in \text{Supp}(B) \setminus \text{Supp}(C)$	$j \in \text{Supp}(C) \setminus \text{Supp}(B)$
$i \in \text{Supp}(B)$	$(\text{Id}_B)_i^i \quad (\mathbf{0}_B^C)_i^j$	$(\text{Id}_B)_i^i$	$(\mathbf{0}_B^C)_i^j$

Da mesma forma, para os outros  $(i, j)$ -ésimos blocos.

O seguinte Lema irá fazer uma análise de quando estas matrizes são morfismos em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

**Lema 2.21.** *Se  $T \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$ . Então,*

$$\iota_C \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(C, \mathbf{C}_T) \quad e \quad \pi_B \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(\mathbf{C}_T, -B).$$

Além disso,

$$\tilde{\iota}_B \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(-B, \mathbf{C}_T) \quad e \quad \tilde{\pi}_C \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(\mathbf{C}_T, C)$$

se, e somente se,  $T = \mathbf{0}$ .

*Demonstração.* Mostraremos apenas para  $\iota_C$ , porque para  $\pi_B$  a prova é análoga.

(i) Vejamos que  $C$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $\iota_C$  e que  $\iota_C$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $\mathbf{C}_T$ . Para todo  $x \in \mathcal{Y}$ , temos que  $c(C^x) = r((\iota_C)_x)$  e  $c((\iota_C)^x) = c(B^x) + c(C^x) = c((\mathbf{C}_T)^x)$  por construção de  $\iota_C$ . Logo,  $C$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $\iota_C$  e  $\iota_C$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $\mathbf{C}_T$ .

(ii)  $\iota_C$  é  $\sigma$ -matriz especial, pois dado  $i < j \in \mathcal{Y}$ , temos que  $(\iota_C)_i^j = \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \end{array} \right)$  e se  $\sigma(x) = y$ , tem-se que

$$(\iota_C)_x^x = \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)_x^x & (\text{Id}_C)_x^x \\ (\mathbf{0}_C^C)_x^x & (\mathbf{0}_C^C)_x^x \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)_y^y & (\text{Id}_C)_y^y \\ (\mathbf{0}_C^C)_y^y & (\mathbf{0}_C^C)_y^y \end{array} \right) = (\iota_C)_y^y.$$

Logo,  $\iota_C$  é uma  $\sigma$ -matriz especial.

(iii) As propriedades de  $\mathcal{Y}$ -compatível e  $\sigma$ -matriz especial da definição de morfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , decorrem da última construção. A igualdade  $C\iota_C = \iota_C\mathbf{C}_T$  é consequência dos seguintes cálculos

$$\begin{aligned} (C\iota_C)_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} C_i^k \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)_k^j & (\text{Id}_C)_k^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_k^j & (\mathbf{0}_C^C)_k^j \end{array} \right) = C_i^j \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)_j^j & (\text{Id}_C)_j^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_j^j & (\mathbf{0}_C^C)_j^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)_i^i & (\text{Id}_C)_i^i \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} -B_i^j & T_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{array} \right) = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)_i^k & (\text{Id}_C)_i^k \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} -B_k^j & T_k^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_k^j & C_k^j \end{array} \right) = (\iota_C\mathbf{C}_T)_i^j \end{aligned}$$

para todo  $i, j \in \mathcal{Y}$ . Portanto,  $\iota_C$  é morfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

Por outro lado, aplicando o mesmo raciocínio e o fato que

$$(B\tilde{\iota}_B)_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} B_i^k \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_B)_k^j & (\mathbf{0}_B^C)_k^j \\ (\mathbf{0}_B^B)_k^j & (\mathbf{0}_B^B)_k^j \end{array} \right) = B_i^j \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_B)_j^j & (\mathbf{0}_B^C)_j^j \\ (\mathbf{0}_B^B)_j^j & (\mathbf{0}_B^B)_j^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} B_i^j & (\mathbf{0}_B^C)_i^j \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\iota}_B\mathbf{C}_T)_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_B)_i^k & (\mathbf{0}_B^C)_i^k \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} B_k^j & T_k^j \\ (\mathbf{0}_B^B)_k^j & C_k^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_B)_i^i & (\mathbf{0}_B^C)_i^i \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} B_i^j & T_i^j \\ (\mathbf{0}_B^B)_i^j & C_i^j \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc} B_i^j & T_i^j \end{array} \right) \end{aligned}$$

temos que  $\tilde{\iota}_B$  é morfismo se e somente se  $T = \mathbf{0}$ . Da mesma forma para  $\tilde{\pi}_C$ .

□

Por fim, iremos mostrar que  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é fechado por soma direta.

**Proposição 2.22.** *Sejam  $B, C$  objetos em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . A soma direta em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  entre  $B$  e  $C$ , é dada por*

$$B \oplus C = \left( \begin{array}{c|c} B_i^j & (\mathbf{0}_B^C)_i^j \\ \hline (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{array} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}}.$$

*Demonstração.* Sejam  $B$  e  $C$  dois objetos em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Denotemos por  $\mathbf{C}_0$  o objeto  $\mathbf{C}_{\mathbf{0}_{-B}^C} = \left( \begin{array}{c|c} B_i^j & (\mathbf{0}_B^C)_i^j \\ \hline (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{array} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}}$  em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  (Lema 2.19). Sob as notações do Lema 2.21 e o Teorema 1.6 é suficiente mostrar que

$$\tilde{\iota}_B \tilde{\pi}_C = 0, \quad \iota_C \pi_B = 0, \quad \tilde{\iota}_B \pi_B = \text{Id}_B, \quad \iota_C \tilde{\pi}_C = \text{Id}_C \quad \text{e} \quad \pi_B \tilde{\iota}_B + \tilde{\pi}_C \iota_C = \text{Id}_{\mathbf{C}_0},$$

o qual segue por multiplicação de matrizes, permitindo concluir que  $\mathbf{C}_0$  com inclusão  $\tilde{\iota}_B$ ,  $\iota_C$ , e projeções  $\pi_B$  e  $\tilde{\pi}_C$  é a soma direta de  $B$  e  $C$  em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

□

**Corolário 2.23.**  *$s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é uma  $\mathbb{k}$ -categoria.*

*Demonstração.* Como as operações de soma e composição em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  são definidas sendo a soma e o produto usual de matrizes, então segue claramente que  $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$  é um  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial para todo  $B, C \in s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

Além disso,  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é pré-aditiva pela Proposição 2.17 e pela Proposição 2.22  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é fechada por soma direta.

□

**Observação 2.24.** *É importante notar que, em geral,  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  não é uma categoria abeliana. Por exemplo, consideremos um poset  $(\mathcal{Y}, <)$  com no mínimo 3 elementos, a saber  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ , munido de uma involução tal que  $\sigma(\alpha_3) = \alpha_3$  e*

$$\sigma(\alpha_i) = \alpha_i \quad (i = 1, 2) \quad \text{ou} \quad \sigma(\alpha_1) = \alpha_2.$$

*Agora, considere o seguinte morfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ ,*

$$T = \left( \begin{array}{c|c} \alpha_3 & \\ \hline \alpha_1 & 0 \\ \hline \alpha_2 & 1 \end{array} \right) : B = \left( \begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \hline \alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline \alpha_2 & 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow C = \left( \begin{array}{c|c} \alpha_3 & \\ \hline \alpha_3 & 0 \end{array} \right)$$

*e suponha que a categoria  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é abeliana.*

- *Vejamos que  $T$  é um epimorfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . De fato, para qualquer  $\pi : C \longrightarrow Q$  em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  tal que  $T\pi = 0$ , tem-se  $\pi = 0$ . Para isso, tome  $G = \left( \begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \hline \alpha_3 & 0 & 1 \end{array} \right)$  um matriz indexada por  $\mathcal{Y}$  e note que  $\pi = GT\pi = 0$ . Logo, cokernel de  $T$  é  $\mathbb{O}$ .*

- Seja  $\iota$  o morfismo de  $K = \left( \begin{array}{c|c|c} & & \alpha_1 \\ \hline & & \\ \hline \alpha_1 & & 0 \end{array} \right)$  para  $B$  em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , descrito da forma  $\iota = \left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline & 1 & 0 \\ \hline \alpha_1 & & 0 \end{array} \right)$ . Dado que  $\iota T = 0$ , vejamos que o par  $(K, \iota)$  satisfaz a propriedade universal do kernel de  $T$ .

Considere o par  $(K^*, \iota^*)$ , onde  $K^*$  é uma matriz em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  cujo tamanho é  $n \times n$  com  $n \neq 0$  e  $\iota^*$  é um morfismo de  $K^*$  para  $B$  satisfazendo  $\iota^* T = 0$ . Da última igualdade segue que

$$\iota^* = \left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline i_1 & (\iota^*)_{i_1}^{\alpha_1} & 0 \\ i_2 & (\iota^*)_{i_2}^{\alpha_1} & 0 \\ i_3 & (\iota^*)_{i_3}^{\alpha_1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ i_r & (\iota^*)_{i_r}^{\alpha_1} & 0 \end{array} \right)$$

com  $\sum_{i \in \mathcal{Y}} r((\iota^*)_i) = n$  e  $c((\iota^*)^{\alpha_1}) = c((\iota^*)^{\alpha_2}) = 1$ . Note que, existe um único morfismo  $u : K^* \rightarrow K$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\iota} & B & \xrightarrow{T} & C \\ & \swarrow \exists! u & \nearrow \iota^* & & \\ & & K^* & & \end{array}$$

onde

$$u = \left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \\ \hline i_1 & (\iota^*)_{i_1}^{\alpha_1} & \\ i_2 & (\iota^*)_{i_2}^{\alpha_1} & \\ i_3 & (\iota^*)_{i_3}^{\alpha_1} & \\ \vdots & \vdots & \\ i_r & (\iota^*)_{i_r}^{\alpha_1} & \end{array} \right)$$

Logo, kernel de  $T$  é o par  $(K, \iota)$ .

Como  $\text{coker}(T) = \mathbb{O}$  e  $\text{ker}(T) = \left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \\ \hline & & \\ \hline \alpha_1 & & 0 \end{array} \right)$  com inclusão

$$\left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline & 1 & 0 \\ \hline \alpha_1 & & 0 \end{array} \right) : \text{ker}(T) \rightarrow \left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline \alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline \alpha_2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e tal inclusão é mono-split com inverso  $\left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \\ \hline \alpha_1 & 1 & \\ \hline \alpha_2 & & 0 \end{array} \right)$ , logo  $T$  é epi-split. Isso contradiz

o fato de que não existe um morfismo não nulo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  da forma  $\left( \begin{array}{c|c|c} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline \alpha_3 & & \end{array} \right)$ . Portanto,  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  não é categoria abeliana.

## Capítulo 3

# O quociente $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ da categoria de Bondarenko

Neste capítulo, apresentaremos uma nova categoria, denotada por  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , a qual é uma categoria quociente de  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . O objetivo é demonstrar que  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é uma categoria triangulada. No entanto, antes de avançarmos nesta discussão, estabeleceremos uma relação sobre os morfismos em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

**Definição 3.1.** *Sejam  $S, T \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$  dizemos que  $T \equiv S$  se, e somente se, existe uma matriz  $K$  satisfazendo:*

( $\kappa$ -i)  $B$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $K$  e  $K$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $C$ .

( $\kappa$ -ii)  $T - S = BK + KC$ .

( $\kappa$ -iii) Se  $i > j \in \mathcal{Y}$ , então  $K_i^j = 0$ .

( $\kappa$ -iv) Se  $\sigma(i) = j$ , então  $K_i^i = K_j^j$ .

Um ponto importante a ser observado aqui, é o fato de que, em geral  $K$  não é necessariamente um morfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  pelo item ( $\kappa$ -ii). A matriz  $K$  que satisfaz as condições acima, será chamada de  $\kappa$ -**matriz**.

**Lema 3.2.**  $\equiv$  é uma relação de equivalência.

*Demonstração.* Vamos verificar apenas a transitividade. Sejam  $T, S, V \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$ , tais que  $T \equiv S$  e  $S \equiv V$ , então existem  $\kappa$ -matrizes  $K_1$  e  $K_2$  de modo que  $T - S = BK_1 + K_1C$  e  $S - V = BK_2 + K_2C$ . Somando as parcelas obtemos,

$$T - V = (BK_1 + K_1C) + (BK_2 + K_2C) = B(K_1 + K_2) + (K_1 + K_2)C.$$

Portanto,  $T \equiv V$ . □

**Lema 3.3.** *O conjunto  $\Sigma := \{T \text{ morfismo em } s(\mathcal{Y}, \mathbb{k}) \mid T \equiv \mathbf{0}\}$  é um ideal bilateral em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .*

*Demonstração.* A demonstração irá seguir os passos da Definição 1.7:

(i)  $\mathbf{0} \in \Sigma$ , pois  $\mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$ .

- (ii) Sejam  $F, G$  em  $\Sigma(B, C)$  e  $\mu_1, \mu_2$  em  $\mathbb{k}$ . Como  $F, G \equiv \mathbf{0}_B^C$ , então existem  $\kappa$ -matrizes  $K_1$  e  $K_2$  tais que

$$F = BK_1 + K_1C \quad \text{e} \quad G = BK_2 + K_2C.$$

Agora, multiplicando a igualdade acima pelas constantes  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , respectivamente, temos

$$\mu_1 F = \mu_1 BK_1 + \mu_1 K_1C \quad \text{e} \quad \mu_2 G = \mu_2 BK_2 + \mu_2 K_2C,$$

as quais ainda estão em  $\Sigma(B, C)$ , e além disso, como  $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C)$  é um  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial, tem-se  $\mu_1 F + \mu_2 G \in \Sigma(B, C)$ .

- (iii) Sejam  $F$  em  $\Sigma(B, C)$  e  $G$  em  $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(C, D)$ . Dado que  $F \equiv \mathbf{0}_B^C$  existe  $\kappa$ -matriz  $K$  tal que

$$F = BK + KC.$$

Do fato que  $CG = GD$  e da multiplicação por  $G$  à direita na igualdade acima, temos

$$FG = BKG + KCG = BKG + KGD = B\tilde{K} + \tilde{K}D,$$

onde  $\tilde{K} = KG$  é uma  $\kappa$ -matriz. Dessa forma, podemos concluir que  $FG \equiv \mathbf{0}_B^D$ . Portanto,  $FG \in \Sigma(B, D)$ . O mesmo raciocínio, pode ser usado para caso à esquerda.

Portanto,  $\Sigma$  é um ideal bilateral em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .  $\square$

A seguir definiremos uma categoria quociente da categoria de Bondarenko  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

**Definição 3.4.**  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é uma categoria da seguinte forma:

- $\text{Obj}(\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})) = \text{Obj}(s(\mathcal{Y}, \mathbb{k}))$ .
- $\text{Hom}_{\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C) = \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(B, C) / \Sigma(B, C)$ , para cada  $B, C \in s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

É importante notar que  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é uma  $\mathbb{k}$ -categoria e também não é uma categoria abeliana para este fim, é suficiente adaptar a Observação 2.24.

### 3.1 Estrutura triangulada para $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$

Nesta seção, daremos uma estrutura triangulada para a categoria  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , mas antes definamos o seguinte autofunctor sobre  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

$$\begin{array}{ccc} [-] : s(\mathcal{Y}, \mathbb{k}) & \longrightarrow & s(\mathcal{Y}, \mathbb{k}) \\ B & \longmapsto & [B] = -B \\ T \downarrow & & \downarrow [T] = T \\ C & \longmapsto & [C] = -C \end{array} \quad (3.1)$$

**Definição 3.5.** Um triângulo é dito **standard** em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , se é da seguinte forma

$$B \xrightarrow{T} C \xrightarrow{\iota_C} \mathbf{C}_T \xrightarrow{\pi_B} [B]$$

onde  $T : B \rightarrow C$  é um morfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  e  $\iota_C, \pi_B$  são como definidos na Notação 2.20.

Dado que  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é uma categoria quociente de  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , ou seja,  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k}) = s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})/\Sigma$  existe um funtor projeção de  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k}) \xrightarrow{\mathcal{G}} \kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , de modo que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} s(\mathcal{Y}, \mathbb{k}) & \xrightarrow{[-]} & s(\mathcal{Y}, \mathbb{k}) \\ \mathcal{G} \downarrow & & \downarrow \mathcal{G} \\ \kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k}) & \xrightarrow{[-]} & \kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k}) \end{array}$$

Isto significa que o autofuntor  $[-]$  é bem definido em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Agora, definamos a seguinte família de triângulos distinguidos.

**Definição 3.6.** *O triângulo  $(X, Y, Z, u, v, w)$  é dito **triângulo distinguido** em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , se é isomorfo a um triângulo standard em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Em outras palavras, existe o seguinte isomorfismo de triângulos em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & [X] \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ B & \xrightarrow{T} & C & \xrightarrow{\iota_C} & \mathbf{C}_T & \xrightarrow{\pi_B} & [B] \end{array}$$

onde  $T : B \rightarrow C$  é um morfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . A família de triângulos distinguidos em  $\kappa(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$  será denotada por  $\mathcal{T}$ .

A seguir, iremos enunciar o resultado principal do capítulo.

**Teorema 3.7.** *A categoria  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  com o autofuntor  $[-]$  e a família de triângulos  $\mathcal{T}$  é triangulada.*

*Demonstração.*

TR1 Dados dois triângulos isomorfos  $(X, Y, Z, u, v, w)$ ,  $(X', Y', Z', f', g', h')$  em que  $(X, Y, Z, u, v, w)$  é um triângulo pertencente à família  $\mathcal{T}$ , pela transitividade de isomorfismos, segue que  $(X', Y', Z', f', g', h')$  pertence à família  $\mathcal{T}$ .

TR2 Vejamos que  $\text{Id}_{\mathbf{C}_{\text{Id}_B}} \equiv \mathbf{0}$  com a  $\kappa$ -matriz  $K = \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j \\ (\text{Id}_B)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j \end{array} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}}$  tal matriz

satisfaz as condições  $(\kappa\text{-i})$ ,  $(\kappa\text{-iii})$  e  $(\kappa\text{-iv})$  por construção, restando apenas verificar que  $K$  satisfaz  $(\kappa\text{-ii})$ . Para este fim, lembremos o cone da identidade na Notação 2.18, notemos que

$$(\mathbf{C}_{\text{Id}_B} K)_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{cc} -B_i^k & (\text{Id}_B)_i^k \\ (\mathbf{0}_B^B)_i^k & B_i^k \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_B^B)_k^j & (\mathbf{0}_B^B)_k^j \\ (\text{Id}_B)_k^j & (\mathbf{0}_B^B)_k^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_B)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j \\ B_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j \end{array} \right),$$

$$(K \mathbf{C}_{\text{Id}_B})_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_B^B)_i^k & (\mathbf{0}_B^B)_i^k \\ (\text{Id}_B)_i^k & (\mathbf{0}_B^B)_i^k \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} -B_k^j & (\text{Id}_B)_k^j \\ (\mathbf{0}_B^B)_k^j & B_k^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j \\ -B_i^j & (\text{Id}_B)_i^j \end{array} \right)$$

para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$ . Portanto,  $(\mathbf{C}_{\text{Id}_B} K)_i^j + (K \mathbf{C}_{\text{Id}_B})_i^j = (\text{Id}_{\mathbf{C}_{\text{Id}_B}})_i^j$ .

Por fim, como  $\text{Id}_{\mathbf{C}_{\text{Id}_B}} \equiv \mathbf{0}$ , então  $\mathbf{C}_{\text{Id}_B} \cong \mathbb{0}$  em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Consequentemente, temos o seguinte isomorfismo de triângulos em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{\text{Id}_B} & B & \xrightarrow{\iota_B} & \mathbf{C}_{\text{Id}_B} & \xrightarrow{\pi_B} & [B] \\ \text{Id}_B \downarrow & & \text{Id}_B \downarrow & & \mathbf{0} \downarrow & & \text{Id}_B \downarrow \\ B & \xrightarrow{\text{Id}_B} & B & \xrightarrow{\mathbf{0}} & \mathbb{0} & \xrightarrow{\mathbf{0}} & [B] \end{array}$$

TR3 Segue das definições 3.5 e 3.6.

TR4 Primeiramente, vejamos que, para qualquer morfismo  $T \in \text{Hom}_s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})(B, C)$  as matrizes

$$\Gamma_1 = \left( \begin{array}{ccc} -T_i^j & (\text{Id}_B)_i^j & (\mathbf{0}_B^C)_i^j \end{array} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \left( \begin{array}{c} (\mathbf{0}_C^B)_i^j \\ (\text{Id}_B)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{array} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}},$$

são morfismos com  $\Gamma_1 \in \text{Hom}_s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})([B], \mathbf{C}_{\iota_C})$  e  $\Gamma_2 \in \text{Hom}_s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})(\mathbf{C}_{\iota_C}, [B])$ . Para este fim, lembremos que

$$\text{Supp}(\mathbf{C}_{\iota_C}) = \text{Supp}(C) \cup \text{Supp}(\mathbf{C}_T) = \text{Supp}(C) \cup (\text{Supp}(C) \cup \text{Supp}(B)) = \text{Supp}(C) \cup \text{Supp}(B)$$

cuja matriz por blocos é descrita (ver Notação 2.18) por

$$\mathbf{C}_{\iota_C} = \left( \begin{array}{cc} -C_i^j & (\iota_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_{\mathbf{C}_T}^C)_i^j & (\mathbf{C}_T)_i^j \end{array} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}} = \left( \begin{array}{ccc} -C_i^j & (\mathbf{0}_C^B)_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^j & -B_i^j & T_i^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{array} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}}$$

Notando que  $\text{Supp}(C) \setminus \text{Supp}(\mathbf{C}_T) = \emptyset$ , da Notação 2.18, podemos visualizar melhor os blocos  $(\mathbf{C}_{\iota_C})_i^j$  nas seguintes tabelas

$\left( \begin{array}{cc} -C_i^j & (\iota_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_{\mathbf{C}_T}^C)_i^j & (\mathbf{C}_T)_i^j \end{array} \right)$	$j \in \text{Supp}(C) \cap \text{Supp}(\mathbf{C}_T)$	$j \in \text{Supp}(\mathbf{C}_T) \setminus \text{Supp}(C)$
$i \in \text{Supp}(C) \cap \text{Supp}(\mathbf{C}_T)$	$\left( \begin{array}{cc} -C_i^j & (\iota_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_{\mathbf{C}_T}^C)_i^j & (\mathbf{C}_T)_i^j \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{c} (\iota_C)_i^j \\ (\mathbf{C}_T)_i^j \end{array} \right)$
$i \in \text{Supp}(\mathbf{C}_T) \setminus \text{Supp}(C)$	$\left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_{\mathbf{C}_T}^C)_i^j & (\mathbf{C}_T)_i^j \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{c} (\mathbf{C}_T)_i^j \end{array} \right)$

Equivalentemente, usando as notações 2.18 e 2.20

$\left( \begin{array}{ccc} -C_i^j & (\mathbf{0}_C^B)_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^j & -B_i^j & T_i^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{array} \right)$	$j \in \text{Supp}(C) \cap \text{Supp}(B)$	$j \in \text{Supp}(C) \setminus \text{Supp}(B)$	$j \in \text{Supp}(B) \setminus \text{Supp}(C)$
$i \in \text{Supp}(C) \cap \text{Supp}(B)$	$\left( \begin{array}{ccc} -C_i^j & (\mathbf{0}_C^B)_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^j & -B_i^j & T_i^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} -C_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^j & T_i^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^j & C_i^j \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{c} (\mathbf{0}_B^C)_i^j \\ -B_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{array} \right)$
$i \in \text{Supp}(C) \setminus \text{Supp}(B)$	$\left( \begin{array}{ccc} -C_i^j & (\mathbf{0}_C^B)_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^j & (\mathbf{0}_C^B)_i^j & C_i^j \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} -C_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^j & C_i^j \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{c} (\mathbf{0}_B^C)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{array} \right)$
$i \in \text{Supp}(B) \setminus \text{Supp}(C)$	$\left( \begin{array}{ccc} (\mathbf{0}_B^C)_i^j & -B_i^j & T_i^j \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^C)_i^j & T_i^j \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{c} -B_i^j \end{array} \right)$



- Vejamos que  $\Gamma_1 \in \text{Hom}_s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})([B], \mathbf{C}_{\iota_C})$ : Dado que

$$\Gamma_1 = \left( -T_i^j \quad (\text{Id}_B)_i^j \quad (\mathbf{0}_B^C)_i^j \right)_{i,j \in \mathcal{Y}}$$

onde os blocos estão descritos na tabela abaixo

$\left( -T_i^j \quad (\text{Id}_B)_i^j \quad 0 \right)$	$j \in \text{Supp}(B) \cap \text{Supp}(C)$	$j \in \text{Supp}(B) \setminus \text{Supp}(C)$	$j \in \text{Supp}(C) \setminus \text{Supp}(B)$
$i \in \text{Supp}(B)$	$\left( -T_i^j \quad (\text{Id}_B)_i^j \quad (\mathbf{0}_B^C)_i^j \right)$	$(\text{Id}_B)_i^j$	$\left( -T_i^j \quad (\mathbf{0}_B^C)_i^j \right)$

Para todo  $x \in \mathcal{Y}$ , temos  $r((\Gamma_1)_x) = r(B_x) = c(B^x)$  e  $c((\Gamma_1)^x) = c(C^x) + c((\mathbf{C}_T)^x) = r(C_x) + r((\mathbf{C}_T)_x) = r((\mathbf{C}_{\iota_C})_x)$ . Assim, concluímos que  $[B]$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $\Gamma_1$ , e  $\Gamma_1$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $\mathbf{C}_{\iota_C}$ .

Para ver que  $\Gamma_1$  é uma  $\sigma$ -matriz especial, notemos que  $(\Gamma_1)_i^j = 0$  para todo  $j < i$ , pois  $T$  e  $\text{Id}_B$  são morfismos, analogamente para  $\sigma(i) = j$  observamos que  $(\Gamma_1)_i^j = (\Gamma_1)_j^i$ , devido à construção da matriz  $\Gamma_1$ .

Finalmente,  $[B]\Gamma_1 = \Gamma_1 \mathbf{C}_{\iota_C}$ , pois  $BT = TC$ , e dos seguintes cálculos.

$$\begin{aligned} (-B\Gamma_1)_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} -B_i^k (\Gamma_1)_k^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} -B_i^k \left( -T_k^j \quad (\text{Id}_B)_k^j \quad (\mathbf{0}_B^C)_k^j \right) \\ &= \left( \sum_{k \in \mathcal{Y}} B_i^k T_k^j \quad \sum_{k \in \mathcal{Y}} -B_i^k (\text{Id}_B)_k^j \quad (\mathbf{0}_B^C)_i^j \right) = \left( (BT)_i^j \quad -B_i^j \quad (\mathbf{0}_B^C)_i^j \right) \\ &= \left( \sum_{k \in \mathcal{Y}} T_i^k C_k^j \quad \sum_{k \in \mathcal{Y}} -(\text{Id}_B)_i^k B_k^j \quad \sum_{k \in \mathcal{Y}} (T_i^k (\text{Id}_C)_k^j - (\text{Id}_B)_i^k T_k^j) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( -T_i^k \quad (\text{Id}_B)_i^k \quad (\mathbf{0}_B^C)_i^k \right) \begin{pmatrix} -C_k^j & (\mathbf{0}_C^B)_k^j & (\text{Id}_C)_k^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_k^j & -B_k^j & T_k^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_k^j & (\mathbf{0}_C^B)_k^j & C_k^j \end{pmatrix} = \sum_{k \in \mathcal{Y}} (\Gamma_1)_i^k (\mathbf{C}_{\iota_C})_k^j \\ &= (\Gamma_1 \mathbf{C}_{\iota_C})_i^j, \end{aligned}$$

para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$ . Logo,  $[B]\Gamma_1 = \Gamma_1 \mathbf{C}_{\iota_C}$ . Portanto,  $\Gamma_1$  é morfismo.

- Vejamos que  $\Gamma_2 \in \text{Hom}_s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})(\mathbf{C}_{\iota_C}, [B])$ : Dado que

$$\Gamma_2 = \left( \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^j \\ (\text{Id}_B)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{pmatrix} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}}$$

onde os blocos estão descritos na tabela abaixo

$\begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^j \\ (\text{Id}_B)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{pmatrix}$	$j \in \text{Supp}(B)$
$i \in \text{Supp}(B) \cap \text{Supp}(C)$	$\begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^j \\ (\text{Id}_B)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{pmatrix}$
$i \in \text{Supp}(B) \setminus \text{Supp}(C)$	$(\text{Id}_B)_i^j$
$i \in \text{Supp}(C) \setminus \text{Supp}(B)$	$\begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{pmatrix}$

Para todo  $x \in \mathcal{Y}$ , observamos que  $r((\Gamma_2)_x) = r(C_x) + r((\mathbf{C}_T)_x) = c(C^x) + c((\mathbf{C}_T)^x) = c((\mathbf{C}_{\iota_C})^x)$  e  $c((\Gamma_2)^x) = r(B_x)$ . Portanto,  $\mathbf{C}_{\iota_C}$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $\Gamma_2$ , e  $\Gamma_2$  é  $\mathcal{Y}$ -compatível com  $[B]$ .

Para ver que  $\Gamma_2$  é uma  $\sigma$ -matriz especial, notemos que  $(\Gamma_2)_i^j = 0$  para todo  $j < i$ , pois  $\text{Id}_B$  é morfismo, analogamente para  $\sigma(i) = j$  observamos que  $(\Gamma_2)_i^j = (\Gamma_2)_j^i$ , devido à construção da matriz  $\Gamma_2$ .

Por fim, verificamos que  $\mathbf{C}_{\iota_C} \Gamma_2 = \Gamma_2[B]$ , conforme demonstrado nos cálculos a seguir.

$$\begin{aligned} (-\Gamma_2 B)_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} -(\Gamma_2)_i^k B_k^j = - \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^k \\ (\text{Id}_B)_i^k \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^k \end{pmatrix} B_k^j = - \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^j \\ B_i^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} -C_i^k & (\mathbf{0}_C^B)_i^k & (\text{Id}_C)_i^k \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^k & -B_i^k & T_i^k \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^k & (\mathbf{0}_B^B)_i^k & C_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_k^j \\ (\text{Id}_B)_k^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_k^j \end{pmatrix} = \sum_{k \in \mathcal{Y}} (\mathbf{C}_{\iota_C})_i^k (\Gamma_2)_k^j \\ &= (\mathbf{C}_{\iota_C} \Gamma_2)_i^j \end{aligned}$$

para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$ . Logo,  $\Gamma_2[B] = \mathbf{C}_{\iota_C} \Gamma_2$ . Portanto,  $\Gamma_2$  é morfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

Continuando com a demonstração, consideremos  $(X, Y, Z, u, v, w)$  um triângulo distinguido, desse modo existe  $T : B \rightarrow C$  em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  tal que

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & [X] \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ B & \xrightarrow{T} & C & \xrightarrow{\iota_C} & \mathbf{C}_T & \xrightarrow{\pi_B} & [B] \end{array}$$

são isomorfos em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Conseqüentemente, os seguintes triângulos

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & [X] & \xrightarrow{-[u]} & [Y] \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ C & \xrightarrow{\iota_C} & \mathbf{C}_T & \xrightarrow{\pi_B} & [B] & \xrightarrow{-[T]} & [C] \end{array}$$

são isomorfos em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Agora, basta provar que  $(C, \mathbf{C}_T, [B], \iota_C, \pi_B, -[T])$  é um triângulo distinguido. Consideremos o seguinte diagrama em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$

$$\begin{array}{ccccccc} C & \xrightarrow{\iota_C} & \mathbf{C}_T & \xrightarrow{\pi_B} & [B] & \xrightarrow{-[T]} & [C] \\ \text{Id}_C \downarrow & & \text{Id}_{\mathbf{C}_T} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Id}_C \\ C & \xrightarrow{\iota_C} & \mathbf{C}_T & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{C}_T}} & \mathbf{C}_{\iota_C} & \xrightarrow{\pi_C} & [C] \end{array}$$

Como  $\Gamma_1 : [B] \rightarrow \mathbf{C}_{\iota_C}$  e  $\Gamma_2 : \mathbf{C}_{\iota_C} \rightarrow [B]$  são morfismos em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

- Vejamos que  $\Gamma_1 \Gamma_2 = \text{Id}_B$ . Com efeito, para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$  temos:

$$(\Gamma_1 \Gamma_2)_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} -T_i^k & (\text{Id}_B)_i^k & (\mathbf{0}_C^B)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_k^j \\ (\text{Id}_B)_k^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_k^j \end{pmatrix} = (\text{Id}_B)_i^j.$$

- Vejamos que  $\text{Id}_{\mathbf{C}_{\iota_C}} \equiv \Gamma_2 \Gamma_1$ , com  $\kappa$ -matriz

$$K = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \\ (\text{Id}_C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \end{pmatrix}_{i, j \in \mathcal{Y}}.$$

$K$  satisfaz as condições  $(\kappa\text{-i})$ ,  $(\kappa\text{-iii})$  e  $(\kappa\text{-iv})$  por construção. Restando apenas provar que satisfaz  $(\kappa\text{-ii})$ . Fazendo a composição  $\Gamma_2\Gamma_1$

$$(\Gamma_2\Gamma_1)_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^k \\ (\text{Id}_B)_i^k \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T_k^j & (\text{Id}_B)_k^j & (\mathbf{0}_B^C)_k^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \\ -T_i^j & (\text{Id}_B)_i^j & (\mathbf{0}_B^C)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \end{pmatrix}$$

e dos seguintes cálculos

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}\mathbf{C}_{\iota_C})_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_i^k & (\mathbf{0}_B^B)_i^k & (\mathbf{0}_C^C)_i^k \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^k & (\mathbf{0}_B^B)_i^k & (\mathbf{0}_C^C)_i^k \\ (\text{Id}_C)_i^k & (\mathbf{0}_B^B)_i^k & (\mathbf{0}_C^C)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C_k^j & (\mathbf{0}_B^B)_k^j & (\text{Id}_C)_k^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_k^j & -B_k^j & T_k^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_k^j & (\mathbf{0}_B^B)_k^j & C_k^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \\ -C_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{\iota_C}K)_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} -C_i^k & (\mathbf{0}_B^B)_i^k & (\text{Id}_C)_i^k \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^k & -B_i^k & T_i^k \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^k & (\mathbf{0}_B^B)_i^k & C_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_k^j & (\mathbf{0}_B^B)_k^j & (\mathbf{0}_C^C)_k^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_k^j & (\mathbf{0}_B^B)_k^j & (\mathbf{0}_C^C)_k^j \\ (\text{Id}_C)_k^j & (\mathbf{0}_B^B)_k^j & (\mathbf{0}_C^C)_k^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\text{Id}_C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \\ T_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_B^C)_i^j \\ C_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$ . Temos

$$(\mathbf{K}\mathbf{C}_{\iota_C} + \mathbf{C}_{\iota_C}K)_i^j = \begin{pmatrix} (\text{Id}_C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \\ T_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_B^C)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \end{pmatrix}, \quad (\text{Id}_{\mathbf{C}_{\iota_C}} - \Gamma_2\Gamma_1)_i^j = \begin{pmatrix} (\text{Id}_C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j \\ T_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_B^C)_i^j \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \end{pmatrix}.$$

Finalmente,  $\text{Id}_{\mathbf{C}_{\iota_C}} - \Gamma_2\Gamma_1 = \mathbf{K}\mathbf{C}_{\iota_C} + \mathbf{C}_{\iota_C}K$ , e então  $K$  é uma  $\kappa$ -matriz. Portanto,  $\mathbf{C}_{\iota_C} \cong [B]$  em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

- Vamos verificar a comutatividade do diagrama

$$(\iota_{\mathbf{C}_T}\Gamma_2)_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^C)_i^k & (\text{Id}_B)_i^k & (\mathbf{0}_B^C)_i^k \\ (\mathbf{0}_C^C)_i^k & (\mathbf{0}_B^B)_i^k & (\text{Id}_C)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_k^j \\ (\text{Id}_B)_k^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_k^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_i^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^j \end{pmatrix} = (\pi_B)_i^j.$$

para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$ . Por outro lado,  $\pi_C \equiv -\Gamma_2T$ , com  $\kappa$ -matriz  $K$  da

forma,  $K = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_i^j \\ (\mathbf{0}_B^C)_i^j \\ (\text{Id}_C)_i^j \end{pmatrix}_{i, j \in \mathcal{Y}}$ . Logo, o diagrama é comutativo. Portanto, o

triângulo  $(Y, Z, [X], v, w, -[u])$  é um triângulo distinguido em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

TR5 Como  $(X, Y, Z, u, v, w)$  e  $(X', Y', Z', u', v', w')$  são triângulos em  $\mathcal{T}$ , então existem  $T : B \rightarrow C$  e  $T' : B' \rightarrow C'$  em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , de modo que são isomorfos aos seguintes triângulos  $(B, C, \mathbf{C}_T, T, \iota_C, \pi_B)$  e  $(B', C', \mathbf{C}_{T'}, T', \iota_{C'}, \pi_{B'})$ , respecti-



$$\begin{aligned}
(G\iota_{C'})_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} (G_i^k) ((\mathbf{0}_{C'}^{B'})_k^j \quad (\text{Id}_{C'})_k^j) = (G_i^j) ((\mathbf{0}_{C'}^{B'})_i^j \quad (\text{Id}_{C'})_i^j) = ((\mathbf{0}_C^{B'})_i^j \quad G_i^j) \\
&= ((\mathbf{0}_C^B)_i^j \quad (\text{Id}_C)_i^j) \begin{pmatrix} F_i^j & K_i^j \\ (\mathbf{0}_{C'}^{B'})_i^j & G_i^j \end{pmatrix} = \sum_{k \in \mathcal{Y}} ((\mathbf{0}_C^B)_i^k \quad (\text{Id}_C)_i^k) \begin{pmatrix} F_k^j & K_k^j \\ (\mathbf{0}_{C'}^{B'})_k^j & G_k^j \end{pmatrix} \\
&= (\iota_C \zeta)_i^j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\pi_B F)_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_i^k & \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^k & \end{pmatrix} F_k^j = \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_i^j & \\ (\mathbf{0}_C^B)_i^j & \end{pmatrix} F_i^j = \begin{pmatrix} F_i^j & \\ (\mathbf{0}_{C'}^{B'})_i^j & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_i^j & K_i^j \\ (\mathbf{0}_{C'}^{B'})_i^j & G_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_{B'})_i^j \\ (\mathbf{0}_{C'}^{B'})_i^j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} F_i^k & K_i^k \\ (\mathbf{0}_{C'}^{B'})_i^k & G_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_{B'})_i^k \\ (\mathbf{0}_{C'}^{B'})_i^k \end{pmatrix} \\
&= (\zeta \pi_{B'})_i^j.
\end{aligned}$$

para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$ . Portanto, o diagrama acima é comutativo. Agora, podemos definir o morfismo  $h = (\phi_3)^{-1} \zeta \rho_3 : Z \rightarrow Z'$  em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ .

TR6 Como  $(X, Y, X', u, q_1, p_1)$ ,  $(X, Z, Y', ug, q_2, p_2)$  e  $(Y, Z, Z', g, q_3, p_3)$  triângulos distinguidos em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , podemos considerar o seguinte diagrama comutativo em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$

Para um melhor entendimento, acima foram destacados os triângulos standard em vermelho, enquanto seus respectivos isomorfismos estão destacadas em azul. Agora, para provar o axioma do octaedro vamos nos concentrar no seguinte diagrama

Primeiramente, vamos mostrar que existem morfismos  $F \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(\mathbf{C}_S, \mathbf{C}_V)$  e  $G \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(\mathbf{C}_V, \mathbf{C}_T)$  tais que o diagrama acima comuta em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . Como  $ST \equiv V$  existe uma  $\kappa$ -matriz  $K$ . Do item ( $\kappa$ -ii) temos que  $ST - V = BK + KD$ . Também para evitar confusão,  $\overline{\iota_D}$  e  $\overline{\pi_B}$  denotam o morfismo  $\iota_D : D \rightarrow \mathbf{C}_V$  e  $\pi_B : \mathbf{C}_V \rightarrow [B]$  definido no Lema 2.21, considere as matrizes

$$F = \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_B)_i^j & K_i^j \\ (\mathbf{0}_C)_i^j & T_i^j \end{array} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}} \quad \text{e} \quad G = \left( \begin{array}{cc} S_i^j & -K_i^j \\ (\mathbf{0}_D)_i^j & (\text{Id}_D)_i^j \end{array} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}}.$$

Vejam os que  $F \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(\mathbf{C}_S, \mathbf{C}_{ST})$ , a prova para  $G \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(\mathbf{C}_{ST}, \mathbf{C}_T)$  é análoga. As propriedades de  $\mathcal{Y}$ -compatível e  $\sigma$ -matriz especial da definição de morfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , seguem do fato que  $T$  e  $\text{Id}_B$  são morfismos em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  e  $K$  ser uma  $\kappa$ -matriz. A igualdade  $\mathbf{C}_S F = F \mathbf{C}_V$  é consequência dos seguintes cálculos

$$(\mathbf{C}_S F)_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{cc} -B_i^k & S_i^k \\ (\mathbf{0}_C)_i^k & C_i^k \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_B)_k^j & K_k^j \\ (\mathbf{0}_C)_k^j & T_k^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} -B_i^j & (ST)_i^j - (BK)_i^j \\ (\mathbf{0}_C)_i^j & (CT)_i^j \end{array} \right),$$

$$(F \mathbf{C}_V)_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_B)_i^k & K_i^k \\ (\mathbf{0}_C)_i^k & T_i^k \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} -B_k^j & V_k^j \\ (\mathbf{0}_D)_k^j & D_k^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} -B_i^j & V_i^j + (KD)_i^j \\ (\mathbf{0}_C)_i^j & (TD)_i^j \end{array} \right),$$

e a comutatividade segue dos seguintes cálculos

$$\begin{aligned} (\iota_C F)_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C)_i^k & (\text{Id}_C)_i^k \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_B)_k^j & K_k^j \\ (\mathbf{0}_C)_k^j & T_k^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C)_i^j & T_i^j \end{array} \right) = \sum_{k \in \mathcal{Y}} T_i^k \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_D)_k^j & (\text{Id}_D)_k^j \end{array} \right) \\ &= (T \overline{\iota_D})_i^j, \end{aligned}$$

$$(\overline{\iota_D} G)_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_D)_i^k & (\text{Id}_D)_i^k \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} S_k^j & -K_k^j \\ (\mathbf{0}_C)_k^j & (\text{Id}_D)_k^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_D)_i^j & (\text{Id}_D)_i^j \end{array} \right) = (\iota_D)_i^j,$$

$$(F \overline{\pi_B})_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_B)_i^k & -K_i^k \\ (\mathbf{0}_C)_i^k & T_i^k \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} (\text{Id}_B)_k^j \\ (\mathbf{0}_D)_k^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} (\text{Id}_B)_i^j \\ (\mathbf{0}_C)_i^j \end{array} \right) = (\pi_B)_i^j,$$

$$(G \pi_C)_i^j = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{cc} S_i^k & -K_i^k \\ (\mathbf{0}_D)_i^k & (\text{Id}_D)_i^k \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} (\text{Id}_C)_k^j \\ (\mathbf{0}_C)_k^j \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} S_i^j \\ (\mathbf{0}_D)_i^j \end{array} \right) = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \left( \begin{array}{c} (\text{Id}_B)_i^k \\ (\mathbf{0}_D)_i^k \end{array} \right) S_k^j = (\overline{\pi_B} S)_i^j.$$

para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$ .

Finalizaremos a demonstração provando que  $(\mathbf{C}_S, \mathbf{C}_V, \mathbf{C}_T, F, G, \pi_C \iota_C)$  é um triângulo distinguido. Para isto, vejamos que

$$\Lambda = \left( \begin{array}{cccc} (\mathbf{0}_C)_i^j & (\text{Id}_C)_i^j & (\mathbf{0}_C)_i^j & (\mathbf{0}_D)_i^j \\ (\mathbf{0}_D)_i^j & (\mathbf{0}_D)_i^j & (\mathbf{0}_D)_i^j & (\text{Id}_D)_i^j \end{array} \right)_{i,j \in \mathcal{Y}} \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})}(\mathbf{C}_T, \mathbf{C}_F)$$

e o seguinte diagrama comuta em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{C}_S & \xrightarrow{F} & \mathbf{C}_V & \xrightarrow{G} & \mathbf{C}_T & \xrightarrow{\pi_C \iota_C} & [\mathbf{C}_S] \\ \text{Id}_{\mathbf{C}_S} \downarrow & & \text{Id}_{\mathbf{C}_V} \downarrow & & \exists \Lambda \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{\mathbf{C}_S} \\ \mathbf{C}_S & \xrightarrow{F} & \mathbf{C}_V & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{C}_V}} & \mathbf{C}_F & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{C}_S}} & [\mathbf{C}_S] \end{array}$$

Da mesma forma, as propriedades de  $\mathcal{Y}$ -compatível e  $\sigma$ -matriz especial da definição de morfismo em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , decorrem do fato de que  $\text{Id}_{\mathbf{C}_S}$  e  $\text{Id}_{\mathbf{C}_V}$  são morfismos em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ . A igualdade  $\mathbf{C}_T\Lambda = \Lambda\mathbf{C}_F$  é consequência dos seguintes cálculos

$$\begin{aligned}
(\Lambda\mathbf{C}_F)_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^k & (\text{Id}_C)_i^k & (\mathbf{0}_C^B)_i^k & (\mathbf{0}_C^D)_i^k \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^k & (\mathbf{0}_D^C)_i^k & (\mathbf{0}_D^B)_i^k & (\text{Id}_D)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\mathbf{C}_S)_k^j & F_k^j \\ (\mathbf{0}_{\mathbf{C}_V}^S)_k^j & (\mathbf{C}_V)_k^j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^k & (\text{Id}_C)_i^k & (\mathbf{0}_C^B)_i^k & (\mathbf{0}_C^D)_i^k \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^k & (\mathbf{0}_D^C)_i^k & (\mathbf{0}_D^B)_i^k & (\text{Id}_D)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_k^j & -S_k^j & (\text{Id}_B)_k^j & K_k^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_k^j & -C_k^j & (\mathbf{0}_C^B)_k^j & T_k^j \\ (\mathbf{0}_B^B)_k^j & (\mathbf{0}_C^C)_k^j & -B_k^j & V_k^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_k^j & (\mathbf{0}_D^C)_k^j & (\mathbf{0}_D^B)_k^j & D_k^j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^j & -C_i^j & (\mathbf{0}_C^B)_i^j & T_i^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^C)_i^j & (\mathbf{0}_D^B)_i^j & D_i^j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} -C_i^k & T_i^k \\ (\mathbf{0}_D^C)_i^k & D_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_k^j & (\text{Id}_C)_k^j & (\mathbf{0}_C^B)_k^j & (\mathbf{0}_C^D)_k^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_k^j & (\mathbf{0}_D^C)_k^j & (\mathbf{0}_D^B)_k^j & (\text{Id}_D)_k^j \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{C}_T\Lambda)_i^j.
\end{aligned}$$

para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$ . Agora, a comutatividade é direta pela multiplicação de matrizes

$$\begin{aligned}
(\iota_{\mathbf{C}_V} - G\Lambda)_i^j &= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_{\mathbf{C}_V}^S)_i^j & (\text{Id}_{\mathbf{C}_V})_i^j \end{pmatrix} - \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} S_i^k & -K_i^k \\ (\mathbf{0}_D^C)_i^k & (\text{Id}_D)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_k^j & (\text{Id}_C)_k^j & (\mathbf{0}_C^B)_k^j & (\mathbf{0}_C^D)_k^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_k^j & (\mathbf{0}_D^C)_k^j & (\mathbf{0}_D^B)_k^j & (\text{Id}_D)_k^j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\text{Id}_B)_i^j & (\mathbf{0}_D^D)_i^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^C)_i^j & (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\text{Id}_D)_i^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_i^j & S_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & -K_i^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^C)_i^j & (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\text{Id}_D)_i^j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_i^j & -S_i^j & (\text{Id}_B)_i^j & K_i^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^C)_i^j & (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^D)_i^j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -B_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^D)_i^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^C)_i^j & (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^D)_i^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_i^j & -S_i^j & (\text{Id}_B)_i^j & K_i^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^C)_i^j & (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^D)_i^j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} -B_i^k & V_i^k \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^k & D_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_k^j & (\mathbf{0}_C^C)_k^j & (\mathbf{0}_B^B)_k^j & (\mathbf{0}_D^D)_k^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_k^j & (\mathbf{0}_D^C)_k^j & (\mathbf{0}_D^B)_k^j & (\mathbf{0}_D^D)_k^j \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_i^k & (\mathbf{0}_C^C)_i^k & (\mathbf{0}_B^B)_i^k & (\mathbf{0}_D^D)_i^k \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^k & (\mathbf{0}_D^C)_i^k & (\mathbf{0}_D^B)_i^k & (\mathbf{0}_D^D)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_k^j & -S_k^j & (\text{Id}_B)_k^j & K_k^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_k^j & -C_k^j & (\mathbf{0}_C^B)_k^j & T_k^j \\ (\mathbf{0}_B^B)_k^j & (\mathbf{0}_C^C)_k^j & -B_k^j & (V)_k^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_k^j & (\mathbf{0}_D^C)_k^j & (\mathbf{0}_D^B)_k^j & D_k^j \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{C}_V\mathbf{K} + \mathbf{K}\mathbf{C}_F)_i^j,
\end{aligned}$$

para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$ , onde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_i^j & (\mathbf{0}_C^C)_i^j & (\mathbf{0}_B^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^D)_i^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^C)_i^j & (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^D)_i^j \end{pmatrix}_{i, j \in \mathcal{Y}}$$

é uma  $\kappa$ -matriz. Além disso,

$$\begin{aligned}
(\Lambda\pi_{\mathbf{C}_S})_i^j &= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^k & (\text{Id}_C)_i^k & (\mathbf{0}_C^B)_i^k & (\mathbf{0}_C^D)_i^k \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^k & (\mathbf{0}_D^C)_i^k & (\mathbf{0}_D^B)_i^k & (\text{Id}_D)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_{\mathbf{C}_S})_k^j \\ (\mathbf{0}_{\mathbf{C}_{ST}}^S)_k^j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^k & (\text{Id}_C)_i^k & (\mathbf{0}_C^B)_i^k & (\mathbf{0}_C^D)_i^k \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^k & (\mathbf{0}_D^C)_i^k & (\mathbf{0}_D^B)_i^k & (\text{Id}_D)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_k^j & (\mathbf{0}_C^C)_k^j \\ (\mathbf{0}_C^B)_k^j & (\text{Id}_C)_k^j \\ (\mathbf{0}_B^B)_k^j & (\mathbf{0}_C^C)_k^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_k^j & (\mathbf{0}_D^C)_k^j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_i^j & (\text{Id}_C)_i^j \\ (\mathbf{0}_D^B)_i^j & (\mathbf{0}_D^C)_i^j \end{pmatrix} = \sum_{k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\text{Id}_C)_i^k \\ (\mathbf{0}_D^C)_i^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^C)_k^j & (\text{Id}_C)_k^j \end{pmatrix} = (\pi_{C^L C})_i^j,$$

para todos  $i, j \in \mathcal{Y}$ .

Do TR1 ao TR5 temos que a categoria  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  é pré-triangulada e como  $\text{Id}_{\mathbf{C}_S}$ ,  $\text{Id}_{\mathbf{C}_{ST}}$  são isomorfismos em  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$ , pelo Lema 1.26 para categorias pré-trianguladas  $\Lambda$  é isomorfismo. Logo,  $(\mathbf{C}_S, \mathbf{C}_V, \mathbf{C}_T, F, G, \pi_{C^L C})$  é um triângulo distinguido.

Portanto,  $\kappa(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$  com o autofuntor  $[-]$  e a família de triângulos distinguidos  $\mathcal{T}$  é triangulada.  $\square$



## Capítulo 4

# O quociente $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ da categoria de Bondarenko

Neste capítulo, comecemos fixando o poset  $\mathcal{Y}$  com involução  $\sigma$ . Consideremos o poset  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$  com ordem anti-lexicográfica, ou seja,

$$[u, i] < [v, j] \text{ se, e somente se, } i < j \text{ ou } (i = j \text{ e } u < v),$$

e com involução  $\sigma_{\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}$  definida da seguinte maneira:

$$\sigma_{\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}([u, i]) = [v, j] \text{ se, e somente se, } i = j \text{ e } \sigma(u) = v.$$

Dessa maneira, temos naturalmente a categoria de Bondarenko  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ . Nosso objetivo neste capítulo é estudar categoria quociente de  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  denotada por  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  e demonstraremos que  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  é uma categoria triangulada com um autofunctor diferente ao do Capítulo 3. No entanto, antes de avançarmos nessa discussão, estabeleceremos uma relação sobre os morfismos presentes em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

**Definição 4.1.** *Sejam  $S, T \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(B, C)$ . Dizemos que  $S \simeq T$  se, e somente se, existe uma matriz  $\widehat{K}$  indexada por  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$  satisfazendo:*

$$(\widehat{\kappa}\text{-i}) \quad B \text{ é } \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}\text{-compatível com } \widehat{K} \text{ e } \widehat{K} \text{ é } \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}\text{-compatível com } C.$$

$$(\widehat{\kappa}\text{-ii}) \quad S - T = B\widehat{K} + \widehat{K}C.$$

$$(\widehat{\kappa}\text{-iii}) \quad \text{Se } i > j + 1 \text{ ou } (u > v \text{ e } i = j + 1), \text{ então } \widehat{K}_{[u, i]}^{[v, j]} = 0.$$

$$(\widehat{\kappa}\text{-iv}) \quad \text{Se } \sigma_{\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}([u, i]) = [v, j], \text{ então } \widehat{K}_{[u, i]}^{[u, i]} = \widehat{K}_{[v, j]}^{[v, j]}.$$

Vale destacar que  $\simeq$  é uma relação de equivalência. Nesse contexto, é importante notar que, de forma geral,  $\widehat{K}$  não é necessariamente um morfismo em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  devido ao item  $(\widehat{\kappa}\text{-ii})$ . A matriz  $\widehat{K}$  que satisfaz as condições acima, será chamada de  $\widehat{\kappa}$ -matriz.

**Lema 4.2.** *O conjunto  $\widehat{\Sigma} := \{T \text{ morfismo em } s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k}) \mid T \simeq \mathbf{0}\}$  é um ideal bilateral em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .*

*Demonstração.*

$$(i) \quad \mathbf{0} \in \widehat{\Sigma}, \text{ pois } \mathbf{0} \simeq \mathbf{0}.$$

- (ii) Sejam  $F, G$  em  $\widehat{\Sigma}(B, C)$  e  $\mu_1, \mu_2$  em  $\mathbb{k}$ . Como  $F, G \simeq \mathbf{0}_B^C$ , então existem  $\widehat{\kappa}$ -matrizes  $\widehat{K}_1$  e  $\widehat{K}_2$  tais que

$$F = B\widehat{K}_1 + \widehat{K}_1C \quad \text{e} \quad G = B\widehat{K}_2 + \widehat{K}_2C.$$

Multiplicando a igualdade acima pelas constantes  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , respectivamente, temos

$$\mu_1F = \mu_1B\widehat{K}_1 + \mu_1\widehat{K}_1C \quad \text{e} \quad \mu_2G = \mu_2B\widehat{K}_2 + \mu_2\widehat{K}_2C,$$

as quais ainda estão em  $\widehat{\Sigma}(B, C)$ , e além disso, como o  $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(B, C)$  é um  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial tem-se  $\mu_1F + \mu_2G \in \widehat{\Sigma}(B, C)$ , com  $\widehat{\kappa}$ -matriz  $\mu_1\widehat{K}_1 + \mu_2\widehat{K}_2$ .

- (iii) Sejam  $F$  em  $\widehat{\Sigma}(B, C)$  e  $G$  em  $\text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(C, D)$ . Dado que  $F \simeq \mathbf{0}_B^C$ , existe uma  $\widehat{\kappa}$ -matriz  $\widehat{K}$  tal que

$$F = B\widehat{K} + \widehat{K}C.$$

Do fato que  $CG = GD$  e da multiplicação por  $G$  à direita na igualdade acima, temos

$$FG = B\widehat{K}G + \widehat{K}CG = B\widehat{K}G + \widehat{K}GD = B\tilde{K} + \tilde{K}D,$$

onde  $\tilde{K} = \widehat{K}G$ , vejamos que  $\tilde{K}$  é uma  $\widehat{\kappa}$ -matriz. As condições de  $(\widehat{\kappa}-i)$  e  $(\widehat{\kappa}-iv)$  são satisfeitas pelo fato de  $\widehat{K}$  ser uma  $\widehat{\kappa}$ -matriz e  $G$  ser um morfismo. Restando por provar apenas  $(\widehat{\kappa}-iii)$ .

Para ver que  $\tilde{K}_{[u,i]}^{[v,j]} = 0$ , sempre que  $i > j + 1$  ou  $(u > v \text{ e } i = j + 1)$ , analizaremos cada parcela da seguinte soma

$$\tilde{K}_{[u,i]}^{[v,j]} = \sum_{[w,k] \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} G_{[w,k]}^{[v,j]}.$$

Começemos assumindo que  $i > j + 1$ . Notemos que

$$\tilde{K}_{[u,i]}^{[v,j]} = \sum_{\substack{i \leq k+1 \\ w \in \mathcal{Y}}} \widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} G_{[w,k]}^{[v,j]} + \sum_{\substack{i > k+1 \\ w \in \mathcal{Y}}} \widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} G_{[w,k]}^{[v,j]} = 0,$$

pois na primeira parcela  $G_{[w,k]}^{[v,j]} = 0$  e na segunda parcela  $\widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} = 0$ .

Por outro lado, assumindo que  $i = j + 1$  e  $u > v$ , temos que

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{[u,i]}^{[v,j]} &= \sum_{\substack{i=k+1 \\ w \in \mathcal{Y}}} \widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} G_{[w,k]}^{[v,j]} + \sum_{\substack{i < k+1 \\ w \in \mathcal{Y}}} \widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} G_{[w,k]}^{[v,j]} + \sum_{\substack{i > k+1 \\ w \in \mathcal{Y}}} \widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} G_{[w,k]}^{[v,j]} \\ &= \sum_{w \in \mathcal{Y}} \widehat{K}_{[u,j+1]}^{[w,j]} G_{[w,j]}^{[v,j]} + \sum_{\substack{i < k+1 \\ w \in \mathcal{Y}}} \widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} G_{[w,k]}^{[v,j]} + \sum_{\substack{i > k+1 \\ w \in \mathcal{Y}}} \widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} G_{[w,k]}^{[v,j]} \\ &= \sum_{u < w \in \mathcal{Y}} \widehat{K}_{[u,j+1]}^{[w,j]} G_{[w,j]}^{[v,j]} + \sum_{u > w \in \mathcal{Y}} \widehat{K}_{[u,j+1]}^{[w,j]} G_{[w,j]}^{[v,j]} + \sum_{\substack{i < k+1 \\ w \in \mathcal{Y}}} \widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} G_{[w,k]}^{[v,j]} + \sum_{\substack{i > k+1 \\ w \in \mathcal{Y}}} \widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} G_{[w,k]}^{[v,j]}. \end{aligned}$$

Logo,  $\tilde{K}_{[u,i]}^{[v,j]} = 0$ , pois na primeira e terceira parcela  $G_{[w,k]}^{[v,j]} = 0$ , enquanto para segunda e quarta parcela  $\widehat{K}_{[u,i]}^{[w,k]} = 0$ . Portanto  $\tilde{K}$  é uma  $\widehat{\kappa}$ -matriz.

Dessa forma, podemos concluir que  $FG \simeq \mathbf{0}_B^D$ , o que implica que  $FG \in \widehat{\Sigma}(B, D)$ .

(iv) Analogamente, podemos concluir que é ideal à esquerda.

Portanto,  $\widehat{\Sigma}$  é um ideal bilateral em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .  $\square$

**Observação 4.3.** *Repare que, a relação  $\simeq$  é sutilmente diferente da relação  $\equiv$  da Definição 3.1. Claramente,  $\widehat{\Sigma} \not\subset \Sigma$  e  $\Sigma \subset \widehat{\Sigma}$ , onde  $\Sigma = \{T \text{ morfismo em } s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k}) \mid T \equiv 0\}$ . Dessa maneira, podemos definir a seguinte categoria.*

**Definição 4.4.**  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  é uma categoria dada por:

- $\text{Obj}(\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})) = \text{Obj}(s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k}))$ .
- $\text{Hom}_{\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(X, Y) = \text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(B, C) / \widehat{\Sigma}(B, C)$ , para cada  $B, C \in s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

Note que, a partir da Observação 4.3, a categoria  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  é distinta da categoria  $\kappa(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

## Functor translação para $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$

Seja  $B$  um objeto em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  e  $k \in \mathbb{Z}$ . Podemos definir um novo objeto  $B\{k\}$  em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , o qual chamaremos de  **$k$ -ésima translação** de  $B$ , da seguinte forma:

$$B\{k\}_{[u,i]}^{[v,j]} = (-1)^k B_{[u,i+k]}^{[v,j+k]}, \text{ para todos } [u,i], [v,j] \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}.$$

Para cada morfismo  $T : B \rightarrow C$  em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , também podemos definir um novo morfismo  $T\{k\} : B\{k\} \rightarrow C\{k\}$  em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  da seguinte forma:

$$T\{k\}_{[u,i]}^{[v,j]} = T_{[u,i+k]}^{[v,j+k]}, \text{ para todos } [u,i], [v,j] \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}.$$

Repare que a  $k$ -ésima translação age nas faixas horizontais e verticais tanto de  $B$  quanto de  $T$ . Especificamente, se  $k$  é positivo (negativo), o functor desloca a faixa horizontal de  $B$  para cima (baixo) e a faixa vertical de  $B$  para a esquerda (direita).

Assim, obtemos um functor  $\{k\} : s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k}) \rightarrow s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , o qual será chamado de **functor translação por  $k$** . Notemos que  $\{k\}$  é um autofunctor de  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , pois  $\{k\} \circ \{-k\} = \{-k\} \circ \{k\} = \text{Id}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}$ .

Notemos que, para cada objeto  $B$  em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  existe um morfismo  $\text{Id}_{\{1\}} : -B\{1\} \rightarrow B$  tal que  $(\text{Id}_{\{1\}})_{[u,i]}^{[v,j]} = (\text{Id}_B)_{[u,i+1]}^{[v,j]}$  para todos  $[u,i], [v,j] \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ . Neste morfismo, as faixas horizontais são indexadas pelo  $\text{Supp}(B\{1\})$ , enquanto as faixas verticais são indexadas por  $\text{Supp}(B)$ .

## 4.1 Estrutura triangulada para $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$

Na presente seção, nosso principal objetivo é demonstrar que  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  é uma categoria triangulada. Para este fim, lembremos que para cada morfismo  $T : B \rightarrow C$  em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , o Lema 2.19 garante que  $\mathbf{C}_{\text{Id}_{\{1\}}T}$  é um objeto em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , o qual denotaremos por  $\widehat{\mathbf{C}}_T$ , e que em termos da Notação 2.18 os  $([u,i], [v,j])$ -ésimos blocos são da forma:

$$\widehat{(\mathbf{C}_T)}_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{pmatrix} B\{1\}_{[u,i]}^{[v,j]} & T_{[u,i]}^{[v,j]} \\ (\mathbf{0}_C^{B\{1\}})_{[u,i]}^{[v,j]} & C_{[u,i]}^{[v,j]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} & T_{[u,i+1]}^{[v,j]} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{[u,i]}^{[v,j+1]} & C_{[u,i]}^{[v,j]} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Como eventualmente será mostrado que  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  tem estrutura triângulada, seu cone é da forma descrita acima. Para não deixar a notação muito carregada, vamos denotar os elementos  $[u, i]$  em  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ , por  $u_i$ . Dessa maneira, o  $(u_i, v_j)$ -ésimo bloco é da forma:

$$\widehat{(\mathbf{C}_T)}_{u_i}^{v_j} = \begin{pmatrix} -B_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & T_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & C_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}.$$

**Definição 4.5.** *Um triângulo é dito  $\widehat{\kappa}$ -standard, se é da seguinte forma*

$$B \xrightarrow{T} C \xrightarrow{\iota_C} \widehat{\mathbf{C}}_T \xrightarrow{\pi_{B\{1\}}} B\{1\}$$

para algum morfismo  $T : B \rightarrow C$  em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , onde  $\iota_C$  e  $\pi_{B\{1\}}$  são como definidos na Notação 2.20.

Dado que  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  é a categoria quociente  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})/\widehat{\Sigma}$ , existe um funtor projeção de  $\widehat{\mathcal{G}} : s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k}) \twoheadrightarrow \widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , de modo que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k}) & \xrightarrow{\{1\}} & s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k}) \\ \widehat{\mathcal{G}} \downarrow & & \downarrow \widehat{\mathcal{G}} \\ \widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k}) & \xrightarrow{\{1\}} & \widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k}) \end{array}$$

Isto significa que o autofunctor  $\{1\}$  é bem definido sobre  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ . Agora, definamos a seguinte família de triângulos distinguidos em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

**Definição 4.6.** *Um triângulo  $(X, Y, Z, u, v, w)$  será chamado de **triângulo distinguido** em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , se é isomorfo a um triângulo  $\widehat{\kappa}$ -standard em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ . Em outras palavras, existe o seguinte isomorfismo de triângulos em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X\{1\} \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ B & \xrightarrow{T} & C & \xrightarrow{\iota_C} & \widehat{\mathbf{C}}_T & \xrightarrow{\pi_{B\{1\}}} & B\{1\} \end{array}$$

para algum  $T : B \rightarrow C$  em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ . A família de triângulos distinguidos em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  será denotada por  $\widehat{\mathcal{T}}$ .

Agora, iremos apresentar um dos principais resultados do capítulo. A demonstração de tal resultado é totalmente análoga a do Teorema 3.7.

**Teorema 4.7.** *A categoria  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  com o autofuntor  $\{1\}$  e a família de triângulos  $\widehat{\mathcal{T}}$  é triangulada.*

*Demonstração.*

TR1 Dado dois triângulos isomorfos  $(X, Y, Z, u, v, w)$ ,  $(X', Y', Z', f', g', h')$  em que  $(X, Y, Z, u, v, w)$  é um triângulo pertencente a família  $\widehat{\mathcal{T}}$ . Pela transitividade de isomorfismos, segue que  $(X', Y', Z', f', g', h')$  pertence à família  $\widehat{\mathcal{T}}$ .

TR2 Vejamos que  $\text{Id}_{\widehat{\mathbf{C}}_{\text{Id}_B}} \simeq \mathbf{0}$  com  $\widehat{\kappa}$ -matriz  $\widehat{K} = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)^{v_j} \\ (\text{Id}_B)^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)^{v_j} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}$ , tal

matriz  $\widehat{K}$  satisfaz as condições  $(\widehat{\kappa}\text{-i})$ ,  $(\widehat{\kappa}\text{-iii})$  e  $(\widehat{\kappa}\text{-iv})$  por construção. Restando apenas verificar que  $\widehat{K}$  satisfaz  $(\widehat{\kappa}\text{-ii})$ . Para este fim, seguem os cálculos

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{C}}_{\text{Id}_B} \widehat{K})_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} -B_{u_{i+1}}^{w_k} & (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_B^B)_{u_i}^{w_k} & B_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)_{w_k}^{v_j} \\ (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ B_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\widehat{K} \widehat{\mathbf{C}}_{\text{Id}_B})_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\text{Id}_B)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B_{w_k}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_B^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & B_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ -B_{u_i}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_B)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ . Portanto,  $(\widehat{\mathbf{C}}_{\text{Id}_B} \widehat{K})_{u_i}^{v_j} + (\widehat{K} \widehat{\mathbf{C}}_{\text{Id}_B})_{u_i}^{v_j} = (\text{Id}_{\widehat{\mathbf{C}}_{\text{Id}_B}})_{u_i}^{v_j}$ .

Por fim, como  $\text{Id}_{\widehat{\mathbf{C}}_{\text{Id}_B}} \simeq \mathbf{0}$ , então  $\widehat{\mathbf{C}}_{\text{Id}_B} \cong \mathbb{0}$  em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

TR3 Segue das definições 4.5 e 4.6.

TR4 Primeiramente, vejamos que, para qualquer  $T \in \text{Hom}_s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})(B, C)$  as matrizes

$$\Gamma_1 = \left( -T_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \quad (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \quad (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \right)_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \\ (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}$$

são morfismos  $\Gamma_1 \in \text{Hom}_s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})(B\{1\}, \widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C})$  e  $\Gamma_2 \in \text{Hom}_s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})(\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}, B\{1\})$ . Para este fim, lembremos que

$$\text{Supp}(\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}) = \text{Supp}(C\{1\}) \cup \text{Supp}(\mathbf{C}_T) = \text{Supp}(C\{1\}) \cup (\text{Supp}(B\{1\}) \cup \text{Supp}(C)),$$

cuja matriz por blocos é descrita (ver Notação 4.1) por

$$\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C} = \begin{pmatrix} C\{1\}_{u_i}^{v_j} & (\iota_C)_{u_i}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_{\widehat{\mathbf{C}}_T}^C)_{u_i}^{v_j} & (\widehat{\mathbf{C}}_T)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} -C_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & -B_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & T_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & C_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}$$

- $\Gamma_1 \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(B\{1\}, \widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C})$ . De fato, para todo  $u_i \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ , temos  $r((\Gamma_1)_{u_i}) = r(B\{1\}_{u_i}) = c(B\{1\}^{u_i})$  e  $c((\Gamma_1)_{u_i}) = c(C\{1\}^{u_i}) + c((\widehat{\mathbf{C}}_T)^{u_i}) = r(C\{1\}^{u_i}) + r((\widehat{\mathbf{C}}_T)^{u_i}) = r((\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C})^{u_i})$ . Logo,  $B\{1\}$  é  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ -compatível com  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_1$  é  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ -compatível com  $\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}$ .

Agora, para ver que  $\Gamma_1$  é  $\sigma_{\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}$ -matriz especial, notemos que  $(\Gamma_1)_{u_i}^{v_j} = 0$  para todo  $v_j < u_i$  em  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ , pois  $-T\{1\}$  e  $\text{Id}_{B\{1\}}$  são morfismos, analogamente para  $\sigma_{\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}(u_i) = v_j$  observamos que  $(\Gamma_1)_{u_i}^{u_i} = (\Gamma_1)_{v_j}^{v_j}$ , devido à construção da matriz  $\Gamma_1$ .

Por fim, vejamos que  $B\{1\}\Gamma_1 = \Gamma_1 \widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}$ , o que decorre dos cálculos

$$\begin{aligned}
(B\{1\}\Gamma_1)_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} -B_{u_{i+1}}^{w_k} \begin{pmatrix} -T_{w_k}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^C)_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (BT)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & -B_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C_{w_k}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_C)_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_B^C)_{w_k}^{v_{j+1}} & -B_{w_k}^{v_{j+1}} & T_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^C)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & C_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} -T_{u_{i+1}}^{w_k} & (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C_{w_k}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_C)_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_B^C)_{w_k}^{v_{j+1}} & -B_{w_k}^{v_{j+1}} & T_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^C)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & C_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} (\Gamma_1)_{u_i}^{w_k} (\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C})_{w_k}^{v_j} = (\Gamma_1 \widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C})_{u_i}^{v_j}
\end{aligned}$$

para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ . Logo,  $B\{1\}\Gamma_1 = \Gamma_1 \widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}$ . Portanto,  $\Gamma_1$  é morfismo em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

- $\Gamma_2 \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}, B\{1\})$ . De fato, para todo  $v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ , temos  $c((\Gamma_2)^{v_j}) = c(B\{1\}^{v_j}) = r(B\{1\}_{v_j})$  e  $r((\Gamma_2)_{v_j}) = r(C\{1\}_{v_j}) + r((\widehat{\mathbf{C}}_T)_{v_j}) = c(C\{1\}^{v_j}) + c((\widehat{\mathbf{C}}_T)^{v_j}) = c((\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C})^{v_j})$ . Logo,  $\Gamma_2$  é  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ -compatível com  $B\{1\}$  e  $\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}$  é  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ -compatível com  $\Gamma_2$ .

Agora, para ver que  $\Gamma_2$  é  $\sigma_{\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}$ -matriz especial, notemos que  $(\Gamma_2)_{u_i}^{v_j} = 0$  para todo  $v_j < u_i$  em  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ , pois  $\text{Id}_{B\{1\}}$  é morfismo, analogamente para  $\sigma_{\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}(u_i) = v_j$  observamos que  $(\Gamma_2)_{u_i}^{u_i} = (\Gamma_2)_{v_j}^{v_j}$ , devido à construção da matriz  $\Gamma_2$ .

Por fim, vejamos que  $\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}\Gamma_2 = \Gamma_2 B\{1\}$ , o que decorre dos cálculos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_2 B\{1\})_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} (\Gamma_2)_{u_i}^{w_k} B\{1\}_{w_k}^{v_j} = - \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} B_{w_k}^{v_{j+1}} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \\ -B_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} -C_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\text{Id}_C)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{w_k} & -B_{u_{i+1}}^{w_k} & T_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} & C_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} \\ (\text{Id}_B\{1\})_{w_k}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_C^B\{1\})_{w_k}^{v_{j+1}} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} (\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C})_{u_i}^{w_k} (\Gamma_2)_{w_k}^{v_j} = (\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}\Gamma_2)_{u_i}^{v_j},
\end{aligned}$$

para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ . Logo,  $-\Gamma_2 B\{1\} = \widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C} \Gamma_2$ . Portanto,  $\Gamma_2$  é morfismo em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

Continuando com a demonstração, consideremos  $(X, Y, Z, u, v, w)$  um triângulo distinguido, desse modo existe  $T : B \rightarrow C$  tal que

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X\{1\} \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ B & \xrightarrow{T} & C & \xrightarrow{\iota_C} & \widehat{\mathbf{C}}_T & \xrightarrow{\pi_{B\{1\}}} & B\{1\} \end{array}$$

são isomorfos em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ . Observe que temos o seguinte isomorfismo de triângulos em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X\{1\} & \xrightarrow{-u\{1\}} & Y\{1\} \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ C & \xrightarrow{\iota_C} & \widehat{\mathbf{C}}_T & \xrightarrow{\pi_{B\{1\}}} & B\{1\} & \xrightarrow{-T\{1\}} & C\{1\} \end{array}$$

Agora, basta provar que  $(C, \widehat{\mathbf{C}}_T, -B\{1\}, \iota_C, \pi_{B\{1\}}, -T\{1\})$  é um triângulo distinguido. Consideremos o seguinte diagrama em  $s(\mathcal{Y}, \mathbb{k})$

$$\begin{array}{ccccccc} C & \xrightarrow{\iota_C} & \widehat{\mathbf{C}}_T & \xrightarrow{\pi_{B\{1\}}} & B\{1\} & \xrightarrow{-T\{1\}} & C\{1\} \\ \text{Id}_C \downarrow & & \text{Id}_{\widehat{\mathbf{C}}_T} \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{B\{1\}} & & \downarrow \text{Id}_{C\{1\}} \\ C & \xrightarrow{\iota_C} & \widehat{\mathbf{C}}_T & \xrightarrow{\iota_{\widehat{\mathbf{C}}_T}} & \widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C} & \xrightarrow{\pi_{C\{1\}}} & C\{1\} \end{array}$$

Como existem morfismos  $\Gamma_1 : B\{1\} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}$  e  $\Gamma_2 : \widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C} \rightarrow B\{1\}$  em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

- Vejamos que  $\Gamma_1 \Gamma_2 = \text{Id}_{B\{1\}}$ . Com efeito, dos seguintes cálculos temos

$$(\Gamma_1 \Gamma_2)_{u_i}^{v_j} = \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} -T_{u_{i+1}}^{w_k} & (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} \\ (\text{Id}_{B\{1\}})_{w_k}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_C^{B\{1\}})_{w_k}^{v_{j+1}} \end{pmatrix} = (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}}.$$

para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ .

- Vejamos que  $\text{Id}_{\widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}} \simeq \Gamma_2 \Gamma_1$  com a  $\widehat{\kappa}$ -matriz

$$\widehat{K} = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\text{Id}_C)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}$$

$\widehat{K}$  satisfaz as condições  $(\widehat{\kappa}\text{-i})$ ,  $(\widehat{\kappa}\text{-iii})$  e  $(\widehat{\kappa}\text{-iv})$  por construção. Restando provar que satisfaz  $(\widehat{\kappa}\text{-ii})$ . Fazendo composição  $\Gamma_2 \Gamma_1$ ,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_2 \Gamma_1)_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T_{w_k}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^C)_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ -T_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\text{Id}_C)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ -T_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\text{Id}_C)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dos seguintes cálculos

$$\begin{aligned}
(\widehat{K} \widehat{C}_{\iota_C})_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\text{Id}_C)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C_{w_k}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_C)_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^C)_{w_k}^{v_{j+1}} & -B_{w_k}^{v_{j+1}} & T_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^C)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & C_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ -C_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_C)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\widehat{C}_{\iota_C} \widehat{K})_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} -C_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\text{Id}_C)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{w_k} & -B_{u_{i+1}}^{w_k} & T_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} & C_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\text{Id}_C)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\text{Id}_C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ T_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ C_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ . Temos

$$(\widehat{K} \widehat{C}_{\iota_C} + \widehat{C}_{\iota_C} \widehat{K})_{u_i}^{v_j} = \begin{pmatrix} (\text{Id}_C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ T_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_C)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} = (\text{Id}_{\widehat{C}_{\iota_C}} - \Gamma_2 \Gamma_1)_{u_i}^{v_j},$$

então  $\widehat{K}$  é  $\widehat{\kappa}$ -matriz. Portanto,  $\widehat{C}_{\iota_C} \cong B\{1\}$  em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

- Por fim, vamos verificar que o diagrama comuta, o que decorre dos cálculos

$$\begin{aligned}
(\iota_{\widehat{C}_T} \Gamma_2)_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} & (\text{Id}_C)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} \\ (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} \end{pmatrix} \\
&= (\pi_{B\{1\}})_{u_i}^{v_j}
\end{aligned}$$

para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ . Por outro lado,



$$\pi_{C\{1\}} \simeq -\Gamma_2 T\{1\} \text{ com } \widehat{\kappa}\text{-matriz da forma } \widehat{K} = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^C)_{u_i}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_B^C)_{u_i}^{v_{j+1}} \\ (\text{Id}_C)_{u_i}^{v_{j+1}} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}.$$

Sendo assim, o diagrama é comutativo em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ . Portanto, os triângulos

$$(C, \widehat{\mathbf{C}}_T, B\{1\}, \iota_C, \pi_{B\{1\}}, -T\{1\}) \cong (C, \widehat{\mathbf{C}}_T, \widehat{\mathbf{C}}_{\iota_C}, \iota_C, \iota_{\widehat{\mathbf{C}}_T}, \pi_{C\{1\}})$$

são isomorfos em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

TR5 Como  $(X, Y, Z, u, v, w)$  e  $(X', Y', Z', u', v', w')$  são triângulos distinguidos, então existem  $T : B \rightarrow C$  e  $T' : B' \rightarrow C'$  em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , de modo que são isomorfos aos seguintes triângulos  $(B, C, \mathbf{C}_T, T, \iota_C, \pi_{B\{1\}})$  e  $(B', C', \mathbf{C}_{T'}, T', \iota_{C'}, \pi_{B'\{1\}})$ , respectivamente, em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , desse modo temos o seguinte diagrama comutativo em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$

$$\begin{array}{ccccccc} & B & \xrightarrow{T} & C & \xrightarrow{\iota_C} & \widehat{\mathbf{C}}_T & \xrightarrow{\pi_{B\{1\}}} & B\{1\} \\ \phi_1 \swarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \phi_1 \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X\{1\} & \\ & \downarrow F & & \downarrow G & & & & \downarrow F\{1\} \\ & B' & \xrightarrow{T'} & C' & \xrightarrow{\iota_{C'}} & \widehat{\mathbf{C}}_{T'} & \xrightarrow{\pi_{B'\{1\}}} & B'\{1\} \\ \rho_1 \swarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \rho_1 \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'\{1\} & \\ & \downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow f\{1\} \end{array}$$

onde  $F$  e  $G$  são representantes dos morfismos  $\phi_1 f(\rho_1)^{-1}$  e  $\phi_2 g(\rho_2)^{-1}$  em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , respectivamente. Para uma compreensão mais clara, os triângulos standard foram destacados em vermelho, enquanto seus isomorfismos correspondentes foram destacados em azul. Agora, vamos construir o morfismo  $\zeta : \widehat{\mathbf{C}}_T \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}_{T'}$ , de modo que o seguinte diagrama comuta em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{T} & C & \xrightarrow{\iota_C} & \widehat{\mathbf{C}}_T & \xrightarrow{\pi_{B\{1\}}} & B\{1\} \\ \downarrow F & & \downarrow G & & \downarrow \zeta & & \downarrow F\{1\} \\ B' & \xrightarrow{T'} & C' & \xrightarrow{\iota_{C'}} & \widehat{\mathbf{C}}_{T'} & \xrightarrow{\pi_{B'\{1\}}} & B'\{1\} \end{array}$$

Como  $FT' \simeq TG$ , então existe uma  $\widehat{\kappa}$ -matriz  $\widehat{K}$ . Notemos que,  $\text{Supp}(\widehat{\mathbf{C}}_T) = \text{Supp}(B\{1\}) \cup \text{Supp}(C)$  e  $\text{Supp}(\widehat{\mathbf{C}}_{T'}) = \text{Supp}(B'\{1\}) \cup \text{Supp}(C')$ , então podemos descrever os blocos de  $\zeta$  da seguinte forma,

$$\zeta = \begin{pmatrix} F\{1\}_{u_i}^{v_j} & \widehat{K}_{u_i}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^{B'\{1\}})_{u_i}^{v_j} & G_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} F_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & \widehat{K}_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{v_{j+1}} & G_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}.$$

Em termos da Notação 2.18 temos que para cada  $u_i, v_j \in \text{Supp}(\zeta)$  a seguinte tabela

$\begin{pmatrix} F_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & \widehat{K}_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{v_{j+1}} & G_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}$	$v_j \in \text{Supp}(B'\{1\}) \cap \text{Supp}(C')$	$v_j \in \text{Supp}(B'\{1\}) \setminus \text{Supp}(C')$	$v_j \in \text{Supp}(C') \setminus \text{Supp}(B'\{1\})$
$u_i \in \text{Supp}(B\{1\}) \cap \text{Supp}(C)$	$\begin{pmatrix} F_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & \widehat{K}_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{v_{j+1}} & G_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{v_{j+1}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \widehat{K}_{u_{i+1}}^{v_j} \\ G_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}$
$u_i \in \text{Supp}(B\{1\}) \setminus \text{Supp}(C)$	$\begin{pmatrix} F_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & \widehat{K}_{u_{i+1}}^{v_j} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \widehat{K}_{u_{i+1}}^{v_j} \end{pmatrix}$
$u_i \in \text{Supp}(C) \setminus \text{Supp}(B\{1\})$	$\begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{v_{j+1}} & G_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{v_{j+1}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} G_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}$

Vejamus que com efeito,  $\zeta \in \text{Hom}_s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})(\widehat{\mathbf{C}}_T, \widehat{\mathbf{C}}_{T'})$ : As condições de  $\mathcal{Y}$ -compatível segue da construção de  $\zeta$ .

Para ver  $\zeta$  é uma  $\sigma_{\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}$ -matriz especial, notemos que  $(\zeta)_{u_i}^{v_j} = 0$  para todo  $v_j < u_i$ , pois  $F\{1\}$  e  $G$  são morfismos em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , e também note que a faixa horizontal de  $\widehat{K}_{u_i}$  está sendo indexada pelo  $\text{Supp}(B\{1\})$ , ou seja, a propriedade  $(\widehat{\kappa}\text{-iii})$  se reduz a  $j < i$  ou  $(u > v \text{ e } i = j)$ , então  $\widehat{K}_{u_i}^{v_j} = 0$ . Logo,  $(\zeta)_{u_i}^{v_j} = 0$ , analogamente se  $\sigma_{\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}(u_i) = v_j$  observamos que  $(\zeta)_{u_i}^{u_i} = (\zeta)_{v_j}^{v_j}$ , devido à construção da matriz  $\zeta$ .

Vamos apenas verificar se  $\widehat{\mathbf{C}}_T \zeta = \zeta \widehat{\mathbf{C}}_{T'}$ , a qual segue  $B\{1\}F\{1\} = F\{1\}B'\{1\}$ ,  $CG = GC'$ ,  $F\{1\}T' - TG = B\{1\}\widehat{K} + \widehat{K}C'$  e decorre dos cálculos

$$\begin{aligned}
(\widehat{\mathbf{C}}_T \zeta)_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} -B_{u_{i+1}}^{w_k} & T_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} & C_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{w_k}^{v_{j+1}} & \widehat{K}_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{w_k}^{v_{j+1}} & G_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(BF)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (TG - B\widehat{K})_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{v_{j+1}} & (CG)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}, \\
(\zeta \widehat{\mathbf{C}}_{T'})_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} F_{u_{i+1}}^{w_k} & \widehat{K}_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{w_k} & G_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-B')_{w_k}^{v_{j+1}} & (T')_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{w_k}^{v_{j+1}} & (C')_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(FB')_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (FT' + \widehat{K}B')_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{v_{j+1}} & (GC')_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ . Logo,  $\widehat{\mathbf{C}}_T \zeta = \zeta \widehat{\mathbf{C}}_{T'}$ . Portanto,  $\zeta$  é morfismo. Agora, vejamos que o diagrama seguinte comuta em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , o que decorre dos cálculos

$$\begin{aligned}
(G\iota_{C'})_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} (G_{u_i}^{w_k}) ((\mathbf{0}_C^{B'})_{w_k}^{v_{j+1}} \quad (\text{Id}_{C'})_{w_k}^{v_j}) = ((\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{v_{j+1}} \quad G_{u_i}^{v_j}) \\
&= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} ((\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} \quad (\text{Id}_C)_{u_i}^{w_k}) \begin{pmatrix} F_{w_k}^{v_{j+1}} & \widehat{K}_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{w_k}^{v_{j+1}} & G_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} = (\iota_C \zeta)_{u_i}^{v_j}, \\
(\pi_{B\{1\}} F\{1\})_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} F_{w_k}^{v_{j+1}} = \begin{pmatrix} F_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{v_{j+1}} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} F_{u_{i+1}}^{w_k} & \widehat{K}_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{u_i}^{w_k} & G_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_{B'})_{w_k}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_C^{B'})_{w_k}^{v_{j+1}} \end{pmatrix} = (\zeta \pi_{B'\{1\}})_{u_i}^{v_j}.
\end{aligned}$$

para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ . Portanto, o diagrama acima é comutativo. Logo, temos o morfismo  $h = (\phi_3)^{-1} \zeta \rho_3 : Z \rightarrow Z'$  em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

TR6 Como  $(X, Y, X', u, q_1, p_1)$ ,  $(X, Z, Y', uv, q_2, p_2)$  e  $(Y, Z, Z', v, q_3, p_3)$  triângulos distinguidos em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , podemos considerar o seguinte diagrama comutativo em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & B & \xrightarrow{S} & C & \xrightarrow{\iota_C} & \widehat{C}_S & \xrightarrow{\pi_{B\{1\}}} & B\{1\} \\
 & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_1 \\
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{q_1} & X' & \xrightarrow{p_1} & X\{1\} & \\
 & \downarrow \text{Id}_B & & \downarrow T & & & & \downarrow \text{Id}_{B\{1\}} \\
 & B & \xrightarrow{V} & D & \xrightarrow{\iota_D} & \widehat{C}_V & \xrightarrow{\overline{\pi_{B\{1\}}}} & B\{1\} \\
 \text{Id}_X & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_1 \\
 X & \xrightarrow{uv} & Z & \xrightarrow{q_2} & Y' & \xrightarrow{p_2} & X\{1\} & \\
 & \downarrow S & & \downarrow \text{Id}_D & & & & \downarrow S\{1\} \\
 & C & \xrightarrow{T} & D & \xrightarrow{\iota_D} & \widehat{C}_T & \xrightarrow{\pi_{C\{1\}}} & C\{1\} \\
 v & \downarrow \rho_1 & & \downarrow \rho_2 & & \downarrow \rho_3 & & \downarrow \rho_1 \\
 Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{q_3} & Z' & \xrightarrow{p_3} & Y\{1\} & \\
 & & & & & & & \downarrow u\{1\}
 \end{array}$$

Para uma compreensão mais clara, os triângulos standard foram destacados em vermelho, enquanto seus isomorfismos correspondentes foram destacados em azul. Agora, para provar o axioma octaedro vamos nos concentrar no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 B & \xrightarrow{S} & C & \xrightarrow{\iota_C} & \widehat{C}_S & \xrightarrow{\pi_{B\{1\}}} & B\{1\} \\
 \text{Id}_B \downarrow & & \downarrow T & & \exists F \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{B\{1\}} \\
 B & \xrightarrow{V} & D & \xrightarrow{\iota_D} & \widehat{C}_V & \xrightarrow{\overline{\pi_{B\{1\}}}} & B\{1\} \\
 S \downarrow & & \downarrow \text{Id}_D & & \exists G \downarrow & & \downarrow S\{1\} \\
 C & \xrightarrow{T} & D & \xrightarrow{\iota_D} & \widehat{C}_T & \xrightarrow{\pi_{C\{1\}}} & C\{1\}
 \end{array}$$

Primeiramente, vamos mostrar que existem morfismos  $F \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(\widehat{C}_S, \widehat{C}_V)$  e  $G \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(\widehat{C}_V, \widehat{C}_T)$  tal que o diagrama acima comuta em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ . Como  $ST \simeq V$ , então existe uma  $\widehat{\kappa}$ -matriz  $\widehat{K}$ . Do item  $(\widehat{\kappa}\text{-ii})$  temos que  $ST - V = B\widehat{K} + \widehat{K}D$ . Também para evitar confusão,  $\overline{\iota_C}$  e  $\overline{\pi_{B\{1\}}}$  denotam o morfismo  $\iota_D : D \rightarrow \widehat{C}_V$  e  $\pi_{B\{1\}} : \widehat{C}_V \rightarrow B\{1\}$  definido no Lema 2.21. Considere as matrizes:

$$F = \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)^{v_{j+1}} & \widehat{K}_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^B)^{v_{j+1}} & T_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} S_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & -\widehat{K}_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^C)^{v_{j+1}} & (\text{Id}_D)^{v_j} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}$$

Vamos mostrar que  $F \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(\widehat{C}_S, \widehat{C}_{ST})$ , a prova para  $G \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(\widehat{C}_{ST}, \widehat{C}_T)$  é análoga. As propriedades de  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ -compatibilidade e  $\sigma_{\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}$ -matriz especial da

definição de morfismo em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , segue do fato que  $T$  e  $\text{Id}_{B\{1\}}$  são morfismos em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  e  $\widehat{K}$  ser uma  $\widehat{\kappa}$ -matriz. A igualdade  $\widehat{\mathbf{C}}_S F = F \widehat{\mathbf{C}}_V$  é consequência dos seguintes cálculos

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{C}}_S F)_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} -B_{u_{i+1}}^{w_k} & S_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} & C_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_{j+1}} & \widehat{K}_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & T_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (ST)_{u_{i+1}}^{v_j} - (B\widehat{K})_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (CT)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}, \\ (F \widehat{\mathbf{C}}_V)_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} & \widehat{K}_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} & T_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B_{w_k}^{v_{j+1}} & V_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & D_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & V_{u_{i+1}}^{v_j} + (\widehat{K}D)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (TD)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e a comutatividade segue dos cálculos

$$\begin{aligned} (\iota_C F)_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} & (\text{Id}_C)_{u_i}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & T_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_{j+1}} & \widehat{K}_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & T_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & T_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} = \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} T_{u_i}^{w_k} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_D)_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\ &= (T \overline{\iota}_D)_{u_i}^{v_j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overline{\iota}_D G)_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{w_k} & (\text{Id}_D)_{u_i}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_D)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{w_k}^{v_{j+1}} & -\widehat{K}_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^C)_{w_k}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_D)_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_D)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} = (\iota_D)_{u_i}^{v_j}, \end{aligned}$$

$$(F \overline{\pi}_{B\{1\}})_{u_i}^{v_j} = \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} & \widehat{K}_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} & T_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_{j+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{v_{j+1}} \end{pmatrix} = (\pi_{B\{1\}})_{u_i}^{v_j}$$

e

$$\begin{aligned} (G \pi_{C\{1\}})_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} S_{u_{i+1}}^{w_k} & -\widehat{K}_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{w_k} & (\text{Id}_D)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_C)_{w_k}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_D^C)_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{v_{j+1}} \end{pmatrix} = \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} S_{w_k}^{v_{j+1}} = (\overline{\pi}_B S)_{u_i}^{v_j} \end{aligned}$$

para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ . Terminaremos esta prova mostrando que

$$(\widehat{\mathbf{C}}_S, \widehat{\mathbf{C}}_V, \widehat{\mathbf{C}}_T, F, G, \pi_{C\{1\}} \iota_{C\{1\}})$$

é um triângulo distinguido. Para ver isto, vejamos que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+2}} & (\text{Id}_C)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_C^D)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{v_{j+2}} & (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{v_{j+1}} & (\text{Id}_D)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix}_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})}(\widehat{\mathbf{C}}_T, \widehat{\mathbf{C}}_F)$$

e é um isomorfismo em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  tal que o diagrama a seguir comuta em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{\mathbf{C}}_S & \xrightarrow{F} & \widehat{\mathbf{C}}_V & \xrightarrow{G} & \widehat{\mathbf{C}}_T & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{C}\{1\}} \iota_{\mathbf{C}\{1\}}} & \widehat{\mathbf{C}}_{S\{1\}} \\
\text{Id}_{\widehat{\mathbf{C}}_S} \downarrow & & \text{Id}_{\widehat{\mathbf{C}}_V} \downarrow & & \exists \Lambda \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{\widehat{\mathbf{C}}_{S\{1\}}} \\
\widehat{\mathbf{C}}_S & \xrightarrow{F} & \widehat{\mathbf{C}}_V & \xrightarrow{\iota_{\widehat{\mathbf{C}}_V}} & \widehat{\mathbf{C}}_F & \xrightarrow{\pi_{\widehat{\mathbf{C}}_S\{1\}}} & \widehat{\mathbf{C}}_{S\{1\}}
\end{array}$$

Da mesma forma, as propriedades de  $\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ -compatível e  $\sigma$ -matriz especial da definição de morfismo em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , decorrem do fato de que  $\text{Id}_{\widehat{\mathbf{C}}_S}$  e  $\text{Id}_{\widehat{\mathbf{C}}_V}$  são morfismos em  $s(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ . A igualdade  $\widehat{\mathbf{C}}_T \Lambda = \Lambda \widehat{\mathbf{C}}_F$  é consequência dos seguintes cálculos para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
(\Lambda \widehat{\mathbf{C}}_F)_{u_i}^{v_j} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\text{Id}_C)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^D)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{w_k} & (\text{Id}_D)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\widehat{\mathbf{C}}_{S\{1\}})_{w_k}^{v_j} & F_{w_k}^{v_j} \\ (\widehat{\mathbf{C}}_{\widehat{\mathbf{C}}_V\{1\}})_{w_k}^{v_j} & (\widehat{\mathbf{C}}_V)_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\text{Id}_C)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_C^D)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{w_k} & (\text{Id}_D)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \cdot \\
&\quad \begin{pmatrix} B_{w_k}^{v_j+2} & -S_{w_k}^{v_j+1} & (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_j+1} & \widehat{K}_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_j+2} & -C_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_j+1} & T_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_B^B)_{w_k}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_B^C)_{w_k}^{v_j+1} & -B_{w_k}^{v_j+1} & V_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_D^C)_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_j+1} & D_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_j+2} & -C_{u_{i+1}}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_j+1} & T_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{v_j+1} & D_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{w_k \in \mathcal{Y}} \begin{pmatrix} -C_{u_{i+1}}^{w_k} & T_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{w_k} & D_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_j+2} & (\text{Id}_C)_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_C^D)_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_D^C)_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_j+1} & (\text{Id}_D)_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= (\widehat{\mathbf{C}}_T \Lambda)_{u_i}^{v_j}
\end{aligned}$$

A comutatividade é direta, dos seguintes cálculos, para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
(\iota_{\widehat{\mathbf{C}}_V} - G \Lambda)_{u_i}^{v_j} &= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_C^B)_{u_{i+1}}^{v_j+1} & (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_B^D)_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_B^B)_{u_i}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_i}^{v_j+1} & (\text{Id}_D)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_j+2} & S_{u_{i+1}}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_j+1} & -\widehat{K}_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{v_j+1} & (\text{Id}_D)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{v_j+2} & -S_{u_{i+1}}^{v_j+1} & (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{v_j+1} & \widehat{K}_{u_{i+1}}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_D^D)_{u_i}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} -B_{u_{i+1}}^{w_k} & V_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{w_k} & D_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_B^B)_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_D^C)_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_D^D)_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} (\text{Id}_B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_B^C)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_B^B)_{u_{i+1}}^{w_k} & (\mathbf{0}_B^D)_{u_{i+1}}^{w_k} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_D^C)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_D^B)_{u_i}^{w_k} & (\mathbf{0}_D^D)_{u_i}^{w_k} \end{pmatrix} \cdot \\
&\quad \begin{pmatrix} B_{w_k}^{v_j+2} & -S_{w_k}^{v_j+1} & (\text{Id}_B)_{w_k}^{v_j+1} & \widehat{K}_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_j+2} & -C_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_C^B)_{w_k}^{v_j+1} & T_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_B^B)_{w_k}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_B^C)_{w_k}^{v_j+1} & -B_{w_k}^{v_j+1} & V_{w_k}^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_j+2} & (\mathbf{0}_D^C)_{w_k}^{v_j+1} & (\mathbf{0}_D^B)_{w_k}^{v_j+1} & D_{w_k}^{v_j} \end{pmatrix} \\
&= (\widehat{\mathbf{C}}_V \widehat{\mathbf{K}} + \widehat{\mathbf{K}} \widehat{\mathbf{C}}_F)_{u_i}^{v_j},
\end{aligned}$$

onde a  $\widehat{\kappa}$ -matriz é da forma

$$\widehat{\mathbf{K}} = \left( \begin{array}{cccc} (\mathrm{Id}_B)^{v_{j+2}} & (\mathbf{0}_B^C)^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^B)^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_B^D)^{v_j} \\ (\mathbf{0}_D^B)^{v_{j+2}} & (\mathbf{0}_D^C)^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_D^B)^{v_{j+1}} & (\mathbf{0}_D^D)^{v_j} \end{array} \right)_{u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\Lambda \pi_{\mathcal{C}_S\{1\}})^{v_j}_{u_i} &= \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \left( \begin{array}{cccc} (\mathbf{0}_C^B)^{w_k} & (\mathrm{Id}_C)^{w_k} & (\mathbf{0}_C^B)^{w_k} & (\mathbf{0}_C^D)^{w_k} \\ (\mathbf{0}_D^B)^{w_k} & (\mathbf{0}_D^C)^{w_k} & (\mathbf{0}_D^B)^{w_k} & (\mathrm{Id}_D)^{w_k} \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} (\mathrm{Id}_B)^{v_{j+2}} & (\mathbf{0}_B^C)^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_C^B)^{v_{j+2}} & (\mathrm{Id}_C)^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_B^B)^{v_{j+2}} & (\mathbf{0}_B^C)^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_D^B)^{v_{j+2}} & (\mathbf{0}_D^C)^{v_{j+1}} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)^{v_{j+2}} & (\mathrm{Id}_C)^{v_{j+1}} \\ (\mathbf{0}_D^B)^{v_{j+2}} & (\mathbf{0}_D^C)^{v_{j+1}} \end{array} \right) = \sum_{w_k \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}} \left( \begin{array}{c} (\mathrm{Id}_C)^{w_k} \\ (\mathbf{0}_D^C)^{w_k} \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} (\mathbf{0}_C^B)^{v_{j+2}} & (\mathrm{Id}_C)^{v_{j+1}} \end{array} \right) \\ &= (\pi_{\mathcal{C}\{1\} \iota_{\mathcal{C}\{1\}}})^{v_j}_{u_i} \end{aligned}$$

para todos  $u_i, v_j \in \mathcal{Y} \times \mathbb{Z}$ . Do TR1 ao TR5 temos que a categoria  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  é pré-triangulada, como  $\mathrm{Id}_{\widehat{\mathcal{C}}_S}$  e  $\mathrm{Id}_{\widehat{\mathcal{C}}_{ST}}$  são isomorfismo em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ , pelo Lema 1.26 para categorias pré-trianguladas  $\Lambda$  é isomorfismo em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$ .

Portanto,  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k})$  com o autofuntor  $\{1\}$  e a família de triângulos distinguidos  $\widehat{\mathcal{T}}$  é triangulada.  $\square$

# Capítulo 5

## A categoria $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$

No capítulo 4, provamos que  $(\widehat{\kappa}(\mathcal{Y} \times \mathbb{Z}, \mathbb{k}), \{1\}, \widehat{\mathcal{T}})$  é uma categoria triangulada (Teorema 4.7). Motivados por isso, neste capítulo iremos construir um poset associado a álgebra SUMP (ver Definição 1.33)  $A = \mathbb{k}Q/I$  com uma involução bem esperta, introduzida por V. Bekkert e H. Merklen em [2] a qual denotaremos por  $\mathcal{Y}(A)$ , para definir a categoria de Bondarenko associada à álgebra SUMP  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$  e estabelecer uma relação entre os triângulos distinguidos da categoria de homotopia  $\mathbf{K}^b(\text{proj}A)$  com os triângulos distinguidos de  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$  via o funtor introduzido em [2]. Neste capítulo, usaremos os conceitos, notações e propriedades apresentadas nas seções 1.2 e 1.3.

De agora, em diante todas as álgebras serão consideradas SUMP, todos os quivers são conexos, ou seja, existe pelo menos um caminho entre cada par  $(i, j) \in Q_0$  e  $\mathbf{M}$  será o conjunto dos caminhos maximais da álgebra (ver Definição 1.29).

**Definição 5.1.** *Seja  $\mathbf{M}$  o conjunto de caminhos máximos da álgebra  $A$ . Para cada  $m \in \mathbf{M}$ , definamos o **poset associado ao caminho  $m$**  por*

$$\mathcal{Y}_m = \{e_{s(m)} < e_{s(m)}u_1 < e_{s(m)}u_1u_2 < e_{s(m)}u_1u_2u_3 < \cdots < m\},$$

onde  $m = e_{s(m)}u_1u_2u_3 \cdots u_n$ .

É importante observar que, caminhos triviais podem pertencer a dois caminhos maximais distintos. Nesse caso, é necessário considerar as duas ocorrências como sendo diferentes. Desta forma se impusermos uma ordem sobre  $\mathbf{M}$ , obtemos o poset  $\bigcup_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{Y}_m$  cuja união disjunta.

Para maiores esclarecimentos apresentaremos os seguintes exemplos:

**Exemplo 5.2.** *Seja  $A = \mathbb{k}Q/I$  a álgebra SUMP do Exemplo 1.34, onde*

$$Q : 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{d} \end{array} 3, \quad I = \langle ac, bd \rangle$$

*Note que o conjunto de caminhos maximais é  $\mathbf{M} = \{ad, bc\}$ . Consideraremos os seguintes posets*

$$\mathcal{Y}_{ad} = \{e_{s(ad)} < a < ad\} \quad e \quad \mathcal{Y}_{bc} = \{e_{s(bc)} < b < bc\}.$$

*Estabelecendo a ordem  $ad < bc$  sobre  $\mathbf{M}$  e  $e_{s(ad)} \neq e_{s(bc)}$ , temos*

$$\mathcal{Y}_{ad} \cap \mathcal{Y}_{bc} = \emptyset \quad e \quad \mathcal{Y}_{ad} \cup \mathcal{Y}_{bc} = \{e_{s(ad)} < a < ad < e_{s(bc)} < b < bc\}.$$

**Exemplo 5.3.** Seja  $A = \mathbb{k}Q$  a álgebra gentle [2, Exemplo 2], onde

$$Q : 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

Como  $\mathbf{M} = \{a, b\}$  é o conjunto de caminhos maximais. Agora, vamos impor  $a < b$ , e desta maneira

$$\mathcal{Y}_a \cup \mathcal{Y}_b = \{e_{s(a)} < a < e_{s(b)} < b\}.$$

Notemos que  $e_1 = e_{s(a)} = e_{s(b)}$ , mas dentro da união  $\mathcal{Y}_a \cup \mathcal{Y}_b$  serão considerados diferentes.

Dado  $w \in \mathbf{Pa}$ , é importante lembrar que um caminho trivial não determina um caminho maximal, como exemplificado anteriormente, em que um caminho trivial  $e_{s(w)}$  pode pertencer a dois caminhos maximais distintos. No entanto, um caminho não trivial  $w$  determina um caminho maximal  $\tilde{w} = \tilde{w}w\bar{w}$ , em que  $\tilde{w}$  e  $\bar{w}$  pertencem a  $\mathbf{Pa}$  são as complementações à esquerda e direita, respectivamente, (ver Observação 1.30).

**Lema 5.4.** Seja  $A = \mathbb{k}Q/I$  uma álgebra SUMP. Dois caminhos  $u, v \in \mathbf{Pa}$  com o mesmo ponto de partida, em que  $\tilde{u} = \tilde{v}$  e  $l(v) > l(u) \geq 1$ , determinam um único caminho  $w \in \mathbf{Pa}_{\geq 1}$  tal que  $v = uw$ .

*Demonstração.* A existência de  $w$  segue naturalmente das hipóteses. E, a unicidade segue do fato que se  $w_1, w_2 \in \mathbf{Pa}_{\geq 1}$  são caminhos tais que  $v = uw_1 = uw_2$  e  $w_1 \neq w_2$ , então  $uw_1$  e  $uw_2$  não estão em  $I$ , o que contradiz o fato de  $A$  ser string.  $\square$

Até aqui, introduzimos um poset, a saber  $\bigcup_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{Y}_m$ . Para continuar com nosso raciocínio estabelecido no Capítulo 4, precisamos definir uma involução sobre este poset. No entanto, antes disso, é necessário demonstrar que existem no máximo dois caminhos não triviais distintos,  $u$  e  $v$ , em  $\bigcup_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{Y}_m$ , tais que  $t(u) = t(v)$ , quando  $A$  é SUMP, tais resultados são do artigo de A. Franco, H. Giraldo e P. Rizzo (ver [8]).

**Proposição 5.5.** Seja  $A = \mathbb{k}Q/I$  uma álgebra SUMP e sejam  $u, v, w$  três caminhos não triviais em  $\bigcup_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{Y}_m$  que são, respectivamente, sub-caminhos dos caminhos maximais  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$  de  $\mathbf{M}$  e tal que  $t(u) = t(v) = t(w)$  (ou  $s(u) = s(v) = s(w)$ ). Então, pelo menos dois dos caminhos  $u, v, w$  devem ser iguais.

*Demonstração.* Nesta, demonstração iremos nos concentrar no caso  $t(u) = t(v) = t(w)$ , pois para o caso  $s(u) = s(v) = s(w)$  é análogo.

Primeiro, se  $A$  é uma álgebra SUMP e temos dois caminhos não triviais  $u, v \in \bigcup_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{Y}_m$ , onde  $\tilde{u} \neq \tilde{v}$  e  $t(u) = t(v)$ , então  $u$  e  $v$  são diferentes e não tem uma flecha em comum. Agora, se tivermos três caminhos distintos,  $u, v$  e  $w$ , onde cada par difere em pelo menos uma flecha, o mesmo ocorre com os caminhos maximais correspondentes,  $\tilde{u}, \tilde{v}$  e  $\tilde{w}$ , e portanto também são distintos dois a dois. Como  $t(u) = t(v) = t(w)$  e  $A$  é uma álgebra SUMP, então no mínimo dois caminhos de  $u, v$  e  $w$  devem compartilhar a última flecha. No entanto, isso contradiz nossa primeira observação.  $\square$

Para definir uma involução sobre o conjunto  $\bigcup_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{Y}_m$  vamos nos concentrar em cada vértice  $i$  do quiver  $Q$ , como no lema a seguir.



**Lema 5.6.** *Para cada  $i \in Q_0$  é possível definir uma involução  $\sigma_i$  sobre o conjunto  $\Sigma_i = \{u \in \bigcup_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{Y}_m \mid t(u) = i\}$ .*

*Demonstração.* Seja  $i$  um vértice fixo. Da Definição 1.33 de álgebra *SUMP*, temos as seguintes consequências:

- No máximo, existem quatro flechas distintas que passam pelo vértice  $i$ , especificamente, no máximo duas flechas chegando e duas saindo.
- Existe um subconjunto  $\{l, m, n, p\}$  de  $\mathbf{M}$  que passa pelo vértice  $i$ .

Observe que  $|\{l, m, n, p\}| = d$ , onde  $d = 1, 2, 3, 4$ , e cada valor de  $d$  é possível. Para cada um dos  $d$  caminhos maximais  $q \in \{l, m, n, p\}$ , fixamos um subcaminho à esquerda  $x_q \in \mathcal{Y}_q$  satisfazendo  $t(x_q) = i$ . Isso implica que  $l = x_l \bar{x}_l$ ,  $m = x_m \bar{x}_m$ ,  $n = x_n \bar{x}_n$  e  $p = x_p \bar{x}_p$ , com  $\bar{x}_l, \bar{x}_m, \bar{x}_n, \bar{x}_p \in \mathbf{Pa}$ . Dado que o quiver  $Q$  é conexo, então nenhum dos elementos em  $\{l, m, n, p\}$  pode ser caminho trivial.

Da Proposição 5.5, há no máximo dois caminhos distintos no conjunto  $\{x_l, x_m, x_n, x_p\}$  que não são triviais. Vejamos que há no máximo dois caminhos triviais no conjunto  $\{x_l, x_m, x_n, x_p\}$ . Isto será evidente quando  $d = 1, 2$ , portanto, assumiremos que  $d = 3$  ou  $4$ . Dado que o conjunto  $\{x_l, x_m, x_n, x_p\}$  tem no máximo dois caminhos distintos e que não são triviais, os caminhos restantes ou são iguais aos primeiros (aqueles distintos e não triviais) ou são triviais, porém a primeira situação não pode acontecer, caso contrario existiria em  $\{x_l, x_m, x_n, x_p\}$  um caminho que é um subcaminho de dois caminhos maximais distintos do conjunto  $\{l, m, n, p\}$ , o qual contradiz o fato de  $A$  ser uma álgebra *SUMP*.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que os caminhos triviais sejam  $x_n = e_{s(n)}$  e  $x_m = e_{s(m)}$ . O conjunto  $\Sigma_i$  é um conjunto com no máximo quatro elementos (possivelmente menos). Definimos a involução  $\sigma_i$  sobre o conjunto  $\Sigma_i$  da seguinte forma:  $\sigma_i(x_p) = x_l$  e  $\sigma_i(x_n) = x_m$ . □

O Lema 5.6 permite definir a seguinte involução.

**Definição 5.7.** *Seja  $\mathbf{M}$  um conjunto de caminhos maximais. A involução  $\sigma_{\mathbf{M}}$  sobre  $\bigcup_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{Y}_m$  é definida como  $\sigma_{\mathbf{M}}(u) = \sigma_i(u)$ , onde  $i = t(u)$*

A seguir definiremos um poset associado a uma álgebra *SUMP*.

**Definição 5.8.** *Seja  $A = \mathbb{k}Q/I$  uma álgebra *SUMP*. Definamos o poset*

$$\mathcal{Y}(A) := \left( \bigcup_{m \in \mathbf{M}} \mathcal{Y}_m \right) \times \mathbb{Z},$$

cuja a ordem é anti-lexicográfica, ou seja,

$$[u, i] < [v, j] \text{ se, e somente se, } i < j \text{ ou } (i=j \text{ e } \tilde{u} < \tilde{v}) \text{ ou } (i=j, \tilde{u} = \tilde{v} \text{ e } l(u) < l(v)).$$

A seguinte definição irá tratar da involução sobre o poset  $\mathcal{Y}(A)$ , onde  $A$  é uma álgebra *SUMP*.

**Definição 5.9.** A *involução* sobre  $\mathcal{Y}(A)$  é definida da seguinte maneira

$$\sigma : \mathcal{Y}(A) \longrightarrow \mathcal{Y}(A)$$

onde  $\sigma([u, i]) = [v, j]$  se, e somente se,  $i = j$ ,  $t(u) = t(v)$  e  $\sigma_{\mathbf{M}}(u) = v$ .

Vejam os um exemplo para facilitar o entendimento.

**Exemplo 5.10.** Do Exemplo 5.3, obtemos o seguinte poset,

$$\mathcal{Y}(A) = \{e_{s(a)} < a < e_{s(b)} < b\} \times \mathbb{Z}$$

com involução dada por

$$\sigma : \mathcal{Y}(A) \longrightarrow \mathcal{Y}(A)$$

$$[x, j] \longmapsto \sigma([x, j]) = \begin{cases} [e_{s(b)}, j], & \text{se } [x, j] = [e_{s(a)}, j] \\ [b, j], & \text{se } [x, j] = [a, j] \end{cases}$$

Agora, temos todos os elementos para definir a categoria de Bondarenko associada a uma álgebra *SUMP*, a qual será denotada por  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ .

## 5.1 O Funtor

Nos trabalho de V. Bekkert e H. Merklen [2], é estabelecida uma relação da categoria  $\mathfrak{p}(A)$  dos complexos projetivos minimais (Definição 1.42) com a categoria de Bondarenko  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$  para o estudo de objetos indecomponíveis por meio de um certo funtor. Nesta seção, iremos definir um funtor

$$\mathbf{F} : \mathbf{C}^b(\text{proj}A) \longrightarrow s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$$

como sendo uma adaptação do funtor definido em [2] os quais coincidem quando restringimos  $\mathbf{F}$  sobre a categoria  $\mathfrak{p}(A)$ .

Começemos com um complexo

$$\mathbf{P}^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{P}^n \xrightarrow{\partial_P^n} \mathbf{P}^{n+1} \xrightarrow{\partial_P^{n+1}} \dots \longrightarrow \mathbf{P}^{n+m-1} \xrightarrow{\partial_P^{n+m-1}} \mathbf{P}^{n+m} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

em  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$ , onde  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

Dado que cada componente  $\mathbf{P}^j$  do complexo  $\mathbf{P}^\bullet$ , é uma soma direta finita de módulos projetivos indecomponíveis  $P_i$  com  $i \in Q_0$ , denotemos por  $d_{i,j}$  o número de vezes que aparece o projetivo  $P_i$  na decomposição de  $\mathbf{P}^j$ . Em outras palavras,  $P_i^{d_{i,j}}$  é a componente de  $\mathbf{P}^j$  envolvendo o indecomponível  $P_i$ . Portanto, podemos escrever o complexo  $\mathbf{P}^\bullet$  como

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^t P_i^{d_{i,n}} \xrightarrow{\partial_P^n} \bigoplus_{i=1}^t P_i^{d_{i,n+1}} \xrightarrow{\partial_P^{n+1}} \dots \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^t P_i^{d_{i,n+m}} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

onde  $Q_0 = \{1, 2, 3, \dots, t\}$  (sem perda de generalidade). Claramente, cada diferencial  $\partial_P^j : \mathbf{P}^j \longrightarrow \mathbf{P}^{j+1}$  do complexo  $\mathbf{P}^\bullet$  é dado por uma matriz em blocos de tamanho

$\sum_{i \in Q_0} d_{i,j} \times \sum_{i \in Q_0} d_{i,j+1}$ . Portanto, cada bloco associado ao diferencial corresponde a cada par de indecomponíveis correspondente ao morfismo  $P_r^{d_{r,j}} \rightarrow P_s^{d_{s,j+1}}$ . Para representar o diferencial  $\partial_P^j$  como uma matriz, sabemos que para cada par de indecomponíveis o homomorfismo  $p(w) : P_r \rightarrow P_s$  com  $w \in \mathbf{Pa}$  tal que  $s(w) = r$  e  $t(w) = s$ , dado por  $u \mapsto v = uw$  forma uma base para o espaço  $\text{Hom}_A(P_r, P_s)$  segue do Lema 1.28. Isto permite que qualquer morfismo de  $P_r$  para  $P_s$  seja associado a combinação linear dos  $p(w)$ .

A representação do complexo  $\mathbf{P}^\bullet$  é determinada pela representação da sequência de morfismos  $\partial_P^j$ ,  $j = n, \dots, n+m-1$  (e vice-versa). Por sua vez, cada sequência de  $\partial_P^j$  é dada pelo bloco da matriz  $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{r,j}^{s,j+1})$ , o qual depende das “multiplicidades” do morfismo  $p(w)$  em  $\partial_P^j$ . Precisamente, cada  $\partial_P^j$  é representado da seguinte forma:

$$\partial_P^j : \sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w) \mathbf{A}_{w,j},$$

onde  $\mathbf{A}_{w,j}$  denota o bloco que é expresso das “multiplicidades” do morfismo  $p(w)$  no diferencial  $\partial_P^j$ . Deixe-me explicar em detalhes.

Fixemos a posição  $j$  do complexo  $\mathbf{P}^\bullet$ . A componente do diferencial  $\partial_P^j$  partindo de  $P_r^{d_{r,j}}$  para  $P_s^{d_{s,j+1}}$  é representada pela matriz (por bloco).

$$\mathbf{A}_{r,j}^{s,j+1} \in \text{Mat}(d_{r,j} \times d_{s,j+1}; \mathbb{k}(\langle p(w_1), \dots, p(w_l) \rangle)),$$

onde, os caminhos  $w_i$ s são paralelos aos caminhos de  $r$  para  $s$ . Então, temos que  $\mathbb{k}(\langle p(w_1), \dots, p(w_l) \rangle)$  é o  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial com base  $\{p(w_1), \dots, p(w_l)\}$ . Além disso, o bloco  $\mathbf{A}_{r,j}^{s,j+1}$  é escrito de maneira única como

$$\mathbf{A}_{r,j}^{s,j+1} = \sum_{i=1}^l p(w) \mathbf{A}_{w,j},$$

com  $\mathbf{A}_{w,j} \in \text{Mat}(d_{r,j} \times d_{s,j+1}; \mathbb{k})$ . Deve-se ter em mente que a nossa convenção na representação matricial de  $\partial_P^j : \mathbf{P}^j \rightarrow \mathbf{P}^{j+1}$ , as somas indecomponíveis em  $\mathbf{P}^j$  correspondem a linhas, e as somas indecomponíveis em  $\mathbf{P}^{j+1}$  correspondem a colunas.

Portanto, para cada complexo  $\mathbf{P}^\bullet \in \mathbf{C}^b(\text{proj} A)$  definimos  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet) \in s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$  por

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \mathbf{A}_{w,i} & \text{se } j = i+1, v = uw \text{ e } w \in \mathbf{Pa}; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que tal  $w \in \mathbf{Pa}$  é determinado unicamente para cada par  $u, v \in \mathcal{Y}_m$ , porque, se  $u = v$ , então  $w$  é um caminho trivial. E, quando  $u \neq v$ , como  $A$  é uma álgebra *SUMP*, existe um caminho único  $w \in \mathbf{Pa}_{\geq 1}$  tal que  $\tilde{w} = v\bar{w}$  e  $v = uw$ , segue do Lema 5.4.

Além disso, a condição de que todos os produtos  $\partial_P^j \partial_P^{j+1}$  sejam iguais a zero pode ser traduzida como a exigência de que todos os produtos entre blocos consecutivos sejam nulos, ou seja,  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)^2 = 0$  em  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ . Em outras palavras, é necessário que a matriz resultante seja uma matriz quadrada com quadrado igual a zero.

Vamos agora entender os morfismos: Um morfismo  $\varphi^\bullet : \mathbf{P}^\bullet \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}^\bullet$  em  $\mathbf{C}^b(\text{proj} A)$  é, em cada posição  $j$ , um morfismo do projetivo  $\mathbf{P}^j$  para o projetivo  $\tilde{\mathbf{P}}^j$ , consequentemente, é uma matriz bloco entre somas diretas de indecomponíveis, ou seja,

$$\varphi^j : \sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w) \phi_{w,j}$$

do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{P}^\bullet : & \dots & \longrightarrow & \mathbf{P}^{j-1} & \xrightarrow{\partial_P^{j-1}} & \mathbf{P}^j & \xrightarrow{\partial_P^j} & \mathbf{P}^{j+1} & \longrightarrow & \dots \\
\varphi^\bullet \downarrow & & & \varphi^{j-1} \downarrow & & \varphi^j \downarrow & & \downarrow \varphi^{j+1} & & \\
\tilde{\mathbf{P}}^\bullet : & \dots & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{P}}^{j-1} & \xrightarrow{\tilde{\partial}_P^{j-1}} & \tilde{\mathbf{P}}^j & \xrightarrow{\tilde{\partial}_P^j} & \tilde{\mathbf{P}}^{j+1} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

obtemos a condição  $\varphi^j \tilde{\partial}_P^j = \partial_P^j \varphi^{j+1}$ , e sob as notações acima, temos que:

$$\sum_{\substack{w_1 w_2 = w \\ w_1, w_2 \in \mathbf{Pa}}} p(w) \phi_{w_1, j} \tilde{\mathbf{A}}_{w_2, j} = \sum_{\substack{w_3 w_4 = \tilde{w} \\ w_3, w_4 \in \mathbf{Pa}}} p(\tilde{w}) \mathbf{A}_{w_3, j} \phi_{w_4, j+1} \quad (5.1)$$

Finalmente, temos a definição do funtor  $\mathbf{F}$ .

**Definição 5.11.** *Seja  $\mathbf{F} : \mathbf{C}^b(\text{proj}A) \longrightarrow s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$  o funtor definido da seguinte maneira:*

- $\left( \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u, i]}^{[v, j]} \right)_{[u, i], [v, j] \in \mathcal{Y}(A)}$  para cada complexo  $\mathbf{P}^\bullet$  em  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$ , cujos blocos são dados por

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u, i]}^{[v, j]} = \begin{cases} \mathbf{A}_{w, i} & \text{se } j = i + 1, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Onde, o bloco  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u, i]}$  (respectivamente,  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)^{[u, i]}$ ) tem  $d_{t(u), i}$  linhas (respectivamente, colunas) e  $\partial_P^j : \sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w) \mathbf{A}_{w, j}$  é o diferencial  $\mathbf{P}^j \longrightarrow \mathbf{P}^{j+1}$ .

- $\left( \mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[u, i]}^{[v, j]} \right)_{[u, i], [v, j] \in \mathcal{Y}(A)}$ , para cada morfismo  $\varphi^\bullet$  em  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$  cujos blocos são dados por

$$\mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[u, i]}^{[v, j]} = \begin{cases} \phi_{w, i}, & \text{se } j = i, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Observação 5.12.**

- (i) Note que ao fazermos a restrição de  $\mathbf{F}$  à subcategoria plena  $\mathfrak{p}(A)$ , obtemos o funtor original

$$\mathbf{F}|_{\mathfrak{p}(A)} : \mathfrak{p}(A) \longrightarrow s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$$

como definido em [2] e [8]. No qual, em objetos, a correspondência é dada por,

$$\mathbf{F}|_{\mathfrak{p}(A)} (\mathbf{P}^\bullet)_{[u, i]}^{[v, j]} = \begin{cases} \mathbf{A}_{w, i}, & \text{se } j = i + 1, v = uw, w \in \mathbf{Pa}_{\geq 1}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E, em morfismos, a correspondência é dada por,

$$\mathbf{F}|_{\mathfrak{p}(A)} (\varphi^\bullet)_{[u, i]}^{[v, j]} = \begin{cases} \phi_{w, i}, & \text{se } j = i, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(ii) Observe que  $\mathbf{F}$  preserva a composição no sentido das flechas devido às convenções que escolhemos sobre a ação das matrizes  $\phi_{w,i}$  no domínio de  $\varphi_i$  e a convenção de composição das flechas no quiver  $Q$ , ou seja,  $\mathbf{F}$  é um functor covariante.

**Exemplo 5.13.** Seja  $A = \mathbb{k}Q/I$  a álgebra SUMP do Exemplo 1.34, onde

$$Q : 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightleftharpoons[c]{b} 3, \quad I = \langle ab, ac \rangle.$$

Dado que  $\mathbf{Pa} = \{e_1, e_2, e_3, a, b, c\}$  e  $\mathbf{M} = \{a, b, c\}$ , vamos impor  $a < b < c$ . Assim

$$\mathcal{Y}(A) = \{e_{s(a)} < a < e_{s(b)} < b < e_{s(c)} < c\} \times \mathbb{Z}$$

e sua involução  $\sigma$  é dada por,

$$\sigma([e_{s(a)}, j]) = [e_{s(a)}, j], \quad \sigma([a, j]) = [a, j], \quad \sigma([e_{s(b)}, j]) = [e_{s(c)}, j] \quad e \quad \sigma([b, j]) = [c, j].$$

para todo  $j \in \mathbb{Z}$ . Consideremos o morfismo  $\varphi^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^b(\text{proj}A)}(\mathbf{P}^\bullet, \mathbf{P}^\bullet)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{P}^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 \oplus P_2 & \xrightarrow{\partial_P^1} & P_2 \oplus P_2 & \xrightarrow{\partial_P^2} & P_3 \oplus P_3 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \varphi^\bullet \downarrow & & & \downarrow & & \varphi^1 \downarrow & & \varphi^2 \downarrow & & \varphi^3 \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{P}^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 \oplus P_2 & \xrightarrow{\partial_P^1} & P_2 \oplus P_2 & \xrightarrow{\partial_P^2} & P_3 \oplus P_3 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

onde

$$\partial_P^1 = \begin{pmatrix} p(a) & 0 \\ 0 & p(e_2) \end{pmatrix} \quad e \quad \partial_P^2 = \begin{pmatrix} p(b) & p(c) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primeiro, calculemos  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)$ . A representação dos diferenciais são dadas por

$$\partial_P^j : p(e_1)\mathbf{A}_{e_1,j} + p(a)\mathbf{A}_{a,j} + p(e_2)\mathbf{A}_{e_2,j} + p(b)\mathbf{A}_{b,j} + p(c)\mathbf{A}_{c,j} + p(e_3)\mathbf{A}_{e_3,j},$$

com

$$\partial_P^1 : p(e_1)\emptyset + p(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p(e_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p(b)\emptyset + p(c)\emptyset + p(e_3)\emptyset,$$

$$\partial_P^2 : p(e_1)\emptyset + p(a)\emptyset + p(e_2)\emptyset + p(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p(c) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p(e_3)\emptyset$$

onde  $\emptyset$  indica que esta matriz de bloco está vazia. Então nós temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[e_{s(a)},1]}^{[a,2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[a,1]}^{[a,2]} = \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[e_{s(b)},1]}^{[e_{s(b)},2]} = \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[e_{s(c)},1]}^{[e_{s(c)},2]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[e_{s(b)},2]}^{[b,3]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[e_{s(c)},2]}^{[c,3]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e os outros casos para  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]}$  são blocos zero ou blocos vazios. Lembre-se que o bloco  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]}$  (respectivamente,  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i]}^{[u,i]}$ ) tem  $d_{t(u),i}$  linhas (respectivamente, colunas). Especificamente,  $d_{t(u),i} = 0$  para todos  $i \neq 1, 2, 3$  e

$[u, i] \in \mathcal{Y}(A)$	$[e_{s(a)}, i]$	$[a, i]$	$[e_{s(b)}, i]$	$[b, i]$	$[e_{s(c)}, i]$	$[c, i]$
$d_{t(u), i}$	$d_{1,1} = 1$	$d_{2,1} = 1$	$d_{2,1} = 1$	$d_{3,1} = 0$	$d_{2,1} = 1$	$d_{3,1} = 0$
	$d_{1,2} = 0$	$d_{2,2} = 2$	$d_{2,2} = 2$	$d_{3,2} = 0$	$d_{2,2} = 2$	$d_{3,2} = 0$
	$d_{1,3} = 0$	$d_{2,3} = 0$	$d_{2,3} = 0$	$d_{3,3} = 2$	$d_{2,3} = 0$	$d_{3,3} = 2$

Portanto, obtemos a seguinte matriz de Bondarenko

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet) = \begin{pmatrix} & [e_{s(a)}, 1] & [a, 1] & [e_{s(b)}, 1] & [e_{s(c)}, 1] & [a, 2] & [e_{s(b)}, 2] & [e_{s(c)}, 2] & [b, 3] & [c, 3] \\ [e_{s(a)}, 1] & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [a, 1] & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{s(b)}, 1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{s(c)}, 1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [a, 2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{s(b)}, 2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ [e_{s(c)}, 2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ [b, 3] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [c, 3] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, para calcular a matriz  $\mathbf{F}(\varphi^\bullet)$ , observe que, do Exemplo 1.37 item 3 todos os morfismos de  $\text{End}_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}^\bullet)$  são da forma

$$\varphi^1 = \begin{pmatrix} p(e_1)\alpha & p(a)\beta \\ 0 & p(e_2)\gamma \end{pmatrix}, \quad \varphi^2 = p(e_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \varphi^3 = p(e_3) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma$  são escalares. Visto que, a representação de cada morfismo  $\varphi^j$  é dada por

$$\varphi^j : p(e_1)\phi_{e_1, j} + p(a)\phi_{a, j} + p(e_2)\phi_{e_2, j} + p(b)\phi_{b, j} + p(c)\phi_{c, j} + p(e_3)\phi_{e_3, j},$$

com

$$\varphi^1 : p(e_1) (\alpha) + p(a) (\beta) + p(e_2) (\gamma) + p(b)\emptyset + p(c)\emptyset + p(e_3)\emptyset,$$

$$\varphi^2 : p(e_1)\emptyset + p(a)\emptyset + p(e_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} + p(b)\emptyset + p(c)\emptyset + p(e_3)\emptyset,$$

$$\varphi^3 : p(e_1)\emptyset + p(a)\emptyset + p(e_2)\emptyset + p(b)\emptyset + p(c)\emptyset + p(e_3) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Então teremos

$$\mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[e_{s(a)}, 1]}^{[e_{s(a)}, 1]} = (\alpha), \quad \mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[e_{s(a)}, 1]}^{[a, 1]} = (\beta), \quad \mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[a, 1]}^{[a, 1]} = \mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[e_{s(b)}, 1]}^{[e_{s(b)}, 1]} = \mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[e_{s(c)}, 1]}^{[e_{s(c)}, 1]} = (\gamma),$$

$$\mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[a, 2]}^{[a, 2]} = \mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[e_{s(b)}, 2]}^{[e_{s(b)}, 2]} = \mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[e_{s(c)}, 2]}^{[e_{s(c)}, 2]} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[b, 3]}^{[b, 3]} = \mathbf{F}(\varphi^\bullet)_{[c, 3]}^{[c, 3]} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\mathbf{F}(\varphi^\bullet) = \begin{pmatrix} & [e_{s(a)}, 1] & [a, 1] & [e_{s(b)}, 1] & [e_{s(c)}, 1] & [a, 2] & [e_{s(b)}, 2] & [e_{s(c)}, 2] & [b, 3] & [c, 3] \\ [e_{s(a)}, 1] & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [a, 1] & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{s(b)}, 1] & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{s(c)}, 1] & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [a, 2] & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{s(b)}, 2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{s(c)}, 2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ [b, 3] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ [c, 3] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

**Observação 5.14.** Como  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$  é uma categoria aditiva, temos o seguinte diagrama com suas respectivas inclusões e projeções canônicas

$$\mathbf{P}^\bullet \begin{matrix} \xrightarrow{\tilde{\iota}_P} \\ \xleftarrow{\pi_P} \end{matrix} \mathbf{P}^\bullet \oplus \tilde{\mathbf{P}}^\bullet \begin{matrix} \xrightarrow{\tilde{\pi}_P} \\ \xleftarrow{\iota_P} \end{matrix} \tilde{\mathbf{P}}^\bullet .$$

Notemos que  $\mathbf{F}(\tilde{\iota}_P^\bullet) = \tilde{\iota}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)}$ ,  $\mathbf{F}(\tilde{\pi}_P^\bullet) = \tilde{\pi}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}$ ,  $\mathbf{F}(\iota_P^\bullet) = \iota_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)}$  e  $\mathbf{F}(\pi_P^\bullet) = \pi_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}$ . Provemos apenas as duas primeiras igualdades, pois as demais serão análogas. Para este fim,

$$\tilde{\iota}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)} = \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} & (\mathbf{0}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} \\ & \end{array} \right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)} .$$

Por outro lado, sabemos que os diferenciais de  $\tilde{\iota}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)}$  são da forma

$$\tilde{\iota}_P^j = (\text{Id}_{P_j} \quad 0) : \left( \sum_{e_j \in \mathbf{P}a} p(e_j) \phi_{e_j, j} \quad 0 \right)$$

sabendo que

$$\mathbf{F}(\text{Id}_P^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \left( \begin{array}{c} \phi_{e_i, i} \\ 0 \end{array} \right) & \text{se } j = i, v = ue_i, e_i \in \mathbf{P}a \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ = (\text{Id}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]}$$

com o bloco  $\phi_{e_i, i}$  é a matriz identidade.

Aplicando o funtor  $\mathbf{F}(\tilde{\iota}_P^\bullet) = (\mathbf{F}(\tilde{\iota}_P^\bullet))_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}^{[v,j]}$ , com os blocos da forma

$$\mathbf{F}(\tilde{\iota}_P^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \left( \begin{array}{cc} \phi_{e_i, i} & 0 \end{array} \right) & \text{se } j = i, v = ue_i, e_i \in \mathbf{P}a \\ 0 & \text{caso contrário,} \\ \left( \begin{array}{cc} (\text{Id}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} & 0 \end{array} \right) & \text{se } j = i, v = ue_i, e_i \in \mathbf{P}a \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} (\text{Id}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} & (\mathbf{0}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} \\ & \end{pmatrix}$$

Portanto,  $\mathbf{F}(\tilde{l}_P^\bullet) = \tilde{l}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)}$ .

Agora, para

$$\tilde{\pi}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)} = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} \\ (\text{Id}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} \end{pmatrix}_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}.$$

Por outro lado,

$$\tilde{\pi}_{\tilde{\mathbf{P}}}^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Id}_{\tilde{\mathbf{P}}^j} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{e_j \in \mathbf{Pa}} p(e_j) \phi_{e_j, j} \end{pmatrix}$$

sabendo que

$$\mathbf{F}(\text{Id}_{\tilde{\mathbf{P}}}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \phi_{e_i, i} \end{pmatrix} & \text{se } j = i, v = ue_i, e_i \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ = (\text{Id}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]}$$

com o bloco  $\phi_{e_i, i}$  é a matriz identidade.

Aplicando o funtor  $\mathbf{F}(\tilde{\pi}_P^\bullet) = (\mathbf{F}(\tilde{\pi}_P^\bullet))_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$  com os blocos da forma

$$\mathbf{F}(\tilde{\pi}_{\tilde{\mathbf{P}}}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{e_i, i} \end{pmatrix} & \text{se } j = i, v = ue_i, e_i \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} \\ (\text{Id}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} \end{pmatrix}$$

e dessa forma obtemos  $\mathbf{F}(\tilde{\pi}_{\tilde{\mathbf{P}}}^\bullet) = \tilde{\pi}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}$ .

**Proposição 5.15.** O funtor  $\mathbf{F}$  é um funtor aditivo.

*Demonstração.* Primeiro, note que o objeto zero  $\mathbf{0}^\bullet$  em  $\mathbf{C}^b(\text{proj } A)$  não tem componentes projetivas não nulas, e portanto  $\mathbf{F}(\mathbf{0}^\bullet)$  é uma matriz de zero linhas e zero colunas, ou seja,  $\mathbf{F}(\mathbf{0}^\bullet) = \mathbb{0}$  em  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ .

Consideremos  $\mathbf{P}^\bullet \oplus \tilde{\mathbf{P}}^\bullet$  em  $\mathbf{C}^b(\text{proj } A)$ , mostremos que  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet \oplus \tilde{\mathbf{P}}^\bullet) \cong \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet) \oplus \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)$  em  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ . Para isso, consideremos as inclusões e projeções canônicas

$$\mathbf{P}^\bullet \begin{matrix} \xrightarrow{\tilde{l}_P^\bullet} \\ \xleftarrow{\pi_P^\bullet} \end{matrix} \mathbf{P}^\bullet \oplus \tilde{\mathbf{P}}^\bullet \begin{matrix} \xleftarrow{\tilde{\pi}_{\tilde{\mathbf{P}}}^\bullet} \\ \xrightarrow{l_{\tilde{\mathbf{P}}}^\bullet} \end{matrix} \tilde{\mathbf{P}}^\bullet.$$



Da Observação 5.14 temos que  $\mathbf{F}(\tilde{\iota}_{\mathbf{P}^\bullet}) = \tilde{\iota}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)}$ ,  $\mathbf{F}(\tilde{\pi}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}) = \tilde{\pi}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}$ ,  $\mathbf{F}(\iota_{\mathbf{P}^\bullet}) = \iota_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)}$  e  $\mathbf{F}(\pi_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}) = \pi_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}$ . Dessa forma temos o seguinte diagrama

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet) \begin{array}{c} \xleftarrow{\tilde{\iota}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)}} \\ \xrightarrow{\pi_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)}} \end{array} \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet \oplus \tilde{\mathbf{P}}^\bullet) \begin{array}{c} \xleftarrow{\tilde{\pi}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}} \\ \xrightarrow{\iota_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}} \end{array} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)$$

Notemos que, da Observação 5.14

$$(\tilde{\iota}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)} \pi_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} = \sum_{[w,k] \in \mathcal{Y}(A)} \left( (\text{Id}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[u,i]}^{[w,k]} \quad (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[u,i]}^{[w,k]} \right) \begin{pmatrix} (\text{Id}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[w,k]}^{[v,j]} \\ (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[w,k]}^{[v,j]} \end{pmatrix} = \text{Id}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)}$$

,

$$(\iota_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)} \tilde{\pi}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} = \sum_{[w,k] \in \mathcal{Y}(A)} \left( (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[u,i]}^{[w,k]} \quad (\text{Id}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[w,k]} \right) \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[w,k]}^{[v,j]} \\ (\text{Id}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[w,k]}^{[v,j]} \end{pmatrix} = \text{Id}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}$$

e

$$\begin{aligned} (\pi_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)} \tilde{\iota}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)} + \tilde{\pi}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)} \iota_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} &= \begin{pmatrix} (\text{Id}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} & (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[u,i]}^{[v,j]} \\ (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[u,i]}^{[v,j]} & (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[u,i]}^{[v,j]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[u,i]}^{[v,j]} & (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[u,i]}^{[v,j]} \\ (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[u,i]}^{[v,j]} & (\text{Id}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\text{Id}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} & (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[u,i]}^{[v,j]} \\ (\mathbf{0}_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}^{\mathbf{P}^\bullet})_{[u,i]}^{[v,j]} & (\text{Id}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j]} \end{pmatrix} \\ &= \text{Id}_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet \oplus \tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}. \end{aligned}$$

Portanto, do Teorema 1.6 tem-se que  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet \oplus \tilde{\mathbf{P}}^\bullet)$  é a soma direta de  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)$  com  $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)$  em  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ . □

**Proposição 5.16.** *Seja  $f^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^b(\text{proj}A)}(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}})$ . Se  $\mathbf{P}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \tilde{\mathbf{P}}^\bullet \xrightarrow{\iota_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet}} \mathbf{C}(f)^\bullet \xrightarrow{\pi_{\mathbf{P}^\bullet[1]}} \mathbf{P}^\bullet[1]$  é um triângulo standard em  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$ , então via o funtor  $\mathbf{F}$  o triângulo*

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet) \xrightarrow{\mathbf{F}(f^\bullet)} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet) \xrightarrow{\mathbf{F}(\iota_{\tilde{\mathbf{P}}^\bullet})} \mathbf{F}(\mathbf{C}(f)^\bullet) \xrightarrow{\mathbf{F}(\pi_{\mathbf{P}^\bullet[1]})} \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet[1])$$

é um triângulo  $\hat{\kappa}$ -standard em  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ .

*Demonstração.* A demonstração será feita em 3 etapas:

Etapa 1: Vejamos que o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^b(\text{proj}A) & \xrightarrow{\mathbf{F}} & s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k}) \\ \downarrow [1] & & \downarrow \{1\} \\ \mathbf{C}^b(\text{proj}A) & \xrightarrow{\mathbf{F}} & s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k}) \end{array} \quad (5.2)$$

- Em objetos: Seja  $\mathbf{P}^\bullet \in \mathbf{C}^b(\text{proj}A)$ , então por um lado temos  $\left(\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]}\right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$  cujo os blocos são da seguinte forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \mathbf{A}_{w,i} & \text{se } j = i + 1, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

aplicando o funtor  $\{1\}$  em  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)$ , com os blocos da forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)\{1\}_{[u,i]}^{[v,j]} = -\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} \begin{cases} -\mathbf{A}_{w,i+1} & \text{se } j + 1 = i + 2, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\mathbf{P}^j[1] = \mathbf{P}^{j+1} \text{ e } \partial_{\mathbf{P}[1]}^j = -\partial_{\mathbf{P}}^{j+1} : - \sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w)\mathbf{A}_{w,j+1},$$

assim  $\left(\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet[1])_{[u,i]}^{[v,j]}\right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$  cujo os blocos são da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet[1])_{[u,i]}^{[v,j]} &= \begin{cases} -\mathbf{A}_{w,i+1} & \text{se } j + 1 = i + 2, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ &= -\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} \end{aligned}$$

Portanto,  $\left(\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet[1])_{[u,i]}^{[v,j]}\right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)} = \left(\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)\{1\}_{[u,i]}^{[v,j]}\right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$

- Em morfismos: Seja  $f^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^b(\text{proj}A)}(\mathbf{P}^\bullet, \tilde{\mathbf{P}}^\bullet)$ , então por um lado temos que  $\left(\mathbf{F}(f^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]}\right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$  cujo os blocos são descritos da forma

$$\mathbf{F}(f^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \phi_{w,i}, & \text{se } j = i, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

aplicando o funtor  $\{1\}$  em  $\mathbf{F}(f^\bullet)$ , os blocos ficam da forma

$$\mathbf{F}(f^\bullet)\{1\}_{[u,i]}^{[v,j]} = \mathbf{F}(f^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} = \begin{cases} \phi_{w,i+1}, & \text{se } j + 1 = i + 2, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, sabemos que

$$f^j[1] = f^{j+1} : \sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w)\phi_{w,j+1}$$

assim  $\left(\mathbf{F}(f^\bullet[1])_{[u,i]}^{[v,j]}\right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$  com os blocos da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(f^\bullet[1])_{[u,i]}^{[v,j]} &= \begin{cases} \phi_{w,i+1} & \text{se } j + 1 = i + 1, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ &= \mathbf{F}(f^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} \end{aligned}$$

Portanto,  $\left(\mathbf{F}(f^\bullet[1])_{[u,i]}^{[v,j]}\right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)} = \left(\mathbf{F}(f^\bullet)\{1\}_{[u,i]}^{[v,j]}\right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$ .

Logo, o diagrama 5.2 é comutativo.

Etapa 2: Para qualquer  $f^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^b(\text{proj}A)}(\mathbf{P}^\bullet, \tilde{\mathbf{P}}^\bullet)$ , vejamos que  $\mathbf{F}(\mathbf{C}(f)^\bullet) = \widehat{\mathbf{C}_{\mathbf{F}(f^\bullet)}}$ . De fato, por um lado temos

$$\widehat{\mathbf{C}_{\mathbf{F}(f^\bullet)}} = \left( \begin{array}{cc} -\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} & \mathbf{F}(f^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j]} \\ (\mathbf{0}_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)})_{[u,i]}^{[v,j+1]} & \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} \end{array} \right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}.$$

E por outro lado, sabemos que os diferenciais de  $\mathbf{C}(f)^\bullet$  são da forma

$$\partial_{\mathbf{C}(f)}^j = \left( \begin{array}{cc} -\partial_P^{j+1} & f^{n+1} \\ 0 & \partial_{\tilde{P}}^j \end{array} \right) : \left( \begin{array}{cc} -\sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w) \mathbf{A}_{w,j+1} & \sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w) \phi_{w,j+1} \\ 0 & \sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w) \tilde{\mathbf{A}}_{w,j} \end{array} \right)$$

Também sabemos que

$$-\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} = \begin{cases} -\mathbf{A}_{w,i+1} & \text{se } j+1 = i+2, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}_{w,i} & \text{se } j = i+1, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\mathbf{F}(f^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} = \begin{cases} \phi_{w,i+1} & \text{se } j+1 = i+1, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Ao aplicar o funtor cada sobre  $\mathbf{C}(f)^\bullet$  temos que  $\mathbf{F}(\mathbf{C}(f)^\bullet) = \left(\mathbf{F}(\mathbf{C}(f)^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]}\right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$ , com o  $([u,i], [v,j])$ -ésimo bloco da seguinte forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{C}(f)^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \left( \begin{array}{cc} -\mathbf{A}_{w,j+1} & \phi_{w,j+1} \\ 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{w,j} \end{array} \right) & \text{se } j = i+1, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ = \left( \begin{array}{cc} -\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} & \mathbf{F}(f^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j]} \\ 0 & \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} \end{array} \right)$$

pela Etapa 1, sabemos que  $\mathbf{F} \circ [1] = \{1\} \circ \mathbf{F}$ . Logo,  $\mathbf{F}(\mathbf{C}(f)^\bullet) = \widehat{\mathbf{C}_{\mathbf{F}(f^\bullet)}}$ .

Etapa 3: Por fim, aplicando o funtor  $\mathbf{F}$  no seguinte triângulo standard

$$\mathbf{P}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \tilde{\mathbf{P}}^\bullet \xrightarrow{\iota_{\tilde{\mathbf{P}}}^\bullet} \mathbf{C}(f)^\bullet \xrightarrow{\pi_{\tilde{\mathbf{P}}[1]}^\bullet} \mathbf{P}^\bullet[1]$$

com  $f^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^b(\text{proj}A)}(\mathbf{P}^\bullet, \tilde{\mathbf{P}}^\bullet)$ , temos que o triângulo

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet) \xrightarrow{\mathbf{F}(f^\bullet)} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet) \xrightarrow{\mathbf{F}(\iota_{\tilde{\mathbf{P}}}^\bullet)} \mathbf{F}(\mathbf{C}(f)^\bullet) \xrightarrow{\mathbf{F}(\pi_{\tilde{\mathbf{P}}[1]}^\bullet)} \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet[1])$$

o qual pela Observação 5.14 e etapas 1, 2 é da forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet) \xrightarrow{\mathbf{F}(f^\bullet)} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet) \xrightarrow{\iota_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}} \widehat{\mathbf{C}_{\mathbf{F}(f^\bullet)}} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)\{1\}}} \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)\{1\}$$

e portanto, é um triângulo  $\widehat{\kappa}$ -standard em  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ .  $\square$

Agora, vejamos que a relação  $\sim$  em  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$  é compátivel com  $\simeq$  em  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$  via o funtor  $\mathbf{F}$ , ou seja,

$$f^\bullet \underset{\mathbf{C}^b(\text{proj}A)}{\sim} g^\bullet \underset{\text{via } \mathbf{F}}{\rightsquigarrow} \mathbf{F}(f^\bullet) \underset{s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})}{\simeq} \mathbf{F}(g^\bullet),$$

para alguns  $f^\bullet, g^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^b(\text{proj}A)}(\mathbf{P}^\bullet, \tilde{\mathbf{P}}^\bullet)$ . Isso nos motiva a enunciar o seguinte Lema.

**Lema 5.17.** *Se  $f^\bullet \sim 0^\bullet$  em  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$ , então  $\mathbf{F}(f^\bullet) \simeq \mathbf{F}(0^\bullet) = \mathbf{0}$  em  $s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ .*

*Demonstração.* Sejam  $f^\bullet, 0^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^b(\text{proj}A)}(\mathbf{P}^\bullet, \tilde{\mathbf{P}}^\bullet)$  e como  $f^\bullet \sim 0^\bullet$ , então existem  $(s^i)_{i \in \mathbb{Z}}$  morfismos  $s^i : \mathbf{P}^i \rightarrow \tilde{\mathbf{P}}^{i-1}$  em  $A\text{-mod}$ , tal que  $f^i = s^i \partial_{\tilde{\mathbf{P}}}^{i-1} + \partial_{\tilde{\mathbf{P}}}^i s^{i+1}$ . Também podemos reescrever  $(s^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (\sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w) \tilde{\phi}_{w,i})_{i \in \mathbb{Z}}$ . Logo, pela Equação 5.1 temos

$$\sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w) \phi_{w,i} = \sum_{\substack{w_1 w_2 = \tilde{w} \\ w_1, w_2 \in \mathbf{Pa}}} p(\tilde{w}) \tilde{\phi}_{w_1,i} \tilde{\mathbf{A}}_{w_2,i-1} + \sum_{\substack{w_3 w_4 = w'' \\ w_3, w_4 \in \mathbf{Pa}}} p(w'') \mathbf{A}_{w_3,i} \tilde{\phi}_{w_4,i+1}$$

Agora, aplicando o funtor teremos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}(f^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]}) &= \begin{cases} \phi_{w,i}, & \text{se } j = i, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \tilde{\phi}_{w_1,i} \tilde{\mathbf{A}}_{w_2,i-1} + \mathbf{A}_{w_3,i} \tilde{\phi}_{w_4,i+1}, & \text{se } j = i, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, podemos caracterizar os blocos da matriz  $(\mathcal{S}_{[u,i]}^{[v,j]})_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$  associada a sequência de morfismos  $(s^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , da seguinte maneira:

$$\mathcal{S}_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \tilde{\phi}_{w,i}, & \text{se } i-1 = j, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vejamos que  $\mathcal{S}$  é uma  $\widehat{\kappa}$ -matriz:

( $\widehat{\kappa}$ -i) Claramente,  $\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)$  é  $\mathcal{Y}(A)$ -compatível com  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}$  é  $\mathcal{Y}(A)$ -compatível com  $\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{P}}^\bullet)$ , por construção.

( $\widehat{\kappa}$ -ii) Vejamos que  $\mathbf{F}(f^\bullet) = \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)\mathcal{S} + \mathcal{S}\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{P}}^\bullet)$ . De fato, como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(f^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} &= \begin{cases} \phi_{w,i}, & \text{se } j = i, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \tilde{\phi}_{w_1,i}\tilde{\mathbf{A}}_{w_2,i-1} + \mathbf{A}_{w_3,i}\tilde{\phi}_{w_4,i+1}, & \text{se } j = i, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ &= \sum_{[v_1,k],[v_2,l] \in \mathcal{Y}(A)} \left( \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i]}^{[v_1,k]} \mathcal{S}_{[v_1,k]}^{[v,j]} + \mathcal{S}_{[u,i]}^{[v_2,l]} \mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{P}}^\bullet)_{[v_2,l]}^{[v,j]} \right) \\ &= \left( \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)\mathcal{S} + \mathcal{S}\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{P}}^\bullet) \right)_{[u,i]}^{[v,j]}. \end{aligned}$$

( $\widehat{\kappa}$ -iii) Se  $i > j + 1$  ou ( $u > v$  e  $i = j + 1$ ), então  $\mathcal{S}_{[u,i]}^{[v,j]} = 0$ . De fato, se  $i > j + 1$ , então  $\mathcal{S}_{[u,i]}^{[v,j]} = 0$  por construção, agora se ( $u > v$  e  $i = j + 1$ ), então claramente não existe  $w \in \mathbf{Pa}$  tal que  $v = uw$ , logo  $\mathcal{S}_{[u,i]}^{[v,j]} = 0$ .

( $\widehat{\kappa}$ -iv) Sejam  $[u,i], [v,j] \in \mathcal{Y}(A)$ , onde  $\sigma([u,i]) = [v,j]$ , logo  $\mathcal{S}_{[u,i]}^{[u,i]} = \mathcal{S}_{[v,j]}^{[v,j]}$ , pois a matriz  $\mathcal{S}$  é indexada pelo  $\text{Supp}(\mathbf{F}(f^\bullet))$ .

Portanto,  $\mathcal{S}$  é  $\widehat{\kappa}$ -matriz. □

O Lema 5.17 nos garante a existência de um funtor de  $\mathbf{K}^b(\text{proj}A)$  para  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ . Tal funtor é definido da seguinte maneira

**Definição 5.18.** *Seja  $\widehat{\mathbf{F}} : \mathbf{K}^b(\text{proj}A) \rightarrow \widehat{\kappa}(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$  o funtor definido da seguinte forma:*

- $\left( \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} \right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)} = \left( \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} \right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$  para cada complexo  $\mathbf{P}^\bullet$  em  $\mathbf{K}^b(\text{proj}A)$ .

- $\left( \widehat{\mathbf{F}}(\overline{\varphi}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} \right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$ , para cada morfismo  $\overline{\varphi}^\bullet$  em  $\mathbf{K}^b(\text{proj}A)$  onde cada bloco é dado por

$$\widehat{\mathbf{F}}(\overline{\varphi}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \overline{\phi}_{w,i}, & \text{se } j = i, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ \overline{0}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

tal funtor é bem definido pelo Lema 5.17.

**Observação 5.19.** *O seguinte diagrama comuta,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^b(\text{proj}A) & \xrightarrow{\widehat{\mathbf{F}}} & \widehat{\kappa}(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k}) \\ \downarrow [1] & & \downarrow \{1\} \\ \mathbf{K}^b(\text{proj}A) & \xrightarrow{\widehat{\mathbf{F}}} & \widehat{\kappa}(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k}) \end{array}$$

- *Em objetos, segue como na Proposição 5.16 Etapa 1.*
- *Em morfismos: Seja  $\overline{f}^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{K}^b(\text{proj}A)}(\mathbf{P}^\bullet, \widetilde{\mathbf{P}}^\bullet)$ , então por um lado temos que  $\left( (\mathbf{F}(\overline{f}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]}) \right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$  cujo os blocos são descritos da forma*

$$\mathbf{F}(\overline{f}^\bullet)_{[u,i]}^{[v,j]} = \begin{cases} \overline{\phi}_{w,i}, & \text{se } j = i, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ \overline{0}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*aplicando o funtor  $\{1\}$  em  $\mathbf{F}(\overline{f}^\bullet)$ , os blocos ficam da forma*

$$\mathbf{F}(\overline{f}^\bullet)\{1\}_{[u,i]}^{[v,j]} = \mathbf{F}(\overline{f}^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} = \begin{cases} \overline{\phi}_{w,i+1}, & \text{se } j+1 = i+2, v = uw, w \in \mathbf{Pa}, \\ \overline{0}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Por outro lado, seja  $f^\bullet$  um representante do morfismo  $\overline{f}^\bullet$  em  $\mathbf{C}^b(\text{proj}A)$ , disso sabemos que*

$$f^j[1] = f^{j+1} : \sum_{w \in \mathbf{Pa}} p(w) \phi_{w,j+1}$$

*assim  $\left( (\mathbf{F}(f^\bullet[1])_{[u,i]}^{[v,j]}) \right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$  com os blocos da forma*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(f^\bullet[1])_{[u,i]}^{[v,j]} &= \begin{cases} \phi_{w,i+1} & \text{se } j+1 = i+1, v = uw, w \in \mathbf{Pa} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ &= \mathbf{F}(f^\bullet)_{[u,i+1]}^{[v,j+1]} \end{aligned}$$

*Portanto,  $\left( (\mathbf{F}(\overline{f}^\bullet[1])_{[u,i]}^{[v,j]}) \right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)} = \left( (\mathbf{F}(\overline{f}^\bullet)\{1\}_{[u,i]}^{[v,j]}) \right)_{[u,i],[v,j] \in \mathcal{Y}(A)}$ .*

A partir da Definição 5.18, surge a seguinte questão: Dado que, de acordo com o Teorema 4.7, a categoria  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k}) = s(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})/\widehat{\Sigma}$  possui uma estrutura triangulada, é razoável questionar se este funtor permitirá estabelecer uma relação entre o conjunto de triângulos distinguidos de  $\mathbf{K}^b(\text{proj}A)$  com  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$ . Nos motivando a enunciar o seguinte Teorema.

**Teorema 5.20.** *O funtor  $\widehat{\mathbf{F}}$  é triangularizável.*

*Demonstração.* Considere,

$$\mathbf{X}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \mathbf{Y} \xrightarrow{g^\bullet} \mathbf{Z} \xrightarrow{h^\bullet} \mathbf{X}^\bullet[1],$$

um triângulo distinguido em  $\mathbf{K}^b(\text{proj}A)$ , então existe  $\varphi^\bullet \in \text{Hom}_{\mathbf{C}^b(\text{proj}A)}(\mathbf{P}^\bullet, \tilde{\mathbf{P}}^\bullet)$  tal que temos o seguinte isomorfismo de triângulos:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{X}^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & \mathbf{Y} & \xrightarrow{g^\bullet} & \mathbf{Z} & \xrightarrow{h^\bullet} & \mathbf{X}^\bullet[1] \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathbf{P}^\bullet & \xrightarrow{\varphi^\bullet} & \tilde{\mathbf{P}}^\bullet & \xrightarrow{\iota_{\tilde{\mathbf{P}}}^\bullet} & \mathbf{C}(\varphi)^\bullet & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{P}[1]}^\bullet} & \mathbf{P}^\bullet[1] \end{array}$$

Aplicando os funtor  $\widehat{\mathbf{F}}$ , também pela Observação 5.19 e Proposição 5.16 temos o seguinte isomorfismos de triângulos em  $\widehat{\kappa}(\mathcal{Y}(A), \mathbb{k})$

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{X}^\bullet) & \xrightarrow{\widehat{\mathbf{F}}(f^\bullet)} & \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{Y}^\bullet) & \xrightarrow{\widehat{\mathbf{F}}(g^\bullet)} & \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}^\bullet) & \xrightarrow{\widehat{\mathbf{F}}(h^\bullet)} & \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{X}^\bullet)\{1\} \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet) & \xrightarrow{\mathbf{F}(\varphi^\bullet)} & \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet) & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet)}} & \widehat{\mathbf{C}}_{\mathbf{F}(\varphi^\bullet)} & \xrightarrow{\pi_{\mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)\{1\}}} & \mathbf{F}(\mathbf{P}^\bullet)\{1\} \end{array}$$

Portanto, o funtor  $\widehat{\mathbf{F}}$  é triangularizável. □

# Referências Bibliográficas

- [1] I. Assem and A. Skowroński, *Iterated tilted algebras of type  $\tilde{\mathbf{A}}_n$* , Math. Z. **195** (1987), no. 2, 269–290. MR 892057
- [2] V. Bekkert and H. A. Merklen, *Indecomposables in derived categories of gentle algebras*, Algebr. Represent. Theory **6** (2003), no. 3, 285–302. MR 2000963
- [3] V. M. Bondarenko, *Representations of dihedral groups over a field of characteristic 2*, Mat. Sb. (N.S.) **96(138)** (1975), 63–74. MR 360784
- [4] ———, *Bundles of semichained sets and their representations*, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint (1988), no. 60, 32. MR 1034077
- [5] V. M. Bondarenko and Y. Drozd, *The representation type of finite groups*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **71** (1977), 24–41, Modules and representations. MR 472984
- [6] W. W. Crawley-Boevey, *Functorial filtrations. II. Clans and the Gel’fand problem*, J. London Math. Soc. (2) **40** (1989), no. 1, 9–30. MR 1028911
- [7] S. Eilenberg and S. MacLane, *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 231–294. MR 13131
- [8] A. Franco, H. Giraldo, and P. Rizzo, *String and band complexes over string almost gentle algebras*, Appl. Categ. Structures **30** (2022), no. 3, 417–452. MR 4421091
- [9] I. M. Gel’fand, *The cohomology of infinite dimensional Lie algebras: some questions of integral geometry*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1971, pp. 95–111. MR 440631
- [10] I. M. Gel’fand and V. A. Ponomarev, *A classification of the indecomposable infinitesimal representations of the Lorentz group*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **176** (1967), 502–505. MR 219660
- [11] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 119, Cambridge University Press, Cambridge, 1988. MR 935124
- [12] S. König and A. Zimmermann, *Derived equivalences for group rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1685, Springer-Verlag, Berlin, 1998, With contributions by Bernhard Keller, Markus Linckelmann, Jeremy Rickard and Raphaël Rouquier. MR 1649837



- [13] L. A. Nazarova and A. V. Roĭter, *A certain problem of I. M. Gel'fand*, Funkcional. Anal. i Priložen. **7** (1973), no. 4, 54–69. MR 332829
- [14] D. Puppe, *On the formal structure of stable homotopy theory*, Colloquium on Algebraic Topology, 1962, pp. 65–71.
- [15] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984. MR 774589
- [16] R. Schiffler, *Quiver representations*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, Cham, 2014. MR 3308668
- [17] J. L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque (1996), no. 239, xii+253 pp. (1997), With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis. MR 1453167
- [18] D. P. Želobenko, *Linear representations of the Lorentz group*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **126** (1959), 935–938. MR 110023