Universidade Federal da Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Quantisização da Álgebra $U(\mathfrak{g})$ para uma Álgebra de Lie Simples $\mathfrak{g}$

Yeimy Paola Aguirre Escobar

Manaus – AM
Fevereiro de 2024

Universidade Federal da Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Quantisização da Álgebra $U(\mathfrak{g})$ para uma Álgebra de Lie Simples $\mathfrak{g}$

por

Yeimy Paola Aguirre Escobar

sob as orientações de

Prof. Dr. Mohsen Amiri
(Orientador)

Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve
(Coorientador)

Manaus – AM
Fevereiro de 2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

E74q Escobar, Yeimy Paola Aguirre
Quantisização da Álgebra U(g) para uma Álgebra de Lie Simples g / Yeimy Paola Aguirre Escobar . 2024
72 f.: 31 cm.

Orientador: Mohsen Amiri
Coorientador: Germán Alonso Benitez Monsalve
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Álgebras de Hopf. 2. Grupos Quânticos. 3. Álgebras Quânticas. 4. q-antissimetria. I. Amiri, Mohsen. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Quantisização da Álgebra $U(\mathfrak{g})$ para uma Álgebra de Lie

por

Yeimy Paola Aguirre Escobar [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 21 de Fevereiro de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Mohsen Amiri (Presidente)
Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. Igor do Santos Lima (Examinador Externo)
Universidade de Brasília

Prof. Dr. Oscar Francisco Márquez Sosa (Examinador Externo)
Universidade Federal de Santa Catarina

[1] O autor foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Em memória de Teresa, sempre no meu coração.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao meu orientador de dissertação, Dr. Mohsen Amiri, pelo seu aconselhamento especializado, paciência e apoio constante ao longo deste processo. Sua dedicação e conhecimento foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Expresso também minha gratidão ao Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve por suas valiosas sugestões e comentários que ajudaram a enriquecer este trabalho.

Aos membros da banca examinadora, ao Dr Igor dos Santos da Lima e ao Dr. Oscar Francisco Márquez Sosa, por dedicarem seu tempo à realização de uma revisão minuciosa e por fornecerem comentários construtivos que contribuíram para melhorar a qualidade desta dissertação.

Agradeço profundamente à minha família pelo amor incondicional, compreensão e apoio inabalável. Agradeço aos meus pais pelo sacrifício e dedicação que investiram na minha educação e desenvolvimento pessoal. À minha irmã por ser minha cúmplice e aliada em todos os momentos.

Agradeço especialmente à minha avó, por ser minha inspiração e alegria diária, pelo esforço e apoio incondicional que fez para que este trabalho pudesse ser concluído hoje. Agradeço todas as suas palavras de incentivo e por me ensinar a não desistir até atingir o objetivo.

Agradeço também a Edwin Leonardo Mateus Moreno. Sua presença tem sido um pilar de força e uma fonte inesgotável de motivação. Obrigado por estar ao meu lado em cada etapa do caminho, por seu incentivo quando as coisas ficaram difíceis e por comemorar comigo cada conquista.

Quero agradecer o apoio prestado pelos meus amigos e colegas, que estiveram presentes em cada etapa do percurso, de modo especial a Dzoara Selene Nuñez Ramos, Eder Alejandro Rodriguez Lopez, Oscar Ivan Blanco e Gustavo Pereira Costa.

A CAPES, pelo apoio financeiro integral a este trabalho.

A UFAM, especialmente aos colegas e funcionários do PPGM, pela calorosa acolhida.

Por último, mas não menos importante, agradeço a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para este projeto, mesmo que não sejam especificamente mencionadas aqui. Sua contribuição foi fundamental para alcançarmos essa conquista.

Resumo

Os grupos quânticos associados a uma Álgebra de Lie, denotados por $U_h(\mathfrak{g})$ são deformações da Álgebra envolvente universal associada a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que é uma Álgebra de Hopf. Alem disso, as álgebras quânticas de Lie $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ são generalizações de Álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ cujas constantes de estrutura são séries de potências em h. As Álgebras $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ são derivados das Álgebras envolventes quântizadas $U_h(\mathfrak{g})$, com um colchete quântico que satisfaz uma generalização da antissimetria. Partindo dos conceitos anteriores, neste trabalho o grupo quântico $U_h(\mathfrak{g})$ e a Álgebra de Lie quântica $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ serão construídos para o caso explícito da Álgebra de Lie linear especial $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e posteriormente generalizados para uma Álgebra de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita.

Palavras-chave: Álgebras de Lie, Álgebras de Hopf, Envolvente universal, Grupo quântico, Álgebras de Lie quânticas, q-antissimetria.

Abstract

The quantum groups associated with a Lie Algebra, denoted by $U_h(\mathfrak{g})$ are deformations of the universal enveloping Algebra associated with the Lie algebra $\mathfrak{g}$, which is a Hopf Algebra. Furthermore, quantum Lie algebras $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ are generalizations of Lie algebras $\mathfrak{g}$ whose structure constants are power series in h. The $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ Algebras are derivatives of the Quantized Enclosing Algebras $U_h(\mathfrak{g})$, with a quantum bracket that satisfies a generalization of antisymmetry. Starting from the previous concepts, in this work the quantum group $U_h(\mathfrak{g})$ and the quantum Lie Algebra $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ will be constructed for the explicit case of the Lie Algebra Special linear Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ and later generalized to a simple Lie Algebra over $\mathbb{C}$ of finite dimension.

Keywords: Lie algebras, Hopf algebras, Universal envelope, Quantum group, Quantum Lie algebras, q-antisymmetry.

Sumário

Introdução

O termo "grupos quânticos" foi popularizado por Drinfeld em seu discurso no Congresso Internacional de Matemáticos em Berkeley (1986). Significa certas Álgebras de Hopf especiais que são deformações não triviais das Álgebras de Hopf envolventes das Álgebras de Lie simples. Na sua forma original, os grupos quânticos são Álgebras associativas definidas por certas relações expressas em termos de uma matriz de constantes chamada R-matriz quântica. No entanto, V. G. Drinfel'd [?] e M. Jimbo [?] perceberam independentemente que estas Álgebras associativas possuem uma estrutura mais interessante: são Álgebras de Hopf

As Álgebras de Hopf, que podem ser vistas como uma generalização da estrutura de grupos, nasceram no campo da Topologia Algébrica entre as décadas de 40 e 50 do século passado. Eles aparecem nos trabalhos de Heinz Hopf dedicados ao estudo da cohomologia de Grupos de Lie compactos e seus espaços homogêneos associados. O primeiro exemplo de uma tal estrutura foi observado em um de seus trabalhos, intitulado "Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe"de 1941, o qual era a homologia de um grupo de Lie conexo. A definição de Álgebra de Hopf tal como era utilizada naquela época sofreu alguma evolução até chegar à definição atual, que é a utilizada neste trabalho. Com a publicação de Sweedler em 1969 [?], a Álgebra de Hopf passou a ser objeto de estudo da Álgebra Abstrata e dessa forma deu continuidade ao seu desenvolvimento.

Na teoria de Álgebras de Hopf um dos problemas importantes reside na classificação destas Álgebras de dimensão fixa num corpo algebricamente fechado de caraterística zero, porém um dos obstáculos na resolução deste problema esta na falta de exemplos suficientes. Portanto é necessário encontrar novas famílias de Álgebras de Hopf. Um dos exemplos mais importantes são as Álgebras envolvente universal de uma Álgebra de Lie, dai a importância dos grupos quânticos.

Uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está naturalmente contida como um subespaço de sua Álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ pela ação adjunta. De fato, o colchete de Lie em $\mathfrak{g}$ surge como a restrição da ação adjunta de $U(\mathfrak{g})$ neste subespaço, evidenciando assim a relação intrínseca entre a Álgebra de Lie e a sua Álgebra envolvente universal.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "?"] \arrow[d] & \mathfrak{g}_h \arrow[d, "?"] \\
U(\mathfrak{g}) \arrow[r, "Drinfel'd", "Jimbo"'] & U_h(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

Um dos exemplos mas importantes dos grupos quanticos é $U_h(\mathfrak{g})$, o qual é uma deformação de Álgebra de Hopf $U(\mathfrak{g})$. G.W. Delius e A. Huffman, no trabalho de 1995 [?], investigaram os subespaços de $U_h(\mathfrak{g})$ através da ação adjunta, analogamente ao caso de $U(\mathfrak{g})$. Nesse artigo, dotaram estes subespaços com o suporte de Lie quântico, que é induzido pela ação adjunta da Álgebra de Hopf $U_h(\mathfrak{g})$. Estes subespaços são chamados Álgebras de Lie quânticas e são denotados por $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$. Em 1996, os mesmos autores, com M. D. Gould e Y. Zhang em [?] apresentaram a estrutura das Álgebras de Lie quânticas associadas às Álgebras de Lie $\mathfrak{gl}_n$ e $\mathfrak{sl}_n$.

A Álgebra $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ foi descoberta por Kulish e Sklyanin em 1982 [?]. Atualmente, através de cálculos simbólicos computacionais, foram construídos outros exemplos implícitos de Álgebras de Lie quânticas, tais como $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_3)$, $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_4)$ e $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sp}_4)$. Porém, a Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2$ permite construir os exemplos mais simples de $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ e $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$ e portanto estudar algumas propriedades de estrutura nestas Álgebras permite generalizar alguns propriedades em $U_h(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$, onde $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie simples. [?]

Este trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro aborda todos os conceitos preliminares, apresentando definições e propriedades de Álgebras de Lie, focando em Álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita. É também introduzido o conceito de Álgebra de Envelope Universal $U(\mathfrak{g})$, é realizada a construção de $U(\mathfrak{sl}_2)$ e por último são enunciadas as relações de Serre sobre os geradores de $U(\mathfrak{g})$ [?]. Esta primeira parte, tem como principal referência o livro clássico de K. Erdmann e M. J. Wildon [?], o livro de J. E. Humphreys [?], e livro de Mazorchuv [?] para o caso de $\mathfrak{sl}_2$.

O segundo capitulo constituiu-se de um estudo sobre as álgebras de Hopf, seja do ponto de vista mais clássico, como o apresentado nos livros de Sweedler [?] e E. Abe [?], seja do ponto mais dirigido à introdução dos Grupos Quânticos, como nos livros de V. Chari e A. Pressley [?], o livro de J. C. Jantzen [?] e o livro de C. Kassel [?], demonstrando que toda Álgebra Envolvente universal pode-se definir uma estrutura de Álgebra de Hopff.

No ultimo capitulo, procede-se a construção do grupo quântico $U_h(\mathfrak{sl}_2)$, e, através da sua ação adjunta, definir a álgebra de Lie quântica $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$. Por último, tendo como referencia os artigos de G.W Delius,V. G. Drinfeld, M. D. Gould, A. Huffmann, Y. Zhang e M. Jimbo [?, ?, ?, ?, ?, ?] é definido o grupo quântico $U_h(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ para um Álgebra de Lie simples complexa de dimensão finita.

Capítulo 1

Preliminares

Este é um capítulo introdutório, formado em sua maior parte por algumas definições dos conceitos básicos da teorias das Álgebras de Lie que serão importantes no decorrer deste trabalho. Esses conceitos são ilustrados por exemplos que devem servir de guia na leitura dos capítulos subsequentes. Serão enumeradas também as Álgebras de Lie simples e finalmente será definida a Álgebra envolvente universal e exemplificada para a Álgebra de Lie linear especial $\mathfrak{sl}_2$. As principais referencias a seguir neste capitulo são o livro de K. Erdmann e M. J. Wildon [**?**] e o livro de J. E. Humphreys [**?**].

1.1 Álgebras de Lie

Definição 1.1.1. *Seja $\mathbb{k}$ um corpo. Uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um $\mathbb{k}$-espaço vetorial, munido de um produto $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, chamado de colchete de Lie, tal que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $[\cdot, \cdot]$ *é $\mathbb{k}$-bilinear,*

(ii) $[x, x] = 0$*, para todo x em $\mathfrak{g}$,*

(iii) Identidade de Jacobi: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$*, para todo x, y, z em $\mathfrak{g}$.*

Observação 1.1.2.

(i) Se $[x, x] = 0$, para todo x em $\mathfrak{g}$, então $[x, y] = -[y, x]$, para todo y em $\mathfrak{g}$. De fato, pela condição (i) da Definição **??**, *tem-se que*

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x].$$

Portanto $[x, y] = -[y, x]$, para todo x, y em $\mathfrak{g}$.
Suponha que o corpo $\mathbb{k}$ não é de característica dois então a reciproca é verdadeira. De fato, se $[x, y] = -[y, x]$ para todo x, y em $\mathfrak{g}$, então $[x, x] = -[x, x]$, logo $2[x, x] = 0$, como $char(\mathbb{k}) \neq 2$, temos que $[x, x] = 0$ para todo x em $\mathfrak{g}$.

(ii) Se A é uma $\mathbb{k}$-Álgebra associativa, então A com o colchete de Lie dado pelo comutador, i.e.,

$$[x, y] := xy - yx, \quad \forall x, y \in A$$

é uma Álgebra de Lie e é denotada por A^-. Note que o colchete de Lie dado pelo comutador satisfaz as condições da Definição **??**.
Sejam $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z$ elementos de A e α, β em $\Bbbk$. Logo,

$$\begin{aligned}[\alpha x_1 + x_2, y] &= (\alpha x_1 + x_2)y - y(\alpha x_1 + x_2)\\ &= \alpha x_1 y + x_2 y - \alpha y x_1 - y x_2\\ &= \alpha[x_1, y] + [x_2, y].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[x, \beta y_1 + y_2] &= x(\beta y_1 + y_2) - (\beta y_1 + y_2)x\\ &= \beta x y_1 + x y_2 - \beta y_1 x - y_2 x\\ &= \beta[x, y_1] + [x, y_2].\end{aligned}$$

Portanto o comutador é bilinear em A. Alem disso, $[x, x] = xx - xx = 0$ e a propriedade de Jacobi também é satisfeita, pois

$$\begin{aligned}[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] &= [x,(yz - zy)] + [z,(xy - yx)] + [y,(zx - xz)]\\ &= x(yz - zy) - (yz - zy)x + z(xy - yx) -\\ &\quad - (xy - yx)z + y(zx - xz) - (zx - xz)y\\ &= 0.\end{aligned}$$

Antes de apresentar alguns exemplos, é conveniente introduzir a noção de subálgebra de Lie.

Definição 1.1.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é um $\Bbbk$-subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$, que é fechado pelo colchete, ou seja, $[x, y]$ está em $\mathfrak{h}$ para todo x, y em $\mathfrak{h}$.*

Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é uma Álgebra de Lie com a estrutura herdada pela estrutura de $\mathfrak{g}$.

1.2 Exemplos de Álgebras de Lie

A maioria dos exemplos que serão apresentados a seguir são subálgebras da Álgebra de Lie das transformações lineares, por isso o primeiro exemplo é o seguinte:

1.2.1 Álgebra de Lie Linear Geral

Sejam, $\Bbbk$ um corpo, V um $\Bbbk$-espaço vetorial e $End(V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $V \longrightarrow V$ com estrutura de Álgebra associativa. Denote a Álgebra $End(V)$ vista como Álgebra de Lie por $\mathfrak{gl}(V)$ com o colchete definido pelo comutador com a composição de funções, esta Álgebra de Lie é chamada Álgebra linear geral. Se $dim_{\Bbbk}(V) = n$, então podemos identificar $End(V)$ com o $\Bbbk$-espaço vetorial $M_n(\Bbbk)$, das matrizes quadradas $n \times n$ com o colchete de Lie definido pelo comutador $[X, Y] = XY - YX$ para todo $X, Y \in M_n(\Bbbk)$ e

$$\mathfrak{gl}_n := \mathfrak{gl}(n, \Bbbk) = \mathfrak{gl}_n(\Bbbk) := \mathfrak{gl}(V) = M_n(\Bbbk).$$

Fixado $n \in \mathbb{N}^*$ e dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, é denotado por E_{ij} a matriz $n \times n$ com 1 na (i, j)-ésima entrada e 0 nas demais. O conjunto $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base para a Álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$, e dada uma matriz A em $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$, os escalares a_{ij} em $\mathbb{k}$ são as entradas da matriz A na (i, j)-ésima entrada, tais que

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

As matrizes podem ser escritas como $A = (a_{ij})_{ij}$. Para quaisquer $i, j, k, r \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se que

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il},$$

onde δ é o delta de Kronecker, tal que

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & se \quad j \neq k, \\ \\ 1 & se \quad j = k. \end{cases} \tag{1.1}$$

Portanto, os comutadores das matrizes E_{ij} são determinados por:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = E_{ij} E_{kl} - E_{kl} E_{ij} = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}.$$

Sendo o colchete uma aplicação bilinear, esta equação é suficiente para determinar o comutador de duas matrizes $A = (a_{ij})_{ij}$ e $B = (b_{ij})_{ij}$. De fato,

$$\begin{aligned} [A, B] &= \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}, \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl} E_{kl} \right] \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij} b_{kl} [E_{ij}, E_{kl}] \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ij} b_{kl \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}} \\ &= \sum_{p,q,r=1}^{n} (a_{pr} b_{rq} - a_{rq} b_{pr}) E_{pq}, \end{aligned}$$

logo $[A, B] = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} - b_{ik} a_{kj}\right)_{ij}$.

1.2.2 Álgebra de Lie Linear Especial

O subespaço $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \mid tr(X) = 0\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$. De fato, se X, Y são matrizes em $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$, lembrando que $tr(XY) = tr(YX)$ para X, Y matrizes quaisquer, então

$$tr([X, Y]) = tr(XY - YX) = tr(XY) - tr(YX) = 0,$$

portanto $[X, Y]$ está em $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$. A álgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ com o comutador é chamada Álgebra de Lie linear especial.

1.2.3 Álgebra de Lie Linear Ortogonal

(i) O subespaço das matrizes antisimétricas $\mathfrak{o}_n(\mathbb{k}) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \mid X^t = -X\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$, onde X^t é a transposta da matriz X. De fato, se X, Y são matrizes em $\mathfrak{o}_n(\mathbb{k})$, então $X^t = -X$ e $Y^t = -Y$, portanto

$$\begin{aligned} [X,Y]^t &= (XY - YX)^t \\ &= (XY)^t - (YX)^t \\ &= Y^tX^t - X^tY^t \\ &= (-Y)(-X) - (-X)(-Y) \\ &= YX - XY \\ &= -(XY - YX) \\ &= -[X,Y]. \end{aligned}$$

Logo $[X,Y]$ está em $\mathfrak{o}_n(\mathbb{k})$.

(ii) O subespaço $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{k}) := \{X \in \mathfrak{gl}_{2n+1}(\mathbb{k}) \mid JX^t = -XJ\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$, onde J é uma matriz quadrada, da forma

$$J = \begin{pmatrix} 1_{p\times p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)}.$$

Onde I_n é a matriz identidade $n \times n$. Sejam $X, Y \in \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{k})$. Logo,

$$\begin{aligned} J\,[X,Y]^t &= J(XY - YX)^t \\ &= J(Y^tX^t - X^tY^t) \\ &= JY^tX^t - JX^tY^t \\ &= -YJX^t + XJY^t \\ &= YXJ - XYJ \\ &= -(XY - YX)J \\ &= -\,[X,Y]\,J. \end{aligned}$$

Portanto $[X,Y]$ é um elemento de $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{k})$.

1.2.4 Álgebra de Lie Linear Simplética

O subespaço $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{k}) := \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k}) \mid JX^t = -XJ\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$, onde J é escrita da seguinte forma

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix},$$

com Id_n a matriz identidade de $n \times n$. Seja $X, Y \in \mathfrak{sp}_n(\mathbb{k})$. De forma análoga do Exemplo **??** item (ii), temos que $J\,[X,Y]^t = -\,[X,Y]\,J$. Portanto $[X,Y]$ é um elemento de $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{k})$.

1.2.5 Álgebra de Lie Superior Triangular

O subespaço $\mathfrak{t}_n(\Bbbk) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk) \mid X \text{ é triangular superior } \}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$, onde seus elementos X em $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$ são matrizes $n \times n$ da seguinte forma

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

com $a_{ij} \in \Bbbk$, para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Lembre que o produto de matrizes triangulares superiores é triangular superior, portanto $[X, Y] = XY - YX$ é um elemento de $\mathfrak{t}_n(\Bbbk)$.

1.3 Generalidades Algébricas

Definição 1.3.1. *Uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita uma Álgebra abeliana se $[x, y] = 0$, para todo x, y em $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 1.3.2.

1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Se dim$(\mathfrak{g}) = 1$, então $\mathfrak{g}$ é abeliana. De fato, se $\{v\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$, então para todo x, y em $\mathfrak{g}$, existem α, β em $\Bbbk$ tais que $x = \alpha v$ e $y = \beta v$. Logo*
$$[x, y] = [\alpha v, \beta v] = \alpha\beta[v, v] = 0.$$
Se $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie qualquer, então todo subespaço de dimensão 1 é uma subálgebra de Lie abeliana.

2. *O subespaço $\mathfrak{D}_n(\Bbbk) := \{X \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk) \mid X \text{ é diagonal}\}$ é uma subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. De fato, para todo X, Y em $\mathfrak{D}_n(\Bbbk)$, temos que*
$$\begin{aligned} XY &= diag(x_1, \ldots, x_n) \cdot diag(y_1, \ldots, y_n) \\ &= diag(x_1y_1, \ldots, x_ny_n) \\ &= diag(y_1x_1, \ldots, y_nx_n) \\ &= diag(y_1, \ldots, y_n) \cdot diag(x_1, \ldots, x_n) \\ &= YX, \end{aligned}$$
onde x_i, y_i são os elementos em $\Bbbk$ na posição ii das matrizes X e Y, para todo $i = 1, \cdots, n$. Portanto, $[X, Y] = XY - YX = 0$, para todo X, Y em $\mathfrak{D}_n(\Bbbk)$.

3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie. Se dim$(\mathfrak{g}) = 2$, então existem duas possibilidades:*

   (i) $\mathfrak{g}$ é abeliana, ou

   (ii) existe uma base $\{u, v\}$ de $\mathfrak{g}$, tal que $[u, v] = v$.

   De fato, suponha que $\mathfrak{g}$ não é abeliana e seja $\{u_1, v_1\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ não é abeliana, então $[u_1, v_1] \neq 0$. Seja $v_2 = [u_1, v_1]$ e escolha u_2 tal que $[u_2, v_2]$ é *uma base de* $\mathfrak{g}$*, logo* $u_2 = \alpha u_1 + \beta v_1$ *e* $v_2 = \gamma u_1 + \delta v_1$*, com* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *em* $\Bbbk$*. Desta forma, tem que*

$$\begin{aligned}
[u_2, v_2] &= [\alpha u_1 + \beta v_1, \gamma u_1 + \delta v_1] \\
&= \alpha[u_1, \gamma u_1 + \delta v_1] + \beta[v_1, \gamma u_1 + \delta v_1] \\
&= \alpha\gamma[u_1, u_1] + \alpha\delta[u_1, v_1] + \beta\gamma[v_1, u_1] + \beta\delta[v_1, v_1] \\
&= (\alpha\delta - \beta\gamma)[u_1, v_1] \\
&= (\alpha\delta - \beta\gamma)v_2.
\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{g}$ *não é abeliana, então* $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$*. Fazendo* $u = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} u_2$ *e* $v = v_2$*, é obtida uma base* $\{u, v\}$ *de* $\mathfrak{g}$*, tal que* $[u, v] = v$*.*

Definição 1.3.3. *Sejam* $(\mathfrak{g}, [,]_1)$ *e* $(\mathfrak{h}, [,]_2)$ *Álgebras de Lie. Uma transformação linear* $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *é dito homomorfismo de Álgebras de Lie se*

$$\varphi([x, y]_1) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Observação 1.3.4. *Se* φ *é um homomorfismo bijetor, então* f *é dito isomorfismo. As Álgebras de Lie* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ *são ditas isomorfas, se existe um isomorfismo* $\varphi\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$*. Além disso,* φ *é um automorfismo se* φ *é um isomorfismo e* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$*.*

Exemplo 1.3.5. *Seja* $tr : \mathfrak{gl}_n(\Bbbk) \longrightarrow \Bbbk$ *a transformação linear que associa a cada matriz* $X \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ *o seu traço. Como* $\Bbbk$ *é uma Álgebra de Lie abeliana, pois* $dim(\Bbbk) = 1$*, então todo* X, Y *em* $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ *satisfaz:*

$$tr\,([X, Y]) = tr(XY - YX) = tr(XY) - tr(YX) = 0.$$

Por outra parte,

$$[tr(X), tr(Y)] = tr(X)tr(Y) - tr(Y)tr(X) = 0$$

para todo X, Y *em* $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$*. Portanto* tr *é um homomorfismo de Álgebras de Lie.*

Exemplo 1.3.6. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie. Para todo* x *em* $\mathfrak{g}$*, defina-se a transformação linear*

$$\begin{aligned}
ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow End(\mathfrak{g}) \\
x &\longmapsto ad_x \quad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\
&\qquad\qquad\quad y \longmapsto ad_x(y) := [x, y],
\end{aligned}$$

para qualquer y *em* $\mathfrak{g}$*. Note que* ad_x *é um homomorfismo de álgebras de Lie, pois para todo* x, y *em* $\mathfrak{g}$*, tem que*

$$\begin{aligned}
ad\,([x, y])\,(z) &= ad_{[x,y]}(z) \\
&= [[x, y], z] \\
&= -[z, [x, y]] \\
&= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\
&= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\
&= [x, ad_y(z)] - [y, ad_x(z)] \\
&= ad_x \circ ad_y(z) - ad_y \circ ad_x(z) \\
&= [ad_x, ad_y](z),
\end{aligned}$$

onde z *em* $\mathfrak{g}$ *qualquer. Portanto* $ad([x, y]) = [ad(x), ad(y)]$*.*

Definição 1.3.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie de dimensão finita e $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. O colchete de dois elementos x_i, x_j quaisquer de B pode ser escrito como:*

$$[x_i, x_j] = \sum_k c_{ij}^k x_k,$$

Os coeficientes c_{ij}^k são chamados de constantes de estrutura de $\mathfrak{g}$ em relação à base B.

Estas constantes de estrutura determinam a Álgebra, a menos de isomorfismo. De fato, seja $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ Álgebras de Lie, com bases $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ e seja a transformação linear $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$, tal que $\varphi(x_i) = y_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dados x, y em $\mathfrak{g}$, existem únicos α^i, β^j em $\mathbb{k}$ tais que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha^i x_i, \qquad y = \sum_{j=1}^n \beta^j x_j.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi([x,y]) &= \varphi\left(\left[\sum_{i=1}^n \alpha^i x_i, \sum_{j=1}^n \beta^j x_j\right]\right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha^i \beta^j \varphi[x_i, x_j] = \sum_{i,j,k=1}^n \alpha^i \beta^j c_{ij}^k \varphi(x_k) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \alpha^i \beta^j c_{ij}^k y_k = \sum_{i,j=1}^n \alpha^i \beta^j [y_i, y_j] = \sum_{i,j=1}^n \alpha^i \beta^j [\varphi(x_i), \varphi(x_j)] \\
&= \left[\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha^i x_i\right), \varphi\left(\sum_{j=1}^n \beta^j x_j\right)\right] = [\varphi(x), \varphi(y)].
\end{aligned}$$

Isto mostra que φ é um isomorfismo e, portanto, que g e h são isomorfas.

Definição 1.3.8. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ se*

$$[x, y] \in \mathfrak{h}, \quad \textit{para todo } x \in \mathfrak{g} \textit{ e } y \in \mathfrak{h},$$

isto é,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \langle [x, y] \mid x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h} \rangle \subset \mathfrak{h}.$$

Observação 1.3.9. *Todo ideal de $\mathfrak{g}$ é subálgebra de $\mathfrak{g}$, mas nem toda subálgebra, no entanto, é ideal. Por exemplo, o subespaço de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ gerado pela matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

é uma subálgebra por ser unidimensional. No entanto, não é um ideal de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, pois

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.3.10. *$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ é um ideal de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$. Basta verificar que $[X, Y]$ está em $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$ para todo X em $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ e Y em $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$. De fato,*

$$tr([X, Y]) = tr(XY - YX) = tr(XY) - tr(YX) = 0.$$

Exemplo 1.3.11. *O centro de uma Álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é o conjunto*

$$Z(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathfrak{g} \mid [z,x] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Da bilinearidade do colchete, segue que $Z(\mathfrak{g})$ *é um subespaço vetorial de* $\mathfrak{g}$*. Daí, como* $[\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = 0 \in Z(\mathfrak{g})$*, tem que* $Z(\mathfrak{g})$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$*.*

Proposição 1.3.12. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma Álgebra de Lie. Se* $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ *são dois ideais de* $\mathfrak{g}$*, então* $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$*.*

Demonstração. Sejam x em $\mathfrak{g}$ e y em $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ quaisquer. Como y está em $\mathfrak{h}_1$, então $[x,y]$ está em $\mathfrak{h}_1$, da mesma forma, temos que $[x,y]$ está em $\mathfrak{h}_2$. Portanto $[x,y]$ está em $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ □

Proposição 1.3.13. *Sejam* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ *duas Álgebras de Lie,* $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *um homomorfismo de Álgebras de Lie e* $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{h}$ *dois subespaços.*

(i) Se $\mathfrak{i}$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$*, então* $\varphi(\mathfrak{i})$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{h}$*.*

(ii) Se $\mathfrak{i}$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$ e φ *é sobrejetiva, então* $\varphi(\mathfrak{i})$ *é um ideal de* $\mathfrak{h}$*.*

(iii) Se $\mathfrak{j}$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{h}$*, então* $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$*.*

(iv) Se $\mathfrak{j}$ *é um ideal de* $\mathfrak{h}$*, então* $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$*.*

(v) $ker(\varphi) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \varphi(x) = 0\}$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$*.*

(vi) $im(\varphi) = \{y \in \mathfrak{h} \mid y = \varphi(x),$ *para algum* $x \in \mathfrak{g}\}$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{h}$*.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathfrak{i}$, $a, b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$, $h \in \mathfrak{h}$ e $g \in \mathfrak{g}$ quaisquer.

(i) Como $\varphi(x), \varphi(y)$ em $\varphi(\mathfrak{i})$ e φ é um homomorfismo, tem que $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x,y])$. Como $\mathfrak{i}$ é uma subálgebra, tem que $[x,y]$ está em $\mathfrak{i}$. Portanto, $[\varphi(x), \varphi(y)]$ está em $\varphi(\mathfrak{i})$.

(ii) Como $\varphi(y)$ está em $\varphi(\mathfrak{i})$ e φ é um homomorfismo sobrejetivo, então existe x em $\mathfrak{g}$ tal que $\varphi(x) = h$ em $\mathfrak{h}$. Logo $[h, \varphi(y)] = [\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x,y])$. Como $[x,y]$ está em $\varphi(\mathfrak{i})$, pois $\mathfrak{i}$ é um ideal, então $\varphi([x,y])$ está em $\varphi(\mathfrak{i})$. Portanto $\varphi(\mathfrak{i})$ é um ideal de $\mathfrak{h}$.

(iii) Como $\mathfrak{j}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$ e $\varphi(a), \varphi(b)$ estão em $\mathfrak{j}$, então $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ está em $\mathfrak{j}$. Assim, temos que $[a,b]$ está em $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$. Portanto, $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$.

(iv) Como $\mathfrak{j}$ é um ideal de $\mathfrak{h}$, $\varphi(b)$ está em $\mathfrak{j}$ e $\varphi(g)$ está em $\mathfrak{h}$, temos que $\varphi([g,b]) = [\varphi(g), \varphi(b)]$ está em $\mathfrak{j}$. Logo $[g,b]$ está em $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$. Portanto, $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.

(v) Seja z em $ker(\varphi)$ qualquer. Tem que

$$\varphi([g,z]) = [\varphi(g), \varphi(z)] = [\varphi(g), 0] = 0,$$

ou seja, $[g,z]$ é um elemento de $ker(\varphi)$. Portanto, $ker(\varphi)$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.

(vi) Sejam $\varphi(z), \varphi(w)$ em $im(\varphi)$ quaisquer. Então $[\varphi(z), \varphi(y)] = \varphi([z, w])$, como $[z, w]$ está em $\mathfrak{g}$, tem que $[\varphi(z), \varphi(y)]$ é um elemento de $im(\varphi)$. Portanto $im(\varphi)$ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$.

□

Definição 1.3.14. *Seja $\mathfrak{h}$ um ideal de uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. O espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ possui uma estrutura de Álgebra de Lie, onde o colchete é definido por*

$$[x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h}] = [x, y] + \mathfrak{h}.$$

Note que o colchete está bem definido. De fato, suponha que x, x', y, y' estão em $\mathfrak{g}$ tais que $x + \mathfrak{h} = x' + \mathfrak{h}$ e $y + \mathfrak{h} = y' + \mathfrak{h}$. Como $x - x', y - y'$ são elementos em $\mathfrak{h}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
[x', y'] + \mathfrak{h} =& [x + (x' - x), y + (y' - y)] + \mathfrak{h} \\
=& [x, y] + [x, y' - y] + [x' - x, y] + [x - x', y' - y] + \mathfrak{h} \\
=& [x, y] + \mathfrak{h},
\end{aligned}$$

pois $[x, y' - y], [x' - x, y], [x - x', y' - y]$ estão em $\mathfrak{h}$, uma vez que $\mathfrak{h}$ é um ideal.

Teorema 1.3.15 (Teoremas de Isomorfia, [?, Teorema 2.2])**.** *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ Álgebras de Lie.*

(i) Se $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de Álgebras de Lie, então

$$\mathfrak{g}/ker(\varphi) \cong im(\varphi).$$

(ii) Se $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$ ideais de $\mathfrak{g}$, então

$$(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{i} \cong \mathfrak{j}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}).$$

(iii) Se $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ ideais de $\mathfrak{g}$ tais que $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{i}$, então

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{j})/(\mathfrak{i}/\mathfrak{j}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{i}.$$

1.4 Álgebras de Lie Simples

Nesta seção, será definida uma Álgebra de Lie simples e serão enunciadas algumas propriedades importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Posteriormente, serão listadas as Álgebras de Lie simples de dimensão finita.

Definição 1.4.1. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e A, B dois subconjuntos não-vazios de $\mathfrak{g}$. Define-se*

$$[A, B] := \langle [x, y] \mid x \in A, y \in B \rangle.$$

A série derivada de $\mathfrak{g}$ é definido pela sequência dos seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}.$$
$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}'.$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{(2)} &= [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}].\\ &\vdots\\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}].\end{aligned}$$

Tais subespaços são chamados as Álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$*.*

Observação 1.4.2. *As Álgebras derivadas de* $\mathfrak{g}$ *são ideais de* $\mathfrak{g}$*. Basta notar que se* $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ *são ideais de* $\mathfrak{g}$*, então* $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ *também é um ideal de* $\mathfrak{g}$*. De fato, dados* $x \in \mathfrak{g}, i \in \mathfrak{i}$ *e* $j \in \mathfrak{j}$*, pela identidade de Jacobi temos que* $[x, [i, j]] = [[x, i], j] + [i, [x, j]] \in [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$*, pois* $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ *são ideais de* $\mathfrak{g}$*.*

Exemplo 1.4.3.

1. *Uma Álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é abeliana se, e somente se,* $\mathfrak{g}' = 0$*. De fato, se* $\mathfrak{g}$ *é abeliana, então* $[x, y] = 0$*, para todo* x, y *em* $\mathfrak{g}$*. Portanto,* $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$*. Reciprocamente, se* $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$*, então* $[x, y] = 0$*, para todo* x, y *em* $\mathfrak{g}$*, ou seja,* $\mathfrak{g}$ *é abeliana.*

2. *Seja a Álgebra de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$*, com base* $\{e, h, f\}$*, onde*

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os colchetes entre tais elementos são definidos pelo comutador, tal que:

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Se $\mathbb{k}$ *um corpo com característica diferente de* 2*, então* e, h, f *estão em* $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$*, portanto,* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$*. Desse modo,* $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$*, para todo* $k \geq 0$*. Por outro lado, se* $\mathbb{k}$ *é de característica* 2*, tem-se que*

$$[h, e] = 2e = 0 = 2f = [h, f] \quad [e, f] = h,$$

logo $\mathfrak{g}'$ *é o subespaço gerado por* h*. Assim,* $\mathfrak{g}^{(2)} = \{0\}$*.*

Definição 1.4.4. *Uma Álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é dita simples se satisfaz as seguintes dos condições:*

(i) *Os únicos ideais de* $\mathfrak{g}$ *são* 0 *e* $\mathfrak{g}$*.*

(ii) $dim(\mathfrak{g}) \neq 1$*.*

Exemplo 1.4.5. *A Álgebra de Lie* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$*, do Exemplo* **??** *item 2. é uma Álgebra simples. Para verificar isso, seja* $z = ae + bh + cf$*, com* a, b, c *em* $\mathbb{k}$*. Então, pelas relações dos elementos da base com o colchete de Lie, tem que*

$$\begin{aligned}ad(e)(z) &= ad_e(z)\\ &= [e, z]\\ &= [e, ae + bh + cf]\\ &= a[e, e] + b[e, h] + c[e, f]\\ &= -2be + ch.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} ad(e)^2(z) &= ad_e \circ ad_e(z) \\ &= ad_e(ad_e(z)) \\ &= ad_e(-2be + ch) \\ &= [e, -2be + ch] \\ &= -2b[e,e] + c[e,h] \\ &= -2ce, \end{aligned}$$

ou seja, se $z \neq 0$, temos que $ad(e)(z)$ e $ad(e)^2(z)$ é múltiplo não-nulo de e. Portanto, se $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ é um ideal não-nulo de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$, então e está em $\mathfrak{h}$. Como $h = [e,f]$ e $f = 1/2[f,h]$, tem-se que h, f também estão em $\mathfrak{h}$ e daí $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$. Portanto $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ é uma Álgebra de Lie simples.

Corolário 1.4.6. *Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$, então $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}'$ e $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$.*

Demonstração. Pelo exemplo **??**, tem-se que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples e, além disso, $\mathfrak{g}', Z(\mathfrak{g})$ são ideais de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}' = \{0\}$ ou $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ e $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ou $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ é não-abeliana, temos que $\mathfrak{g}' \neq \{0\}$ e $Z(\mathfrak{g}) \neq \mathfrak{g}$. Portanto, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ e $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$. □

1.4.1 Lista das Álgebras de Lie Simples sobre $\mathbb{C}$

A classificação das Álgebras de Lie simples sobre um corpo algebricamente fechado é realizada por meio dos diagramas de Dynkin, os quais são grafos construídos a partir de sistemas simples de raízes. Essa classificação consiste em uma relação bijetiva que associa cada classe de equivalência de Álgebras de Lie simples a um único diagrama e vice-versa. Nesta seção, serão listadas as Álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$, seus respectivos diagramas de Dynkin e sua matriz de Cartan associada. A construção desses diagramas e a demonstração da simplicidade das Álgebras de Lie podem ser encontradas em [**?**, Capítulo 12.] e [**?**, Capítulo V.19.].

Definição 1.4.7. *Uma matriz de Cartan é uma matriz quadrada $n \times n$ com entradas inteiras a_{ij}, denotada por $C = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, tal que:*

(i) $\alpha_{ii} = 2$.

(ii) $\alpha_{ij} \leq 0$, $i \neq j$.

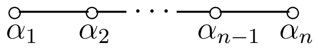
(iii) $\alpha_{ij} = 0$ *se, e somente se,* $\alpha_{ji} = 0$.

As Álgebras de Lie clássicas da Seção **??** são representativas das Álgebras de Lie simples associadas aos diagramas de Dynkin A_n, B_n, C_n e D_n da seguinte forma:

(i) **Tipo A_n:**
Seja n em $\mathbb{N}$, com $n \geq 1$. A Álgebra $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid tr(X) = 0\}$ do Exemplo **??** é uma Álgebra de Lie simples de dimensão $(n+1)^2 - 1$ e tem como base:

$$\{E_{ij} | i \neq j\} \cup \{H_i := E_{ii} - E_{i+1,i+1},\ (1 \leq i \leq n)\}.$$

O diagrama de Dynkin associado a Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ é um grafo de n vértices da forma:

$A_n,\ (n \geq 1):$ 

Seja $C = (\alpha_{ij})$, com $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \geq i, j \geq n$, uma matriz de Cartan associada aos diagramas de Dynkin, tal que $\alpha_{ij}\alpha_{ji}$ é o número de linhas que conectam o vértice α_i com o vértice α_j. Além disso, se $\alpha_{ij} > \alpha_{ji}$, então a aresta entre os vértices α_i e α_j tem o símbolo $>$, com a ponta voltada para o vértice α_j. Com essas convenções a matriz de Cartan contem exatamente a mesma informação do Diagrama de Dynkin, logo cada um pode ser construido a partir dó outro.

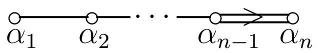
Portanto a matriz de Cartan associada à Álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ é a seguinte matriz:

$$C_{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.2}$$

(ii) **Tipo B_n:**
Seja $2 \leq n$ em $\mathbb{N}$. Seja a Álgebra $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n+1} | JX^t = -XJ\}$ do Exemplo **??** item (ii), onde

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},$$

com I_n a matriz identidade $n \times n$. A Álgebra $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ é uma Álgebra de Lie simples de dimensão $n(2n+1)$ e seu diagrama de Dynkin associado é um grafo de n vértices da forma:

$B_n,\ (n \geq 2):$ 

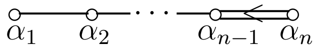
De forma análoga ao item anterior, tem-se que a matriz de Cartan para $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ é dada por:

$$C_{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

(iii) **Tipo C_n:**
Seja n em $\mathbb{N}$, com $n \geq 3$. Seja a Álgebra de Lie $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n} | JX^t = -XJ\}$ do Exemplo **??**, onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

com I_n a matriz identidade $n \times n$. A Álgebra $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ é uma Álgebra de Lie simples de dimensão $n(2n+1)$ e seu diagrama de Dynkin associado é o grafo de n vértices, tal que:

$C_n, \ (n \geq 3)$: 

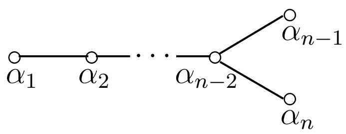
A matriz de Cartan associada à Álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ é da seguinte forma:

$$C_{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

(iv) **Tipo D_n:**
Seja $4 \leq n$ em $\mathbb{N}$. Seja a Álgebra $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n} | JX^t = -XJ\}$, onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

com I_n a matriz identidade $n \times n$. A Álgebra $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ é uma Álgebra de Lie simples de dimensão $n(2n-1)$ e seu diagrama de Dynkin associado é um grafo de n vértices da forma:

$D_n, \ (n \geq 4)$: 

Logo tem-se que a matriz de Cartan para $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ é dada por:

$$C_{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Observação 1.4.8. *Toda Álgebra de Lie simples complexa, pode ser associado um diagrama de Dynkin e uma matriz de Cartan.*

1.5 Álgebra Envolvente Universal

Seja $\Bbbk$ um corpo arbitrário. Para cada Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\Bbbk$ pode-se associar uma Álgebra associativa $U(\mathfrak{g})$ com unidade $1 \in \Bbbk$, chamada Álgebra envolvente universal. Nesta seção, esta Álgebra será construída a partir da Álgebra tensorial. Além disso, serão enunciadas algumas propriedades importantes para o desenvolvimento deste trabalho e será descrita a Álgebra envolvente universal de $\mathfrak{sl}_n$, principalmente da Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2$.

1.5.1 Álgebra Tensorial

Sejam R um anel comutativo com unidade, e M um R-módulo. Para cada inteiro $n \geq 0$, o n-ésimo produto tensorial de M é denotado por T^nM, onde:

$$\begin{aligned} T^0M &= R, \\ T^1M &= M, \\ T^2M &= M \otimes_R M \\ &\vdots \\ T^nM &= \underbrace{M \otimes_R M \otimes_R \cdots \otimes_R M}_{n-parcelas}. \end{aligned}$$

Definição 1.5.1. *A Álgebra tensorial de M é o R-módulo*

$$T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^nM,$$

onde cada elemento de $T(M)$ é uma soma finita de elementos s_i, com $s_i \in T^iM$. A multiplicação interna e a multiplicação escalar são definidas nos geradores por:

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \cdot (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}$$

$$a(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = ax_1 \otimes \cdots \otimes x_p$$

com $x_i \in M$, $a \in R$ e é estendida por linearidade.

Pode-se observar que a multiplicação definida em $T(M)$ é associativa e tem como identidade o elemento unitário de $T^0M = R$, mas este produto em geral não é comutativo, já que o produto tensorial não é comutativo. Além disso, o produto satisfaz a seguinte condição:

$$T^pM \otimes T^qM \subseteq T^{p+q}M, \quad \text{com} \quad p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Observação 1.5.2. *Seja $\varphi : M \longrightarrow T(M)$. Pela definição da multiplicação em $T(M)$, tem-se que*

$$\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n.$$

Como cada elemento de $T(M)$ é uma soma finita dos elementos anteriores, tem-se que $T(M)$ está gerado como R-Álgebra por $\varphi(M) = T^1M$.

Proposição 1.5.3. *(**Propriedade universal da Álgebra tensorial**) Sejam M um R-módulo e A uma R-álgebra associativa com unidade. Para qualquer homomorfismo de R-módulos $\phi : M \longrightarrow A$, existe um único homomorfismo de R-álgebras $\gamma : T(M) \longrightarrow A$ tal que $\gamma(1) = 1$ e $\gamma \circ i = \phi$, onde $i : M \hookrightarrow T(M)$ é a inclusão, i.e. o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & & T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^nM \arrow[dl, dashed, "\exists! \gamma"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

1.5.2 Álgebra Envolvente Universal

Definição 1.5.4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie sobre um corpo $\Bbbk$. A Álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$ é um par (U, i), onde U é uma Álgebra associativa e $i : \mathfrak{g} \to U^-$, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) i é um homomorfismo de Álgebras de Lie entre $\mathfrak{g}$ e U^-.

(ii) Se A é uma Álgebra associativa e f é um homomorfismo de Álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to A^-$, então existe um único homomorfismo de Álgebras $\varphi : U \to A$, tal que o seguinte diagrama comute.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & & U^- \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & A^- & \end{tikzcd}$$

Toda Álgebra de Lie tem uma Álgebra envolvente universal. De fato, para garantir a existência de U, é necessário a Álgebra tensorial. A seguir será construida a Álgebra envolvente universal.

Seja $T(\mathfrak{g})$ a Álgebra tensorial de uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e seja J o ideal bilateral de $T(\mathfrak{g})$ gerado por todos os elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, com x, y em $\mathfrak{g}$. Define-se $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J$ e seja $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ a projeção canônica. Note que J não contém os escalares $T^0(\mathfrak{g}) = \Bbbk$, logo π leva $\Bbbk$ isomorficamente em $U(\mathfrak{g})$. Seja $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ a restrição de π em $T^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ e seja A uma Álgebra associativa com unidade tal que $\phi : \mathfrak{g} \to A^-$ um homomorfismo de Álgebras de Lie. Pela Propriedade universal da Álgebra tensorial **??**, existe um homomorfismo de Álgebras $\gamma : T(\mathfrak{g}) \to A$, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "i'"] \arrow[dr, "\phi"'] & & T(\mathfrak{g}) \arrow[dl, dashed, "\exists!\gamma"] \\ & A^- & \end{tikzcd}$$

onde $i' : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$ é a inclusão natural. Como ψ é um homomorfismo de Álgebras de Lie, tem-se que

$$\begin{aligned} \gamma(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) &= \gamma(x)\gamma(y) - \gamma(y)\gamma(x) - \gamma([x, y]) \\ &= \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x) - \phi([x, y]) \\ &= \phi([x, y]) - \phi([x, y]) = 0. \end{aligned}$$

Logo $J \subset ker(\gamma)$. Portanto a aplicação $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $\varphi(x + J) := \gamma(x) + J$, está bem definida e o seguinte diagrama comuta

$$
\begin{tikzcd}
T(\mathfrak{g}) \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, bend right=60, "\gamma"'] & \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "i'"] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & U(\mathfrak{g}) \arrow[dl, "\varphi"] \\
A &
\end{tikzcd}
$$

Portanto $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J$ é uma Álgebra envolvente universal com $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ a inclusão natural.

Um dos resultados mais importantes sobre as Álgebras envolventes é o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que permite construir uma base nesta Álgebra:

Teorema 1.5.5 (Teorema Poincaré-Birkhoff-Witt, [?, Corolário C]). *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie sobre um corpo $\Bbbk$ e seja $\{x_j\}_{j\in I}$ uma base de $\mathfrak{g}$, onde I é um conjunto bem ordenado. Então, o conjunto de elementos na Álgebra envolvente universal:*

$$i(x_{j_1})i(x_{j_2})\cdots i(x_{j_n}), \quad j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_n, n \in \mathbb{Z}^+,$$

junto com $1 \in \Bbbk$, é uma base de $U(\mathfrak{g})$.

1.5.3 Álgebra Envolvente Universal de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Considere a Álgebra associativa R com geradores $\mathbf{e}, \mathbf{h}$ e $\mathbf{f}$ e denote por $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ o quociente de R módulo o ideal J gerado pelas relações

$$\mathbf{ef} - \mathbf{fe} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{he} - \mathbf{eh} = 2\mathbf{e}, \quad \mathbf{hf} - \mathbf{fh} = -2\mathbf{f}.$$

A álgebra $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ é chamada de Álgebra envolvente universal de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Abusando da notação, normalmente os elementos de R são identificados com suas imagens na Álgebra de quociente $U(\mathfrak{sl}_2)$.

Lema 1.5.6.

(i) Existe uma única aplicação linear $i : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ satisfazendo

$$i(e) = \mathbf{e}, \qquad i(h) = \mathbf{h}, \qquad i(f) = \mathbf{f}.$$

(ii) A aplicação i é um homomorfismo de Álgebras de Lie.

Demonstração. A afirmação (i) segue do fato de que $\{e, h, f\}$ é uma base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. A afirmação (ii) segue das relações entre os elementos da base $\{e, h, f\}$ e a definição de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ □

Teorema 1.5.7 (Propriedade universal de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, [?, Teorema 2.1.5]). *Seja A uma Álgebra associativa com unidade e $\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow A^{(-)}$ um homomorfismo de Álgebras de Lie. Então existe um único homomorfismo $\varphi : U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow A$ de Álgebras associativas tal que $\phi = \varphi \circ i$, isso é tal que o diagrama a seguir comuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & & U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Primeiro será provado a existência de φ. Para a Álgebra R com geradores $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$ tem-se um único homomorfismo $\psi : R \longrightarrow A$ de Álgebras associativas tal que:

$$\psi(\mathbf{e}) = \phi(e), \quad \psi(\mathbf{f}) = \phi(f), \quad \psi(\mathbf{h}) = \phi(h). \tag{1.3}$$

Seja π a projeção canônica da seguinte forma $\pi : R \longrightarrow U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Então

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{ef} - \mathbf{fe}) &= \psi(\mathbf{e})\psi(\mathbf{f}) - \psi(\mathbf{f})\psi(\mathbf{e}) \\ &= \phi(e)\phi(f) - \phi(f)\phi(e) \\ &= [\phi(e), \phi(f)] \\ &= \phi([e, f]) \qquad\qquad (\phi \text{ é um homomorfismo de Álgebras de Lie}) \\ &= \phi(h) \\ &= \psi(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Portanto $\psi(\mathbf{ef} - \mathbf{fe} - \mathbf{h}) = 0$. Da forma análoga, temos que $\psi(\mathbf{he} - \mathbf{eh} - 2\mathbf{e}) = 0$ e $\psi(\mathbf{hf} - \mathbf{fh} + 2\mathbf{f}) = 0$. Logo o $J \subseteq ker(\psi)$ e, portanto, ψ é fatorado através de $R/\ker(\psi) = U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Denote por φ o homomorfismo induzido de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ para A. Então $\phi = \varphi \circ i$ segue das definições. A unicidade de φ decorre da unicidade de ψ e de como a igualdade $\phi = \varphi \circ i$ força as fórmulas (**??**). □

Proposição 1.5.8 (Unicidade de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, [**?**, Proposição 2.1.6])**.** *Seja $U'(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ outra Álgebra associativa tal que existe um homomorfismo $\varepsilon' : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow U'(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))^{(-)}$ de Álgebras de Lie com a propriedade universal descrita no Teorema* **??**. *Então $U'(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ é canonicamente isomorfa a $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.*

Teorema 1.5.9 (Teorema de PBW de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$,[**?**, Teorema 2.2.1])**.** *O conjunto*

$$\{e^i h^j f^k \ : \ i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$$

é uma base de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

Os monômios da forma $e^i h^j f^k$ são geralmente chamados de monômios padrão. Observe que os monômios padrão também formam uma base da Álgebra polinomial $\mathbb{C}[e, h, f]$. Portanto, o Teorema PBW diz que a Álgebra não comutativa $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ é "do mesmo tamanho"que a Álgebra comutativa $\mathbb{C}[e, h, f]$.

Observação 1.5.10. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie simples complexa de dimensão n. Pelo Teorema* **??**, *$\mathfrak{g}$ é gerada por e_i, f_i, h_i com $1 \leq i \leq n$, satisfazendo as relações de Serre. Seja R a Álgebra associativa com gerada por $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{h}_i$, com $1 \leq i \leq n$ e seja J o ideal gerado pelas relações de Serre sobre $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{h}_i$, dadas no Teorema* **??**. *De forma análoga da Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, tem-se que a Álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$ é a Álgebra quociente $U(\mathfrak{g}) := R/J$.*

1.5.4 Relações de Serre da Álgebras de Lie Simples

A construção das Álgebras envolventes quantizadas, que será detalhada no Capítulo 3, é realizada a partir das relações de Serre das Álgebras envolventes ordinárias. No seguinte teorema, mostra-se uma caracterização das Álgebras de Lie complexas simples e são apresentadas as relações de Serre.

Teorema 1.5.11 ([?, Teorema 6.]). *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{C}$ e seja $C_{\mathfrak{g}} = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ a matriz de Cartan associada a $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{g}$ é gerada por $\{e_i, f_i, h_i | 1 \leq i \leq n\}$ tal que a seguintes relações são satisfeitas:*

(i) $[h_i, h_j] = 0$, *para todo* $1 \leq i, j \leq n$.

(ii) $[h_i, e_j] = \alpha_{ij}e_j$ *e* $[h_i, f_j] = -\alpha_{ij}f_j$, *para todo* $1 \leq i, j \leq n$.

(iii) $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i$, *para todo* $1 \leq i, j \leq n$, *onde* δ_{ij} *é o delta de Kronecker (**??**).*

(iv) $ad(e_i)^{1-\alpha_{ij}}(e_j) = 0$ *e* $ad(f_i)^{1-\alpha_{ij}}(f_j) = 0$, *com* $i \neq j$.

Então $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie simples de dimensão finita. (As relações $(i) - (iv)$ são chamadas de relações de Serre.)

Se $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie simples complexa, tendo em conta o Teorema **??**, pode-se construir a Álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$ de forma análoga a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, transformando os colchetes de Lie em comutadores e expandindo as expressões das adjuntas. Portanto a Álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ é uma Álgebra associativa sobre $\mathbb{C}$ com geradores $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$, $h_1, \ldots, h_n$ e as seguintes relações

(i) $[h_i, h_j] = 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.

(ii) $[h_i, e_j] = \alpha_{ij}e_j$ e $[h_i, f_j] = -\alpha_{ij}f_j$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.

(iii) $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i$, para todo $1 \leq i, j \leq n$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker (**??**).

(iv) Para todo $i \neq j$

$$\sum_{l=0}^{1-\alpha_{ij}} (-1)^l \binom{1-\alpha_{ij}}{l} e_i^{1-\alpha_{ij}-l} e_j e_i^l = 0, \qquad \sum_{l=0}^{1-\alpha_{ij}} (-1)^l \binom{1-\alpha_{ij}}{l} f_i^{1-\alpha_{ij}-l} f_j f_i^l = 0.$$

Capítulo 2

Álgebras de Hopf

Na literatura clássica os conceitos de Álgebra, coálgebra, biálgebra e Álgebra de Hopf são definidos sobre um corpo $\Bbbk$ [?, ?, ?]. Porém, esta seção, tem como objetivo definir a estrutura de uma Álgebra de Hopf sobre um anel comutativo R. Para isso, são introduzidos os conceitos de Álgebra associativa, coálgebra e biálgebra sobre um anel comutativo R via diagramas e será usado como referência o livro de V. Chari e A. Pressley [?]. Alem disso, definimos a Álgebra de convolução de uma coálgebra para introduzir o conceito de antípoda e serão apresentados alguns exemplos e propriedades que nos permitirá mostrar que a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ é uma Álgebra de Hopf. Para o desenvolvimento deste capítulo, seja R um anel comutativo com unidade. Nesta secão, salvo menção ao contrário, o produto tensorial e aplicações lineares serão tomados sobre R.

2.1 Álgebras associativas com Unidade

Definição 2.1.1. *Uma Álgebra sobre um anel comutativo com unidade R é uma terna (A, m, μ), onde A é um R-módulo e $m : A \otimes_k A \to A$, $\mu : R \longrightarrow A$ são transformações entre R-módulos, tais que os seguintes diagramas sejam comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes id_A"] \arrow[d, "id_A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
R \otimes A \arrow[ur, "\mu \otimes id_A"] \arrow[dr, "\gamma_l"'] & & A \otimes R \arrow[ul, "id_A \otimes \mu"'] \arrow[dl, "\gamma_r"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

As aplicações m e μ são chamadas multiplicação e unidade de A.

O primeiro diagrama representa a associatividade da multiplicação, ou seja,

$$m \circ (id_A \otimes m) = m \circ (m \otimes id_A). \tag{2.1}$$

O segundo diagrama retrata a unidade usual de A, onde aplicações $\gamma_l : R \otimes A \to A$ e $\gamma_r : A \otimes R \to A$ são os isomorfismos canônicos dados por $\gamma_l(1_R \otimes a) = (a)$ e $\gamma_r(a \otimes 1_R) = (a)$, para todo $a \in A$, ou seja,

$$m \circ (id_A \otimes \mu) = id_A = m \circ (\mu \otimes id_A). \tag{2.2}$$

Sejam A e B R-Álgebras e $A \otimes B$ o produto tensorial de A e B sobre R, define-se a aplicação transposição (ou aplicação twist), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tau_{A,B} \ : \ A \otimes B &\longrightarrow B \otimes A \\ a \otimes b &\longrightarrow b \otimes a, \end{aligned}$$

para todo a em A e para todo b em B, o qual é um isomorfismo de R-Álgebras. Uma R-Álgebra é dita comutativa se o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dl, "\tau_{A,A}"'] \arrow[dr, "m"] & \\ A \otimes A \arrow[rr, "m"'] & & A \end{tikzcd}$$

Observação 2.1.2. *Seja (A, m, μ) uma R-Álgebra, será denotado $m^{op} := m \circ \tau_{A,A}$, logo, uma R-álgebra é dita comutativa se $m = m^{op}$.*

Definição 2.1.3. *Sejam $(A, m, \mu), (A', m', \mu')$ duas R-Álgebras. Uma aplicação linear $f : A \to A'$ é dita morfismo de R-Álgebras se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $m' \circ (f \otimes f) = f \circ m$,

(ii) $f \circ \mu = \mu'$,

equivalentemente, se os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m"'] & A' \otimes A' \arrow[d, "m'"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\mu'"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & A' \end{tikzcd}$$

Exemplo 2.1.4.

1. *O anel R tem uma estrutura natural de R-Álgebra com a seguinte multiplicação e unidade:*

$$\begin{aligned} m_R \ : \ R \otimes R &\longrightarrow R \\ a \otimes b &\longmapsto ab, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu_R = id_R \ : R &\longrightarrow R \\ a &\longmapsto \mu(a) := a, \end{aligned}$$

para todo a, b em R.

2. *Seja $\mathbb{k}$ um corpo. O anel de polinômios $\mathbb{k}[x]$ tem estrutura de $\mathbb{k}$-Álgebra com m a multiplicação usual de polinômios e μ a inclusão dos escalares como polinômios constantes em $\mathbb{k}[x]$, ou seja,*

$$\begin{aligned} m \ : \ \mathbb{k}[x] \otimes \mathbb{k}[x] &\longrightarrow \mathbb{k}[x] \\ p(x) \otimes q(x) &\longmapsto p(x)q(x), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu \ : \mathbb{k} &\longrightarrow \mathbb{k}[x] \\ a &\longmapsto \mu(a) := a, \end{aligned}$$

para todo $p(x), q(x)$ em $k[x]$, a em $\mathbb{k}$ e estendendo linearmente.

3. *Sejam (V_1, m_1, μ_1) e (V_2, m_2, μ_2) R-Álgebras, então $V_1 \otimes V_2$ tem estrutura de R-Álgebra com a seguinte multiplicação e unidade:*

$$\begin{array}{rrcl} m_{V_1 \otimes V_2}: & (V_1 \otimes V_2) \otimes (V_1 \otimes V_2) & \longrightarrow & (V_1 \otimes V_2) \\ & v = (v_1 \otimes v_2) \otimes (v_1' \otimes v_2') & \longmapsto & [(m_1 \otimes m_2) \circ (id_{V_1} \circ \tau_{V_2,V_1} \circ id_{V_2})](v) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \mu_{V_1 \otimes V_2}: & R & \longrightarrow & V_1 \otimes V_2 \\ & 1_R & \longmapsto & \mu_1(1_R) \otimes \mu_2(1_R), \end{array}$$

para todo v_1, v_1' em V_1 e v_2, v_2' em V_2. Note que $m_{V_1 \otimes V_2} = m_1 \otimes m_2$, pois

$$\begin{aligned} m_{V_1 \otimes V_2}(v) &= (m_1 \otimes m_2) \circ (id_{V_1} \circ \tau_{V_2,V_1} \circ id_{V_2})[(v_1 \otimes v_2) \otimes (v_1' \otimes v_2')] \\ &= (m_1 \otimes m_2)[(v_1 \otimes v_1') \otimes (v_2 \otimes v_2')] \\ &= m_1(v_1 \otimes v_1') \otimes m_2(v_2 \otimes v_2'). \end{aligned}$$

Daqui por diante, a multiplicação m e a unidade μ em uma R-álgebra A, serão definidas como $m(a \otimes b) = ab$, para todo a, b em A e $\mu(\lambda) = 1_A\lambda$, para todo λ em R. Estas são chamadas, multiplicação e unidade usual de A.

2.2 Coálgebras

Nesta seção, definimos o conceito de coálgebra que é essencialmente a noção dual de uma Álgebra. Está dualização é uma noção categórica, e é obtida revertendo as flechas nos diagramas correspondentes. Além disso, serão apresentados alguns exemplos elementares e alguns dos principais resultados sobre suas propriedades.

Definição 2.2.1. *Seja R um anel comutativo com unidade. Uma coálgebra sobre R (ou uma R-coálgebra) é uma terna (C, Δ, ϵ), onde C é um k-módulo, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\epsilon : C \to R$ são morfismos de R-módulos de modo que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \otimes C & & C \otimes C \arrow[ll, "\Delta \otimes id_C"'] \\ C \otimes C \arrow[u, "id_C \otimes \Delta"] & & C \arrow[ll, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\epsilon \otimes id_C"'] \arrow[dr, "id_C \otimes \epsilon"] & \\ R \otimes C & & C \otimes R \\ & C \arrow[ul, "\gamma_l'"] \arrow[ur, "\gamma_r'"'] \arrow[uu, "\Delta"] & \end{tikzcd}$$

Os morfismos $\gamma_l' : C \to R \otimes C$ e $\gamma_r' : C \to C \otimes R$ são os isomorfismos canônicos dados por $\gamma_l'(c) = 1_R \otimes c$ e $\gamma_r'(c) = c \otimes 1_R$, para todo $c \in C$.

A comutatividade do diagrama do lado esquerdo é chamada axioma da coassociatividade, o que pode ser escrito, para todo c em C, como

$$(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta(c) = (id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(c), \tag{2.3}$$

enquanto a comutatividade do segundo diagrama é chamada axioma da counidade, o que pode ser escrito, para todo c em C, como

$$(\epsilon \otimes id_C) \circ \Delta(c) = c = (id_C \otimes \epsilon) \circ \Delta(c), \tag{2.4}$$

Uma R-coálgebra é chamada comutativa, se $\tau_{C,C} \circ \Delta = \Delta$, ou seja

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & C \otimes C \arrow[dl, "\tau_{C,C}"] \\ & C \otimes C & \end{tikzcd}$$

Observação 2.2.2. *Seja (C, Δ, ϵ) uma R-coálgebra, será denotado por $\Delta^{cop} := \tau_{C,C} \circ \Delta$. Então, uma R-coálgebra é cocomutativa se $\Delta = \Delta^{cop}$.*

Definição 2.2.3. *Sejam (C, Δ, ϵ) e (C', Δ', ϵ') duas R-coálgebras. Uma aplicação R-linear é dita morfismo de R-coálgebras se satisfaz as seguintes dois condições:*

(i) $(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f$,

(ii) $\epsilon = \epsilon' \circ f$,

ou seja, f é um morfismo de R-coálgebras se os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "f"'] & C \otimes C \arrow[d, "f \otimes f"] \\ C' \arrow[r, "\Delta'"'] & C' \otimes C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\epsilon"'] & C' \arrow[d, "\epsilon'"] \\ & k \end{tikzcd}$$

De aqui em diante, serão usada a seguinte notação dada em [**?**], chamada a notação de Sweedler. Sejam (C, Δ, ϵ) uma R-coálgebra e c um elemento qualquer em C. Como $\Delta(c)$ é um elemento em $C \otimes C$, podemos escrever o elemento $\Delta(c)$ da seguinte forma

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{(i1)} \otimes c_{(i2)}. \tag{2.5}$$

Aplicando agora $id_C \otimes \Delta$ e $\Delta \otimes id_C$ no elemento $\Delta(c)$, temos por um lado,

$$\begin{aligned} (id_C \otimes \Delta)(\Delta(c)) &= (id_C \otimes \Delta)\left(\sum_{i=1}^{n}(c_{(i1)} \otimes c_{(i2)})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(id_C(c_{(i1)}) \otimes \Delta(c_{(i2)})) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(c_{(i1)} \otimes \left(\sum_{j=1}^{m}\left(c_{(i2)_{(j1)}} \otimes c_{(i2)_{(j2)}}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

e por outro,

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id_C)(\Delta(c)) &= (\Delta \otimes id_C)\left(\sum_{i=1}^{n}(c_{(i1)} \otimes c_{(i2)})\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\Delta(c_{(i1)}) \otimes id_C(c_{(i2)}))\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(c_{(i1)_{(j1)}} \otimes c_{(i1)_{(j2)}}\right) \otimes c_{(i2)}\right).\end{aligned}$$

A coassociatividade de Δ, garante que $(id_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id_C) \circ \Delta$. Assim, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(c_{(i1)} \otimes \left(\sum_{j=1}^{m}\left(c_{(i2)_{(j1)}} \otimes c_{(i2)_{(j2)}}\right)\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(c_{(i1)_{(j1)}} \otimes c_{(i1)_{(j2)}}\right) \otimes c_{(i2)}\right). \tag{2.6}$$

Por este motivo, para simplificar as notações, $\Delta(c)$ será escrito da seguinte forma

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)},$$

onde $c_{(1)}$ e $c_{(2)}$ representam elementos na primeira e segunda entrada do tensor $C \otimes C$ respectivamente. Logo a igualdade (**??**) pode-se escrever como

$$\sum_{(c)(c_{(2)})} c_{(1)} \otimes c_{(21)} \otimes c_{(22)} = \sum_{(c)(c_{(1)})} c_{(11)} \otimes c_{(12)} \otimes c_{(2)}. \tag{2.7}$$

Portanto, temos que a coassociatividade pode-se denotar como

$$((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} = (\Delta \otimes id_C) \circ \Delta,$$

e a counidade pode ser escrita, para todo c em C, da seguinte forma:

$$((\epsilon \otimes id_c) \circ \Delta)(c) = \sum_{(c)} \epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c = \sum_{(c)} c_{(1)}\epsilon(c_{(2)}) = ((id_c \otimes \epsilon) \circ \Delta)$$

Exemplo 2.2.4.

1. *O anel R, como R-módulo, tem uma estrutura natural de R-coálgebra com a seguinte comultiplicação e counidade:*

$$\begin{aligned}\Delta_R \;:\; R &\longrightarrow R \otimes R & \qquad \epsilon_R = id_R \;:\; R &\longrightarrow R\\ a &\longmapsto \Delta(a) := a \otimes 1_R, & a &\longmapsto \epsilon(a) := a,\end{aligned}$$

   para todo a em R.

2. *Seja X um conjunto, é denotado por $R[X]$ o R-módulo que tem X como base. $R[X]$ tem estrutura de R-coálgebra. Seja x em X e defina:*

$$\begin{aligned}\Delta \;:\; R[X] &\longrightarrow R[X] \otimes R[X] & \qquad \epsilon \;:\; R[X] &\longrightarrow R\\ x &\longmapsto \Delta(x) := x \otimes x, & x &\longmapsto \epsilon(x) := 1_R.\end{aligned}$$

   Basta definir Δ e ϵ nos elementos da base e estender por linearidade.

3. *O exemplo a seguir pretende ressaltar que um R-módulo não precisa apresentar uma única estrutura de coálgebra.*
Seja R um anel comutativo com unidade e $R[x]$ o anel de polinômios com coeficientes em R. Este é um R-módulo e tem como base $\{1_R, x, x^2, x^3, \dots\}$. Basta definir os morfismos Δ e ϵ sobre os elementos da base:

   3.1. *São definidos:*

$$\begin{aligned} \Delta_1 \ : \ R[x] &\longrightarrow R[x] \otimes R[x] \\ x^m &\longmapsto \Delta_1(x^m) := x^m \otimes x^m, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \epsilon_1 \ : \ R[x] &\longrightarrow R \\ x^m &\longmapsto \epsilon_1(x^m) := 1_R, \end{aligned}$$

para todo x^m na base de $R[x]$. Δ_1 e ϵ_1 dotam a $R[x]$ de estrutura de R-coálgebra.

   3.2. *Considere os seguintes morfismos:*

$$\begin{aligned} \Delta_2 \ : \ R[x] &\longrightarrow R[x] \otimes R[x] \\ x^m &\longmapsto \Delta_2(x^m) := \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i \otimes x^{m-i}, \\ \epsilon_2 \ : \ R[x] &\longrightarrow R \\ x^m &\longmapsto \epsilon_2(x^m) := \begin{cases} 0 & se \ \ m \neq 0 \\ 1_R & se \ \ m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Com está comultiplicação e counidade, $R[x]$ tem estrutura de R-coálgebra. De fato, será verificada a comutatividade dos diagramas da definição de coálgebra

   $*$ ***coassociatividade:***

$$\begin{aligned} \left(\left(id_{R[x]} \otimes \Delta_2\right) \circ \Delta_2\right)(x^m) &= \left(id_{R[x]} \otimes \Delta_2\right)\left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i \otimes x^{m-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \left(\binom{m}{i} x^i \otimes \Delta_2\left(x^{m-i}\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \left(\binom{m}{i} x^i \otimes \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} x^j \otimes x^{m-i-j}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} x^i \otimes x^j \otimes x^{m-i-j}, \end{aligned}$$

através da mudança de variável $r = i + j$, tem-se que:

$$\left(\left(id_{R[x]} \otimes \Delta_2\right) \circ \Delta_2\right)(x^m) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{r=i}^{m} \binom{m}{i} \binom{m-i}{r-i} x^i \otimes x^{r-i} \otimes x^{m-r}.$$

Renomeando as variáveis $r \mapsto i$, $i \mapsto j$, tem que:

$$\left(\left(id_{R[x]} \otimes \Delta_2\right) \circ \Delta_2\right)(x^m) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=j}^{m} \binom{m}{j} \binom{m-j}{i-j} x^j \otimes x^{i-j} \otimes x^{m-i}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=o}^{i} \binom{m}{i} \binom{i}{j} x^j \otimes x^{i-j} \otimes x^{m-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \Delta_2 \left(x^i\right) \otimes x^{m-i} \\
&= \left(\Delta_2 \otimes id_{k[x]}\right) \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i \otimes x^{m-i} \right) \\
&= \left(\left(\Delta_2 \otimes id_{R[x]}\right) \circ \Delta_2\right) (x^m) .
\end{aligned}
$$

$*$ ***Counidade:***

$$
\begin{aligned}
\left(\left(\epsilon_2 \otimes id_{R[x]}\right) \circ \Delta_2\right) (x^m) &= \left(\epsilon_2 \otimes id_{R[x]}\right) \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i \otimes x^{m-i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \epsilon_2 \left(x^i\right) \otimes x^{m-i} \\
&= \binom{m}{0} 1_R \otimes x^m \\
&= x^m.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\left(\left(id_{R[x]} \otimes \epsilon_2\right) \circ \Delta_2\right) (x^m) &= \left(id_{R[x]} \otimes \epsilon_2\right) \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i \otimes x^{m-i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i \otimes \epsilon_2 \left(x^{m-i}\right) \\
&= \binom{m}{m} x^m \otimes 1_R \\
&= x^m.
\end{aligned}
$$

Esta coálgebra é chamada de Coálgebra de Potências Divididas.

4. *Sejam $(C_1, \Delta_1, \epsilon_1)$ e $(C_2, \Delta_2, \epsilon_2)$ duas R-coálgebras, então $C_1 \otimes C_2$ tem estrutura de R-coálgebra com a seguinte comultiplicação e counidade:*

$$
\begin{aligned}
\Delta_{C_1 \otimes C_2} :\ & (C_1 \otimes C_2) \longrightarrow (C_1 \otimes C_2) \otimes (C_1 \otimes C_2) \\
& c_1 \otimes c_2 \longmapsto \left[(id_{C_1} \circ \tau_{C_1, C_2} \circ id_{C_2}) \circ (\Delta_1 \otimes \Delta_2)\right] (c_1 \otimes c_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{C_1 \otimes C_2} :\ & C_1 \otimes C_2 \longrightarrow R \\
& c_1 \otimes c_2 \longmapsto (m \circ (\epsilon_1 \otimes \epsilon_2))(c_1 \otimes c_2) = \epsilon_1(c_1)\epsilon_2(c_2).
\end{aligned}
$$

Seja U um R-módulo. Defina-se o R-módulo $U^* = Hom_R(U, R)$ chamado o dual de U. Seja (C, Δ, ϵ) uma R-coálgebra. Considere as seguintes aplicações transpostas $\Delta^* : (C \otimes C)^* \to C^*$ e $\epsilon^* : r \to C^*$, onde $\Delta^*(f) = f \circ \Delta$ para todo f em $(C \otimes C)^*$, e $\epsilon^*(1) = \Phi \circ \epsilon$, com $\Phi : R \cong R^*$.

Proposição 2.2.5. *Se (C, Δ, ϵ) é uma R-coálgebra, então C^* tem uma estrutura de R-Álgebra.*

Demonstração. Considere o seguinte homomorfismo λ de R-módulos:

$$\begin{aligned} \lambda : Hom_R(C,R) \otimes Hom_R(C,R) &\longrightarrow Hom(C \otimes C, R \otimes R) \\ f \otimes g &\longmapsto \lambda(f \otimes g): \ C \otimes C \longrightarrow R \otimes R \\ &\qquad\qquad\qquad c_1 \otimes c_2 \longmapsto f(c_2) \otimes g(c_1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

A multiplicação e unidade são definidas a seguir para C^*:

$$\begin{aligned} m : C^* \otimes C^* &\longrightarrow C^* \\ f \otimes g &\longmapsto m(f \otimes g) := (\Delta^* \circ \lambda \circ \tau_{C^*,C^*})(f \otimes g) \\ &\qquad = \lambda(g \otimes f) \circ \Delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu : R \cong R^* &\longrightarrow C^* \\ a &\longmapsto \mu(a) : C \longrightarrow R \\ &\qquad\qquad c \longmapsto a\epsilon(c). \end{aligned}$$

Vejamos que (C^*, m, μ) é uma R-Álgebra, será provado que as equações (**??**) e (**??**) são satisfeitas.

- **Associatividade:** Sejam f, g, h elementos de C^* e c em C.

$$\begin{aligned} m \circ (m \otimes id_{C^*})(f \otimes g \otimes h)(c) &= m[m(f \otimes g) \otimes id_{C^*}(h)](c) \\ &= m[(\lambda(g \otimes f) \circ \Delta) \otimes h](c) \\ &= \lambda[h \otimes (\lambda(g \otimes f) \circ \Delta)] \circ \Delta(c) \\ &= \lambda[h \otimes (\lambda(g \otimes f) \circ \Delta)] \left(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= \sum_{(c)} h\left(c_{(2)}\right) \otimes [\lambda(g \otimes f) \circ \Delta]\left(c_{(1)}\right) \\ &= \sum_{(c)} h\left(c_{(2)}\right) \otimes \lambda(g \otimes f) \left(\sum_{\left(c_{(1)}\right)} c_{(11)} \otimes c_{(12)} \right) \\ &= \sum_{(c)\left(c_{(1)}\right)} h\left(c_{(2)}\right) \otimes g\left(c_{(12)}\right) \otimes f\left(c_{(11)}\right) \\ &= \sum_{(c)\left(c_{(1)}\right)} (h \otimes g \otimes f)\left(c_{(2)} \otimes c_{(12)} \otimes c_{(11)}\right) \\ &= (h \otimes g \otimes f) \left(\sum_{(c)\left(c_{(1)}\right)} c_{(2)} \otimes c_{(12)} \otimes c_{(11)} \right). \end{aligned}$$

De forma análoga, tem-se que:

$$m \circ (id_{C^*} \otimes m)(f \otimes g \otimes h)(c) = (h \otimes g \otimes f) \left(\sum_{(c)(c_{(2)})} c_{(22)} \otimes c_{(21)} \otimes c_{(1)} \right).$$

Pela coassociatividade de Δ (**??**), tem que

$$m \circ (m \otimes id_{C^*})(f \otimes g \otimes h)(c) = m \circ (id_{C^*} \otimes m)(f \otimes g \otimes h)(c)$$

- **Unidade:** Sejam f em C^*, a em R e c em C.

$$\begin{aligned} m \circ (\mu \otimes id_{C^*})(a \otimes f)(c) &= m(\mu(a) \otimes f)(c) \\ &= [\lambda(f \otimes \mu(a)) \circ \Delta](c) \\ &= \lambda(f \otimes \mu(a)) \left(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= \sum_{(c)} f\left(c_{(2)}\right) \otimes \mu(a)\left(c_{(1)}\right) \\ &= \sum_{(c)} f\left(c_{(2)}\right) \otimes a\epsilon\left(c_{(1)}\right) \\ &= a \sum_{(c)} f\left(c_{(2)}\right) \epsilon\left(c_{(1)}\right) \\ &= a \sum_{(c)} f\left(\epsilon\left(c_{(1)}\right) c_{(2)}\right) \\ &= af \left(\sum_{(c)} \epsilon\left(c_{(1)}\right) c_{(2)} \right). \end{aligned}$$

De forma análoga, tem-se que

$$m \circ (id_{C^*} \otimes \mu)(f \otimes a)(c) = af \left(\sum_{(c)} c_{(1)} \epsilon\left(c_{(2)}\right) \right).$$

Pela counidade de C, dada em (**??**),

$$\sum_{(c)} \epsilon\left(c_{(1)}\right)) c_{(2)} = \sum_{(c)} c_{(1)} \epsilon\left(c_{(2)}\right).$$

Portanto,

$$m \circ (\mu \otimes id_{C^*})(a \otimes f)(c) = m \circ (id_{C^*} \otimes \mu)(f \otimes a)(c).$$

$\square$

Observação 2.2.6. *Sejam U, V dois R-módulos. A aplicação λ definida em (**??**), pode-se definir sobre U^*, V^* da seguinte forma*

$$\begin{aligned} \lambda : U^* \otimes V^* &\longrightarrow (V, U)^* \\ f \otimes g &\longmapsto \lambda(f \otimes g) : \; V \otimes U \longrightarrow R \otimes R \\ &\qquad\qquad\qquad v \otimes u \longmapsto f(v) \otimes g(u), \end{aligned} \tag{2.9}$$

*para todo $f \in U^*$, $g \in V^*$, $u \in U$ e $v \in V$. Note que λ é um isomorfismo de R-módulos se U, V têm dimensão finita (ver [**?**, Corolario II.2.2.]).*

O fato de a aplicação λ ser bijetora quando os R-módulos são de dimensão finita, permite definir uma estrutura de Coálgebra no dual de uma Álgebra de dimensão finita, como é demonstrado na seguinte proposição.

Proposição 2.2.7. *Seja (A, m, μ) uma R-Álgebra com A um R-módulo de dimensão finita, então A^*tem uma estrutura de R-coálgebra.*

Demonstração. Como A é um R-módulo de dimensão finita, pela Observação **??**, a aplicação

$$\lambda : A^* \otimes A^* \longrightarrow (A \otimes A)^*$$

é um isomorfismo de R-módulos, portanto, existe λ^{-1}. Define-se a seguinte comultiplicação e counidade para A^*:

$$\begin{aligned} \Delta : A^* &\longrightarrow A^* \otimes A^* \\ f &\longmapsto (\lambda^{-1} \circ m^*)(f) = \sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon : A^* &\longrightarrow R^* \cong R \\ f &\longmapsto \mu^*(f), \end{aligned}$$

tal que $f(xy) = \sum_{(f)} f_1(x) f_2(y)$, para todo $x, y \in A$. Será provado que (A^*, Δ, ϵ) satisfaz as condições (**??**) e (**??**) da definição de coálgebra.

- **Coassociatividade:** Sejam f em A^* e x, y, z em A.

$$\begin{aligned} \left((\Delta \otimes id_{V^*}) \circ \Delta \right)(f)(x \otimes y \otimes z) &= (\Delta \otimes id_{V^*}) \left(\sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)} \right) (x \otimes y \otimes z) \\ &= \sum_{(f)} \left(\Delta\left(f_{(1)}\right) \otimes id_{V^*}\left(f_{(2)}\right) \right) (x \otimes y \otimes z) \\ &= \sum_{(f)} \left(\sum_{(f_{(1)})} \left(f_{(11)} \otimes f_{(12)} \right) \otimes f_{(2)} \right) (x \otimes y \otimes z) \\ &= \sum_{(f)(f_{(1)})} f_{(11)}(x) \otimes f_{(12)}(y) \otimes f_{(2)}(z). \end{aligned}$$

De forma análoga, tem-se que

$$((id_{V^*}\otimes\Delta)\circ\Delta)(f)(x\otimes y\otimes z)=\sum_{(f)(f_{(2)}))} f_{(1)}(x)\otimes f_{(21)}(y)\otimes f_{(22)}(z).$$

Aplicando o isomorfismo $\theta : A^*\otimes A^*\otimes A^*\longrightarrow (A\otimes A\otimes A)^*$ definida por $\theta(f\otimes g\otimes h)(x\otimes y\otimes z)=f(x)g(y)h(z)$, para todo $f,g,h\in A^*$ e $x,y,z\in A$, então,

$$\begin{aligned}\sum_{(f)(f_{(1)})} f_{(11)}(x)\otimes f_{(12)}(y)\otimes f_{(2)}(z) &= \sum_{(f)(f_{(1)})} f_{(11)}(x)f_{(12)}(y)f_{(2)}(z)\\ &=\sum_{(f)} f_{(1)}(xy)f_{(2)}(z)\\ &= f(xyz)\\ &=\sum_{(f)} f_{(1)}(x)f_{(2)}(yz)\\ &=\sum_{(f)(f_{(2)})} f_{(1)}(x)f_{(21)}(y)f_{(22)}(z)\\ &=\sum_{(f)(f_{(2)})} f_{(1)}(x)\otimes f_{(21)}(y)\otimes f_{(22)}(z).\end{aligned}$$

Portanto

$$(\Delta\otimes id_{A^*})\circ\Delta=(id_{A^*}\otimes\Delta)\circ\Delta.$$

(ii) **Counidade:** Sejam f em A^* e x, y em A.

$$\begin{aligned}\left[(\epsilon\otimes id_{A^*})\circ\Delta\right](f)(x\otimes y) &= (\epsilon\otimes id_{A^*})\left(\sum_{(f)} f_{(1)}\otimes f_{(2)}\right)(x\otimes y)\\ &=\sum_{(f)}\left[\epsilon\left(f_{(1)}\right)\otimes id_{A^*}\left(f_{(2)}\right)\right](x\otimes y)\\ &=\sum_{(f)}\left[\mu^*\left(f_{(1)}\right)\otimes f_{(2)}\right](x\otimes y)\\ &=\sum_{(f)} f_{(1)}(\mu(x))\otimes f_{(2)}(y)\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\left[(id_{A^*}\otimes\epsilon)\circ\Delta\right](f)(x\otimes y)=\sum_{(f)} f_{(1)}(x)\otimes f_{(2)}(\mu(y)),$$

aplicando o isomorfismo $\lambda A^*\otimes A^*\longrightarrow (A\otimes A)^*$, definido por $\lambda(f\otimes g)(x\otimes y)=f(x)g(y)$, para todo f, g em A^* e x, y em A, então, tem que

$$\sum_{(f)} f_{(1)}(\mu(x))\otimes f_2(y)=\sum_{(f)} f_{(1)}(\mu(x))f_{(2)}(y)=f(\mu(x)y)$$

$$\sum_{(f)} f_{(1)}(x) \otimes f_{(2)}(\mu(y)) = \sum_{(f)} f_{(1)}(x) f_{(2)}(\mu(y)) = f(x\mu(y)).$$

Como A é uma R-álgebra, pela comutatividade do Diagrama (**??**), $\mu(x)y = x\mu(y)$, e portanto:

$$(\epsilon \otimes id_{A^*}) \circ \Delta = (id_{A^*} \otimes \epsilon) \circ \Delta.$$

□

A seguir será definido o conceito de coideal e apresentado o resultado que permite construir a estrutura quociente do coálgebra.

Definição 2.2.8. *Seja (C, Δ, ϵ) é uma R-coálgebra. O subespaço $I \subset C$ é chamado coideal de C se:*

$$\Delta(I) \subset I \otimes C + C \otimes I \quad e \quad \epsilon(I) = 0$$

Observação 2.2.9. *Seja (C, Δ, ϵ) uma R-coálgebra. Se I é um coideal de C, então Δ induz um homomorfismo $\overline{\Delta}$ de C/I para*

$$C \otimes C/(I \otimes C + C \otimes I) = C/I \otimes C/I.$$

Similarmente, a counidade ϵ induz um homomorfismo $\overline{\epsilon} : C/I \to R$. Logo $(C/I, \overline{\Delta}, \overline{\epsilon})$ é uma R-coálgebra é chamada R-coálgebra quociente.

2.3 Biálgebras

Nas seções anteriores foram estudados os R-módulos que possuem estrutura de álgebra associativa com unidade e de Coálgebra. Nesta seção serão estudados os R-módulos que possuem ambas as estruturas, denominados Biálgebras, que, além de possuírem estrutura de Álgebra e Coálgebra simultaneamente, estes satisfazem uma condição de compatibilidade entre eles. Seu estudo é a etapa anterior ao estudo das Álgebras de Hopf.

Lema 2.3.1. *Se (V, μ, η) é uma R-Álgebra e (V, Δ, ϵ) é uma R-Coálgebra, então as seguintes são equivalentes:*

(i) m e μ são morfismos de R-Coálgebras.

(ii) Δ e ϵ são morfismos de R-Álgebras.

Demonstração. Sejam m e μ morfismos de R-coálgebras. Pelo Exemplo **??** item *4.* tem que $V \otimes V$ é uma R-Coálgebra, onde a comultiplicação e counidades são definidas como $\Delta_{V\otimes V} = (id_V \otimes \tau_{V,V} \otimes id_V) \circ (\Delta \otimes \Delta)$ e $\epsilon_{V\otimes V} = m_k \circ (\epsilon \otimes \epsilon)$, respectivamente. Como m e μ são morfismos de coálgebras, pela Definição **??**, tem-se

$$(m \otimes m) \circ \underbrace{[(id_V \otimes \tau_{V,V} \otimes id_V) \circ (\Delta \otimes \Delta)]}_{\Delta_{V\otimes V}} = \Delta \circ m; \tag{2.10}$$

$$\underbrace{m_k \circ (\epsilon \otimes \epsilon)}_{\epsilon_{V\otimes V}} = \epsilon \circ m. \tag{2.11}$$

De forma análoga, pelo Exemplo **??** item *1.* tem-se que o anel R é uma R-coálgebra com comultiplicação e counidade Δ_R e ϵ_R respectivamente. Logo

$$(\mu \otimes \mu) \circ \Delta_k = \Delta \circ \mu, \tag{2.12}$$

$$\epsilon_k = id_k = \epsilon \circ \mu. \tag{2.13}$$

Note que de (**??**) e (**??**) tem-se que:

$$\begin{aligned} \Delta \circ m &= (m \otimes m) \circ [(id_V \otimes \tau_{V,V} \otimes id_V) \circ (\Delta \otimes \Delta)] \\ &= \underbrace{[(m \otimes m) \circ (id_V \otimes \tau_{V,V} \otimes id_V)]}_{m_{V \otimes V}} \circ (\Delta \otimes \Delta) \end{aligned}$$

$$\Delta \circ \mu = \underbrace{(\mu \otimes \mu) \circ \Delta_k}_{\mu_{V \otimes V}}$$

onde $m_{V\otimes V}$ e $\mu_{V\otimes V}$ é a multiplicação e unidade respetivamente da R-Álgebra $V \otimes V$, apresentada no Exemplo **??** item *3.* Pela Definição **??**, Δ é um morfismo de R-Álgebras. Alem disso, de (**??**) e (**??**) tem que:

$$\begin{aligned} \epsilon \circ m &= m_R \circ (\epsilon \otimes \epsilon) \\ \epsilon \circ \mu &= id_R = \mu_R \end{aligned}$$

com m_R e μ_R a multiplicação e unidade de R como R-Álgebra (Exemplo **??** item *1.*). Portanto ϵ é um morfismo de R-álgebras. O reciproco é provado de forma semelhante. □

Definição 2.3.2. *Seja R um anel comutativo com unidade. Uma R-Biálgebra é uma quíntupla $(V, m, \mu, \Delta, \epsilon)$, onde:*

- *(V, m, μ) é uma R-álgebra.*
- *(V, Δ, ϵ) é uma R-coálgebra,*

satisfazendo uma das duas condições equivalentes do Lema **??**.

Observação 2.3.3. *Em geral, quando resultados forem enunciados para biálgebras, será utilizada a condição de compatibilidade de que Δ, ϵ sejam morfismos de R-álgebras, a menos que seja especificado o contrário.*

A seguir, será definido os morfismos entre R-módulos.

Definição 2.3.4. *Sejam $(V, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ e $(V', \mu', \eta', \Delta', \epsilon')$ duas R-biálgebras. Uma aplicação $f : V \longrightarrow V'$ é um morfismo de R-biálgebras se é um morfismos de R-Álgebras e de R-Coálgebras.*

Exemplo 2.3.5.

1. *Se V é um R-módulo de dimensão finita dotado de uma estrutura de R-biálgebra, então V^* também é uma R-biálgebra como consequência das Proposições* **??** *e* **??**.
2. *Seja (X, μ) um monoide, ou seja, é um par onde:*
    - *X é um conjunto.*

- $m : X \otimes X \longrightarrow X$ *é uma operação interna, associativa e com elemento neutro denotado por* e.

O R-módulo $R[X]$ *tem estrutura de R-coálgebra com a multiplicação e counidades definidas no Exemplo* **??** *item 2. Além disso, se consideramos em* $[X]$ *a multiplicação* $m_{R[X]}$ *obtida estendendo* m *por linearidade em todo* $R[X]$ *e a unidade dada por:*

$$\begin{aligned} \mu_{R[X]} : R &\longrightarrow R[X] \\ 1_R &\longmapsto e, \end{aligned}$$

então $(R[X], m_{R[X]}, \mu_{R[X]}, \Delta_{R[X]}, \epsilon_{R[X]})$ *é uma R-biálgebra.*

A seguir, é introduzido o conceito de convolução, que permite fornecer de estrutura de monoide a $Hom(C, A)$, sendo A uma R-Álgebra e C uma R-Coálgebra.

Definição 2.3.6. *Sejam* (A, m, μ) *uma R-Álgebra,* (C, Δ, ϵ) *uma R-Coálgebra e* f, g *em* $Hom(C, A)$. *A convolução de* f *e* g *é dada pela seguinte composição:*

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A.$$

Ou seja, é uma aplicação:

$$\begin{aligned} * : Hom(C, A) \otimes Hom(C, A) &\longrightarrow Hom(C, A) \\ f \otimes g \qquad &\longmapsto \quad f * g \quad := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta. \end{aligned}$$

A convolução é denotada por $f * g$.

Observação 2.3.7. *Tendo em conta a notação de Sweedler, dada em* (**??**), *temos que para todo* c *em* C:

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(c) = (m \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(c) &= (m \circ (f \otimes g)) \left(\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= m \left(\sum_{(w)} f(c_{(1)}) \otimes g(c_{(2)}) \right) = \sum_{(c)} f(c_{(1)}) g(c_{(2)}). \end{aligned}$$

Proposição 2.3.8. *Se* (A, m, μ) *é uma R-Álgebra e* (C, Δ, ϵ) *é uma R-Coálgebra, então* $(Hom(C, A), *)$ *é um monoide com elemento neutro* $\mu \circ \epsilon$.

Demonstração. Vejamos primeiro que a operação interna $*$ é associativa, ou seja, que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} Hom(C,A) \otimes Hom(C,A) \otimes Hom(C,A) \arrow[r, "* \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes *"'] & Hom(C,A) \otimes Hom(C,A) \arrow[d, "*"] \\ Hom(C,A) \otimes Hom(C,A) \arrow[r, "*"'] & Hom(C,A) \end{tikzcd}$$

Note que, para todo f, g, h em $Hom(C, A)$ e c em C, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
(* \circ (* \otimes id))(f \otimes g \otimes h)(c) = ((f * g) * h)(c) &= \sum_{(c)} (f * g)\left(c_{(1)}\right) h\left(c_{(2)}\right) \\
&= \sum_{(c)} \sum_{\left(c_{(1)}\right)} f\left(c_{(11)}\right) g\left(c_{(12)}\right) h\left(c_{(2)}\right) = \sum_{(c)} f\left(c_{(1)}\right) g\left(c_{(2)}\right) h\left(c_{(3)}\right) \\
&= \sum_{(c)} \sum_{\left(c_{(2)}\right)} f\left(c_{(1)}\right) g\left(c_{(21)}\right) h\left(c_{22}\right) = \sum_{(c)} f\left(c_{(1)}\right) (g * h)\left(c_{(2)}\right) \\
&= (f * (g * h))(c) = (* \circ (id \otimes *))(f \otimes g \otimes h)(c).
\end{aligned}
$$

Por ultimo, veja que $\mu \circ \epsilon$ é o neutro para $*$, ou seja, $f * (\mu \circ \epsilon) = (\mu \circ \epsilon) * f = f$, para todo f em $Hom(C, A)$. Note que para todo c em C, tem que:

$$
\begin{aligned}
(f * (\mu \circ \epsilon))(c) &= \sum_{(c)} f\left(c_{(1)}\right) (\mu \circ \epsilon)\left(c_{(2)}\right) = \sum_{(c)} f\left(c_{(1)}\right) \epsilon\left(c_{(2)}\right) = \sum_{(c)} f\left(c_{(1)} \epsilon\left(c_{(2)}\right)\right) \\
&= f\left(\sum_{(c)} c_1 \epsilon(c_2)\right) = f(w) = f\left(\sum_{(c)} \epsilon\left(c_{(1)}\right) c_{(2)}\right) = \sum_{(c)} f\left(\epsilon\left(c_{(1)}\right) c_{(2)}\right) \\
&= \sum_{(c)} \epsilon\left(c_{(1)}\right) f\left(c_{(2)}\right) = \sum_{(c)} (\mu \circ \epsilon)\left(c_{(1)}\right) f\left(c_{(2)}\right) = ((\mu \circ \epsilon) * f)(c).
\end{aligned}
$$

□

2.4 Álgebras de Hopf

Nesta última seção é estudada os R-módulos que são R-biálgebras com uma estrutura adicional dada por um antimorfismo de k-álgebras, chamado de antípoda. Estas R-biálgebras são camadas de R-Álgebras de Hopf.

Seu nome de Álgebras de Hopf surge em homenagem aos estudos realizados por Heinz Hopf na década de 1940. A definição formal da Álgebra de Hopf só apareça na década de 1960 no trabalho de Pierre Cartier, na teoria dos grupos algébricos com característica positivas, e por outro lado, no trabalho de Armand Borel, em Topologia Algébrica. Começaremos esta seção introduzindo a noção de antípoda para então definir o que seria uma Álgebra de Hopf.

Definição 2.4.1. *Seja $(V, m, \mu, \Delta, \epsilon)$ uma R-biálgebra. A antípoda é um endomorfismo $S \in End(V)$, tal que:*

$$S * id_V = id_V * S = \mu \circ \epsilon, \tag{2.14}$$

ou seja, que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
V \otimes V \arrow[rr, "S \otimes id_V"] & & V \otimes V \arrow[d, "m"] \\
V \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[r, "\epsilon"] & R \arrow[r, "\mu"] & V \\
V \otimes V \arrow[rr, "id_V \otimes S"'] & & V \otimes V \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

Observação 2.4.2. *Usando a notação de Sweedler (**??**), a condição de antípoda (**??**) pode ser escrita, para todo v em V, da seguinte forma:*

$$\sum_{(v)} S\left(v_{(1)}\right) v_{(2)} = (\mu \circ \epsilon)(v) = \sum_{(v)} v_{(1)} S\left(v_{(2)}\right).$$

Lema 2.4.3. *Seja $(V, m, \mu, \Delta, \epsilon)$ uma R-Álgebra. No caso que exista uma antípoda $S \in End(V)$, este é único.*

Demonstração. Suponha que existem S_1, S_2 em $End(V)$, tal que:

$$S_1 * id_V = id_V * S_1 = \mu \circ \epsilon$$
$$S_2 * id_V = id_V * S_2 = \mu \circ \epsilon.$$

Então

$$S_1 = S_1 * (\mu \circ \epsilon) = S_1 * (id_V * S_2) = (S_1 * id_V) * S_2 = (\mu \circ \epsilon) * S_2 = S_2$$

□

Exemplo 2.4.4. *Considere o anel de polinômios $H = R[x]$ do Exemplo **??** item 2. H tem estrutura de R-biálgebra dada por $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ e $\epsilon(x) = 0$. Se $S : H \to H$ é uma antípoda de H, então*

$$0 = \epsilon(X) = (id_H \otimes S)\Delta(x) = (id_H \otimes S)(1 \otimes x + x \otimes 1) = S(x) + xS(1).$$

Como $S(1) = 1$, segue que $S(x) = -x$. Então a aplicação linear $S : H \to H$ definida por $S(1) = 1$ e $S(x) = -x$ é a antípoda de H.

Não toda Álgebra possui uma antípoda, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2.4.5. *Seja $H = R[x]$ o anel de polinômios com estrutura usual de R-Álgebra e com estrutura de R-Coálgebra dada por $\Delta(x) = x \otimes x$ e $\epsilon(x) = 1$, (Exemplo **??**, item 3.1). Como H é uma R-biálgebra, pode-se afirmar que está biálgebra não possui nenhuma antípoda. De fato, pois se $S : H \to H$ é um antípoda, então*

$$1 = \epsilon(x) = (id_H \otimes S)\Delta(x) = xS(x),$$

o que é impossível, pois o elemento x não possui inverso no anel de polinômios.

A seguir será definido as Álgebras de Hopf e os morfismos entre as mesmas.

Definição 2.4.6. *Uma R-Álgebra de Hopf é uma quíntupla $(V, m, \mu, \Delta, \epsilon, S)$ onde:*

- $(V, m, \mu, \Delta, \epsilon)$ *é uma R-biálgebra,*
- $S \in End(V)$ *é uma antípoda.*

Definição 2.4.7. *Sejam $(V_1, m_1, \mu_1, \Delta_1, \epsilon_1, S_1)$ e $(V_2, m_2, \mu_2, \Delta_2, \epsilon_2, S_2)$ duas R-Álgebra de Hopf. Um morfismo de R-Álgebras de Hopf $f : V_1 \to V_2$ é um morfismo de R-biálgebras que satisfaz a seguinte propriedade:*

$$S_2 \circ f = f \circ S_1.$$

Lema 2.4.8. *Se $(V, m, \mu, \Delta, \epsilon, S)$ é uma R-Álgebra de Hopf de dimensão finita, então V^* tem estrutura de R-Álgebra de Hopf com antípoda S^*.*

Demonstração. No Exemplo **??** item 1., mostra que se $(V, m, \mu, \Delta, \epsilon)$ é uma R-biálgebra de dimensão finita, então V^* tem estrutura de R-biálgebra. Note que S^* satisfaz a propriedade da definição de antípoda (**??**). Seja f em V^* e x em V, então

$$\begin{aligned}
(S^* * id_{V^*})(f)(x) &= \left(\sum_{(f)} S^* \left(f_{(1)} \right) f_{(2)} \right)(x) = \sum_{(f)} \sum_{(x)} f_{(1)} \left(S \left(x_{(1)} \right) \right) f_{(2)} \left(x_{(2)} \right) \\
&= f \left(\sum_{(x)} S \left(x_{(1)} \right) x_{(2)} \right) = f \left(\sum_{(x)} x_{(1)} S \left(x_{(2)} \right) \right) \\
&= \sum_{(f)} \sum_{(x)} f_{(1)} \left(x_{(1)} \right) f_{(2)} \left(S \left(x_{(2)} \right) \right) = \left(\sum_{(f)} f_{(1)} S^* \left(f_{(2)} \right) \right)(x) \\
&= (id_{V^*} * S^*)(f)(x).
\end{aligned}$$

□

O seguinte teorema apresenta condições que satisfaz a antípoda S de uma R-Álgebra de Hopf.

Teorema 2.4.9 ([**?**, Teorema 2.1.4])**.** *Seja $(V, m, \mu, \Delta, \epsilon, S)$ uma R-Álgebra de Hopf.*

(i) $S(v_1 v_2) = S(v_2) S(v_1)$, *para todo* $v_1, v_2 \in V$.

(ii) $S(1) = 1$; *especificamente,* $S \circ \mu = \mu$.

(iii) $\epsilon \circ S = \epsilon$.

(iv) $\tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S$; *em outras palavras, para todo* $v \in V$, *tem-se que*

$$\Delta \circ S(v) = \sum_{(v)} S \left(v_{(2)} \right) \otimes S \left(v_{(1)} \right).$$

(v) Se V é comutativo ou cocomutativo, então $S^2 = 1$.

Exemplo 2.4.10 (Álgebra envolvente universal)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{k}$. Sua Álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ é uma Álgebra de Hopf.*

Demonstração. Primeiro serão definidas as aplicações da estrutura m, μ, Δ, ϵ e S, tais que $(U(\mathfrak{g}), m, \mu, \Delta, \epsilon, S)$ é uma Álgebra de Hopf.

Lembre que $U(\mathfrak{g})$ é definida como a Álgebra quociente da Álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ do espaço vetorial $\mathfrak{g}$ pelo ideal bilateral I gerado pelos elementos $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, onde x e y são elementos de $\mathfrak{g}$. As aplicações m e μ são implícitas na definição de Álgebra associativa. Agora serão definidos Δ e ϵ.

Para toda Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tem-se que $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie, com o colchete definido por $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2])$ para todo x_1, x_2, y_1, y_2 em $\mathfrak{g}$. As inclusões

$$i, j : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g},$$

onde $i(x) = (x, 0)$ e $j(y) = (0, y)$, para todo x, y em $\mathfrak{g}$, são homomorfismos de Álgebras de Lie. Como a álgebra $U(\mathfrak{g})$ é também uma Álgebra de Lie, então os seguintes homomorfismos de Álgebras são induzidos

$$U(i), U(j) : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}),$$

que podem ser combinados em um único homomorfismo de Álgebras ψ, onde

$$\psi : U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}).$$

O homomorfismo ψ é um isomorfismo de Álgebras. Este isomorfismo e seu inverso são definidos da seguinte forma

$$\psi(a \otimes b) = (a \otimes 0)(0 \otimes b), \quad e \quad \psi^{-1}(a, b) = a \otimes 1 + 1 \otimes b,$$

para todo a, b em $U(\mathfrak{g})$. Alem disso, para toda Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, temos a aplicação diagonal

$$\delta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g},$$

tal que $\delta(x) := (x, x)$, para todo x em $\mathfrak{g}$. Está aplicação é um homomorfismo de Álgebras de Lie e induz o seguinte homomorfismo de Álgebras

$$\Delta : U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{U(\delta)} U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}) \xrightarrow{\psi^{-1}} U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}).$$

Logo o homomorfismo Δ é definido por

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a,$$

para todo a em $U(\mathfrak{g})$. De fato, para todo a, b em $U(\mathfrak{g})$, tem-se que

$$\begin{aligned}
[\Delta(a), \Delta(b)] &= \Delta(a)\Delta(b) - \Delta(b)\Delta(a) \\
&= (a \otimes 1 + 1 \otimes a)(b \otimes 1 + 1 \otimes b) - (b \otimes 1 + 1 \otimes b)(a \otimes 1 + 1 \otimes a) \\
&= (ab - ba) \otimes 1 + 1 \otimes (ab - ba) \\
&= [a, b] \otimes 1 + 1 \otimes [a, b] \\
&= \Delta([a, b]).
\end{aligned}$$

Seja $\epsilon : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{k}$, definido por $\epsilon(a) = 0$, para todo a em $U(\mathfrak{g})$. Vejamos que Δ e ϵ satisfazem a Propriedades (**??**) e (**??**) respetivamente, da definição de Coálgebra.

Como Δ e ϵ são homomorfismos de Álgebras, tem-se que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ e $\epsilon(1) = 1_{\Bbbk}$. Seja a em $U(\mathfrak{g})$. Então,

$$\begin{aligned}((\Delta \otimes id) \circ \Delta)(a) &= (\Delta \otimes id)(\Delta(a)) = (\Delta \otimes id)(a \otimes 1 + 1 \otimes a)\\ &= \Delta(a) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes a = a \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes a\\ &= a \otimes \Delta(1) + 1 \otimes (a \otimes 1 + 1 \otimes a) = a \otimes \Delta(1) + 1 \otimes (\Delta(a))\\ &= (id \otimes \Delta)(a \otimes 1 + 1 \otimes a) = (id \otimes \Delta)(\Delta(a))\\ &= ((id \otimes \Delta) \circ \Delta)(a).\end{aligned}$$

Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}((\epsilon \otimes id) \circ \Delta)(a) &= (\epsilon \otimes id)(\Delta(a)) = (\epsilon \otimes id)(a \otimes 1 + 1 \otimes a)\\ &= \epsilon(a) \otimes 1 + \epsilon(1) \otimes a = 0 \otimes 1 + 1_{\Bbbk} \otimes a\\ &= 1_{\Bbbk} \otimes a.\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$((id \otimes \epsilon) \circ \Delta)(a) = a \otimes 1_{\Bbbk}.$$

Portanto $(U(\mathfrak{g}), m, \mu, \Delta, \epsilon)$ é uma $\Bbbk$-Álgebra. Agora, seja $S \in End(U(\mathfrak{g}))$, tal que

$$S(a) = -a,$$

para todo a em $U(\mathfrak{g})$. Será provado que S satisfaz a definição de antípoda, ou seja, que satisfaz (**??**). Note que S é um homomorfismo de Álgebras, logo $S(1) = 1$. Seja a em $U(\mathfrak{g})$, então

$$\begin{aligned}(S * id)(a) &= (m \circ (S \otimes id) \circ \Delta)(a) = (m \circ (S \otimes id))(\Delta(a))\\ &= (m \circ (S \otimes id))(a \otimes 1 + 1 \otimes a) = m(S(a) \otimes 1 + S(1) \otimes a)\\ &= m(-a \otimes 1 + 1 \otimes a) = 0 = \mu(0) = \mu(\epsilon(a))\\ &= (\mu \circ \epsilon)(a).\end{aligned}$$

De maneira análoga, tem-se que

$$(id * S)(a) = (\mu \circ \epsilon)(a).$$

Logo S é a antípoda. Portanto $(U(\mathfrak{g}), m, \mu, \Delta, \epsilon, S)$ é uma $\Bbbk$-Álgebra de Hopf.

□

Agora será introduzido o conceito de ações de R-Álgebras de Hopf, para isso será definido o A-módulo, onde A é uma R-Álgebra.

Definição 2.4.11. *Seja A uma R-Álgebra. O R-módulo V é chamado A-módulo à esquerda, se existe uma aplicação de R-módulos $\lambda_l : A \otimes V \to V$, tal que os seguintes diagramas comutem:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes V \arrow[r, "m \otimes id_V"] \arrow[d, "id_A \otimes \lambda_l"'] & A \otimes V \arrow[d, "\lambda_l"] \\ A \otimes V \arrow[r, "\lambda_l"'] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \otimes V \arrow[r, "\mu \otimes id_V"] \arrow[d, "\varphi_l"'] & A \otimes V \arrow[d, "\lambda"] \\ V \arrow[r, "id_V"'] & V \end{tikzcd}$$

A comutatividade dos diagramas acima pode ser escrita respetivamente como segue:

$$\lambda_l \circ (m \otimes id_V) = \lambda_l \circ (id_A \otimes \lambda_l) \qquad e \qquad \lambda_l \circ (\mu \otimes id_V) = id_V \circ \varphi_l.$$

Da mesma forma, o R-módulo V é dito A-módulo à direita se existe uma aplicação de R-módulos $\lambda_r : V \otimes A \to V$, tal que os seguintes diagramas comutem:

$$\begin{tikzcd} V \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_V \otimes m"] \arrow[d, "\lambda_r \otimes id_A"'] & V \otimes A \arrow[d, "\lambda_r"] \\ V \otimes A \arrow[r, "\lambda_r"'] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \otimes R \arrow[r, "id_V \otimes \mu"] \arrow[d, "\varphi_r"'] & V \otimes A \arrow[d, "\lambda_r"] \\ V \arrow[r, "id_V"'] & V \end{tikzcd}$$

Da mesma forma, os diagramas podem ser escritos da seguente maneira:

$$\lambda_r \circ (id_V \otimes m) = \lambda_r \circ (\lambda_r \otimes id_A) \qquad e \qquad \lambda_r \circ (id_V \otimes \mu) = id_V \circ \varphi_r,$$

onde $\varphi_l : R \otimes V \to V$ e $\varphi_r : V \otimes R \to V$ são os isomorfismos canônicos dados por $\varphi_l(1_R \otimes v) = 1_R v$ e $\varphi_r(v \otimes 1_R) = v1_R$, para todo $v \in V$.

No caso que V seja uma R-Álgebra ou uma R-biálgebra, a estrutura dos módulos respeita a estrutura adicional de V.

Definição 2.4.12. *Sejam A uma R-Álgebra de Hopf e V uma R-Álgebra. Dizemos que A age à esquerda de V, ou que V é um A-módulo Álgebra à esquerda, se existir uma aplicação R-linear $\cdot : A \otimes V \to V$, definida por $\cdot(a \otimes v) = a \cdot v$, para todo a em A e v em V, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *V é um A-módulo à esquerda via $\cdot$.*

(ii) *$a \cdot (vw) = \sum_{(a)}(a_{(1)} \cdot v)(a_{(2)} \cdot w)$, para todo a em A e v, w em V.*

(iii) *$a \cdot 1_V = \epsilon_A(a)1_V$, para todo a em A.*

De maneira análoga podemos definir um A-módulo Álgebra à direita.

Exemplo 2.4.13.

1. *Sejam A uma Álgebra de Hopf e V uma R-Álgebra qualquer. Então A age à esquerda sobre V via a aplicação $\cdot : A \otimes V \to V$, definida por $a \cdot v := \epsilon(a)v$, para todo a em A e v em V. Esta ação é chamada de ação trivial.*

2. *Toda álgebra de Hopf A com antípoda S age sobre si mesma via a ação adjunta à esquerda, definida por*

$$\begin{aligned} ad : A \otimes A \longrightarrow & A \\ x \otimes y \longrightarrow & ad(x \otimes y) := \sum_{(x)} x_{(1)} y S(x_{(2)}), \end{aligned}$$

onde $\Delta(x) := \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, para todo x, y em A. A seguir será provado que a aplicação ad satisfaz as condições (i),(ii) e (iii) da Definição **??**. *De fato, para todo x, y, z em A e r em R, tem-se que* *(i) A é um A-módulo à esquerda via ad.*

$$\begin{aligned}
ad \circ (m \otimes id_A)(x \otimes y \otimes z) &= ad(m(x \otimes y) \otimes id_A(z)) \\
&= ad(xy \otimes z) \\
&= \sum_{(xy)} (xy)_{(1)} z S\left((xy)_{(2)}\right) \\
&= \sum_{(x)} \sum_{(y)} x_{(1)} y_{(1)} z S\left(x_{(2)} y_{(2)}\right) \\
&= \sum_{(x)} x_{(1)} \left(\sum_{(y)} y_{(1)} z S\left(y_{(2)}\right) \right) S\left(x_{(2)}\right) \\
&= ad\left(x \otimes \sum_{(y)} y_{(1)} z S\left(y_{(2)}\right) \right) \\
&= ad(id_A(x) \otimes ad(y \otimes z)) \\
&= ad \circ (id_A \otimes ad)(x \otimes y \otimes z).
\end{aligned}$$

Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}
ad \circ (\mu \otimes id_A)(r \otimes x) &= ad(\mu(c) \otimes id_A(x)) \\
&= ad(r1_A \otimes x) \\
&= \sum_{(r)} r_{(1)} x S\left(r_{(2)}\right) \\
&= \sum_{(r)} r_{(1)} r_{(2)} x \\
&= rx = id_A(\varphi_l(r \otimes x)) \\
&= id_A \circ \varphi_l(r \otimes x).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
ad(x \otimes (yz)) &= \sum_{(x)} x_{(1)} (yz) S\left(x_{(2)}\right) \\
&= \sum_{(x)} x_{(1)} y z \sum_{\left(x_{(2)}\right)} \epsilon\left(S\left(x_{(21)}\right)\right) S\left(x_{(22)}\right) \\
&= \sum_{(x)} x_{(1)} y \sum_{\left(x_{(2)}\right)} \epsilon\left(x_{(21)}\right) z S\left(x_{(22)}\right) \\
&= \sum_{(x)} x_{(1)} y \sum_{\left(x_{(2)}\right)} \sum_{\left(x_{(21)}\right)} S\left(x_{(211)}\right) x_{(212)} z S\left(x_{(22)}\right) \\
&= \sum_{(x)} \sum_{\left(x_{(1)}\right)} x_{(11)} y S\left(x_{(12)}\right) \sum_{\left(x_{(2)}\right)} x_{(21)} z S\left(x_{(22)}\right) \\
&= \sum_{(x)} (ad(x_{(1)} \otimes y))(ad(x_{(2)} \otimes z)).
\end{aligned}$$

(iii)

$$ad(x \otimes 1_A) = \sum_{(x)} x_{(1)} 1_A S\left(x_{(2)}\right) = \sum_{(x)} x_{(1)} S\left(x_{(2)}\right) 1_A = \epsilon(x) 1_A.$$

Portanto uma R-Álgebra de Hopf A com antípoda S é um A-módulo à esquerda via a aplicação linear ad.

Note que dada uma R-Álgebra de Hopf $(A, m, \mu, \Delta, \epsilon, S)$ e considerando a ação adjunta do exemplo anterior $ad : A \otimes A \to A$ definida por $ad(x \otimes y) = \sum_{(x)} x_{(1)} y S\left(x_{(2)}\right)$ para todo x, y em A, tem-se que

$$ad = m \circ (m \otimes id_A) \circ (id_A \otimes id_A \otimes S) \circ (id_A \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes id_A). \tag{2.15}$$

De fato, se x, y em A qualquer, $f = m \circ (m \otimes id_A) \circ (id_A \otimes id_A \otimes S)$ e $g = (id_A \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes id_A)$, então

$$\begin{aligned}
f \circ g(x \otimes y) &= f \circ (id_A \otimes \tau) \circ (\Delta \otimes id_A)(x \otimes y) \\
&= f \circ (id_A \otimes \tau)(\Delta(x) \otimes id_A(y)) \\
&= f \circ (id_A \otimes \tau) \left(\sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes y \right) \\
&= f \left(\sum_{(x)} id_A\left(x_{(1)}\right) \otimes \tau\left(x_{(2)} \otimes y\right) \right) \\
&= m \circ (m \otimes id_A) \circ (id_A \otimes id_A \otimes S) \left(\sum_{(x)} x_{(1)} \otimes y \otimes x_{(2)} \right) \\
&= m \circ (m \otimes id_A) \left(\sum_{(x)} id_A\left(x_{(1)}\right) \otimes id_A(y) \otimes S\left(x_{(2)}\right) \right) \\
&= m \left(\sum_{(x)} m\left(x_{(1)} \otimes y\right) \otimes id_A\left(S\left(x_{(2)}\right)\right) \right) \\
&= \sum_{(x)} m\left(x_{(1)} y \otimes S\left(x_{(2)}\right)\right) \\
&= \sum_{(x)} x_{(1)} y S\left(x_{(2)}\right) \\
&= ad(x \otimes y).
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Grupos Quânticos

Neste capitulo será definido o grupo quântico de uma Álgebra de Lie simples complexa, também chamados como Álgebras de Drinfeld-Jimbo, as quais correspondem à uma deformação em um parâmetro da Álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ da Álgebra de Lie simples complexa $\mathfrak{g}$ de dimensão finita. Para introduzir o conceito de grupo quântico, será considerado o caso da Álgebra de Lie simples $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e posteriormente será generalizado para toda Álgebra de Lie simples complexa. Alem disso, será construido as Álgebras de Lie quânticas $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}$ a partir dos grupos quânticos.

3.1 Quantização da Álgebra Envolvente Universal para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Considere a Álgebra complexa $\mathbb{C}[\![h]\!]$ de séries formais complexas em uma indeterminada h. Qualquer elemento de $\mathbb{C}[\![h]\!]$ é da forma

$$f = \sum_{n\geq 0} a_n h^n$$

onde $(a_0, a_1, \dots)$ é a família de números complexos indexados por o conjunto dos inteiros não negativos. Se $f' = \sum_{n\geq 0} a'_n h^n$ é outra série formal de $\mathbb{C}[\![h]\!]$, temos que a soma $f + f'$ e o produto ff' em $\mathbb{C}[\![h]\!]$, estão definidas por:

$$f + f' = \sum_{n\geq 0} (a_n + a'_n) h^n \quad \text{e} \quad ff' = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{p+r=n} a_p a'_r \right) h^n. \tag{3.1}$$

Qualquer polinômio em h pode ser considerado como um elemento de $\mathbb{C}[\![h]\!]$. Em particular, o polinômio constante 1 é um elemento de $\mathbb{C}[\![h]\!]$ onde atua como uma unidade para o produto. Logo, com a soma e o produto definidos em (**??**), tem-se que $\mathbb{C}[\![h]\!]$ é um anel comutativo com unidade. O seguinte lema é uma caracterização dos elementos invertíveis em $\mathbb{C}[\![h]\!]$.

Lema 3.1.1 ([**?**, Lema XVI.1.1.]). *A serie formal $f = \sum_{n\geq 0} a_n h^n$ é invertível se, e somente se, $a_0 \neq 0$ em $\mathbb{C}$.*

Em particular, $\mathbb{C}[\![h]\!]$ não é um corpo. Não é possível dividir por um elemento de $\mathbb{C}[\![h]\!]$ a menos que a série de potências contenha um termo não de ordem h^0.

A continuação será apresentado o conceito de q-número, o qual permitirá definir as Álgebra de Drinfeld-Jimbo. Para qualquer número complexo não-zero q, o q-número $[\![n]\!]_q$, com $n \in \mathbb{C}$, é definido da seguinte forma:

$$[\![n]\!]_q = [\![n]\!] := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}},$$

Note que , $\lim_{q\to 1}[\![n]\!]_q \to n$. Pois

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 1}[\![n]\!]_q &= \lim_{q\to 1}\frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = \lim_{q\to 1}\frac{q^{-n}(q^{2n}-1)}{q(q^2-1)} \\
&= \lim_{q\to 1}\frac{q^{-n+1}(q^n-1)(q^n+1)}{(q-1)(q+1)} \\
&= \lim_{q\to 1}\frac{q^{-n+1}(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots q+1)(q^n+1)}{(q-1)(q+1)} \\
&== \lim_{q\to 1}\frac{q^{-n+1}(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots q+1)(q^n+1)}{(q+1)} \\
&= \frac{2n}{2} = n
\end{aligned}$$

Se r é um inteiro positivo, então defina-se o q-fatorial $[\![r]\!]_q!$ da seguinte forma:

$$[\![r]\!]_q = [\![1]\!]_q[\![2]\!]_q \cdots [\![r]\!]_q, \qquad [\![0]\!]_q! = 1.$$

Será definido a seguir, a Álgebra envolvente universal quântica de Drinfel-Jimbo para a Álgebra de Lie simples $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Definição 3.1.2. *Seja $P = \mathbb{C}\langle H, E, F\rangle$ a Álgebra de polinômios não-comutativos com três geradores H, E, F e seja I o ideal bilateral de $P[\![h]\!]$ gerado por:*

$$HE - EH - 2E, \quad HF - FH + 2F \quad e \quad EF - FE - \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}, \tag{3.2}$$

onde $q = e^h$, logo $q^H = e^{hH}$. O grupo quântico $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ é a álgebra quociente $P[\![h]\!]/I$ sobre $\mathbb{C}[\![h]\!]$.

Observação 3.1.3.

(i) O elemento q^H pode-se escrever em termos da função exponencial da seguinte forma:

$$q^H = e^{hH} = \sum_{n\geq 0}\frac{(hH)^n}{n!}.$$

(ii) O elemento $q - q^{-1}$ em $\mathbb{C}[\![h]\!]$ é não invertível em $\mathbb{C}[\![h]\!]$, pois seu termo constante é zero (Lema ??). Mas a terceira expressão da Definição ?? é uma série de potências formais $\sum_n p_n(H)h^n$ com certos polinômios $p_n(H)$ em $\mathbb{C}[H]$, pois

$$\frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}} = \frac{e^{hH} - e^{-hH}}{e^h - e^{-h}} = \frac{sinh(hH)}{sinh(h)} = sinh(hH)csc(h),$$

onde $csc(h)$ e $sinh(hH)$ são séries de Taylor com entradas em h e H. Portanto são elementos em $P[\![h]\!]$.

(iii) A Definição **??** *pode-se simplificar da seguinte forma: A Álgebra envolvente universal quantizada $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ é uma álgebra associativa com unidade sobre $\mathbb{C}[\![h]\!]$ gerada por três geradores H, E, F e as relações:*

$$HE - EH = 2E, \quad HF - FH = -2F \quad e \quad EF - FE = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}} =: [\![H]\!]_q. \tag{3.3}$$

*(iv) A última relação em (**??**) implica que em $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, se perde a estrutura da álgebra de Lie de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Mas, quando $q \to 1$ ou equivalentemente $h \to 0$, temos que*

$$EF - FE = [\![H]\!]_q \longrightarrow H.$$

Teorema 3.1.4. *A Álgebra $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ é uma Álgebra de Hopf em relação à comultiplicação Δ_h, counidade ϵ_h e antípoda S_h definido por:*

$$\Delta_h : U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \otimes_{\mathbb{C}[\![h]\!]} U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})),$$

$$\epsilon_h : U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{C}[[h]], \quad S_h : U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})).$$

tais que:

$$\begin{array}{lll} \Delta_h(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H. & S_h(H) = -H. & \epsilon_h(H) = 0. \\ \Delta_h(E) = E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E. & S_h(E) = -q^{-1}E. & \epsilon_h(E) = 0. \\ \Delta_h(F) = F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F. & S_h(F) = -qF. & \epsilon_h(F) = 0. \end{array}$$

Demonstração. Note que Δ_h se estende a um homomorfismo de Álgebras, pois

$$\Delta_h : U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \otimes_{\mathbb{C}[\![h]\!]} U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})),$$

se estende trivialmente a um homomorfismo $P[\![h]\!] \to P[\![h]\!] \otimes P[\![h]\!]$. Além disso, tem-se que

$$\Delta_h(I) \subset P[\![h]\!] \otimes I + I \otimes P[\![h]\!],$$

pois $\Delta_h(H)$, $\Delta_h(E)$ e $\Delta_h(F)$ estão contidos em $P[\![h]\!] \otimes I + I \otimes P[\![h]\!]$. De fato Δ_h é invariante sobre as relações (**??**), da seguinte forma:

(i)

$$\begin{aligned} \Delta_h(HE - EH) &= \Delta_h(H)\Delta_h(E) - \Delta_h(E)\Delta_h(H) \\ &= (H \otimes 1 + 1 \otimes H)(E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E) - \\ &\quad - (E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E)(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\ &= HE \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes HE - EH \otimes q^{-H/2} - q^{H/2} \otimes EH \\ &= (HE - EH) \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes (HE - EH) \\ &= 2E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes 2E \\ &= 2\Delta_h(E). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\Delta_h(HF - FH) &= \Delta_h(H)\Delta_h(F) - \Delta_h(F)\Delta_h(H) \\
&= (H \otimes 1 + 1 \otimes H)(F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F) - \\
&\quad - (F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F)(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\
&= HF \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes HF - FH \otimes q^{-H/2} - q^{H/2} \otimes FH \\
&= (HF - FH) \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes (HF - FH) \\
&= -2F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes -2F \\
&= -2\Delta_h(F).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\Delta_h(EF - FE) &= \Delta_h(E)\Delta_h(F) - \Delta_h(F)\Delta_h(E) \\
&= (E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E)(F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F) - \\
&\quad - (F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F)(E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E) \\
&= EF \otimes q^{-H} + Eq^{H/2} \otimes q^{-H/2}F + q^{H/2}F \otimes Eq^{-H/2} + q^{H} \otimes EF - \\
&\quad - FE \otimes q^{-H} - Fq^{H/2} \otimes q^{-H/2}E - q^{H/2}E \otimes Fq^{-H/2} - q^{H} \otimes FE.
\end{aligned}$$

veja que, para todo n inteiro positivo, tem-se que

$$E\left(\frac{H}{2}\right)^n = \left(\frac{H}{2} - 1\right)^n E. \tag{3.4}$$

A relação (**??**) será provada por indução sobre n. Se $n = 1$, então

$$E\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{EH}{2} = \frac{HE - 2E}{2} = \frac{(H-2)E}{2} = \left(\frac{H}{2} - 1\right)E.$$

Suponha agora que $E(H/2)^{n-1} = (H/2 - 1)^{n-1}E$. Logo

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{H}{2}\right)^n &= E\left(\frac{H}{2}\right)\left(\frac{H}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{H}{2} - 1\right)E\left(\frac{H}{2}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{H}{2} - 1\right)\left(\frac{H}{2} - 1\right)^{n-1} E = \left(\frac{H}{2} - 1\right)^n E.
\end{aligned}$$

Pela equação (**??**) e fazendo novamente indução sobre as potências de E, tem-se que

$$\begin{aligned}
Eq^{H/2} &= E\sum_{n \geq 0} \frac{h^n (H/2)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n E (H/2)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n (H/2 - 1)^n E}{n!} \\
&= q^{H/2 - 1}E = q^{-1}q^{H/2}E.
\end{aligned}$$

Suponha que $E^{m-1}q^{H/2} = q^{-m+1}q^{H/2}E^{m-1}$, logo

$$\begin{aligned}
E^m q^{H/2} &= EE^{m-1}q^{H/2} = q^{-m+1}Eq^{H/2}E^{m-1} \\
&= q^{-m+1}q^{-1}EE^{m-1} = q^{-m}q^{H/2}E.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

De forma análoga, tem-se que

$$F\left(\frac{H}{2}\right)^n = \left(\frac{H}{2}+1\right)^n F \quad \text{e} \quad F^m q^{H/2} = q^m q^{H/2} F^m. \tag{3.6}$$

Logo, por (**??**) e (**??**),

$$\begin{aligned} Eq^{H/2} \otimes q^{-H/2}F - q^{H/2}E \otimes Fq^{-H/2} &= q^{-1}q^{H/2}E \otimes Fq^{-H/2}q - q^{H/2}E \otimes Fq^{-H/2} \\ &= q^{-1}q(q^{H/2}E \otimes Fq^{-H/2}) - q^{H/2}E \otimes Fq^{-H/2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{H/2}F \otimes Eq^{-H/2} - Fq^{H/2} \otimes q^{-H/2}E &= q^{H/2}F \otimes Eq^{-H/2} - qq^{H/2}F \otimes q^{-1}Eq^{-H/2} \\ &= q^{H/2}F \otimes Eq^{-H/2} - qq^{-1}(q^{H/2}F \otimes Eq^{-H/2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta_h(EF-FE) &= EF \otimes q^{-H} + q^H \otimes EF - FE \otimes q^{-H} - q^H \otimes FE \\ &= (EF-FE) \otimes q^{-H} + q^H \otimes (EF-FE) \\ &= \frac{q^H - q^{-H}}{q-q^{-1}} \otimes q^{-H} + q^H \otimes \frac{q^H - q^{-H}}{q-q^{-1}} \\ &= \frac{(q^H - q^{-H}) \otimes q^{-H} + q^H \otimes (q^H - q^{-H})}{q-q^{-1}} \\ &= \frac{q^H \otimes q^{-H} - q^{-H} \otimes q^{-H} + q^H \otimes q^H - q^H \otimes q^{-H}}{q-q^{-1}} \\ &= \frac{q^H \otimes q^H - q^{-H} \otimes q^{-H}}{q-q^{-1}} \end{aligned}$$

Por ultimo, note que

$$\begin{aligned} \Delta_h(q^H) = \Delta_h(e^{hH}) &= \sum_{n\geq 0} \frac{h^n(\Delta_h(H))^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{h^n}{n!}(H\otimes 1 + 1 \otimes H)^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}^{n} \binom{n}{m} \frac{h^n}{n!}(H^m \otimes H^{n-m}) = \sum_{m\geq 0}\sum_{k\geq 0} \frac{h^{m+k}}{m!k!}(H^m \otimes H^k) \\ &= e^{hH} \otimes e^{hH} = q^H \otimes q^H. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta(EF-FE) &= \frac{\Delta_h(q^H) - \Delta_h(q^{-H})}{q-q^{-1}} \\ &= \Delta_h\left(\frac{q^H - q^{-H}}{q-q^{-1}}\right) \\ &= \Delta_h([\![H]\!]_q). \end{aligned}$$

Por outra parte, ϵ é um homomorfismo de Álgebras bem definido, já que as igualdades nas relações se mantêm após a aplicação:

$$\epsilon_h(HE - EH) = 0 = 2\epsilon(E).$$
$$\epsilon_h(HF - FH) = 0 = -2\epsilon(F).$$
$$\epsilon_h(EF - FE) = 0 = \frac{1-1}{q-q^{-1}} = \frac{\epsilon_h(q^H) - \epsilon(q^{-H})}{q-q^{-1}} = \epsilon_h(\llbracket H \rrbracket_q).$$

A terceira igualdade, segue do fato de que

$$\epsilon(q^H) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \epsilon(H)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n (0)^n}{n!} = 1.$$

Veja agora que $(U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \Delta_h, \epsilon_h)$ é uma biálgebra. Como Δ_h e ϵ_h são morfismos de Álgebras, somente basta provar que ϵ_h é uma counidade e Δ_h é coassociativa verificando nos geradores as seguintes igualdades respectivamente:

$$\begin{aligned} m_h \circ (\epsilon_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h = \ & id_{U_h} = m_h \circ (id_{U_h} \otimes \epsilon_h) \circ \Delta_h \\ (\Delta_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h = & (id_{U_h} \otimes \Delta_h) \circ \Delta_h. \end{aligned}$$

Primeiro será verificado que é satisfeita a condição de counidade para E, F, H.

(i)

$$\begin{aligned} m_h \circ (\epsilon_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h(E) = \ & m_h \circ (\epsilon_h \otimes id_{U_h})(E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E) \\ = \ & m_h(\epsilon_h(E) \otimes id_{U_h}(q^{-H/2}) + \epsilon_h(q^{H/2}) \otimes id_{U_h}(E)) \\ = \ & m_h(0 \otimes q^{-H/2} + 1 \otimes E) = E. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_h \circ (id_{U_h} \otimes \epsilon_h) \circ \Delta_h(E) = \ & m_h \circ (id_{U_h} \otimes \epsilon_h)(E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E) \\ = \ & m_h(id_{U_h}(E) \otimes \epsilon_h(q^{-H/2}) + id_{U_h}(q^{H/2}) \otimes \epsilon_h(E)) \\ = \ & m_h(E \otimes 1 + q^{H/2} \otimes 0) = E. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} m_h \circ (\epsilon_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h(F) = \ & m_h \circ (\epsilon_h \otimes id_{U_h})(F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F) \\ = \ & m_h(\epsilon_h(F) \otimes id_{U_h}(q^{-H/2}) + \epsilon_h(q^{H/2}) \otimes id_{U_h}(F)) \\ = \ & m_h(0 \otimes q^{-H/2} + 1 \otimes F) = F. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_h \circ (id_{U_h} \otimes \epsilon_h) \circ \Delta_h(F) = \ & m_h \circ (id_{U_h} \otimes \epsilon_h)(F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F) \\ = \ & m_h(id_{U_h}(F) \otimes \epsilon_h(q^{-H/2}) + id_{U_h}(q^{H/2}) \otimes \epsilon_h(F)) \\ = \ & m_h(F \otimes 1 + q^{H/2} \otimes 0) = F. \end{aligned}$$

(iii)

$$m_h \circ (\epsilon_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h(H) = \ m_h \circ (\epsilon_h \otimes id_{U_h})(H \otimes 1 + 1 \otimes H)$$

$$
\begin{aligned}
&= m_h(\epsilon_h(H) \otimes id_{U_h}(1) + \epsilon_h(1) \otimes id_{U_h}(H)) \\
&= m_h(0 \otimes 1 + 1 \otimes H) = H.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_h \circ (id_{U_h} \otimes \epsilon_h) \circ \Delta_h(H) &= m_h \circ (id_{U_h} \otimes \epsilon_h)(F \otimes 1 + 1 \otimes H) \\
&= m_h(id_{U_h}(H) \otimes \epsilon_h(1) + id_{U_h}(1) \otimes \epsilon_h(H)) \\
&= m_h(H \otimes 1 + 1 \otimes 0) = H.
\end{aligned}
$$

Agora será verificada a condição de coassociatividade para E, F, H.

(i)

$$
\begin{aligned}
(\Delta_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h(E) &= (\Delta_h \otimes id_{U_h})(E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E) \\
&= \Delta_h(E) \otimes id_{U_h}(q^{-H/2}) + \Delta_h(q^{H/2}) \otimes id_{U_h}(E) \\
&= (E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E) \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes q^{H/2} \otimes E \\
&= (E \otimes q^{-H/2}) \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes q^{H/2} \otimes E \\
&= E \otimes (q^{-H/2} \otimes q^{-H/2}) + q^{H/2} \otimes (E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E) \\
&= id_{U_h}(E) \otimes \Delta_h(q^{-H/2}) + \ id_{U_h}(q^{H/2}) \otimes \Delta_h(E) \\
&= (id_{U_h} \otimes \Delta_h)(E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E) \\
&= (id_{U_h} \otimes \Delta_h) \circ \Delta_h(E)
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
(\Delta_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h(F) &= (\Delta_h \otimes id_{U_h})(F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F) \\
&= \Delta_h(F) \otimes id_{U_h}(q^{-H/2}) + \Delta_h(q^{H/2}) \otimes id_{U_h}(F) \\
&= (F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F) \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes q^{H/2} \otimes F \\
&= (F \otimes q^{-H/2}) \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes q^{H/2} \otimes F \\
&= F \otimes (q^{-H/2} \otimes q^{-H/2}) + q^{H/2} \otimes (F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F) \\
&= id_{U_h}(F) \otimes \Delta_h(q^{-H/2}) + \ id_{U_h}(q^{H/2}) \otimes \Delta_h(F) \\
&= (id_{U_h} \otimes \Delta_h)(F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F) \\
&= (id_{U_h} \otimes \Delta_h) \circ \Delta_h(F)
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
(\Delta_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h(H) &= (\Delta_h \otimes id_{U_h})(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\
&= \Delta_h(H) \otimes id_{U_h}(1) + \Delta_h(1) \otimes id_{U_h}(H) \\
&= (H \otimes 1 + 1 \otimes H) \otimes 1 + (1 \otimes 1) \otimes H \\
&= (H \otimes 1) \otimes 1 + 1 \otimes H \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes H \\
&= H \otimes (1 \otimes 1) + 1 \otimes (H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\
&= id_{U_h}(H) \otimes \Delta_h(1) + \ id_{U_h}(1) \otimes \Delta_h(H) \\
&= (id_{U_h} \otimes \Delta_h)(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\
&= (id_{U_h} \otimes \Delta_h) \circ \Delta_h(H)
\end{aligned}
$$

Portanto, foi demonstrado que $(U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})), m_h, \mu_h, \epsilon_h, \Delta_h)$ é uma biálgebra. Por ultimo, note que $(U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})), m_h, \mu_h, \epsilon_h, \Delta_h, S_h)$ é uma Álgebra de Hopf. Para isso, será mostrado que $S_h \in End(U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})))$ é um morfismo de Álgebras e que satisfaz a seguinte condição:

$$m_h \circ (s_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h = \mu_h \circ \epsilon_h = m_h \circ (id_{U_h} \otimes s_h) \circ \Delta_h \tag{3.7}$$

Primeiro será provado que S_h é invariante sobre E, F, H em (**??**).

(i)

$$\begin{aligned} S_h(HE-EH) &= S_h(E)S_h(H) - S_h(H)S_h(E) = \ q^{-1}EH - Hq^{-1}E \\ &= q^{-1}(HE-2E) - Hq^{-1}E = \ q^{-1}HE - 2q^{-1}E - Hq^{-1}E \\ &= \ -2q^{-1}E + (q^{-1}H - Hq^{-1})E = \ -2q^{-1}E = 2S_h(E). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} S_h(HF-FH) &= S_h(F)S_h(H) - S_h(H)S_h(F) = \ qFH - HqF \\ &= q(HF+2F) - HqF = \ qHF + 2qF - HqF \\ &= 2qF + (qH - Hq)F = \ 2qF = -2S_h(F). \end{aligned}$$

(iii) Note que

$$S_h(q^H) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n S_h(H)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n(-H)^n}{n!} = q^{-H}.$$

Tendo em conta a relação anterior, temos que

$$\begin{aligned} S_h(EF-FE) &= S_h(F)S_h(E) - S_h(E)S_h(F) = \ (-qF)(-q^{-1}E) - (-q^{-1}E)(-qF) \\ &= q^hFq^{-1}E - q^{-1}EqF = \ FE - EF \\ &= \frac{q^{-H} - q^H}{q - q^{-1}} = \ \frac{S_h(q^H) - S_h(q^{-H})}{q - q^{-1}} \\ &= S_h([\![H]\!]_q). \end{aligned}$$

Por ultimo, será provado que S_h satisfaz a propriedade de antípoda (**??**) para E, F, H.

(i)

$$\begin{aligned} m_h \circ (S_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h(E) = &\ m_h \circ (S_h \otimes id_{U_h})(E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E) \\ = &\ m_h(S_h(E) \otimes id_{U_h}(q^{-H/2}) + S_h(q^{H/2}) \otimes id_{U_h}(E)) \\ = &\ m_h(-q^{-1}E \otimes q^{-H/2} + q^{-H/2} \otimes E) \\ = &\ -q^{-1}Eq^{-H/2} + q^{-H/2}E \\ = &\ -q^{-1}qq^{-H/2}E + q^{-H/2}E \\ = &\ 0 = \mu_h \circ \epsilon_h(E). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m_h \circ (id_{U_h} \otimes S_h) \circ \Delta_h(E) = \; & m_h \circ (id_{U_h} \otimes S_h)(E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E) \\
= \; & m_h(id_{U_h}(E) \otimes S_h(q^{-H/2}) + id_{U_h}(q^{H/2}) \otimes S_h(E)) \\
= \; & m_h(E \otimes q^{H/2} + q^{H/2} \otimes -q^{-1}E) \\
= \; & Eq^{H/2} - Eq^{H/2} \\
= \; & 0 = \mu_h \circ \epsilon_h(E).
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
m_h \circ (S_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h(F) = \; & m_h \circ (S_h \otimes id_{U_h})(F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F) \\
= \; & m_h(S_h(F) \otimes id_{U_h}(q^{-H/2}) + S_h(q^{H/2}) \otimes id_{U_h}(F)) \\
= \; & m_h(-qF \otimes q^{-H/2} + q^{-H/2} \otimes F) \\
= \; & -qFq^{-H/2} + q^{-H/2}F \\
= \; & -qFq^{-H/2} + qFq^{-H/2} \\
= \; & 0 = \mu_h \circ \epsilon_h(F).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_h \circ (id_{U_h} \otimes S_h) \circ \Delta_h(F) = \; & m_h \circ (id_{U_h} \otimes S_h)(F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F) \\
= \; & m_h(id_{U_h}(F) \otimes S_h(q^{-H/2}) + id_{U_h}(q^{H/2}) \otimes S_h(F)) \\
= \; & m_h(F \otimes q^{H/2} + q^{H/2} \otimes -qF) \\
= \; & Fq^{H/2} - q^{H/2}qF \\
= \; & Fq^{H/2} - Fq^{H/2} \\
= \; & 0 = \mu_h \circ \epsilon_h(F).
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
m_h \circ (S_h \otimes id_{U_h}) \circ \Delta_h(H) = \; & m_h \circ (S_h \otimes id_{U_h})(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\
= \; & m_h(S_h(H) \otimes id_{U_h}(1) + S_h(1) \otimes id_{U_h}(H)) \\
= \; & m_h(-H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\
= \; & -H + H \\
= \; & 0 = \mu_h \circ \epsilon_h(H).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_h \circ (id_{U_h} \otimes S_h) \circ \Delta_h(F) = \; & m_h \circ (id_{U_h} \otimes S_h)(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\
= \; & m_h(id_{U_h}(H) \otimes S_h(1) + id_{U_h}(1) \otimes S_h(H)) \\
= \; & m_h(H \otimes 1 + 1 \otimes -H) \\
= \; & H - H \\
= \; & 0 = \mu_h \circ \epsilon_h(H).
\end{aligned}
$$

Portanto foi demonstrado que $(U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})), m_h, \mu_h, \Delta_h, \epsilon_h, S_h)$ é uma Álgebra de Hopf. $\square$

Na teoria de Álgebras de Lie, o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt tem um papel importante, pois a qualquer base (ordenada) de uma álgebra de Lie associa uma base de sua Álgebra envolvente universal. O seguinte teorema é um análogo de este resultado para $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

Teorema 3.1.5 ([?, proposição 6.4.7]). *Os monômios $F^rH^sE^t$, para r, s, t inteiros não negativos, formam uma base para $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.*

Como $(U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})), m_h, \mu_h, \Delta_h, \epsilon_h, S_h)$ é uma Álgebra de Hopf com antípoda S_h, usando a notação de Sweedler (**??**), é possível definir a ação adjunta em $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, do Exemplo **??**, da seguinte forma:

$$\begin{array}{llc} ad: U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \otimes U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) & \longrightarrow & U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \\ \qquad\qquad x \otimes y & \longrightarrow & ad(x \otimes y) := \sum_{(x)} x_{(1)} y S_h(x_{(2)}), \end{array}$$

para todo $x, y \in U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, com $\Delta_h(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$. A partir de agora, será denotado $ad_x(y) = ad(x \otimes y)$. Portanto, a ação adjunta em $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ com relação à H, E, F é definida para todo $x \in U_h(\mathfrak{sl}_(\mathbb{C}))$ da seguinte forma:

(i) No caso de H, tem-se que $\Delta_h(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H$, logo

$$\begin{aligned} ad_H(x) &= \sum_{(H)} H_{(1)} x S_h\left(H_{(2)}\right) \\ &= HxS_h(1) + 1xS_h(H) \\ &= Hx - xH. \end{aligned}$$

(ii) Como $\Delta_h(E) = E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E$, então

$$\begin{aligned} ad_E(x) &= \sum_{(E)} E_{(1)} x S_h\left(E_{(2)}\right) \\ &= ExS_h\left(q^{-H/2}\right) + q^{H/2} x S_h(E) \\ &= Exq^{H/2} + q^{H/2} x(-q^{-1}E) \\ &= Exq^{H/2} - q^{-1} q^{H/2} xE. \end{aligned}$$

(iii) Por ultimo, note que $\Delta_h(F) = F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F$, portanto

$$\begin{aligned} ad_F(x) &= \sum_{(F)} F_{(1)} x S_h\left(F_{(2)}\right) \\ &= FxS_h\left(q^{-H/2}\right) + q^{H/2} x S_h(F) \\ &= Fxq^{H/2} + q^{H/2} x(-qF) \\ &= Fxq^{H/2} - qq^{H/2} xF. \end{aligned}$$

Portanto, a ação adjunta para todo x em $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ está definida pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} ad_H(x) &= Hx - xH. \\ ad_E(x) &= Exq^{H/2} - q^{-1} q^{H/2} xE. \\ ad_F(x) &= Fxq^{H/2} - qq^{H/2} xF. \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2 Álgebra de Lie Quântica $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$

Uma Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é naturalmente contida em sua Álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$. Está álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ forma um subespaço vetorial onde o colchete de Lie é dado pela restrição da ação adjunta de $U(\mathfrak{g})$. No caso da Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, tem-se que é um subespaço da Álgebra associativa $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ gerado por e, f, h e o colchete de Lie e dado pelo comutador. De forma análoga pode-se encontrar a Álgebra de Lie quântica $\mathfrak{L}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ a partir da Álgebra envolvente universal quântica $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

No entanto, no caso quântico, o espaço gerado por E, F, H não é fechado com relação ao comutador, já que $EF - FE$ definida em (**??**) não é um elemento no espaço. Portanto, será definida um subespaço tridimensional de $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, tal que seja fechado baixo a ação adjunta.

Definição 3.2.1. *Seja $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$ o subespaço tridimensional de $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ gerada pelos elementos:*

$$E_h = q^{-H/2}E, \quad F_h = q^{-H/2}F, \quad H_h = qEF - q^{-1}FE, \tag{3.9}$$

munido com uma operação chamada colchete de Lie quântico dado por:

$$[x, y]_h := ad_x(y) \tag{3.10}$$

para todo x, y em $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$. O espaço $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$ é chamado Álgebra de Lie quântica associada a $\mathfrak{sl}_2$.

Note que o colchete de Lie quântico em $\mathfrak{L}(\mathfrak{sl}_2)$ esta definido pela adjunta de $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Portanto, pelas adjuntas dadas em (**??**), e utilizando o fato que

$$E^m q^{H/2} = q^{-m} q^{H/2} E \quad \text{e} \quad F^m q^{H/2} = q^m q^{H/2} F,$$

para todo inteiro m, tem-se que o colchete quântico entre um elemento x em $\mathfrak{L}(\mathfrak{sl}_2)$ e os elementos da base E_h, F_h e H_h, está definido da seguinte forma.

Caso 1. Para E_h, tem-se que:

$$[E_h, x]_h = ad_{E_h}(x) = ad_{q^{-H/2}E}(x) = ad_{q^{-H/2}} \circ ad_E(x).$$

Note que para todo y em $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$:

$$ad_{q^{-H/2}}(y) = q^{-H/2} y q^{H/2},$$

pois $\Delta_h(q^{-H/2}) = q^{-H/2} \otimes q^{-H/2}$ e $S\left(q^{-H/2}\right) = q^{H/2}$. Portanto:

$$\begin{aligned}
[E_h, E_h]_h &= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_E(E_h) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_E\left(q^{-H/2}E\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}}\left(E(q^{-H/2}E)q^{H/2} - q^{-1}q^{H/2}(q^{-H/2}E)E\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}}\left(q^{-1}E^2 - q^{-1}E^2\right) \\
&=0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_h, F_h]_h &= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_E(F_h) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_E \left(q^{-H/2}F\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \left(E(q^{-H/2}F)q^{H/2} - q^{-1}q^{H/2}(q^{-H/2}F)E\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \left(qEF - q^{-1}FE\right) \\
&= q^{-H/2} \left(qEF - q^{-1}FE\right) q^{H/2} \\
&= qEF - q^{-1}FE \\
&= H_h.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_h, H_h]_h &= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_E(H_h) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_E \left(qEF - q^{-1}FE\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \circ \left(ad_E \left(qEF\right) - ad_E \left(q^{-1}FE\right)\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \left(E(qEF)q^{H/2} - q^{-1}q^{H/2}(qEF)E\right) - \\
&\quad - ad_{q^{-H/2}} \left(E(q^{-1}FE)q^{H/2} - q^{-1}q^{H/2}(q^{-1}FE)E\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \left(q^{H/2}E^2F - q^{H/2}EFE\right) - \\
&\quad - ad_{q^{-H/2}} \left(q^{-2}q^{H/2}EFE - q^{-2}q^{H/2}FE^2\right) \\
&= E^2Fq^{H/2} - EFEq^{H/2} - q^{-2}EFEq^{H/2} + q^{-2}FE^2q^{H/2} \\
&= q^{H/2} \left(q^{-1}E^2F - q^{-1}EFE - q^{-3}EFE + q^{-3}FE^2\right) \\
&= q^{H/2}(q^{-3}(FE - EF)E + q^{-1}E(EF - FE)) \\
&= q^{H/2} \left(q^{-3} \left(\frac{q^{-H} - q^{H}}{q - q^{-1}}\right) E + q^{-1}E \left(\frac{q^{H} - q^{-H}}{q - q^{-1}}\right)\right) \\
&= \left(\frac{q^{-3} - q}{q - q^{-1}}\right) q^{H/2}q^{-H}E \\
&= -(1 + q^{-2})q^{-H/2}E \\
&= -(1 + q^{-2})E_h.
\end{aligned}$$

Caso 2. De forma análoga, para F_h tem-se que:

$$\begin{aligned}
[F_h, E_h]_h &= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_F(E_h) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_F \left(q^{-H/2}E\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \left(F(q^{-H/2}E)q^{H/2} - qq^{H/2}(q^{-H/2}E)F\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \left(q^{-1}FE - qEF\right) \\
&= q^{-H/2} \left(q^{-1}FE^{-}qEF\right) q^{H/2} \\
&= q^{-1}FE - qEF \\
&= -H_h.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[F_h, F_h]_h &= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_F(F_h) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_F \left(q^{-H/2}F\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \left(F(q^{-H/2}F)q^{H/2} - qq^{H/2}(q^{-H/2}F)F\right) \\
&= ad_{q^{-H/2}} \left(qF^2 - qF^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=0.\\
[F_h, H_h]_h &= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_F(H_h)\\
&= ad_{q^{-H/2}} \circ ad_F\left(qEF - q^{-1}FE\right)\\
&= ad_{q^{-H/2}} \circ \left(ad_F\left(qEF\right) - ad_F\left(q^{-1}FE\right)\right)\\
&= ad_{q^{-H/2}}\left(F(qEF)q^{H/2} - qq^{H/2}(qEF)F\right) -\\
&\quad - ad_{q^{-H/2}}\left(F(q^{-1}FE)q^{H/2} - qq^{H/2}(q^{-1}FE)F\right)\\
&= ad_{q^{-H/2}}\left(q^2q^{H/2}FEF - q^2q^{H/2}EF^2\right) -\\
&\quad - ad_{q^{-H/2}}\left(q^{H/2}F^2E - q^{H/2}FEF\right)\\
&= q^2FEFq^{H/2} - q^2EF^2q^{H/2} - F^2Eq^{H/2} + FEFq^{H/2}\\
&= q^{H/2}\left(q^3FEF - q^3EF^2 - qF^2E + qFEF\right)\\
&= q^{H/2}(q^3(FE - EF)F + qF(EF - FE))\\
&\quad = \ q^{H/2}\left(q^3\left(\frac{q^{-H} - q^{H}}{q - q^{-1}}\right)F + qF\left(\frac{q^{H} - q^{-H}}{q - q^{-1}}\right)\right)\\
&\quad = \ \left(\frac{q^3 - q^{-1}}{q - q^{-1}}\right)q^{H/2}q^{-H}F\\
&\quad = \ (1 + q^2)q^{-H/2}F\\
&\quad = \ (1 + q^2)F_h.
\end{aligned}
$$

Caso 3. Por ultimo, no caso de H_h, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
[H_h, E_h]_h &= ad_{qEF - q^{-1}FE}(E_h)\\
&= ad_{qEF}(E_H) - ad_{q^{-1}FE}(E_h)\\
&= q\left(ad_E \circ ad_F(E_h)\right) - q^{-1}\left(ad_F \circ ad_E(E_h)\right)\\
&= q\left(ad_E\left(q^{-1}FE - qEF\right)\right) - q^{-1}\left(ad_F(0)\right)\\
&= q\left(ad_E\left(q^{-1}FE\right)\right) - q\left(ad_E\left(qEF\right)\right)\\
&= q\left(E(q^{-1}FE)q^{H/2} - q^{-1}q^{H/2}(q^{-1}FE)E\right) -\\
&\quad - q\left(E(qEF)q^{H/2} - q^{-1}q^{H/2}(qEF)E\right)\\
&= q^{H/2}\left(q^{-1}EFE - q^{-1}FE^2 - qE^2F + qEFE\right)\\
&= q^{H/2}\left(q^{-1}(EF - FE)E + qE(FE - EF)\right)\\
&= q^{H/2}\left(q^{-1}\left(\frac{q^{H} - q^{-H}}{q - q^{-1}}\right)E + qE\left(\frac{q^{-H} - q^{H}}{q - q^{-1}}\right)\right)\\
&\quad = \left(\frac{q^3 - q^{-1}}{q - q^{-1}}\right)q^{H/2}q^{-H}E\\
&\quad = (q^2 + 1)E_h.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[H_h, F_h]_h &= ad_{qEF - q^{-1}FE}(F_h)\\
&= ad_{qEF}(F_H) - ad_{q^{-1}FE}(F_h)\\
&= q\left(ad_E \circ ad_F(F_h)\right) - q^{-1}\left(ad_F \circ ad_E(F_h)\right)\\
&= q\left(ad_E(0)\right) - q^{-1}\left(ad_F\left(qEF - q^{-1}FE\right)\right)\\
&= q^{-1}\left(ad_F\left(q^{-1}FE\right)\right) - q^{-1}\left(ad_F\left(qEF\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{-1}\left(F(q^{-1}FE)q^{H/2} - qq^{H/2}(q^{-1}FE)F\right) - \\
&\quad - q^{-1}\left(F(qEF)q^{H/2} - qq^{H/2}(qEF)F\right) \\
&= q^{H/2}\left(q^{-1}F^2E - q^{-1}FEF - qFEF + qEF^2\right) \\
&= q^{H/2}\left(q^{-1}F(FE - EF) + q(EF - FE)F\right) \\
&= q^{H/2}\left(q^{-1}F\left(\frac{q^{-H} - q^{H}}{q - q^{-1}}\right) + q\left(\frac{q^{H} - q^{-H}}{q - q^{-1}}\right)F\right) \\
&= \left(\frac{q^{-3} - q}{q - q^{-1}}\right)q^{H/2}q^{-H}F \\
&= -(q^{-2} + 1)F_h.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[H_h, H_h]_h &= ad_{H_h}(H_h) = ad_{H_h}(qEF - q^{-1}FE) \\
&= q \cdot ad_{H_h}(EF) - q^{-1} \cdot ad_{H_h}(FE) \\
&= q \cdot ad_{H_h}(E)ad_{H_h}(F) - q^{-1} \cdot ad_{H_h}(F)ad_{H_h}(E) \\
&= q(q^2 + 1)E(1 - q^{-2})F - q^{-1}(1 - q^{-2})F(q^2 + 1)E \\
&= q(q^2 - q^{-2})EF - q^{-1}(q^2 - q^{-2})FE \\
&= (q^2 - q^{-2})(qEF - q^{-1}FE) \\
&= (q^2 - q^{-2})H_h.
\end{aligned}
$$

Portanto, o colchete de Lie quântico em $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$ está definido como:

$$
\begin{aligned}
&[E_h, F_h]_h = H_h, && [F_h, E_h]_h = -H_h, \\
&[E_h, H_h]_h = -(1 + q^{-2})E_h, && [F_h, H_h]_h = (1 + q^2)F_h \\
&[H_h, E_h]_h = (q^2 + 1)E_h, && [H_h, F_h]_h = -(q^{-2} + 1)F_h, \\
&[E_h, E_h]_h = [F_h, F_h]_h = 0 && [H_h, H_h]_h = (q^2 - q^{-2})H_h.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Note que a Álgebra de Lie quântica $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$ não é uma Álgebra de Lie, pois o colchete quântico de Lie definido por (**??**) não satisfaz a propriedade da antissimetria e a propriedade de Jacobi. No entanto, o colchete quântico de Lie satisfaz uma generalização da antissimetria que envolve a operação $q \mapsto q^{-1}$. Alem disso, as constantes de estrutura de $\mathfrak{L}_(\mathfrak{sl}_2)$ são q-dependentes de tal forma que $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$ tende a $\mathfrak{sl}_2$ quando $q = 1$.

Definição 3.2.2. *q-conjugação é o automorfismo $\sim$ $\mathfrak{C}$-linear de anéis definido da seguinte forma:*

$$
\begin{aligned}
\sim\colon \mathfrak{C}[\![h]\!] &\longrightarrow \mathfrak{C}[\![h]\!] \\
a &\longmapsto \tilde{a},
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{h} = -h$.

No mesmo sentido, pode-se definir a q-conjugação sobre o grupo quântico $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

Definição 3.2.3. *A q-conjugação sobre um grupo quântico $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ é o q-automorfismo de Álgebras $\sim\colon \mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow \mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$ que estende a q-conjugação sobre $\mathbb{C}[\![h]\!]$ agindo como a identidade sobre os geradores E, F e H.*

O automorfismo anterior pode ser estendido a um q-conjugação sobre a Álgebra de Lie quântica $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$, da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccl} \sim: & \mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2) & \longrightarrow & \mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2) \\ & (aE_h + bF_h + cH_h) & \longmapsto & (aE_h + bF_h + cH_h)^{\sim} = \tilde{a}E_h + \tilde{b}F_h + \tilde{c}H_h, \end{array}$$

com $\tilde{z} = -z$, para todo $z \in \mathbb{C}[\![h]\!]$, e $\tilde{q} = q^{-1}$. Então o colchete de Lie quântico satisfaz:

$$[x, y]_h^{\sim} = -[\tilde{y}, \tilde{x}] \quad \forall x, y \in \mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2). \tag{3.12}$$

A propriedade (**??**) é chamada q-antissimetria. De fato, as relações **??** do colchete de Lie quântico $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$ satisfaz está propriedade, pois

(i)

$$\begin{aligned} [E_h, F_h]_h^{\sim} &= \widetilde{H_h} = H_h = -(-H_h) = -[F_h, E_h]_h \\ &= -[\widetilde{F_h}, \widetilde{E_h}]_h. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} [E_h, H_h]_h^{\sim} &= (-(1 + q^{-2})E_h)^{\sim} = -(1 + \widetilde{q^{-2}})\tilde{E}_h = -(q^2 + 1)E_h \\ &= -[H_h, E_h]_h = -[\widetilde{H_h}, \widetilde{E_h}]_h. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} [F_h, H_h]_h^{\sim} &= ((1 + q^2)F_h)^{\sim} = (1 + \widetilde{q^2})\tilde{F}_h = -(-(q^{-2} + 1)F_h) \\ &= -[H_h, F_h]_h = -[\widetilde{H_h}, \widetilde{F_h}]_h. \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} [H_h, H_h]_h^{\sim} &= ((q^2 - q^{-2})H_h)^{\sim} = (\widetilde{q^2} - \widetilde{q^{-2}})\tilde{H}_h = -(q^2 - q^{-2})H_h \\ &= -[H_h, H_h]_h = -[\widetilde{H_h}, \widetilde{H_h}]_h. \end{aligned}$$

De forma análoga, é obtido que

$$\begin{aligned} [F_h, E_h]_h^{\sim} &= -[\widetilde{E_h}, \widetilde{F_h}]_h. \\ [H_h, E_h]_h^{\sim} &= -[\widetilde{E_h}, \widetilde{H_h}]_h. \\ [H_h, F_h]_h^{\sim} &= -[\widetilde{F_h}, \widetilde{H_h}]_h. \end{aligned}$$

Note que a q-conjugação de q para q^{-1} é importante, pois permite que o colchete de Lie quântico seja q-antissimétrico no sentido de (**??**).

3.3 $U_h(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ para uma Álgebra de Lie simples complexa de dimensão finita

Nas seções anteriores foi possível observar que o grupo quântico $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ é uma deformação da Álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ como Álgebra de Hopf. Agora, se $\mathfrak{g}$ é uma Álgebra de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita, pela seção **??**, tem-se que a Álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ é uma Álgebra associativa sobre $\mathbb{C}$ com geradores $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$, $h_1, \ldots, h_n$ e as relações de Serre. Alem disso, na seção **??** foi provado que $U(\mathfrak{g})$ é uma Álgebra de Hopf. Portanto, pode-se definir a Álgebra envolvente universal quantizada $U_h(\mathfrak{g})$, de maneira similar de $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

Definição 3.3.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma Álgebra de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita e seja $C_{\mathfrak{g}} = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sua matriz de Cartan, como a matriz diagonal $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$. O grupo quântico $U_h(\mathfrak{g})$, também chamadas Álgebras de Drinfeld-Jimbo, é uma Álgebra associativa com unidade sobre $\mathbb{C}[\![h]\!]$ gerada por E_i, F_i, H_i com $1 \leq i \leq n$ e as relações*

$$H_iH_j - H_jH_i = 0, \qquad H_iE_j - E_jH_i = \alpha_{ij}E_j, \qquad H_iF_j - E_jF_i = -\alpha_{ij}F_j, \tag{3.13}$$

$$E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\frac{q_i^{H_i} - q_i^{-H_i}}{q_i - q_i^{-1}}, \tag{3.14}$$

$$\sum_{k=0}^{1-\alpha_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} E_i^k E_j E_i^{1-\alpha_{ij}-k} = 0, \qquad i \neq j, \tag{3.15}$$

$$\sum_{k=0}^{1-\alpha_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} F_i^k F_j F_i^{1-\alpha_{ij}-k} = 0, \qquad i \neq j, \tag{3.16}$$

*com $q_i :=^{d_ih}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker (**??**), e*

$$\begin{bmatrix} n \\ m^q \end{bmatrix} = \frac{[\![n]\!]_q!}{[\![m]\!]_q![\![n-m]\!]_q!},$$

*para todo inteiro não negativo $n \geq m$. As igualdades (**??**) e (**??**) são chamadas de relações quânticas de Serre.*

De forma análoga a $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, defina-se uma estrutura de Álgebra de Hopf em $U_h(\mathfrak{g})$ da seguinte forma.

Teorema 3.3.2. *A Álgebra $U_h(\mathfrak{g})$ é uma Álgebra de Hopf com a comultiplicação Δ_h, counidade ϵ_h e antípoda S_h definido por:*

$$\Delta_h : U_h(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_h(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}[\![h]\!]} U_h(\mathfrak{g}),$$

$$\epsilon_h : U_h(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}[[h]], \quad S_h : U_h(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_h(\mathfrak{g}).$$

tais que:

$$\begin{aligned} \Delta_h(H_i) &= H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i. & S_h(H_i) &= -H_i. & \epsilon_h(H_i) &= 0. \\ \Delta_h(E_i) &= E_i \otimes q^{H_i} + 1 \otimes E_i. & S_h(E_i) &= -E_iq^{-H_i}. & \epsilon_h(E_i) &= 0. \\ \Delta_h(F_i) &= F_i \otimes 1 + q^{-H_i} \otimes F_i. & S_h(F_i) &= -q^{H_i}F_i. & \epsilon_h(F_i) &= 0. \end{aligned}$$

Para demonstrar o Teorema ??, o seguinte lema é necessário

Lema 3.3.3. *[?, Lema 6.5.2] Seja q uma indeterminada. Então*

(i) $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = q^{-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q + q^{n-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q$, *se* $n \geq m \geq 0$.

(ii) $\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q q^{-(n-1)m} = 0$, *se* $n > 0$.

Levando em consideração o lema anterior, o Teorema ?? será provado.

Demonstração Teorema ??. Será provado que Δ_h, ϵ_h e S_h preservam as relações de definição (??)-(??). No caso das relações (??) e (??), a demonstração é análoga à a prova do Teorema ??. Portanto, só falta demonstrar que as relações quânticas de Serre (??) e (??)são invariantes sobre Δ_h, ϵ_h e S_h.

Vejamos primeiro que

$$\sum_{k=0}^{1-\alpha_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} \Delta_h(E_i)^k \Delta_h(E_j) \Delta_h(E_i)^{1-\alpha_{ij}-k} = 0, \qquad i \neq j. \tag{3.17}$$

Denote por K_i o elemento q_i^h. Pela equação (??), tem-se que

$$K_i E_j K_i^{-1} = q_i^{\alpha_{ij}} E_j.$$

Calculemos $\Delta_h(E_i)^r$. Pelo Lema ?? item *(i)* e fazendo indução sobre r, tem-se que

$$\Delta_h(E_i)^r = \sum_{k=0}^{n} q_i^{-k(r-k)} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_{q_i} E_i^k \otimes K_i^k E_i^{r-k}.$$

Logo, a parte esquerda de (??) é igual à

$$\sum_{k=0}^{1-\alpha_{ij}} \sum_{t=0}^{k} \sum_{s=0}^{1-\alpha_{ij}-k} (-1)^k q^{-t(k-t)-s(1-\alpha_{ij}-k-s)} \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij}-k \\ s \end{bmatrix}_{q_i} \tag{3.18}$$

$$\times \left(E_i^t \otimes K_i^t E_i^{k-t}\right) \left(E_j \otimes K_j + 1 \otimes E_j\right) \left(E_i^s \otimes K_i^s E_i^{1-\alpha_{ij}-k-s}\right). \tag{3.19}$$

A soma anterior será dividida em duas partes. A primeira parte contém somas com E_j no primeiro fator do produto tensorial e a segunda contém somas com E_j no segundo fator do produto tensorial. Será provado que ambas as partes são zero. Vamos verificar isso com a segunda parte.

Note que as somas com E_j no segundo fator do produto tensorial pode ser escrito como

$$\sum_{k=0}^{1-\alpha_{ij}} \sum_{t=0}^{k} \sum_{s=0}^{1-\alpha_{ij}-k} (-1)^k q^{s(2t+s-k-1)-t(k-t)-} \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij}-k \\ s \end{bmatrix}_{q_i}$$

$$\times E_i^{s+t} \otimes K_i^{s+t} E_i^{k-t} E_j E_i^{1-\alpha_{ij}-k-s}.$$

Se $m = s + t$, $p = k - t$, então

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij} \\ p+t \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} p+t \\ t \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij}-p-t \\ m-t \end{bmatrix}_{q_i} = \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij}-m \\ p \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix}_{q_i}.$$

Então

$$\sum_{m=0}^{1-\alpha_{ij}} \sum_{p=0}^{1-\alpha_{ij}-m} \left(\sum_{t=0}^{m} (-1)^t \begin{bmatrix} m \\ t \end{bmatrix}_{q_i} q_i^{-t(m-1)} \right) (-1)^p q^{m(m-t-1)} \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij}-m \\ p \end{bmatrix}_{q_i} \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{q_i}$$
$$\times E_i^m \otimes K_i^m E_i^p E_j E_i^{1-\alpha_{ij}-m-p}.$$

Pelo Lema **??** item *(ii)*, a soma interior sobre t é nula se $m > 0$, logo a soma dos termos com $m = 0$ é igual à

$$\sum_{p=0}^{1-\alpha_{ij}} \begin{bmatrix} 1-\alpha_{ij} \\ p \end{bmatrix}_{q_i} 1 \otimes E_i^p E_j E_i^{1-\alpha_{ij}-p}.$$

Pela Relação de Serre (**??**) da definição de $U_h(\mathfrak{g})$, tem-se que a soma é zero. A prova é análoga para as somas com E_j no primeiro fator do produto tensorial. O mesmo raciocínio é usado para mostrar que as relações de Serre (**??**) e (**??**) são invariantes em ϵ_h e S_h. Portanto $(U_h(\mathfrak{g}), m_h, \mu_h, \Delta_h, \epsilon_h, S_h)$ é uma Álgebra de Hopf sobre $\mathbb{C}[\![h]\!]$ □

Um conceito central na teoria das Álgebras de Lie quânticas é a q-conjugação em $\mathbb{C}[\![h]\!]$, tal que $h \mapsto -h$, ou seja, $q \mapsto q^{-1}$ (Definição **??**). Na seção anterior, uma q-conjugação de $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ foi definida como um q-automorfismo de $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ que pode ser estendido para uma q-conjugação no $\mathbb{C}[\![h]\!]$. Portanto, uma q-conjugação pode ser definida para o grupo quântico $U_h(\mathfrak{g})$ da seguinte forma.

Definição 3.3.4. *A q-conjugação em $U_h(\mathfrak{g})$ é um q-automorfismo $\sim: U_h(\mathfrak{g}) \to U_h(\mathfrak{g})$, que estende a q-conjugação em $\mathbb{C}[\![h]\!]$ agindo como identidade nos geradores E_i, F_i, H_i.*

A Álgebra de Lie quântica $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2)$ dada na Definição **??** é o exemplo mais simples de uma Álgebra de Lie quântica, pois para uma Álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}[\![h]\!]$ de dimensão finita, diferente de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, a Álgebra de Lie quântica é definida da seguinte forma.

Definição 3.3.5. *Uma Álgebra de Lie quântica $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ dentro de $U_h(\mathfrak{g})$ é um ad-submódulo indecomponível de dimensão finita de $U_h(\mathfrak{g})$ dotado com o colchete de Lie quântico $[a,b]_h = ad_a(b)$ tal que*

(i) *$\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ é uma deformação de $\mathfrak{g}$, ou seja, $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ $(mod\ h)$.*

(ii) *$\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ é invariante baixo a involução q-Cartan $\tilde{\theta}$, a q-antípoda $\tilde{S}$ e qualquer diagrama automorfismo τ de $U_h(\mathfrak{g})$.*

A propriedade (ii) tem um papel importante nas investigações sobre a estrutura geral das Álgebras de Lie quânticas, em particular, esta condição permite a definição de uma forma de Killing quântica associada a $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$. Porém, G. W. Deliusno e A. Huffmann mostraram em [**?**] que dado qualquer módulo que satisfaça todas as propriedades da definição, exceto a propriedade (ii), pode-se sempre construir a partir dele uma Álgebra de Lie quântica $L_h(g)$ que também satisfaça a propriedade (ii). Assim, este requisito extra não é muito forte e será omitido neste trabalho.[?, ?].

As Álgebras de Lie quânticas não são únicas. No artigo [?], G. W. Delius apresenta a Álgebra de Lie quântica $\mathfrak{L}'_h(\mathfrak{sl}_2)$, gerada pelos elementos E'_h, F'_h e H'_h em $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, onde

$$E'_h = \sqrt{\frac{2}{q-q^{-1}}}q^{-H/2}E, \quad F'_h = \sqrt{\frac{2}{q-q^{-1}}}q^{-H/2}F, \quad H'_h = \frac{2}{q-q^{-1}}(qEF - q^{-1}FE).$$

E as relações dadas pela ação adjuntas, estão definidas por:

$$\begin{aligned}
[E'_h, F'_h] &= H'_h, & [F'_h, E'_h]_h &= -H_h, \\
[E'_h, H'_h]_h &= -2q^{-1}E'_h, & [F'_h, H'_h]_h &= 2qF'_h \\
[H'_h, E'_h]_h &= 2qE'_h, & [H'_h, F'_h]_h &= -2q^{-1}F'_h, \\
[E'_h, E'_h]_h &= [F'_h, F'_h]_h = 0 & [H'_h, H'_h]_h &= 2(q-q^{-1})H'_h.
\end{aligned}$$

Está Álgebra de Lie quântica, também é fechada sobre o colchete de Lie quântico e satisfaz a propriedade de q-antissimetria. Porém, em 1996, G. W. Delius e M. D. Gould conseguiram provar o seguinte teorema.

Teorema 3.3.6 ([?, Teorema 1.]). *Dada qualquer Álgebra de Lie simples complexa $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, tem-sE que:*

(i) Todas as Álgebras de Lie quânticas $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ são isomorfas como Álgebras.

(ii) Todas as Álgebras de Lie quânticas $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ tem produtos de Lie quânticos q-antissimetricos.

Portanto, as dois Álgebras de Lie quânticas $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ e $\mathfrak{L}'_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, são isomorfas como álgebras.

Neste capitulo foi construído a Álgebra de Lie quântica associada à Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ a partir da ação adjunta do grupo quântico $U_h(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Entretanto, realizar uma tarefa semelhante para outros grupos quânticos é mais complexo. Atualmente existe um método geral para construir Álgebras de Lie quânticas usando a R-matriz universal. Na verdade, este método é usado em diferentes livros clássicos sobre a teoria, como [?, ?, ?]. No artigo [?] os autores utilizam este método para descrever $\mathfrak{L}_h(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ para todo n. Este método é importante pois mostra que sempre existe uma Álgebra de Lie quântica para toda Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Além disso, dentro da teoria de grupos quânticos não existe uma definição geral de Álgebra envolvente quantizada, até agora limitamos o conceito de Álgebra de Lie quântica a Álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ simples e complexas de dimensão finita, como o caso das álgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3, \mathfrak{sl}_4, \mathfrak{so}_5$, onde por meio de ferramentas computacionais, como MathLab foi possível determinar a sua estrutura de Álgebra de Lie quântica.

Referências Bibliográficas

[Abe80] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge Tracts in Mathematics 74, Cambridge University Press, Cambridge UK, 1980.

[CP94] V. Chari and A. Pressley. *A guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press, 1994.

[Dau94] J. Dauns, *Modules and rings*, Cambridge University Press, 1994.

[Del97] G.W. Delius. *Introduction to Quantum Lie Algebras*. Banach Center Publications, Vl. 40. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences. Warzawa. 1997.

[DG96] G.W. Delius, M.D. Goul d, *Quantum Lie algebras their existence, uniqueness and q-antisymmetry*, q-alg/9605025. 1996.

[DGHZ95] G.W. Delius, M.D. Gould, A. Huffmann, Y. Z. Zhang, *Quantum Lie algebras associated to $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ and $U_q(\mathfrak{sl}_n$*, q-alg/9508013. 1995.

[DH96] G. W. Delius, A. Huffmann, *On Quantum Lie Algebras and Quantum Root Systems*, q-alg/9506017, J. Phys. A. 29 (1996) 1703.

[Dri85] V. G. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Sov. Math. Dokl. 32 (1985) 254.

[Dri86] V. G. Drinfel'd, *Quantum Groups*, Proceedings of the International Conference on Mathematics, Berkeley, 798-820, 1986.

[EW06] K. Erdmann and M.J. Wildon. *Introduction to Lie Algebras*. Undergraduate Mathematics Series. Springer, Verlag London, 2006.

[Hum72] J.E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Springer, 1972.

[Jan91] J. C. Jantzen. *Lectures on Quantum Groups*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society. V.6. 1991.

[Jim85] M. Jimbo,*A q-difference analogue of $U_q(\mathfrak{g})$ and the Yang–Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 10 (1985) 63–69.

[Kas94] C. Kassel. *Quantum Groups*. Graduate Texts in Mathematics, 155. Springer. 1994.

[KS97] A. Klimyk and K. Schmüdgen. *Quantum Groups and Their Representations*, Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[KS82] P. Kulish, E. K. Sklyanin. *Quantum spectral transform method. Recent Developments, in Integrable Quantum Field Theories.* Lecture Notes in Physics 151, pp. 61-119, Springer, Berlin. 1982.

[Maz10] V. Mazorchuk, *Lectures on* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$*-modules*, Imperial College Press, 2010.

[Mon92] S. Montgomery. *Hopf Algebras and Their Actions on Rings.* Conference Board of the Mathematical Sciences. Chicago. August 1992.

[Ser87] J. Serre. *Complex Semisimple Lie Algebras.* Springer-Verlag, New York, 1987.

[Swe69] M. E. Sweedler. *Hopf Algebras.* W. A. Benjamin Inc, New York, 1969.