

Universidade Federal da Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Bases de Gröbner de Variedades de Gelfand-Tsetlin

Edwin Leonardo Mateus Moreno

MANAUS – AM
FEVEREIRO DE 2024

Universidade Federal da Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Bases de Gröbner de Variedades de Gelfand-Tsetlin

por

Edwin Leonardo Mateus Moreno

sob as orientações de

Prof. Dr. Stefan Josef Ehbauer
(Orientador)

Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve
(Coorientador)

Manaus – AM
Fevereiro de 2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M843b Moreno, Edwin Leonardo Mateus
Bases de Gröbner de variedades de Gelfand-Tsetlin / Edwin
Leonardo Mateus Moreno . 2024
79 f.: 31 cm.

Orientador: Stefan Josef Ehbauer
Coorientador: Germán Alonso Benitez Monsalve
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do
Amazonas.

1. Álgebra de Lie. 2. Álgebra envolvente universal. 3. Bases de
Gröbner. 4. Variedade de Gelfand-Tsetlin. I. Ehbauer, Stefan Josef.
II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

FOLHA DE APROVAÇÃO

Edwin Leonardo Mateus Moreno¹

Bases de Gröbner de Variedades de Gelfand-Tsetlin

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 22 de Fevereiro de 2024.

Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Stefan Josef Ehbauer – UFAM
(Orientador)**

**Prof. Dr. Luis Enrique Ramirez – UFABC
(Examinador Externo)**

**Prof. Dr. Elkin Oveimar Quintero Vanegas – UFAM
(Examinador Interno)**

¹O autor foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Dedico este trabalho à minha amada família, que mesmo estando tão distante em terras colombianas, sempre esteve presente em meu coração e em meus pensamentos.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Stefan Ehbauer, por sua confiança, conselhos e dedicação exemplar em todos os momentos. Agradeço ao meu coorientador, Prof. Dr. Germán Benitez Monsalve, por seu apoio e orientação durante o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço aos membros da banca, composta pelos professores Dr. Stefan Ehbauer, Dr. Luis Enrique Ramirez e Dr. Elkin Quintero Vanegas, por cada um de seus comentários e sugestões feitos para aprimorar meu trabalho.

Agradeço à minha família por seu amor e apoio durante esse processo, especialmente aos meus pais, Elizabeth Moreno Moya e Jorge Armando Mateus, aos meus irmãos Juan Sebastian Mateus e Andres Mauricio Moreno, e aos meus avós Sol Marina Moya e Siervo Moreno, que foram minha motivação dia após dia. Agradeço a Yeimy Paola Aguirre Escobar, minha companheira de vida, por sua presença constante e seu amor incondicional, que foram essenciais nesse processo.

Agradeço à Profa. Dra. Verônica Cifuentes e ao Prof. Dr. Pedro Fernando Fernández, que sempre estiveram atentos ao meu processo, também agradeço a todos os meus colegas e amigos de estudo, Eder Rodriguez, Oscar Blanco, Dzoara Nuñez, Gustavo Costa, Filipe Vital, Erick Guimarães e Thiago Cacau.

Por fim, gostaria de agradecer ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas e à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a Variedade de Gelfand-Tsetlin associada à álgebra de Lie \mathfrak{gl}_n por meio da subálgebra de Gelfand-Tsetlin, denotada por Γ . Para tanto, realizamos um estudo detalhado desta subálgebra Γ , definida a partir dos centros da álgebra envolvente universal de \mathfrak{gl}_i , com $i = 1, \dots, n$, os quais D. P. Zelobenko em [ZE73] provou que são descritos como polinômios em i indeterminadas. Adicionalmente, apresentamos uma caracterização polinomial alternativa para esses centros que surgem a partir da teoria dos quasideterminantes, desenvolvidos no artigo [GKL95] e no livro [MO07]. Também é introduzido o conceito de Base de Gröbner, juntamente com o algoritmo para o cálculo desta base, o qual tem como objetivo compreender o processo da classificação de variedades algébricas, neste caso, da Variedade de Gelfand-Tsetlin para \mathfrak{gl}_n .

Palavras-chave: Álgebra de Lie, álgebra envolvente universal, bases de Gröbner, variedade de Gelfand-Tsetlin.

Abstract

In this work, we present the Gelfand-Tsetlin variety associated with the Lie algebra \mathfrak{gl}_n through the Gelfand-Tsetlin subalgebra, denoted by Γ . To achieve this, we conduct a detailed study of this subalgebra Γ , which definition is based on the centers of the universal enveloping algebra of \mathfrak{gl}_i , with $i = 1, \dots, n$, which D. P. Zelobenko in [ZE73] proved to be described as polynomials in i variables. Additionally, we provide an alternative polynomial characterization for these centers that arises from the theory of quasideterminants, developed in the paper [GKL95] and the book [MO07]. The concept of Gröbner Basis is also introduced, along with the algorithm for calculating this basis, aiming to understand the process of classification of algebraic varieties, in this case, the Gelfand-Tsetlin variety for \mathfrak{gl}_n .

Keywords: Lie algebra, universal enveloping algebra, Gröbner bases, Gelfand-Tsetlin variety.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	12
1.1 Álgebras Graduada e Filtrada	12
1.2 Álgebras de Lie	13
1.3 Álgebra envolvente universal	17
1.3.1 Álgebra tensorial	17
1.3.2 Álgebra simétrica	18
1.3.3 Álgebra exterior	20
1.3.4 Álgebra envolvente universal	21
1.4 Teorema de Poincare-Birckoff-Witt	24
1.5 Geometria algébrica	34
1.6 Álgebra homológica	38
1.6.1 Complexo de Koszul	38
1.7 Álgebra comutativa	40
2 Teoria de Gelfand - Tsetlin	42
2.1 Subálgebra de Gelfand - Tsetlin	42
2.2 Variedade de Gelfand - Tsetlin	45
3 Outros geradores da subálgebra de Gelfand - Tsetlin	47
3.1 Quasideterminantes	47
4 Bases de Gröbner	58
4.1 Definições e notações	58
4.2 Algoritmo da divisão	62
4.3 Base de Gröbner	65
5 Base de Gröbner para a variedade de Gelfand-Tsetlin	73
Referências Bibliográficas	78

Introdução

A origem da teoria das álgebras de Lie remonta à segunda metade do século XIX, quando Sophus Lie tentou desenvolver uma teoria de simetrias contínuas aplicável a equações diferenciais. Esses estudos levaram à identificação de uma classe particular de grupos, agora denominados grupos de Lie, para os quais uma teoria abrangente foi elaborada. Atualmente, essa teoria desempenha um papel central em diversas áreas da matemática e da física, incluindo a geometria diferencial, mecânica quântica e teoria de representações.

Dada \mathfrak{g} uma álgebra de Lie sobre um corpo algebricamente fechado \mathbb{k} de característica zero, é possível construir uma álgebra associativa unitária a partir de \mathfrak{g} , chamada de álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ que contém uma cópia isomorfa do \mathfrak{g} . Esta álgebra associativa nos permite estudar algumas propriedades de \mathfrak{g} .

No âmbito da teoria das álgebras de Lie, o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt assume um papel crucial, proporcionando uma descrição explícita da álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie. Este teorema resulta dos trabalhos independentes de Poincaré[PO00] em 1900, e de Birkhoff[Bi37] e Witt[Wi37] em 1937. Tais contribuições estabeleceram as versões dos teoremas que são fundamentais na atualidade. O Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt nos permite identificar a graduação associada a álgebra envolvente universal, denotada por $gr(U(\mathfrak{g}))$, com a álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$. Esta álgebra simétrica é isomorfa à álgebra de polinômios em variáveis comutativas. Além disso, existe outra versão desse teorema, que nos permite descrever uma base da álgebra envolvente universal a partir de uma base da álgebra de Lie.

Como consequência deste teorema, quando consideramos a álgebra de Lie linear geral \mathfrak{gl}_n , existe uma cadeia natural de inclusões da forma $\mathfrak{gl}_1 \subset \mathfrak{gl}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{gl}_n$, a qual induz a cadeia da forma $U(\mathfrak{gl}_1) \subset U(\mathfrak{gl}_2) \subset \dots \subset U(\mathfrak{gl}_n)$. Assim, D. P. Zelobenko em [ZE73] mostra que o centro de $U(\mathfrak{gl}_i)$ é isomorfo à álgebra de polinômios em i indeterminadas.

Tendo em conta o anterior, no Capítulo 2 será definida a subálgebra de Gelfand-Tsetlin como a subálgebra comutativa de $U(\mathfrak{g})$ gerada pelos centros de $U(\mathfrak{gl}_i)$ com $i = 1, 2, \dots, n$. Desta forma ao tomar a imagem desses polinômios em $gr(U(\mathfrak{g}))$, podemos definir uma variedade algébrica conhecida como a Variedade de Gelfand-Tsetlin, a qual S. Ovisienko em [OV03] provou que é equidimensional com dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$.

A ideia da subálgebra de Gelfand-Tsetlin tem implicações significativas para a teoria das representações. Por exemplo, no artigo [GT50], I. M. Gelfand e M. L. Tsetlin introduzem os módulos de Gelfand-Tsetlin, fornecendo uma apresentação explícita de todas as representações irredutíveis de dimensão finita de \mathfrak{gl}_n em termos de certos

objetos combinatórios.

No Capítulo 3, nos concentramos em estudar como determinar outras expressões polinomiais que geram os centros da álgebra $U(\mathfrak{gl}_n)$, que surgem a partir da teoria dos quasideterminantes e a conexão com as funções simétricas não comutativas desenvolvida no artigo [GKL95] de I.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh e J.-Y. Thibon, e no livro de A. Molev [MO07]. E de maneira análoga ao Capítulo 2, considerar a variedade de Gelfand-Tsetlin associada a subálgebra de Gelfand-Tsetlin.

Em seguida, no Capítulo 4, apresentamos as bases de Gröbner como ferramentas essenciais para a manipulação eficiente de ideais polinomiais, que são frequentemente usadas para resolver sistemas de equações polinomiais e para estudar variedades algébricas, permitindo uma abordagem algorítmica para analisar propriedades geométricas. O conceito de bases de Gröbner foi introduzido em 1965 por Bruno Buchberger em sua tese de doutorado [BU65] e recebeu esse nome em homenagem ao seu orientador, Wolfgang Gröbner, também desenvolveu um algoritmo para obtenção dessas bases, denominado algoritmo de Buchberger.

No Capítulo 5, nos concentramos no cálculo das bases de Grobner para as variedades de Gelfand-Tsetlin associadas às álgebras de Lie \mathfrak{gl}_2 , \mathfrak{gl}_3 e \mathfrak{gl}_4 , usando como ferramenta computacional o software Magma [CBF13].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo queremos apresentar alguns conceitos básicos sobre álgebras graduadas e filtradas, álgebras de Lie, álgebras tensoriais, simétricas e a álgebra envolvente universal, geometria algébrica, álgebra homológica e álgebra comutativa, os quais serão necessários ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao longo do trabalho fixaremos R como um anel comutativo com identidade e \mathbb{k} como um corpo algebricamente fechado de característica zero. Alguns dos resultados apresentados na dissertação valem em um contexto mais geral.

1.1 Álgebras Graduada e Filtrada

Para os seguintes conceitos, será levado em consideração como referência [MA70].

Definição 1.1.1. *Seja A uma \mathbb{k} -álgebra. Se existir uma coleção de \mathbb{k} -subespaços vetoriais A_i de A tais que, $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, satisfazendo $A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}$. Chamaremos esta coleção uma **filtração** de A . Se $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, então dizemos que A é uma álgebra **filtrada**.*

Exemplo 1.1.2. *A álgebra de polinômios $\mathbb{k}[x_\lambda : \lambda \in I]$, onde I é um conjunto de índices enumerável, é uma álgebra filtrada, pois, ela é equipada com uma sequência de subálgebras \mathbb{k}_n , onde \mathbb{k}_n é a álgebra de polinômios em n variáveis. Além disso, a inclusão $\mathbb{k}_n \subset \mathbb{k}_{n+1}$ implica que temos uma coleção crescente. Também ao multiplicar elementos de \mathbb{k}_n com elementos de \mathbb{k}_p , o resultado pertence a \mathbb{k}_{n+p} , portanto $\mathbb{k}_n \mathbb{k}_p \subset \mathbb{k}_{n+p}$. Além disso, ao fazer a união de todos os \mathbb{k}_n temos*

$$\bigcup_{n \in I} \mathbb{k}_n = \mathbb{k}[x_\lambda : \lambda \in I].$$

Definição 1.1.3. *Uma \mathbb{k} -álgebra A é dita **graduada**, se existe uma coleção de \mathbb{k} -subespaços vetoriais A_n (chamada a **gradação** de A), tais que $A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}$ e*

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 1.1.4. Seja $\mathbb{k}[x]$ a álgebra de polinômios na variável x . Consideremos o conjunto $A^r := \{kx^r : k \in \mathbb{k}\}$. Claramente temos que $A^r \cdot A^s \subset A^{r+s}$ e além disso podemos escrever

$$\mathbb{k}[x] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i.$$

Logo $\mathbb{k}[x]$ é uma álgebra graduada.

Observação 1.1.5. Se A é uma álgebra associativa filtrada com filtração

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$$

então observemos que esta filtração induz uma graduação em A , que denotaremos por $gr(A)$, de maneira que

$$gr(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n$$

onde

$$\bar{A}_n := A_n/A_{n-1}$$

e

$$A_{-1} = \{0\}.$$

Esta graduação é chamada a graduação associada à filtração de A ou quando a filtração já está estabelecida é simplesmente chamada a graduação associada de A .

1.2 Álgebras de Lie

Nesta seção apresentamos alguns conceitos necessários sobre álgebras de Lie para a compreensão deste trabalho.

As álgebras de Lie são importantes porque descrevem a estrutura subjacente de grupos de Lie, que são grupos e simultaneamente variedades diferenciáveis. As álgebras de Lie são usadas para estudar a geometria e a topologia dessas variedades, bem como para entender propriedades dos campos vetoriais. O estudo destas estruturas surgem naturalmente em diversas áreas da matemática e da física, como a geometria diferencial, a teoria das equações diferenciais parciais, a mecânica quântica e a teoria de grupos.

Definição 1.2.1. Uma **álgebra de Lie** \mathfrak{g} é um \mathbb{k} -espaço vetorial, munido de um produto \mathbb{k} -bilinear $[\ , \] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (chamado colchete de Lie), que satisfaz:

i) $[x, x] = 0, \forall x \in \mathfrak{g};$

ii) *Identidade de Jacobi:* $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$

Observação 1.2.2. Dada uma álgebra associativa A , temos uma álgebra de Lie associada a A com colchete de Lie definido pelo comutador, i.e.,

$$[x, y] := xy - yx, \quad \forall x, y \in A.$$

Denotaremos esta álgebra de Lie com $A^{(-)}$.

Exemplo 1.2.3.

1. As matrizes quadradas $M_n(\mathbb{k})$ de ordem n , sobre \mathbb{k} , com o colchete de Lie definido por $[X, Y] = XY - YX$ para todo $X, Y \in M_n(\mathbb{k})$. De fato:

i) Seja $X \in M_n(\mathbb{k})$ então

$$[X, X] = XX - XX = 0.$$

ii) Sejam $X, Y, Z \in M_n(\mathbb{k})$ (quaisquer) tem-se:

$$\begin{aligned} & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = \\ & = [X, YZ - ZY] + [Y, ZX - XZ] + [Z, XY - YX] \\ & = X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) - \\ & \quad - (ZX - XZ)Y + Z(XY - YX) - (XY - YX)Z \\ & = XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + \\ & \quad + XZY + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ \\ & = 0. \end{aligned}$$

2. Sejam V um \mathbb{k} -espaço vetorial e $\text{End}(V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : V \rightarrow V$ com estrutura de álgebra associativa. Denotemos a álgebra $\text{End}(V)$ vista como álgebra de Lie por $\mathfrak{gl}(V)$ com o colchete definido pelo comutador, está álgebra de Lie é chamada **álgebra linear geral**.

Se $\dim_{\mathbb{k}}(V) = n$, então podemos identificar $\text{End}(V)$ com o \mathbb{k} -espaço vetorial $M_n(\mathbb{k})$ das matrizes quadradas $n \times n$ e portanto dizemos que:

$$\mathfrak{gl}_n := \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) := \mathfrak{gl}(V) = M_n(\mathbb{k}).$$

3. Sejam $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ e $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ a álgebra de Lie definida no exemplo anterior. Considere o anel de polinômios $\mathbb{C}[x]$ quociente (x^m) . O produto tensorial $\mathfrak{g}_m(n) := \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x]/(x^m)$ define uma estrutura de álgebra de Lie sobre \mathbb{C} com colchete definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [,] : \mathfrak{g}_m(n) \times \mathfrak{g}_m(n) &\longrightarrow \mathfrak{g}_m(n) \\ (a \otimes_{\mathbb{C}} x^i, b \otimes_{\mathbb{C}} x^j) &\longmapsto [a \otimes_{\mathbb{C}} x^i, b \otimes_{\mathbb{C}} x^j] := [a, b] \otimes_{\mathbb{C}} x^{i+j} \end{aligned}$$

para qualquer $a, b \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ e $x^i, x^j \in \mathbb{C}[x]/(x^m)$. A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_m(\mathbb{C})$ é chamada **álgebra de Lie corrente truncada**. De fato, se $a \otimes_{\mathbb{C}} x^i, b \otimes_{\mathbb{C}} x^j, c \otimes_{\mathbb{C}} x^s$ elementos em $\mathfrak{g}_m(\mathbb{C})$, então

$$[a \otimes_{\mathbb{C}} x^i, a \otimes_{\mathbb{C}} x^i] = [a, a] \otimes_{\mathbb{C}} x^{i+i},$$

como a um elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, temos que $[a, a] = 0$, logo

$$[a \otimes_{\mathbb{C}} x^i, a \otimes_{\mathbb{C}} x^i] = 0 \otimes_{\mathbb{C}} x^{i+i} = 0.$$

Além disso, denotando neste caso o produto tensorial sobre \mathbb{C} como \otimes , temos que

$$\begin{aligned} & [a \otimes x^i, [b \otimes x^j, c \otimes x^s]] + [b \otimes x^j, [c \otimes x^s, a \otimes x^i]] + [c \otimes x^s, [a \otimes x^i, b \otimes x^j]] \\ & = [a \otimes x^i, [b, c] \otimes x^{j+s}] + [b \otimes x^j, [c, a] \otimes x^{s+i}] + [c \otimes x^s, [a, b] \otimes x^{i+j}] \\ & = [a, [b, c]] \otimes x^{i+j+s} + [b, [c, a]] \otimes x^{j+s+i} + [c, [a, b]] \otimes x^{s+i+j} \\ & = ([a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]]) \otimes x^{i+j+s} \\ & = 0 \otimes x^{i+j+s} = 0. \end{aligned}$$

Note que $\mathfrak{g}_m(n)$ é o espaço vetorial de monômios de grau menor que m sobre \mathbb{C} , que usa como coeficientes os elementos de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Este trabalho se concentrará principalmente na construção da variedade Gelfand-Tsetlin para a álgebra de Lie \mathfrak{gl}_n . Em [BR21] pode-se ver que a variedade de Gelfand-Tsetlin associada a álgebra de Lie corrente truncada é equidimensional com dimensão $mn(n-1)/2$ se, e somente se, nos casos $n = 1, 2$.

Definição 1.2.4. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} um \mathbb{k} -subespaço vetorial de \mathfrak{g} , dizemos que \mathfrak{h} é uma **subálgebra de Lie** de \mathfrak{g} se $[x, y] \in \mathfrak{h}$ para todo $x, y \in \mathfrak{h}$.*

Exemplo 1.2.5. *Seja $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{k}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{k})$. Se $X, Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ temos*

$$\begin{aligned} \text{tr}([X, Y]) &= \text{tr}(XY - YX) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) \\ &= \text{tr}(XY) - \text{tr}(XY) = 0. \end{aligned}$$

*Esta álgebra é chamada de **álgebra de Lie linear especial**.*

Exemplo 1.2.6. $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k}) := \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k}) \mid XJ + JX^t = 0\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k})$, onde $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $0, 1$ são respectivamente as matrizes nula e identidade de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$. Denotemos a matriz identidade de $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{k})$ por $1_{(2n, \mathbb{k})}$. Note que $J^2 = -1_{(2n, \mathbb{k})}$. Seja $X, Y \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{k})$ então

$$\begin{aligned} [X, Y]^t &= (XY - YX)^t = Y^t X^t - X^t Y^t \\ &= JYJXJ - JXJYJ = JYJ^2XJ - JXJ^2YJ \\ &= JXYJ - JYXJ = J(XY - YX)J \\ &= J[X, Y]J. \end{aligned}$$

Portanto $[X, Y]J + J[X, Y]^t = 0$.

\mathfrak{sp}_{2n} é chamada de **álgebra de Lie simplectica**.

Definição 1.2.7. *Sejam $(\mathfrak{g}, [,]_1)$ e $(\mathfrak{h}, [,]_2)$ duas álgebras de Lie. Dizemos que uma transformação linear $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um **homomorfismo** de álgebras de Lie, se satisfaz*

$$f([x, y]_1) = [f(x), f(y)]_2, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Exemplo 1.2.8. *Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$, com o colchete de Lie dado pelo comutador. Seja P uma matriz invertível em $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$. Consideremos a seguinte aplicação:*

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) &\longrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k}) \\ A &\longmapsto PAP^{-1}. \end{aligned}$$

A linearidade é provada através da bilinearidade do colchete de Lie, além disso temos que f preserva a operação do colchete de Lie, pois sejam $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$ temos que:

$$\begin{aligned} f([A, B]) &= f(AB - BA) = P(AB - BA)P^{-1} \\ &= PABP^{-1} - PBAP^{-1} \\ &= PAP^{-1}PBP^{-1} - PBP^{-1}PAP^{-1} \\ &= f(A)f(B) - f(B)f(A) \\ &= [f(A), f(B)]. \end{aligned}$$

Desta forma temos que f é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Definição 1.2.9. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie sobre um corpo \mathbb{k} . Uma **representação** de \mathfrak{g} é um homomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ x &\longrightarrow \rho_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ & y \longrightarrow \rho_x(y), \end{aligned}$$

onde V é um espaço vetorial sobre \mathbb{k} .

Exemplo 1.2.10. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Para cada elemento x em \mathfrak{g} , definimos a transformação linear ad_x da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathfrak{g}) \\ x &\longrightarrow ad_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ & y \longrightarrow ad_x(y) := [x, y], \end{aligned}$$

para qualquer y em \mathfrak{g} . Note que ad_x é um homomorfismo de álgebras de Lie. Para todos x, y em \mathfrak{g} , temos que

$$\begin{aligned} ad([x, y])(z) &= ad_{[x, y]}(z) = [[x, y], z] = -[z, [x, y]] \\ &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= [x, ad_y(z)] - [y, ad_x(z)] = ad_x \circ ad_y(z) - ad_y \circ ad_x(z) \\ &= [ad_x, ad_y](z), \end{aligned}$$

o qual é válido para qualquer z em \mathfrak{g} . Portanto $ad([x, y]) = [ad(x), ad(y)]$.

Esta representação é conhecida como a representação adjunta.

Definição 1.2.11. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie sobre um corpo \mathbb{k} . Dizemos que V é um **\mathfrak{g} -módulo** se é um \mathbb{k} -espaço vetorial munido com uma aplicação

$$\begin{aligned} \cdot : \mathfrak{g} \times V &\longrightarrow V \\ (x, v) &\longmapsto x \cdot v \end{aligned}$$

satisfazendo as condições:

- i) $(\lambda x + \mu y) \cdot v = \lambda(x \cdot v) + \mu(y \cdot v)$,
- ii) $x \cdot (\lambda v + \mu w) = \lambda(x \cdot v) + \mu(x \cdot w)$,
- iii) $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$,

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $v, w \in V$, e $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$.

Exemplo 1.2.12. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, então $V = \mathfrak{g}$ é um \mathfrak{g} -módulo sob a ação da representação adjunta do Exemplo 1.2.10, $ad_x(y) = [x, y]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Neste caso, \mathfrak{g} é um \mathfrak{g} -módulo, pois a ação de \mathfrak{g} em si mesmo através da representação adjunta preserva a estrutura de espaço vetorial de \mathfrak{g} e satisfaz as condições i), ii) e iii) da Definição 1.2.11.

1.3 Álgebra envolvente universal

Nesta secção apresentaremos os conceitos da álgebra tensorial, álgebra simétrica, álgebra exterior e finalmente da álgebra envolvente universal junto com algumas das suas propriedades. O objetivo é apresentar a prova do teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt.

A álgebra envolvente universal é uma construção importante da teoria de Lie, por exemplo a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie é uma álgebra associativa que contém a álgebra original como um subespaço. Isso significa que muitas propriedades das álgebras de Lie podem ser estudadas por meio da álgebra envolvente universal.

1.3.1 Álgebra tensorial

Sejam R um anel comutativo com unidade, M um R -módulo. Para cada inteiro $n \geq 0$, o n -ésimo produto tensorial sobre R de M é denotado por $T^n M$, onde:

$$\begin{aligned} T^0 M &= R, \\ T^1 M &= M, \\ T^2 M &= M \otimes_R M \\ &\vdots \\ T^n M &= \underbrace{M \otimes_R M \otimes_R \cdots \otimes_R M}_{n\text{-vezes}}. \end{aligned}$$

Definição 1.3.1. Chamamos a **álgebra tensorial** de M o R -módulo

$$T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n M,$$

onde cada elemento de $T(M)$ é uma soma finita de elementos s_i , com $s_i \in T^i M$. E a multiplicação interna e a multiplicação escalar que se definem nos geradores por:

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \cdot (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) &= x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}; \\ a(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) &= ax_1 \otimes \cdots \otimes x_p, \end{aligned}$$

com $x_i \in M$, $a \in R$ e é estendida por linearidade.

Pode-se observar que a multiplicação definida em $T(M)$ é associativa e tem como identidade o elemento unitário de $T^0 M = R$, mas este produto em geral não é comutativo, já que o produto tensorial não é comutativo. Além disso o produto satisfaz a seguinte condição:

$$T^p M \otimes T^q M \subseteq T^{p+q} M, \quad \text{com } p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

o qual implica que $T(M)$ é uma álgebra graduada.

Observação 1.3.2. Seja $\mathbf{i} : T^1 M = M \hookrightarrow T(M)$ a aplicação de inclusão, com $\mathbf{i}(m) = m$. Pela definição da multiplicação em $T(M)$ tem-se

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n = \mathbf{i}(x_1) \cdots \mathbf{i}(x_n).$$

Portanto como cada elemento de $T(M)$ é uma soma finita dos elementos anteriores, $T(M)$ está gerado como R -álgebra por $\mathbf{i}(M) = T^1 M$. Então $T(M)$ é igual a $R\langle M \rangle$ como conjunto, mas não como álgebra, porque $T(M)$ não é comutativa.

Proposição 1.3.3. (Propriedade universal da álgebra tensorial) *Sejam M um R -módulo e A uma R -álgebra associativa com unidade. Para qualquer homomorfismo de R -módulos $\eta : M \rightarrow A$, existe um único homomorfismo de R -álgebras $\gamma : T(M) \rightarrow A$ tal que $\gamma(1) = 1$ e $\gamma \circ \mathbf{i} = \eta$, onde $\mathbf{i} : M \hookrightarrow T(M)$ é a inclusão, i.e., o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathbf{i}} & T(M) \\ & \searrow \eta & \swarrow \exists! \gamma \\ & & A \end{array}$$

Demonstração. Ver [BO89] na página 485. □

Proposição 1.3.4. *Seja M um R -módulo livre, com uma base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ então:*

1. $T^k M$ é um R -módulo livre de posto n^k para todo $k \geq 1$, e os tensores da forma

$$e_{n_1} \otimes e_{n_2} \otimes \cdots \otimes e_{n_k},$$

formam uma base para $T^k M$.

2. *Temos que $T(M)$ é isomorfa à álgebra de polinômios $R\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ nas variáveis não comutativas x_1, x_2, \dots, x_n .*

Demonstração. Ver [LA02] página 633. □

1.3.2 Álgebra simétrica

Seja M um R -módulo e $T(M)$ sua álgebra tensorial. Consideremos $C(M)$ como o ideal bilateral de $T(M)$ gerado por todos os elementos da forma

$$C(M) = \langle x \otimes y - y \otimes x \rangle, \quad \forall x, y \in M.$$

Definição 1.3.5. *A álgebra quociente*

$$S(M) := T(M)/C(M)$$

é dita a álgebra simétrica de M , a qual herda o produto associativo de $T(M)$.

Observação 1.3.6. *A partir da definição de $S(M)$, podemos concluir o seguinte:*

- i) $S(M)$ é uma álgebra associativa com unidade, por ser um quociente de $T(M)$ por um ideal bilateral.
- ii) Denotaremos por σ o epimorfismo canônico de R -álgebras:

$$\begin{aligned} \sigma : T(M) &\longrightarrow S(M) \\ x &\longmapsto \sigma(x) := \bar{x} := x \text{ mod } C(M). \end{aligned}$$

- iii) *A definição do ideal $C(M)$ é tal que $S(M)$ vira uma álgebra comutativa.*

Observação 1.3.7. Além disso, vale ressaltar que os geradores de $C(M)$ pertencem a T^2M , o que implica $C(M) \cap T^0M = C(M) \cap T^1M = 0$. Dessa forma, podemos escrever $C(M)$ como uma soma direta dos espaços $C(M) \cap T^kM$, para $k \geq 2$. Podemos então definir $S^kM := T^kM / (C(M) \cap T^kM) = \sigma(T^kM)$.

Também é importante notar que, como $T^0M = R$ e $T^1M = M$, temos que $\sigma(R) = R$ e $\sigma(M) = M$.

Proposição 1.3.8. Para cada $n \geq 1$, seja $S^nM := \sigma(T^nM)$ a imagem de T^nM em $S(M)$. Então $S(M)$ é uma álgebra graduada, com graduação

$$S(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^nM.$$

Demonstração. Pela definição da projeção canônica cada $S^nM = \sigma(T^nM)$ é um R -módulo. Falta provar que o produto em $S(M)$ manda multiplicação de dois elementos homogêneos de S^mM e S^pM respectivamente em elementos de $S^{m+p}M$. Para isto, seja $x \in T^mM$ e $y \in T^pM$ tais que $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m$ e $y = y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_p$. Como $T(M)$ é uma álgebra graduada e $\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(xy)$, segue que $xy \in T^{m+p}M$.

Então fazendo a multiplicação de dois elementos de S^mM e S^pM respectivamente temos que:

$$\begin{aligned} \overline{(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)} \overline{(y_1 \otimes \cdots \otimes y_p)} &= \sigma(x)\sigma(y) \\ &= \sigma(xy) \\ &= \overline{x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_p} \end{aligned}$$

o qual pertence a $S^{m+p}M$. □

Proposição 1.3.9. (Propriedade universal da álgebra simétrica) Seja R um anel comutativo com unidade, M um R -módulo, $S(M)$ sua álgebra simétrica com a inclusão $\mathbf{i} : M \hookrightarrow S(M)$. Se dada A uma R -álgebra comutativa com unidade, com uma aplicação R -linear $f : M \rightarrow A$, então existe um único homomorfismo de álgebras comutativas $g : S(M) \rightarrow A$ tal que $g \circ \mathbf{i} = f$, isto é, que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathbf{i}} & S(M) \\ & \searrow f & \swarrow \exists! g \\ & & A \end{array}$$

Demonstração. Ver [BO89] na página 497. □

Proposição 1.3.10. Seja M um R -módulo livre e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base de M , então $S(M)$ é isomorfa à a álgebra de polinômios com variáveis comutativas $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Demonstração. Consideremos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' : M &\longrightarrow R[x_1, x_2, \dots, x_n] \\ e_i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Agora sejam A uma R -álgebra comutativa com unidade, com $\mathbf{j} : M \rightarrow A$ uma aplicação R -linear e a seguinte aplicação R -linear

$$\begin{aligned}\phi : R[x_1, x_2, \dots, x_n] &\longrightarrow A \\ x_1 x_2 \cdots x_n &\longmapsto \mathbf{j}(e_1) \mathbf{j}(e_2) \cdots \mathbf{j}(e_n) \\ 1 &\longmapsto 1_A\end{aligned}$$

Dado $m \in M$ arbitrário, ele pode ser escrito como a combinação linear $m = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, com $a_i \in R$, então

$$\phi \circ \mathbf{i}'(m) = \phi \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{j}(e_i) = \mathbf{j} \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = \mathbf{j}(m),$$

ou seja, $\phi \circ \mathbf{i}' = \mathbf{j}$. Além disso, se existir outro homomorfismo de álgebras comutativas $\theta : R[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow A$ tal que $\theta \circ \mathbf{i}' = \mathbf{j}$ teremos $\theta = \phi$.

Logo, temos que o par $(R[x_1, x_2, \dots, x_n], \phi)$ cumpre a propriedade universal da álgebra simétrica de M . \square

1.3.3 Álgebra exterior

Seja M um R -módulo, $T(M)$ sua álgebra tensorial, consideremos o seguinte ideal bilateral $A(M)$ da álgebra tensorial, o qual é gerado por todos os elementos da forma

$$\langle x \otimes x \rangle, \quad \forall x \in M.$$

Definição 1.3.11. *A álgebra quociente*

$$\bigwedge M := T(M)/A(M)$$

é dita a *álgebra exterior* de M .

Observação 1.3.12. *Note que $x \otimes y + y \otimes x$ é um elemento do ideal $A(M)$.*

O produto em $\bigwedge M$ é denotado pelo símbolo \wedge , i.e., para $m_1, m_2, \dots, m_n \in M$ denotamos por

$$m_1 \wedge m_2 \wedge \cdots \wedge m_n$$

a classe de

$$m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n$$

em $\bigwedge M$.

Observação 1.3.13.

i) Note que, como o ideal $A(M)$ é gerado por elementos homogêneos, $\bigwedge M$ herda a estrutura de uma R -álgebra graduada.

ii) Em geral $\bigwedge M$ não é comutativa; mas pela construção tem-se

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{(\text{grau } \alpha)(\text{grau } \beta)} \beta \wedge \alpha, \quad \text{para homogêneos } \alpha, \beta \in \bigwedge M.$$

iii) Sejam x_1, \dots, x_n elementos de M e π uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$. Então

$$x_{\pi(1)} \wedge x_{\pi(2)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi(n)} = \sigma(\pi)x_1 \wedge \cdots \wedge x_n;$$

onde $\sigma(\pi)$ é o sinal de π . Além disso $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$ se $x_i = x_j$ para algum $i \neq j$.

A n -ésima componente graduada de $\bigwedge M$ é denotado por $\bigwedge^n M$ e é chamado de n -ésima potência exterior de M . Da definição de $\bigwedge M$ é possível ver que $\bigwedge^0 M = R$, $\bigwedge^1 M = M$.

Além disso ela satisfaz a seguinte propriedade universal.

Proposição 1.3.14. Propriedade universal da n -ésima potência exterior. *Seja M um R -módulo. Se existir um R -módulo N e uma aplicação n -linear $f : M^n \rightarrow N$, com $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$ sempre que $x_i = x_j$, então existe um único homomorfismo de R -módulos $g : \bigwedge^n M \rightarrow N$ tal que $g \circ \wedge^n = f$, onde \wedge^n é a aplicação n -linear e anti-simétrica que leva (m_1, \dots, m_n) em $m_1 \wedge \cdots \wedge m_n$, para todo $(m_1, \dots, m_n) \in M^n$, ou seja, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{\wedge^n} & \bigwedge^n M \\ & \searrow f & \swarrow \exists! g \\ & & N \end{array}$$

Demonstração. Ver [BO89] na página 511. □

Proposição 1.3.15. *Seja M um R -módulo livre, de posto n e com base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, então:*

i) *Para cada $k \geq 1$, $\bigwedge^k M$ é um R -módulo livre com base*

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}.$$

Em particular, seu posto é $\binom{n}{k}$.

ii) *$\bigwedge M$ é um R -módulo livre finitamente gerado de posto 2^n .*

Demonstração. Ver [BO89] na página 518. □

1.3.4 Álgebra envolvente universal

Nesta secção apresentaremos um conceito fundamental, o qual citaremos ao longo do trabalho.

Definição 1.3.16. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie sobre \mathbb{k} um corpo e seja U uma \mathbb{k} -álgebra associativa com identidade 1_U e $\mathfrak{i} : \mathfrak{g} \rightarrow U^{(-)}$ uma aplicação que satisfaz:*

$$\mathfrak{i}([x, y]) = \mathfrak{i}(x)\mathfrak{i}(y) - \mathfrak{i}(y)\mathfrak{i}(x) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g},$$

isto é, que \mathfrak{i} é um homomorfismo de álgebras de Lie. Chamaremos ao par (U, \mathfrak{i}) como a álgebra envolvente universal de \mathfrak{g} se satisfaz a seguinte propriedade universal:

Para qualquer \mathbb{k} -álgebra associativa A com unidade e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow A^{(-)}$, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \longrightarrow A$, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{i} & U \\ & \searrow \phi & \swarrow \exists! \psi \\ & & A \end{array}$$

isto é $\psi \circ i = \phi$, além disso $\psi(1_U) = 1_A$.

Proposição 1.3.17. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e sejam (U_1, i_1) e (U_2, i_2) duas álgebras envolventes universais de \mathfrak{g} . Então, existe um isomorfismo $\psi : U_1 \longrightarrow U_2$ de álgebras tal que $i_2 = \psi \circ i_1$.*

Demonstração. Da propriedade universal da álgebra envolvente universal temos que existe um único homomorfismo de álgebras $\psi_1 : U_1 \longrightarrow U_2$ tal que $\psi_1(1_{U_1}) = 1_{U_2}$ e $\psi_1 \circ i_1 = i_2$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{i_1} & U_1 \\ & \searrow i_2 & \swarrow \exists! \psi_1 \\ & & U_2 \end{array}$$

Analogamente, existe um único homomorfismo de álgebras $\psi_2 : U_2 \longrightarrow U_1$ tal que $\psi_2(1_{U_2}) = 1_{U_1}$ e $\psi_2 \circ i_2 = i_1$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{i_2} & U_2 \\ & \searrow i_1 & \swarrow \exists! \psi_2 \\ & & U_1 \end{array}$$

Portanto, temos que:

$$\psi_2 \circ (\psi_1 \circ i_1) = \psi_2 \circ i_2 = i_1 = Id_{U_1} \circ i_1,$$

onde Id_{U_1} é o morfismo identidade de U_1 . Logo como (U_1, i_1) é uma álgebra envolvente universal para \mathfrak{g} , pela propriedade universal podemos dizer que $\psi_2 \circ \psi_1 = Id_{U_1}$. Analogamente, temos que $\psi_1 \circ \psi_2 = Id_{U_2}$. Portanto, ψ_1 e ψ_2 são isomorfismos de álgebras, assim $U_1 \cong U_2$. \square

Proposição 1.3.18. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, então existe uma álgebra envolvente universal para \mathfrak{g} .*

Demonstração. Consideremos a álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} e o ideal bilateral J de $T(\mathfrak{g})$ gerado por todos os elementos da forma

$$J = \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \rangle, \forall x, y \in \mathfrak{g},$$

definamos agora a álgebra associativa $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J$, a qual herda a associatividade de a álgebra tensorial e induz uma projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi : T(\mathfrak{g}) &\longrightarrow U(\mathfrak{g}) \\ w &\longmapsto \pi(w) = w + J = \bar{w}. \end{aligned}$$

Como $J \subset \bigoplus_{i>0} T^i \mathfrak{g}$ segue que $\pi(T^0 \mathfrak{g}) = T^0 \mathfrak{g} = \mathbb{k} \subset U(\mathfrak{g})$, isto é que $U(\mathfrak{g})$ contem os escalares. Além disso temos a aplicação injetiva:

$$\begin{aligned} \tau : \mathfrak{g} &\longrightarrow T(\mathfrak{g}) \\ x &\longmapsto \tau(x) := x \end{aligned}$$

e também podemos considerar a composta

$$\pi \circ \tau : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g}),$$

onde podemos notar que $\mathbf{i} = \pi \circ \tau$. Falta ver que de fato é um homomorfismo de álgebras de Lie. Temos o seguinte

$$\begin{aligned} \mathbf{i}([x, y]) &= \pi \circ \tau([x, y]) \\ &= \pi([x, y]) \\ &= \overline{[x, y]} \\ &= \overline{x \otimes y - y \otimes x} \\ &= \overline{x \otimes y} - \overline{y \otimes x} \\ &= \mathbf{i}(x)\mathbf{i}(y) - \mathbf{i}(y)\mathbf{i}(x) \\ &= [\mathbf{i}(x), \mathbf{i}(y)], \end{aligned}$$

como preserva o colchete de Lie, temos que \mathbf{i} é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Para provar agora que vale a propriedade universal, consideremos uma \mathbb{k} -álgebra associativa com unidade e um homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow A^{(-)}$. Pela propriedade universal da álgebra tensorial, existe um único homomorfismo de \mathbb{k} -álgebras $\gamma : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tal que $\gamma \circ \mathbf{j} = \phi$, onde $\mathbf{j} : \mathfrak{g} \longrightarrow T(\mathfrak{g})$. Note que

$$\begin{aligned} \gamma(J) &= \gamma(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) \\ &= \gamma(x)\gamma(y) - \gamma(y)\gamma(x) - \gamma([x, y]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ou seja $J \subset \text{Ker}(\gamma)$. Portanto existe um homomorfismo de \mathbb{k} -álgebras $\psi : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$, tal que $\psi \circ \pi = \gamma$. Além disso, temos $\psi \circ \mathbf{i} = \psi \circ \pi \circ \mathbf{j} = \gamma \circ \mathbf{j} = \phi$ e $\psi(1) = 1$.

Para provar a unicidade, consideremos outro homomorfismo de \mathbb{k} -álgebras $\psi' : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$, tal que $\psi'(1) = 1$ e $\psi' \circ \mathbf{i}(x) = \phi(x)$, para todo $x \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned} \psi'(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m + J) &= \psi'(\pi(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m)) = \psi'(\mathbf{i}(w_1) \cdots \mathbf{i}(w_m)) = \psi'(w_1) \cdots \psi'(w_m) = \\ &= \phi(w_1) \cdots \phi(w_m) = \psi \circ \mathbf{i}(w_1) \cdots \psi \circ \mathbf{i}(w_m) = \\ &= \psi(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m + J), \end{aligned}$$

para todo $w_1 \otimes \cdots \otimes w_m + J \in T(\mathfrak{g})/J$. □

Observação 1.3.19. Se a álgebra de Lie \mathfrak{g} for abeliana, então $U(\mathfrak{g})$ é isomorfa a $S(\mathfrak{g})$, pois os ideais bilaterais $C(\mathfrak{g})$ e J são iguais.

1.4 Teorema de Poincare-Birckoff-Witt

Esta secção é baseada em [HU72].

Vamos a definir uma álgebra graduada através da álgebra envolvente universal. Para isso, seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e T sua álgebra tensorial. Definamos uma filtração em $T(\mathfrak{g})$ e $U(\mathfrak{g})$ por

$$\begin{aligned} T_m &:= T^0 \oplus T^1 \oplus \cdots \oplus T^m \\ U_m &:= \pi(T_m) \\ U_{-1} &:= \{0\}, \end{aligned}$$

onde $\pi : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ é a projeção canônica. Logo

$$\begin{aligned} U_m \cdot U_p &\subset U_{m+p} \\ U_m &\subset U_{m+1}. \end{aligned}$$

Considere o \mathbb{k} -espaço vetorial

$$G^m := U_m / U_{m-1}.$$

Note que este espaço vetorial induz uma projeção

$$\pi'_i : U_i \longrightarrow G^i,$$

além disso, podemos definir uma aplicação \mathbb{k} -bilinear bem definida

$$\begin{aligned} \Phi' : G^m \times G^p &\longrightarrow G^{m+p} \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\longmapsto \bar{x} \bar{y} = \overline{xy}, \end{aligned}$$

com efeito, tome $\bar{u} = \overline{u'} \in G^m$ e $\bar{v} = \overline{v'} \in G^p$ com $u, u' \in U_m$ e $v, v' \in U_p$, logo $u - u' \in U_{m-1}$ e $v - v' \in U_{p-1}$, assim $u - u' = x$ e $v - v' = y$ com $x \in U_{m-1}$ e $y \in U_{p-1}$, segue que $u = u' + x$ e $v = v' + y$, desta forma

$$\begin{aligned} uv &= (u' + x)(v' + y) \\ &= u'v' + u'y + xv' + xy, \end{aligned}$$

mas $u'y + xv' + xy \in U_{m+p-1}$. Portanto $\overline{uv} = \overline{u'v'}$ em G^{m+p} , logo $\overline{uv} - \overline{u'v'} \in U_{m+p-1}$, ou seja suas classes laterais são iguais em G^{m+p} .

Agora consideremos o seguinte \mathbb{k} -espaço vetorial:

$$gr(U) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} G^i.$$

Note que estendendo bilinearmente Φ' , conseguimos um produto em $gr(U)$ dado por

$$\begin{aligned} gr(U) \times gr(U) &\longrightarrow gr(U) \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\longmapsto \bar{x} \bar{y} := \overline{xy}. \end{aligned}$$

Obtemos com esta multiplicação uma estrutura de álgebra, chamada **álgebra graduada associada a álgebra envolvente universal** $U(\mathfrak{g})$.

Observação 1.4.1. Em $gr(U)$ existe um epimorfismo de espaços vetoriais $\pi' : U \longrightarrow gr(U)$ que restrito a cada componente graduada, coincide com π'_i .

Agora vejamos que a restrição de π a T^m é uma transformação \mathbb{k} -linear

$$\pi_m = \pi|_{T^m} : T^m \longrightarrow \pi(T^m) \subset \pi(T_m) = U_m,$$

logo,

$$\begin{aligned} \phi_m : T^m &\longrightarrow G^m \\ x &\longmapsto \phi_m(x) := \pi(x) + U_{m-1} \end{aligned}$$

é uma transformação \mathbb{k} -linear sobrejetora. Portanto, estendendo por \mathbb{k} -linearidade, temos um homomorfismo de \mathbb{k} -álgebras

$$\begin{aligned} \phi : T &\longrightarrow gr(U) \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_m &\longmapsto \phi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = \phi_m(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \end{aligned}$$

com $\phi(1) = 1$, ϕ é sobrejetora pois $\phi|_{T_m} = \phi_m$.

Lema 1.4.2. $\phi : T \longrightarrow gr(U)$ é um homomorfismo de álgebras. Além disso, $\phi(C(\mathfrak{g})) = 0$ e assim ϕ induz um homomorfismo de álgebras

$$\omega : S \longrightarrow gr(U).$$

Demonstração. Seja $x \in T^m$ e $y \in T^p$, aplicando ϕ temos:

$$\begin{aligned} \phi(xy) &= \pi' \circ \pi(xy) = \overline{xy} = \overline{x} \overline{y} \\ &= (\pi' \circ \pi(x))(\pi' \circ \pi(y)) \\ &= \phi(x)\phi(y). \end{aligned}$$

Agora seja $x \otimes y - y \otimes x$ gerador do ideal $C(\mathfrak{g})$, segue-se que $\pi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_2$, mas $\pi(x \otimes y - y \otimes x) = \pi([x, y]) \in U_1$. Com efeito, aplicando ϕ nos geradores de $C(\mathfrak{g})$, temos:

$$\begin{aligned} \phi(x \otimes y - y \otimes x) &= \phi_2(x \otimes y - y \otimes x) \\ &= \pi'_2(\pi(x \otimes y - y \otimes x)) \\ &= \pi'_2([x, y]) = 0 \end{aligned}$$

logo $C(\mathfrak{g}) \subset \ker(\phi)$. Portanto existe um homomorfismo de \mathbb{k} -álgebras sobrejetor

$$\begin{aligned} \omega : T/C = S &\longrightarrow gr(U) \\ v + C(\mathfrak{g}) &\longmapsto \omega(v + C(\mathfrak{g})) := \phi(v). \end{aligned}$$

□

Observação 1.4.3. Notemos que

$$\begin{aligned} \omega|_{S^m} : S^m &\longrightarrow G^m \\ v + C(\mathfrak{g}) &\longmapsto \omega(v + C(\mathfrak{g})) := \phi(v) = \phi_m(v) = \pi(v) + U_{m-1} \end{aligned}$$

também é sobrejetor e \mathbb{k} -linear.

O Teorema a seguir nos permitirá identificar a álgebra simétrica de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} com a álgebra graduada associada à álgebra envolvente universal de \mathfrak{g} . Além disso, esse isomorfismo permite uma correspondência entre os elementos em $gr(U)$ e polinômios, conforme demonstrado anteriormente na Proposição 1.3.10.

Teorema 1.4.4 (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt). *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, e $gr(U)$ a álgebra graduada associada a U , então o homomorfismo*

$$\omega : S \longrightarrow gr(U)$$

é um isomorfismo de álgebras.

Para demonstrar o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt 1.4.4 serão necessários alguns lemas que apresentaremos a seguir.

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Como \mathfrak{g} é um espaço vetorial então possui uma base. Agora pelo axioma da escolha é possível considerar uma base ordenada $\{x_\lambda; \lambda \in \Omega\}$ de \mathfrak{g} , sendo Ω um conjunto de índices com uma relação de ordem. O anterior é válido para uma álgebra de Lie não necessariamente de dimensão finita. Com isso podemos identificar a álgebra simétrica S com a álgebra de polinômios em indeterminados z_λ , com $\lambda \in \Omega$.

Para cada sequência $\Sigma = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de índices (m será o comprimento de Σ). Seja $z_\Sigma = z_{\lambda_1} z_{\lambda_2} \cdots z_{\lambda_m} \in S^m$ e seja $x_\Sigma = x_{\lambda_1} \otimes x_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes x_{\lambda_m} \in T^m$. Chamamos Σ crescente se $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$, quando $\Sigma = \emptyset$ diremos que é crescente e que $z_\Sigma = 1$. Assim $\{z_\Sigma \mid \Sigma \text{ é crescente}\}$ é uma base de S . Agora associada à graduação de S está a filtração $S_m := S^0 \oplus S^1 \oplus \cdots \oplus S^m$.

Nos lemas seguintes, consideremos $\lambda \leq \Sigma$ se $\lambda \leq \mu, \forall \mu \in \Sigma$ e $\lambda \in \Omega$.

Lema 1.4.5. *Para cada $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, existe uma única aplicação linear $f_m : \mathfrak{g} \otimes S_m \longrightarrow S$ satisfazendo:*

$$A_m) \quad f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma \text{ para } \lambda \leq \Sigma, z_\Sigma \in S_m.$$

$$B_m) \quad f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) - z_\lambda z_\Sigma \in S_k \text{ para } k \leq m, z_\Sigma \in S_k.$$

$$C_m) \quad f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) = f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) + f_m([x_\lambda x_\mu] \otimes z_T) \text{ para todo } z_T \in S_{m-1}.$$

Demonstração. Suponhamos que existe tal aplicação f_m e é única. É imediato ver que os termos em (C_m) fazem sentido tendo (B_m) provado. Além disso, observamos que $f_m|_{\mathfrak{g} \otimes S_{m-1}}$ automaticamente satisfaz $((A_{m-1}), (B_{m-1})$ e $(C_{m-1}))$. Pela unicidade, esta aplicação coincide com f_{m-1} .

Para demonstrar a existência e unicidade, realizamos uma indução em m . Para $m = 0$, temos $z_\Sigma = 1$ resultando na existência de $f_0 : \mathfrak{g} \otimes S_0 \longrightarrow S$ tal que $f_0(x_\lambda \otimes 1) = z_\lambda$. Claramente, (A_0) é satisfeito, e $(B_0), (C_0)$ são válidas por vacuidade. Além disso, (A_0) assegura a unicidade de f_0 . Agora, suponhamos que existe uma única aplicação $f_{m-1} : \mathfrak{g} \otimes S_{m-1} \longrightarrow S$ que satisfaz $((A_{m-1}), (B_{m-1})$ e $(C_{m-1}))$. A partir desta, estenderemos para $f_m : \mathfrak{g} \otimes S_m \longrightarrow S$ que cumpre $((A_m), (B_m)$ e $(C_m))$. Para isso, consideremos os seguintes casos:

- i) Definiremos $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) := z_\lambda z_\Sigma$ para $\lambda \leq \Sigma$, de modo que (A_m) seja imediatamente satisfeito.
- ii) No caso em que exista algum $\mu < \lambda$ com $\mu \in \Sigma$, seja μ a primeira coordenada de Σ , permitindo-nos escrever $\Sigma = (\mu, T)$, onde $\mu \leq T$ com T de grau $m - 1$.

Pela condição (A_{m-1}) , temos que $f_{m-1}(x_\mu \otimes z_T) = z_\mu z_T = z_\Sigma$. Além disso é válido que:

$$f_m(x_\lambda \otimes f_{m-1}(x_\mu \otimes z_T)) = f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) \quad (1.1)$$

Neste caso, definiremos $f_m(x_\lambda \otimes f_{m-1}(x_\mu \otimes z_T))$ de forma a satisfazer imediatamente (C_m) . Apresentaremos a expressão para $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) &= f_m(x_\lambda \otimes f_{m-1}(x_\mu \otimes z_T)), & \text{Por (1.1)} \\ &= f_m(x_\mu \otimes f_{m-1}(x_\lambda \otimes z_T)) - f_{m-1}([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_T), & \text{Por (C}_m\text{)}. \end{aligned}$$

Observamos que (B_{m-1}) implica que $f_m(x_\lambda \otimes z_T) = f_{m-1}(x_\lambda \otimes z_T) \equiv z_\lambda z_T \pmod{S_{m-1}}$. Em outras palavras, $f_{m-1}(x_\lambda \otimes z_T) = z_\lambda z_T + w$ com $w \in S_{m-1}$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} f_m(x_\mu \otimes f_{m-1}(x_\lambda \otimes z_T)) &= f_m(x_\mu \otimes (z_\lambda z_T + w)) \\ &= f_m(x_\mu \otimes z_\lambda z_T) f_m(x_\mu \otimes w) \\ &= z_\mu z_\lambda z_T + f_{m-1}(x_\mu \otimes w), & \text{Por (A}_m\text{)}, \end{aligned}$$

Unindo as duas equações anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) - z_\mu z_\lambda z_T &= f_{m-1}(x_\mu \otimes w) \\ f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) - z_\lambda z_\mu z_T &= f_{m-1}(x_\mu \otimes w) \\ f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) - z_\lambda z_\Sigma &= f_{m-1}(x_\mu \otimes w) \in S_k, \end{aligned}$$

onde $k \leq z_\Sigma \in S_k$. Portanto, uma extensão linear satisfazendo (A_m) , (B_m) e (C_m) é obtida conforme desejado.

- iii) Para $\lambda < \mu$ e $\lambda \leq \Sigma$, é suficiente observar que $[x_\mu, x_\lambda] = -[x_\lambda, x_\mu]$ reduzindo-se ao caso anterior.
- iv) No caso em que $\lambda = \mu$, as três condições são satisfeitas trivialmente.
- v) Caso nem $\lambda \leq T$ nem $\mu \leq T$, expressaremos $T = (v, \zeta)$ com $v \leq \zeta$, $v < \lambda$ e $v < \mu$. Pela hipótese indutiva, temos:

$$f_m(x_\mu \otimes z_T) = f_m(x_\mu \otimes f_m(x_v \otimes z_\zeta)) = f_m(x_v \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\zeta)) + f_m([x_\mu, x_v] \otimes z_\zeta).$$

Dessa forma, temos que $f_m(x_\mu \otimes z_\zeta) = z_\mu z_v + w$ com $w \in S_{m-2}$. Devido ao fato de que $v \leq \zeta$ e $v < \mu$ podemos aplicar (C_m) em $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_v \otimes w))$. Pela hipótese indutiva, podemos aplicar também em $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_v \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\zeta)))$. Note que $v \leq \{\mu\} \cup \zeta$ implica em $v < \lambda$, o que nos permite proceder da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) &= f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_v \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\zeta))) + f_m(x_\lambda \otimes f_m([x_\mu, x_v] \otimes z_\zeta)) \\ &= f_m(x_v \otimes f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\zeta))) + f_m([x_\lambda, x_v] \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\zeta)) \\ &\quad + f_m([x_\mu, x_v] \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_\zeta)) + f_m([x_\lambda, [x_\mu, x_v]] \otimes z_\zeta). \end{aligned}$$

Agora, podemos verificar se vale (C_m) . Basta notar que é possível considerar a mesma igualdade acima trocando λ de lugar com μ , e, assim, escrevendo $W = f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_v \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T))) - f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)))$, temos:

$$\begin{aligned}
W &= f_m(x_v \otimes f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\zeta))) + f_m([x_\lambda, x_v] \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\zeta)) + \\
&\quad + f_m([x_\mu, x_v] \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_\zeta)) + f_m([x_\lambda, [x_\mu, x_v]] \otimes z_\zeta) - \\
&\quad - f_m(x_v \otimes f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_\zeta))) - f_m([x_\mu, x_v] \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_\zeta)) - \\
&\quad - f_m([x_\lambda, x_v] \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\zeta)) - f_m([x_\mu, [x_\lambda, x_v]] \otimes z_\zeta) \\
&= f_m(x_v \otimes (f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_\zeta)) - f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda z_\zeta)))) + \\
&\quad + f_m([x_\lambda, [x_\mu, x_v]] \otimes z_\zeta) - f_m([x_\mu, [x_\lambda, x_v]] \otimes z_\zeta) \\
&= f_m(x_v \otimes f_m([x_\lambda, x_v] \otimes z_\zeta)) + f_m([x_\lambda, [x_\mu, x_v]] \otimes z_\zeta) + f_m([x_\mu, [x_v, x_\lambda]] \otimes z_\zeta) \\
&= f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes f_m(x_v \otimes z_\zeta)) + f_m([x_v, [x_\lambda, x_\mu]] \otimes z_\zeta) + f_m([x_\lambda, [x_\mu, x_v]] \otimes z_\zeta) + \\
&\quad + f_m([x_\mu, [x_v, x_\lambda]] \otimes z_\zeta) \\
&= f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes f_m(x_v \otimes z_\zeta)) \\
&= f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_T).
\end{aligned}$$

Portanto, (C_m) é satisfeito, permitindo a definição de f_m conforme enunciado. \square

Lema 1.4.6. *Existe uma representação $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(S)$ satisfazendo:*

- (a) $\rho(x_\lambda)z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$ para $\lambda \leq \Sigma$.
- (b) $\rho(x_\lambda)z_\Sigma \equiv z_\lambda z_\Sigma \pmod{S_m}$, se Σ tem comprimento m .

Demonstração. O Lema 1.4.5 demonstra a possibilidade de definir, de forma indutiva, $f_m : \mathfrak{g} \otimes S_m \longrightarrow S$, \mathbb{k} -linear satisfazendo (A_m) , (B_m) e (C_m) . Assim, é possível ver S como um \mathfrak{g} -módulo cuja ação de \mathfrak{g} sobre S é dada por: $f : \mathfrak{g} \otimes S \longrightarrow S$, cumprindo:

- (a') $f(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma$ para $\lambda \leq \Sigma$.
- (b') $f(x_\lambda \otimes z_\Sigma) \equiv z_\lambda z_\Sigma \pmod{S_m}$, para Σ de comprimento m .

Observe que (A_m) e (B_m) , juntamente com o fato de que $f|_{\mathfrak{g} \otimes S_{m-1}} = f_{m-1}$ garantem que f esteja bem definida cumprindo as duas condições acima. Podemos definir uma aplicação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\rho : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(S) \\
x_\lambda &\longmapsto \rho(x_\lambda) : S \longrightarrow S \\
z_\Sigma &\longmapsto \rho(x_\lambda)z_\Sigma := f(x_\lambda \otimes z_\Sigma).
\end{aligned}$$

Essa aplicação está bem definida, pois f está bem definida e cumpre (a) e (b). Além disso, essa aplicação é um homomorfismo de álgebras de Lie. Com efeito, observe que,

para todo $z_\Sigma \in S$ temos:

$$\begin{aligned}
\rho([x_\lambda, x_\delta])z_\Sigma &= f([x_\lambda, x_\delta] \otimes z_\Sigma) \\
&= f(x_\lambda \otimes f(x_\delta \otimes z_\Sigma)) - f(x_\delta \otimes f(x_\lambda \otimes z_\Sigma)) \\
&= \rho(x_\lambda)z_\delta z_\Sigma - \rho(x_\delta)z_\lambda z_\Sigma \\
&= (\rho(x_\lambda)z_\delta - \rho(x_\delta)z_\lambda)z_\Sigma \\
&= (f(x_\lambda \otimes z_\delta) - f(x_\delta \otimes z_\lambda))z_\Sigma \\
&= (z_\lambda z_\delta - z_\delta z_\lambda)z_\Sigma \\
&= 0 \\
&= [\rho(x_\lambda), \rho(x_\delta)] \quad \text{em } \mathfrak{gl}(S)
\end{aligned}$$

□

Lema 1.4.7. *Seja $t \in T_m \cap J$, onde $J = \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] : x, y \in \mathfrak{g} \rangle$ é um ideal bilateral de T . A componente homogênea t_m de t de grau m pertence a $C(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Escrevemos t_m como uma combinação linear dos elementos da base $x_{\Sigma(i)}$, com $(1 \leq i \leq r)$, e cada $\Sigma(i)$ de comprimento m . Considere o homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(S)$ obtido no Lema 1.4.6. Como ρ é, em particular, uma transformação linear, podemos aplicar a propriedade universal de T e de U , obtendo o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\tau} & T & \xrightarrow{\pi} & U \\
& \searrow \rho & \downarrow \bar{\rho} & & \swarrow \exists! \rho' \\
& & \mathfrak{gl}(S) & &
\end{array}$$

Em outras palavras, tem-se um homomorfismo de \mathbb{k} -álgebras $\bar{\rho}$ com $J \subset \ker \bar{\rho}$. Tomando $t \in T_m \cap J$, temos que $\bar{\rho}(t) = 0$. Observe que podemos escrever

$$t = \sum_{i=1}^m t_i,$$

onde pela Proposição 1.3.10, $\bar{\rho}(t)1_S$ é um polinômio de grau m , porém pelo Lema 1.4.6, o termo de maior grau é a combinação apropriada dos elementos $z_{\Sigma(i)}$, com $1 \leq i \leq r$. Portanto está combinação de $z_{\Sigma(i)}$ é 0 em S , e assim $t_m \in C(\mathfrak{g})$. □

Tendo provado o Lema 1.4.7 podemos agora prosseguir para a demonstração do Teorema 1.4.4.

Demonstração do Teorema Poincaré-Birkhoff-Witt. Para verificar que ω é um isomorfismo de álgebras, precisamos ver que ω é injetivo e sobrejetivo. Mas estendendo a Observação 1.4.3 temos que de fato ω é um epimorfismo. Agora para provar que o

homomorfismo é injetivo, é suficiente mostrar que $\ker(\omega) = \{0\}$. Para isso, basta verificar que se $\pi(t) \in U_{m-1}$, então $t \in C(\mathfrak{g})$.

Observe que se $t \in T^m$ e $\pi(t) \in U_{m-1}$, então existe $t' \in T_{m-1}$ tal que $\pi(t) = \pi(t')$, já que π é sobrejetiva. Consequentemente, temos que $\pi(t - t') = 0$, ou seja, $t - t' \in J$. Assim, $t - t' \in T_m \cap J$, e pelo Lema 1.4.4, a componente homogênea de grau m (que é t) satisfaz $t \in C(\mathfrak{g})$.

Portanto, isso mostra que um elemento $x \in \ker(\omega)$ é da forma $x = \sigma(t)$ com $t \in C(\mathfrak{g})$, o que implica que $x = 0$. \square

Teorema 1.4.8 (Teoremas das bases de Poicaré-Birkhoff-Witt). *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie sobre um corpo \mathbb{k} (não necessariamente de dimensão finita), e $\{X_i\}_{i \in I}$ uma base ordenada de \mathfrak{g} por uma ordem no conjunto dos índices de I . Então os monômios*

$$X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}, \quad \text{com } i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \quad (1.2)$$

formam uma base de $U(\mathfrak{g})$.

Em particular, se $\dim \mathfrak{g} < \infty$ e $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base ordenada de \mathfrak{g} , então os monômios

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}$$

com $\alpha_i \geq 0$, formam uma base de $U(\mathfrak{g})$.

Demonstração. Primeiro será mostrado que qualquer monômio $m = X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}$, com i_1, i_2, \dots, i_k não necessariamente ordenado, é uma combinação linear de monômios ordenados como em (1.2).

Seja $d(m)$ a quantidade dos pares i_j, i_l como $j \leq l$ que satisfaz $i_j > i_l$, isto é, $d(m)$ a quantidade dos pares que não pertencem a (1.2), pois não estão ordenados. Faremos indução sobre k , o qual é a ordem de m e sobre $d(m)$.

Se $d(m) = 0$ então todos os índices estão ordenados, portanto pertencem a (1.2). Se $d(m) > 0$ temos pelo menos um par $i_j > i_l$ com $j \leq l$ e tomando sucessivamente os elementos a partir de X_{i_j} chega-se a algum índice s tal que $i_s > i_{s+1}$, logo pode ser reescrito m como

$$X_{i_1} \cdots X_{i_s} X_{i_{s+1}} \cdots X_{i_k} = X_{i_1} \cdots X_{i_{s+1}} X_{i_s} \cdots X_{i_k} + X_{i_1} \cdots [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}] \cdots X_{i_k}$$

O monômio $m' = X_{i_1} \cdots X_{i_{s+1}} X_{i_s} \cdots X_{i_k}$ tem o mesmo ordem que o monômio $m = X_{i_1} \cdots X_{i_s} X_{i_{s+1}} \cdots X_{i_k}$ mas $d(m') < d(m)$ pois esta trocado $X_{i_{s+1}} X_{i_s}$. O segundo membro $X_{i_1} \cdots [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}] \cdots X_{i_k}$ é a soma de monômios de ordem menor que a ordem de m . Dessa forma, obtém-se a hipótese de indução. Se $k = 1$, então m está bem ordenado; e se $d(m) = 0$, isso também significa que m está bem ordenado.. Logo isso mostra que o conjunto dos monômios do enunciado geram $U(\mathfrak{g})$.

Agora vamos provar a independência linear de todos os monômios de (1.2). Considere os monômios correspondentes na álgebra tensorial. Seja T_{ord} o subespaço de $T(\mathfrak{g})$ gerado pelos monômios ordenados de acordo com a base de \mathfrak{g} . Como os monômios são linearmente independentes em $T(\mathfrak{g})$, para mostrar sua independência em $U(\mathfrak{g})$, é

suficiente mostrar que $T_{ord} \cap J = 0$. Para garantir que a intersecção se anule, é usado o artifício de construir uma transformação linear

$$\sigma : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow T(\mathfrak{g})$$

tal que

- i) σ se anula em J .
- ii) $\sigma|_{T_{ord}}$ é a identidade.

Se pode ver que σ é determinada pelos seus valores $\sigma(m)$ nos monômios de $T(\mathfrak{g})$

$$m = X_{i_1} \cdots X_{i_k}.$$

Para definir $\sigma(m)$, é usado indução sobre k , a ordem de m , e $d(m)$, o número de pares que aparecem no monômio m em ordem contrario à ordem da base de \mathfrak{g} .

Primeiro assume-se que a ordem k de m seja igual a 1 e define-se $\sigma(m) = m$, já que, nesse caso, o monômio de m , está ordenado e σ deve ser a identidade em T_{ord} . Se $k > 1$, define-se $\sigma(m)$ por indução sobre $d(m)$. Se $d(m) = 0$, então $\sigma(m) = m$, pois m é um monômio ordenado. Caso contrario, pode-se encontrar um índice s tal que $i_s > i_{s+1}$. Fixando esse índice, seja

$$\sigma(m) = \sigma(X_{i_1} \cdots X_{i_{s+1}} X_{i_s} \cdots X_{i_k}) + \sigma(X_{i_1} \cdots [X_{i_{s+1}}, X_{i_s}] \cdots X_{i_k}),$$

onde o segundo membro é definido pela hipótese de indução sobre k . Essa definição de $\sigma(m)$ depende, em principio, da escolha do índice s . Por outro lado, σ é evidentemente a identidade quando restrita a T_{ord} . Por isso, para concluir a demonstração do teorema, é suficiente mostrar que

- (a) a expressão dada acima para $\sigma(m)$ com $d(m) \geq 1$ independe do índice.
- (b) σ se anula em J .

Quanto a (b), J é gerado por elementos da forma

$$c = a(X_i X_j - X_j X_i - [X_i, X_j]) b$$

com X_i e X_j , $i \neq j$ elementos da base de \mathfrak{g} e a, b monômios na álgebra tensorial. Agora usando a definição de $\sigma(aX_i X_j b)$ se $i > j$ ou de $\sigma(aX_j X_i b)$ se $i < j$, temos que $\sigma(c) = 0$, o que mostra que σ se anula em J . Falta verificar que σ está bem definida. Seja r outro índice tal que $i_r > i_{r+1}$. Deve-se mostrar que $\sigma(m)$ não se altera ao usar r ao invés de s em sua definição. A demonstração disso também se faz por indução sobre k . Evidentemente, para $k \leq 1$ ou $d(m) = 0$ não tem nada a demonstrar, sendo possível se procurar apenas com o passo de indução. Existem dos casos:

Caso I. $\{s, s+1\}$ não intercepta $\{r, r+1\}$. Por exemplo, $s \geq r+2$, isto é, m é da forma

$$m = X_{i_1} \cdots X_{i_r} X_{i_{r+1}} \cdots X_{i_s} X_{i_{s+1}} \cdots X_{i_k}.$$

Então, usando a comutação em i_r e posteriormente em i_s , chega-se a que $\sigma(m)$ é dada por

$$\begin{aligned}\sigma(m) &= \sigma(X_{i_1} \cdots X_{i_{r+1}} X_{i_r} \cdots X_{i_{s+1}} X_{i_s} \cdots X_{i_k}) \\ &\quad + \sigma(X_{i_1} \cdots [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \cdots X_{i_{s+1}} X_{i_s} \cdots X_{i_k}) \\ &\quad + \sigma(X_{i_1} \cdots X_{i_{r+1}} X_{i_r} \cdots [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}] \cdots X_{i_k}) \\ &\quad + \sigma(X_{i_1} \cdots [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \cdots [X_{i_s}, X_{i_{s+1}}] \cdots X_{i_k}).\end{aligned}$$

A mesma expressão seria obtida se fosse feita, primeiro a permutação em i_s e depois em i_r .

Caso II. Os conjuntos $\{s, s+1\}$ e $\{r, r+1\}$ se interceptam. Pode-se assumir que $s = r+1$ e m se escreve como

$$m = X_{i_1} \cdots X_{i_r} X_{i_{r+1}} X_{i_{r+2}} \cdots X_{i_k}$$

com $i_r > i_{r+1} > i_{r+2}$. Usando a definição de σ pela comutação entre $X_{i_{r+1}}$ e $X_{i_{r+2}}$ e a hipótese de indução, $\sigma(m)$ será dada por

$$\begin{aligned}\sigma(m) &= \sigma(X_{i_1} \cdots X_{i_{r+2}} X_{i_{r+1}} X_{i_r} \cdots X_{i_k}) \\ &\quad + \sigma(X_{i_1} \cdots X_{i_r} [X_{i_{r+1}}, X_{i_{r+2}}] \cdots X_{i_k}) \\ &\quad + \sigma(X_{i_1} \cdots [X_{i_r}, X_{i_{r+2}}] X_{i_{r+1}} \cdots X_{i_k}) \\ &\quad + \sigma(X_{i_1} \cdots X_{i_{r+2}} [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] \cdots X_{i_k}).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Por outro lado, aplicando σ à relação de comutação entre X_{i_r} e $X_{i_{r+1}}$, tem que

$$\begin{aligned}\sigma(m) &= \sigma(X_{i_1} \cdots X_{i_{r+2}} X_{i_{r+1}} X_{i_r} \cdots X_{i_k}) \\ &\quad + \sigma(X_{i_1} \cdots [X_{i_{r+1}}, X_{i_{r+2}}] X_{i_r} \cdots X_{i_k}) \\ &\quad + \sigma(X_{i_1} \cdots X_{i_{r+1}} [X_{i_r}, X_{i_{r+2}}] \cdots X_{i_k}) \\ &\quad + \sigma(X_{i_1} \cdots [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}] X_{i_{r+2}} \cdots X_{i_k}).\end{aligned}\tag{1.4}$$

A diferença das expressões (1.3) e (1.4), é zero, pois os primeiros termos são iguais, mais a hipótese de indução sobre k permite comutar os demais termos, obtendo

$$\begin{aligned}\sigma(X_{i_1} \cdots [X_{i_r}, [X_{i_{r+1}}, X_{i_{r+2}}]] \cdots X_{i_k}) \\ + \sigma(X_{i_1} \cdots [X_{i_{r+1}}, [X_{i_{r+2}}, X_{i_r}]] \cdots X_{i_k}) \\ + \sigma(X_{i_1} \cdots [X_{i_{r+2}}, [X_{i_r}, X_{i_{r+1}}]] \cdots X_{i_k}).\end{aligned}$$

Mais esta expressão se anula pela identidade de Jacobi de \mathfrak{g} o que mostra que σ está bem definida, garantindo que o conjunto é linearmente independente. Portanto, os produtos ordenados formam uma base de $U(\mathfrak{g})$.

□

Exemplo 1.4.9. Consideremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, o qual consiste das matrizes de ordem 2×2 de traço 0 com entradas nos números complexos, munidos do colchete de Lie dado pelo comutador, i.e., $[A, B] = AB - BA$, com $A, B \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, logo

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(A) = 0\}.$$

A base padrão de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ esta dada pelas matrizes

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ é a álgebra associativa gerada por três símbolos que também denotamos por $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}$ sujeito as relações $\mathbf{ef} - \mathbf{fe} = \mathbf{h}; \mathbf{he} - \mathbf{eh} = 2\mathbf{e}; \mathbf{hf} - \mathbf{fh} = -2\mathbf{f}$. Portanto tem como base

$$\{\mathbf{e}^{\alpha_1} \mathbf{h}^{\alpha_2} \mathbf{f}^{\alpha_3} \mid \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Exemplo 1.4.10. Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. A base de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ são as matrizes E_{ij} , as quais tem 1 na entrada da i -ésima linha e a j -ésima coluna e zero nas outras entradas, por exemplo:

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Logo para qualquer $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, temos que pode ser representada da forma:

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

onde,

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj},$$

e δ é o símbolo de Kronecker, ou seja

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Logo para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tem-se a identificação de \mathfrak{gl}_i como uma subálgebra de Lie de \mathfrak{gl}_{i+1} e \mathfrak{gl}_n pois $\phi: \mathfrak{gl}_i \hookrightarrow \mathfrak{gl}_{i+1}$ onde $\phi(E_{ij}) = E_{ij}$. Em outras palavras

$$\mathfrak{gl}_n = \text{span}\{E_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$$

\mathfrak{gl}_i pode ser visto como uma subálgebra de \mathfrak{gl}_{i+1} e \mathfrak{gl}_n onde

$$\mathfrak{gl}_i = \text{span}\{E_{rs} \mid r, s = 1, \dots, i\}$$

então, podemos obter as seguintes cadeias

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}_1 &\subset \mathfrak{gl}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{gl}_n \\ U(\mathfrak{gl}_1) &\subset U(\mathfrak{gl}_2) \subset \cdots \subset U(\mathfrak{gl}_n) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{gl}_1) &= \text{span}\{ E_{11}^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \} \\ U(\mathfrak{gl}_2) &= \text{span}\{ E_{11}^{\alpha_1} E_{12}^{\alpha_2} E_{21}^{\alpha_3} E_{22}^{\alpha_4} \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \} \\ &\vdots \\ U(\mathfrak{gl}_n) &= \text{span}\{ E_{11}^{\alpha_1} E_{12}^{\alpha_2} E_{21}^{\alpha_3} \cdots E_{nn}^{\alpha_n} \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}, \end{aligned}$$

usando a ordem das matrizes em \mathfrak{gl}_n dadas por $E_{ij} \leq E_{kl}$ se $i = k$ e $j \leq l$, ou $i < k$.

1.5 Geometria algébrica

Nesta secção estudaremos a relação de objetos geométricos e algébricos, empregando uma ferramenta de significativa relevância nesta pesquisa: o Teorema dos Zeros de Hilbert, conforme estabelecido na Proposição 1.5.6. Além disso, procederemos à introdução do conceito de topologia de Zariski e exploraremos uma de suas implicações mais notáveis, nomeadamente, a irredutibilidade e a dimensão de uma variedade algébrica.

Seja \mathbb{k} um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Definição 1.5.1. *Definimos o n -espaço afim ou simplesmente espaço afim sobre \mathbb{k} , denotado por $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$, ao conjunto de todas as n -tuplas de elementos de \mathbb{k} . Um elemento $p \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ será chamado de ponto, e se $p = (a_1, \dots, a_n)$ com $a_i \in \mathbb{k}$, então os a_i são chamados de coordenadas de p .*

Seja $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios em n variáveis sobre \mathbb{k} . Vamos interpretar os elementos de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ como funções do espaço afim para \mathbb{k} . Definindo $f(p) = f(a_1, \dots, a_n)$, onde $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ e $p \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$.

Definição 1.5.2. *Definimos o conjunto de zeros de um polinômio f por,*

$$V(f) := \{p \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \mid f(p) = 0\}.$$

De forma mais geral, se consideramos S qualquer subconjunto de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, definimos o conjunto de zeros de S , como

$$V(S) := \{p \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n \mid f(p) = 0, \text{ para todo } f \in S\}.$$

Este conjunto é chamado de **variedade algébrica afim associada ao conjunto S** ou simplesmente **variedade algébrica**. Dizemos que um subconjunto $Y \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ é um conjunto algébrico (ou variedade algébrica) se existe um subconjunto $S \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $Y = V(S)$.

Definição 1.5.3. *Um subconjunto $A \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ é chamado uma **hipersuperfície** em $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ se $A = V(S)$, com $S = \{f\}$, para algum polinômio não constante $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$*

Observação 1.5.4. *Uma hipersuperfície definida por um polinômio de grau 1*

$$f = a_1x_1 + \dots + a_nx_n - b \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$$

*é chamado de **hiperplano**.*

Observação 1.5.5. *Já que $V(S) = \bigcap_{f \in S} V(f)$, um subconjunto de $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ é algébrico se e somente se pode ser escrito como a interseção de hipersuperfícies.*

Seja $S \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ e $\langle S \rangle$ o ideal gerado por S . Temos que $V(S) = V(\langle S \rangle)$.

Teorema 1.5.6. *(Teorema da base de Hilbert) Seja I um ideal de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, então I é finitamente gerado, ou seja, existem $m \in \mathbb{N}_0$ e $f_1, f_2, \dots, f_m \in I$ tais que*

$$I = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle.$$

Demonstração. Ver Teorema 1.2 de [EI95] na página 27. □

Observação 1.5.7. *Seja $I = \langle S \rangle$ um ideal gerado por um subconjunto S de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Pelo Teorema 1.5.6 temos que $V(S) = V(\{f_1, \dots, f_m\})$, para alguns $f_1, \dots, f_m \in S$.*

Proposição 1.5.8.

- i) *Os conjuntos $\emptyset = V(\langle 1 \rangle)$ e $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n = V(\langle 0 \rangle)$ são conjuntos algébricos.*
- ii) *A união de dois subconjuntos algébricos é um subconjunto algébrico.*
- iii) *A interseção de qualquer família de conjuntos algébricos é um conjunto algébrico.*

Então as variedades algébricas definem uma base de fechados para uma topologia em $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$.

Demonstração. i) Temos, $V(0) = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ e $V(1) = \emptyset$.

- ii) Sejam $S, T \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Provaremos que $V(S) \cup V(T) = V(ST)$, onde $ST = \{fg \mid f \in S, g \in T\}$.

Primeiro mostraremos que $V(S) \cup V(T) \subseteq V(ST)$.

Se $x \in V(S) \cup V(T)$, então $f(x) = 0$ para todo $f \in S$ ou $g(x) = 0$ para todo $g \in T$. Portanto $(fg)(x) = 0$, para todo $f \in S$ e para todo $g \in T$. Logo $x \in V(ST)$.

Por outro lado, provemos que $V(ST) \subseteq V(S) \cup V(T)$.

Por absurdo, suponhamos $x \notin V(S) \cup V(T)$, isto é, $x \notin V(S)$ e $x \notin V(T)$, assim existem $f \in S$ e $g \in T$ tais que $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$. Portanto $(fg)(x) \neq 0$, logo $x \notin V(ST)$.

- iii) Seja $\{S_k := \{f_i\}_{i \in I_k}\}_{k \in K}$ uma família não vazia de famílias S_k de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, com $S_k \neq \emptyset$.

Temos que $x \in \bigcap_{k \in K} V(S_k)$ se, e somente se, $x \in V(S_k)$ para todo $k \in K$, ou seja se, e somente se, $f_i(x) = 0$ para todos $i \in I_k$ e $k \in K$, ou seja se, e somente se, $f(x) = 0$ para todo $f \in \bigcup_{k \in K} S_k$. Portanto, $\bigcap_{k \in K} V(S_k) = V(\bigcup_{k \in K} S_k)$.

□

Definição 1.5.9. *A topologia em $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$, definida pela Proposição 1.5.8 é dita **Topologia de Zariski**, onde os conjuntos fechados são as variedades algébricas.*

Definição 1.5.10. *Seja R um anel e I um ideal de R . Chamamos de **radical** de I o conjunto*

$$\sqrt{I} := \{x \in R \mid x^n \in I, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

*Dizemos que I é um **ideal radical**, se $\sqrt{I} = I$.*

Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.5.11. *Seja $R = \mathbb{Z}$ e seja $I = (12)$. Note que $\sqrt{(12)} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^n \in (12), \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$, portanto temos que $\sqrt{(12)} = (6)$.*

Definição 1.5.12. *Seja $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$. Podemos definir o ideal*

$$\mathfrak{I}(X) := \{f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0, \text{ para todo } x \in X\}.$$

$\mathfrak{I}(X)$ é chamado o **ideal associado** a X .

Proposição 1.5.13. *O ideal $\mathfrak{J}(X)$ é um ideal radical.*

Demonstração. i) Temos diretamente da Definição 1.5.10 que $\mathfrak{J}(X) \subseteq \sqrt{\mathfrak{J}(X)}$.

ii) Vejamos agora que $\sqrt{\mathfrak{J}(X)} \subseteq \mathfrak{J}(X)$.

Seja $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Suponhamos que $f^m \in \mathfrak{J}(X)$, para algum $m \in \mathbb{N}$, isto é, $0 = f^m(x) = [f(x)]^m \in \mathbb{k}$ para todo $x \in X$. Como \mathbb{k} é um corpo, em particular é um domínio, implica que $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, ou seja, $f \in \mathfrak{J}(X)$.

Portanto $\mathfrak{J}(X)$ é um ideal radical. □

Teorema 1.5.14 (Teorema dos Zeros de Hilbert - Hilbert's Nullstellensatz).

Se I é um ideal de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, então $\mathfrak{J}(V(I)) = \sqrt{I}$.

Demonstração. Ver Teorema 1.6.2 de [DS09] na página 20. □

Proposição 1.5.15. *Seja $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ uma variedade algébrica, então $V(\mathfrak{J}(X)) = X$.*

Demonstração. Temos diretamente das definições de \mathfrak{J} e V que $X \subset V(\mathfrak{J}(X))$. Por outro lado, se I um ideal de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $X = V(I)$. Então, $I \subset \mathfrak{J}(X)$, portanto $V(\mathfrak{J}(X)) \subset V(I) = X$. Logo $V(\mathfrak{J}(X)) = X$. □

Observação 1.5.16. *Note que se o corpo \mathbb{k} não for algebricamente fechado a igualdade no Teorema 1.5.14 não se satisfaz. Pois apenas é válida $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{J}(V(I))$.*

Exemplo 1.5.17. *Consideremos o anel de polinômios sendo $\mathbb{k}[x]$. Da Definição 1.5.12 temos que $\mathfrak{J}(\emptyset) = \mathbb{k}[x]$. Seja $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1$ com $X = V(x^2 + 1)$.*

Se $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, temos que $X = \emptyset$, porem note que $\sqrt{(x^2 + 1)} \neq \mathfrak{J}(V(x^2 + 1)) = \mathbb{R}[x]$.

Observação 1.5.18. *Do Teorema 1.5.6 e da Proposição 1.5.13 podemos notar a seguinte correspondência:*

$$\begin{aligned} V : \{\text{ideais radicais de } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\} &\longrightarrow \{\text{variedades algébricas de } \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n\} \\ \mathfrak{J} : \{\text{variedades algébricas de } \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n\} &\longrightarrow \{\text{ideais radicais de } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\}. \end{aligned}$$

Já que os ideais primos são exemplos de ideais radicais, então faz sentido pensar na restrição da correspondência aos ideais primos.

Definição 1.5.19. *Uma variedade algébrica X de $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ é dita **irredutível** se não existem duas subvariedades algébricas diferentes X_1 e X_2 de X não vazias, tais que $X = X_1 \cup X_2$.*

Proposição 1.5.20. *Uma variedade algébrica X é irredutível se, e somente se, $\mathfrak{J}(X)$ é um ideal primo.*

Demonstração. Ver Proposição 1.7.2 de [DS09] na página 23. □

Como os ideais maximais são ideais primos, é possível pensar na restrição da correspondência aos ideais maximais.

Proposição 1.5.21. *Seja $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$. Então $\mathfrak{J}(\{a\})$ é um ideal maximal de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Por outro lado, se I é um ideal maximal de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, existe $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ tal que $V(I) = \{a\}$.*

Demonstração. Ver Corolário 2 de [MA70] na página 91. \square

Assim temos as seguintes correspondências:

$$\begin{aligned} \{\text{ideais radicais de } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\} &\longleftrightarrow \{\text{variedades algébricas de } \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n\} \\ \{\text{ideais primos de } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\} &\longleftrightarrow \{\text{variedades algébricas irredutíveis de } \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n\} \\ \{\text{ideais maximais de } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\} &\longleftrightarrow \{\text{pontos em } \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n\} \end{aligned}$$

Definição 1.5.22. *Sejam $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^m$ e $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ duas variedades algébricas. Um morfismo de variedades algébricas é uma função $f : X \rightarrow Y$ para a qual existem polinômios $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ tais que*

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ a &\mapsto f(a) = (p_1(a), \dots, p_n(a)). \end{aligned}$$

Definição 1.5.23. *O anel de todas funções polinomiais em X é o anel*

$$\mathbb{k}[X] := \{f : X \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^1 = \mathbb{k} \mid f \text{ é morfismo de variedades algébricas}\}.$$

$\mathbb{k}[X]$ será chamado de **anel de coordenadas** da variedade algébrica X .

Observação 1.5.24.

- i) O anel de coordenadas $\mathbb{k}[X]$ de uma variedade algébrica X é uma \mathbb{k} -álgebra.*
- ii) Como $\mathbb{k}[X]$ é uma \mathbb{k} -álgebra, temos o seguinte morfismo sobrejetor de \mathbb{k} -álgebras*

$$\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mapsto \mathbb{k}[X],$$

que leva um polinômio para a função polinomial correspondente. O kernel de este morfismo é exatamente os $\mathfrak{J}(X)$ e pelo primeiro teorema de isomorfismo de \mathbb{k} -álgebras temos que

$$\mathbb{k}[X] \cong \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] / \mathfrak{J}(X).$$

Portanto as funções polinomiais de $\mathbb{k}[X]$ são identificados como classes laterais de polinômios módulo $\mathfrak{J}(X)$.

Definição 1.5.25. *Seja X uma variedade algébrica. Definimos a **dimensão** de X sendo o supremo dos $m \in \mathbb{N}_0$ tal que existe uma cadeia $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_m$ de subconjuntos irredutíveis fechados X_i distintos de X . Denotamos a dimensão de X por $\dim(X)$.*

Definição 1.5.26. *Em um anel R , a altura de um ideal primo \mathfrak{p} é o supremo de $k \in \mathbb{N}_0$ tal que existe uma cadeia $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}$ de ideais primos distintos. Chamaremos de **dimensão de Krull** de R ao supremo do conjunto das alturas dos ideais primos de R . Denotamos a dimensão de R por $\dim(R)$.*

Proposição 1.5.27. *A dimensão de Krull do anel $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ é igual a n .*

Demonstração. Ver Teorema 3.4.6 de [DS09] na página 132. \square

Proposição 1.5.28. *Se X é um conjunto algébrico afim, então a dimensão de X é igual a dimensão do anel de coordenadas de X .*

Demonstração. Se X é um conjunto algébrico afim em $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$, então os subconjuntos irredutíveis fechados de X correspondem a ideais primos de $A = \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$ contendo $\mathfrak{J}(X)$. Estes, por sua vez, correspondem aos ideais primos de $\mathbb{k}[X]$. Portanto, $\dim(X)$ é o comprimento da cadeia mais longa de ideais primos em $\mathbb{k}[X]$, que é sua dimensão. \square

Proposição 1.5.29. 1. $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ com a topologia de Zariski é um espaço topológico Noetheriano, ou seja, se $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \dots$ é uma cadeia de fechados, então existe n tal que $Y_i = Y_n$, para todo $i \geq n$.

2. Toda variedade algébrica $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$ se escreve de maneira única como

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m,$$

onde cada X_i é uma variedade algébrica irredutível e $X_i \not\subseteq X_j$, para todo $i \neq j$. Cada X_i é chamada de **componente irredutível** de X .

Demonstração. Ver o Teorema 13 de [ZA75] na página 162. \square

Definição 1.5.30. *Uma variedade algébrica é dita **equidimensional** se todas suas componentes irredutíveis tem a mesma dimensão.*

1.6 Álgebra homológica

Definição 1.6.1. *Seja R um anel. Uma sequência $(M_i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, onde M_i são R -módulos e $d_i : M_i \rightarrow M_{i-1}$ (diferencial) homomorfismos de R -módulos, tais que $d_i d_{i+1} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ é chamada de **complexo** de módulos. Um complexo é denotado por (M, d) e é representado da seguinte forma:*

$$\dots \rightarrow M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i-1} \rightarrow \dots$$

Definição 1.6.2. *Seja (M_i, d_i) um complexo. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos a **n -ésima homologia** como*

$$H_n(M) = \text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n+1}).$$

1.6.1 Complexo de Koszul

Sejam R um anel comutativo, M um R -módulo e $f : M \rightarrow R$ uma aplicação R -linear. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} M^n &\rightarrow \bigwedge^{n-1} M \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge x_n, \end{aligned}$$

onde \widehat{x}_i significa que x_i é omitido nesse produto exterior. Pela propriedade universal da n -ésima potencia exterior, existe um único homomorfismo R -linear $d_f^n : \bigwedge^n M \rightarrow \bigwedge^{n-1} M$ de R -módulos tal que:

$$d_f^n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n$$

para todo $x_1, \dots, x_n \in M$.

Proposição 1.6.3. *i) $d_f \circ d_f = 0$.*

ii) $d_f(x \wedge y) = d_f(x) \wedge y + (-1)^{\deg x} x \wedge d_f(y)$ para todos os elementos homogêneos $x \in \bigwedge M$.

De fato o item *ii)* da proposição anterior mostra que d_f é uma antiderivação e o item *i)* prova que a seguinte cadeia é um complexo de R -módulos

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^n M \xrightarrow{d_f} \bigwedge^{n-1} M \cdots \longrightarrow \bigwedge^2 M \xrightarrow{d_f} M \xrightarrow{f} R \longrightarrow 0.$$

Definição 1.6.4. *O complexo acima é chamado de **complexo de Koszul de f** e é denotado por $K_\bullet(f)$. A homologia do complexo de Koszul é chamada de **homologia de Koszul de f** e é denotada por $H_\bullet(f)$.*

Definição 1.6.5. *Seja N um R -módulo. Então $K_\bullet(f, N)$ é o complexo $K_\bullet(f) \otimes_R N$, chamado de **complexo de Koszul de f com coeficientes em N** . Seus diferenciais são denotados por $d_{f,N}$ e sua homologia por $H_\bullet(f, N)$, a qual é chamada de **homologia de Koszul de f com coeficientes em N** .*

Observação 1.6.6. *Seja M um R -módulo livre de posto finito com base e_1, \dots, e_n . Uma aplicação R -linear $f : M \rightarrow R$ está unicamente determinada pelos valores $x_i = f(e_i)$, $i = 1, \dots, n$. Reciprocamente, dada uma sequência $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, existe uma aplicação R -linear f tal que $x_i = f(e_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Portanto, estabelecemos*

$$K_\bullet(\mathbf{x}) = K_\bullet(f).$$

Definição 1.6.7. *Para cada sequência $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ de R , o complexo $K_\bullet(\mathbf{x})$ é chamado de **complexo de Koszul de \mathbf{x}** e sua homologia é chamada de **homologia de Koszul de \mathbf{x}** , a qual denotaremos por $H_\bullet(\mathbf{x})$.*

Definição 1.6.8. *Sejam $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ uma sequência de R , e N um R -módulo. $K_\bullet(\mathbf{x}, N)$ é o complexo $K_\bullet(\mathbf{x}) \otimes_R N$, chamado de **complexo de Koszul de \mathbf{x} com coeficientes em N** . Seus diferenciais são denotados por $d_{\mathbf{x},N}$ e sua homologia por $H_\bullet(\mathbf{x}, N)$, a qual é chamada de **homologia de Koszul de \mathbf{x} com coeficientes em N** .*

Exemplo 1.6.9. *Considere o anel $R = \mathbb{Z}[x, y]$ e o ideal $I = (x, y)$. O complexo de Koszul associado a esse anel e ideal é dado por:*

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^2 R^2 \xrightarrow{d_f} \bigwedge^1 R^2 \xrightarrow{d_f} R^2 \xrightarrow{f} R \longrightarrow 0$$

onde $\bigwedge^k R^2$ é a k -ésima potência exterior do R -módulo livre R^2 , que pode ser visualizado como o espaço gerado pelos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.

As aplicações $d_k : \bigwedge^k R^2 \rightarrow \bigwedge^{k-1} R^2$ são definidas como:

$$\begin{aligned} d_2(e_1 \wedge e_2) &= xe_1 \wedge e_2 - ye_2 \wedge e_1 \\ d_1(e_1) &= xe_1 \\ d_1(e_2) &= ye_2. \end{aligned}$$

Esse complexo de Koszul captura informações sobre o ideal (x, y) e fornece uma descrição algébrica das relações entre x e y no anel $R = \mathbb{Z}[x, y]$.

Definição 1.6.10. *Sejam $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ uma sequência de elementos num anel R e N um R -módulo. Dizemos que tal sequência é uma **interseção completa** para N se*

$$H_\bullet(\mathbf{x}, N) = 0, \quad \forall n > 0.$$

1.7 Álgebra comutativa

Nesta seção temos como objetivo apresentar a relação entre o conceito de equidimensionalidade e interseção completa.

Definição 1.7.1. *Seja R um anel e M um R -módulo. Um elemento $x \in R$ é dito M -regular se $xz \neq 0$ para todo $0 \neq z \in M$.*

Definição 1.7.2. *Uma sequência $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ de elementos de R é chamada M -regular se satisfaz as seguintes condições:*

- i) x_1 é M -regular, x_2 é (M/x_1M) -regular, ..., x_n é $(M/\sum_1^{n-1} x_i M)$ -regular;*
- ii) $(M/\sum_1^n x_i M) \neq 0$.*

Proposição 1.7.3. *Sejam R um anel Noetheriano e $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ uma sequência regular em R . Se R é um anel graduado e cada x_i é homogêneo de grau positivo, então qualquer permutação de $\{x_1, \dots, x_n\}$ é também regular.*

Demonstração. Ver Teorema 28 de [MA70], página 102. □

Exemplo 1.7.4. *Os elementos x_1, x_2, \dots, x_n no anel de polinômios $R = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ formam uma sequência regular sobre R .*

A ordem dos elementos em uma sequência regular é importante. Permutando os elementos de uma sequência regular, pode-se obter uma sequência que não é regular.

Exemplo 1.7.5. *Seja \mathbb{k} um corpo e considere $R = M = \mathbb{k}[x, y, z]$. A sequência $\{x(y-1), y, z(y-1)\}$ é regular:*

- i) O elemento $x(y-1)$ não é divisor de zero em R , já que R é domínio de integridade.*
- ii) O elemento y não é divisor de zero em $R/\langle x(y-1) \rangle$ pois, se temos $yf = gx(y-1)$, para f, g em R , então $x(y-1)$ divide f e, conseqüentemente f está em $\langle x(y-1) \rangle$.*
- iii) O elemento $z(y-1)$ não é divisor de zero em $R/\langle x(y-1), y \rangle$ pois $\langle x(y-1), y \rangle = \langle x, y \rangle$, assim $R/\langle x, y \rangle \cong \mathbb{k}[z]$, o qual é um domínio de integridade.*

iv) Finalmente, $1 \notin \langle x(y-1), y, z(y-1) \rangle$, então $1 \in \mathbb{k}[x, y, z]/\langle x(y-1), y, z(y-1) \rangle$ e $\mathbb{k}[x, y, z]/\langle x(y-1), y, z(y-1) \rangle \neq 0$.

Por outro lado $\{x(y-1), z(y-1), y\}$ não é uma sequência regular pois $xz(y-1) = z(x(y-1))$, ou seja, $z(y-1)$ é divisor de zero em $\mathbb{k}[x, y, z]/\langle x(y-1) \rangle$.

Proposição 1.7.6. *Seja $\mathbf{g} = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ uma sequência regular para um anel R , e seja e_1, e_2, \dots, e_t a base canônica do R -módulo livre R^t . Então a sequência \mathbf{g} é uma interseção completa para R , obtendo assim, a sequência exata*

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^2 R^t \xrightarrow{d_\eta} R^t \xrightarrow{\eta} R \xrightarrow{\pi} R/(g_1, g_2, \dots, g_t) \longrightarrow 0,$$

onde π é a projeção, e

$$d_\eta(e_i \wedge e_j) = g_i e_j - g_j e_i, \quad \eta(f_1, f_2, \dots, f_t) = \sum_{i=1}^t f_i g_i.$$

Esta sequência é chamada de **resolução de Koszul**.

Demonstração. Ver [BO07] na página 157. □

Proposição 1.7.7. *Sejam R uma álgebra afim com dimensão de Krull n e $\mathbf{g} = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ uma sequência de elementos em R com $1 \leq t \leq n$.*

- (i) *Se R é graduada e g_1, g_2, \dots, g_t são homogêneos, então a sequência \mathbf{g} é regular em R se, e somente se, a sequência \mathbf{g} é uma interseção completa para R .*
- (ii) *Se R é uma álgebra Cohen-Macaulay, então a sequência \mathbf{g} é uma interseção completa para R se, e somente se, a variedade $V(g_1, g_2, \dots, g_t)$ é equidimensional de dimensão $n - t$.*

Demonstração. Ver Proposição 2.1 de [FO05]. □

Observação 1.7.8. *Para detalhes sobre anéis Cohen-Macaulay ver página 134 de [MA89]. Neste trabalho, só vamos usar o fato que o anel de polinômios é Cohen-Macaulay [MA89, Teorema 17.7].*

Proposição 1.7.9. *Se $R = \mathbb{k}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ é uma álgebra de polinômios, então a sequência $X_1, X_2, \dots, X_r, g_1, g_2, \dots, g_t$ é uma interseção completa para R se, e somente se, a sequência G_1, G_2, \dots, G_t é uma interseção completa para $\mathbb{k}[X_{r+1}, X_{r+2}, \dots, X_n]$, onde*

$$G_i(X_{r+1}, X_{r+2}, \dots, X_n) = g_i(0, 0, \dots, 0, X_{r+1}, X_{r+2}, \dots, X_n),$$

para todo $i = 1, 2, \dots, t$.

Demonstração. Ver Lema 2.2 de [FO05]. □

Capítulo 2

Teoria de Gelfand - Tsetlin

Neste Capítulo temos como objetivo apresentar uma construção detalhada da subálgebra de Gelfand-Tsetlin para a álgebra de Lie \mathfrak{gl}_n . Além disso, desenvolveremos os polinômios que a descrevem e definimos a variedade de Gelfand-Tsetlin associada. Para isso será levado como referencia [BE20].

2.1 Subálgebra de Gelfand - Tsetlin

Consideremos a álgebra de Lie \mathfrak{gl}_n com sua respectiva base conforme o Exemplo 1.4.10. Denotemos por $Z_i := Z(U(\mathfrak{gl}_i))$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, o centro da álgebra envolvente universal de \mathfrak{gl}_i .

Definição 2.1.1. *A subálgebra de $U(\mathfrak{gl}_n)$ gerada por $\{Z_i \mid i = 1, \dots, n\}$ é chamada a subálgebra de Gelfand-Tsetlin de $U(\mathfrak{gl}_n)$ e é denotada por Γ .*

Proposição 2.1.2 (Zelobenko 1973). *Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, o centro da álgebra envolvente universal Z_i é a subálgebra de $U(\mathfrak{gl}_i)$ gerada por $\{\gamma_{ij} : 1 \leq j \leq i\}$, onde*

$$\gamma_{ij} = \sum_{1 \leq t_1, t_2, \dots, t_j \leq i} E_{t_1 t_2} E_{t_2 t_3} \cdots E_{t_{j-1} t_j} E_{t_j t_1}.$$

Além disso, $\{\gamma_{ij} \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$ são algebricamente independentes, portanto

$$Z_i = \mathbb{k}[\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{ii}].$$

Portanto Γ é uma álgebra de polinômios nas $\frac{n(n+1)}{2}$ variáveis $\{\gamma_{ij} \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$.

Demonstração. Ver [ZE73] página 169. □

Exemplo 2.1.3. *A subálgebra de Gelfand-Tsetlin Γ para $U(\mathfrak{gl}_4)$ é gerada por os se-*

quintes polinômios:

$$\gamma_{11} = E_{11},$$

$$\gamma_{21} = E_{11} + E_{22},$$

$$\gamma_{22} = E_{11}^2 + E_{12}E_{21} + E_{22}^2 + E_{21}E_{12},$$

$$\gamma_{31} = E_{11} + E_{22} + E_{33},$$

$$\gamma_{32} = E_{11}^2 + E_{12}E_{21} + E_{13}E_{31} + E_{21}E_{12} + E_{22}^2 + E_{23}E_{32} + E_{31}E_{13} + E_{32}E_{23} + E_{33}^2,$$

$$\begin{aligned} \gamma_{33} = & E_{11}^3 + E_{11}E_{12}E_{21} + E_{11}E_{13}E_{31} + E_{12}E_{21}E_{11} + E_{12}E_{22}E_{21} + E_{12}E_{23}E_{31} + E_{13}E_{31}E_{11} + \\ & + E_{13}E_{32}E_{21} + E_{13}E_{33}E_{31} + E_{21}E_{11}E_{12} + E_{21}E_{12}E_{22} + E_{21}E_{13}E_{32} + E_{22}E_{21}E_{12} + E_{22}^3 + \\ & + E_{22}E_{23}E_{32} + E_{23}E_{31}E_{12} + E_{23}E_{32}E_{22} + E_{23}E_{33}E_{32} + E_{31}E_{11}E_{13} + E_{31}E_{12}E_{23} + \\ & + E_{31}E_{13}E_{33} + E_{32}E_{21}E_{13} + E_{32}E_{22}E_{23} + E_{32}E_{23}E_{33} + E_{33}E_{31}E_{13} + E_{33}E_{32}E_{23} + E_{33}^3, \end{aligned}$$

$$\gamma_{41} = E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{44},$$

$$\begin{aligned} \gamma_{42} = & E_{11}^2 + E_{12}E_{21} + E_{13}E_{31} + E_{14}E_{41} + E_{21}E_{12} + E_{22}^2 + E_{23}E_{32} + E_{24}E_{42} + E_{31}E_{13} + E_{32}E_{23} + \\ & + E_{33}^2 + E_{34}E_{43} + E_{41}E_{14} + E_{42}E_{24} + E_{43}E_{34} + E_{44}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{43} = & E_{11}^3 + E_{11}E_{12}E_{21} + E_{11}E_{13}E_{31} + E_{11}E_{14}E_{41} + E_{12}E_{21}E_{11} + E_{12}E_{22}E_{21} + E_{12}E_{23}E_{31} + \\ & + E_{12}E_{24}E_{41} + E_{13}E_{31}E_{11} + E_{13}E_{32}E_{21} + E_{13}E_{33}E_{31} + E_{13}E_{34}E_{41} + E_{14}E_{41}E_{11} + \\ & + E_{14}E_{42}E_{21} + E_{14}E_{43}E_{31} + E_{14}E_{44}E_{41} + E_{21}E_{11}E_{12} + E_{21}E_{12}E_{22} + E_{21}E_{13}E_{32} + \\ & + E_{21}E_{14}E_{42} + E_{22}E_{21}E_{12} + E_{22}^3 + E_{22}E_{23}E_{32} + E_{22}E_{24}E_{42} + E_{23}E_{31}E_{12} + E_{23}E_{32}E_{22} + \\ & + E_{23}E_{33}E_{32} + E_{23}E_{34}E_{42} + E_{24}E_{41}E_{12} + E_{24}E_{42}E_{22} + E_{24}E_{43}E_{32} + E_{24}E_{44}E_{42} + \\ & + E_{31}E_{11}E_{13} + E_{31}E_{12}E_{23} + E_{31}E_{13}E_{33} + E_{31}E_{14}E_{43} + E_{32}E_{21}E_{13} + E_{32}E_{22}E_{23} + \\ & + E_{32}E_{23}E_{33} + E_{32}E_{24}E_{43} + E_{33}E_{31}E_{13} + E_{33}E_{32}E_{23} + E_{33}^3 + E_{33}E_{34}E_{43} + E_{34}E_{41}E_{13} + \\ & + E_{34}E_{42}E_{23} + E_{34}E_{43}E_{33} + E_{34}E_{44}E_{43} + E_{41}E_{11}E_{14} + E_{41}E_{12}E_{24} + E_{41}E_{13}E_{34} + \\ & + E_{41}E_{14}E_{44} + E_{42}E_{21}E_{14} + E_{42}E_{22}E_{24} + E_{42}E_{23}E_{34} + E_{42}E_{24}E_{44} + E_{43}E_{31}E_{14} + \\ & + E_{43}E_{32}E_{24} + E_{43}E_{33}E_{34} + E_{43}E_{34}E_{44} + E_{44}E_{41}E_{14} + E_{44}E_{42}E_{24} + E_{44}E_{43}E_{34} + E_{44}^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{44} = & E_{11}^4 + E_{11}^2 E_{12} E_{21} + E_{11}^2 E_{13} E_{31} + E_{11}^2 E_{14} E_{41} + E_{11} E_{12} E_{21} E_{11} + E_{11} E_{12} E_{22} E_{21} + \\
& + E_{11} E_{12} E_{23} E_{31} + E_{11} E_{12} E_{24} E_{41} + E_{11} E_{13} E_{31} E_{11} + E_{11} E_{13} E_{32} E_{21} + E_{11} E_{13} E_{33} E_{31} + \\
& + E_{11} E_{13} E_{34} E_{41} + E_{11} E_{14} E_{41} E_{11} + E_{11} E_{14} E_{42} E_{21} + E_{11} E_{14} E_{43} E_{31} + E_{11} E_{14} E_{44} E_{41} + \\
& + E_{12} E_{21} E_{11}^2 + E_{12} E_{21} E_{12} E_{21} + E_{12} E_{21} E_{13} E_{31} + E_{12} E_{21} E_{14} E_{41} + E_{12} E_{22} E_{21} E_{11} + \\
& + E_{12} E_{22}^2 E_{21} + E_{12} E_{22} E_{23} E_{31} + E_{12} E_{22} E_{24} E_{41} + E_{12} E_{23} E_{31} E_{11} + E_{12} E_{23} E_{32} E_{21} + \\
& + E_{12} E_{23} E_{33} E_{31} + E_{12} E_{23} E_{34} E_{41} + E_{12} E_{24} E_{41} E_{11} + E_{12} E_{24} E_{42} E_{21} + E_{12} E_{24} E_{43} E_{31} + \\
& + E_{12} E_{24} E_{44} E_{41} + E_{13} E_{31} E_{11}^2 + E_{13} E_{31} E_{12} E_{21} + E_{13} E_{31} E_{13} E_{31} + E_{13} E_{31} E_{14} E_{41} + \\
& + E_{13} E_{32} E_{21} E_{11} + E_{13} E_{32} E_{22} E_{21} + E_{13} E_{32} E_{23} E_{31} + E_{13} E_{32} E_{24} E_{41} + E_{13} E_{33} E_{31} E_{11} + \\
& + E_{13} E_{33} E_{32} E_{21} + E_{13} E_{33}^2 E_{31} + E_{13} E_{33} E_{34} E_{41} + E_{13} E_{34} E_{41} E_{11} + E_{13} E_{34} E_{42} E_{21} + \\
& + E_{13} E_{34} E_{43} E_{31} + E_{13} E_{34} E_{44} E_{41} + E_{14} E_{41} E_{11}^2 + E_{14} E_{41} E_{12} E_{21} + E_{14} E_{41} E_{13} E_{31} + \\
& + E_{14} E_{41} E_{14} E_{41} + E_{14} E_{42} E_{21} E_{11} + E_{14} E_{42} E_{22} E_{21} + E_{14} E_{42} E_{23} E_{31} + E_{14} E_{42} E_{24} E_{41} + \\
& + E_{14} E_{43} E_{31} E_{11} + E_{14} E_{43} E_{32} E_{21} + E_{14} E_{43} E_{33} E_{31} + E_{14} E_{43} E_{34} E_{41} + E_{14} E_{44} E_{41} E_{11} + \\
& + E_{14} E_{44} E_{42} E_{21} + E_{14} E_{44} E_{43} E_{31} + E_{14} E_{44}^2 E_{41} + E_{21} E_{11}^2 E_{12} + E_{21} E_{11} E_{12} E_{22} + \\
& + E_{21} E_{11} E_{13} E_{32} + E_{21} E_{11} E_{14} E_{42} + E_{21} E_{12} E_{21} E_{12} + E_{21} E_{12} E_{22}^2 + E_{21} E_{12} E_{23} E_{32} + \\
& + E_{21} E_{12} E_{24} E_{42} + E_{21} E_{13} E_{31} E_{12} + E_{21} E_{13} E_{32} E_{22} + E_{21} E_{13} E_{33} E_{32} + E_{21} E_{13} E_{34} E_{42} + \\
& + E_{21} E_{14} E_{41} E_{12} + E_{21} E_{14} E_{42} E_{22} + E_{21} E_{14} E_{43} E_{32} + E_{21} E_{14} E_{44} E_{42} + E_{22} E_{21} E_{11} E_{12} + \\
& + E_{22} E_{21} E_{12} E_{22} + E_{22} E_{21} E_{13} E_{32} + E_{22} E_{21} E_{14} E_{42} + E_{22}^2 E_{21} E_{12} + E_{22}^4 + \\
& + E_{22}^2 E_{23} E_{32} + E_{22}^2 E_{24} E_{42} + E_{22} E_{23} E_{31} E_{12} + E_{22} E_{23} E_{32} E_{22} + E_{22} E_{23} E_{33} E_{32} + \\
& + E_{22} E_{23} E_{34} E_{42} + E_{22} E_{24} E_{41} E_{12} + E_{22} E_{24} E_{42} E_{22} + E_{22} E_{24} E_{43} E_{32} + E_{22} E_{24} E_{44} E_{42} + \\
& + E_{23} E_{31} E_{11} E_{12} + E_{23} E_{31} E_{12} E_{22} + E_{23} E_{31} E_{13} E_{32} + E_{23} E_{31} E_{14} E_{42} + E_{23} E_{32} E_{21} E_{12} + \\
& + E_{23} E_{32} E_{22}^2 + E_{23} E_{32} E_{23} E_{32} + E_{23} E_{32} E_{24} E_{42} + E_{23} E_{33} E_{31} E_{12} + E_{23} E_{33} E_{32} E_{22} + \\
& + E_{23} E_{33}^2 E_{32} + E_{23} E_{33} E_{34} E_{42} + E_{23} E_{34} E_{41} E_{12} + E_{23} E_{34} E_{42} E_{22} + E_{23} E_{34} E_{43} E_{32} + \\
& + E_{23} E_{34} E_{44} E_{42} + E_{24} E_{41} E_{11} E_{12} + E_{24} E_{41} E_{12} E_{22} + E_{24} E_{41} E_{13} E_{32} + E_{24} E_{41} E_{14} E_{42} + \\
& + E_{24} E_{42} E_{21} E_{21} + E_{24} E_{42} E_{22}^2 + E_{24} E_{42} E_{23} E_{32} + E_{24} E_{42} E_{24} E_{42} + E_{24} E_{43} E_{31} E_{12} + \\
& + E_{24} E_{43} E_{32} E_{22} + E_{24} E_{43} E_{33} E_{32} + E_{24} E_{43} E_{34} E_{42} + E_{24} E_{44} E_{41} E_{12} + E_{24} E_{44} E_{42} E_{22} + \\
& + E_{24} E_{44} E_{43} E_{32} + E_{24} E_{44}^2 E_{42} + E_{31} E_{11}^2 E_{13} + E_{31} E_{11} E_{12} E_{23} + E_{31} E_{11} E_{13} E_{33} + \\
& + E_{31} E_{11} E_{14} E_{43} + E_{31} E_{12} E_{21} E_{13} + E_{31} E_{12} E_{22} E_{23} + E_{31} E_{12} E_{23} E_{33} + E_{31} E_{12} E_{24} E_{43} + \\
& + E_{31} E_{13} E_{31} E_{13} + E_{31} E_{13} E_{32} E_{23} + E_{31} E_{13} E_{33}^2 + E_{31} E_{13} E_{34} E_{43} + E_{31} E_{14} E_{41} E_{13} + \\
& + E_{31} E_{14} E_{42} E_{23} + E_{31} E_{14} E_{43} E_{33} + E_{31} E_{14} E_{44} E_{43} + E_{32} E_{21} E_{11} E_{13} + E_{32} E_{21} E_{12} E_{23} + \\
& + E_{32} E_{21} E_{13} E_{33} + E_{32} E_{21} E_{14} E_{43} + E_{32} E_{22} E_{21} E_{13} + E_{32} E_{22}^2 E_{23} + E_{32} E_{22} E_{23} E_{33} + \\
& + E_{32} E_{22} E_{24} E_{43} + E_{32} E_{23} E_{31} E_{32} + E_{32} E_{23} E_{32} E_{23} + E_{32} E_{23} E_{33}^2 + E_{32} E_{23} E_{34} E_{43} + \\
& + E_{32} E_{24} E_{41} E_{13} + E_{32} E_{24} E_{42} E_{23} + E_{32} E_{24} E_{43} E_{33} + E_{32} E_{24} E_{44} E_{43} + E_{33} E_{31} E_{11} E_{13} + \\
& + E_{33} E_{31} E_{12} E_{23} + E_{33} E_{31} E_{13} E_{33} + E_{33} E_{31} E_{14} E_{43} + E_{33} E_{32} E_{21} E_{13} + E_{33} E_{32} E_{22} E_{23} + \\
& + E_{33} E_{32} E_{23} E_{33} + E_{33} E_{32} E_{24} E_{43} + E_{33}^2 E_{31} E_{13} + E_{33}^2 E_{32} E_{23} + E_{33}^4 + E_{33}^2 E_{34} E_{43} + \\
& + E_{33} E_{34} E_{41} E_{13} + E_{33} E_{34} E_{42} E_{23} + E_{33} E_{34} E_{43} E_{33} + E_{33} E_{34} E_{44} E_{43} + E_{34} E_{41} E_{11} E_{13} + \\
& + E_{34} E_{41} E_{12} E_{23} + E_{34} E_{41} E_{13} E_{33} + E_{34} E_{41} E_{14} E_{43} + E_{34} E_{42} E_{21} E_{13} + E_{34} E_{42} E_{22} E_{23} + \\
& + E_{34} E_{42} E_{23} E_{33} + E_{34} E_{42} E_{24} E_{43} + E_{34} E_{43} E_{31} E_{13} + E_{34} E_{43} E_{32} E_{23} + E_{34} E_{43} E_{33}^2 + \\
& + E_{34} E_{43} E_{34} E_{43} + E_{34} E_{44} E_{41} E_{13} + E_{34} E_{44} E_{42} E_{23} + E_{34} E_{44} E_{43} E_{33} + E_{34} E_{44}^2 E_{43} + \\
& + E_{41} E_{11}^2 E_{14} + E_{41} E_{11} E_{12} E_{24} + E_{41} E_{11} E_{13} E_{34} + E_{41} E_{11} E_{14} E_{44} + E_{41} E_{12} E_{21} E_{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_{41}E_{12}E_{22}E_{24} + E_{41}E_{12}E_{23}E_{34} + E_{41}E_{12}E_{24}E_{44} + E_{41}E_{13}E_{31}E_{14} + E_{41}E_{13}E_{32}E_{24} + \\
& + E_{41}E_{13}E_{33}E_{34} + E_{41}E_{13}E_{34}E_{44} + E_{41}E_{14}E_{41}E_{14} + E_{41}E_{14}E_{42}E_{24} + E_{41}E_{14}E_{43}E_{34} + \\
& + E_{41}E_{14}E_{44}^2 + E_{42}E_{21}E_{11}E_{14} + E_{42}E_{21}E_{12}E_{24} + E_{42}E_{21}E_{13}E_{34} + E_{42}E_{21}E_{14}E_{44} + \\
& + E_{42}E_{22}E_{21}E_{14} + E_{42}E_{22}^2E_{24} + E_{42}E_{22}E_{23}E_{34} + E_{42}E_{22}E_{24}E_{44} + E_{42}E_{23}E_{31}E_{34} + \\
& + E_{42}E_{23}E_{32}E_{24} + E_{42}E_{23}E_{33}E_{34} + E_{42}E_{23}E_{34}E_{44} + E_{42}E_{24}E_{41}E_{14} + E_{42}E_{24}E_{42}E_{24} + \\
& + E_{42}E_{24}E_{43}E_{34} + E_{42}E_{24}E_{44}^2 + E_{43}E_{31}E_{11}E_{14} + E_{43}E_{31}E_{12}E_{24} + E_{43}E_{31}E_{13}E_{34} + \\
& + E_{43}E_{31}E_{14}E_{44} + E_{43}E_{32}E_{21}E_{14} + E_{43}E_{32}E_{22}E_{24} + E_{43}E_{32}E_{23}E_{34} + E_{43}E_{32}E_{24}E_{44} + \\
& + E_{43}E_{33}E_{31}E_{14} + E_{43}E_{33}E_{32}E_{24} + E_{43}E_{33}^2E_{34} + E_{43}E_{33}E_{34}E_{44} + E_{43}E_{34}E_{41}E_{14} + \\
& + E_{43}E_{34}E_{42}E_{24} + E_{43}E_{34}E_{43}E_{34} + E_{43}E_{34}E_{44}E_{44} + E_{44}E_{41}E_{11}E_{14} + E_{44}E_{41}E_{12}E_{24} + \\
& + E_{44}E_{41}E_{13}E_{34} + E_{44}E_{41}E_{14}E_{44} + E_{44}E_{42}E_{21}E_{14} + E_{44}E_{42}E_{22}E_{24} + E_{44}E_{42}E_{23}E_{34} + \\
& + E_{44}E_{42}E_{24}E_{44} + E_{44}E_{43}E_{31}E_{14} + E_{44}E_{43}E_{32}E_{24} + E_{44}E_{43}E_{33}E_{34} + E_{44}E_{43}E_{34}E_{44} + \\
& + E_{44}^2E_{41}E_{14} + E_{44}^2E_{42}E_{24} + E_{44}^2E_{43}E_{34} + E_{44}^4.
\end{aligned}$$

2.2 Variedade de Gelfand - Tsetlin

Utilizando os geradores da subálgebra de Gelfand-Tsetlin de \mathfrak{gl}_n , podemos fazer o seguinte.

Com base no Teorema de Poincaré-Birchoff-Witt 1.4.4, podemos afirmar que $gr(U(\mathfrak{gl}_n))$ é isomorfa a $S(\mathfrak{gl}_n)$.

Agora, consideremos $gr(\Gamma)$, a qual é uma subálgebra de $gr(U(\mathfrak{gl}_n))$. De acordo com a Proposição 1.3.10, os geradores $\bar{\gamma}_{ij}$, os quais são a imagem dos polinômios γ_{ij} em $gr(\Gamma)$, são polinômios nas variáveis comutativas \bar{E}_{rs} , como segue:

$$\bar{\gamma}_{ij} = \sum_{1 \leq t_1, t_2, \dots, t_j \leq i} \bar{E}_{t_1 t_2} \bar{E}_{t_2 t_3} \cdots \bar{E}_{t_{j-1} t_j} \bar{E}_{t_j t_1}.$$

Para simplificar a notação, é possível visualizar as variáveis \bar{E}_{ij} como X_{ij} pela Proposição 1.3.10. Nesse sentido, podemos afirmar que:

$$\bar{\gamma}_{ij} \in \mathbb{k}[X_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n}.$$

Isso significa que $\bar{\gamma}_{ij}$ são polinômios nas variáveis comutativas X_{ij} .

Exemplo 2.2.1. Alguns desses polinômios $\bar{\gamma}_{ij}$ são:

$$\bar{\gamma}_{11} = X_{11},$$

$$\bar{\gamma}_{21} = X_{11} + X_{22},$$

$$\bar{\gamma}_{22} = X_{11}^2 + 2X_{21}X_{12} + X_{22}^2,$$

$$\bar{\gamma}_{31} = X_{11} + X_{22} + X_{33},$$

$$\bar{\gamma}_{32} = X_{11}^2 + 2X_{21}X_{12} + X_{22}^2 + 2X_{31}X_{13} + 2X_{32}X_{23} + X_{33}^2,$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{33} = & X_{11}^3 + 3X_{11}X_{12}X_{21} + 3X_{11}X_{13}X_{31} + X_{22}^3 + 3X_{12}X_{22}X_{21} + 3X_{12}X_{23}X_{31} + 3X_{13}X_{32}X_{21} + \\ & + 3X_{13}X_{31}X_{33} + 3X_{22}X_{23}X_{32} + 3X_{23}X_{32}X_{33} + X_{33}^3, \end{aligned}$$

Definição 2.2.2. Chamamos de *Variedade de Gelfand-Tsetlin* para \mathfrak{gl}_n a variedade algébrica

$$V(\{\bar{\gamma}_{ij} | i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, i\}) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2}.$$

Teorema 2.2.3. A variedade de Gelfand-Tsetlin para \mathfrak{gl}_n é equidimensional com dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$.

Demonstração. Ver em [OV03]. □

Observação 2.2.4. Note que da Proposição 1.5.27 temos que

$$\dim(\mathbb{k}[X_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n}) = n^2,$$

além disso consideremos a sequência de elementos em $\mathbb{k}[X_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n}$ dada por $\mathfrak{g} = \{\bar{\gamma}_{ij}\}$ com $1 \leq j \leq i \leq n$, a qual tem $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos. Como o anel de polinômios é Cohen-Macaulay, pelo Teorema 2.2.3 a variedade $V(\mathfrak{g})$ é equidimensional de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$, logo

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{2n^2 - n^2 - n}{2} = n^2 - \frac{n^2 + n}{2} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pelo item (ii) da Proposição 1.7.7 podemos concluir que \mathfrak{g} é uma interseção completa para $\mathbb{k}[X_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$. Portanto \mathfrak{g} é uma sequência regular em $\mathbb{k}[X_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$.

Capítulo 3

Outros geradores da subálgebra de Gelfand - Tsetlin

Os determinantes desempenham um papel fundamental na álgebra linear. No entanto, nesta teoria, várias fórmulas clássicas deixam de ser válidas quando se lida com estruturas não comutativas. Com base nessa motivação, em 1991, I. Gelfand e V. Retakh [GR91] desenvolveram a teoria dos quasideterminantes para matrizes cujas entradas pertencem a um anel que não necessariamente obedece à propriedade comutativa.

Neste capítulo, exploraremos uma abordagem que permite determinar os coeficientes de expansão de quasideterminantes específicos, utilizando um grafo orientado completo associado a uma matriz. Essa técnica contribui para simplificar a análise desses coeficientes. Além disso, ao aplicarmos essa abordagem às nossas matrizes em $U(\mathfrak{gl}_n)$, poderemos estabelecer uma conexão significativa com a subálgebra de Gelfand-Tsetlin, conforme definida no Capítulo 2.

3.1 Quasideterminantes

Seja R um anel arbitrário com unidade e seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(R)$. Denote:

- A^{ij} a matriz obtida tirando a i -ésima linha e a j -ésima coluna de A ;
- r_i^j a matriz de ordem $1 \times n - 1$ obtida da i -ésima linha de A e tirando o elemento a_{ij} ;
- c_j^i a matriz de ordem $(n - 1) \times 1$ obtida da j -ésima coluna de A e tirando o elemento a_{ij} .

Exemplo 3.1.1. *Seja $A \in M_n(R)$ da forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n},$$

temos que:

$$\bullet A^{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} ;$$

$$\bullet r_1^2 = (a_{11} \ a_{13} \ \cdots \ a_{1n})_{1 \times (n-1)} ;$$

$$\bullet c_2^1 = \begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}_{(n-1) \times 1} .$$

Com base no anterior definimos:

Definição 3.1.2. *Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(R)$, com R um anel com identidade, tais que a matriz A^{ij} é invertível. Dizemos que o ij -ésimo **quasideterminante** de A é definido pela fórmula*

$$|A|_{ij} = a_{ij} - r_i^j (A^{ij})^{-1} c_j^i$$

Exemplo 3.1.3. *Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, temos 4 quasideterminantes sempre que a_{ij} for invertível para todo $1 \leq i, j \leq 2$, os quais são:*

1. $|A|_{11} = a_{11} - r_1^1 (a_{22})^{-1} c_1^1$;
2. $|A|_{12} = a_{12} - r_1^2 (a_{21})^{-1} c_2^1$;
3. $|A|_{21} = a_{21} - r_2^1 (a_{12})^{-1} c_1^2$;
4. $|A|_{22} = a_{22} - r_2^2 (a_{11})^{-1} c_2^2$.

Observação 3.1.4. *Note que para uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(R)$ temos definidos k quasideterminantes, onde $0 \leq k \leq n^2$, pois no caso que a matriz A^{ij} não seja invertível, o quasideterminante $|A|_{ij}$ não está definido.*

Lema 3.1.5. *Suponhamos que a submatriz A^{11} da matriz A é invertível. Qualquer solução do sistema*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

satisfaz que $y_1 = |A|_{11}x_1$.

Demonstração. O vetor coluna com coordenadas x_2, \dots, x_n pode ser expresso a partir das últimas $n - 1$ equações como

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = -(A^{11})^{-1} \begin{bmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1.$$

Substituindo isto na primeira equação, temos que

$$(a_{11} - r_1^1(A^{11})^{-1}c_1^1)x_1 = y_1.$$

Portanto, pela Definição 3.1.2 temos que a igualdade se satisfaz. \square

Proposição 3.1.6. *Suponhamos que existe a matriz inversa A^{-1} e sua ji -ésima entrada $(A^{-1})_{ji}$ é um elemento invertível do anel. Então o ij -ésimo quasideterminante de A é definido e dado por*

$$|A|_{ij} = ((A^{-1})_{ji})^{-1}.$$

Demonstração. Primeiro consideremos o caso $i = j = 1$. Seja $B = A^{-1}$ para que o elemento b_{11} seja invertível. Usando a multiplicação em bloco de matrizes, obtemos de $AB = 1$ que

$$A^{11} \left(B_{11} - \begin{bmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} b_{11}^{-1} [b_{12} \cdots b_{1n}] \right) = 1,$$

provando que A^{11} é invertível de modo que $|A|_{11}$ é definido. Agora seja b a primeira coluna de B . Então $Ab = e_1$, onde e_1 é o vetor coluna que tem 1 na primeira posição e zeros em outros lugares. O Lema 3.1.5 fornece $|A|_{11}b_{11} = 1$, provando a afirmação. No caso de i e j arbitrários, reorganizamos a matriz A da seguinte forma: mova a i -ésima linha para a posição superior e depois mova a j -ésima coluna para a posição mais à esquerda. Reorganizando a matriz B consequentemente, reduzimos o argumento ao caso anterior, o que dá $|A|_{ij}b_{ji} = 1$. \square

O exemplo a seguir mostra que o conceito de quasideterminante não é uma extensão de um determinante dentro de um anel comutativo, mas sim uma extensão da razão entre dois determinantes.

Exemplo 3.1.7. *Seja $A \in M_n(R)$, com R sendo um anel comutativo. Lembre que se $\det(A) \neq 0$, então $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}ad(A)$, onde $ad(A)$ é a matriz adjunta de A . Além disso, os cofatores da matriz $ad(A)$ são da forma $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A^{ij})$. Logo, da Proposição 3.1.6, podemos obter que se os elementos a_{ij} de uma matriz A comutam, então*

$$|A|_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A}{\det A^{ij}}.$$

Para mais detalhes sobre os quasideterminantes ver [MO07] páginas 23-27, ou [GKL95].

Agora seja q uma variável formal e I a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

Definição 3.1.8. *Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(R)$, com R um anel arbitrário com identidade e $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixo. As **funções simétricas elementares não comutativas** $\Lambda_k^{(i)}$ associadas à matriz A são definidas como os coeficientes da expansão do seguinte quasideterminante*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{(i)} q^k = |I + qA|_{ii}.$$

Outras famílias de funções simétricas não comutativas de A são as

- Completas $S_k^{(i)}$:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k^{(i)} q^k = |I - qA|_{ii}^{-1}.$$

- Series de potencias de primeiro tipo $\Psi_k^{(i)}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k^{(i)} q^{k-1} = |I - qA|_{ii} \frac{d}{dq} |I - qA|_{ii}^{-1}.$$

- Series de potencias de segundo tipo $\Phi_k^{(i)}$:

$$\sum_{k \geq 1} \Phi_k^{(i)} q^{k-1} = -\frac{d}{dq} \log |I - qA|_{ii},$$

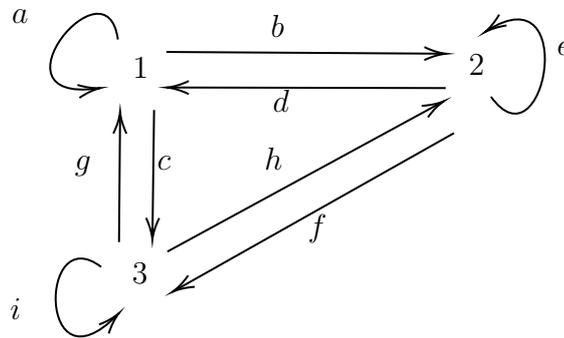
onde a derivada com respeito a q e o logaritmo são considerados como operações formais nas séries de potências formais em q com coeficientes no anel.

Vamos considerar as seguintes definições.

Definição 3.1.9. Um **grafo** $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ é uma estrutura composta por um conjunto de vértices \mathcal{V} , e um conjunto de arestas E o qual é formado por pares de vértices. Além disso, o grafo é dito **orientado** se cada aresta é associada a um par ordenado de vértices, a qual será chamada de seta do vértice u ao vértice v , com $u, v \in \mathcal{V}$.

Definição 3.1.10. Dado um conjunto não vazio de vértices \mathcal{V} , um **grafo orientado completo** \mathcal{G} é um par ordenado (\mathcal{V}, E) , onde E é um conjunto de setas, e para cada par de vértices $u, v \in \mathcal{V}$, existe uma seta de u para v . Note que para que o grafo seja completo consideramos o caso $u = v$, com $u, v \in \mathcal{V}$.

Exemplo 3.1.11. Seja $\mathcal{V} = \{1, 2, 3\}$ e $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$. O grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ pode ser visto da seguinte forma:



Note que \mathcal{G} é um grafo orientado completo.

Continuando com a matriz A , considere o grafo orientado completo \mathcal{A} com n vértices $\{1, 2, \dots, n\}$ e a seta de i para j será denotada por a_{ij} . Cada caminho do vértice i para

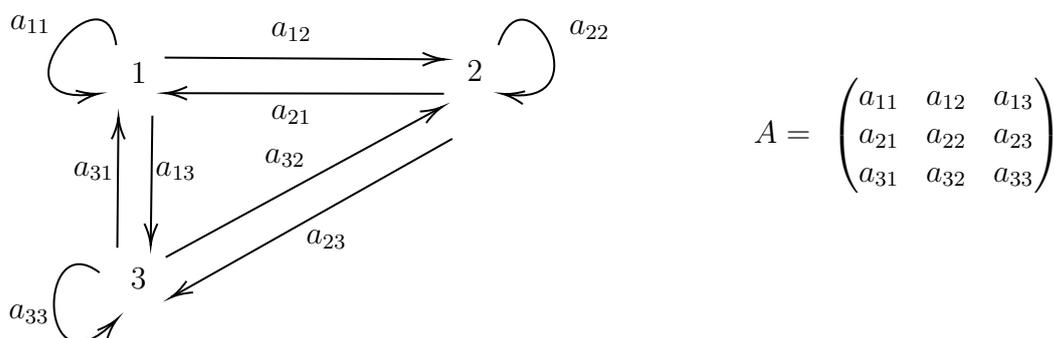
o vértice j define um monômio da seguinte forma

$$a_{ir_1} a_{r_1 r_2} \cdots a_{r_{k-2} r_{k-1}} a_{r_{k-1} j}$$

o qual é obtido considerando o produto de indexações das setas consecutivas do caminho. O inteiro positivo k é o comprimento do caminho. Além disso chamamos de caminho simples qualquer caminho tal que $r_s \neq i, j$ para todo $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

Para melhor compreensão vejamos o exemplo a seguir.

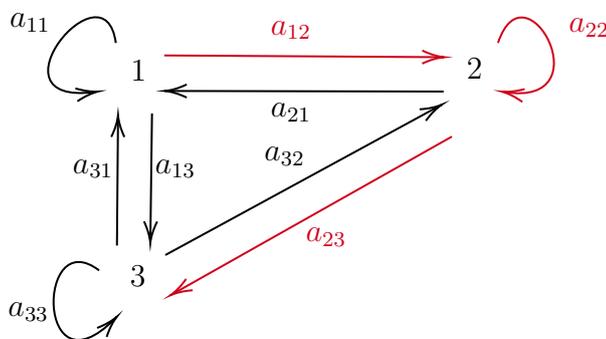
Exemplo 3.1.12. Consideremos o seguinte grafo orientado completo com 3 vértices e sua matriz correspondente



Vejamos quais são todos os possíveis caminhos de comprimento 3 que levam do vértice 1 para o vértice 3:

- $a_{11} a_{11} a_{13}$
- $a_{12} a_{22} a_{23}$
- $a_{13} a_{33} a_{33}$
- $a_{11} a_{12} a_{23}$
- $a_{12} a_{23} a_{33}$
- $a_{13} a_{31} a_{13}$
- $a_{11} a_{13} a_{33}$
- $a_{12} a_{21} a_{13}$
- $a_{13} a_{32} a_{23}$

Observe que o único monômio dado acima que vem de um caminho simples é $a_{12} a_{22} a_{23}$, pois, é o único que não passa duas vezes pelo vértice inicial ou final durante sua trajetória, como pode ser visto no desenho a seguir.



Temos a seguinte descrição das funções simétricas não comutativas definidas acima em termos do grafo \mathcal{A} .

Proposição 3.1.13. *i) $(-1)^{k-1}\Lambda_k^{(i)}$ é a soma de todos os monômios de caminhos simples de i para i em \mathcal{A} de comprimento k .*

ii) $S_k^{(i)}$ é a soma de todos os monômios de caminhos de i para i em \mathcal{A} de comprimento k .

iii) $\Psi_k^{(i)}$ é a soma de todos os monômios de caminhos de i para i em \mathcal{A} de comprimento k , onde o coeficiente de cada monômio é o comprimento do primeiro retorno ao vértice i .

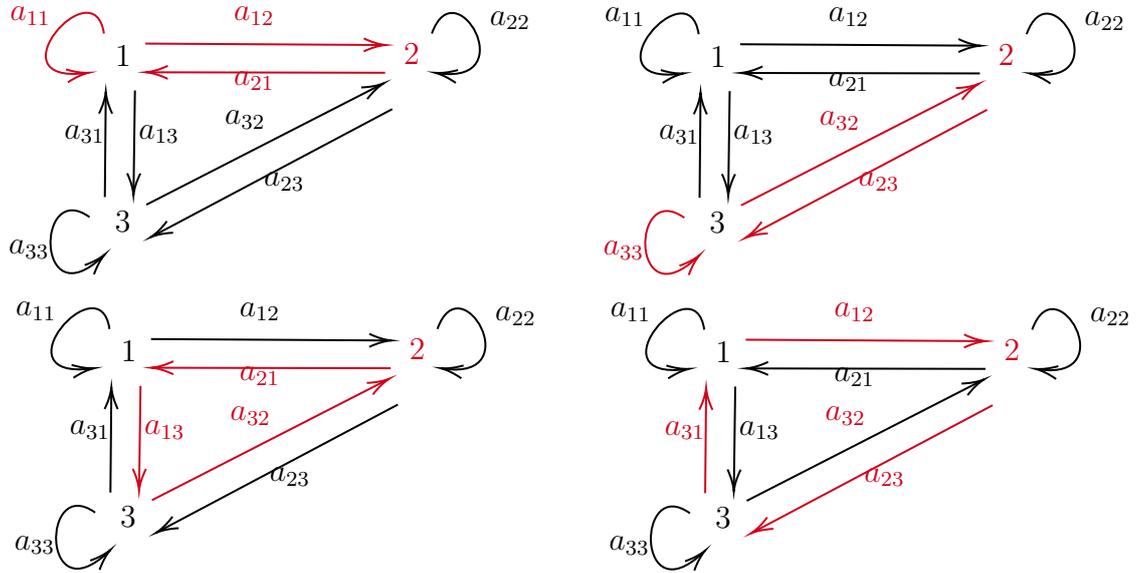
iv) $\Phi_k^{(i)}$ é a soma de todos os monômios de caminhos de i para i em \mathcal{A} de comprimento k , em que o coeficiente de cada monômio é o quociente de k pelo número de retornos ao vértice i .

Demonstração. Ver [GKL95] ou [MO07] Proposição 7.3.1 (página 247). \square

Exemplo 3.1.14. *Seja \mathcal{A} o grafo do Exemplo 3.1.12. De acordo com a proposição anterior, vamos ver o que significa cada um dos itens.*

Seja $k = 3$ e fixemos o vértice 2. Então:

i) Observe que os caminhos simples que levam do vértice 2 ao vértice 2 do compartimento 3 são aqueles descritos nos grafos a seguir com a cor vermelha:



Portanto $(-1)^{3-1}\Lambda_3^{(2)} = \Lambda_3^{(2)} = a_{21}a_{11}a_{12} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{23}a_{33}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12}$,

ii) Como todo caminho simples é um caminho então, os monômios do item anterior também aparecem em $S_3^{(2)}$. De fato:

$$S_3^{(2)} = a_{21}a_{11}a_{12} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{23}a_{33}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12} + a_{22}a_{22}a_{22} + a_{21}a_{12}a_{22} + a_{23}a_{32}a_{22} + a_{22}a_{21}a_{12} + a_{22}a_{23}a_{32}.$$

iii) Observe que de acordo com a Proposição 3.1.13, os monômios correspondentes a $\Psi_3^{(2)}$ são os mesmos do item ii), mas cada um deles é multiplicado pelo comprimento do primeiro retorno ao vértice 2, por exemplo, no monômio $a_{21}a_{12}a_{22}$ vemos que primeiro ele vai para o vértice 1, depois retorna para o vértice 2 e finalmente faz um loop, portanto o comprimento do primeiro retorno é igual a dois, então temos o monômio $2a_{21}a_{12}a_{22}$. Assim,

$$\begin{aligned} \Psi_3^{(2)} = & 3a_{21}a_{11}a_{12} + 3a_{21}a_{13}a_{32} + 3a_{23}a_{33}a_{32} + 3a_{23}a_{31}a_{12} + a_{22}a_{22}a_{22} + 2a_{21}a_{12}a_{22} + \\ & + 2a_{23}a_{32}a_{22} + a_{22}a_{21}a_{12} + a_{22}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

iv) Seguindo a proposição anterior, novamente os monômios correspondentes a $\Phi_3^{(2)}$ são os mesmos do item ii), mas cada um deles é multiplicado pelo comprimento do monômio sobre a quantidade de retornos ao vértice inicial, por exemplo, no monômio $a_{21}a_{12}a_{22}$ o qual tem comprimento 3, ele retorna para o vértice 2 duas vezes, primeiro ao fazer o caminho $a_{21}a_{12}$ e a segunda em a_{22} , portanto temos o monômio $\frac{3}{2}a_{21}a_{12}a_{22}$. Logo,

$$\begin{aligned} \Phi_3^{(2)} = & \frac{3}{1}a_{21}a_{11}a_{12} + \frac{3}{1}a_{21}a_{13}a_{32} + \frac{3}{1}a_{23}a_{33}a_{32} + \frac{3}{1}a_{23}a_{31}a_{12} + \frac{3}{3}a_{22}a_{22}a_{22} + \frac{3}{2}a_{21}a_{12}a_{22} + \\ & + \frac{3}{2}a_{23}a_{32}a_{22} + \frac{3}{2}a_{22}a_{21}a_{12} + \frac{3}{2}a_{22}a_{23}a_{32} \\ = & 3a_{21}a_{11}a_{12} + 3a_{21}a_{13}a_{32} + 3a_{23}a_{33}a_{32} + 3a_{23}a_{31}a_{12} + a_{22}a_{22}a_{22} + \frac{3}{2}a_{21}a_{12}a_{22} + \\ & + \frac{3}{2}a_{23}a_{32}a_{22} + \frac{3}{2}a_{22}a_{21}a_{12} + \frac{3}{2}a_{22}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Observação 3.1.15. Consideremos a seguinte matriz

$$E := \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \cdots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \cdots & E_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(U(\mathfrak{gl}_n)),$$

e denotemos por E_i a submatriz de E , com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ da seguinte forma

$$E_i := \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1i} \\ E_{21} & E_{22} & \cdots & E_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{i1} & E_{i2} & \cdots & E_{ii} \end{pmatrix} \in M_i(U(\mathfrak{gl}_i)).$$

Agora considere em \mathfrak{gl}_n as matrizes $E_m \in M_m(U(\mathfrak{gl}_m))$ para cada $1 \leq m \leq n$, e as funções simétricas não comutativas $\Lambda_k^{(m)}, S_k^{(m)}, \Psi_k^{(m)}, \Phi_k^{(m)}$ associadas a matriz $E_m + (-m + 1)I_m$. Pela Proposição 3.1.13, temos expressões explícitas para essas funções.

Considere para cada $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\Lambda_k &:= \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} \Lambda_{i_1}^{(1)} \Lambda_{i_2}^{(2)} \dots \Lambda_{i_n}^{(n)}, \\ S_k &:= \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} S_{i_1}^{(1)} S_{i_2}^{(2)} \dots S_{i_n}^{(n)}, \\ \Psi_{nk} &:= \sum_{i=1}^n \Psi_k^{(i)}, \\ \Phi_k &:= \sum_{i=1}^n \Phi_k^{(i)}.\end{aligned}$$

onde os índices i_k são inteiros não negativos e $\Lambda_0^{(m)} = S_0^{(m)} = 1$.

Teorema 3.1.16. *Todos os elementos $\Lambda_k, S_k, \Psi_{nk}, \Phi_k$ com $k \geq 1$ pertencem ao centro $Z(U(\mathfrak{gl}_n))$. Além disso $\Psi_{nk} = \Phi_k$ para todo k .*

Demonstração. Ver [GKL95] ou [MO07, Teorema 7.3.2] (página 248). \square

Corolário 3.1.17. *Cada família de $\{\Lambda_k\}_{k=1}^n, \{S_k\}_{k=1}^n, \{\Psi_{nk}\}_{k=1}^n, \{\Phi_k\}_{k=1}^n$ gera o centro de $U(\mathfrak{gl}_n)$.*

Demonstração. Ver [GKL95] ou [MO07, Corolario 7.3.3] (página 250). \square

Corolário 3.1.18. *A subálgebra de Gelfand-Tsetlin Γ é gerada por cada família de elementos $\{\Lambda_k^{(i)}\}, \{S_k^{(i)}\}, \{\Psi_{nk}^{(i)}\}, \{\Phi_k^{(i)}\}$ com $1 \leq k \leq i \leq n$.*

Demonstração. Ver [GKL95] ou [MO07, Proposição 7.3.5] (página 250). \square

Levando em consideração o que foi dito acima, vejamos os seguintes exemplos para calcular quais são os polinômios a considerar no caso das álgebras de Lie \mathfrak{gl}_3 e \mathfrak{gl}_4 .

Exemplo 3.1.19. *Consideremos a álgebra de Lie \mathfrak{gl}_3 , pelo Corolário 3.1.17, o centro de $U(\mathfrak{gl}_3)$ é gerado por $\Psi_{31}, \Psi_{32}, \Psi_{33}$ onde:*

$$\begin{aligned}\Psi_{31} &= E_{11} + E_{22} - 1 + E_{33} - 2 = \sum_{m=1}^n (E_{mm} - m + 1); \\ \Psi_{32} &= E_{11}^2 + 2E_{21}E_{12} + (E_{22} - 1)^2 + 2E_{31}E_{13} + 2E_{32}E_{23} + E_{33}^2 \\ &= \sum_{m=1}^n (E_{mm} - m + 1)^2 + 2 \sum_{1 \leq l < m \leq n} (E_{ml}E_{lm}); \\ \Psi_{33} &= E_{11}^3 + (E_{22} - 1)^3 + (E_{22} - 1)E_{21}E_{12} + 2E_{21}E_{12}(E_{22} - 1) + 3E_{21}(E_{11} - 1)E_{12} + \\ &\quad + (E_{33} - 2)^3 + (E_{33} - 2)E_{31}E_{13} + (E_{33} - 2)E_{32}E_{23} + 2E_{31}E_{13}(E_{33} - 2) + \\ &\quad + 2E_{32}E_{23}(E_{33} - 2) + 3E_{31}E_{12}E_{23} + 3E_{32}E_{21}E_{13} + 3E_{31}(E_{11} - 2)E_{13} + 3E_{32}(E_{22} - 2)E_{23}.\end{aligned}$$

Portanto a subálgebra de Gelfand-Tsetlin para $U(\mathfrak{gl}_3)$ é

$$\Gamma = \langle \Psi_{31}, \Psi_{32}, \Psi_{33} \rangle.$$

Exemplo 3.1.20. *Agora no caso da álgebra de Lie \mathfrak{gl}_4 , o centro de $U(\mathfrak{gl}_4)$ é gerado por $\Psi_{41}, \Psi_{42}, \Psi_{43}, \Psi_{44}$, onde:*

$$\begin{aligned}\Psi_{41} &= \Psi_{41}^{(1)} + \Psi_{41}^{(2)} + \Psi_{41}^{(3)} + \Psi_{41}^{(4)} \\ &= E_{11} + (E_{22} - 1) + (E_{33} - 2) + (E_{44} - 3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{42} &= \Psi_{42}^{(1)} + \Psi_{42}^{(2)} + \Psi_{42}^{(3)} + \Psi_{42}^{(4)} \\ &= E_{11}^2 + 2E_{21}E_{12} + (E_{22} - 1)^2 + 2E_{31}E_{13} + 2E_{32}E_{23} + E_{33}^2 + 2E_{41}E_{14} + 2E_{42}E_{24} + \\ &\quad + 2E_{43}E_{34} + (E_{44} - 3)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{43} &= \Psi_{43}^{(1)} + \Psi_{43}^{(2)} + \Psi_{43}^{(3)} + \Psi_{43}^{(4)} \\ &= E_{11}^3 + (E_{22} - 1)^3 + (E_{22} - 1)E_{21}E_{12} + 2E_{21}E_{12}(E_{22} - 1) + 3E_{21}E_{11}E_{12} + (E_{33} - 2)^3 + \\ &\quad + (E_{33} - 2)E_{31}E_{13} + (E_{33} - 2)E_{32}E_{23} + 2E_{31}E_{13}(E_{33} - 2) + 2E_{32}E_{23}(E_{33} - 2) + \\ &\quad + 3E_{31}E_{12}E_{23} + 3E_{32}E_{21}E_{13} + 3E_{31}E_{11}E_{13} + 3E_{32}(E_{22} - 2)E_{23} + (E_{44} - 3)^3 + \\ &\quad + (E_{44} - 3)E_{41}E_{14} + (E_{44} - 3)E_{42}E_{24} + (E_{44} - 3)E_{43}E_{34} + 3E_{41}E_{11}E_{14} + 3E_{41}E_{12}E_{24} + \\ &\quad + 3E_{41}E_{13}E_{34} + 2E_{41}E_{14}(E_{44} - 3) + 3E_{42}(E_{22} - 1)E_{24} + 3E_{42}E_{21}E_{14} + 3E_{42}E_{23}E_{34} + \\ &\quad + 2E_{42}E_{24}(E_{44} - 3) + 3E_{43}(E_{33} - 2)E_{34} + 3E_{43}E_{31}E_{14} + 3E_{43}E_{32}E_{24} + 2E_{43}E_{34}(E_{44} - 3),\end{aligned}$$

$$\Psi_{44} = \Psi_{44}^{(1)} + \Psi_{44}^{(2)} + \Psi_{44}^{(3)} + \Psi_{44}^{(4)}, \text{ onde:}$$

$$\bullet \Psi_{44}^{(1)} = E_{11}^4,$$

$$\bullet \Psi_{44}^{(2)} = (E_{22} - 1)^4 + (E_{22} - 1)^2 E_{21}E_{12} + (E_{22} - 1)E_{21}E_{11}E_{12} + (E_{22} - 1)E_{21}E_{12}(E_{22} - 1) + \\ + 4E_{21}E_{11}^2 E_{12} + 3E_{21}E_{11}E_{12}(E_{22} - 1) + 2E_{21}E_{12}(E_{22} - 1)^2 + 2E_{21}E_{12}E_{21}E_{12},$$

$$\bullet \Psi_{44}^{(3)} = (E_{33} - 2)^4 + (E_{33} - 2)^2 E_{31}E_{13} + (E_{33} - 2)E_{31}E_{11}E_{13} + (E_{33} - 2)E_{31}E_{13}(E_{33} - 2) + \\ + 4E_{31}E_{11}^2 E_{13} + 3E_{31}E_{11}E_{13}(E_{33} - 2) + 2E_{31}E_{13}(E_{33} - 2)^2 + 2E_{31}E_{13}E_{31}E_{13} + \\ + (E_{33} - 2)^2 E_{32}E_{23} + (E_{33} - 2)E_{32}(E_{22} - 1)E_{23} + (E_{33} - 2)E_{32}E_{23}(E_{33} - 2) + \\ + 4E_{32}(E_{22} - 1)^2 E_{23} + 3E_{32}(E_{22} - 1)E_{23}(E_{33} - 2) + 2E_{32}E_{23}(E_{33} - 2)^2 + \\ + 2E_{32}E_{23}E_{32}E_{23} + (E_{33} - 2)E_{31}E_{12}E_{23} + (E_{33} - 2)E_{32}E_{21}E_{13} + 4E_{31}E_{11}E_{12}E_{23} + \\ + 4E_{31}E_{12}(E_{22} - 1)E_{23} + 3E_{31}E_{12}E_{23}(E_{33} - 2) + 4E_{31}E_{12}E_{21}E_{13} + 2E_{31}E_{13}E_{32}E_{23} + \\ + 4E_{32}(E_{22} - 1)E_{21}E_{13} + 4E_{32}E_{21}E_{11}E_{13} + 3E_{32}E_{21}E_{13}(E_{33} - 2) + 4E_{32}E_{21}E_{12}E_{23} + \\ + 2E_{32}E_{23}E_{31}E_{13},$$

$$\begin{aligned}
\bullet \Psi_{44}^{(4)} = & (E_{44} - 3)^4 + (E_{44} - 3)^2 E_{41} E_{14} + (E_{44} - 3) E_{41} E_{11} E_{14} + (E_{44} - 3) E_{41} E_{14} (E_{44} - 3) + \\
& + 4E_{41} E_{11}^2 E_{14} + 3E_{41} E_{11} E_{14} (E_{44} - 3) + 2E_{41} E_{14} (E_{44} - 3)^2 + 2E_{41} E_{14} E_{41} E_{14} + \\
& + (E_{44} - 3)^2 E_{42} E_{24} + (E_{44} - 3) E_{42} (E_{22} - 1) E_{24} + (E_{44} - 3) E_{42} E_{24} (E_{44} - 3) + \\
& + 4E_{42} (E_{22} - 1)^2 E_{24} + 3E_{42} (E_{22} - 1) E_{24} (E_{44} - 3) + 2E_{42} E_{24} (E_{44} - 3)^2 + \\
& + 2E_{42} E_{24} E_{42} E_{24} + (E_{44} - 3)^2 E_{43} E_{34} + (E_{44} - 3) E_{43} (E_{33} - 2) E_{34} + \\
& + (E_{44} - 3) E_{43} E_{34} (E_{44} - 3) + 4E_{43} (E_{33} - 2)^2 E_{34} + 3E_{43} (E_{33} - 2) E_{34} (E_{44} - 3) + \\
& + 2E_{43} E_{34} (E_{44} - 3)^2 + 2E_{43} E_{34} E_{43} E_{34} + (E_{44} - 3) E_{41} E_{12} E_{24} + (E_{44} - 3) E_{42} E_{21} E_{14} + \\
& + (E_{44} - 3) E_{41} E_{13} E_{34} + (E_{44} - 3) E_{43} E_{31} E_{14} + (E_{44} - 3) E_{42} E_{23} E_{34} + \\
& + (E_{44} - 3) E_{43} E_{32} E_{24} + 4E_{41} E_{11} E_{12} E_{24} + 4E_{41} E_{12} (E_{22} - 1) E_{24} + 3E_{41} E_{12} E_{24} (E_{44} - 3) + \\
& + 4E_{41} E_{12} E_{21} E_{14} + 2E_{41} E_{14} E_{42} E_{24} + 4E_{42} (E_{22} - 1) E_{21} E_{14} + 4E_{42} E_{21} E_{11} E_{14} + \\
& + 3E_{42} E_{21} E_{14} (E_{44} - 3) + 4E_{42} E_{21} E_{12} E_{24} + 2E_{42} E_{24} E_{41} E_{14} + 4E_{41} E_{11} E_{13} E_{34} + \\
& + 4E_{41} E_{13} (E_{33} - 2) E_{34} + 3E_{41} E_{13} E_{34} (E_{44} - 3) + 4E_{41} E_{13} E_{31} E_{14} + 2E_{41} E_{14} E_{43} E_{34} + \\
& + 4E_{43} (E_{33} - 2) E_{31} E_{14} + 4E_{43} E_{31} E_{11} E_{14} + 3E_{43} E_{31} E_{14} (E_{44} - 3) + 4E_{43} E_{31} E_{13} E_{34} + \\
& + 2E_{43} E_{34} E_{41} E_{14} + 4E_{42} (E_{22} - 1) E_{23} E_{34} + 4E_{42} E_{23} (E_{33} - 2) E_{34} + 3E_{42} E_{23} E_{34} (E_{44} - 3) + \\
& + 4E_{42} E_{23} E_{32} E_{24} + 2E_{42} E_{24} E_{43} E_{34} + 4E_{43} (E_{33} - 2) E_{32} E_{24} + 4E_{43} E_{32} (E_{22} - 1) E_{24} + \\
& + 3E_{43} E_{32} E_{24} (E_{44} - 3) + 4E_{43} E_{32} E_{23} E_{34} + 2E_{43} E_{34} E_{42} E_{24} + 4E_{41} E_{12} E_{23} E_{34} + \\
& + 4E_{41} E_{13} E_{32} E_{24} + 4E_{42} E_{21} E_{13} E_{34} + 4E_{42} E_{23} E_{31} E_{14} + 4E_{43} E_{32} E_{21} E_{14} + 4E_{43} E_{31} E_{12} E_{24}.
\end{aligned}$$

Portanto a subálgebra de Gelfand-Tsetlin para \mathfrak{gl}_4 é gerada por $\Gamma = \langle \Psi_{41}, \Psi_{42}, \Psi_{43}, \Psi_{44} \rangle$.

De maneira análoga ao feito na Seção 2.2 podemos visualizar a imagem dos geradores $\bar{\Psi}_{ij}$ em $gr(\Gamma)$, sendo escritos como combinação de polinômios nas variáveis comutativas X_{ij} .

Exemplo 3.1.21.

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_{n1} &= \sum_{i=1}^n X_{ii}, \\
\bar{\Psi}_{n2} &= \sum_{i=1}^n X_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \leq t < i \leq n} X_{it} X_{ti}, \\
\bar{\Psi}_{n3} &= \sum_{i=1}^n X_{ii}^3 + \sum_{1 \leq t < i \leq n} X_{it} X_{it} X_{ti} + 2 \sum_{1 \leq t < i \leq n} X_{it} X_{ti} X_{ii} + 3 \sum_{1 \leq r, s < i \leq n} X_{ir} X_{rs} X_{si}.
\end{aligned}$$

Observação 3.1.22. Da graduação de $U(\mathfrak{gl}_n)$ é o Corolário 3.1.17 temos que a variedade de Gelfand-Tsetlin é a variedade algébrica

$$V(\{\bar{\Psi}_{ij} \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, i\}) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2}.$$

Observação 3.1.23. Note que é possível simplificar os polinômios desenvolvidos no Exemplo 3.1.21 da seguinte forma:

Pela definição de variedade algébrica temos que:

$$V(\{\bar{\Psi}_{ij} \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, i\}) = \{p \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{n^2} \mid \bar{\Psi}_{ij}(p) = 0, \forall \bar{\Psi}_{ij}\}.$$

Assim, o polinômio

$$\bar{\Psi}_{11} = X_{11} = 0 \iff X_{11} = 0. \quad (3.1)$$

Ao considerar 3.1 em $\bar{\Psi}_{21}$, temos que:

$$\bar{\Psi}_{21} = X_{11} + X_{22} = 0 + X_{22} = 0 \iff X_{22} = 0. \quad (3.2)$$

Usando as condições 3.1, 3.2, em $\bar{\Psi}_{22}$, tem-se:

$$\bar{\Psi}_{22} = X_{11}^2 + X_{22}^2 + 2X_{21}X_{12} = 0 \iff X_{21}X_{12} = 0.$$

Desta forma, continuando com cada um dos polinômios obtemos que:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{i1} &= X_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; \\ \bar{\Psi}_{ij} &= \sum_{1 \leq t_1, t_2, \dots, t_{j-1} \leq i-1} X_{it_1} X_{t_1 t_2} \cdots X_{t_{j-2} t_{j-1}} X_{t_{j-1} i}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i, \end{aligned}$$

com $t_r \neq t_s$ para todo $r \neq s$.

Exemplo 3.1.24. Para o caso da álgebra de Lie \mathfrak{gl}_5 os polinômios $\bar{\Psi}_{ij}$ simplificados são:

$$\bar{\Psi}_{i1} = X_{ii}, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

$$\bar{\Psi}_{22} = X_{21}X_{12},$$

$$\bar{\Psi}_{32} = X_{31}X_{13} + X_{32}X_{23},$$

$$\bar{\Psi}_{33} = X_{31}X_{12}X_{23} + X_{32}X_{21}X_{13},$$

$$\bar{\Psi}_{42} = X_{41}X_{14} + X_{42}X_{24} + X_{43}X_{34},$$

$$\bar{\Psi}_{43} = X_{41}X_{12}X_{24} + X_{41}X_{13}X_{34} + X_{42}X_{21}X_{14} + X_{42}X_{23}X_{34} + X_{43}X_{31}X_{14} + X_{43}X_{32}X_{24},$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{44} &= X_{41}X_{12}X_{23}X_{34} + X_{41}X_{13}X_{32}X_{24} + X_{42}X_{21}X_{13}X_{34} + X_{42}X_{23}X_{31}X_{14} + X_{43}X_{31}X_{12}X_{24} + \\ &+ X_{43}X_{32}X_{21}X_{14}, \end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}_{52} = X_{51}X_{15} + X_{52}X_{25} + X_{53}X_{35} + X_{54}X_{45},$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{53} &= X_{51}X_{12}X_{25} + X_{51}X_{13}X_{35} + X_{51}X_{14}X_{45} + X_{52}X_{21}X_{15} + X_{52}X_{23}X_{35} + X_{52}X_{24}X_{45} + \\ &+ X_{53}X_{31}X_{15} + X_{53}X_{32}X_{25} + X_{53}X_{34}X_{45} + X_{54}X_{41}X_{15} + X_{54}X_{42}X_{25} + X_{54}X_{43}X_{35}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{54} &= X_{51}X_{12}X_{23}X_{35} + X_{51}X_{12}X_{24}X_{45} + X_{51}X_{13}X_{32}X_{25} + X_{51}X_{13}X_{34}X_{45} + X_{51}X_{14}X_{42}X_{25} + \\ &+ X_{51}X_{14}X_{43}X_{35} + X_{52}X_{21}X_{13}X_{35} + X_{52}X_{21}X_{14}X_{45} + X_{52}X_{23}X_{31}X_{15} + X_{52}X_{23}X_{34}X_{45} + \\ &+ X_{52}X_{24}X_{41}X_{15} + X_{52}X_{24}X_{43}X_{35} + X_{53}X_{31}X_{12}X_{25} + X_{53}X_{31}X_{14}X_{45} + X_{53}X_{32}X_{21}X_{15} + \\ &+ X_{53}X_{32}X_{24}X_{45} + X_{53}X_{34}X_{41}X_{15} + X_{53}X_{34}X_{42}X_{25} + X_{54}X_{41}X_{12}X_{25} + X_{54}X_{41}X_{13}X_{35} + \\ &+ X_{54}X_{42}X_{21}X_{15} + X_{54}X_{42}X_{23}X_{35} + X_{54}X_{43}X_{31}X_{15} + X_{54}X_{43}X_{32}X_{25}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{55} &= X_{51}X_{12}X_{23}X_{34}X_{45} + X_{51}X_{12}X_{24}X_{43}X_{35} + X_{51}X_{13}X_{32}X_{24}X_{45} + X_{51}X_{13}X_{34}X_{42}X_{25} + \\ &+ X_{51}X_{14}X_{42}X_{23}X_{35} + X_{51}X_{14}X_{43}X_{32}X_{25} + X_{52}X_{21}X_{13}X_{34}X_{45} + X_{52}X_{21}X_{14}X_{43}X_{35} + \\ &+ X_{52}X_{23}X_{31}X_{14}X_{45} + X_{52}X_{23}X_{34}X_{41}X_{15} + X_{52}X_{24}X_{41}X_{13}X_{35} + X_{52}X_{24}X_{43}X_{31}X_{15} + \\ &+ X_{53}X_{31}X_{12}X_{24}X_{45} + X_{53}X_{31}X_{14}X_{42}X_{25} + X_{53}X_{32}X_{21}X_{14}X_{45} + X_{53}X_{32}X_{24}X_{41}X_{15} + \\ &+ X_{53}X_{34}X_{41}X_{12}X_{25} + X_{53}X_{34}X_{42}X_{21}X_{15} + X_{54}X_{41}X_{12}X_{23}X_{35} + X_{54}X_{41}X_{13}X_{32}X_{25} + \\ &+ X_{54}X_{42}X_{21}X_{13}X_{35} + X_{54}X_{42}X_{23}X_{31}X_{15} + X_{54}X_{43}X_{31}X_{12}X_{25} + X_{54}X_{43}X_{32}X_{21}X_{15}. \end{aligned}$$

Observação 3.1.25. De forma análoga podemos considerar o procedimento para o caso dos polinômios $\bar{\gamma}_{ij}$ do Exemplo 2.2.1 e resultado é equivalente.

Capítulo 4

Bases de Gröbner

Em matemática, especialmente na área da álgebra computacional e geometria algébrica, as Bases de Gröbner desempenham um papel central na análise e manipulação de polinômios e sistemas de equações polinomiais. Essa ferramenta revolucionou a maneira como lidamos com ideais polinomiais, permitindo-nos abordar uma ampla variedade de problemas complexos de forma sistemática e eficiente.

Neste capítulo, estudaremos o conceito de Bases de Gröbner, apresentando definições, propriedades e algoritmos relacionados a essa teoria em base nos livros [CLO98] e [DS09].

4.1 Definições e notações

Definição 4.1.1. Dizemos que um **monômio** de grau $|\alpha|$ nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n é uma expressão da forma

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$. Além disso

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

é chamado o grau total do monômio.

Para simplificar a notação, escreveremos x^α , sendo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ o vetor de expoentes no monômio.

Observação 4.1.2. Um polinômio $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ é uma combinação linear finita de monômios x^α :

$$f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}, \quad c_{\alpha} \in \mathbb{k}.$$

Definição 4.1.3. Uma **ordem monomial** sobre $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ é qualquer relação $>$ sobre o conjunto dos monômios x^α em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ satisfazendo:

1. $>$ é uma relação de ordem total.

2. $>$ é compatível com a multiplicação em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, no sentido em que se $x^\alpha > x^\beta$ e x^γ é qualquer monômio, então $x^\alpha x^\gamma = x^{\alpha+\gamma} > x^{\beta+\gamma} = x^\beta x^\gamma$.
3. $>$ é uma boa ordenação. Ou seja, toda coleção não vazia de monômios tem um menor elemento com respeito a $>$.

Algumas das ordens monomiais mais comumente usadas são as seguintes.

Definição 4.1.4 (Ordem Lexicográfico). *Sejam x^α e x^β monômios em $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dizemos que $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ se a entrada não-zero mais à esquerda na diferença $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ é positiva.*

Exemplo 4.1.5. *Consideremos a ordem $x > y > z$.*

- Observe que $x^3 y^5 z^8 >_{lex} x^3 y^2 z^{10}$, pois seguindo a definição anterior, neste caso temos que $\alpha = (3, 5, 8)$ e $\beta = (3, 2, 10)$, logo $\alpha - \beta = (0, 3, -2)$ e a entrada não zero mais à esquerda é 3 a qual é positiva.
- Temos que $x^7 y^3 z^5 >_{lex} x^7 y^3 z^4$, pois neste caso temos que $\alpha = (7, 3, 5)$ e $\beta = (7, 3, 4)$, logo $\alpha - \beta = (0, 0, 1)$ e a entrada não zero mais a esquerda é 1 a qual é positiva.

Definição 4.1.6 (Ordem lexicográfico graduado). *Sejam x^α e x^β monômios em $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dizemos que $x^\alpha >_{grlex} x^\beta$ se $|\alpha| > |\beta|$, ou se $|\alpha| = |\beta|$ e $x^\alpha >_{lex} x^\beta$.*

Exemplo 4.1.7. *Consideremos novamente a ordem $x > y > z$.*

- Temos que $x^6 y^2 z^4 >_{grlex} x^8 y z^2$, uma vez que $|(6, 2, 4)| = 12 > 11 = |(8, 1, 2)|$
- Também $x^5 y^4 z^3 >_{grlex} x^2 y^7 z^3$, pois $|(5, 4, 3)| = 12 = |(2, 7, 3)|$ mas $x^5 y^4 z^3 >_{lex} x^2 y^7 z^3$.

Definição 4.1.8 (Ordem lexicográfico reverso graduado). *Sejam x^α e x^β monômios em $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dizemos que $x^\alpha >_{grevlex} x^\beta$ se $|\alpha| > |\beta|$, ou se $|\alpha| = |\beta|$ e a entrada não-zero mais à direita na diferença $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ é negativa.*

Exemplo 4.1.9. *Consideremos a ordem $x > y > z > w$.*

- $x^5 y^2 z^8 w^6 >_{grevlex} x^7 y z^4 w^8$, já que $|(5, 2, 8, 6)| = 21 > 20 = |(7, 1, 4, 8)|$.
- $x^9 y^3 z^6 w^5 >_{grevlex} x^8 y^4 z^6 w^5$, já que $|(9, 3, 6, 5)| = 23 = |(8, 4, 6, 5)|$ e $(9, 3, 6, 5) - (8, 4, 6, 5) = (1, -1, 0, 0)$, pois a entrada não zero mais a direita é -1 .

Observação 4.1.10. *Note que dado um polinômio podemos ordenar seus termos monomiais de diferentes formas dependendo da ordem monomial fixada, o que será relevante nas seções seguintes.*

Exemplo 4.1.11. *Seja $f = 5x^3 y^2 + 3xy^5 z^2 - x^2 z^3 + 2y^7 z \in \mathbb{R}[x, y, z]$.*

- Considerando a ordem $>_{lex}$ temos $f = 5x^3 y^2 - x^2 z^3 + 3xy^5 z^2 + 2y^7 z$.
- Considerando a ordem $>_{grlex}$ temos $f = 3xy^5 z^2 + 2y^7 z + 5x^3 y^2 - x^2 z^3$.
- Considerando a ordem $>_{grevlex}$ temos $f = 2y^7 z + 3xy^5 z^2 + 5x^3 y^2 - x^2 z^3$.

Definição 4.1.12. *Seja $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \neq 0$ um polinômio em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ e seja $>$ uma ordem monomial.*

(i) O multigrado de f é

$$mdeg(f) := \max\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid c_\alpha \neq 0\}.$$

O máximo é obtido em relação à ordem escolhido $>$.

(ii) O coeficiente principal de f é

$$LC(f) := c_{mdeg(f)} \in \mathbb{k}.$$

(iii) O monômio principal de f é

$$LM(f) := x^{mdeg(f)}.$$

$LM(f)$ tem coeficiente 1.

(iv) O termo principal de f é

$$LT(f) := LC(f) \cdot LM(f).$$

Exemplo 4.1.13. Seja $f = 4x^2z^2 + 8y^2z^3 + xy^2z^6 + 3x^2yz^5 \in \mathbb{R}[x, y, z]$ e seja $>_{lex}$ a ordem monomial fixada com $x > y > z$. Então

- $mdeg(f) = (2, 1, 5)$,
- $LC(f) = 3$,
- $LM(f) = x^2yz^5$,
- $LT(f) = 3x^2yz^5$.

O multigrado de um polinômio possui as seguintes propriedades, das quais precisaremos mais tarde.

Lema 4.1.14. Se f, g são polinômios não nulos em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Então:

(i) $mdeg(fg) = mdeg(f) + mdeg(g)$.

(ii) Se $f + g \neq 0$, então

$$mdeg(f + g) \leq \max\{mdeg(f), mdeg(g)\}$$

A igualdade ocorre se $mdeg(f) \neq mdeg(g)$.

Demonstração. Sejam $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha}x^{\alpha}$, $g = \sum_{\beta} b_{\beta}x^{\beta}$ polinômios não nulos em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$.

(i) Considere $f \cdot g = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha}b_{\beta}x^{\alpha+\beta}$. O termo principal de fg é

$$a_{mdeg(f)}b_{mdeg(g)}x^{mdeg(f)+mdeg(g)}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} mdeg(fg) &= \max\{\alpha + \beta \in \mathbb{N}_0^n \mid a_{\alpha}b_{\beta} \neq 0\} \\ &= \max\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid a_{\alpha}b_{\beta} \neq 0\} + \max\{\beta \in \mathbb{N}_0^n \mid a_{\alpha}b_{\beta} \neq 0\} \\ &= mdeg(f) + deg(g). \end{aligned}$$

(ii) Seja $f + g \neq 0$ e seja $f + g = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha}x^{\alpha} + b_{\beta}x^{\beta} = \sum_{\gamma} c_{\gamma}x^{\gamma}$. Considere os seguintes casos:

(a) $mdeg(f) = mdeg(g)$:

Se $LC(f) + LC(g) = 0$, então

$$\begin{aligned} mdeg(f + g) &< mdeg(f) = mdeg(g) \\ &= \max\{mdeg(f), mdeg(g)\}. \end{aligned}$$

Se $LC(f) + LC(g) \neq 0$, então

$$\begin{aligned} mdeg(f + g) &= mdeg(f) = mdeg(g) \\ &= \max\{mdeg(f), mdeg(g)\}. \end{aligned}$$

(b) $mdeg(f) \neq mdeg(g)$:

Sem perda de generalidade, suponha que $mdeg(f) > mdeg(g)$. Então

$$LC(f + g) = LC(f) + 0 = LC(f),$$

e, portanto,

$$mdeg(f + g) = mdeg(f) = \max\{mdeg(f), mdeg(g)\}.$$

□

O monômio principal, o coeficiente principal e o termo principal de um polinômio têm as seguintes propriedades

Lema 4.1.15. *Se f, g são polinômios não nulos de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, então:*

(i) $LM(fg) = LM(f) \cdot LM(g)$.

(ii) $LC(fg) = LC(f) \cdot LC(g)$.

(iii) $LT(fg) = LT(f) \cdot LT(g)$.

Demonstração. Sejam $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_{\alpha}x^{\alpha}$ e $g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} b_{\beta}x^{\beta}$ polinômios não nulos em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$.

(i) Note que $LM(f) = x^{mdeg(f)}$ e $LM(g) = x^{mdeg(g)}$. Pelo Lema 4.1.14, temos que

$$mdeg(fg) = mdeg(f) + mdeg(g).$$

Portanto

$$\begin{aligned} LM(fg) &= x^{mdeg(fg)} \\ &= x^{mdeg(f) + mdeg(g)} \\ &= x^{mdeg(f)} \cdot x^{mdeg(g)} \\ &= LM(f) \cdot LM(g). \end{aligned}$$

(ii) Como

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha + a_{mdeg(f)} x^{mdeg(f)}, \quad e \quad g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} b_\beta x^\beta + b_{mdeg(g)} x^{mdeg(g)},$$

para $\alpha \neq mdeg(f)$ e $\beta \neq mdeg(g)$, então

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha b_\beta x^{\alpha+\beta} + a_{mdeg(f)} b_{mdeg(g)} x^{mdeg(fg)} + \\ &+ (a_{mdeg(f)} x^{mdeg(f)} + b_{mdeg(g)} x^{mdeg(g)}) \cdot \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha b_\beta x^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Portanto

$$LC(f \cdot g) = a_{mdeg(f)} b_{mdeg(g)} = LC(f) \cdot LC(g).$$

(iii) Pela definição e pelos dois pontos anteriores segue-se que:

$$\begin{aligned} LT(f \cdot g) &= LC(f \cdot g) \cdot LM(f \cdot g) \\ &= LC(f) \cdot LC(g) \cdot LM(f) LM(g) \\ &= LC(f) \cdot LM(f) \cdot LC(g) \cdot LM(g) \\ &= LT(f) \cdot LT(g). \end{aligned}$$

□

4.2 Algoritmo da divisão

No caso de uma única variável, realizamos uma divisão de polinômios, onde o polinômio $f \in \mathbb{k}[x]$ é dividido pelo segundo polinômio $g \in \mathbb{k}[x]$, comparando seus termos líderes. Eventualmente, multiplicamos $LT(g)$ por um monômio de modo que ele se anule com $LT(f)$.

Nosso objetivo é estender esse processo para polinômios de várias variáveis. Buscamos dividir um polinômio específico $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ por um conjunto de polinômios $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, a fim de obter uma expressão da seguinte forma:

$$f = \sum_{i=1}^s q_i f_i + r,$$

onde $q_i, r \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$.

A essência do algoritmo permanece a mesma que no caso de uma variável: a ideia é eliminar o termo principal de f em relação a uma ordem monomial específica, multiplicando-o por algum f_i apropriado e subtraindo-o. Esse monômio se torna então um termo no q_i correspondente.

Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.2.1. Consideremos $f = 3x^5y - 2x^3y^2 + y$ e $F = (f_1, f_2) = (x^3y + xy^2 - y + 3, x^2 + y^3 + y)$. Fixemos a ordem lexicográfica com $x > y > z$.

O termo líder $LT(f_1)$ divide o termo líder $LT(f)$. Assim dividimos x^3y em $3x^5y$, deixando $3x^2$, e subtraia $3x^2 \cdot f_1$ de f :

$$\begin{array}{r} q_1 : 3x^2 \\ q_2 : \\ x^3y + xy^2 - y + 3 \\ x^2 + y^3 + y \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} q_1 : 3x^2 \\ q_2 : \\ x^3y + xy^2 - y + 3 \\ x^2 + y^3 + y \end{array}} \right) \begin{array}{r} \hline 3x^5y - 2x^3y^2 + y \\ 3x^5y + 3x^3y^2 - 3x^2y + 9x^2 \\ \hline - 5x^3y^2 + 3x^2y - 9x^2 + y \end{array}$$

Agora repetimos o mesmo processo em $f = -5x^3y^2 + 3x^2y - 9x^2 + y$. Como o termo líder $LT(f_1)$ divide o termo líder $LT(f)$. Assim dividimos x^3y em $-5x^3y^2$, deixando $-5y$, e subtraia $-5y \cdot f_1$ de f :

$$\begin{array}{r} q_1 : 3x^2 - 5y \\ q_2 : \\ x^3y + xy^2 - y + 3 \\ x^2 + y^3 + y \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} q_1 : 3x^2 - 5y \\ q_2 : \\ x^3y + xy^2 - y + 3 \\ x^2 + y^3 + y \end{array}} \right) \begin{array}{r} \hline 3x^5y - 2x^3y^2 + y \\ 3x^5y + 3x^3y^2 - 3x^2y + 9x^2 \\ \hline - 5x^3y^2 + 3x^2y - 9x^2 + y \\ - 5x^3y^2 - 5xy^3 + 5y^2 - 15y \\ \hline 3x^2y - 9x^2 + 5xy^3 - 5y^2 + 16y \end{array}$$

Note que agora $f = 3x^2y - 9x^2 + 5xy^3 - 5y^2 + 16y$ e $LT(f_1)$ não divide $LT(f) = 3x^2y$, porem $LT(f_2)$ divide $LT(f)$, portanto:

$$\begin{array}{r} q_1 : 3x^2 - 5y \\ q_2 : 3y \\ x^3y + xy^2 - y + 3 \\ x^2 + y^3 + y \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} q_1 : 3x^2 - 5y \\ q_2 : 3y \\ x^3y + xy^2 - y + 3 \\ x^2 + y^3 + y \end{array}} \right) \begin{array}{r} \hline 3x^5y - 2x^3y^2 + y \\ 3x^5y + 3x^3y^2 - 3x^2y + 9x^2 \\ \hline - 5x^3y^2 + 3x^2y - 9x^2 + y \\ - 5x^3y^2 - 5xy^3 - 5y^2 + 15y \\ \hline 3x^2y - 9x^2 + 5xy^3 - 5y^2 + 16y \\ 3x^2y + 3y^4 + 3y^2 \\ \hline -9x^2 + 5xy^3 - 3y^4 - 8y^2 + 16y \end{array}$$

Continuando com o processo, temos agora $f = -9x^2 + 5xy^3 - 3y^4 - 8y^2 + 16y$ e $LT(f_1)$ não divide $LT(f) = -9x^2$, porem $LT(f_2)$ divide novamente $LT(f)$, desta forma:

$$\begin{array}{r}
q_1 : 3x^2 - 5y \\
q_2 : 3y - 9 \\
x^3y + xy^2 - y + 3 \\
x^2 + y^3 + y
\end{array}
\begin{array}{r}
3x^5y - 2x^3y^2 + y \\
3x^5y + 3x^3y^2 - 3x^2y + 9x^2 \\
\hline
-5x^3y^2 + 3x^2y - 9x^2 + y \\
-5x^3y^2 - 5xy^3 + 5y^2 - 15y \\
\hline
3x^2y - 9x^2 + 5xy^3 - 5y^2 + 16y \\
3x^2y + 3y^4 + 3y^2 \\
\hline
-9x^2 + 5xy^3 - 3y^4 - 8y^2 + 16y \\
-9x^2 - 9y^3 + 9y \\
\hline
5xy^3 - 3y^4 + 9y^3 - 8y^2 + 25y \rightarrow 5xy^3
\end{array}
\begin{array}{r}
r \\
\hline
\end{array}$$

Logo, temos que $LT(f_1)$ e $L(f_2)$ não dividem o $LT(f) = 5xy^3$. Portanto movemos $5xy^3$ para o resto, e podemos continuar a dividir. (Isso é algo que nunca acontece no caso de uma variável). Assim:

$$\begin{array}{r}
q_1 : 3x^2 - 5y \\
q_2 : 3y - 9 \\
x^3y + xy^2 - y + 3 \\
x^2 + y^3 + y
\end{array}
\begin{array}{r}
3x^5y - 2x^3y^2 + y \\
3x^5y + 3x^3y^2 - 3x^2y + 9x^2 \\
\hline
-5x^3y^2 + 3x^2y - 9x^2 + y \\
-5x^3y^2 - 5xy^3 + 5y^2 - 15y \\
\hline
3x^2y - 9x^2 + 5xy^3 - 5y^2 + 16y \\
3x^2y + 3y^4 + 3y^2 \\
\hline
-9x^2 + 5xy^3 - 3y^4 - 8y^2 + 16y \\
-9x^2 - 9y^3 + 9y \\
\hline
5xy^3 - 3y^4 + 9y^3 - 8y^2 + 25y \rightarrow 5xy^3 \\
\hline
-3y^4 + 9y^3 - 8y^2 + 25y \rightarrow 5xy^3 - 3y^4 \\
\hline
9y^3 - 8y^2 + 25y \rightarrow 5xy^3 - 3y^4 + 9y^3 \\
\hline
-8y^2 + 25y \rightarrow 5xy^3 - 3y^4 + 9y^3 - 8y^2 \\
\hline
25y \rightarrow 5xy^3 - 3y^4 + 9y^3 - 8y^2 - 25y \\
\hline
0
\end{array}
\begin{array}{r}
r \\
\hline
\end{array}$$

Portanto, podemos escrever f da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
f &= q_1 f_1 + q_2 f_2 + r \\
&= (3x^2 - 5y)(x^3y + xy^2 - y + 3) + (3y - 9)(x^2 + y^3 + y) + 5xy^3 - 3y^4 + 9y^3 - 8y^2 - 25y.
\end{aligned}$$

O exemplo acima é uma ilustração bastante completa de como funciona o algoritmo de divisão. Também nos mostra que propriedade queremos que o resto tenha, a qual é que nenhum dos seus termos deve ser divisível pelos termos principais dos polinômios pelos quais estamos a dividir. Podemos agora enunciar a forma geral do algoritmo de divisão.

Teorema 4.2.2. (Algoritmo da divisão em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$). Seja $>$ uma ordem monômial sobre \mathbb{N}_0^n , e seja $F = (f_1, \dots, f_s)$ uma s -tupla ordenada de polinômios em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Então todo $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ pode ser escrito da forma

$$f = \sum_{i=1}^s q_i f_i + r,$$

onde $q_i, r \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, e ou $r = 0$ ou r é uma combinação linear, com coeficientes em \mathbb{k} , de monômios, nenhum dos quais é divisível por qualquer um de $LT(f_1), \dots, LT(f_s)$. Chamamos r de resto de f na divisão por F . Além disso, se $q_i f_i \neq 0$, então

$$mdeg(f) \geq mdeg(q_i f_i).$$

Demonstração. Ver Teorema 1.5.9 em [AL94] na página 30. \square

Observação 4.2.3. A ordenação da s -tupla de polinômios (f_1, \dots, f_s) influencia a efetividade do algoritmo e a minimalidade de r , isto é, as ordenações diferentes de (f_1, \dots, f_s) podem ter restos diferentes.

Exemplo 4.2.4. Mudando a ordem dos polinômios do Exemplo 4.2.1, ou seja, $F = (x^2 + y^3 + y, x^3 y + xy^2 - y + 3)$, se fizermos a divisão de forma análoga obteríamos a seguinte decomposição do polinômio f :

$$\begin{aligned} f &= q_1 f_1 + q_2 f_2 + r \\ &= (3x^2 - 5y)(x^2 + y^3 + y) + (0)(x^3 y + xy^2 - y + 3) + 5xy^3 + 3x^2 y - 9x^2 - 5y^2 + 16y \\ &= (3x^2 - 5y)(x^2 + y^3 + y) + 5xy^3 + 3x^2 y - 9x^2 - 5y^2 + 16y \end{aligned}$$

Note que os restos nesses casos são diferentes.

4.3 Base de Gröbner

Definição 4.3.1. Um ideal $I \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ é um **ideal monomial** se existe um subconjunto $A \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ tal que I consiste de todos os polinômios que são somas finitas da forma $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha x^\alpha$, onde $h_\alpha \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Nesse caso escrevemos $I = \langle x^\alpha \mid \alpha \in A \rangle$.

Como primeiro resultado, veremos uma forma simples de verificar se um certo monômio está em dado ideal monomial.

Lema 4.3.2. Seja $I = \langle x^\alpha \mid \alpha \in A \rangle$ um ideal monomial. Então um monômio x^β está em I se, e somente se, x^β é divisível por x^α para algum $\alpha \in A \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

Demonstração. Se x^β é um múltiplo de x^α para algum $\alpha \in A$, então $x^\beta \in I$ pela definição do ideal.

Reciprocamente, se $x^\beta \in I$, então $x^\beta = \sum_{i=1}^s h_i x^{\alpha(i)}$, onde $h_i \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ e $\alpha(i) \in A$. Se expandirmos cada h_i como uma combinação linear de monômios, veremos que todo termo do lado direito da equação é divisível por algum $x^{\alpha(i)}$. Portanto, o lado esquerdo x^β deve ter a mesma propriedade. \square

Definição 4.3.3. Seja $I \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal não-nulo, e fixemos $>$ uma ordem monomial sobre $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Então:

1. Denotamos por $LT(I)$ o conjunto dos termos líderes dos elementos não-nulos de I . Isto é:

$$LT(I) := \{cx^\alpha \mid \exists f \in I \setminus \{0\} \text{ com } LT(f) = cx^\alpha\}.$$

2. Denotamos por $\langle LT(I) \rangle$ o ideal gerado por os elementos de $LT(I)$.

Observação 4.3.4. Note que dado um ideal $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, temos que os ideais $\langle LT(f_1), \dots, LT(f_s) \rangle$ e $\langle LT(I) \rangle$ podem ser diferentes. De fato $LT(f_i) \in LT(I) \subseteq \langle LT(I) \rangle$, então $\langle LT(f_1), \dots, LT(f_s) \rangle \subseteq \langle LT(I) \rangle$. Desta forma o ideal $\langle LT(I) \rangle$ pode ser estritamente maior.

Exemplo 4.3.5. Consideremos a ordem lexicográfica com $x > y$ e seja $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathbb{k}[x, y]$, com $f_1 = x^3y + 3y$ e $f_2 = -x^4 - 3x + y^2$. Assim

$$\begin{aligned} x(x^3y + 3y) + y(-x^4 - 3x + y^2) &= x^4y + 3xy - x^4y - 3xy + y^3 \\ &= y^3 \in I. \end{aligned}$$

Então $y^3 = LT(y^3) \in \langle LT(I) \rangle$. Mas pelo Lema 4.3.2 $y^3 \notin \langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle$, pois nem $LT(f_1) = x^3y$, nem $LT(f_2) = -x^4$ dividem y^3 . Desta forma

$$\langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle \neq \langle LT(I) \rangle.$$

Definição 4.3.6 (Base de Gröbner). Fixemos uma ordem sobre $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Um subconjunto finito $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ de um ideal $I \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, $I \neq \{0\}$, e chamado de **base de Gröbner** se

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle.$$

Observação 4.3.7. Note que, o termo "base" em "base de Gröbner" não implica independência linear. Em vez disso, refere-se ao fato de que cada polinômio no ideal I pode ser expresso como uma combinação linear dos polinômios na base de Gröbner G .

O resultado que segue decorre diretamente do Teorema da Base de Hilbert e da definição de Base de Gröbner.

Corolário 4.3.8. Fixada uma ordem monomial sobre $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Todo ideal $I \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ possui uma base de Gröbner. Além disso, qualquer base de Gröbner para um ideal I é uma base de I .

Podemos, portanto, proceder à análise de algumas propriedades fundamentais relacionadas à base de Gröbner de um ideal. Esse estudo nos possibilita abordar, inclusive, uma questão previamente levantada: a existência de um conjunto de polinômios para os quais se garanta a unicidade do resto na divisão, independentemente da ordem dos polinômios divisores.

Proposição 4.3.9. Seja $I \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal e $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ uma base de Gröbner para I . Dado f em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, existe um único r em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ com as seguintes propriedades:

(i) Nenhum termo de r é divisível por algum dos $LT(g_1), \dots, LT(g_t)$.

(ii) Existe g em I tal que $f = g + r$.

Em particular, r é o resto na divisão de f por $G = (g_1, \dots, g_t)$ não importando como os elementos de G estão listados.

Demonstração. Pelo Teorema 4.2 ao fazer a divisão de f por G obtemos $f = q_1g_1 + \dots + q_tg_t + r$, onde r satisfaz (i). Para satisfazer (ii) basta tomar $g = q_1g_1 + \dots + q_tg_t$. Assim a existência de r está provada. Para provar a unicidade, suponhamos que $f =$

$g+r = g'+r'$, com $g' = q'_1g_1 + \dots + q'_t g_t$ e $LT(g')$ não divide os termos de r' , satisfazendo (i) e (ii). Tome $r-r' = g'-g \in I$, de modo que se $r-r' \neq 0$, então teríamos $LT(r-r')$ está em $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$. Mas pelo Lema 4.3.2, seguiria que $LT(r-r')$ seria divisível por algum $LT(g_i)$. Absurdo, já que nenhum dos termos de r, r' é divisível por algum $LT(g_i)$. Logo $r-r' = 0$, e a unicidade está provada. \square

Corolário 4.3.10. *Seja $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ uma base de Gröbner para um ideal $I \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ e seja $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Então $f \in I$ se, e somente se, o resto da divisão de f por G é zero.*

Demonstração. Primeiro, se o resto de f na divisão por G for zero, então temos já visto que $f \in I$. Por outro lado, se $f \in I$, então $f = f + 0$ satisfaz ambas as condições da Proposição 4.3.9. Assim, 0 é o resto de f na divisão por G conforme reivindicado. \square

Conforme discutido previamente, é importante notar que a condição $r = 0$ no Algoritmo da Divisão é suficiente, mas não uma condição necessária para determinar se um dado polinômio pertence ao ideal gerado pelos polinômios divisores. Esta observação se origina da possibilidade de se obterem restos distintos dependendo da ordem em que os polinômios divisores são listados.

Definição 4.3.11. *Seja $f, g \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ não nulos. Fixemos um ordem monômial e seja*

$$LT(f) = cx^\alpha \quad e \quad LT(g) = dx^\beta,$$

onde $c, d \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$. Seja x^γ o mínimo múltiplo comum de x^α e x^β . O **S-polinômio** de f e g , denotado por $S(f, g)$, é o polinômio

$$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} \cdot g.$$

Observe que por definição $S(f, g) \in \langle f, g \rangle$ e $S(g, f) = -S(f, g)$.

Exemplo 4.3.12. *Sejam $f = 2x^2yz^2 + 2y^2z - z$ e $g = x^2y^2 + x^2y$ em $\mathbb{k}[x, y, z]$. Calculemos $S(f, g)$ usando a ordem lexicográfica com $x > y > z$ temos que:*

$$\begin{aligned} mdeg(f) &= (2, 1, 2) & mdeg(g) &= (2, 2, 0) \\ LM(f) &= x^2yz^2 & LM(g) &= x^2y^2 \\ LT(f) &= 2x^2yz^2 & LT(g) &= x^2y^2, \end{aligned}$$

portanto $x^\gamma = x^2y^2z^2$. Então

$$\begin{aligned} S(f, g) &= \frac{x^2y^2z^2}{x^2yz^2} \cdot (2x^2yz^2 + 2y^2z) - \frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2} \cdot (x^2y^2 + x^2y) \\ &= x^2y^2z^2 + y^3z - \frac{1}{2}yz - x^2y^2z^2 - x^2z^3 \\ &= y^3z - \frac{1}{2}yz - x^2z^3 \end{aligned}$$

Lema 4.3.13. *Suponha que temos uma soma $\sum_{i=1}^s c_i f_i$, com $c_i \in \mathbb{k}$, tal que $mdeg(f_i) = \delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, para todo i . Se $mdeg(\sum_{i=1}^s c_i f_i) < \delta$, então $\sum_{i=1}^s c_i f_i$ é uma combinação dos S-polinômios $S(f_j, f_k)$ para $1 \leq j < k \leq s$. Além disso cada $S(f_j, f_k)$ tem $mdeg(S(f_j, f_k)) < \delta$.*

Demonstração. Seja $d_i = LC(f_i)$, de modo que $c_i d_i x^\delta$ é o termo líder de $c_i f_i$ para cada i . Dado que o multigráu de $c_i f_i$ é igual a δ e o multigráu de $\sum_{i=1}^s c_i f_i$ é estritamente menor que δ , podemos ver que $\sum_{i=1}^s c_i d_i = 0$, pois do contrário,

$$LT\left(\sum_{i=1}^s c_i f_i\right) = \left(\sum_{i=1}^s c_i d_i\right) x^\delta,$$

e assim o multigráu seria igual a δ . Seja p_i o polinômio mônico $\frac{f_i}{d_i}$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s c_i f_i &= \sum_{i=1}^s c_i d_i p_i = c_1 d_1 p_1 + \cdots + c_s d_s p_s = c_1 d_1 (p_1 - p_2) + (c_1 d_1 + c_2 d_2)(p_2 - p_3) + \cdots + \\ &\quad + (c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_{s-1} d_{s-1})(p_{s-1} - p_s) + (c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_{s-1} d_{s-1} + c_s d_s)(p_s). \end{aligned}$$

Já que $LT(f_i) = d_i x^\delta$ para cada i , temos que $mmc(LM(f_j), LM(f_k)) = x^\delta$ para $1 \leq j < k \leq s$. Portanto

$$S(f_j, f_k) = \frac{x^\delta}{LT(f_j)} \cdot f_j - \frac{x^\delta}{LT(f_k)} \cdot f_k = \frac{x^\delta}{d_j x^\delta} \cdot f_j - \frac{x^\delta}{d_k x^\delta} \cdot f_k = p_j - p_k.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^s c_i f_i = c_1 d_1 S(f_1, f_2) + (c_1 d_1 + c_2 d_2) S(f_2, f_3) + \cdots + (c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_{s-1} d_{s-1}) S(f_{s-1}, f_s).$$

Como $LT(p_i) = x^\delta$ para todo i , obtemos que $mdeg(S(f_j, f_k)) = mdeg(p_j - p_k) < \delta$. \square

Definição 4.3.14. *Sejam $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ um polinômio e $F = (f_1, \dots, f_n)$ uma S -tupla ordenada de polinômios em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Denotamos por \overline{f}^F ao resto da divisão de f por F .*

Teorema 4.3.15 (Critério de Buchberger). *Um conjunto finito $G = g_1, \dots, g_t \subset I$ é uma base de Gröbner de I se, e somente se, $\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$ para todo par $i \neq j$, isto é, o resto na divisão de $S(g_i, g_j)$ por G é zero para todo par $i \neq j$.*

Demonstração. Se G é uma base de Gröbner de I , então $S(g_i, g_j) \in I$, pois é uma combinação de pares de polinômios de G , e segue do Corolário 4.3.10 que $\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$.

Reciprocamente, seja $f \in I$ não-nulo. Devemos mostrar que $LT(f) \in \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$. Dado que G é um conjunto de geradores, existem $h_i \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ tais que

$$f = \sum_{i=1}^t h_i g_i$$

Do Lema 4.1.14 sabemos que $mdeg(f) \leq \max(mdeg(h_i, g_i) \mid h_i g_i \neq 0)$. Definimos $H = \{(h_1, \dots, h_t) \in (\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n])^t \mid f = \sum h_i g_i\}$. Para todo $h \in H$ considere $\delta_i(h) := mdeg(h_i g_i)$, $\delta(h) := \max\{\delta_i(h)\}$ e $\delta := \min_{h \in H} \delta(h)$. Assim $mdeg(f) \leq \delta$. Escolhido esse δ , vamos mostrar que $mdeg(f) = \delta$.

Suponhamos, por contradição, que $mdeg(f) < \delta$. Então poderíamos escrever f da seguinte forma:

$$f = \sum_{\delta_i=\delta} h_i g_i + \sum_{\delta_i<\delta} h_i g_i = \sum_{\delta_i=\delta} (h_i g_i + LT(h_i) g_i - LT(h_i) g_i) + \sum_{\delta_i<\delta} h_i g_i \quad (4.1)$$

$$= \sum_{\delta_i=\delta} (LT(h_i) g_i + (h_i - LT(h_i)) g_i) + \sum_{\delta_i<\delta} h_i g_i \quad (4.2)$$

$$= \sum_{\delta_i=\delta} (LT(h_i) g_i) + \sum_{\delta_i=\delta} (h_i - LT(h_i)) g_i + \sum_{\delta_i<\delta} h_i g_i \quad (4.3)$$

Note que a segunda soma em 4.3 tem multigrau menor que δ , já que pelo Lema 4.1.14:

$$\begin{aligned} mdeg((h_i - LT(h_i)) g_i) &= mdeg(h_i - LT(h_i)) + mdeg(g_i) \\ &< mdeg(h_i) + mdeg(g_i) = mdeg(h_i g_i) = \delta_i = \delta. \end{aligned}$$

Como o mesmo vale para a terceira soma, então a primeira soma em 4.3 também deve ter multigrau menor que δ . Seja $LT(h_i) = a_i x^{\alpha_i}$. Então, pelo Lema 4.3.13, $\sum_{\delta_i=\delta} LT(h_i) g_i$, pode ser escrita como combinação linear dos S -polinômios $S(x^{\alpha_j} g_j, x^{\alpha_k} g_k)$. Como

$$\begin{aligned} S(x^{\alpha_j} g_j, x^{\alpha_k} g_k) &= \frac{x^\delta}{x^{\alpha_j} LT(g_j)} \cdot (x^{\alpha_j} g_j) - \frac{x^\delta}{x^{\alpha_k} LT(g_k)} \cdot (x^{\alpha_k} g_k) = \frac{x^\delta}{LT(g_j)} \cdot g_j - \frac{x^\delta}{LT(g_k)} \cdot g_k \\ &= \frac{x^\delta}{x^{\gamma_{jk}}} \cdot \frac{x^{\gamma_{jk}}}{LT(g_j)} \cdot g_j - \frac{x^\delta}{x^{\gamma_{jk}}} \cdot \frac{x^{\gamma_{jk}}}{LT(g_k)} \cdot g_k = x^{\delta-\gamma_{jk}} S(g_j, g_k), \end{aligned}$$

onde $\gamma_{jk} = mmc(LM(g_j), LM(g_k))$, então existem $c_{jk} \in \mathbb{k}$ tais que

$$\sum_{\delta_i=\delta} LT(h_i) g_i = \sum_{j,k} c_{jk} x^{\delta-\gamma_{jk}} S(g_j, g_k). \quad (4.4)$$

Agora para cada S -polinômio, por hipótese do Teorema, temos que $\overline{S(g_j, g_k)}^G = 0$. Assim podemos escrever cada $S(g_j, g_k)$ como

$$S(g_j, g_k) = \sum_{i=1}^t q_{ijk} g_i,$$

para alguns $q_{ijk} \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Agora, pelo algoritmo da divisão, temos que $mdeg(q_{ijk} g_i) \leq mdeg(S(g_j, g_k))$. Assim,

$$x^{\delta-\gamma_{jk}} S(g_j, g_k) = x^{\delta-\gamma_{jk}} \sum_{i=1}^t q_{ijk} g_i,$$

portanto, fazendo $b_{ijk} = x^{\delta-\gamma_{jk}} q_{ijk}$, temos que:

$$x^{\delta-\gamma_{jk}} S(g_j, g_k) = \sum_{i=1}^t b_{ijk} g_i. \quad (4.5)$$

Além disso, note que:

$$\begin{aligned} mdeg(b_{ijk}g_i) &= mdeg(x^{\delta-\gamma_{jk}}q_{ijk}g_i) = mdeg(x^{\delta-\gamma_{jk}}) + mdeg(q_{ijk}g_i) \\ &\leq mdeg(x^{\delta-\gamma_{jk}}) + mdeg(S(g_j, g_k)) \\ &= mdeg(x^{\delta-\gamma_{jk}}S(g_j, g_k)) = mdeg(S(x^{\alpha_j}g_j, x^{\alpha_k}g_k)) < \delta. \end{aligned}$$

Logo, substituindo 4.5 em 4.4, obtemos:

$$\sum_{\delta_i=\delta} LT(h_i)g_i = \sum_{j,k} c_{jk}x^{\delta-\gamma_{jk}}S(g_j, g_k) = \sum_{j,k} c_{jk} \left(\sum_{i=1}^t b_{ijk}g_i \right) = \sum_{\gamma} h_{\gamma}^*g_{\gamma},$$

onde $mdeg(h_{\gamma}^*g_{\gamma}) < \delta$ para todo γ . Finalmente, substituindo esse resultado em 4.3, temos que:

$$f = \sum_{\gamma} h_{\gamma}^*g_{\gamma} + \sum_{\delta_i=\delta} (h_i - LT(h_i))g_i + \sum_{\delta_i < \delta} h_i g_i.$$

Assim, obtemos uma expressão para f como combinação dos polinômios g_i onde cada termo tem multigrado menor que δ , o que contradiz a minimalidade de δ . Logo $mdeg(f) = \delta$, e segue que $mdeg(f) = \delta = \delta_i(h) = mdeg(h_i g_i)$ para algum $i \in \{1, \dots, t\}$. Assim $LM(f) = LM(h_i g_i)$, isto é, $LM(f)$ é múltiplo de $LM(g_i)$ e portanto $LT(f) \in \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$, como queríamos mostrar. \square

Teorema 4.3.16 (Algoritmo de Buchberger). *Seja $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ um ideal polinomial não-nulo. Então uma base de Gröbner para I pode ser construída em um número finito de passos pelo seguinte algoritmo:*

```

Input :  $F = (f_1, \dots, f_s)$ 
Output : uma base de Grobner  $G = (g_1, \dots, g_t)$  para  $I$ , com  $F \subseteq G$ 
   $G := F$ 
REPEAT
   $G' := G$ 
  FOR cada par  $p, q, p \neq q$  em  $G'$  DO
     $r := \overline{S(p, q)}^{G'}$ 
    IF  $r \neq 0$  THEN  $G := G \cup \{r\}$ 
UNTIL  $G = G'$ 
RETURN  $G$ .

```

Demonstração. Seja $G = \{g_1, \dots, g_t\}$, então:

$$\langle G \rangle = \langle g_1, \dots, g_t \rangle \quad e \quad \langle LT(G) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle.$$

Mostremos que $G \subseteq I$ em cada estágio do algoritmo. Isso é claramente verdade inicialmente, já que $G = F \subseteq I$. Suponhamos que em dada etapa temos $G \subseteq I$. Então, para p, q em G' , com $p \neq q$, temos que $r = \overline{S(p, q)}^{G'}$ está em I , já que $S(p, q) = q_1 g_1 + \dots + q_t g_t + \overline{S(p, q)}^{G'}$. Assim:

$$\overline{S(p, q)}^{G'} = S(p, q) - (q_1 g_1 + \dots + q_t g_t) \in I.$$

Então no passo seguinte, adicionando r a G , obtemos que $G := G \cup \{r\} \subseteq I$. Note ainda que, como G contém o conjunto F , então G possui os polinômios que determinam I . O algoritmo termina quando $G = G'$, ou seja, quando $\overline{S(p, q)}^{G'} = 0$, para todo par $\{p, q\}$.

Pelo Critério de Buchberger segue então que G é uma base de Gröbner para $I = \langle G \rangle$. Resta mostrar que o algoritmo, de fato, termina.

Considerando o que ocorre em cada passo temos que o conjunto G consiste de G' (o antigo G) juntamente com os restos não nulos de S -polinômios na divisão por G' . De modo que $\langle LT(G') \rangle \subseteq \langle LT(G) \rangle$, já que $G' \subseteq G$. Além disso, se $G' \neq G$, então $\langle LT(G') \rangle \subsetneq \langle LT(G) \rangle$, uma vez que se um resto não-nulo r foi adicionado a G então $LT(r)$ não é divisível por nenhum dos termos líderes dos elementos de G' , e desse modo $LT(r) \notin \langle LT(G') \rangle$. Mas $LT(r) \in \langle LT(G) \rangle$. Assim, de $\langle LT(G') \rangle \subseteq \langle LT(G) \rangle$, vemos que os ideais $\langle LT(G') \rangle$ formam uma cadeia ascendente de ideais em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$:

$$\langle LT(G'_1) \rangle \subseteq \langle LT(G'_2) \rangle \subseteq \dots$$

Como $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ é um anel noetheriano, então a condição de cadeia ascendente de ideais garante que após um número finito $N \geq 1$ de iterações essa cadeia estabilizará, de modo que eventualmente teremos $\langle LT(G'_N) \rangle = \langle LT(G'_{N+1}) \rangle = \dots$. Portanto teremos $\langle LT(G'_N) \rangle = \langle LT(G) \rangle$, e assim $G' = G$, em um número finito de passos. \square

Exemplo 4.3.17. *Seja $I = \langle 2x^2yz^2 + 2y^2z - z, x^2y^2 + x^2z \rangle$ um ideal em $\mathbb{k}[x, y, z]$ e fixemos a ordem lexicográfica $>_{lex}$ com $x > y > z$. Temos $F = (f_1, f_2) = (2x^2yz^2 + 2y^2z - z, x^2y^2 + x^2z)$.*

Seguindo o Algoritmo de Buchberger

- $G = \{2x^2yz^2 + 2y^2z - z, x^2y^2 + x^2z\}$

- *Primeiro passo:*

1. $G' := G = \{2x^2yz^2 + 2y^2z - z, x^2y^2 + x^2z\}$

2. *Calculamos o S -polinômio $S(f_1, f_2)$, o qual pelo Exemplo 4.3.12 sabemos que $S(f_1, f_2) = -x^2z^3 + y^3z - \frac{1}{2}yz$. Além disso note que $r := \overline{S(f_1, f_2)}^{G'} = -x^2z^3 + y^3z - \frac{1}{2}yz \neq 0$.*

Portanto $G = G \cup \{r\} = \{2x^2yz^2 + 2y^2z - z, x^2y^2 + x^2z, -x^2z^3 + y^3z - \frac{1}{2}yz\}$.

- *Segundo passo:*

1. $G' := G = \{2x^2yz^2 + 2y^2z - z, x^2y^2 + x^2z, -x^2z^3 + y^3z - \frac{1}{2}yz\}$

2. *Calculamos os S -polinômios $S(f_1, f_2), S(f_1, f_3), S(f_2, f_3)$, onde do caso anterior podemos obter $\overline{S(f_1, f_2)}^{G'} = 0$. Vejamos agora $S(f_1, f_3)$,*

$$\begin{aligned} S(f_1, f_3) &= \frac{x^2yz^3}{2x^2yz^2} \cdot (2x^2yz^2 + 2y^2z) - \frac{x^2yz^3}{-x^2z^3} \cdot (-x^2z^3 + y^3z - \frac{1}{2}yz) \\ &= y^4z + y^2z^2 - \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{2}z^2. \end{aligned}$$

Agora observe que $r := \overline{S(f_1, f_3)}^{G'} = y^4z + y^2z^2 - \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{2}z^2 \neq 0$.

Então $G = G \cup \{r\} = \{2x^2yz^2 + 2y^2z - z, x^2y^2 + x^2z, -x^2z^3 + y^3z - \frac{1}{2}yz, y^4z + y^2z^2 - \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{2}z^2\}$.

3. Temos que calcular agora os S -polinômios $S(f_1, f_2)$, $S(f_1, f_3)$, $S(f_1, f_4)$, $S(f_2, f_3)$, $S(f_2, f_4)$ e $S(f_3, f_4)$ em relação ao novo conjunto G . Do caso anterior temos que $\overline{S(f_1, f_2)}^{G'} = \overline{S(f_1, f_3)}^{G'} = 0$. Vejamos agora o seguinte S -polinômio,

$$\begin{aligned} S(f_1, f_4) &= \frac{x^2y^4z^2}{2x^2yz^2} \cdot (2x^2yz^2 + 2y^2z) - \frac{x^2y^4z^2}{y^4z} \cdot (y^4z + y^2z^2 - \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{2}z^2) \\ &= -x^2y^2z^3 + \frac{1}{2}x^2y^2z^2 + \frac{1}{2}x^2z^3 + y^5z - \frac{1}{2}y^3z. \end{aligned}$$

Logo ao fazer a divisão obtemos que $r := \overline{S(f_1, f_4)}^{G'} = 0$. Continuemos então com

$$\begin{aligned} S(f_2, f_3) &= \frac{x^2y^2z^3}{x^2y^2} \cdot (x^2y^2 + x^2z) - \frac{x^2y^2z^3}{-x^2z^3} \cdot (-x^2z^3 + y^3z - \frac{1}{2}yz) \\ &= x^2z^4 + y^5z - \frac{1}{2}y^3z. \end{aligned}$$

Ao fazer a divisão obtemos que $r := \overline{S(f_2, f_3)}^{G'} = 0$. Então continuamos com o seguinte

$$\begin{aligned} S(f_2, f_4) &= \frac{x^2y^4z}{x^2y^2} \cdot (x^2y^2 + x^2z) - \frac{x^2y^4z}{y^4z} \cdot (y^4z + y^2z^2 - \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{2}z^2) \\ &= \frac{1}{2}x^2y^2z + \frac{1}{2}x^2z^2. \end{aligned}$$

Novamente ao fazer a divisão obtemos que $r := \overline{S(f_2, f_4)}^{G'} = 0$.

Continuemos então com

$$\begin{aligned} S(f_3, f_4) &= \frac{x^2y^4z^3}{-x^2z^3} \cdot (-x^2z^3 + y^3z - \frac{1}{2}yz) - \frac{x^2y^4z^3}{y^4z} \cdot (y^4z + y^2z^2 - \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{2}z^2) \\ &= -x^2y^2z^4 + \frac{1}{2}x^2y^2z^3 + \frac{1}{2}x^2z^4 - y^7z + \frac{1}{2}y^5z. \end{aligned}$$

Finalmente ao fazer a divisão obtemos que $r := \overline{S(f_3, f_4)}^{G'} = 0$.

Portanto $G = \{2x^2yz^2 + 2y^2z - z, x^2y^2 + x^2z, -x^2z^3 + y^3z - \frac{1}{2}yz, y^4z + y^2z^2 - \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{2}z^2\}$ é uma base de Gröbner para o ideal $I = \langle 2x^2yz^2 + 2y^2z - z, x^2y^2 + x^2z \rangle$.

Capítulo 5

Base de Gröbner para a variedade de Gelfand-Tsetlin

O objetivo deste trabalho é calcular as bases de Gröbner para as variedades de Gelfand-Tsetlin de \mathfrak{gl}_n utilizando os polinômios desenvolvidos nos Capítulos 2 e 3, comparando a efetividade dos mesmos. Porém pela Observação 3.1.25 basta considerar os polinômios do Exemplo 3.1.24, os quais são:

$$\bar{\Psi}_{i1} = X_{ii}, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

$$\bar{\Psi}_{22} = X_{21}X_{12},$$

$$\bar{\Psi}_{32} = X_{31}X_{13} + X_{32}X_{23},$$

$$\bar{\Psi}_{33} = X_{31}X_{12}X_{23} + X_{32}X_{21}X_{13},$$

$$\bar{\Psi}_{42} = X_{41}X_{14} + X_{42}X_{24} + X_{43}X_{34},$$

$$\bar{\Psi}_{43} = X_{41}X_{12}X_{24} + X_{41}X_{13}X_{34} + X_{42}X_{21}X_{14} + X_{42}X_{23}X_{34} + X_{43}X_{31}X_{14} + X_{43}X_{32}X_{24},$$

$$\bar{\Psi}_{44} = X_{41}X_{12}X_{23}X_{34} + X_{41}X_{13}X_{32}X_{24} + X_{42}X_{21}X_{13}X_{34} + X_{42}X_{23}X_{31}X_{14} + X_{43}X_{31}X_{12}X_{24} + X_{43}X_{32}X_{21}X_{14}.$$

- Caso \mathfrak{gl}_2 :

Neste caso a variedade de Gelfand-Tsetlin correspondente é $V(\{\bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22}\}) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^4$, com $\bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22} \in \mathbb{k}[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}]$. Note que temos 3 polinômios no anel de polinômios em 4 variáveis. Consideremos a ordem $>_{lex}$, com $X_{11} > X_{12} > X_{21} > X_{22}$. Portanto seja a 3-úpla ordenada $G = (f_1, f_2, f_3) := (\bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22})$, calculemos a base de Gröbner para o ideal $\langle \bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22} \rangle$. Calculemos os S -polinômios correspondentes:

$$- S(\bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}) = \frac{X_{11}X_{22}}{X_{22}} \cdot X_{11} - \frac{X_{11}X_{22}}{X_{22}} \cdot X_{22} = 0.$$

$$- S(\bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{22}) = \frac{X_{11}X_{12}X_{21}}{X_{11}} \cdot X_{11} - \frac{X_{11}X_{12}X_{21}}{X_{12}X_{21}} \cdot (X_{12}X_{21}) = 0.$$

$$- S(\bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22}) = \frac{X_{12}X_{21}X_{22}}{X_{22}} \cdot X_{22} - \frac{X_{12}X_{21}X_{22}}{X_{12}X_{21}} \cdot (X_{12}X_{21}) = 0.$$

Portanto a base de Gröbner resultante é $G = [X_{11}, X_{22}, X_{12}X_{21}]$.

Para comprovar a base de Gröbner foi utilizado o software de Magma com os seguintes comandos:

```

# Definimos o anel de polinmios
P_2 < X11, X12, X21, X22 >:= PolynomialRing(RationalField(), 4, "lex");

#Formamos a base com os polinmios na variedade de Gelfand – Tsetlin
B_2 := [X11, X22, X21 * X12];

#Definimos o ideal no anel de polinmios
IdP2 := ideal < P_2 | B_2 >;

#Calculamos a base de Grbner para o ideal
Gb2 := GroebnerBasis(IdP2);
[X11, X12 * X21, X22]

```

- Caso \mathfrak{gl}_3 :

Neste caso a variedade de Gelfand- Tsetlin correspondente é

$$V(\{\bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22}, \bar{\Psi}_{31}, \bar{\Psi}_{32}, \bar{\Psi}_{33}\}) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^9,$$

Note que temos 6 polinômios no anel de polinômios em 9 variáveis.

Portanto seja a 6-úpla ordenada $G = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) := (\bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22}, \bar{\Psi}_{31}, \bar{\Psi}_{32}, \bar{\Psi}_{33})$. Consideremos a ordem $>_{lex}$, com $X_{11} > X_{12} > X_{13} > X_{21} > X_{22} > X_{23} > X_{31} > X_{32} > X_{33}$, calculemos a base de Gröbner para o ideal

$$\langle \bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22}, \bar{\Psi}_{31}, \bar{\Psi}_{32}, \bar{\Psi}_{33} \rangle \subseteq \mathbb{k}[X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33}].$$

Calculemos os S -polinômios correspondentes:

- Do caso de \mathfrak{gl}_2 tem-se que os restos $\overline{S(f_1, f_2)}^G$, $\overline{S(f_1, f_3)}^G$ e $\overline{S(f_2, f_3)}^G$, são zero.
- $S(f_1, f_4) = \frac{X_{11}X_{33}}{X_{11}} \cdot X_{11} - \frac{X_{11}X_{33}}{X_{33}} \cdot X_{33} = 0$.
- $S(f_1, f_5) = \frac{X_{11}X_{13}X_{31}}{X_{11}} \cdot X_{11} - \frac{X_{11}X_{13}X_{31}}{X_{13}X_{31}} \cdot (X_{13}X_{31} + X_{23}X_{32}) = -X_{11}X_{23}X_{32}$.
Porem temos que $\overline{S(f_1, f_5)}^G = 0$,
- $S(f_1, f_6) = \frac{X_{11}X_{12}X_{23}X_{31}}{X_{11}} \cdot X_{11} - \frac{X_{11}X_{12}X_{23}X_{31}}{X_{12}X_{23}X_{31}} \cdot (X_{12}X_{23}X_{31} + X_{13}X_{21}X_{32}) = -X_{11}X_{13}X_{21}X_{32}$. Onde o resto $\overline{S(f_1, f_6)}^G = 0$.

Prosseguindo pode-se obter que em $S(f_2, f_i)$ com $4 \leq i \leq 6$ o resto de $\overline{S(f_2, f_i)}^G = 0$.

- No caso de: $S(f_3, f_6) = \frac{X_{12}X_{21}X_{23}X_{31}}{X_{12}X_{21}} \cdot (X_{12}X_{21}) - \frac{X_{12}X_{21}X_{23}X_{31}}{X_{12}X_{23}X_{31}} \cdot (X_{12}X_{23}X_{31} + X_{13}X_{21}X_{32}) = -X_{13}X_{21}^2X_{32}$, no qual $\overline{S(f_3, f_6)}^G = -X_{13}X_{21}^2X_{32} \neq 0$.

Portanto $G = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) := (\bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22}, \bar{\Psi}_{31}, \bar{\Psi}_{32}, \bar{\Psi}_{33}, X_{13}X_{21}^2X_{32})$ é repetimos novamente o processo

- Em $S(f_1, f_i)$ com $i = 2, \dots, 7$ temos que o resto de $\overline{S(f_1, f_i)}^G = 0$.
- Em $S(f_2, f_i)$ com $i = 3, \dots, 7$ temos que o resto de $\overline{S(f_2, f_i)}^G = 0$.
- Em $S(f_3, f_i)$ com $i = 4, \dots, 7$ temos que o resto de $\overline{S(f_3, f_i)}^G = 0$.
- Em $S(f_4, f_i)$ com $i = 5, \dots, 7$ temos que o resto de $\overline{S(f_4, f_i)}^G = 0$.

$$- \text{ Em } S(f_5, f_6) = \frac{X_{12}X_{13}X_{23}X_{31}}{X_{13}X_{31}} \cdot (X_{13}X_{31} + X_{23}X_{32}) - \frac{X_{12}X_{13}X_{23}X_{31}}{X_{12}X_{23}X_{31}} \cdot (X_{12}X_{23}X_{31} + X_{13}X_{21}X_{32}) = X_{12}X_{23}^2X_{32} - X_{13}^2X_{21}X_{32}, \text{ onde } \overline{S(f_5, f_6)}^G \neq 0$$

Logo $G = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8)$, onde $f_8 := X_{12}X_{23}^2X_{32} - X_{13}^2X_{21}X_{32}$. Repetimos novamente o processo.

$$- \text{ Em } S(f_5, f_7) = \frac{X_{13}X_{21}^2X_{31}X_{32}}{X_{13}X_{31}} \cdot (X_{13}X_{31} + X_{23}X_{32}) - \frac{X_{13}X_{21}^2X_{31}X_{32}}{X_{13}X_{21}^2X_{32}} \cdot (X_{13}X_{21}^2X_{32}) = X_{21}^2X_{23}X_{32}^2, \text{ onde } \overline{S(f_5, f_7)}^G \neq 0.$$

Assim, $G = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9)$, onde $f_9 := X_{21}^2X_{23}X_{32}^2$. Repetimos novamente o processo.

$$- \text{ Finalmente neste caso temos que os } S\text{-polinômios } S(f_j, f_i) \text{ com } 1 \leq j < i \leq 9 \text{ o resto de } \overline{S(f_j, f_i)}^G = 0.$$

Portanto a base de Gröbner associada ao ideal $I = \langle \overline{\Psi}_{11}, \overline{\Psi}_{21}, \overline{\Psi}_{22}, \overline{\Psi}_{31}, \overline{\Psi}_{32}, \overline{\Psi}_{33} \rangle$ é

$$G = [X_{11}, X_{22}, X_{12}X_{21}, X_{33}, X_{13}X_{31} + X_{23}X_{32}, X_{12}X_{23}X_{31} + X_{13}X_{21}X_{32}, X_{13}X_{21}^2X_{32}, X_{12}X_{23}^2X_{32} - X_{13}^2X_{21}X_{32}, X_{21}^2X_{23}X_{32}^2]$$

Para comprovar a base de Gröbner foi utilizado o software de Magma com os seguintes comandos:

```
# Definimos o anel de polinômios
P_3 < X11, X12, X13, X21, X22, X23, X31, X32, X33 >:= PolynomialRing(RationalField(), 9, "lex");

#Formamos a base com os polinômios na variedade de Gelfand - Tsetlin
B_3 := [X11, X22, X21 * X12, X33, X31 * X13 + X32 * X23, X31 * X12 * X23 + X32 * X21 * X13];

#Definimos o ideal no anel de polinômios
IdP3 := ideal < P_3 | B_3 >;

#Calculamos a base de Grbner para o ideal
Gb3 := GroebnerBasis(IdP3);
[X21^2 * X23 * X32^2, X12 * X23^2 * X32 - X13^2 * X21 * X32, X13 * X21^2 * X32, X12 * X23 * X31 + X13 * X21 * X32, X12 * X21, X13 * X31 + X23 * X32, X11, X22, X33]
```

- Caso \mathfrak{gl}_4 :

Temos que a variedade de Gelfand- Tsetlin correspondente é

$$V(\{\overline{\Psi}_{11}, \overline{\Psi}_{21}, \overline{\Psi}_{22}, \overline{\Psi}_{31}, \overline{\Psi}_{32}, \overline{\Psi}_{33}, \overline{\Psi}_{41}, \overline{\Psi}_{42}, \overline{\Psi}_{43}, \overline{\Psi}_{44}\}) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{16},$$

onde $\overline{\Psi}_{ij} \in \mathbb{k}[X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{34}, X_{41}, X_{42}, X_{43}, X_{44}]$ com $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, \dots, i$. Note que temos 10 polinômios no anel de polinômios em 16 variáveis.

Neste caso, ao calcular a base de Gröbner para

$$I = \langle \overline{\Psi}_{11}, \overline{\Psi}_{21}, \overline{\Psi}_{22}, \overline{\Psi}_{31}, \overline{\Psi}_{32}, \overline{\Psi}_{33}, \overline{\Psi}_{41}, \overline{\Psi}_{42}, \overline{\Psi}_{43}, \overline{\Psi}_{44} \rangle,$$

estabelecendo a ordem lexicográfica, com $X_{11} > X_{12} > X_{13} > X_{14} > X_{21} > X_{22} > X_{23} > X_{24} > X_{31} > X_{32} > X_{33} > X_{34} > X_{41} > X_{42} > X_{43} > X_{44}$ no software de Magma, o resultado foi um número de 497 polinômios na base de

Gröbner, que, devido ao seu tamanho, são bastante extensos para poder adicioná-los a esses resultados.

Além disso foi fixada uma ordem monômial diferente, que foi a ordem lexicográfica reversa graduada, pois como vimos no Capítulo 4, alterando a ordem monômial fixa o resultado obtido pode ser diferente.

Neste caso resultou em uma nova base de Gröbner que tinha 236 polinômios o que reduziu bastante o resultado obtido com relação à ordem lexicográfica, infelizmente o comprimento dos polinômios ainda são bastante extensos como para poder anexar o resultado.

Porém os códigos usados para calcular a base de Gröbner no aplicativo de Magma foram:

```
# Definimos o anel de polinômios
P_4 < X11, X12, X13, X14, X21, X22, X23, X24, X31, X32, X33, X34, X41, X42, X43, X44 >
:= PolynomialRing(RationalField(), 16, "grevlex");

#Formamos a base com os polinômios na variedade de Gelfand - Tsetlin
B_4 := [X11, X22, X21 * X12, X33, X31 * X13 + X32 * X23, X31 * X12 * X23 + X32 * X21 * X13,
X44, X42 * X14 + X42 * X24 + X43 * X34, X42 * X12 * X24 + X42 * X13 * X34 + X42 * X21 * X14
+ X42 * X23 * X34 + X43 * X31 * X14 + X43 * X32 * X24, X42 * X12 * X23 * X34 + X42 * X13 * X32 * X24
+ X42 * X21 * X13 * X34 + X42 * X23 * X31 * X14 + X43 * X31 * X12 * X24 + X43 * X32 * X21 * X14];

#Definimos o ideal no anel de polinômios
IdP4 := ideal < P_4 | B_4 >;

#Calculamos a base de Grbner para o ideal
Gb4 := GroebnerBasis(IdP4);

#Imprime a quantidade de polinômios na base obtida
#Gb4;
236
```

- Caso \mathfrak{gl}_5 :

Temos que a variedade de Gelfand- Tsetlin correspondente é

$$V(\{\bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22}, \bar{\Psi}_{31}, \bar{\Psi}_{32}, \bar{\Psi}_{33}, \bar{\Psi}_{41}, \bar{\Psi}_{42}, \bar{\Psi}_{43}, \bar{\Psi}_{44}, \bar{\Psi}_{51}, \bar{\Psi}_{52}, \bar{\Psi}_{53}, \bar{\Psi}_{54}, \bar{\Psi}_{55}\}) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^{25},$$

Neste caso temos 15 polinômios no anel de polinômios em 25 variáveis.

Infelizmente a capacidade computacional acessível não foi suficiente para calcular a base de Gröbner para o ideal

$$I = \langle \bar{\Psi}_{11}, \bar{\Psi}_{21}, \bar{\Psi}_{22}, \bar{\Psi}_{31}, \bar{\Psi}_{32}, \bar{\Psi}_{33}, \bar{\Psi}_{41}, \bar{\Psi}_{42}, \bar{\Psi}_{43}, \bar{\Psi}_{44}, \bar{\Psi}_{51}, \bar{\Psi}_{52}, \bar{\Psi}_{53}, \bar{\Psi}_{54}, \bar{\Psi}_{55} \rangle.$$

Neste trabalho foi tentado calcular uma base de Gröbner da variedade de Gelfand-Tsetlin para \mathfrak{gl}_n . Devido a capacidade computacional não foi suficiente para receber resultados conclusivos. O fim do trabalho devia ser que com uma base de Gröbner tentar calcular mais indicadores de classificação das variedades de Gelfand-Tsetlin para \mathfrak{gl}_n , como por exemplo, resoluções livres, números de Betti e o polinômio de Hilbert.

Por exemplo nos casos de \mathfrak{gl}_2 , \mathfrak{gl}_3 e \mathfrak{gl}_4 , ao calcular o polinômio de Hilbert utilizando o comando " $H\langle d \rangle := HilbertPolynomial(I);$ " no software Magma obtivemos os seguintes resultados:

- (i) Em \mathfrak{gl}_2 , $H\langle d \rangle = 2$.

(ii) Em \mathfrak{gl}_3 , $H < d \rangle = 6d^2 - 6d + 7$.

(iii) Em \mathfrak{gl}_4 , $H < d \rangle = \frac{12}{5}d^5 - 24d^4 + 164d^3 - 600d^2 + \frac{6258}{5}d - 1108$.

Contudo, não foi possível fazer generalizações entre eles, no que diz respeito às informações obtidas até o momento.

Referências Bibliográficas

- [AL94] W. Adams, P. Loustaunau, *An introduction to Grobner Bases*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 3. American Mathematical Society, 1994.
- [BO89] N. Bourbaki, *Algebra I. Chapters 1-3*, Elements of Mathematics. Springer-Verlag Berlin, 1989.
- [BO07] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique Algèbre Chapitre 10 Algèbre homologique*, Springer Berlin, 2007.
- [BE20] G. Benitez, *Gelfand–Tsetlin varieties for \mathfrak{gl}_n* , International Journal of Algebra and Computation, vol. 30, no. 7, pp. 1485–1504, 2020.
- [BR21] G. Benitez, H. Rocha, *On the freeness problem for truncated current algebras*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences, vol. 15, pp. 365–382, 2021.
- [BI37] G. Birkhoff, *Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices*, Annals of Mathematics, vol. 38, no. 2, pp. 526–532, 1937.
- [BU65] B. Buchberger’s PhD thesis 1965: *An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal*, Journal of symbolic computation, vol. 41, no. 3-4, pp. 475-511, 2006.
- [CBF13] J. Cannon, W. Bosma, C. Fieker e A. Steel, *Handbook of magma functions*, Version 2.19, Sydney, 2013.
- [CLO98] D. Cox, J. Little and D. O’Shea, *Using Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 185, Springer-Verlag New York, 1998.
- [DS09] W. Decker, F. Schreyer, *Varieties, Gröbner Bases, and Algebraic Curves*, With Pictures by Oliver Labs, 2009.
- [EI95] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 150, Springer-Verlag New York, 1995.
- [FO05] V. Futorny, S. Ovsienko, *Kostant’s theorem for special filtered algebras*, Bulletin of the London Mathematical Society, vol. 37, no. 2, pp. 187–199, 2005.
- [GKL95] I.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh e J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, Advances in Mathematics, vol. 112, no. 2, pp. 218-348, 1995.
- [GT50] I. M. Gelfand e M. L. Tsetlin, *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*, Doklady Akad. Nauk SSSR, vol. 71, pp. 825-828, 1950.

- [GR91] I.M. Gelfand, V. S. Retakh, *Determinants of matrices over noncommutative rings*, Functional Analysis and Its Applications, vol. 25, pp. 91-102, 1991.
- [HU72] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag New York, 1972.
- [LA02] S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 211, Springer-Verlag New York, 2002.
- [MA70] H. Matsumura, *Commutative algebra*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1970.
- [MA89] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, 1989.
- [MO07] A. Molev, *Yangians and Classical Lie Algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol.143, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [OV03] S. Ovsienko, *Strongly nilpotent matrices and Gelfand-Zetlin modules*, Linear Algebra and its Applications, vol. 365, pp. 349-367, 2003.
- [PO00] H. Poincaré, *Sur les groupes continus*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 18, pp. 220–255, 1900.
- [WI37] E. Witt, *Treue Darstellung Liescher Ringe*, J. Reine Angew. Math., vol. 177, pp. 152–160, 1937.
- [ZA75] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra. Vol. II*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 29, Springer-Verlag New York-Heidelberg, 1975.
- [ZE73] D. P. Želobenko, *Compact Lie groups and their representations*, American Mathematical Society, Providence, R.I. Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations, Translations of Mathematical Monographs, vol. 40, 1973.