UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

LUCAS CUNHA DA SILVA

A GÊNESE INSTRUMENTAL NA INTERAÇÃO COM A MALHA QUADRICULADA E O TANGRAM: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS NO CAMPO CONCEITUAL DAS GRANDEZAS GEOMÉTRICAS

MANAUS - AM

2024

LUCAS CUNHA DA SILVA

A GÊNESE INSTRUMENTAL NA INTERAÇÃO COM A MALHA QUADRICULADA E O TANGRAM: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS NO CAMPO CONCEITUAL DAS GRANDEZAS GEOMÉTRICAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Federal do Amazonas (UFAM) como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa 02: Processos de Ensino-Aprendizagem em Ciência e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Francisco Eteval da Silva Feitosa

MANAUS - AM

2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586g

Silva, Lucas Cunha da

A gênese instrumental na interação com a malha quadriculada e o tangram: Uma proposta para o ensino de área e perímetro de figuras planas no campo conceitual das grandezas geométricas / Lucas Cunha da Silva . 2024

124 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Francisco Eteval da Silva Feitosa

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Gênese Instrumental. 2. Orquestração instrumental. 3. Ensino de matemática. 4. área e perímetro. 5. grandezas geométricas. I. Feitosa, Francisco Eteval da Silva. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Lucas Cunha da Silva

A GÊNESE INSTRUMENTAL NA INTERAÇÃO COM A MALHA QUADRICULADA E O TANGRAM: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS NO CAMPO CONCEITUAL DAS GRANDEZAS GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática/PPG-ECIM da Universidade Federal do Amazonas/UFAM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Francisco Eteval da Silva Feitosa

Prof. Dr. Francisco Eteval da Silva Feitosa
Presidente da Banca

Maria Ione F. Dolzane

Profa. Dra. Maria Ione Feitosa Dolzane
Membro Interno

José de Alcântara Filho

Prof. Dr. José de Alcântara Filho
Membro Externo

Esta dissertação é inteiramente dedicada aos meus pais. Os dois maiores incentivadores dos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Á Deus, por me conceder saúde e forças para cumprir meus objetivos.

Á minha família que sempre me apoia em todas as minhas decisões mesmo com a distância. Meus pais, Manoel e Luizete, meus irmãos Mizael, Luciano, Elza, Edenilson, Luciane, Aldenir e Antônio.

Ao meu orientador, professor Francisco Eteval por ter me dado a oportunidade de trabalhar nessa dissertação, pelo constante incentivo, ensinamentos e aprendizados.

Aos professores do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UFAM que partilharam uma parte de seus conhecimentos, contribuindo imensamente para o meu desenvolvimento e crescimento profissional.

Aos meus colegas de curso que me acompanharam nesse percurso, em especial minhas colegas de sala Luciane Alcântara e Yana Bárbara pela parceria nas atividades realizadas.

Aos meus amigos Marco Aurélio, Alessandra, Geovana e Jhonata que me acompanharam e me deram apoio nesse processo.

Á FAPEAM pelo apoio financeiro prestado durante a realização desse trabalho.

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo analisar o processo da gênese instrumental dos artefatos malha quadriculada e Tangram a partir de situações que envolvam os conceitos de área e perímetro de figuras planas dentro do campo conceitual das grandezas geométricas. A pesquisa tem como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1982) que estuda a conceitualização por meio de situações tarefas ligadas à estrutura cognitiva do indivíduo; a abordagem instrumental proposta por Rabardel (1995) que investiga os sujeitos em atividades mediadas por instrumentos e a Teoria da Orquestração instrumental de Trouche (2005) que traz subsídios a investigações voltadas à interação do professor com a tecnologia, em sua prática docente, tendo como objetivo provocar a gênese instrumental dos estudantes. Este estudo possui uma abordagem qualitativa do tipo exploratória e descritiva com delineamento de uma pesquisa-ação. A coleta de dados ocorreu na escola Cacilda Braule Pinto da rede pública de ensino localizada na zona leste da cidade de Manaus no estado do Amazonas. Os sujeitos da pesquisa foram vinte e três estudantes da turma do 9º ano do ensino fundamental com o intuito de responder à questão de pesquisa e atingir os objetivos propostos. Diante das análises, o estudo revelou algumas dificuldades conceituais dos estudantes quando resolvem situações dentro do campo conceitual das grandezas geométricas e que a inserção de tecnologias dentro do processo de ensino-aprendizagem podem favorecer melhores níveis de aprendizagem desde que sejam integradas ao processo. Os dados apresentados possibilitaram discussões acerca da orquestração instrumental como modelo teórico no processo de ensino-aprendizagem como facilitadora no processo da gênese instrumental dos objetos que se apresentam como artefatos no ensino. Além disso, os resultados obtidos proporcionaram a articulação entre teoria e a prática no campo de Educação Matemática, no contexto da educação básica.

Palavras-chave: Gênese Instrumental; Orquestração instrumental; Ensino de matemática; área e perímetro; grandezas geométricas.

ABSTRACT

This study aims to analyze the process of instrumental genesis of the artifacts grid and Tangram from situations involving the concepts of area and perimeter of flat figures within the conceptual field of geometric quantities. The research has as its theoretical basis the Theory of Conceptual Fields proposed by Vergnaud (1982), which studies conceptualization through task situations linked to the individual's cognitive structure; the instrumental approach proposed by Rabardel (1995), which investigates subjects in activities mediated by instruments; and the Theory of Instrumental Orchestration by Trouche (2005), which provides support for investigations into the interaction between teachers and technology in their teaching practice, with the aim of provoking students' instrumental genesis. This study has a qualitative, exploratory and descriptive approach with an action research design. Data collection took place at the Cacilda Braule Pinto public school, located in the eastern part of the city of Manaus in the state of Amazonas.The research subjects were twenty-three students from the 9th grade of elementary school, with the aim of answering the research question and achieving the proposed objectives. In the light of the analysis, the study revealed some conceptual difficulties faced by the students when solving situations within the conceptual field of geometric quantities and that the inclusion of technologies within the teaching-learning process can promote better levels of learning, provided that they are integrated into the process. The data presented enabled discussions about instrumental orchestration as a theoretical model in the teaching-learning process as a facilitator in the process of instrumental genesis of objects that are presented as artifacts in teaching. In addition, the results obtained provided an articulation between theory and practice in the field of Mathematics Education, in the context of basic education.

Keywords: Instrumental genesis; Instrumental orchestration; Mathematics teaching; area and perimeter; geometric quantities.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFAM	Universidade Federal do Amazonas
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
PPGECIM	Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ERIC	Education Resources Information Center
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
MEC	Ministério da Educação
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCNS	Parâmetros Nacionais Comum Curriculares
BOLEMA	Boletim de Educação Matemática
EMP	Educação Matemática Pesquisa
EMR	Educação Matemática em Revista
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
OI	Orquestração Instrumental
TAS	Teoria da aprendizagem significativa

LISTA DE SÍMBOLOS

$\equiv$	Congruente
$\leftrightarrow$	Operador lógico se e somente se
$\cup$	União
//	Paralelo
$\hat{A}$	Ângulo
$\overline{AB}$	Segmento

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O processo de ensino-aprendizagem está centrado no estudante e dá ênfase tanto ao método de ensino quanto ao conteúdo que se ensina e compreende vários fatores como: a organização do ambiente educativo, a definição dos objetivos que se pretende alcançar, as ferramentas de aprendizagem que serão utilizadas, o desenvolvimento das atividades e a avaliação do processo.

Segundo González (2005), compreender e raciocinar são dois objetivos essenciais do processo de ensino-aprendizagem. Todavia, esses objetivos nem sempre são alcançados ao se ensinar e aprender matemática, uma vez que este componente curricular é visto por muitos educadores e pesquisadores como um desafio devido a intensidade de abstração que seus conceitos exigem.

A matemática é uma ferramenta essencial em várias áreas do conhecimento e, por isso, sua compreensão é de extrema importância no que concerne seus conceitos e aplicações. De acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) a Matemática é conceituada como uma “ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos” (Brasil, 2018, p. 267).

Apesar da sua relevância, muitas são as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem da matemática. As pesquisas de (Relvas (2011); Drouet (1998); Parra (1996); Santos (2007); Corso (2010); Masola e Allevato (2019); Pais (2013) Garcia (1998)) apresentam algumas reflexões acerca dessas dificuldades e procuram identificar sua gênese. Nesse contexto, de acordo com Duval (2003), a principal dificuldade na aprendizagem da matemática decorre do fato de que seus objetos não possuem existência física e, por isso, só é possível acessá-los por meio de suas representações.

Desse modo, uma estratégia muito utilizada em pesquisas que tratam da superação dessas dificuldades é a utilização de artefatos tecnológicos que tentam estabelecer conexões entre conceitos abstratos da matemática e suas relações com objetos físicos. No entanto, é importante ressaltar que não basta apenas inserir esses artefatos na sala de aula, é preciso integrá-lo dentro do processo, Bittar (2010) estabelece uma diferença entre os termos:

> Fazemos uma distinção entre integração e inserção da tecnologia da Educação. Essa Última significa o que tem sido feito na maioria das escolas: coloca-se o computador nas escolas, os professores usam, mas sem que isso provoque uma aprendizagem diferente do que se fazia antes. Defendemos que o computador deve ser usado e avaliado como um instrumento, como qualquer outro, seja o giz, um material concreto ou outro. E esse uso deve fazer parte das atividades rotineiras de aula (Bittar, 2010, p. 259).

À vista disso, a integração como definida anteriormente, só será atingida quando o estudante se apropriar do artefato que ele utiliza como meio para ação em determinada situação de aprendizagem. Decorre daí a necessidade de analisar e compreender como os estudantes inserem esses artefatos tecnológicos em sua prática e como ocorre o desenvolvimento cognitivo deles na aquisição de um novo conceito diante de uma situação.

O interesse por investigar aspectos relacionados ao processo de ensino-aprendizagem dos conceitos de área e perímetro de figuras planas surgiu da minha experiência em sala de aula como professor de matemática da educação básica. Ao lecionar nos anos finais do ensino fundamental, observei algumas dificuldades conceituais dos estudantes relacionadas a esses conceitos como: tarar a área de qualquer figura como sendo a sua fórmula matemática. Também observei que esses conceitos são apresentados na maioria das vezes nos livros didáticos com questões propostas que seguem um certo padrão e que exigem apenas que o estudante substitua os dados numéricos e execute as operações mecânicas para resolvê-las através das fórmulas.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), aponta-se que “os estudantes que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle” (Brasil, 1998, p. 131). Por isso é comum ouvir perguntas dos estudantes durante a realização de uma tarefa, tais como: Qual fórmula eu uso? Que figura é essa? Quem é a base e quem é a altura? O que é o perímetro? Como se calcula a área? A partir disso os PCNs recomendam:

> [...] o trabalho com áreas de superfícies planas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento) para o cálculo de áreas e perímetros e por estimativas e aproximações (Brasil, 1998, p.131).

De acordo com as orientações didáticas presentes nos PCNs, ao se trabalhar com medidas, é comum que os estudantes confundirem área com perímetro, logo é

> [...] variando as situações propostas (comparar duas figuras que tenham perímetros iguais e áreas diferentes ou que tenham áreas iguais e perímetros diferentes; duas figuras de modo que uma tenha maior perímetro e menor área que a outra ou maior perímetro e maior área) e solicitando aos alunos que construam figuras em que essas situações possam ser observadas, que se cria a possibilidade para que compreendam os conceitos de área e perímetro de forma mais consistente (Brasil, 1998, p. 131).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), também traz suas considerações acerca do tema, de acordo com esse documento norteador, os objetos de conhecimento área e perímetro de figuras planas estão localizados no tópico de Grandezas e Medidas, e a expectativa para os anos finais do ensino fundamental é que os estudantes reconheçam esses objetos como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas.

> No estudo dos conteúdos referentes a Grandezas e Medidas é preciso retomar as experiências que explorem o conceito de medida. Por exemplo, para medir o comprimento de um objeto o aluno precisa saber quantas vezes for necessário aplicar uma unidade previamente escolhida nesse objeto, ou seja, executar duas operações: uma geométrica (aplicação da unidade no comprimento a ser medido) e outra aritmética (contagem de quantas unidades couberam). Os mesmos procedimentos são utilizados para obter áreas e volumes (Brasil, 1998).

Nesse contexto, visando a integração de artefatos no ensino e as recomendações dos documentos oficiais norteadores acerca dos conceitos de área e perímetro, buscamos bases teóricas no qual fosse possível analisar a integração de um artefato a partir da sua apropriação pelo estudante como meio na realização de uma dada situação. Essa apropriação de um artefato tecnológico se insere em processo complexo ao qual Rabardel (1995) denominou de gênese instrumental, que consiste em transformar um artefato em um instrumento.

Os artefatos escolhidos para o desenvolvimento da pesquisa foram o tangram e a malha quadriculada que apresentam potencialidades para trabalhar os conceitos matemáticos de área e perímetro como grandezas geométricas e que atendem as recomendações dos PCNs e da BNCC. Desse modo, definimos a seguinte pergunta que norteia este trabalho: Como ocorre o processo da gênese instrumental dos estudantes do 9° ano na interação com os artefatos malha quadriculada e tangram em situações envolvendo os conceitos de área e perímetro de figuras planas como grandezas geométricas?

Partiu-se da hipótese de que, ao utilizarem artefatos durante o processo de ensino-aprendizagem os estudantes precisam mobilizar ideias, conceitos e esquemas mentais que exercem uma mediação para se apropriarem do conhecimento. Assim, esta pesquisa tem como objetivo geral analisar o processo da gênese instrumental dos artefatos malha quadriculada e Tangram a partir de situações que envolvam os conceitos de área e perímetro de figuras planas dentro do campo conceitual das grandezas geométricas.

Para tanto, traçamos os seguintes objetivos específicos: Elaborar e executar uma composição de Orquestrações Instrumentais visando favorecer a gênese instrumental dos estudantes na interação com os artefatos malha quadriculada e Tangram; Identificar os invariantes operatórios (teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação) mobilizados pelos estudantes durante o processo; Analisar a gênese instrumental dos estudantes a partir da identificação dos invariantes operatórios mobilizados no processo de instrumentalização e instrumentação frente as situações propostas.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo apresentamos a revisão de literatura sobre a aprendizagem dos conceitos de área e perímetro que contribuem na reflexão sobre a temática e na elaboração do projeto, onde é possível identificar as principais dificuldades encontras ao se trabalhar com esses objetos de conhecimento, bem como enquadrar o projeto em uma proposta terorica-metodologica acerca do tema.

2.1 O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁREA E PERÍMETRO NAS PESQUISAS

Para compreender as concepções apresentadas pelos estudantes acerca dos conceitos de área e perímetro, realizamos um mapeamento nas produções acadêmicas na área de Ensino de Matemática acerca da temática. Foram escolhidas três fontes de consulta bibliográfica: a) um grupo de pesquisa especializado na temática no Brasil; b) um evento importante em Educação Matemática no Brasil; c) Revistas em Educação Matemática de trabalhos abertos e gratuitos no âmbito nacional e internacional.

O grupo de pesquisa escolhido para a busca foi o Grupo Pró-grandezas que trata do ensino e aprendizagem das grandezas e medidas, da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) vinculado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, da UFPE e cadastrado oficialmente no diretório dos grupos de pesquisa do Brasil do CNPq.

O evento da área escolhida foi o ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) por ser o evento mais importante no âmbito nacional que aborda tendências metodológicas e pesquisas ligadas ao ensino e a aprendizagem de matemática envolvendo: professores da Educação básica, professores e estudantes das licenciaturas em matemática e em pedagogia, estudantes da pós-graduação e pesquisadores.

As revistas selecionadas para a pesquisa foram: EMP (Educação Matemática Pesquisa), BOLEMA (Boletim de Educação Matemática), EMR (Educação Matemática em Revista), Zetetiké, Amazônia - Revista de educação em ciências e matemáticas (online), Educational Studies in Mathematics, for the learning of Mathematics, International Journal of science and Mathematical Education por serem revistas conceituadas dentro da área de estudo com Qualis A1, A1, A2, A2, A2, A1, A1, A1 respectivamente. Além dessas revistas, utilizamos também as listas de bases do café/CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) para a busca.

A escolha dessas fontes teve como objetivo mapear e analisar as produções acadêmicas acerca do ensino dos conceitos de área e perímetro de figuras planas como grandezas geométricas no contexto da Educação Básica brasileira e internacional todos no período de 2017 a 2022 utilizando as seguintes palavras chaves: “áreas”, “perímetro” e “grandezas geométricas” a fim de direcionar e organizar a busca dos textos para a análise. Assim, foram definidos os seguintes critérios de inclusão e exclusão dos trabalhos conforme o quadro 1:

Quadro 1 - Critério de inclusão e exclusão de trabalhos para análise

Critérios de inclusão	**Critérios de exclusão**
Serão considerados trabalhos publicados nas bases de dados escolhidas para a pesquisa entre 2017 e 2022, exceto os que são mais citados nas pesquisas como referência.	Serão desconsiderados trabalhos que não estejam disponíveis integralmente nas bases de dados escolhidas.
Serão considerados os trabalhos que tratam especificamente das estratégias de ensino dentro do tema área e perímetro de figuras planas como grandezas geométricas.	Serão desconsiderados trabalhos anteriores a 2017 exceto os mais citados nas pesquisas.
Serão considerados artigos científicos de revistas classificados com Qualis A ou B.	Serão desconsiderados trabalhos que se relacionem com a formação de professores
Serão considerados trabalhos que possuem pressupostos teóricos de área como grandeza a partir de Douady e Perrin-Glorian, Bellemain e Lima, Baltar e Ferreira.	Serão desconsiderados trabalhos que não apresentem em seu desenvolvimento o que está proposto no título.
Serão considerados trabalhos que utilizam materiais manipuláveis ou softwares ferramentas auxiliares no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos de área e perímetro.	Serão desconsiderados trabalhos que não estejam relacionados ao desenvolvimento de habilidades cognitivas voltados ao ensino de matemática dos objetos área e perímetro.

Fonte: O autor

Buscamos identificar nos textos quais concepções são apresentadas pelos estudantes do ensino básico acerca dos conceitos de área e perímetro de figuras planas e quais estratégias são utilizadas para ensinar esses conceitos? Do mapeamento realizado na literatura, foram encontrados cinquenta e sete (57) trabalhos que tratam especificamente do ensino dos conceitos de área e perímetro de figuras planas dos quais foram organizados pelo quantitativo de trabalhos encontrados nos três tipos de fontes bibliográficas escolhidas conforme no quadro 2.

Quadro 2 - Fontes de pesquisa e quantidade de artigos encontrados

Periódico	**Quantidade**
Grupo de Pesquisa Pró-grandezas	4
Encontro Nacional de Educação Matemática	25
Boletim de Educação Matemática	1
Amazônia - Revista de Educação em ciências e matemáticas (online)	2
Educação Matemática Pesquisa	2
Educação Matemática em Revista	5
ZETETIKÉ	1
Educational Studies In Mathematics	6
For The Learning Of Mathematics	2
International Journal Of Science And Mathematical Education	3
café/CAPES	6

Fonte: O autor

Após esta etapa, buscamos por meio da abordagem qualitativa analisar aspectos relativos à área e perímetro de figuras planas como grandezas geométricas e as estratégias utilizadas no contexto da educação básica e constatamos que uma das dificuldades mais observadas na revisão de literatura é a confusão entre esses conceitos.

As pesquisadoras francesas Douady e Perrin-Glorian (1989) estudaram as concepções alternativas[1] de estudantes sobre o conceito de área e perímetro de figuras planas e concluíram que a gênese dessas concepções apresentadas pelos estudantes em relação ao tema, se dava pela ausência das relações existentes entre quadros[2]: numéricos, geométricos e das grandezas. Isso porque os estudantes tendem a considerar a área ora como sendo uma superfície (concepção geométrica), ora como sendo um número (concepção numérica). As autoras elencam as seguintes dificuldades:

---

[1] Segundo Figueira e Rocha (2011), as concepções alternativas são caracterizadas como construções pessoais elaboradas de forma espontânea, por meio da interação dos alunos com o meio ambiente em que vivem e com a troca de conhecimentos com outras pessoas.

[2] Para Douady e Perrin-Glorian (1989) um quadro é constituído por objetos de um ramo da matemática, de suas formulações eventualmente diversas, das relações entre esses objetos, e das imagens mentais que o sujeito associa a um momento dado aos objetos e suas relações.

> 1 - A possibilidade de medir a área de uma superfície depende da compatibilidade entre a sua forma e a forma da superfície unitária, ou seja, só é possível medir a área de uma superfície, se for possível ladrilhar, efetivamente, com um número inteiro de exemplares da superfície unitária.
> 2 - A área é ligada à superfície e não se dissocia de outras características dessa superfície.
> 3 - Se o perímetro de uma superfície se altera, sua área também (e reciprocamente).
> 4 - Se duas superfícies têm o mesmo perímetro, elas têm a mesma área.
> 5 - Estende-se o uso de certas fórmulas a situações em que elas não são válidas, como multiplicar os comprimentos dos três lados de um triângulo para calcular a sua área. (Douady & Perrin-Glorian, 1989, p. 393).

A partir dos resultados da pesquisa de Douady e Perrin-Glorian (1989), várias outras pesquisas tiveram como objeto aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem do conceito de área e perímetro como grandezas geométricas.

Baltar (1996) ao estudar a aquisição da relação entre comprimento e área na escola, relata as dificuldades que estudantes dos anos finais da educação básica encontram, em primeiro lugar, em reconhecer medidas de uma figura como um de seus elementos constituintes e, em segundo em distinguir medidas de área das medidas de perímetro.

A partir dos resultados de Douady e Perrin-Glorian (1989) o pesquisador objetivou categorizar quais seriam os possíveis procedimentos utilizados para resolver situações que se enquadrassem nos quadros propostos pelas autoras (geométrico, numérico ou das grandezas), e propôs em seu trabalho a utilização de uma variedade de situações que dão sentido ao conceito de área e perímetro, dos quais fosse possível dissociá-los e construí-los como grandezas geométricas proporcionando uma aprendizagem significativa.

Bellemain e Lima (2002) observaram que nas situações em que se constatam as concepções numéricas, os alunos consideram apenas os aspectos pertinentes para o cálculo, o que provoca a omissão e/ou utilização inadequada das unidades de medida e os induzem a utilizar as fórmulas nas situações nas quais não são necessárias (por exemplo, a comparação da área de duas superfícies).

Nesse sentido, os autores afirmam que o ensino com área foi marcado durante muito tempo pela ênfase na aplicação de expressões matemáticas por meio das fórmulas de figuras geométricas e na conversão de unidades de medidas de área. Por essa razão, diversas dificuldades como a confusão entre área e perímetro, podem ser geradas. Para os autores as equações possuem um papel relevante, entretanto, para desempenhar esse papel é preciso que sejam utilizadas com compreensão e significado.

Bellemain (2000) afirma que ao mobilizar uma concepção geométrica, o estudante entende que se uma figura for modificada, sua área também será modificada. Como consequência, em uma determinada tarefa, ao decompor uma figura e recompor em outra diferente, sem perda nem sobreposição, ele compreende que esta nova figura possui área diferente da anterior, o que é uma concepção errônea do conceito de área. Outra confusão é o conceito de perímetro com o contorno, os estudantes têm a concepção de que o perímetro de uma figura é o contorno, todavia, isso é uma concepção errônea uma vez que contornos diferentes podem ter o mesmo perímetro.

Segundo French (2004) a dificuldade de dissociar área e perímetro pode surgir de uma simples confusão de palavras ou mesmo originar-se de conceitos profundamente errôneos, os quais fazem os estudantes pensarem que perímetro e área estão ligados de um modo tão elementar, que o aumento de uma dessas grandezas conduz necessariamente ao aumento da outra. Para se evitar o surgimento de tal dificuldade, Yeo (2008) destacou a necessidade de se primar por uma aprendizagem através do desenvolvimento de um conhecimento conceitual e relacional destes temas, e ressaltou um grave obstáculo a esta prática: o fato de os próprios professores confundirem os conceitos de perímetro e de área.

Dentro desse contexto, a pesquisadora brasileira Ferreira (2010) elaborou um quadro que resume a classificação de Baltar (1996) e incluiu nesse quadro a situação denominada de mudança de unidade, a fim de complementar a proposta de Baltar (1996) e contribuir para a superação dessas concepções apresentadas pelos estudantes.

Buscando superar as dificuldades relacionadas às Grandezas e Medidas, Freire et al (2018) pesquisaram o ensino do cálculo de área e perímetro de figuras geométricas planas por meio do uso do Geoplano em uma turma do 8º ano do ensino fundamental. Os autores constataram que as atividades propostas na oficina contribuíram para a superação de algumas dificuldades conceituais de aprendizagem apresentadas pelos alunos, entre elas o entrave na distinção das grandezas área e perímetro.

Bellemain, Bibiano e Souza (2018, p.4) discutem os resultados de avaliações em larga escala e enfatizam para a importância da pesquisa nessa área ao dizer que:

> Os resultados de avaliações em larga escala (nos âmbitos Federal, Estadual e Municipal) evidenciam desempenho insatisfatório e pesquisas brasileiras e estrangeiras mostram erros persistentes na aprendizagem de conteúdo do campo das Grandezas e Medidas. É o caso das confusões entre grandezas (área e perímetro, massa e capacidade etc.), do uso inadequado ou da omissão de unidades de medida (expressar uma área usando centímetros, um perímetro em centímetros quadrados, entre outros), ou ainda da utilização de fórmulas inadequadas (como, por exemplo, multiplicar os comprimentos dos lados de um paralelogramo não retângulo) (Bellemain; Bibiano; Souza, 2018, p.4).

Nessa perspectiva Pereira et al. (2019) realizaram um estudo comparativo utilizando a Prova Brasil de 2015 no que diz respeito à compreensão leitora de problemas matemáticos no eixo Grandezas e Medidas com alunos do 5° ano do Ensino Fundamental. As respostas dos estudantes mostraram falha na compreensão em leitura, ocasionando resultados bastante insatisfatórios para o nível de ensino investigado.

Resultados semelhantes foram percebidos por Righi, Santarosa e Mathias (2019) que analisaram os esquemas em ação das grandezas geométricas por meio da elaboração e aplicação de um teste. Os autores constataram que os estudantes dão ênfase no quadro geométrico e/ou numérico, resultando em dificuldades de compreensão das grandezas. Essa constatação também é corroborada por Miranda (2018) onde a autora apresenta em sua pesquisa algumas confusões conceituais apresentadas pelos estudantes relativos aos conceitos de área e perímetro.

Nesse sentido, Senzaki (2019) também aponta, a partir da análise das pesquisas, que a não dissociação de área e perímetro é fonte de dificuldade na apropriação desses objetos matemáticos, assim como a utilização frequente dos termos área como medida de superfície e perímetro como a medida do comprimento.

De acordo com Oliveira (2002) é preciso dissociar e articular aspectos para favorecer a construção de conhecimentos sólidos sobre as grandezas geométricas. Privilegiar demasiadamente os aspectos numéricos e algébricos não permite ao aluno lidar com a amplitude de problemas postos no campo em foco.

Em sua pesquisa, Kiefer (2020) afirma que o número de investigações acerca do tema área de figuras planas vem aumentando ao longo dos anos. A autora analisou trabalhos no período de 2007 a 2018 que tratavam de sequências didáticas utilizando softwares de geometria dinâmica no contexto da Educação Básica. Os trabalhos mapeados continham situações de área conforme os pressupostos teóricos de área como grandeza a partir de Douady e Perrin-Glorian, Bellemain e Lima, Baltar e Ferreira que recomendam que sejam trabalhado esse conteúdo utilizando as situações de comparação, medição, conversão de unidade e produção.

Dentre as situações, a autora constatou que as situações de comparação tiverem mais ênfase nas pesquisas e formam as que mais mostram indícios de mobilizar as apreensões perceptiva, discursiva e operatória, bem como a conversão dinâmica de descrição através de justificativas e/ou relações do que se observa a partir dos tratamentos dinâmicos de reconfiguração (composição, decomposição e deformação).

Cunha et al (2022) fizeram um levantamento de pesquisas na área de Educação Matemática, acerca do tema Grandezas e Medidas no período de 2009 a 2019 e concluíram que o foco das pesquisas tem sido a abordagem das grandezas geométricas, comprimento, área e volume. O resultado do autor evidencia que atividades que propõem a utilização de materiais manipulativos e softwares, através de uma abordagem diferenciada e lúdica, propiciam resultados melhores na compreensão das propriedades das Grandezas e Medidas, uma vez que enfocam atividades de comparação, produção, composição e decomposição, possibilitando de forma subjetiva a dissociação entre o quadro das grandezas, o quadro geométrico e o quadro numérico.

Costa et al (2020) analisaram como é apresentado o ensino de Grandezas e Medidas nos Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco. Como resultado, os autores constataram que as propostas de ensino de área e perímetro convergem para o trabalho no campo das Grandezas e Medidas ao longo da escolarização. Os autores ressaltam que a importância de se trabalhar dentro desse campo se justifica pela relevância social, pelas articulações com os demais campos da Matemática e com as outras disciplinas escolares.

De acordo com Chappell e Thompson (1999) os estudantes precisam de tarefas nas quais possam analisar o perímetro e a área ao mesmo tempo para distinguirem claramente os dois objetos. Estes pesquisadores afirmam, ainda, que os alunos precisam construir representações visuais de figuras com determinadas áreas e perímetros, criar problemas relacionados com estas palavras e justificar as propriedades figurais observadas.

Desse modo, notamos que as pesquisas encontradas acerca do tema se detiveram em investigar as quatros situações que dão sentido ao conceito de área (comparação, medida, mudança de unidade e produção de superfícies) e sugerem que esses conceitos sejam trabalhados como grandezas geométricas conforme proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) na diferenciação dos quadros numéricos, geométricos e das grandezas.

Dada sua importância, e tendo por base a recomendação da literatura nacional e internacional em Educação Matemática bem como as recomendações dos documentos oficiais (BNCC e PCNs), o diferencial da presente pesquisa é fornecer um modelo teórico de aprendizagem que contemple a utilização de ferramentas tecnológicas dentro do processo de ensino-aprendizagem que possibilite oferecer subsídios para planejar e mediar atividades que favoreçam os aspectos conceituais dos estudantes.

Assim, torna-se relevante o modelo proposto nesta pesquisa que contempla a distinção entre o comprimento e os objetos geométricos, entre o comprimento e suas medidas (obtidas mediante a escolha de unidade de comprimento), bem como entre o comprimento e a área, isto é, no reconhecimento de grandeza não como um número, mas como propriedade de um objeto geométrico ou de um fenômeno natural que pode ser comparada ou medida.

2.2 A GÊNESE INSTRUMENTAL E AS PESQUISAS REALIZADAS NESSE CAMPO.

Nesta seção, apresentaremos algumas pesquisas que estão relacionadas a abordagem instrumental com foco no processo da gênese instrumental que é o foco deste trabalho. As teses e dissertações foram todas selecionadas a partir do site da Biblioteca digital brasileira de teses e dissertações (BDTD) utilizando como filtro de pesquisa a palavra-chave gênese instrumental. Foram encontradas 5 dissertações sendo 2 delas da PUC-SP (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo), e as outras da UEPB (Universidade Estadual da Paraíba), UFPE (Universidade Federal de Pernambuco) e UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul).

Na dissertação de Silva (2019) o objetivo era investigar a gênese instrumental de uma dupla de alunos do 9º ano utilizando o Excel como artefato em situações que envolviam o raciocínio proporcional. O autor utilizou como suporte teórico a abordagem instrumental de Rabardel (1995) e a Teoria dos campos conceituais de Verganud (1990). Como resultado, encontrou potencialidades no Excel para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos estudantes a partir da mobilização dos esquemas de utilização, uma vez que foi possível evidenciar que os estudantes conseguiam obter as razões, taxas e proporções das situações propostas, com uso de fórmulas e comparativos no Excel dando sentido aos objetos de conhecimento.

Xavier Neto (2016) pesquisou acerca do processo da gênese instrumental do artefato simbólico função de uma variável real cujo objetivo era estudar o processo de desenvolvimento cognitivo de um grupo de estudantes do 2° e 3° ano do ensino médio a partir da gênese instrumental durante uma sequência de atividades. O autor utilizou como aporte teórico a abordagem instrumental de Rabardel (1995) e a Teoria dos registros de representações semióticas de Duval (2003). Como resultado, verificou a transformação do artefato simbólico função de uma variável com várias sentenças em instrumento a partir da resolução das atividades propostas através da mobilização dos esquemas de utilização que caracterizam o fenômeno da gênese instrumental.

Alencar (2012) desenvolveu uma oficina utilizando o Geogebra como um artefato para professores que lecionam matemática no ensino básico que tinha como objetivo elaborar estratégias próprias de ensino e aprendizagem com uso desse software. A oficina foi estruturada de acordo com a gênese instrumental onde o autor buscou por meio dos processos de instrumentação e instrumentalização evidenciar uma interação dos sujeitos participantes da pesquisa com o artefato de tal forma que fosse possível transformá-lo em um instrumento. Os resultados mostraram a ocorrência do processo da gênese instrumental por meio do uso correto das ferramentas presentes no Geogebra para a construção de um objeto matemático, onde os professores criaram e testaram suas hipóteses.

Na dissertação de Bussolotto (2019) o objetivo era observar a partir de uma oficina o processo de elaboração de esquemas de utilização do Geogebra na construção de peças virtuais do jogo Brincando de Engenheiro e a apropriação de conceitos geométricos desenvolvidos no decorrer deste processo. A autora utilizou como aporte teórico a abordagem instrumental de Rabardel (1995) na qual buscou nas construções realizadas no Geogebra 3D identificar os esquemas de utilização desenvolvidos pelos estudantes juntamente aos conceitos geométricos construídos, para observar o processo da gênese instrumental. Como resultado, a pesquisadora concluiu que o software de matemática dinâmica utilizado na pesquisa possibilitou o estudo da geometria espacial por meio da manipulação dos objetos geométricos construídos a partir de suas propriedades, na qual novos conceitos matemáticos eram sendo construídos.

Vilaça (2018) teve como objetivo em sua pesquisa investigar como estudantes de um curso de licenciatura em matemática utilizavam o Geoplano durante a realização de algumas atividades envolvendo as características dos quadriláteros. Para atingir os objetivos propostos o autor utilizou como aporte teórico a abordagem instrumental e a Teoria da Orquestração Instrumental. A primeira para subsidiar a investigação de como os licenciandos manuseavam o Geoplano durante a realização das atividades envolvendo os quadriláteros. Já a segunda teoria foi utilizada para planejar, estruturar e executar todas as atividades propostas na pesquisa. Como principais resultados o autor evidenciou uma dificuldade na compreensão das características dos quadriláteros, especificamente a definição dessa família de figuras e o reconhecimento das características dos quadriláteros especialmente os notáveis, para a elaboração das respostas durante as atividades.

Ao fazer tal revisão, foi possível evidenciar a relevância da nossa pesquisa em explorar os artefatos tangram e malha quadriculada, visto que há uma escassez de trabalhos no campo de pesquisa que propõem a utilização de materiais manipuláveis como artefatos tecnológicos, sendo mais utilizado nas pesquisas softwares digitais o que acaba limitando onde não é possível utilizar as tecnologias digitais. Também não encontramos pesquisas interligando os objetos de conhecimento área e perímetro e figuras planas com a abordagem instrumental. Desse modo, propomos a utilização de dois artefatos visto que em algumas situações matemáticas um artefato pode se apresentar melhor do que outro para o tipo de situação que se pretende trabalhar, logo consideramos que utilizar um único artefato na pesquisa pode tornar limitado para o que se pretende.

3 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Esse capítulo irá tratar sobre alguns elementos do contexto histórico dos objetos matemáticos área e perímetro que consideramos importantes para o nosso estudo. Apresentamos alguns pressupostos epistemológicos acerca da História da Matemática assim como registros históricos sobre o desenvolvimento do cálculo de área e perímetro realizado por algumas civilizações antigas ao longo do tempo, bem como a definição formal desses conceitos.

Não pretendemos contemplar a vasta literatura sobre o assunto acerca da história do surgimento da geometria, apenas trazer alguns elementos que julgamos relevantes para a compreensão da gênese desses conceitos para a sua construção enquanto grandezas geométricas.

3.1 ELEMENTOS HISTÓRICOS DO SURGIMENTO DA GEOMETRIA E DO CONCEITO DE ÁREA E PERIMETRO

Os PCNs (1997) afirmam que a história da matemática deve fazer parte do contexto do professor em sala de aula, uma vez que é importante compreender a matemática como dinâmica que nem sempre se desenvolveu de forma contínua, mas que é marcada por uma série de rupturas e contribuições de diferentes civilizações em diferentes épocas.

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos (Brasil, 1998, p.30).

A Matemática se desenvolveu culturalmente a partir da necessidade de vários povos e civilizações ao longo do tempo. A geometria é um dos seus campos de estudos que é abordado em todas as etapas do ensino básico.

Há indícios que a geometria se originou com o surgimento das primeiras civilizações, sendo estes, os povos babilônicos e egípcios. Os autores Boyer (1974), Carvalho e Roque (2019) relatam um possível começo para a geometria usando como base os historiadores Heródoto e Aristóteles. De acordo com Carvalho e Roque (2019) baseado nos relatos de Heródoto datados do século V, a geometria teria se originado no Egito a partir das práticas de medição e demarcação de terras no vale do rio Nilo, a cada inundação dele, entre os que haviam sofrido prejuízos.

> Quando das inundações do Nilo, o rei Sesostris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição deles para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria que migrou, mais tarde, para a Grécia. (Heródoto, oeuvres complètes ii 109, p. 183, apud Carvalho e Roque, 2019, p. 60)

Para Carvalho e Roque (2019) devido à necessidade de medir a área das terras às margens do Rio Nilo como mecanismo para o rei cobrar os impostos de forma mais justa, os egípcios realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes, e alguns de seus procedimentos aritméticos podem ter sido obtidos por métodos geométricos, envolvendo transformações de áreas e a utilização de instrumentos como cordas e varas para realizar medições de comprimentos e de distâncias.

Nesse sentido, Boyer (1974) afirma que a partir desse episódio pode-se chegar a uma possível conclusão dos primeiros registros de cálculo de áreas e comprimento, pois, quando havia as inundações do Rio Nilo, a área de plantio de um determinado indivíduo daquela localidade tendia a diminuir, e com isso o rei enviava agrimensores[3] para verificar e recalcular a área destruída ou inundada.

Estes agrimensores, de acordo com Boyer (1974) acabaram aprendendo a calcular áreas de terras repartindo-as em retângulos e triângulos. Esse episódio segundo o autor é o que melhor explica a origem da palavra geometria, que é derivada do grego *geo = terra + metria = medida*, que pode ser traduzida em medição de terra.

De acordo com Roque (2012) os egípcios tinham um certo conhecimento do cálculo de perímetro e das áreas de alguns polígonos, sendo o cálculo da área do retângulo o primeiro cálculo dominado por eles, já que os problemas apresentados nos Papiros mostram que eles transformavam as figuras em um retângulo ou quadrado, ou usavam o retângulo ou quadrado para aproximar as áreas procuradas. O autor também afirma que os egípcios não se preocupavam em generalizar fórmulas matemáticas, e sim em resolver problemas práticos do cotidiano.

Já para os babilônios a geometria era uma espécie de álgebra ou aritmética aplicada em números ligados a figuras relacionadas com a mensuração prática. "Essa álgebra dos babilônicos estava intimamente relacionada a um procedimento geométrico de cortar e colar, tal prática, não poderia ser descrita como álgebra, sendo mais adequado falar de cálculos com grandezas" (Roque, 2012, p. 39). Segundo Boyer (1974), do que já foi descoberto acerca da geometria desenvolvida pelos babilônios, sabe-se que era essencialmente focada na aplicação

[3] De acordo com Boyer (1974) eram funcionários do faraó cuja tarefa era avaliar os prejuízos das cheias e restabelecer as fronteiras entre as diversas posses.

para os problemas de cálculo de comprimentos, área e volume que eram fatores da necessidade humana da época.

Boyer (1974) e Eves (1995) argumentam que as unidades de medidas utilizadas pelas primeiras civilizações eram inicialmente baseadas em medidas antropométricas, ou seja, tomavam-se partes do seu próprio corpo como padrões, por exemplo: o comprimento do pé, da palma, da passada, a largura da mão, a grossura do dedo, o cúbito, a jarda, entre outras. Entretanto, esses tipos de unidades causavam muita confusão, pois cada indivíduo possui um tamanho diferente de mão, pé, passo. Assim, a partir das grandes revoluções que aconteceram, essas unidades de medidas foram padronizadas no Sistema Internacional de Unidades (SI).

Nesse aspecto, conforme levantado pelos autores, entendemos que tanto os egípcios quanto os babilônios realizavam uma espécie de cálculo de grandezas, sendo uma das principais características de sua matemática na época.

Saindo da Babilônia e indo um pouco mais à frente na história, chegamos à Grécia antiga. De acordo com Pinho, Batista e Carvalho (2010) foram os gregos que ficaram conhecidos como sendo os fundadores da geometria porque haviam sido os primeiros a sistematizar o que se sabia da matemática da época sobre o conhecimento geométrico e introduziram elementos que acabariam por orientar a evolução desta ciência nos próximos séculos.

Alguns nomes importantes dessa época que contribuíram com o avanço da matemática foram: Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides e Arquimedes. Dentre esses Euclides é o que traz ricas contribuições para a geometria com a elaboração dos seus livros denominados “Os Elementos”. Ele foi o primeiro a dar uma consistência teórica a tudo de Matemática que havia sido registrado até o momento.

De acordo com Mol (2013), utilizando a régua não graduada e o compasso, Euclides realizou as construções geométricas fundamentais para a axiomatização[4] da geometria que posteriormente ficou conhecida como Geometria Euclidiana. O autor afirma que a obra Euclidiana mencionada anteriormente foi organizada em treze livros que abrangem tanto a geometria quanto a Aritmética e foi fruto da colaboração de uma equipe de matemáticos coordenada por Euclides, não tendo sido escrita unicamente por ele.

> Os primeiros quatro livros tratam de geometria plana elementar e estudam propriedades de figuras retilíneas e do círculo, abordando problemas cuja solução se faz com régua e compasso. O livro V aborda a teoria de proporções e o VI aplica essa teoria ao estudo de geometria. Os livros VII, VIII e IX versam sobre a teoria dos

[4] De acordo com Eves (2011) os axiomas são proposições aceitas sem demonstrações.

> números. O livro X trata dos incomensuráveis e os livros XI, XII e XIII discorrem sobre geometria sólida (Mol, 2013, p.46).

A base para a nossa pesquisa se encontra no livro I, onde Euclides desenvolveu toda uma teoria de propriedades e comparações de áreas sem recorrer a fórmulas. Segundo Roque (2012) muitos resultados para o cálculo de área incluem a transformação de uma área em outra equivalente, bem como a soma de áreas. O conceito de área nos livros de Euclides é trabalhado a partir de duas abordagens complementares:

> [...] a equivalência de áreas (figuras com o mesmo conteúdo) e a transformação de figuras (construção de uma figura com forma diferente da primeira, mas com o mesmo conteúdo). Os gregos não vinculavam a um segmento de reta o número correspondente à sua medida, em uma determinada unidade. Assim como também não relacionam a área de uma figura com sua medida numérica. É importante ter em mente que o conceito de número para os gregos antigos era profundamente diverso do nosso conceito atual (Moreira, 2010, p. 23).

De acordo com a autora, Euclides trata a noção de área como uma relação de equivalência, afirmando que duas figuras são chamadas iguais quando têm o mesmo conteúdo, ou seja, quando possuem a mesma área e os mesmos comprimentos se forem segmentos.

Mesmo não deixando explícito em sua obra, Moreira (2010) elenca algumas ideias de Euclides em termos atuais da seguinte forma:

> I. Figuras congruentes têm ‘conteúdo’ igual (mesma área);
> II. Se duas figuras têm ‘conteúdo’ igual a uma terceira figura, elas têm ‘conteúdo’ igual entre si;
> III. Se pares de figura com ‘conteúdo’ igual são ‘somados’, no sentido de serem juntados sem sobreposição, fazendo figuras maiores, então, estas figuras maiores têm ‘conteúdo’ igual;
> IV. O mesmo vale para a subtração, observando que a igualdade de conteúdo da diferença não depende de onde as peças iguais foram removidas;
> V. Metade das figuras com ‘conteúdo’ igual têm ‘conteúdo’ igual. (Também, dobro de iguais são iguais);
> VI. O todo é maior que as partes, o que neste caso, significa que se uma figura está contida totalmente em outra (não congruente) então, as duas figuras não podem ter ‘conteúdo’ igual (estabelece uma relação de ordem sobre a grandeza área) (Moreira, 2010, p.24).

Nesse sentido, percebemos que na obra de Euclides não há presença de fórmulas para o cálculo de áreas de figuras planas nem tampouco atribuições de valores numéricos a qualquer medida de superfície como é abordado atualmente nos livros didáticos no Ensino Básico.

> Os gregos ‘medem’ a área das figuras poligonais planas a partir da transformação (adicionando e/ou subtraindo figuras de mesmo ‘conteúdo’) destas figuras em quadrados (quadratura de figuras - dado qualquer polígono construir, com régua e compasso, um quadrado de mesma área). O quadrado é a figura mais simples considerada pelos gregos como unidade de comparação. Ora, todo polígono pode ser repartido em triângulos. Todo triângulo pode ser ‘transformado’ em um paralelogramo de igual ‘conteúdo’ (mesma área). Todo paralelogramo pode ser

> ‘transformado’ em um quadrado de ‘conteúdo’ igual. Assim, percorrendo este caminho de sucessivas transformações de figuras em outras figuras de áreas equivalentes, os gregos eram capazes de dimensionar a área de qualquer figura plana (Moreira, 2010, p.34-35)

Essa breve apresentação histórica permitiu caracterizar o conceito de área e perímetro como grandezas, ideia que norteia o nosso trabalho do ponto de vista sobre o conceito de área e perímetro de figuras planas. Desse modo, entendemos que contar um pouco da história do objeto de estudo da nossa pesquisa, seja um recurso que oferece subsídio para compreender de que forma, esses conteúdos foram sendo constituídos e construídos no decorrer do tempo e como são apresentados atualmente no ensino. Tendo em vista essa perspectiva, apresentaremos algumas definições sobre o conceito de área e perímetro de figura planas.

3.2 ÁREA E PERÍMETRO DE ALGUMAS SUPERFÍCIES POLIGONAIS PLANAS

Assim como outras áreas da ciência, a matemática também possui uma linguagem própria de termos e conceitos específicos que se relacionam dentro do seu paradigma. Logo, é necessário à sua compreensão, uma vez que estes são utilizados durante todo o ensino básico na construção do conhecimento matemático. Na sequência será apresentado os conceitos de área e comprimento como grandezas e suas respectivas unidades de medidas utilizadas. Também será apresentada a dedução para o cálculo da área e perímetro de algumas superfícies poligonais planas (quadriláteros e triângulos) que estabeleceram as fórmulas matemáticas utilizadas a partir da comparação da unidade de área.

3.2.1 A grandeza comprimento e as unidades de medida

De acordo com Leivas, Medeiros e Silveira (2008, p.181) grandeza é tudo aquilo que pode ser medido, como comprimento, tempo, força, massa, velocidade, área, volume, entre outros, logo “medir uma grandeza significa compará-la com uma outra de mesma espécie tomada como unidade” (Lima et al., 2006, p.81).

Santos (2019) afirma que a medição de comprimentos, distâncias e perímetros estão presentes em várias atividades práticas das sociedades e envolve, mesmo que implicitamente: a escolha da grandeza, a unidade de medida e o instrumento de medição, como apresentado anteriormente no contexto histórico, as medidas eram baseadas em partes do corpo como: a jarda, a braça, o pé, o passo, o cúbito, o palmo e a polegada.

No entanto, atualmente a unidade de medida usual é o metro que foi adotado como padrão no Sistema Internacional de Unidades (SI) que define o símbolo e a unidade padronizada para cada grandeza a ser medida. No quadro 3 a seguir, apresentamos os múltiplos e submúltiplos do metro.

Quadro 3 - Representação dos múltiplos e submúltiplos do metro

Múltiplos			**Submúltiplos**		
quilometro	hectômetro	decâmetro	decímetro	centímetro	milímetro
km	hm	dam	dm	cm	mm
1000 m	100 m	10 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Fonte: O autor

A escolha de uma unidade de comprimento é arbitraria, isto é, dependendo do objeto a medir, é conveniente utilizar uma unidade de medida de comprimento.

> Se você estiver viajando de navio, a distância é medida em milhas marítimas, se estiver viajando de uma cidade a outra, a unidade a utilizar é o quilometro, e se for comprar fios para fazer uma instalação elétrica de uma casa, a unidade usada é o metro. Por outro lado, se for medir a espessura do grafite da lapiseira, a unidade de referência vai ser o milímetro (Leivas; Medeiros; Silveira, 2008, p.184)

Em relação ao perímetro de uma região plana, Dante (2010) o define como sendo a soma das medidas de comprimentos dos segmentos de retas que formam o contorno de uma superfície, enquanto a área pode ser conceituada como sendo a extensão mais ou menos limitada de um espaço, território ou superfície.

Lima e Bellemain (2010) apresentam uma definição para perímetro utilizando o comprimento de linhas ou curvas fechadas:

> O comprimento de uma curva fechada é o que chamamos o seu perímetro. As curvas fechadas que estudamos na escola delimitam uma região plana que é o seu interior. Em geral, dizemos que tal curva é o contorno da região. Assim, podemos também dizer que o perímetro é o comprimento do contorno de uma região. Mas é preciso cautela: o perímetro não é o próprio contorno, mas o seu comprimento. De fato, diferentes contornos podem ter o mesmo comprimento. Na linguagem usual, no entanto, tal distinção não é feita e emprega-se o termo perímetro para designar o contorno de uma região e até mesmo a própria região (Lima; Bellemain 2010, p.186-187).

Santos (2019) apresenta algumas restrições acerca de como o conceito de perímetro é apresentado nos livros didáticos como sendo a soma das medidas de todos os lados de uma figura. Segundo a autora:

> Temos várias restrições a essa visão. Primeiro porque ao tratar-se de uma figura não poligonal, a qual não tem lados, não seria possível falar de perímetro. Relacionar o perímetro com os lados de uma figura leva a considerar apenas um domínio de validade restrito aos polígonos (Santos, 2019, p. 29).

Nesse sentido, concordamos com a autora em tratar as medidas como números e o perímetro como uma grandeza, uma vez que este é um comprimento. Desse modo, podemos afirmar de acordo com Lima e Bellemain (2010) que o perímetro é o comprimento do contorno de uma região podendo ser trabalhado em figuras poligonais e não poligonais.

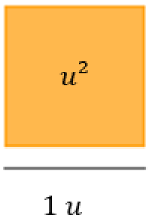
3.2.2 A grandeza área e as unidades de medida

Segundo Lima et al (2006) a área é a medida de uma porção do plano ocupada por uma superfície. Essa proposição é corroborada por Leonardo (2020) que conceitua a área como:

> A porção do plano ocupada por uma superfície poligonal corresponde a um único número A real positivo chamado de área, obtido pela comparação da porção ocupada pela superfície poligonal com a porção ocupada por uma unidade de medida de área (Leonardo, 2020, p.24).

Adotamos como unidade de medida de área o quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento que será representado por $1\ u$. Ele é chamado de quadrado unitário e a sua unidade de área é representada por u^2 de acordo com a Figura 1. Qualquer região quadrada cujo lado meça 1 terá, por definição área igual a 1.

Figura 1 - unidade de medida de área



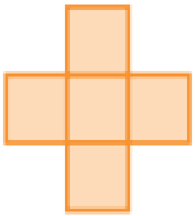
Fonte: Adaptado de (Lima et al., 2006, p. 82)

Para cada unidade de comprimento, existe uma unidade de área correspondente. Logo para o metro teremos o m^2, para o centímetro teremos cm^2, para o milímetro teremos o mm^2, para o quilômetro teremos o km^2 , entre outras que são utilizadas quando forem convenientes para a figura que se deseja medir. Nesse sentido, a área de uma superfície exprime quantas vezes essa superfície contém a unidade de área utilizada.

> Suponha que queiramos mediar a região do plano que está indicado por F. Para isso, precisamos comparar F com uma unidade de área. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes a região F contém a unidade de área comparada. Esse número assim obtido é a medida da área de F (Dante, 2005, p. 176).

De acordo com Leonardo (2020) se uma região poligonal é composta de n regiões poligonais justapostas (posto ao lado, junto, unido), então sua área é igual à soma das áreas das n regiões. Observe o exemplo abaixo:

Figura 2 - Cinco regiões poligonais justapostas



Fonte: O autor

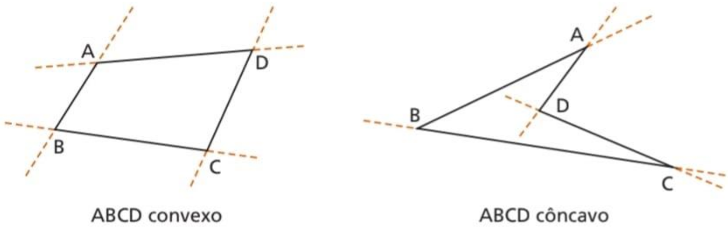
Se considerarmos u^2 como unidade de área, no exemplo acima podemos concluir que a área da região poligonal é igual a $5\,u^2$. Veremos agora esse raciocínio para obter a área de algumas superfícies quadrangulares e triangulares.

3.2.3 Área e perímetro de uma superfície quadrada

Antes de apresentar a definição dos quadriláteros notáveis (quadrado, retângulo, losango, trapézio e paralelogramo) e o processo de raciocínio para obtenção das suas áreas e perímetros, apresentaremos a definição de quadrilátero.

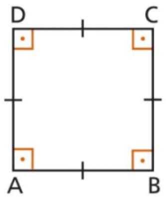
Definição 1: *Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD},$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero.*

Figura 3 - Representação de um quadrilátero



Fonte: (Dolce, 2013, p. 96)

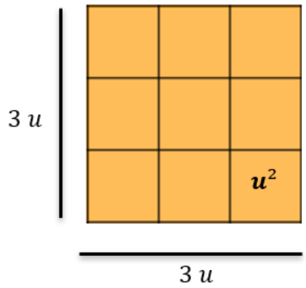
Definição 2: *O quadrado é um quadrilátero plano convexo que possui quatro ângulos internos retos congruentes e os quadros lados congruentes.*



$$ABCD \text{ é } um\ quadrado\ \leftrightarrow (\widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C} \equiv \widehat{D} = 90° \; e\; \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$$

Tomaremos como unidade de área o quadrado unitário de medida u^2. Considere uma superfície quadrada R, com lados medindo $3u$ conforme a Figura abaixo.

Figura 4 - Superfície quadrada R de lado 3u

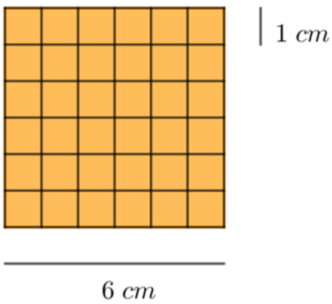


Fonte: O autor

Sendo l o lado do quadrado, a área de R pode ser determinada por $l^2 = (3)^2 = 9$, resultando em $9\,u^2$. Note que a superfície R pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas com área unitária, todas congruentes. Nesse exemplo, consideramos o lado cuja medida é indicada por um número natural. No entanto, a relação é válida para qualquer valor real de l (racional ou irracional).

Utilizando o mesmo raciocínio, considere agora uma superfície quadrada Q cujo lado mede 6 unidades de comprimento, sendo o quadrado unitário com lados medindo $1\,cm$ e unidade de área igual a $1\,cm^2$ conforme a Figura 5.

Figura 5 - Quadrado Q de lado 6 cm



Fonte: Adaptado de Lima et al (2006, p. 82)

Podemos concluir que de acordo com a Figura 5 o quadrado Q de lado 6 cm, pode ser decomposto em $6^2 = 36$ regiões quadradas unitárias. Logo, sua área pode ser representada por $36\ cm^2$. Nesse sentido, a área de uma superfície quadrada R cujo lado mede l é dada por:

$$\boxed{Área\ de\ R = l^2}$$

O perímetro de uma superfície quadrada R, cujo lado mede l é obtido pela soma das medidas de comprimento dos quatro lados da superfície quadrada.

$$\boxed{\begin{array}{l} Perímetro\ de\ R = l + l + l + l \\ Perímetro\ de\ R = 4l \end{array}}$$

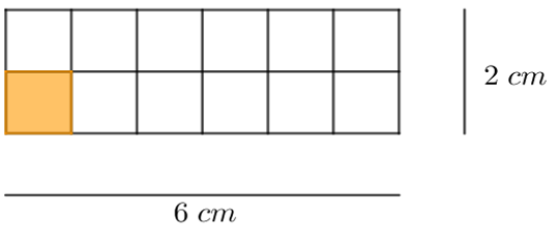
3.2.4 Área e perímetro de uma superfície retangular

Definição 2: *O retângulo é um quadrilátero plano convexo que possui os quatro ângulos internos retos congruentes.*

$$ABCD \text{ é } um\ retângulo \leftrightarrow (\widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C} \equiv \widehat{D} = 90°)$$

Quando desejamos calcular a área delimitada por uma superfície retangular cujos lados medem 6 cm e 2 cm conforme a Figura 6, utilizamos o raciocínio apresentado na seção anterior onde consideramos um  de lado 1 cm com unidade de área dada em cm^2.

Figura 6 - Retângulo dividido em 12 regiões poligonais justapostas



Fonte: Adaptado de Lima et al (2006, p. 8)

Nesse caso, observando a superfície retangular podemos notar que ela foi dividida em 12 regiões com a mesma medida. Portanto, a unidade de área cabe 12 vezes no retângulo da

Figura 6 e, por isso, sua área é de 12 centímetros quadrados (12 cm^2). Esse resultado é obtido pelo produto da quantidade de quadrados de lado 1 cm de uma coluna (comprimento) pela quantidade de quadrados de lados 1 cm de uma linha (largura).

Fica claro então que se as medidas dos lados de uma superfície retangular são números reais a e b, a sua área é o produto desses números. Assim, podemos concluir que a área de uma superfície retangular R cujo a medida dos lados é a e b é dada por:

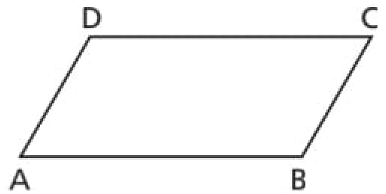
$$\boxed{Área\ de\ R = a.b}$$

O perímetro de uma superfície retangular R de lados a e b é obtido pela soma das medidas de comprimento dos quatro lados da superfície retangular.

$$Perímetro\ de\ R = a + a + b + b$$
$$Perímetro\ de\ R = 2a + 2b$$
$$Perímetro\ de\ R = 2(a + b)$$

3.2.5 Área e perímetro de uma superfície limitada por um paralelogramo.

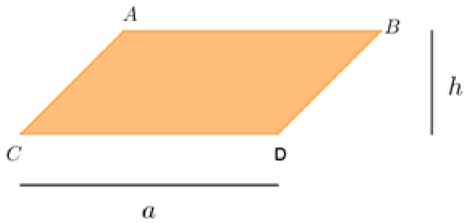
Definição 3: *O paralelogramo é um quadrilátero plano convexo que possui os lados opostos paralelos.*



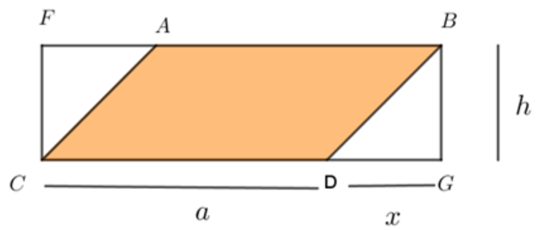
$$ABCD \text{ é } um\ paralelogramo\ \leftrightarrow (\overline{AB} // \overline{CD} // \overline{AD} // \overline{BC})$$

Conhecida a área de uma superfície retangular, é possível calcular a área de um paralelogramo não retângulo fazendo uma composição de um retângulo da seguinte maneira:

Considere o paralelogramo $ABCD$ a seguir com base $CD = a$ e altura h.



A figura a seguir mostra o retângulo $FBGC$, que contém o paralelogramo $ABCD$.



Seja $DG = x$, podemos concluir que a área do paralelogramo é igual a área do retângulo subtraída de dois triângulos congruentes ($BDG\ e\ ACF$) que, juntos formam um outro retângulo do seguinte modo:

Temos então: $\boldsymbol{S} = (a + x).h - x.h$

$$\boldsymbol{S} = a.h + x.h - x.h$$

$$\boldsymbol{S} = a.h$$

Logo a área de uma região R limitada por um paralelogramo não retângulo é dada pelo produto da base pela altura.

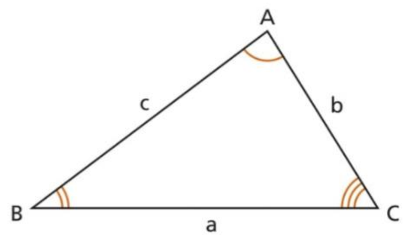
$$\boxed{Área\ de\ R = a.h}$$

O perímetro de uma região R limitada por um paralelogramo de lados $a\ e\ b$ é obtido pela soma das medidas de comprimento dos seus quatro lados:

$$Perímetro\ de\ R = a + a + b + b$$
$$Perímetro\ de\ R = 2a + 2b$$
$$Perímetro\ de\ R = 2(a + b)$$

3.2.6 Área e perímetro de uma superfície triangular

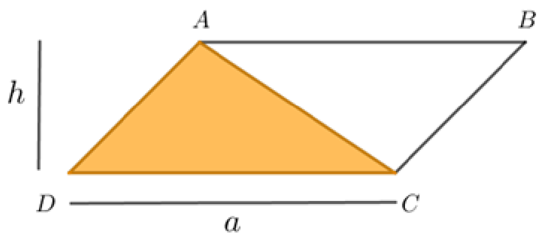
Definição 4: *O triângulo é a união de três segmentos de retas que se encontram na extremidade de três pontos não colineares.*



$$ABC \text{ é } um\ triângulo\ \leftrightarrow (\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC})$$

Podemos pensar na área do triângulo como metade da área de um paralelogramo, uma vez que se analisarmos com atenção, podemos decompor um paralelogramo em duas regiões triangulares e congruentes traçando uma de suas diagonais conforme a Figura 7.

Figura 7 - Decomposição de um paralelogramo em dois triângulos congruentes



Fonte: Adaptado de Lima et al (2006, p. 88)

Para obter a área do triângulo ADC destacado na figura, será fixado um lado para chamarmos de base. Seja então DC a base desse triângulo. Suponha que a base tenha comprimento a e que a altura relativa a essa base tenha comprimento h .

Observando a figura, é possível perceber que a área do triângulo ADC é a metade da área do paralelogramo $ABCD$.

Como apresentado anteriormente, a área de uma região R limitada por um paralelogramo é dada pelo produto da base pela altura ($Área\ de\ R = a.h$). Então a área de uma superfície triangular S é dada por:

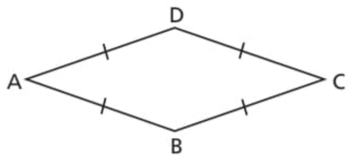
$$\boxed{Área\ de\ S = \frac{a.h}{2}}$$

O perímetro de uma região S limitada por um triângulo de lados L_1, L_2, L_3 é obtido pela soma das medidas de comprimento dos seus quatro lados:

$$\boxed{Perímetro\ de\ S = L_1 + L_2 + L_3}$$

3.2.7 Área e perímetro de uma superfície limitada por losango

Definição 5: *O losango é um quadrilátero plano convexo que possui os quatro lados congruentes.*

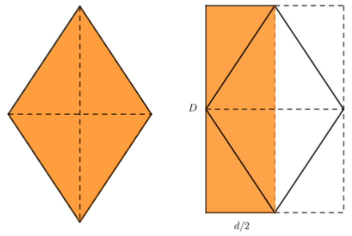


$$ABCD \text{ é } um\ losango \leftrightarrow (\ \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$$

Todo losango é um paralelogramo, logo a área da região limitada por ele pode ser calculada como o produto da base pela altura. Entretanto, em geral as dimensões de um losango são expressas pelas medidas de suas diagonais $D\ (diagonal\ maior)\ e\ d(diagonal\ menor)$.

Utilizando o raciocínio de decomposição e recomposição de figuras podemos perceber que a região limitada por um losango tem a mesma área de uma região retangular com altura $D\ e\ base\ \frac{d}{2}$ como mostram as figuras.

Figura 8 - Decomposição de um losango em um retângulo de mesma área



Fonte: Adaptado de Dante (2005, p. 180)

Dessa forma, a área de uma região R limitada por um losango é dada pela metade do produto das medidas das diagonais:

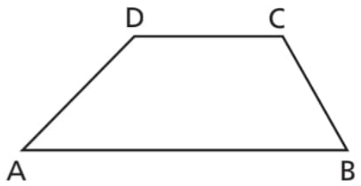
$$\boxed{\acute{A}rea\ de\ S = \frac{D.d}{2}}$$

O perímetro de uma região R limitada por um losango de lado l é obtido pela soma das medidas de comprimento dos seus quatro lados congruentes:

$$Perímetro\ de\ R = l + l + l + l$$
$$Perímetro\ de\ R = 4l$$

3.2.8 Área e perímetro de uma superfície trapezoidal

Definição 6: *O trapézio é um quadrilátero plano convexo que possui dois lados opostos paralelos.*

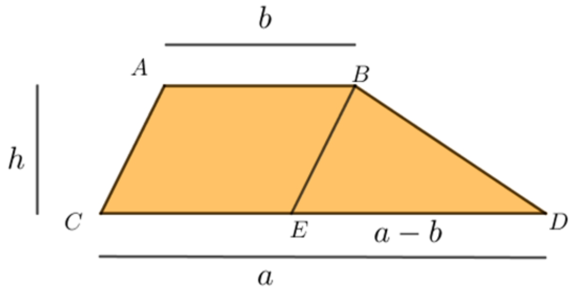


$$ABCD \text{ é } um\ trapézio \leftrightarrow (\overline{AB}\ //\ \overline{CD}\ ou\ \overline{AD}\ //\ \overline{BC})$$

Podemos decompor uma figura plana em regiões cujas áreas já sabemos calcular. A área dessa figura plana será a soma das áreas das regiões em que a figura foi decomposta.

Consideramos agora uma região S limitada pelo trapézio $ABCD$ com base maior $AB = a$, base menor $CD = b$ e altura h, como na Figura 8 a seguir. Vamos decompor a área da região S limitada por um trapézio traçado um segmento paralelo a um de seus lados.

Figura 9 - Região S limitada por um trapézio



Fonte: Adaptado de Lima et al (2006, p. 88)

Traçando o segmento BE paralelo a AC, o trapézio $ABCD$ ficou dividido no paralelogramo $ABEC$ de base b e altura h e no triângulo BDE de base $a - b$ e altura h. Somando estas áreas, encontramos:

$$b.h + \frac{(a - b).h}{2} = \frac{2.b.h + a.h - b.h}{2} = \frac{(a + b).h}{2}$$

Logo a área de uma região S limitada por um trapézio é dado pelo produto da base média[5] pela altura:

$$\boxed{Área\ de\ S = \frac{(a+b).h}{2}}$$

O perímetro de uma região S limitada por um trapézio de lados a , b , c, d é obtido pela soma das medidas de comprimento dos seus quatro lados:

$$\boxed{Perímetro\ de\ S = a + b + c + d}$$

3.2.9 Área de um polígono qualquer

Se conhecermos a área do triângulo, podemos calcular áreas de polígonos. Como sempre podemos dividir um polígono em triângulos, a área do polígono será a soma das áreas desses triângulos. Assim, é possível usar o raciocínio geométrico de decomposição e recomposição de figuras para chegar à identificação de área e perímetro de forma intuitiva como grandezas, ou seja, trabalhar esses conceitos sem a necessidade de defini-los por um valor numérico, mas sim como grandeza que permite comparar com outras conforme apresentado nos elementos históricos da geometria e como é recomendado pelos documentos oficiais norteadores da educação básica.

[5] Chamamos de base média de um trapézio ao segmento de reta que une as partes média dos lados opostos não-paralelos. Sua medida é a media aritmética das bases (LIMA et al., 2006, p.89)

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentado as teorias que sustentam os objetivos que esta pesquisa pretende alcançar. Para tanto serão apresentados os elementos da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) proposta por Vergnaud (1982) que estuda a conceitualização por meio de situações tarefas ligadas à estrutura cognitiva do indivíduo e que permite identificar as rupturas e filiações entre conceitos a partir da objetivação de representações operatórias. Na sequência apresentamos a Abordagem instrumental de Rabardel (1995) com foco no processo da gênese instrumental que permite analisar a utilização de artefatos tecnológicos como instrumento de aprendizagem, e a teoria da orquestração instrumental proposta por Trouche (2005) ampliada por Drijvers et al (2010) que visa criar um ambiente de aprendizagem que proporcione a gênese instrumental dos estudantes.

4.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi desenvolvida pelo matemático e pesquisador francês Gérard Vergnaud e seus colaboradores. É uma teoria cognitivista que tem como objetivo fornecer um quadro teórico para compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos a partir do seu conteúdo conceitual.

Moreira (2006) explica que o foco dessa teoria está no estudo do funcionamento cognitivo do sujeito-em-situação, isto é, a aquisição do conhecimento é moldada por situações e ações do sujeito nessas situações. Nesse sentido, o fundamento principal da TCC é a construção de conceitos, uma vez que de acordo com Vergnaud (2009), nessa teoria é possível identificar e analisar as conexões existentes entre conhecimentos conceituais, o que permite investigar as dificuldades dos estudantes em relação à aprendizagem e possibilita criar estratégias para que possam ser superadas.

Segundo Vergnaud (1982) o conhecimento se encontra organizado em campos conceituais e é construído através das situações e das representações mobilizadas pelos estudantes durante o processo de ensino e aprendizagem.

O autor para definir campo conceitual, levou em consideração o fato de que: [1] Um conceito necessita de mais do que uma situação para ser formado; [2] Uma situação não se analisa com um só conceito, ela envolve vários conceitos; [3] A construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo longo.

Com essas premissas, o autor define campo conceitual como sendo um conjunto de situações que compõe uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas, cujo domínio requer, por sua vez, o domínio de vários conceitos de naturezas distintas.

> Campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. Por exemplo, os conceitos de multiplicação, divisão, fração, razão, proporção, função linear, número racional, similaridade, espaço vetorial e análise dimensional pertencem todos a um grande campo conceitual que é o das estruturas multiplicativas. (Vergnaud, 1982, p.40)

Vergnaud (1989) considera o campo conceitual como uma unidade de estudo para dar sentido às dificuldades observadas na conceitualização do real e, como foi apresentado anteriormente, a TCC supõe que a conceitualização é a essência do desenvolvimento cognitivo, onde os sujeitos desenvolvem competências a partir das experiências individuais, das relações sociais e dos conhecimentos adquiridos ao longo do tempo.

Em relação às situações, o autor entende que a situação é uma tarefa, teórica ou empírica, a ser realizada pelo sujeito. Segundo Vergnaud:

> O conceito de situação não tem, aqui, o sentido de situação didática, mas antes o sentido de tarefa; a ideia é que qualquer situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldade próprias é importante conhecer. A dificuldade de uma tarefa não é, nem a soma, nem o produto das dificuldades das diferentes subtarefas, mas é claro que o fracasso numa subtarefa implica o fracasso global (Vergnaud, 1996, p. 167).

É através das situações que um conceito adquire sentido para o sujeito, uma vez que as situações envolvem conceitos e processos cognitivos de vários tipos que estão em estreita conexão, isto é, o sentido não está na situação em si, mas na maneira como o estudante lida com o conceito utilizado em ação naquele momento (Vergnaud, 1993).

Em relação aos conceitos, Vergnaud (1990) os considera como um tripé de três conjuntos interligados C = (S, I, R). Ele é um conjunto de situações S que estão associadas aos processos cognitivos e as respostas dos estudantes quando confrontados com as situações, sejam elas didáticas ou apenas episódios cotidianos, no qual para resolver essas situações o estudante precisa evocar conhecimentos e, todo conhecimento evocado é dominado por ele, tem-se então I. Já o R é toda forma de representar esse conhecimento evocado.

> C = (S, I, R)
> S: Conjunto das situações que dão sentido ao conceito
> I: Conjunto dos Invariantes operatórios que justificam a operacionalidade dos esquemas.
> R: Conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento. (Vergnaud, 1990, p.145)

Embora atribua importância aos conceitos, Vergnaud propõe que seja dada uma maior atenção à ação do sujeito diante de uma situação, uma vez que é na execução de tarefas que o estudante irá colocar em prática seus conhecimentos implícitos, irá organizar suas ações e expor o seu modo de resolução para o que lhe foi apresentado, seja este pertinente ou não, correto ou incorreto, isto é, quando ele mobiliza seus esquemas para resolver a situação proposta.

> O esquema é definido precisamente como a organização invariante da atividade para uma dada classe de situações. É nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos em ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória (Vergnaud, 1996, p.201).

Para Vergnaud (1993), um esquema está sempre associado a uma situação, uma vez que toda situação supõe uma produção do estudante. Logo, não existe situação sem esquema, tampouco esquema sem situação. Nessa perspectiva, o conceito de esquema é muito frutífero, não somente para descrever comportamentos familiares, mas também para descrever e compreender os processos de resolução de problemas.

Vergnaud ampliou e redirecionou a ideia de esquema proposto por Piaget na teoria do conhecimento, segundo ele:

> A teoria do conhecimento proposta por Piaget como processo de adaptação é essencial; mas o que é que se adapta e a quê? A resposta mais razoável até hoje é que o que se adapta são as formas de organização da atividade, os esquemas, e eles se adaptam às situações” (Vergnaud 2009, p.85, tradução nossa).

Assim, frente a uma determinada situação, o sujeito age segundo as representações que dela faz, sendo o esquema o elo entre as representações e a sua conduta. Nesse sentido, de acordo com Verganud (2009, p.88) os esquemas são recursos adaptáveis, eles assimilam novas situações acomodando-se a elas, o que permite ao sujeito descrever modos comuns de realizar situações já dominadas, quanto também oferecer a possibilidade de adaptação a novas situações.

Verganud (1998) afirma que os esquemas são formados por alguns elementos aos quais ele chamou de ingredientes do esquema composto por

1. **Metas e antecipações** (um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; pode também esperar certos efeitos ou certos eventos).

> 2. **Regras de ação** do tipo "se ... então" que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, aquela que permite a geração e a continuidade da sequência de ações do sujeito; são regras de busca de informação e controle dos resultados da ação;
> 3. **Invariantes operatórios** (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas; são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas;
> 4. **Possibilidades de inferência** (ou raciocínios) que permitem "calcular", "aqui e agora", as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação. (Vergnaud 1998, p. 173)

É nos esquemas que se deve procurar os conhecimentos-em-ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória. Dentre os elementos dos esquemas citados, daremos foco nos invariantes operatórios, visto que é através deles que será possível analisar e interpretar as respostas dos estudantes nas situações propostas.

Os invariantes operatórios de acordo com Vergnaud (1989) são constituídos pelos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação e atuam como guias no reconhecimento pelo sujeito dos elementos que lhe são pertinentes na situação, e nas escolhas dos conhecimentos a serem utilizados e que muitas vezes estão implícitos na ação, eles são os conhecimentos contidos nos esquemas.

É através deles que o estudante resolve uma situação e cria possibilidades de o educador interpretar e analisar seus esquemas mentais presentes nas suas produções decorrentes das situações propostas, bem como conceber novas perspectivas de mediação e intervenção pedagógica.

> A relação entre teoremas e conceitos é dialética, no sentido de que não há teorema sem conceito, nem conceito sem teorema. No entanto, a distinção é importante na teoria dos campos conceituais, porque é uma teoria do desenvolvimento: por exemplo, a análise de estruturas aditivas mostra que os conceitos de adição e subtração se desenvolvem ao longo do tempo, através de situações que exigem teoremas de níveis muito diferentes (Vergnaud 2009, p.88, tradução nossa).

Os conceitos-em-ação são os conceitos implícitos utilizados nos esquemas que se assumem pertinentes ou não na ação mobilizada pelo estudante. Eles possibilitam a identificação dos elementos importantes para resolver uma situação. Os conceitos-em-ação considerados como pertinentes são os que possibilitam o sujeito resolver o problema corretamente, pois tem ligação com o que se espera da situação.

Os conceitos-em-ação não pertinentes, embora sejam conceitos matemáticos, não são os que necessitam ser mobilizados pelo sujeito para resolver a situação proposta, considere a seguinte proposição: A área de uma figura plana equivale a medida da sua superfície. O que acabamos de enunciar é sempre verdadeiro na geometria plana, e os conceitos que poderão ser mobilizados nessa afirmação são os conceitos de área, figuras planas, equivalência e medida de superfície que nesse caso são conceitos-em-ação pertinentes.

Diferente dos conceitos-em-ação, os teoremas-em-ação podem ser verdadeiros ou falsos, eles são implícitos e são verdadeiros apenas para um conjunto de situações, ou seja, é uma proposição considerada como verdadeira pelo sujeito, porém pode ser falsa para o domínio da matemática.

De acordo com Vergnaud (1990) esse tipo de invariante é mobilizado de forma inconsciente, pois os alunos o utilizam quando enfrentam uma situação, mas não conseguem explicá-lo. Por exemplo, quando o estudante compara as áreas de duas figuras planas para inferir sobre seus perímetros, e afirma que as duas superfícies possuem mesma área, logo possuem mesmo perímetro ele está utilizando um teorema-em-ação falso, que é um invariante operatório, para justificar as operações realizadas ao resolver essa situação.

> Outro esclarecimento diz respeito à relação entre conceitos e teoremas: a ligação é tão intrincada que muitos pesquisadores tendem a confundi-los. A diferença é que um teorema pode ser verdadeiro ou falso, porque é uma sentença (ou uma proposição). Um conceito não é uma frase e, portanto, não pode ser verdadeiro ou falso, apenas relevante ou não relevante. Outro ponto importante é que alguém pode pensar que uma frase é verdadeira quando na verdade é falsa; ainda é um teorema em ação. Há pouca diferença, do ponto de vista da atividade, entre uma proposição verdadeira e uma falsa considerada verdadeira (Vergnaud 2009, p.88, tradução nossa).

Esse referencial da TCC apresentado por Vergnaud por lidar com a complexidade progressiva do conhecimento, é útil para ajudar os professores a organizarem situações e intervenções didáticas que favoreçam o processo de conceitualização dos estudantes acerca de determinado objeto de conhecimento. Nessa perspectiva, a presente pesquisa abordará o campo conceitual das grandezas geométricas.

De acordo com Douady e Perrin-Glorian (1989) esse campo conceitual é constituído pelo conceito de área, comprimento, perímetro, capacidade, volume, ângulo; as relações entre os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas; as fórmulas para o cálculo do perímetro, da área, do volume; etc.

Focaremos nos conceitos de área e perímetro presentes nesse campo, tendo em vista que são os conceitos definidos para o desenvolvimento da pesquisa dado a sua relevância pelos documentos oficiais PCNs e BNCC e as concepções apresentadas pelos estudantes encontradas na revisão de literatura.

4.1.1 O campo conceitual das grandezas geométricas

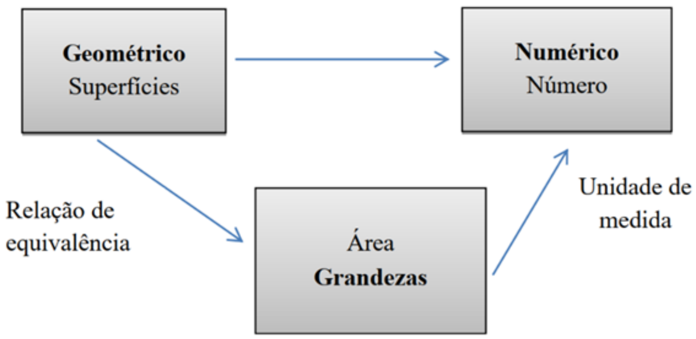
Na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1989), os conceitos de área e perímetro estão incluídos no Campo conceitual das Grandezas Geométricas. Sob essa perspectiva, concebemos área e perímetro como conceitos distintos que podem ser representados pela tríade C = (S, I, R), na qual: S (a referência) é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito de área e perímetro; I (o significado) é o conjunto de invariantes nos quais se assenta a operacionalidade dos esquemas, por meio dos quais se resolvem tarefas sobre área e perímetro; R (o significante) é o conjunto das formas que permitem representar a área e o perímetro e suas propriedades.

4.1.1.1 O conceito de área como grandeza

Com base nas concepções apresentadas pelos estudantes em sua pesquisa, Douady e Perrin- Glorian (1989) propõem um modelo dialético para a construção do conceito de área como grandeza ao qual articula a variedade de situações em três diferentes quadros[6].

O quadro geométrico, composto pelas superfícies planas (triângulos, quadriláteros etc.), o quadro numérico constituído pelas medidas das áreas, sendo números reais não negativos e o quadro das grandezas que é caracterizado pela relação de equivalência, isto é, uma superfície ter ou não a mesma área. A figura 10 apresenta uma diagramação desse modelo.

Figura 10 - Articulação entre os quadros geométricos, numéricos e das grandezas para o conceito de área.



Fonte: Bellemain e Lima (2002)

Segundo Bellemain e Lima (2002) a passagem do quadro geométrico para o das grandezas ocorre a partir da relação de equivalência em que superfícies diferentes podem

[6] Para as autoras, um quadro é constituído por objetos de um ramo da matemática, de suas formulações eventualmente diversas, das relações entre esses objetos, e das imagens mentais que o sujeito associa a um momento dado aos objetos e suas relações.

possuir a mesma área, permitindo a comparação entre elas (maior, menor ou igual). Já a passagem do quadro das grandezas para o numérico é realizada por meio de uma função área que atribui a cada área um valor no conjunto dos $\mathbb{R}_{+}^{*}$. De maneira informal, pode-se dizer que se trata de escolher uma unidade de medida e buscar resposta à questão: quantas vezes essa unidade 'cabe' na superfície? (Ferreira, 2018, p. 42).

Portanto, dependendo da unidade de medida escolhida, os números associados à área serão diferentes, onde é expressa pelos pares (número, unidade), que são as medidas da grandeza quando se toma certa unidade de área, podendo ser unidades de medidas padronizadas ou não. Dependendo da unidade de medida teremos diferentes pares, embora a grandeza área seja invariante em relação a sua superfície. Por exemplo, dada uma figura F, cuja área mede 8 cm^2, ela também pode ser expressa por 800 mm^2.

Considerando esses quadros, Douady e Perrin- Glorian (1989) afirmam que a construção do conceito de área como grandeza significa que figuras diferentes podem ter a mesma área, o que a torna independente em relação à sua superfície. Da mesma maneira, a área não é o número (medida), pois a adoção de diferentes unidades conduz à variação dos números, mas a área permanece invariante.

Nesse sentido, em uma determinada tarefa, ao decompor uma figura e recompor em outra diferente, sem perda nem sobreposição, o estudante pode compreender que esta nova figura possui área diferente da anterior, o que de acordo com Teoria dos Campos Conceituais, podemos interpretar como um teorema-em-ação falso, do tipo "superfícies de formas diferentes devem necessariamente ter áreas diferentes". Assim, o desenvolvimento do conceito de área enquanto grandeza permite aos estudantes estabelecerem as relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico.

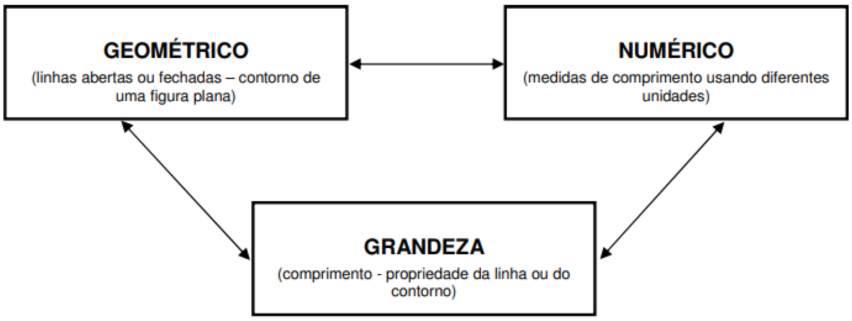
4.1.1.2 O conceito de comprimento como grandeza

Considerando simultaneamente o comprimento e a área, Perrot et al, (1998) explicam:

> O quadro geométrico, constituído pelas linhas e superfícies. O quadro das grandezas, comprimentos e áreas: com processos de comparação bem escolhidos, nem sempre numéricos, se pode realizar classes de equivalências de linhas, de superfícies; com processos operatórios adequados sobre linhas, superfícies, se pode induzir uma lei interna sobre as grandezas. O quadro numérico, consistindo nas medidas do comprimento das linhas e da área das superfícies, que pertencem ao conjunto de números reais não negativos: linhas ou superfícies pertencendo a mesma classe, tendo a mesma grandeza, têm também a mesma medida, qualquer que seja a unidade escolhida (Perrot et al, 1998, apud Teixeira, 2004, p.56).

Barbosa (2007) também apresenta uma diagramação do modelo dialético apresentado por Douady e Perrin-Glorian (1989) relativo ao comprimento conforme a figura 11.

Figura 11 - Articulação entre os quadros geométricos, numéricos e das grandezas para o conceito de comprimento.



Fonte: (Barbosa, 2007, p. 104)

De acordo com Santos (2019) esse esquema mostra alguns dos principais componentes para investigar o ensino e a aprendizagem de comprimento e perímetro.

> No quadro geométrico, estão as linhas abertas e as linhas fechadas (que são contornos de figuras planas). O comprimento é uma grandeza, uma propriedade das linhas (sejam elas linhas abertas ou contornos de figuras). Já o quadro numérico é composto das medidas de comprimento usando diferentes unidades. O objeto que permite passar do quadro das grandezas para o quadro numérico é a unidade de medida e o objeto que permite passar do quadro geométrico para o das grandezas é a relação de equivalência ter mesmo comprimento (Santos, 2019, p.28).

Para tanto, é importante a distinção e articulação desses quadros utilizando situações que dão sentido a esses conceitos. Além disso, como abordado anteriormente, é importante destacar que as situações utilizadas durante o processo de ensino-aprendizagem sejam diversas para que o estudante consiga interligar os conceitos envolvidos no conteúdo matemático estudado com outros conceitos e com isso gerar sentido sobre eles.

Nessa perspectiva, Gitirana et al. (2014) esclarecem que não basta o aluno realizar um cálculo numérico adequado, é preciso compreender e experimentar diferentes situações relacionadas ao conceito em questão, pois diferentes situações permitem ao aluno mobilizar raciocínios e esquemas diversos. Para isso, é preciso que o professor conheça diferentes classes de situações relacionadas a um determinado Campo Conceitual.

Em nossa pesquisa, estas situações se voltam para os conceitos de área e perímetro de figuras planas pertencentes ao Campo Conceitual das grandezas geométricas segundo o qual se dividem em situações de: comparação, medição, conversão de unidades e produção de superfícies.

4.1.2 Classe de Situações que dão sentido ao conceito de área e perímetro

Baltar (1996) ao considerar os quadros geométrico, numérico e das grandezas para a construção do conceito da grandeza área, ampliou o estudo realizado por Douady e Perrin-Glorian (1989) e propôs três tipos de situações que dão sentido a essa temática, denominadas por ele de comparação, medida e produção de superfícies, no qual entende-se que:

> As situações de comparação se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas. Quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. É claro que, com frequência, os quadros geométrico e numérico vão ser necessários para a resolução dos problemas de comparação, mas sua intervenção em geral é secundária com relação à do quadro das grandezas. Nas situações de medida, destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. O resultado esperado numa situação deste tipo é um número seguido de uma unidade. As situações de produção são diferentes das anteriores do ponto de vista da tarefa cognitiva do aluno. Enquanto nas situações de comparação e medida em geral há apenas uma resposta correta para cada situação, as situações de produção, frequentemente admitem várias respostas corretas. (Bellemain; Lima, 2002, p. 45).

A partir desse estudo, a pesquisadora brasileira Ferreira (2010) elaborou um quadro que resume a classificação de Baltar (1996) e incluiu nesse quadro mais um tipo de situação que ela denominou de mudança de unidade, a fim de complementar a proposta do autor.

Quadro 4 - Sistematização das situações que dão sentido ao conceito de área

<table>
<tr><td rowspan="13">SITUAÇÕES</td><td rowspan="5">COMPARAÇÃO</td><td rowspan="3">ESTÁTICAS</td><td colspan="2">Sem unidade de medida</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Com unidade de medida</td><td>Não-convencional</td></tr>
<tr><td>Convencional</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DINÂMICAS</td><td colspan="2">Variação da área e do perímetro por deformação ou transformação geométrica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otimização da área por invariância do perímetro e vice-versa</td></tr>
<tr><td rowspan="3">MEDIDA</td><td rowspan="2">EXATA</td><td colspan="2">Com unidade de medida não-convencional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Com unidade de medida convencional</td></tr>
<tr><td>ENQUADRAMENTO</td><td colspan="2">Aproximações</td></tr>
<tr><td rowspan="2">MUDANÇA DE UNIDADE</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Com unidade de medida</td><td>Não-convencional</td></tr>
<tr><td>Convencional</td></tr>
<tr><td rowspan="3">PRODUÇÃO</td><td rowspan="3"></td><td colspan="2">Mesma área que a de uma figura dada</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área maior ou menor que a de uma figura dada</td></tr>
<tr><td colspan="2">Com área dada</td></tr>
</table>

Fonte: Ferreira (2010, p. 29)

Serão descritas nas subseções seguintes, cada tipo de situação presente nesse quadro proposto por Baltar (1996) e Ferreira (2010) ao qual será situado o modelo dialético proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) que relaciona os três diferentes quadros: geométrico, numérico e o das grandezas em cada tipo de situação apresentada.

4.1.2.1 Situações de comparação

As situações de comparação estão situadas essencialmente no quadro das grandezas e tem como finalidade propor tarefas às quais o estudante possa comparar áreas e comprimentos, informado se são iguais, maiores ou menores.

Baltar (1996) subdivide as situações de comparação em Estáticas e Dinâmicas, ele considera como Estáticas aquelas situações em que as superfícies e o comprimento não são alterados com os procedimentos utilizados e, como Dinâmicas, aquelas em que há modificação das figuras e observa-se se essas modificações provocam ou não variação de área e de perímetro.

A) Situações Estáticas

As situações estáticas são situações em que as superfícies e o comprimento não se alteram diante dos procedimentos utilizados. Podem ser situações sem uma unidade de medida onde a finalidade é comparar por inclusão ou superposição as superfícies sem recorrer ao quadro numérico ou podem ser situações com unidades de medidas convencionais ou não-convencionais, nesse caso a finalidade é comparar numericamente a medida da área de uma superfície com outra onde a superfície com maior medida terá maior área e vice-versa, assim como o comprimento.

B) Situações Dinâmicas

As situações Dinâmicas são situações que estão relacionadas com o estudo das variações de área e perímetro ao longo de deformações, otimizações e transformações geométricas. Com relação às transformações geométricas, as situações devem evidenciar que as simetrias de rotação e a translação conservam a área.

Em relação às deformações, as situações devem envolver os conceitos de área e perímetro de um paralelogramo, situação central nas construções dos invariantes, que permitem conservar a área e o perímetro das superfícies usuais, e em particular, contribuem para a aquisição das fórmulas e a apropriação da dissociação das variações das áreas e dos perímetros, no caso particular dos paralelogramos. A otimização envolve todas as situações do tipo "achar a maior área para um perímetro fixo", por exemplo, dentro de um conjunto de superfícies

4.1.2.2 Situações de Medida

As situações de medida estão localizadas no quadro numérico e na passagem da grandeza ao número, por meio da escolha de uma unidade de medida.

A tarefa principal que o estudante tem a desempenhar é mediar áreas e comprimentos de diferentes maneiras, como por exemplo, realizando cálculos, estimativas ou utilizando instrumentos de medição. Essa classe de situações tem como objetivo a passagem do quadro das grandezas para o quadro numérico.

Baltar (1996) subdivide as situações de medida em Exatas e por Enquadramento, ele considera como exatas aquelas situações em que o resultado é expresso por um número seguido de uma unidade e, por Enquadramento, aquelas em que são expressas por uma aproximação.

A) Situações Exatas

As situações de medidas exatas são aquelas que para a escolha de uma unidade, é atribuído um número a área da superfície seja por ladrilhamento, adição e subtração das áreas ou pelo uso de fórmulas, podem ser com unidades de medidas convencionais ou não-convencionais. O resultado de uma situação desse tipo é um par (número, unidade de medida), ou seja, dada uma unidade de medida, procura-se o valor numérico que representa a medida da área nesta unidade.

B) Situações por Enquadramento

As situações de enquadramento são aquelas que o estudante obtém a área aproximada, geralmente é aplicada a área de uma superfície de borda irregular ou arredondada.

As situações de medida, estão localizadas em tarefas que em geral apresentam superfícies usuais, como quadrados, retângulos, triângulos, paralelogramos etc. São atividades que podem ser muito diversificadas em função de certas variáveis tais como: presença da figura ou não, fórmula fornecida ou não, natureza dos dados numéricos, comprimentos marcados na figura ou só dados no enunciado, tornando-as mais complexas.

Baltar (1996) sugere que as situações de medida sejam reagrupadas, o que é adotado no nosso trabalho, com a introdução da situação de mudança de unidade.

4.1.2.3 Situações de Mudança de Unidade

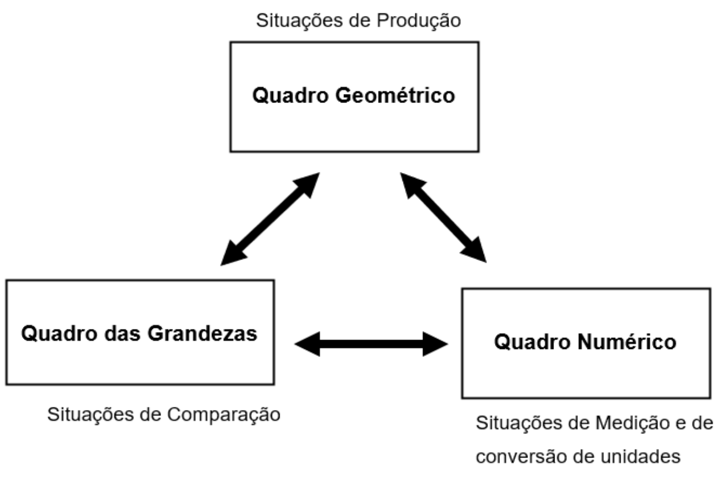
As situações de mudança de unidade estão mais localizadas no quadro numérico e, por vezes, com ausência do quadro geométrico. Essa classe de situações tem como finalidade representar uma mesma área ou comprimento com unidades de medida diferentes, podendo ser com unidades de medidas convencionais ou não-convencionais, por exemplo, já que 1 centímetro é igual a 10 milímetros, um centímetro quadrado é igual a 10 milímetros quadrados.

4.1.2.4 Situações de Produção

As situações de produção estão localizadas no quadro geométrico e estão divididas em: produção de superfícies de mesma área que a de uma figura dada, produção de superfícies de área maior ou menor que a de uma figura dada e produção de superfícies a partir de uma área dada. No primeiro e segundo casos temos procedimentos semelhantes uma vez que é dada a superfície, restando apenas a produção de outra que possua área igual, maior ou menor.

No terceiro caso dá-se a área para que se produza uma superfície que tenha área igual à dada. Esse tipo de situação se diferencia das anteriores por admitir várias respostas corretas. Abaixo apresentamos a articulação entre os quadros e as situações que dão sentido ao conceito de área e perímetro conforme a figura 12.

Figura 12 - Articulação entre quadros e situações que dão sentido ao conceito



Fonte: Adaptado de Bellemain e Lima (2002)

Dessa maneira, distinguir a área de uma superfície da sua forma consiste em considerar que duas superfícies de formas diferentes podem ter uma mesma área e distinguir a área do número, consistente em entender que uma mesma superfície pode corresponder a números diferentes associados às unidades de medida escolhidas, sem modificar a sua área. Isso vale para a distinção entre perímetro e contorno como sendo o comprimento de uma curva fechada.

Nessa perspectiva, a realização das situações matemáticas com a utilização de materiais manipuláveis apresentam uma possibilidade para um maior envolvimento do estudante na sua própria aprendizagem, já que mediante uma situação estarão testando, errando, reformulando e ampliando seus esquemas de utilização.

4.2 A ABORDAGEM INSTRUMENTAL

A Abordagem Instrumental foi desenvolvida pelo pesquisador francês Pierre Rabardel (1995) tendo por base teórica a Abordagem Sócio-histórica de Vygotsky, a Teoria da Atividade de Leontiev e a Epistemologia genética de Jean Piaget.

De acordo com Abar e Alencar (2013) essa abordagem é oriunda de trabalhos e pesquisas cognitivistas que estudam os processos mentais e como esses processos atuam nas interações entre seres humanos e outros sistemas. Ela é utilizada nas pesquisas e trabalhos como aporte teórico que ajuda a analisar a utilização de ferramentas tecnológicas e suas potencialidades no processo de ensino-aprendizagem por meio da relação do sujeito (estudantes, pesquisador e/ou professor) com os objetos de saberes.

Segundo Henriques (2021) a Abordagem Instrumental parte da ideia de que uma ferramenta ou material manipulável, também entendida nesta abordagem como artefato, não é automaticamente um instrumento eficaz e prático, ela precisa ter um significado para quem o utiliza.

Uma chave de fenda, por exemplo, é um objeto ou ferramenta sem significado, salvo quando se tem algo apropriado para apertar ou afrouxar, transformando-o assim em um instrumento útil (Henriques, 2021, p.255). Nesse aspecto, o autor afirma que alguns artefatos são mais apropriados do que outros, dependendo do tipo de situação que se propõe utilizá-los.

Há três elementos centrais existentes que se relacionam nessa abordagem: o sujeito, o artefato e os objetos de conhecimentos. De acordo com Rabardel (1995), sujeito é o indivíduo ou grupo de indivíduos que desenvolve a ação, é (são) escolhido (os) para o estudo; artefato é um objeto que é usado como meio na ação pelo sujeito, podendo ser um objeto material ou simbólico e os objetos de saberes são os conteúdos para o qual a ação do sujeito é dirigida.

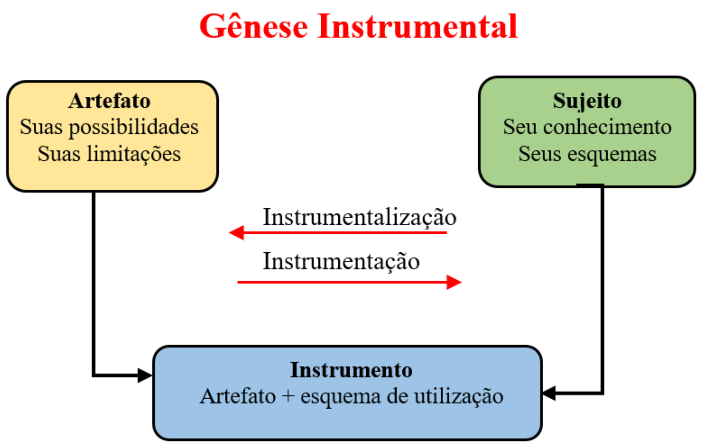
A abordagem instrumental propõe um modelo de aprendizagem instrumentado pela matemática que se apoia fundamentalmente na dialética artefato-instrumento, isto é, o interesse de Rabardel na sua abordagem é a transformação de um artefato em um instrumento. Mas para que um artefato se torne um instrumento para o sujeito, é necessário a mobilização das características do artefato em conformidade com as atividades cognitivas do sujeito. Essa reflexão se inscreve em um processo complexo que Rabardel (1995) denomina gênese instrumental.

4.2.1 A gênese Instrumental

A gênese instrumental é um processo de aprendizagem no qual uma ferramenta ou artefato torna-se progressivamente um instrumento. De acordo com Rabardel (1995) a gênese instrumental é um processo complexo que está aliado às características de um artefato (suas potencialidades e suas limitações) e às atividades do sujeito (suas competências cognitivas, seus conhecimentos, experiências anteriores e habilidades) diante de uma situação.

Esse processo é composto por duas dimensões que Rabardel (1995) denomina de instrumentação e instrumentalização que relacionam 3 polos: Os artefatos, os sujeitos e os esquemas de utilização que participam no surgimento do instrumento (Béguin; Rabardel, 2000).

Figura 13 - Esquema da gênese instrumental



Fonte: Elaborado pelos autores (2022)

Em relação aos artefatos, podemos defini-los como um produto da construção humana que se caracteriza por suas potencialidades e suas limitações aos quais o sujeito não agregou nenhum esquema de utilização, isto é, para Rabardel (1995) o artefato designa o objeto ou ferramenta de forma "neutra", sem o conhecimento de utilização ou sem a especificação de determinado tipo de função do objeto.

Um artefato pode ser um objeto físico/material (calculadora, ábaco, material dourado, Geoplano, Tangram, Malha quadriculada etc.) ou um objeto abstrato/simbólico (equações, fórmulas, funções, propriedades matemáticas etc.) que são utilizados como um meio na ação. Esses artefatos são disponibilizados aos sujeitos para que possam através de uma situação proposta construírem conhecimento acerca de algum objeto de conhecimento.

> O artefato está conectado ao uso que o sujeito faz como meio para sua ação e que pode ser considerado como uma máquina, um objeto técnico, objetos e sistemas simbólicos, ou seja, que pode ser definido como material (um lápis, um computador ou um martelo) ou simbólico (um gráfico, um método ou uma propriedade) (Rabardel, 2011, p. 49)

Segundo Rabardel (2002) as duas dimensões da gênese instrumental, instrumentação e instrumentalização são complementares e fundamentais no processo de transformação de um artefato em um instrumento. Elas se diferenciam quanto a sua orientação, isto é, a instrumentalização é voltada para o artefato e a instrumentação é voltada para o sujeito e ambas evoluem segundo as situações nas quais a ação do sujeito é envolvida.

De acordo com Rabardel (1995) a instrumentalização ocorre quando o sujeito insere o artefato em sua prática na intenção de conhecer suas potencialidades e limitações a partir do momento que explora suas funções e propriedades. Já a instrumentação, refere-se à construção de esquemas de uso pelo sujeito, em relação à execução de determinadas tarefas. É nessa dimensão que o sujeito dá origem a um instrumento.

> A instrumentalização ocorre quando o sujeito insere o artefato em sua prática na intenção de conhecer suas propriedades, sua interface e funcionalidades, desenvolvendo assim esquemas de uso. No entanto, quando o indivíduo atribui funções aos artefatos, os esquemas de ação instrumentada ou esquemas mentais evoluem, dando origem às novas formas de utilização do artefato, surge então o instrumento. Quando isto ocorre, tem-se o processo de instrumentação do sujeito que passa a integrar de fato o instrumento à sua prática. (Rabardel,1995, p.93, tradução nossa).

Nesse sentido, e com base no conceito de artefato, o instrumento é definido como:

> O instrumento consiste do artefato acrescido de um ou vários esquemas de utilização desse artefato, esquemas esses construídos pelo sujeito. [...] Um instrumento não existe "por si só"; o artefato se transforma em um instrumento para um determinado sujeito quando este o incorpora às suas atividades (Bittar, 2011, p. 160).

Para Rabardel (1995) o instrumento é uma entidade mista, composta por um artefato e pelos esquemas desenvolvidos pelo sujeito para a utilização desse artefato em uma dada tarefa.

E o resultado desse processo é denominado gênese instrumental e ocorre pela atribuição de um ou mais esquemas de utilização ao artefato, podendo ser representado pela seguinte relação: *Instrumento = artefato + esquema de utilização*.

Esse termo surge para designar o artefato em situação de uso. Nesse momento, o artefato não é mais um objeto "neutro", sem função para o sujeito, mas uma ferramenta tecnológica com funções que são carregadas de significados pelo sujeito. Desse modo, um instrumento pode ser qualquer artefato e os esquemas de utilização associados a ele, que são resultados de uma construção do próprio sujeito ou de uma apropriação de esquemas de utilização já existentes para executar uma dada tarefa.

Assim, quando um sujeito utiliza um artefato e é capaz de compreender seu funcionamento, e dele pode atingir seus objetivos de atividade, ele deu origem a um instrumento. Logo, o instrumento não é algo dado, ele é construído pelo sujeito tornando-se um meio de ação atender às suas necessidades.

Quanto aos esquemas de utilização mobilizados durante a ação pelo sujeito, Rabardel (1995) utiliza o mesmo conceito apresentado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

> O esquema é definido precisamente como a organização invariante da atividade para uma dada classe de situações. É nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos em ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória (Vergnaud, 1996, p.11).

Esses esquemas de utilização são classificados por Rabardel (2011) em três categorias: Esquema de uso, Esquema de ação instrumentada e Esquema de atividade coletiva instrumentada.

De acordo com Henriques (2021) o esquema de uso é um esquema relacionado ao funcionamento e manipulação das características e propriedades específicas do artefato, como: Localizar um software no computador ou pela internet, como o caso do Geogebra online.

O esquema de ação instrumentada é um esquema orientado ao objeto da atividade, eles incorporam os esquemas de uso correspondentes às atividades para as quais o artefato é um meio de realização, como: Utilizar o software Geogebra para construir dois segmentos dados quatro pontos distintos A, B, C e D não colineares, nessa ordem.

A última categoria, Esquema de atividade coletiva instrumentada, segundo Ibidem (2014) apud Henriques (2021), corresponde à utilização simultânea ou conjunta de um instrumento em um contexto de atividades compartilhadas ou coletivas para atender aos objetivos comuns. Assim, o coletivo trabalha com um instrumento, fazendo com que os esquemas de utilização possuam uma dimensão privada e outra social, de modo que várias pessoas possam trabalhar simultaneamente com o mesmo artefato.

Essas categorias de esquemas de acordo com Rabardel fazem referência a duas dimensões de uma dada tarefa.

> As atividades relacionadas com as tarefas secundárias, ou seja, a gestão das características e propriedades particulares do artefato, e as atividades primárias (principais), as que estão orientadas ao objeto da atividade em que o artefato é um meio de realização (Rabardel, 2011, p.171, tradução nossa).

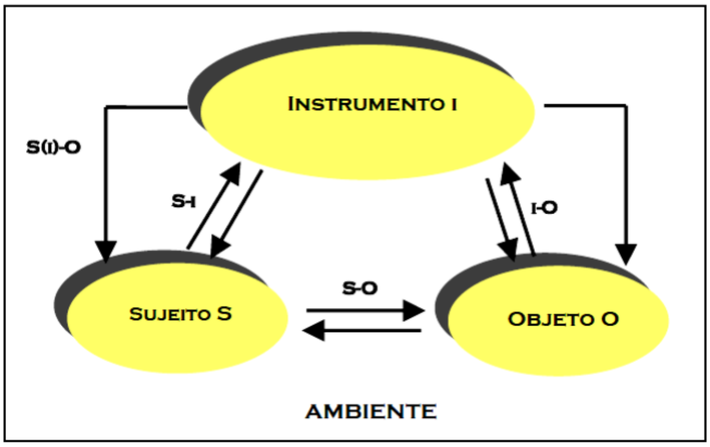
À medida que se utiliza um instrumento, novas necessidades e obstáculos fazem surgir novos esquemas de uso, formulados pelo sujeito, fazendo com que um instrumento possa ser elaborado e reelaborado por ele ao longo das tarefas realizadas com o artefato. À medida que o sujeito continua a manipular o instrumento, vai construindo novos esquemas que vão transformando o instrumento. Estes esquemas são modificados pelo sujeito de acordo com suas necessidades (Bittar, 2011, p. 161).

Nesse sentido, os pressupostos teóricos da gênese instrumental contribuem com um ensino mais consciente e permite a análise da integração das tecnologias em determinado ambiente de aprendizagem, uma vez que é de interesse comum no ensino de Ciências e Matemática a realização de análises das práticas realizadas mediante a utilização de recursos tecnológicos onde os sujeitos realizam atividades mediadas por instrumentos. Nesta perspectiva, Rabardel (1995) propõe o modelo denominado Situações de Atividades Instrumentais (SAI) apresentado na próxima seção.

4.2.2 O modelo SAI

O modelo SAI é uma ferramenta para analisar as situações utilizadas nas pesquisas com a Abordagem Instrumental, tornando explícitas as possíveis relações existentes entre três polos: o sujeito, o instrumento e o objeto. Esse modelo é centrado na relação do sujeito com o objeto do saber por mediação do instrumento construído ou em processo de construção em uma gênese instrumental.

Figura 14 - Modelo de Situações de Atividades Instrumentais



Fonte: (Rabardel, 1995, p. 65).

De acordo com Rabardel (1995), no polo sujeito se encontra todos os indivíduos escolhidos para o estudo com seus esquemas para pensar e agir sobre os objetos, apoiados pelos instrumentos. O polo instrumento é composto pelo artefato e da subjetividade de seus criadores, isto é, da mobilização dos esquemas de utilização sobre o objeto em estudo. E o polo objeto representa a finalidade que a ação é exercida, onde é necessário o instrumento como meio para o sujeito.

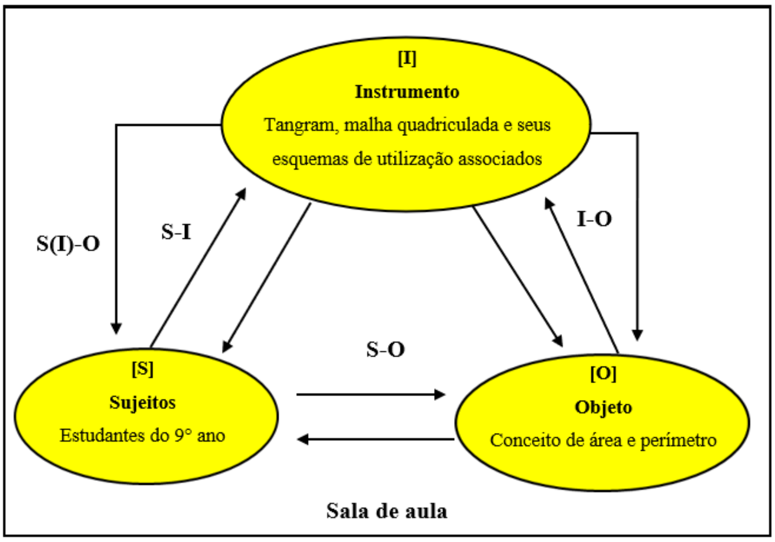
Este modelo representado na Figura 16 demonstra todas as relações possíveis que se estabelecem entre o sujeito, o instrumento e o objeto de estudo durante a realização de uma dada tarefa: [S-I], [I-S], [S-O], [O-S], [I-O], [O-I], [O-(I)-S] e [S-(I)-O], onde [S-I] Sujeito e Instrumento; [S-O] Sujeito e Objeto; [O-I] Objeto e Instrumento e [S-(I)-O] Sujeito, Instrumento e Objeto. Além disso, tudo é jogado em um ambiente composto de todas as condições que o sujeito deve levar em consideração em sua atividade finalizada denominado campo instrumental (Rabardel, 1995, p. 52).

> [1] a interação usual entre o sujeito e objeto representada por **[S-O]**, que podemos considerar como a relação emergente mediante a utilização direta das técnicas tradicionais do ambiente papel/lápis ou de um ambiente digital no acesso a um dado objeto **O** do saber institucional, munido de uma organização praxeológica.
> [2] A interação entre o sujeito e o instrumento denotada por **[S-i]**, orientada à constituição de esquemas de utilização, sendo coberta pela dimensão de instrumentação da gênese instrumental. Nessa dimensão o sujeito adapta o seu problema ou tarefa aos recursos do artefato.
> [3] A interação entre o instrumento e objeto representada por **[i-O]**, coberta pela dimensão de instrumentalização da gênese instrumental. O sujeito atribui ao instrumento uma possibilidade de agir sobre o objeto **O** em jogo, e constrói as propriedades funcionais que permitem a realização desta possibilidade de ação.
> [4] A interação entre o sujeito e objeto, por mediação do instrumento **[S(i)-O]**. (Henriques, 2021, p.260)

Nesse sentido, buscamos utilizar este modelo na presente pesquisa sob essa perspectiva teórica onde organizamos o nosso modelo SAI, figura 17, com os três polos definidos da seguinte maneira:

- **Sujeito (S):** Estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental;
- **Instrumento (I):** Uso do tangram e da malha quadriculada;
- **Objeto de estudo (O):** conceitos de área e perímetro de figuras planas como grandezas geométricas;
- **Ambiente:** Sala de aula

Figura 15 - Modelo SAI adaptado para nossa pesquisa



Fonte: O autor

De acordo com Henriques (2021) a mobilização de saberes por instrumentação e instrumentalização, permite descrever a forma pelo qual o instrumento influencia na constituição da relação do sujeito com esse objeto [S-O].

Essa relação imersa nas dimensões (instrumentação e instrumentalização), passa a denotar-se por [S(i)-O], e deve aparecer em todas as situações instrumentais propostas no ensino. Por isso, o instrumento não pode ser considerado neutro nessa relação uma vez que carrega uma multiplicidade de significados atribuídos pelo sujeito a partir do momento em que o integra em sua prática.

Apesar desse modelo permitir a análise da integração das tecnologias em determinado ambiente de aprendizagem, Bellemain e Trouche (2019) observaram que, assim como todo modelo, ele apresenta algumas limitações que estão presentes no seu desenvolvimento.

Segundo os autores, a dinâmica da abordagem instrumental leva em consideração as gêneses instrumentais dos estudantes, mas não define o papel do professor nesse processo.

> Desde que começamos a observar, na sala de aula de matemática, os artefatos à disposição dos estudantes, e mais amplamente, os artefatos presentes em sala de aula, percebemos uma lacuna conceitual. O professor, para atender seus objetivos de aprendizagem, dispõe de situações matemáticas (exercícios, problemas) e de artefatos (calculadoras, *softwares*, compassos, réguas, etc.), mas lhe falta, em geral, meios de integrar esses artefatos para executar situações matemáticas na sala de aula (Bellemain e Trouche, 2019, p.110).

Segundo Bellemain e Trouche (2019) os pressupostos teóricos da Abordagem Instrumental têm conduzido naturalmente a uma reflexão sobre o papel do professor, não como um participante da orquestra, mas como um maestro de uma orquestra, responsável pelo conjunto de instrumentos da classe. "A classe é, então, vista como uma orquestra tocando uma partitura matemática" (Bellemain e Trouche, 2019, p.110).

Pensar o professor como um maestro de uma orquestração significa atribuir-lhe um conjunto de tarefas. A partir deste questionamento, Trouche propôs a Teoria da Orquestração Instrumental (OI) ampliada posteriormente por Drijvers et al (2010) que visa fornecer subsídios para uma sequência didática pautada em um modelo de ensino eficaz no processo de ensino-aprendizagem e que contorna a lacuna identificada por Bellemain e Trouche (2019) acerca da Abordagem Instrumental.

4.3 TEORIA DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL

Com o uso da metáfora da orquestração instrumental, Trouche (2005) compara a sala de aula a uma orquestra, onde o professor é um maestro. Uma orquestra pode ser entendida como um agrupamento instrumental composto por maestros, instrumentistas, instrumentos e partituras, todos dispostos em um espaço com a finalidade de executar uma música.

> Uma orquestração instrumental é o arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente, realizado por um agente (professor) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar os aprendizes nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos. É sistemático porque como método, desenvolve-se numa ordem definida e com um foco determinado, podendo ser entendido com um arranjo integrado a um sistema; é intencional porque uma orquestração não descreve um arranjo existente (sempre existe um), mas aponta para a necessidade de um pensamento a priori desse arranjo. (Trouche, 2005, p. 126, tradução nossa).

Uma Orquestração Instrumental (OI) é de acordo com Pontes (2022) um modelo teórico organizado e desenvolvido pelo professor para explorar uma dada situação em que ele organiza seus artefatos, a sala de aula, os estudantes e o tempo para executá-la. O intuito é "colocá-la em prática, pensada e esquematizada de acordo com os objetivos traçados pelo professor, para que toda uma organização seja delineada e o momento propicie a gênese instrumental do aluno" (Pontes, 2022, p.30).

Nesse sentido, a Teoria da orquestração instrumental com base na abordagem instrumental de Rabardel (1995) estuda e orienta o uso de artefatos para fins educacionais, por parte do professor e por parte do aluno. Uma OI refere-se, então, aos estudantes, aos artefatos e à situação matemática, bem como uma orquestração musical se refere aos músicos, aos instrumentos e a uma partitura musical.

Essa teoria busca modelar a ação docente em um ambiente rico em tecnologias que favoreça a gênese instrumental dos indivíduos e é organizada em três etapas: a configuração didática, o modo de execução e o desempenho didático. As duas primeiras foram caracterizadas por Trouche (2004) e a última por Drijvers et al (2010) onde ele apresenta a definição dessas etapas:

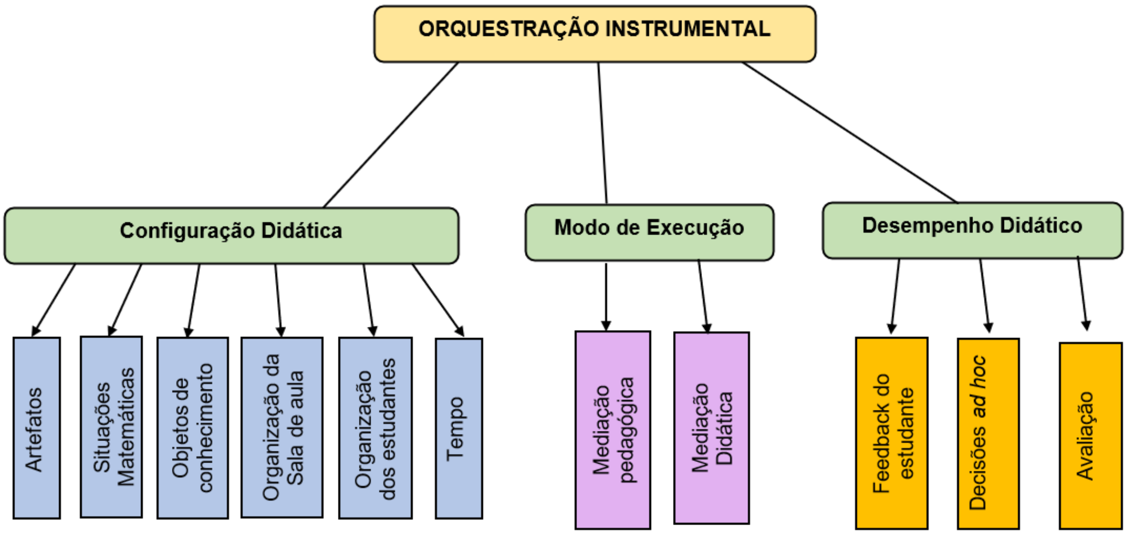
> 1. A configuração didática é a organização do ambiente de ensino e aprendizagem; é seleção dos artefatos a serem disponibilizados; é a elaboração da atividade; é a escolha das técnicas de trabalho para apreensão dos objetos matemáticos por meio das tecnologias e o papel destas neste processo
> 2. O modo de execução se refere à forma que a atividade deverá ser desenvolvida, quando e como cada artefato inserido no ambiente e cada participante, seja professor ou estudante, desempenharão seu papel visando aos benefícios das intenções didáticas.
> 3. O desempenho didático consiste no desempenho alcançado pelo cenário projetado, em que se faz possível verificar a viabilidade das intenções e o sucesso da realização da orquestração instrumental. Contemplam-se, também, aspectos relevantes que devem ser considerados na execução da atividade instrumentada, tais como as decisões ad hoc que devem ser tomadas diante de situações inesperadas que possam surgir numa orquestração, advindas da realização da atividade matemática ou do uso da tecnologia, por exemplo (Drijvers et al., 2010, p. 2015, tradução nossa).

Nesse sentido, podemos afirmar que a primeira etapa intitulada configuração didática, consiste na organização da sala de aula, na elaboração das situações matemáticas, na escolha dos artefatos que serão disponibilizados, na organização dos papéis a serem desenvolvidos por cada integrante do processo e no preestabelecimento do tempo.

A segunda etapa intitulada modo de execução consiste na execução da configuração didática desenvolvida previamente pelo professor, ela é a forma ao qual as atividades serão desenvolvidas durante o processo da OI foco na gênese instrumental dos estudantes. Ela prever "a atuação dos integrantes do processo de acordo com os seus respectivos papéis definidos na etapa anterior" (Pontes, 2022, p.31). Destacamos nesta etapa duas interações apresentadas por Lucena e Gitirana (2015): a primeira é a mediação pedagógica que diz respeito às orientações, o incentivo, os esclarecimentos dados aos estudantes e a segunda é a mediação didática que consiste, essencialmente, na estratégia adotada para tratar do conteúdo matemático.

A terceira e última etapa é o desempenho didático, que consiste na implementação dos processos descritos anteriormente, isto é, onde a OI é de fato colocada em prática e obtêm-se os resultados para a análise. Nessa etapa pode ocorrer situações inesperados onde o professor faz emergir as decisões que devem ser tomadas diante dessas situações, além de ser possível analisar se o desempenho da OI criada foi favorável ou não aos seus objetivos didáticos.

Figura 16 - Esquema das etapas de uma orquestração instrumental



Fonte: O autor

De acordo com Drijvers et al (2010) a Teoria da orquestração instrumental tem um grande potencial para colaborar com estudos que buscam investigar a ação docente em espaços ricos em tecnologias, e enfatizam a necessidade de se considerar a improvisação, a inexperiência presentes em sala de aula. Ela permite criar um meio para a aprendizagem, onde o sujeito se apropria da matemática usando diferentes dispositivos desta natureza, favorecendo o objetivo central da Orquestração Instrumental, quando criada por Trouche, ou seja, a gênese instrumental do sujeito (Lucena, Gitirana, Trouche, 2022).

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo é destinado a abordar os procedimentos metodológicos da pesquisa, no qual apresentamos a sua abordagem, seus instrumentos, descrevemos a escolha e o contexto dos participantes envolvidos e apresentamos os procedimentos de coleta e análise de dados.

5.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA DA PESQUISA

Quanto à abordagem, esta pesquisa é qualitativa uma vez que se busca mostrar a relevância de ensinar os conceitos de área e perímetro como grandezas geométricas utilizando artefatos conforme a abordagem instrumental de Rabardel.

Nesse sentido, ao propor a Orquestração instrumental como modelo teórico de aprendizagem a fim de favorecer a gênese instrumental dos estudantes e identificar seus invariantes operatórios na ação, a abordagem qualitativa se adequa para a compreensão dos fenômenos que esta pesquisa se propõe analisar, já que no campo cognitivo de acordo com Araujo (2003)é necessário um olhar não apenas para o objeto, mas também para o sujeito e toda complexidade cognitiva, afetiva, biológica e sociocultural que constitui sua natureza e influencia no seu modo de ser, pensar, agir e sentir. Desse modo

> A pesquisa qualitativa implica em uma relação mais próxima do pesquisador com o objeto de pesquisa em que há interação. Essa relação deve ser dialógica, reflexiva, de modo que seja possível entender o não visto, o não falado, o não explícito. Devido a essa interação, o pesquisador também é parte do que está sendo investigado. Na pesquisa qualitativa a interação é objetiva e descritiva do fenômeno (Borges, 2020, p.70).

Quanto aos objetivos, trata-se de uma pesquisa descritiva porque será realizada a descrição do fenômeno observado por meio da Orquestração instrumental. Esse tipo de pesquisa “tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis” (Gil, 2002, p.28).

Nesse sentido, de acordo com os objetivos propostos na dissertação, essa pesquisa possui uma abordagem qualitativa do tipo descritiva, uma vez que se busca analisar o aspecto subjetivo no conhecimento produzido, além de entender e interpretar dados e discursos, pois ela depende da relação observador-observado (Borba; Araújo, 2012).

Em relação aos procedimentos técnicos, podemos classificar a pesquisa como uma pesquisa-ação do qual segundo Sankaran (2001), a pesquisa-ação é uma estratégia de colaboração e aprendizagem em projetos individuais ou ações em equipes. De acordo com

Monceau (2005, p. 475), ela pode ser entendida como meio de formação e de mudança participativa. “É uma boa ferramenta para ser utilizada por professores para criar estratégias de melhoria de suas práticas docentes" (O'Connor; Greene; Anderson, 2006, p. 3).

Na sequência serão apresentados o contexto e os sujeitos da pesquisa, as técnicas, instrumentos, etapas e procedimentos de coleta e análise de dados.

5.2 CONTEXTO E PARTICIPANTES

A coleta de dados ocorreu na escola Cacilda Braule Pinto da rede pública de ensino localizada na zona leste da cidade de Manaus no estado do Amazonas. Os sujeitos da pesquisa foram vinte e três estudantes da turma do 9º ano 2 do ensino fundamental dessa escola com o intuito de responder à questão de pesquisa e atingir os objetivos propostos.

Os critérios de inclusão/exclusão dos sujeitos participantes da pesquisa foram: ser aluno do 9º ano do ensino fundamental anos finais da escola pública cujos pais ou responsáveis legais tenham assinado o TCLE autorizando-o a participar do estudo. E, foram excluídos do estudo aqueles cujos pais ou responsáveis não assinaram o TCLE os autorizando.

Este projeto de pesquisa foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal do Amazonas (CEP/UFAM) do qual seguiu todos as recomendações da resolução CNS 466/12. Assim, visando evitar danos à dimensão psíquica e/ou moral dos sujeitos, como: cansaço, aborrecimento, constrangimento, mal-estar ou desconforto em participar das atividades propostas da pesquisa (realização das situações matemáticas, observações e gravações) as identidades dos sujeitos foram preservadas e todos os registros audiovisuais e documentais foram restritos à pesquisa ficando vedada sua exposição para o público externo.

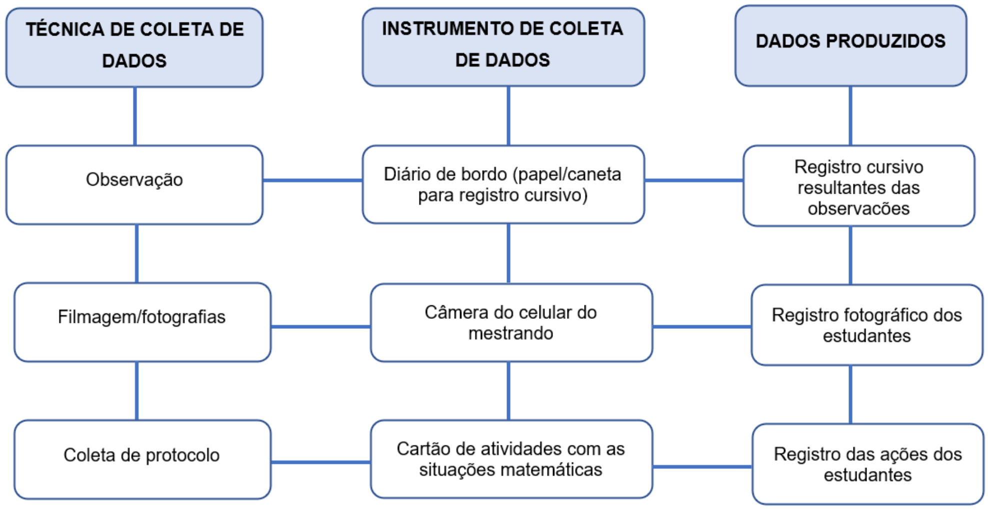
5.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE COLETAS DE DADOS DA PESQUISA

Para a coleta de dados da pesquisa foram utilizadas as seguintes técnicas: observação; filmagens, fotografias e protocolo com as situações matemáticas.

A coleta de dados se deu mediante a realização das situações propostas em cada orquestração Instrumental, uma vez que é a “execução da situação na orquestração que produz os dados e, ao mesmo tempo, possibilita sua coleta” (Couto, 2018, p. 136).

Nesse sentido, elaboramos um esquema de coleta de dados onde relacionamos cada técnica que será utilizada na pesquisa com os instrumentos de coleta correspondente conforme a Figura 19.

Figura 17 - Estrutura de coleta de dados da OI



Fonte: Adaptado de (Couto, 2018, p.136)

Na sequência serão descritas as etapas da pesquisa para a coleta e análise dos dados.

5.4 ETAPAS DE COLETA DE DADOS DA PESQUISA

Para organizar as ações de coleta de dados da pesquisa, dividimos o procedimento de coleta em duas etapas da seguinte maneira:

I) Avaliação a priori;
II) Aplicação de uma sequência de orquestrações instrumentais;

Serão descritas nas próximas seções cada etapa apresentada anteriormente, bem como os seus objetivos dentro do processo.

5.4.1 Elaboração e aplicação da Avaliação a priori.

A elaboração e aplicação da avaliação a priori constitui a primeira etapa de coleta de dados da pesquisa e teve como objetivo identificar a compreensão conceitual dos estudantes acerca dos conceitos de área e perímetro de figuras planas através da identificação dos invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) mobilizados por eles durante a resolução das situações matemáticas propostas na avaliação.

A avaliação a priori contêm perguntas direcionadas ao conhecimento de área e perímetro de superfícies planas contendo perguntas subjetivas sobre equivalência de áreas e comprimento, conservação e variação. O objetivo principal da aplicação dessa avaliação é identificar as dificuldades conceituais desses objetos de conhecimento apresentadas pelos estudantes levando em consideração as concepções encontradas na Revisão de Literatura. As questões utilizadas se encontram no APÊNDICE A.

5.4.2 Sequência de orquestrações instrumentais.

A elaboração e aplicação das orquestrações instrumentais constituiu a segunda etapa de coleta de dados da pesquisa e tem como objetivo identificar o processo da gênese instrumental dos estudantes mediante a realização das situações propostas em cada OI (orquestração instrumental).

Como apresentado na fundamentação teórica da pesquisa, uma orquestração instrumental está associada ao planejamento de uma dada situação e da vivência desta. Ela é um modelo teórico que permite favorecer o processo da gênese instrumental dos estudantes, uma vez que é na relação sujeito-artefato, observada nas tentativas de resolução da situação matemática, que os estudantes colocarão em evidência o processo da gênese instrumental.

Em relação as situações matemáticas utilizadas nas orquestrações instrumentais, utilizamos como base o quadro de situações proposto por Baltar (1996) e Ferreira (2010) descritas anteriormente no capitulo 4 seção 4.1.2 que trata da fundamentação teórica do trabalho.

A seguir estão apresentadas as orquestrações instrumentais que foram utilizadas na pesquisa. Foram divididas em: OI1, OI2, OI3 e OI4 e são direcionadas aos objetos de conhecimento área e perímetro de figuras planas podendo ser modificado para outros objetos. As duas primeiras orquestrações têm como objetivo identificar os processos de instrumentalização e instrumentação do artefato Tangram e as duas últimas tem como objetivo identificar o processo de instrumentalização e instrumentação do artefato malha quadriculada.

As situações propostas em cada encontro das OI foram pensadas a fim de proporcionar ao estudante a familiarização com os artefatos utilizados na pesquisa estas foram organizadas conforme as seções abaixo.

5.4.2.1 Orquestração instrumental 1 (OI1)

Situação		Instrumentalização do artefato Tangram
Configuração didática	Objetivos estabelecidos	Explorar e reconhecer as propriedades e potencialidades do artefato Tangram.
	Compreensões	Os alunos compreenderão que: o Tangram é um quebra-cabeça formado por 7 figuras geométricas planas distintas formadas pela decomposição de um quadrado em partes certas, a saber: 1 quadrado; 5 triângulos; 1 paralelogramo. É possível formar inúmeras figuras planas usando as peças do Tangram.
	Artefatos	Tangram e cartões de atividade (APÊNDICE B)
	Organização da sala de aula	A sala será arrumada em blocos circulares onde cada grupo ficará distribuído.
	Organização dos estudantes	As atividades serão desenvolvidas em grupos de cinco estudantes.
	Tempo	1 encontro de 50 minutos
Modo de execução	Mediação pedagógica	Entregar o Tangram e os cartões de atividades; mediar as interações dos grupos formados sempre que solicitado ou necessário; dar suporte diante de qualquer problema nos artefatos fornecido; incentivar; respeitar; dialogar; encerrar a OI e receber os artefatos disponibilizados.
	Mediação didática	Utilizar o artefato disponibilizado; mobilizar esquemas mentais, ideias e conceitos necessários para resolver colaborativamente as situações propostas, seguindo as instruções do cartão de atividade e as condições impostas pela situação.

5.4.2.2 Orquestração instrumental 2 (OI2)

Situação Matemática	**Situação 1:** Comparar áreas e comprimentos utilizando a noção de grandezas para verificar se pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência (se as superfícies e linhas propostas são iguais, maiores ou menores) e observar se os procedimentos utilizados provocam ou não variação de área e de perímetro. **Situação 2:** Produzir figuras de mesma área e perímetro que à de uma figura dada; de área e perímetro maior ou menor que à de uma figura dada e produzir superfícies a partir de uma área dada.
Classe de situação Matemática	Situações de comparação (estáticas e dinâmicas); Situações de produção (produção de superfícies de mesma área que a de uma figura dada, produção de superfícies de área maior ou menor que a de uma figura dada e produção de superfícies a partir de uma área dada);

Configuração didática	Objetivos estabelecidos	Transformar o artefato Tangram em um instrumento para resolver as situações matemáticas propostas.
	Compreensões	Os alunos compreenderão que: Superfícies diferentes podem ter a mesma área; a grandeza área é invariante em relação a sua superfície; a área de uma superfície se mantém se ela for decomposta e recomposta sem perda ou sobreposição; ao realizar uma decomposição e recomposição de figuras a área se matem e o perímetro pode ser alterado.
	Artefatos	Tangram: Será disponibilizado um para cada grupo para realizar a situação matemática.
	Protocolo de orientação	Trata-se de um cartão de atividades impresso (APÊNDICE C) com a discrição das situações matemáticas a ser resolvida, condições e orientações para resolvê-la.
	Organização da sala de aula	A sala será organizada em blocos circulares onde cada grupo ficará distribuído.
	Organização dos sujeitos	As atividades serão desenvolvidas em grupos de três estudantes.
	Objeto de conhecimento	Área e perímetro de figuras planas
	Tempo	2 encontros de 50 min
Modo de execução	Mediação pedagógica	Entregar o protocolo de orientação e o Tangram; mediar as interações dos grupos formados sempre que solicitado ou necessário; dar suporte diante de qualquer problema nos artefatos fornecido; incentivar; respeitar; dialogar; encerrar a OI e receber o protocolo com as fichas de situações e os artefatos disponibilizados.
	Mediação didática	Utilizar o artefato disponibilizado; mobilizar esquemas mentais, ideias e conceitos necessários para resolver colaborativamente as situações matemáticas propostas, seguindo as instruções do protocolo e as condições impostas pela situação; disposições internas que exercem uma mediação para o sujeito resolver as situações matemáticas e se apropriar do conhecimento;

5.4.2.3 Orquestração instrumental 3 (OI3)

Situação		Instrumentalização do artefato malha quadriculada
Configuração didática	Objetivos estabelecidos	Explorar e reconhecer a propriedade e potencialidades do artefato malha quadriculada.
	Compreensões	Os alunos compreenderão que: a malha quadriculada é um quadro com linhas e colunas que formam quadradinhos de mesma medida; é possível desenhar formas geométricas; cada quadradinho pintado corresponde a uma unidade de área da figura representada.
	Artefatos	Malha quadriculada e cartões de atividade (APÊNDICE D)

	Organização da sala de aula	A sala será arrumada em blocos circulares onde cada grupo ficará distribuído
	Organização dos estudantes	As atividades serão desenvolvidas em grupos de cinco estudantes.
	Tempo	1 encontro de 50 minutos
Modo de execução	Mediação pedagógica	Entregar a malha quadriculada e os cartões de atividades; mediar as interações dos grupos formados sempre que solicitado ou necessário; dar suporte diante de qualquer problema nos artefatos fornecido; incentivar; respeitar; dialogar; encerrar a OI e receber os artefatos disponibilizados.
	Mediação didática	Utilizar o artefato disponibilizado; mobilizar esquemas mentais, ideias e conceitos necessários para resolver colaborativamente as situações propostas, seguindo as instruções do cartão de atividade e as condições impostas pela situação.

5.4.2.4 Orquestração instrumental 4 (OI4)

Situação Matemática		**Situação 1:** mediar áreas e comprimentos de diferentes maneiras: realizando cálculos, estimativas ou utilizando instrumentos de medição. **Situação 2:** representar uma mesma área ou comprimento com unidades de medida diferentes, podendo ser com unidades de medidas convencionais ou não-convencionais.
Classe de situação Matemática		Situações de medida (exatas e por enquadramento); Situações de mudança de unidade.
Configuração didática	Objetivos estabelecidos	Transformar a malha quadriculada em um instrumento para resolver as situações matemáticas propostas.
	Compreensões	Os alunos compreenderão que: o perímetro é o comprimento do contorno de uma região; o comprimento é uma grandeza, uma propriedade das linhas (sejam elas linhas abertas ou contornos de figuras); dependendo do objeto a medir, é conveniente utilizar uma unidade de medida de comprimento; a área não é o número (medida), pois a adoção de diferentes unidades conduz à variação dos números, mas a área permanece invariante; diferentes contornos podem ter o mesmo comprimento.
	Artefatos	Malha quadriculada; será disponibilizado uma malha quadriculada para cada grupo para realizar a situação matemática.
	Protocolo de orientação	Trata-se de um cartão de atividades impresso (APÊNDICE E) com a discrição das situações matemáticas a ser resolvida, condições e orientações para resolvê-la.
	Organização da sala de aula	A sala será organizada em blocos circulares onde cada grupo ficará distribuído.
	Organização dos sujeitos	As atividades serão desenvolvidas em grupos de três estudantes.

	Objeto de conhecimento	Área e perímetro de figuras planas
	Tempo	2 encontros de 50 min
Modo de execução	Mediação pedagógica	Entregar o protocolo de orientação e a malha quadriculada; mediar as interações dos grupos formados sempre que solicitado ou necessário; dar suporte diante de qualquer problema nos artefatos fornecido; incentivar; respeitar; dialogar; encerrar a OI e receber o protocolo com as fichas de situações e os artefatos disponibilizados.
	Mediação didática	Utilizar o artefato disponibilizado; mobilizar esquemas mentais, ideias e conceitos necessários para resolver colaborativamente as situações matemáticas propostas, seguindo as instruções do protocolo e as condições impostas pela situação; disposições internas que exercem uma mediação para o sujeito resolver as situações matemáticas e se apropriar do conhecimento;

A organização da pesquisa nessas duas etapas atende o objetivo de investigar o processo da gênese instrumental nas situações que envolvem os conceitos de área e perímetro como grandezas geométricas como também em identificar os conhecimentos em ação mobilizados pelos estudantes durante a realização das OI.

Nesse sentido, de acordo com Bogdan e Biklen (1994) o conjunto de todas as etapas reforça o fato de que em uma investigação qualitativa não existe um único método ou instrumento de coleta de dados, pois cada estudo tem sua singularidade que torna um método (ou instrumento) mais vantajoso que outro.

5.5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

A análise dos dados da pesquisa se deu mediante à luz da teoria dos campos conceituais e do modelo SAI proposto por Rabardel. Desse modo, buscamos elementos para responder à questão de pesquisa: Como ocorre o processo da gênese instrumental dos estudantes do 9° ano na interação com os artefatos malha quadriculada e tangram em situações envolvendo os conceitos de área e perímetro de figuras planas como grandezas geométricas?

Para tanto, foram objetos de análise os esquemas mobilizados pelos estudantes durante a realização das situações tarefas requeridas nos cartões de atividades, o diálogo de ideias nos grupos formados, os eventos inesperados, as tomadas de decisões para garantir a ocorrência das OI e as ações coletivas dos estudantes. Foram analisadas as respostas por escrito dos estudantes nas fichas de atividades com as situações matemáticas propostas, as anotações feitas no diário de bordo durante a observação do fenômeno e as transcrições das gravações, mantendo integralmente as falas dos estudantes ao apresentá-las, assim como foram ditas, sem correções gramaticais. Uma vez obtido os esquemas mobilizados pelos estudantes durante a etapa de intervenção, utilizamos o modelo SAI para analisar e interpretar a etapas de instrumentação (S-I) e instrumentalização [S–(I)-O] do processo da gênese instrumental coletivo e a Teoria dos Campos conceituais para analisar os invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes durante esse processo.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A revisão de literatura acerca do conceito de área e perímetro de figuras planas proporcionou identificar as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes ao se trabalhar com esses conceitos em sala de aula. Desse modo, serão apresentados os resultados obtidos na execução do projeto afim de discutir os principais pressupostos das teorias e métodos utilizados para alcançar os objetivos deste trabalho. Para tanto, dividimos este capitulo em discussões acerca dos resultados obtidos na avaliação a priori e nas orquestrações instrumentais com o intuito de identificar os invariantes operatórios presentes nos esquemas mobilizados por eles na ação da gênese instrumental e com isso validar as orquestrações como facilitadora nesse processo.

6.1.1 Análise e discussões da avaliação a priori da pesquisa

A elaboração e aplicação da avaliação a priori constituiu a primeira etapa de coleta de dados da pesquisa e teve como objetivo identificar a compreensão conceitual dos estudantes acerca dos conceitos de área e perímetro de figuras planas através da identificação dos invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) mobilizados por eles durante a resolução das situações matemáticas propostas na avaliação (APÊNDICE A).

Para tanto, elaboramos o quadro 5 com os possíveis invariantes operatórios que poderiam ser mobiliados pelos estudantes durante a execução dessa etapa.

Quadro 5 - Possíveis invariantes operatórios (Teoremas-em-ação e Conceitos-em-ação) a serem mobilizados pelos estudantes.

Invariantes operatórios	
Teoremas-em-ação	**Conceitos-em-ação**
A área é a quantidade de quadrados unitários necessários para cobrir uma superfície	Área de figuras planas: área do quadrado, triângulo, paralelogramo, retângulo. Comprimento, perímetro de figuras planas, adição, subtração, multiplicação, divisão. Decomposição e recomposição. Unidades de medidas. Função. Equivalência
O perímetro é o comprimento do contorno de uma região.	
Decomposição e recomposição sem sobreposição e sem perda conserva a área	
A área é o espaço ocupado por uma superfície	
A área é invariante por deslocamento	
Superfícies de formas diferentes podem possuir mesma área	
A medida da área de um retângulo é o produto das medidas dos seus lados.	

A área é uma propriedade invariante da superfície para determinadas operações	
A área é o número obtido pela aplicação de uma fórmula	
Superfícies de mesma área podem possuir perímetros diferentes	
Figuras de maior contorno tem maior perímetro.	

Fonte: O autor

O quadro 5 serviu como referência para a identificação dos invariantes mobilizados pelos estudantes nas classes de situações propostas que dão sentido ao conceito de área e perímetro de figuras planas conforme o quadro de situações propostos por Baltar (1996) e Ferreira (2010) apresentados na fundamentação teórica do trabalho.

Para uma melhor catalogação dos tipos de situações que os autores propõem em seus trabalhos, elaboramos o quadro 6 que apresenta as situações utilizadas na avaliação a priori da pesquisa no qual eram direcionadas ao conhecimento de área e perímetro de superfícies planas contendo perguntas sobre equivalência de áreas e comprimento, conservação e variação conforme a classe de situações propostas por Baltar e Ferreira, bem como os conteúdos matemáticos e os possíveis esquemas de utilização mobilizados.

Quadro 6 - Classe de Situações que dão sentido ao conceito de área e perímetro de acordo com o quadro proposto por Baltar (1996) e Ferreira (2010)

	Tipo de situação	**Conteúdo matemático existente na situação**	**Possíveis esquemas de utilização mobiliados**
Situação 01, 02, 04, 05, 06	Comparação: Dinâmicas e Estáticas	Figuras geométricas plana, polígonos, área de figuras planas: triângulo, retângulo, paralelogramo e quadrado. Perímetro de figuras geométricas planas. Comprimento. Estruturas aditivas e multiplicativas	Noções de medida de área de figuras planas. Noções de medida de comprimento de figuras planas. Noções do processo de composição e decomposição de figuras planas. Decomposição de áreas. Divisão de áreas em partes equivalentes. Equivalência de área e de comprimento
Situação 03, 07 e 08	Medida: Exatas	Áreas de figuras planas. Polígonos. Unidades de medidas. Perímetro de figuras planas. Estruturas aditivas e multiplicativas	Noções de medida de área de figuras planas. Noções de medida de comprimento de figuras planas. Noções de perímetro. Decomposição de áreas. Equivalência de área e de comprimento

Situação 09	Produção: Mesma área que a de uma figura dada	Áreas de figuras planas. Polígonos.	Noções de medida de área de figuras planas. Decomposição e recomposição de figuras. Equivalência de área e de comprimento

Fonte: O autor

Os resultados obtidos a partir das situações presentes na avaliação a priori serviram para dialogar com os resultados obtidos a partir da revisão de literatura uma vez que nesta etapa, o objetivo foi identificar as dificuldades conceituais desses objetos de conhecimento apresentadas pelos estudantes.

Ressaltamos que a aplicação da avaliação a priori se deu de forma individual por vinte e três alunos do 9º ano 2 da escola estadual Cacilda Braule pinto localizada no bairro Coroado na zona leste de Manaus – Amazonas conforme a Figura 20.

Figura 18 - Estudantes resolvendo as situações da avaliação a priori da pesquisa

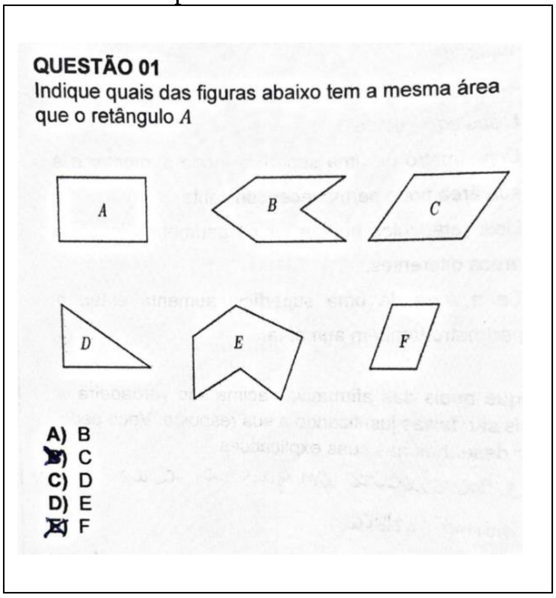
Fonte: O autor

No início da avaliação se fez necessário um breve resumo acerca dos conteúdos trabalhados, pois os estudantes apresentaram algumas dúvidas tais como: o que é perímetro? área é a aqui dentro? o que é comprimento? o que é área equivalente? área é o que fica dentro? o que é área? O que é superfície? perímetro é o que está fora e área é o que está dentro? Tais questionamentos evidenciam o modo como esses conceitos foram apresentados na escola e sugerem um novo modo de pensar no ensino das grandezas pautado em classes de situações que dão sentido ao conceito estudado.

Após a análise da avalição a priori da pesquisa identificamos os invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes em cada uma das situações propostas na avaliação, identificamos cada estudante participante da pesquisa com a letra A seguida de um índice n (An). A primeira situação da avaliação a priori tratava-se de uma situação de comparação dinâmica estática presente no quadro das grandezas geométricas, onde os estudantes deveriam comparar a área de algumas superfícies com uma outra área dada utilizando como esquema o processo de decomposição e recomposição de figuras.

Em termos do campo conceitual das grandezas geométricas, todos os vinte e três alunos que responderam a avaliação apresentam dois conceitos-em-ação não-pertinentes (proporção e semelhança) para a classe de situação proposta conforme segue na figura 21.

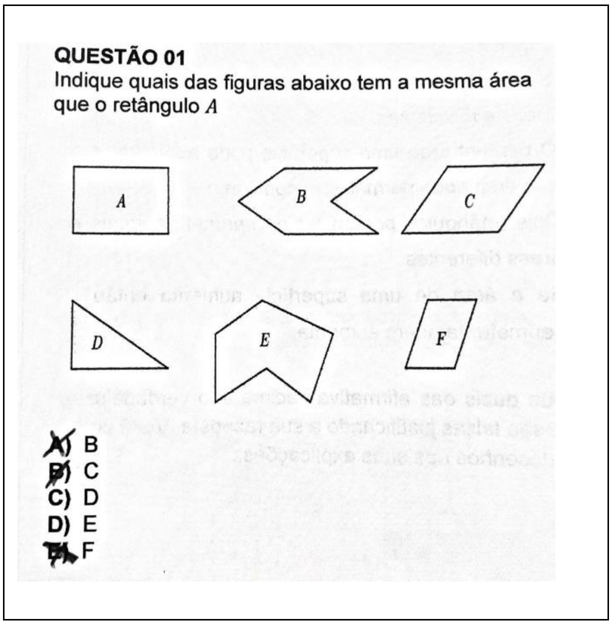
Figura 19 – Esquema mobilizado pelos estudantes durante a resolução da situação 01



Fonte: O autor

Além disso, todos eles apresentaram o teorema-em-ação falso “figuras semelhantes possuem a mesma área” o que pode ser evidenciado no fragmento acima (figura 21) uma vez que não utilizaram o esquema de decomposição e recomposição de figuras para comparar a área presente na situação. É possível perceber que os estudantes apenas conjecturaram que as figuras C e F possuíam a mesma área que a figura A pois são semelhantes. Apenas o aluno A21 conseguiu utilizar o esquema ainda de maneira parcialmente correta conforme apresentado na figura 22.

Figura 20 - Esquema mobilizado pelo aluno 21 durante a resolução da situação 01



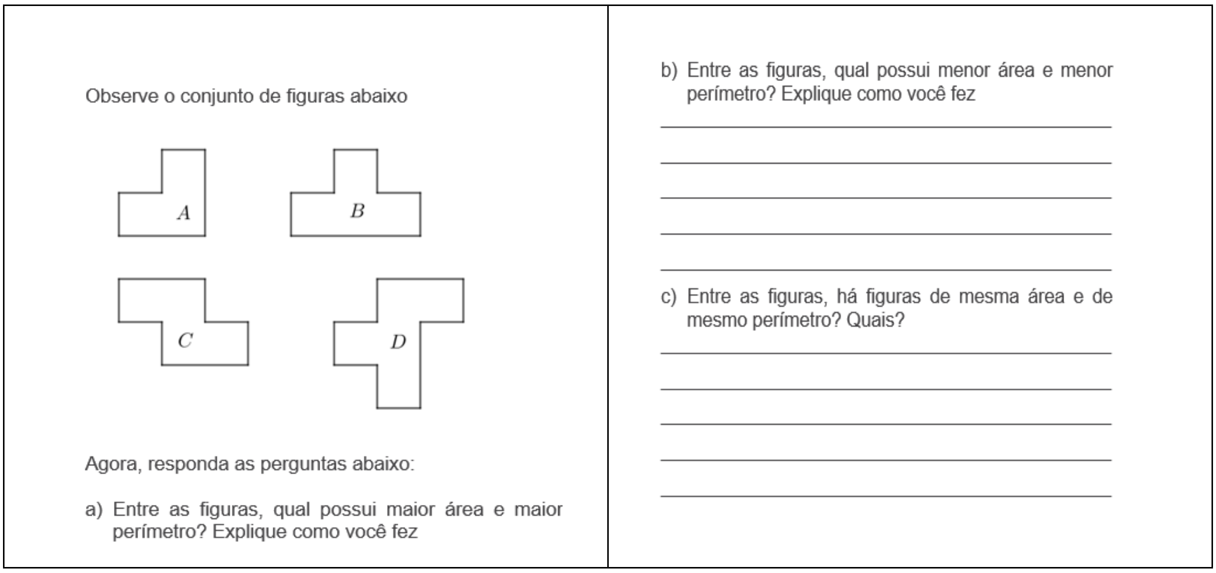
Fonte: O autor

Desse modo, para esse primeiro tipo de situação, onde era necessário o esquema de decomposição e recomposição, os estudantes apresentaram baixo conhecimento acerca do conteúdo de área como também no processo de decomposição e recomposição que era um esquema muito utilizado pelos egípcios conforme apresentado no levantamento histórico do tema no capitulo 3. Assim, os conceitos e teoremas mobilizados durante a execução da avaliação se apresentaram de maneira incorreta pela maioria dos estudantes evidenciando uma dificuldade conceitual do objeto matemático trabalhado para o tipo de situação proposta.

A segunda situação da avaliação a priori tratava-se de uma situação de comparação estática e de medida presente no quadro das grandezas geométricas e no quadro numérico. Dos vinte e três alunos, cinco não resolveram a situação e seis apresentaram teoremas-em-ação falsos. Dos teoremas falsos evidenciados na situação pelos estudantes identificamos: “O perímetro é o preenchimento de uma superfície”, a “área e o perímetro de uma figura corresponde ao preenchimento da superfície em quadrados unitários”, “superfícies de formas diferentes possuem áreas diferentes e perímetros diferentes”, “a quantidade de arestas de uma figura corresponde a medida da sua área” e “o tamanho de uma superfície corresponde ao tamanho da sua área.

Levando em consideração o campo conceitual das grandezas geométricas, é possível identificar tais teoremas nos conhecimentos evocados pelos estudantes conforme a resolução da situação 2, figura 23.

Figura 21 – Situação 02 da avaliação a priori



Observe o conjunto de figuras abaixo

A B C D

Agora, responda as perguntas abaixo:

a) Entre as figuras, qual possui maior área e maior perímetro? Explique como você fez

b) Entre as figuras, qual possui menor área e menor perímetro? Explique como você fez

c) Entre as figuras, há figuras de mesma área e de mesmo perímetro? Quais?

Fonte: O autor

Ressaltamos que os fragmentos apresentados no quadro 7 abaixo se mantiveram fieis conforme escrito pelos estudantes no cartão de atividades da avaliação a priori da pesquisa.

Quadro 7 - Resposta dos estudantes para a questão 2 da avaliação

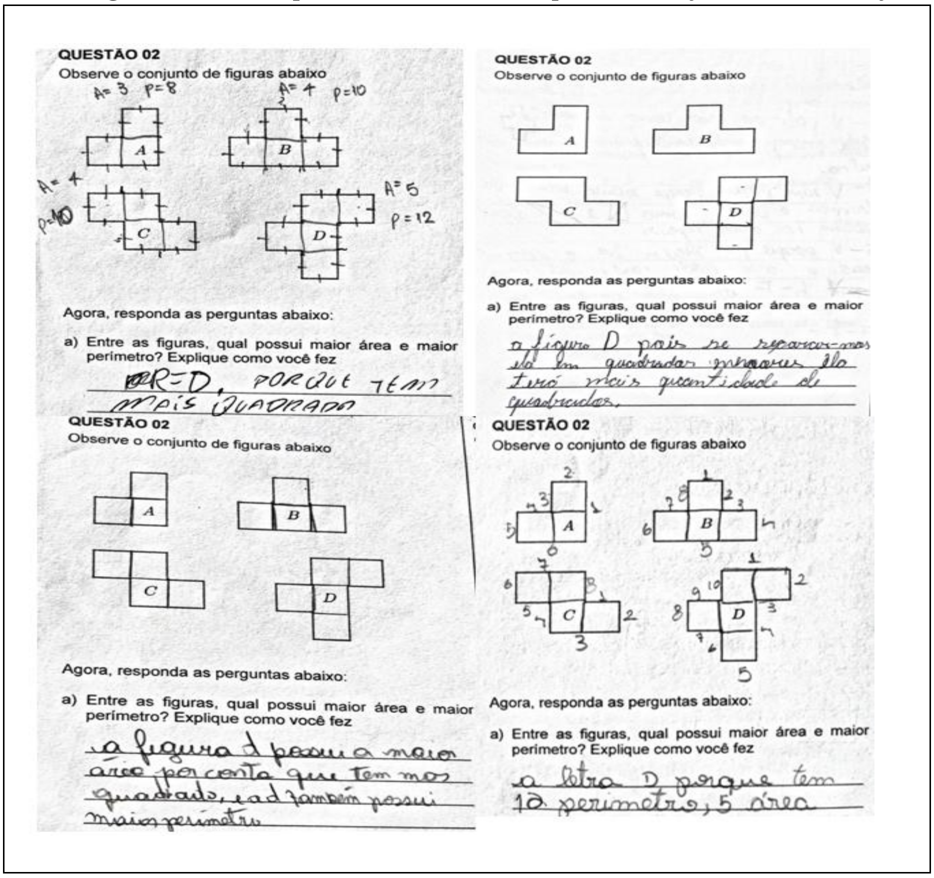
Aluno	Letra a)	Letra b)	Letra c)
01	“D e o perímetro dela é o mais preenchido e a área também.”	“A porque dá para formar menos quadradinhos e a área é menor entre essas figuras.”	“A e B.”
06	“D, possui a maior área e o menor perímetro.”	“A possui a menor área e o menor perímetro.”	“A e B”
07	“A letra D porque ela é maior eu contei.”	“A letra A”	“C e B tem o mesmo perímetro e área.”
08	“A letra A tem o perímetro e a D tem perímetro maior que a letra A.”	“A letra A porque tem menor perímetro e tem menor área.”	“sim, a letra C e D porque tem a mesma área e tem o mesmo perímetro.”
10	“A figura D. Porque é a que tem maior aresta e é a maior figura.”	“A figura A. porque é a menor figura e a que tem menor aresta.”	“A figura B e C tem a mesma área e o mesmo perímetro.”
22	“A figura D porque o tamanho dela é maior que as outras figuras.”	“A letra A porque a figura é pequena. E se for dividir ela terá menos partes de dividir.”	“sim, figura B e C.”

Fonte: O autor

De acordo com os resultados apresentados no quadro 7, é possível perceber que o conhecimento evocado por esses estudantes nesse tipo de situação se mostraram como uma não dissociação entre o conceito de área e perímetro, isto é, ambos os conceitos representam o mesmo objeto de conhecimento para eles, o que gera uma confusão e uma concepção conceitual errônea. Esse resultado é corroborado na pesquisa de French (2004) onde o autor afirma que os estudantes têm a concepção de que perímetro e área estão ligados de um modo tão elementar, que o aumento de uma dessas grandezas conduz necessariamente ao aumento da outra.

Em relação aos conceitos-em-ação, os estudantes que responderam a situação mobilizaram os seguintes conceitos: Área, perímetro, decomposição de figuras e adição que são conceitos-em-ação pertinentes para o tipo de situação proposta. Já em relação ao teoremas-em-ação verdadeiros doze estudantes apresentaram proposições verdadeiras dos quais os alunos A5, A9, A14 e A16 apresentam pelos menos três proposições verdadeiras para o tipo de situação proposta conforme o fragmento que corresponde apresentado na figura 24.

Figura 22 – Fragmentos das respostas dos estudantes para a situação 02 da avaliação a priori



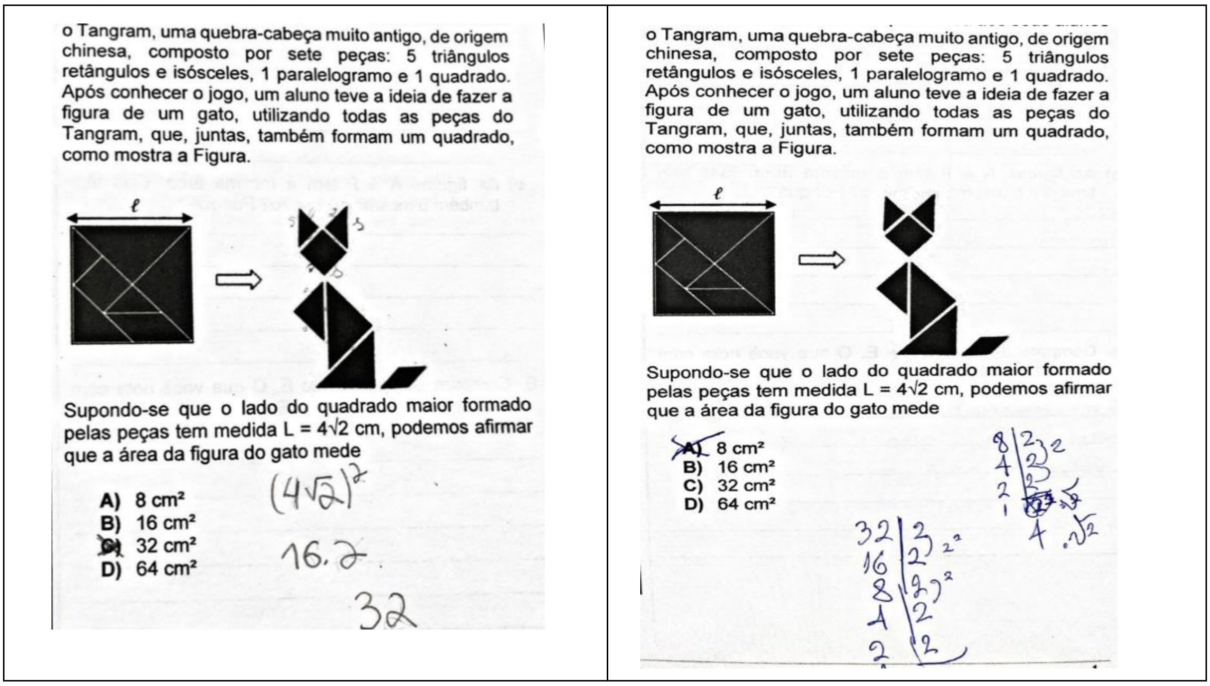
Fonte: O autor

É possível perceber no conhecimento evocado por esses estudantes através das suas produções um esquema de resolução no qual eles fazem a decomposição das figuras para posteriormente exercer a comparação entre elas. Esse esquema possibilita inferir que a área pode ser invariante a sua superfície como também compreender que ela é uma região ocupada.

Desse modo, para esse segundo tipo de situação, onde era necessário o esquema de decomposição e contagem os estudantes apresentaram níveis de conhecimentos satisfatórios acerca do conteúdo de área e perímetro. Assim, os conceitos e teoremas mobilizados durante a execução da avaliação se apresentaram no geral de maneira correta pela maioria dos estudantes.

A terceira situação da avaliação a priori tratava-se de uma situação de medida exata presente no quadro numérico. Dos vinte e três alunos, apenas dois alunos resolveram a situação proposta no qual o A1 mobilizou o teorema-em-ação verdadeiro “decomposição e recomposição de uma superfície sem sobreposição e sem perda conserva a área” enquanto o A11 mobilizou o teorema-em-ação falso “a área é o resultado do produto dos fatores da decomposição de um número.” Esses resultados podem ser evidenciados nos fragmentos retirados do cartão de atividades da avaliação conforme a figura 25.

Figura 23 - Fragmentos das respostas dos estudantes para a situação 03 da avaliação a priori


o Tangram, uma quebra-cabeça muito antigo, de origem chinesa, composto por sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Após conhecer o jogo, um aluno teve a ideia de fazer a figura de um gato, utilizando todas as peças do Tangram, que, juntas, também formam um quadrado, como mostra a Figura.

Supondo-se que o lado do quadrado maior formado pelas peças tem medida L = 4√2 cm, podemos afirmar que a área da figura do gato mede

A) 8 cm²
B) 16 cm²
C) 32 cm²
D) 64 cm²

$(4\sqrt{2})^2$

16.2

32

o Tangram, uma quebra-cabeça muito antigo, de origem chinesa, composto por sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Após conhecer o jogo, um aluno teve a ideia de fazer a figura de um gato, utilizando todas as peças do Tangram, que, juntas, também formam um quadrado, como mostra a Figura.

Supondo-se que o lado do quadrado maior formado pelas peças tem medida L = 4√2 cm, podemos afirmar que a área da figura do gato mede

A) 8 cm²
B) 16 cm²
C) 32 cm²
D) 64 cm²

Fonte: O autor

Os resultados acima demonstram que os estudantes no geral não conseguem resolver situações contextualizadas acerca da invariância de área. Um dado que chama atenção, é o fato de vinte e um alunos não saberem resolver essa situação, tendo em vista que era necessário mobilizar apenas o conhecimento da área de um quadrado e compreender que a decomposição e recomposição de superfícies sem perda e sem sobreposição conservam a área que são conhecimentos esperados para o nível dos estudantes pesquisados.

Esse resultado é corroborado por Oliveira (2002) onde o autor afirma que privilegiar demasiadamente os aspectos numéricos e algébricos não permite ao estudante lidar com situações que requerem conhecimentos das grandezas geométricas. Daí a importância de se trabalhar com vários tipos situações para tentar contornar tais dificuldades de compreensão das grandezas.

Em relação aos conceitos-em-ação, o estudante A1 mobilizou os seguintes conceitos: Área, decomposição e recomposição de figuras, multiplicação e potenciação que são conceitos-em-ação pertinentes para o tipo de situação proposta. Já o A11 mobilizou o conceito de decomposição de um número que é um conceito-em-ação falso para a situação proposta.

Assim, para esse terceiro tipo de situação, onde era necessário o esquema em ação de decomposição, recomposição e cálculo da área de um quadrado, bem como a compreensão da invariância de área, os estudantes apresentaram níveis de conhecimentos insatisfatórios demonstrando a necessidade de proporcionar esse objeto de conhecimento além das fórmulas de área.

A quarta situação da avaliação a priori tratava-se de uma situação de comparação dinâmica e de medida presente no quadro das grandezas e no quadro geométrico, onde os estudantes deveriam comparar a área e o perímetro de algumas superfícies com uma outra dada utilizando como esquema o processo de decomposição e recomposição de figuras. Dos teoremas falsos evidenciados na situação pelos estudantes identificamos: “Superfícies de mesma área possuem o mesmo perímetro”, a “Superfícies de áreas diferentes possuem perímetros diferentes”, “superfícies de formas diferentes possuem áreas diferentes e perímetros diferentes”, “superfícies de mesma área possuem o mesmo perímetro”, “perímetro é a região ocupada por uma superfície” e “superfícies de formas diferentes ao serem decompostas e recompostas sem perda ou sobreposição possuem área diferentes e perímetros iguais”.

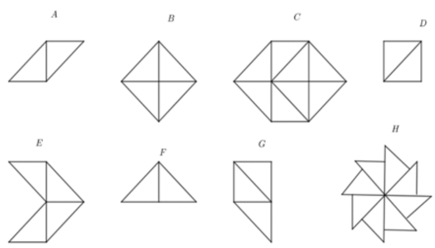
Esses resultados vão de encontro aos resultados apresentados pelas pesquisadoras Douady e Perrin-Glorian (1989) onde elas identificam que os estudantes têm a concepção geométrica de que se o perímetro de uma superfície se altera, sua área também será alterada assim como se duas superfícies possuem o mesmo perímetro então elas possuem a mesma área., ou seja, eles geram um conceito equivocado de área associado à superfície, acreditando que, se duas figuras não são congruentes, então possuem áreas diferentes. E são teoremas falsos pois não necessariamente podem ocorrer, a exemplo disso podemos ter superfícies que possuem perímetros iguais e áreas diferentes, e o aumento ou redução de um não implica necessariamente no aumento ou redução do outro.

Todas as superfícies da situação 04 apresentada na figura 26 possuem pares que vão possuir áreas equivalentes por meio do processo de decomposição e recomposição, mas, nos casos em que as decomposições não geram figuras congruentes, os estudantes não compreendem que seja possível fazer comparações entre as suas áreas, chegando a considerarem as opções como soluções erradas.

Figura 24 – Situação 04 da avaliação a priori

QUESTÃO 04

Considere um triângulo ABC do Tangram abaixo. Ele é um triangulo retângulo e é um triângulo isósceles, cujo lados iguais medem x e o lado maior mede y. Com vários triângulos iguais ao triângulo ABC, fizemos as seguintes figuras:



a) Quais figuras têm a mesma área que a figura A?

b) Quais tem a mesma área que a figura B?

c) Quais tem a mesma área que C?

d) As figuras A e D tem a mesma área. Elas também têm o mesmo perímetro? Por quê?

e) As figuras A e F tem a mesma área. Elas têm também o mesmo perímetro? Por quê?

f) Compare as figuras C e E. O que você nota com relação às suas áreas? E em relação aos seus perímetros?

Fonte: O autor

Abaixo está representado um quadro com os fragmentos dos teoremas-em-ação falsos apresentados nas resoluções da situação 04 figura 26. Ressaltamos que esses fragmentos se mantiveram fieis conforme escrito pelos estudantes no cartão de atividades da avaliação a priori da pesquisa.

Quadro 8 - Resposta dos estudantes para a situação 04 da avaliação a priori

Aluno	Letra a)	Letra b)	Letra c)	Letra d)	Letra e)	Letra f)
01	“D e F”	“E”	“H”	“sim porque ambas preenchem todos os quadradinhos.”	“não porque o perímetro da A é 16 e da F é 4.”	“noto que a área do C é maior do que a do F, já os perímetros são semelhantes.”
02	“D e F”	“E”	“H”	“sim porque os perímetros são os mesmos só muda a posição.”	“sim, só muda a forma.”	“na letra C a área e o perímetro é maior que a letra E.”
03	“D”	“G”	“H”	“elas tem o mesmo perímetro porque tem a mesma altura.”	“sim porque tem os mesmos triângulos.”	“elas tem o mesmo formato igual da letra C.”
05	“F e D”	“E”	“H”	“sim porque os dois triângulos tem a mesma medida, mesma área.”	“sim porque os dois triângulos tem a mesma medida, mesma área.”	“a C tem mais triângulos e maior área, a E tem menos triângulos e mens área, então os perímetros são diferentes.”

07	"A e D"	"E"	"A"	"sim porque elas são iguais."	"sim porque é a mesma figura com posição diferente."	Não respondeu
08	"D"	"E"	"H"	"sim porque a letra A tem a mesma área e o mesmo perímetro também."	"não porque não tem o mesmo perímetro."	"são diferentes porque a letra C tem 8 lados e a letra E tem 4 lados."
09	"D e F"	"E"	"H"	"sim porque se ajeitar a letra A fica igual a letra D."	"sim porque são o mesmo formato."	"a área delas são muito diferentes igual o perímetro."
10	"D e F"	"E"	"H"	"sim porque são dois triângulos retângulos com o mesmo perímetro e área."	"sim porque são dois triângulos retângulos com o mesmo perímetro e área."	"a figura C tem oito triângulos e a E tem apenas quatro então elas não tem a mesma área e nem o mesmo perímetro."
11	"D e F"	"E e G"	"H"	"não porque a figura a os triângulos ocupam maior espaço."	"não porque a F tem um perímetro maior."	"em ambas as relações de áreas e perímetro, a figura C supera a E."
14	"C"	"B"	"D"	"sim elas tem a mesma área e o mesmo perímetro só muda a forma que elas estão."	"a figura A não tem nada a ver com a F."	"a C ela é maior em perímetro, mas não tem nada igual entre elas."
15	"C"	"B"	"G"	"sim porque eles tem a mesma área e o mesmo perímetro."	"não, porque não tem a mesma área nem o mesmo perímetro."	"está diferente porque está dobrado."
16	"F e D"	"E"	"H"	"sim porque as duas figuras tem dois triângulos retângulos."	"sim eles possuem dois triângulos retângulos portanto também tem o mesmo perímetro."	"as duas figuras são totalmente diferentes, portanto, não tem mesma área nem mesmo perímetro."
17	"D e F"	"E"	"H"	"sim porque as duas figuras tem a mesma quantidade de lados."	"sim porque as duas figuras tem a mesma quantidade de lados."	Não respondeu
19	"D e F"	"E"	"H"	"sim porque somando lados da letra A e D são iguais, apenas o que muda é o desenho da figura."	"sim porque são as mesmas somas de lados, com as mesmas quantidades."	"as áreas são diferentes, a letra C tem mais área, e de perímetro a letra C tem mais lados do que a letra E."
20	"C e H"	"D"	"H"	"sim porque A tem área 2/2 com a D que também tem 2/2 e por isso elas tem também o mesmo perímetro.	"sim porque toda superfície de uma mesma área possuem o mesmo perímetro."	Não respondeu
22	"D e F"	"E e H"	"H"	"eu acho que não por causa do tamanho delas e do formato também."	"não porque a figura A tem o perímetro maior."	"a C tem a área maior e o perímetro também, a figura E tem área menor e o perímetro também."
23	"F e D"	"E"	"H"	"sim porque elas tem a mesma quantidade de triângulos retângulos então a	"sim porque também tem a mesma quantidade de triângulos e se	"elas não tem a mesma área, nem os mesmos perímetros, na C tem 8

				soma do perímetro é igual se for somar elas vão obter o mesmo resultado por conta disso.”	for fazer a soma vai obter o mesmo resultado.”	triângulos e na E tem 4 e o perímetro dela vai ser maior e área também.”

Fonte: O autor

Do quadro 8 é possível identificar uma dificuldade em comparar áreas ou perímetros de figuras não congruentes sem a indicação de medidas. Esse resultado é corroborado por Barros (2006) onde o autor afirma que para alguns estudantes a comparação entre área e perímetro somete torna-se possível com a existência de suas medidas, isto é, na “ausência de números, não existe grandeza, o que leva a concepção de que comparar grandezas se restringe a comparar números” (Duarte, 2002, p. 51).

Dos teoremas-em-ação verdadeiros identificamos apenas dois: “decomposição e recomposição de uma superfície sem sobreposição e sem perda conserva a área” e “superfícies diferentes de mesma área podem possuir perímetros equivalentes”.

Em relação aos conceitos-em-ação mobilizados, apenas o A1 mobilizou O conceito de semelhança que é um conceito não pertinente para a situação proposta e os demais mobilizaram os conceitos de área, comprimento, perímetro, decomposição e recomposição, divisão em partes equivalentes, comparação, unidades de medidas que são conceitos necessários para criar os esquemas de resolução das situações.

Desse modo, é possível inferir que a maior parte dos estudantes possuem uma dificuldade ao trabalhar os conceitos de área e perímetro sem uma unidade de medida e sem formulas de áreas uma vez que as situações propostas exigem que eles trabalhem esse conteúdo dentro do campo das grandes geométricas.

A quinta situação apresentava alguns teoremas-em-ação falsos e verdadeiros do qual o objetivo era que os estudantes julgassem cada teorema informando quais eram verdadeiros e quais eram falsos. Além disso, era solicitado que eles justificassem através da escrita ou desenhos o porquê da resposta.

Dos teoremas falsos evidenciados na situação pelos estudantes identificamos: “Superfícies de mesma área possuem o mesmo perímetro”, “superfícies de formas diferentes possuem áreas diferentes”, “se o perímetro de uma superfície aumenta sua área necessariamente também aumenta”, “a área não é a região ocupada por uma superfície” e “o perímetro não é a medida do contorno de uma figura”. A figura 27 apresenta a situação 05 e a resposta de dois alunos que responderam a avaliação.

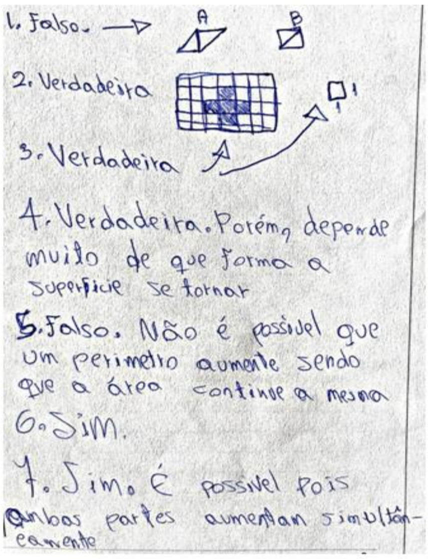
Figura 25 – Situação 05 da avaliação a priori e a resposta dos estudantes

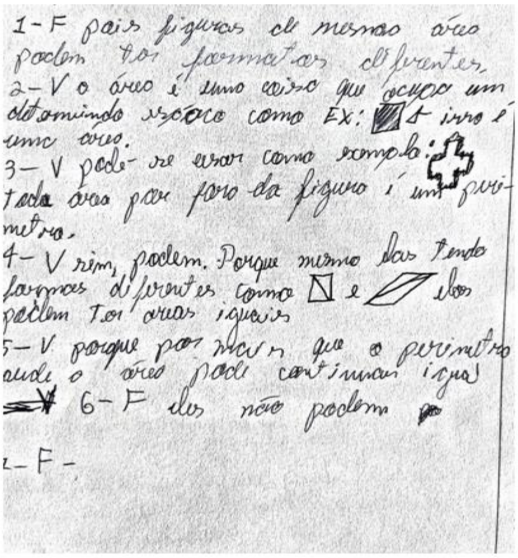
QUESTÃO 05

Considere as seguintes afirmações acerca dos conceitos de área e perímetro.

1. Superfícies de mesma área possuem o mesmo perímetro.
2. A área é o lugar ocupado por uma superfície.
3. O perímetro é a medida do contorno de uma superfície.
4. Superfícies de formas diferentes podem possuir áreas equivalentes.
5. O perímetro de uma superfície pode aumentar e a sua área pode permanecer constante.
6. Dois retângulos podem ter os perímetros iguais e áreas diferentes.
7. Se a área de uma superfície aumenta então o perímetro também aumenta.

Indique quais das afirmativas acima são verdadeira e quais são falsas justificando a sua resposta. Você pode usar desenhos nas suas explicações.





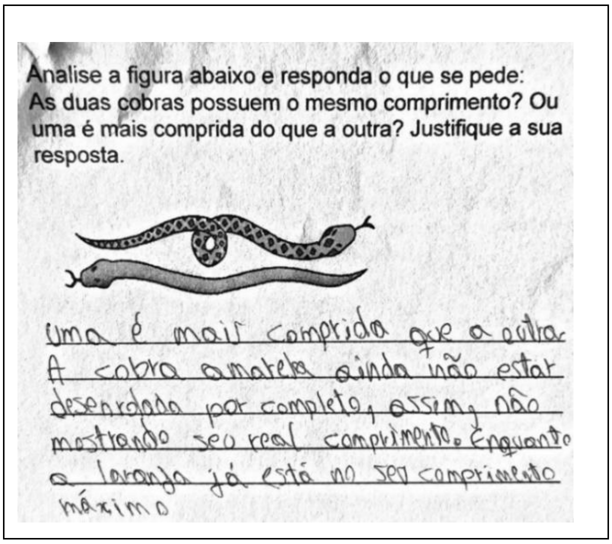
Fonte: O autor

Assim, para os estudantes, área e perímetro são associados, o que pode ocasionar erros, tais, como: acreditar que área e perímetro sempre variam no mesmo sentido. Logo, se houve uma diminuição da área de uma figura, então, necessariamente, o perímetro também diminuiu. Desse modo, é recomendável que o estudante seja confrontado com várias situações de área e perímetro que refutarão os teoremas-em-ação falsos, relacionados às concepções errôneas, tendo por objetivo levar o estudante a refletir sobre tais teoremas, contribuindo, assim, para o processo de reconstrução, ampliando a noção dos estudantes sobre tais conceitos.

A sexta situação da avaliação a priori tratava-se de uma situação de comparação estática presente no quadro das grandezas, onde os estudantes deveriam comparar o comprimento de duas cobras utilizando como esquema o processo de igualar as suas extremidades.

Em termos do campo conceitual das grandezas geométricas, dos vinte e três alunos que responderam a avaliação, vinte e um apresentaram teoremas-em-ação verdadeiros e apenas dois alunos não responderam a situação. O teorema-em-ação verdadeiro "esticando as duas cobras e coincidindo as suas extremidades temos a medida do seu comprimento" pode ser evidenciado no fragmento abaixo (figura 28) que foi comum aos estudantes.

Figura 26 – Esquema mobilizados pelos estudantes durante a resolução da situação 06



Fonte: O autor

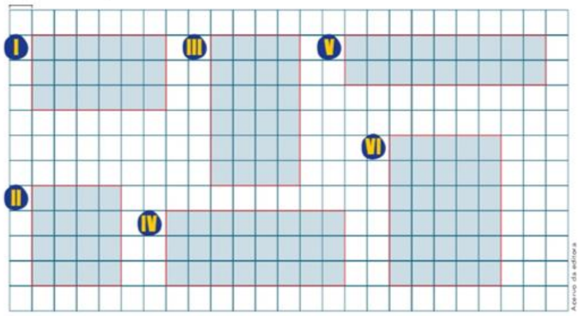
Em relação aos conceitos-em-ação, os estudantes que responderam a situação mobilizaram os conceitos de comprimento e unidades de medidas que são conceitos-em-ação pertinentes para o tipo de situação proposta. Desse modo, a maior parte dos estudantes responderam corretamente a situação, e os conceitos e teoremas mobilizados por eles se apresentaram de maneira correta, isto é, o esquema mobilizado por eles para resolver a situação foi coerente para o tipo de situação proposta.

A sétima situação da avaliação a priori tratava-se de uma situação medida exata presente no quadro numérico, onde os estudantes deveriam calcular usando as medidas indicadas em uma malha quadriculada a área e o perímetro de alguns retângulos utilizando como esquema o processo de contagem de quadrados unitário presentes no interior de cada retângulo, ou o produto dos lados, sempre tomando como referência a medida informada. A figura 29 apresenta a situação proposta na avaliação a priori.

Figura 27 – Situação 05 da avaliação a priori

QUESTÃO 07

Os retângulos a seguir foram construídos em uma malha quadriculada, onde cada quadrado possui lado igual a 0,5 cm.



a) Entre as figuras acima há figuras de mesma área? Em caso afirmativo, quais são elas? Explique como você fez.

b) Entre as figuras acima há figuras de mesmo perímetro? Em caso afirmativo, quais são elas? Explique como você fez

Fonte: O autor

O quadro 9 apresenta os fragmentos dos teoremas-em-ação falsos apresentados nas resoluções da situação. Ressaltamos que esses fragmentos se mantiveram fieis conforme escrito pelos estudantes no cartão de atividades da avaliação a priori da pesquisa.

Quadro 9 - Resposta dos estudantes para a situação 07 da avaliação a priori

Aluno	Letra a)	Letra b)
01	“I e V, elas tem a mesma quantidade de quadradinhos”	“IV e VI, elas tem a mesma quantidade de lugar ocupado”
02	“não porque cada um deles tem mais quadrados e outros não”	“todos tem o mesmo perímetro só muda a forma”
04	“sim, IV, III, IV, multipliquei a altura pelo comprimento”	“IV e VI contei um por um”
18	“a figura III e IV eu fiz contando cada quadradinho”	“sim, todas elas são do mesmo perímetro e eu fiz circulando o quadrado”
23	“sim, a III e VI eu contei 0,5 e 0,5 que vale 1 centímetro e a figura III e VI deu o mesmo valor”	“IV e VII fiz soma delas”

Fonte: O autor

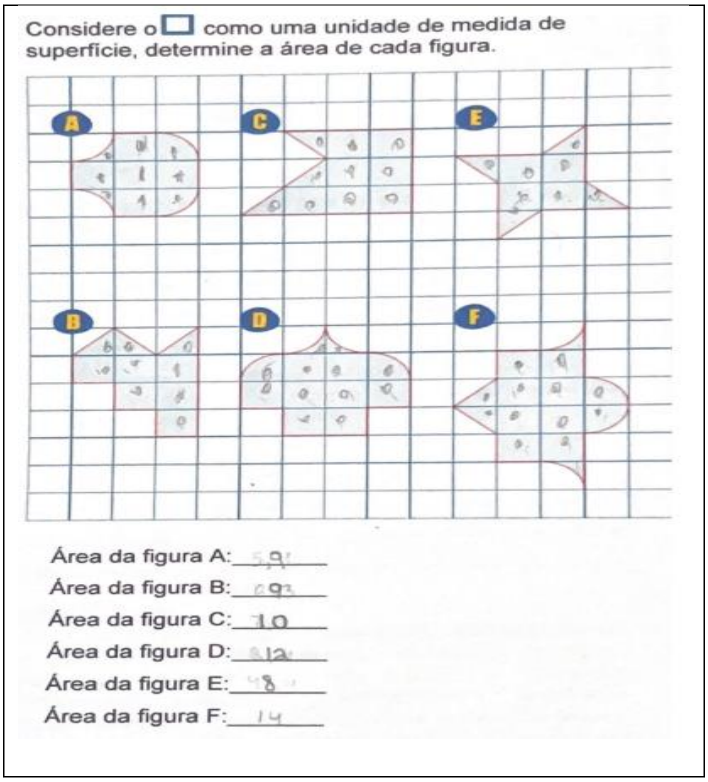
Dos teoremas falsos evidenciados na situação pelos estudantes identificamos: “Superfícies de mesma área possuem o mesmo perímetro”, a “a área é a medida do contorno de uma superfície.”, “superfícies de formas diferentes possuem perímetros equivalentes”, e “o perímetro é a região ocupada por uma superfície.” Em relação aos conceitos-em-ação, os estudantes mobilizaram conceitos de área, perímetro, unidades de medidas, adição e multiplicação que são conceitos pertinentes para o tripo de situação proposta.

Esses resultados reforçam ainda mais os dados obtidos nas situações anteriores da pesquisa bem como as levantadas na revisão de literatura. De um modo geral, os estudantes tendem a confundir os conceitos de área e perímetro pelo fato de esses serem apresentados apenas nos quadros numéricos e geométricos.

A oitava situação da avaliação a priori tratava-se de uma situação medida exata presente no quadro numérico e no quadro geométrico, onde os estudantes deveriam calcular a área de seis figuras em uma malha quadriculada usando como esquema o processo de decomposição e recomposição de figuras e considerando um quadrado unitário como uma unidade de área.

Dezessete estudantes mobilizaram o teoremas-em-ação verdadeiro: “A área é a quantidade de quadrados unitários necessários para cobrir uma superfície’ e “decomposição e recomposição sem sobreposição e sem perda conserva a área. Somente o A4 mobilizou o teorema-em-ação falso “decomposição e recomposição sem sobreposição e sem perda modifica a área” e seis alunos não responderam a situação. É importante ressaltar que dos dezessete estudantes, dez deles mobilizaram somente um teorema-em-ação verdadeiro o que acabou gerando erros durante a resposta. A exemplo disso pode se verificar na figura 30.

Figura 28 - Resposta do A12 para a situação 08 da avaliação



Fonte: O autor

É possível perceber a partir da resposta do estudante que ele entende que a área é quantidade de quadrados unitários necessários para cobrir uma superfície, todavia ele não consegue utilizar o esquema de decomposição e composição de figuras que é um esquema chave para a resolução. Esse resultado é observado em outros nove estudantes. Dentre os conceitos-em-ação mobilizado temos os conceitos de Área, unidades de medidas, decomposição, recomposição que são conceitos pertinentes, mas nem todos evocaram durante a resolução.

Desse modo, é necessário comtemplar de acordo com a Teoria dos campos conceituais uma variedade de situação para que os conceitos trabalhos sejam formados de maneira correta no qual o estudante possa utilizar para resolver as mais variadas situações.

A última situação da avaliação a priori tratava-se de uma situação de produção presente no quadro geométrico e no quadro das grandezas, onde os estudantes deveriam analisar partir de uma figura representativa do tangram a área de outras figuras construídas a partir das mesmas formas geométrica, sem perda ne sem sobreposição.

Dos resultados observados é possível verificar que dos vinte e três estudantes, cinco mobilizaram teoremas-em-ação verdadeiros, cinco mobilizaram teoremas-em-ação falsos e treze deles não conseguiram responder à questão proposta. Dos teoremas falsos evidenciados nessa situação pelos estudantes identificamos: “decomposição e recomposição de uma figura sem sobreposição e sem perda modifica a área” e “perímetro é a região ocupada por uma superfície”. Em relação aos conceitos-em-ação, os estudantes mobilizaram conceitos de área, unidades de medidas, decomposição, e recomposição que são conceitos pertinentes para o tripo de situação proposta. A figura 31 apresenta o enunciado da situação 09 proposta na avaliação a priori

Figura 29 – Situação 09 da avaliação a priori

QUESTÃO 09
O tangaram é um quebra-cabeça de origem chinesa composto de sete peças. É possível montar, sem sobrepor as peças, silhuetas de animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas planas, entre outras possibilidades.

Com todas as peças do tangaram, sem sobrepô-las, é possível formar figuras com áreas diferentes? Por quê?

Fonte: O autor

O quadro 10 apresenta os fragmentos dos teoremas-em-ação falsos apresentados pelos estudantes. Ressaltamos que esses fragmentos se mantiveram fieis conforme escrito pelos estudantes no cartão de atividades da avaliação a priori da pesquisa.

Quadro 10 - Resposta dos estudantes para a situação 09 da avaliação a priori

Aluno	Resposta
03	"porque ela tem o mesmo perímetro"
11	"sim porque dependendo da forma que posicionamos as peças a área muda"
14	"sim porque separando todos são formatos diferentes então muda."
15	"sim porque tem várias formas geométricas planas diferentes"
16	"sim, porque elas possibilitam uma diversidade muito grande onde para ter figuras diferentes com áreas diferentes basta só mudar as figuras de lugar."

Fonte: O autor

Do quadro apresentado é possível perceber que os estudantes apresentam concepções errôneas quanto a variação de área utilizando as mesmas figuras. Resultado esse já apresentado em outras questões da avaliação a priori da pesquisa quanto também nos resultados encontrados na revisão de literatura.

Diante dos resultados apresentados e discutidos, essa etapa da pesquisa teve como objetivo identificar os invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em ação) presentes nos esquemas dos estudantes ao confrontarem situações relacionadas ao conceito de área e perímetro. Esses teoremas evocados por eles durante a resolução da avaliação demonstram como o conteúdo de área e perímetro estão sendo trabalhos na maioria das vezes nas escolas, uma vez que é possível perceber pelas respostas dos estudantes que há uma grande dificuldade conceitual desses objetos de conhecimento quando são trabalhados como grandezas geométricas.

Tal resultado reforça que o ensino de área e perímetro nas escolas prioriza apenas o quadro numérico e/ou geométrico o que acaba gerando algumas concepções errôneas quando se trabalha no quadro das grandezas geométricas. Nesse sentido, Senzaki (2019) também aponta, a partir da análise das pesquisas, que a não dissociação de área e perímetro é fonte dessas dificuldades encontradas uma vez que de acordo com Bellemain (2000) ao mobilizar uma concepção geométrica, o estudante entende que se uma figura for modificada, sua área também será modificada.

Essas afirmativas são evidenciadas na pesquisa uma vez que ao analisar os conhecimentos evocados pelos estudantes, eles associam perímetro e área, respectivamente, a contorno e interior da superfície, portanto, os estudantes acreditam que a modificação do contorno de uma região implica, necessariamente, mudança de todos os outros atributos dessa região, como, por exemplo, sua área. Daí a importância de traçar estratégias a fim de contornar tais concepções.

Na sessão seguinte será apresentado os resultados obtidos por meio das orquestrações instrumentais realizadas na mesma turma que foi aplicada a avaliação a priori. Essa etapa teve como objetivo proporcionar gênese instrumental dos estudantes relacionados aos artefatos tangram e malha quadriculada, onde estes serviram como um meio para a dissociação desses conceitos bem como para alcançar melhores níveis de aprendizagem.

6.1.2 Análise e discussões da Gênese instrumental

A execução das orquestrações instrumentais constituiu a segunda etapa de coleta de dados da pesquisa e teve como objetivo favorecer o processo da gênese instrumental dos estudantes, uma vez que é na relação sujeito-artefato, observada nas tentativas de resolução das situações matemáticas utilizando o tangram e a malha quadriculada que os estudantes colocaram em evidência o processo da gênese instrumental.

Como visto no capítulo da fundamentação teórica, uma orquestração instrumental (OI) está associada ao planejamento de uma dada situação. As OI utilizadas neste trabalho foram apresentadas anteriormente no capitulo 5 que trata da metodologia do trabalho onde é descrito todas as informações acerca de como foi organizado o ambiente, os estudantes e os artefatos utilizados.

A seção a seguir relata a descrição do desempenho didático das orquestrações instrumentais de cada encontro realizado e que possibilitaram os resultados para a análise a partir de uma visão geral do objeto de pesquisa. A partir dos episódios ocorridos, analisamos as produções dos estudantes à luz da teoria da gênese Instrumental buscando identificar indícios da gênese instrumental coletiva e identificando as interações do modelo SAI de Rabardel (1995).

Ressaltamos que serão analisados apenas três grupos de estudantes, estando presente nesses grupos o A4, A6, A7, A11, A14, A15, A20, A21 e A22 da avaliação a priori. Esses quantitativo se deu pelo fato de todos os integrantes estarem presentes durante os encontros e desse modo possibilitando resultados mais precisos dos dados analisados.

6.1.2.1 O desempenho didático e análise das situações matemáticas propostas nas orquestrações instrumentais

A OI 1 teve como objetivo proporcionar aos estudantes, durante o desempenho didático, um contato com o artefato tangram no qual fosse possível conhecer as figuras geométricas que o constituía e fizessem o uso dele para montar algumas figuras conforme a situação proposta.

Essa etapa descrita na pesquisa corresponde a dimensão de instrumentalização da gênese instrumental presente na interação [I-O], [O-I] (instrumento ↔ objeto). Para tanto, utilizamos um cartão de atividades (APÊNDICE B) para direcionar e atingir os objetivos propostos na execução da OI 1. Abaixo está representado o quadro 19 com as situações presentes no cartão e atividades e as respostas dos grupos.

Quadro 11 - Situação 01 e 02 do cartão de atividades utilizado na OI 1 e a resposta das equipes

	Equipe	Situação 01	Situação 02
SITUAÇÃO 01 Com base nos seus conhecimentos sobre geometria plana e o artefato Tangram responda o que se pede: Você conhece o Tangram? Se sim, já utilizou ele alguma vez? **SITUAÇÃO 02** Com base na caixa que vocês receberam, respondam: a) Em quantas peças são formadas o Tangram? ___________ b) Qual o nome das figuras que compõem o Tangram?	01	"não"	a) 7 b) Triângulo, quadrado, paralelogramo
	02	"não"	a) 7 b) Não responderam
	03	"não"	a) 7 b) Paralelogramo, quadrado, triângulo

Fonte: O autor

Dos resultados presentes no quadro 11 é possível perceber que os grupos não haviam tido contato com o artefato tangram anteriormente, o que demonstra uma escassez na utilização de materiais manipuláveis dentro do processo de ensino-aprendizagem.

Dentre os grupos analisados, um deles não conseguiu identificar o nome das figuras que compõem o tangram, o que chama atenção tendo em vista que são alunos finalistas dos anos finais.

Um ponto importante a ser destacado é que nessa etapa da coleta de dados ocorreu uma situação não prevista na configuração didática que foi a utilização do refeitório para a execução da OI 1. Isso ocorreu pois não havia espaço suficiente na sala de aula para organizar as peças do tangram e os grupos de estudantes.

Figura 30 - Grupos em situação de instrumentalização do artefato tangram

Fonte: O autor

A figura 32 apresenta a distribuição dos estudantes durante a execução da OI 1 no qual estão divididos em grupos para a execução das situações. É importante destacar que nessa etapa da coleta tivemos uma dificuldade quanto a obtenção dos resultados, isso porque o quantitativo de estudantes realizando as situações acabou gerando um desgaste ao pesquisador quanto a demanda das dúvidas apresentadas por eles de como montar as figuras solicitadas. Logo, como sugestão para futuras pesquisas dentro dessa temática, ressaltamos a possibilidade de se trabalhar com um grupo menor a fim de obter resultados ainda mais precisos.

Ressaltamos ainda que apesar das dificuldades, a OI 1 possibilitou evidenciar nos três grupos escolhidos para a análise a ocorrência da dimensão da instrumentalização do artefato tangram, uma vez que os grupos foram capazes de construir as figuras solicitadas com as peças do tangram. Apesar de ser uma atividade simples, os estudantes, nesse primeiro contato com o tangram, tiveram a oportunidade de trabalhar com uma das principais características do artefato, que é construção de figuras utilizando o processo de decomposição e recomposição, processo que facilita a compreensão da invariância da área sem perda e sem sobreposição.

Figura 31 – Evidências da dimensão Instrumentalização do artefato tangram na OI 1.

SITUAÇÃO 03

Utilizando as peças do Tangram, faça o que se pede. Registre utilizando o smartphone.

a) Utilizando 1 triângulo médio, 2 triângulos menores e 1 quadrado, construa um quadrado.

b) Utilizando os 5 triângulos do Tangram construa um retângulo.

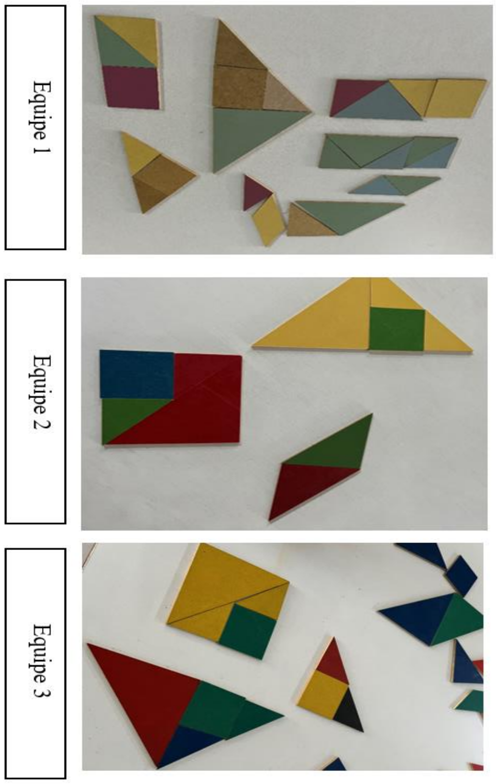
c) Utilizando 2 triângulos construa um paralelogramo.

d) Utilizando 1 triângulo médio, 2 triângulos menores e 1 quadrado, construa um triângulo.

e) Construa um trapézio utilizando 1 triângulo grande e 1 triângulo médio.

f) Construa um trapézio utilizando 1 paralelogramo e 1 triângulo pequeno.

g) É possível construir um triângulo com 2 triângulos e 1 quadrado? E um retângulo utilizando as mesmas peças?



Fonte: O autor

A figura 33 apresenta o resultado das três equipes. Desse modo, ressaltamos que ao construir as figuras solicitadas com as peças do tangram, e chegando à conclusão de que é possível construir figuras diferentes com as mesmas peças, inicia-se o trabalho com uma das dimensões da gênese Instrumental proposta por Rabardel (1995), que é a instrumentação. Isso porque o estudante precisa relacionar seu conhecimento anterior sobre área com as relações que o artefato apresenta, verificando e testando suas hipóteses que no caso específico dessa atividade, tratava-se da área de uma superfície e sua não-variação sem perda e sem sobreposição.

Além disso, de acordo com a figura 33 é possível perceber que nem todas as equipes conseguiram realizar todas as construções, mesmo com os direcionamentos de quais peças do tangram utilizar. Esse fato se deu pois houve uma dificuldade em criar um modelo mental e um esquema para a construção da figura utilizando as peças solicitadas.

Tal dificuldade apresentada pelos estudantes foram pontuais, mas nada referente ao artefato tangram, isto é, a dificuldade não estava relacionada com o artefato e nem com a matemática, mas sim no processo de compor a superfície, como por exemplo, como construir um triangulo utilizando três triângulos e um quadrado, de que maneira eles poderiam posicionar as figuras? Esse fato ocorreu em todos os grupos, onde a maioria conseguiu realizar apenas os dois primeiros comandos da situação proposta.

Apenas a primeira equipe conseguiu realizar todas as construções solicitadas no cartão de atividades e conseguiu responder a última questão acerca da possibilidade de construir um triangulo com dois triângulos e um quadrado e se era possível construir um retângulo utilizando as mesmas peças. A equipe deu a seguinte reposta: “sim, porque a área não muda, pois usamos as mesmas peças.” Desse modo, é possível perceber que houve sucesso na interação instrumento-objeto caracterizado como a dimensão da instrumentalização da gênese instrumental pois o instrumento (tangram) atendeu às necessidades de construção e manipulação do objeto (construção de superfícies).

Foi observado também, durante a realização da situação 03 da OI 1 que os estudantes sempre estavam dialogando entre eles, com o objetivo de partilhar ideias e hipóteses conforme a figura 32 apresentada anteriormente. O que evidencia o surgimento de esquemas de atividade coletiva instrumental, caracterizados, por Rabardel (1995), como a inserção dos sujeitos em uma atividade coletiva de esquemas de utilização, que apresentam a coordenação de ações individuais e a integração de seus resultados para atender aos objetivos comuns.

Por meio desses resultados, a OI 1 foi desenvolvida de forma satisfatória no ambiente formado uma vez que os esquemas de uso, classificados por Rabardel (1995) como as atividades relacionadas ao funcionamento e manipulação, neste caso, do tangram, foram desenvolvidos com êxito pelos grupos o que caracteriza a ocorrência da dimensão instrumentalização da gênese instrumental.

Destacamos que apesar dos grupos 2 e 3 mesmo apresentando dificuldade em organizar as peças do tangram para montar as superfícies solicitadas também passaram pela dimensão da instrumentalização uma vez que esta dimensão da gênese não acontece de forma independente, isto é, não necessariamente acontece a dimensão de instrumentalização e depois a instrumentação, elas são imbricadas e acontecem ao longo de todo o processo da gênese instrumental.

A segunda OI teve como foco proporcionar a instrumentação do artefato tangram, isto é, a interação [S-(I)-O] onde os estudantes deveriam utilizar o tangram para resolver as situação propostas no cartão de atividades 02 presente no APÊNDICE C da pesquisa. Para tanto, foram entregue para as equipes dois tangram completos e um cartão de atividade.

A primeira situação do cartão de atividade direcionava as equipes para construir duas figuras utilizando as peças do tangram na qual estes deveriam comparar a área e o perímetro dessas. A figura 34 apresenta a situação 01 da OI 2.

Figura 32 - Situação 01 da OI 2

Utilizando as peças do Tangram, construa as figuras abaixo:

Considere algumas afirmações sobre a área e o perímetro das figuras que vocês construíram. Vocês concordam com essas afirmações? Explique sua resposta.

a) A área da Figura 1 é menor que a área da figura 2?

b) As áreas da figura 1 e da figura 2 são equivalentes?

c) Os perímetros das figuras 1 e 2 são iguais?

d) O perímetro da figura 2 é menor que o perímetro da figura1?

Fonte: O autor

Abaixo está um quadro com as respostas das equipes para a situação acima. Ressaltamos que mantivemos a escrita fiel as respostas apresentadas por eles no cartão de atividades.

Quadro 12 - Resposta das equipes para a situação 01 do cartão de atividades utilizado na OI 2

Equipe	**Situação 01**
01	a)“não, pois em ambas são usadas as mesmas peças.”
	b)“sim, pois são as mesmas peças.”
	c)“não, a figuras 1 é 16 e a figura é 12.”
	d) “sim.”
02	a) “não, as duas contêm as mesmas 7 peças”
	b) “sim, porque possuem as mesmas peças”
	c) “sim, pois tem a mesma quantidade”
	d) “não, pois tem a mesma quantidade”
03	a) “não”
	b) “sim”
	c) “não”
	d) “sim”

Fonte: O autor

Do quadro 12 é possível notar que as três equipes concordam que ambas as figuras possuem as mesmas áreas utilizando como esquema o processo de decomposição e recomposição de figuras. Todavia, em relação a comparação dos perímetros há uma dificuldade analítica em perceber qual perímetro é maior e qual é menor. Essa dificuldade é observada anteriormente na avaliação a priori e está relacionada a não utilização do quadro das grandezas durante as atividades corriqueiras da sala de aula. Desse modo se faz necessário repensar o ensino das grandezas em sala de aula no qual contemple tal tipo de situação.

A situação 02 da OI 2 gerou discussões e reflexões nas equipes na qual foi possível evidenciar a dimensão instrumentação do artefato tangram. Nessa situação, era dado a medida do lado do tangram e era solicitado que as equipes encontrassem a medida da área de todas as sete peças partindo da premissa que o lado do quadrado formado por todas as sete figuras do tangram era de 14 cm conforme a figura 35.

Figura 33 - Situação 02 da OI 2

SITUAÇÃO 02

Utilizando as sete peças do Tangram construa um quadrado. Sabendo que o quadrado formado por todas as sete peças possui 14 cm de lado determine as áreas de cada uma das peças do Tangram abaixo:

a) Triângulo isósceles maior:_________________
b) Triangulo isósceles maior:_________________
c) Triangulo isósceles médio:_________________
d) Triangulo isósceles menor:_________________
e) Triangulo isósceles menor:_________________
f) Quadrado:____________
g) Paralelogramo:_____________

Fonte: O autor

Nessa situação, os estudantes utilizaram bastante tempo para responder a situação proposta o que influenciou a não realização das outras situações do cartão de atividades. Todavia, os dados obtidos dessa situação nos possibilitaram evidenciar a ocorrência da dimensão instrumentação do processo da gênese instrumental. Isso poque foi possível perceber os estudantes utilizando o tangram para resolver a situação, o diálogo continuo entre os membros das equipes conforme a figura 36.

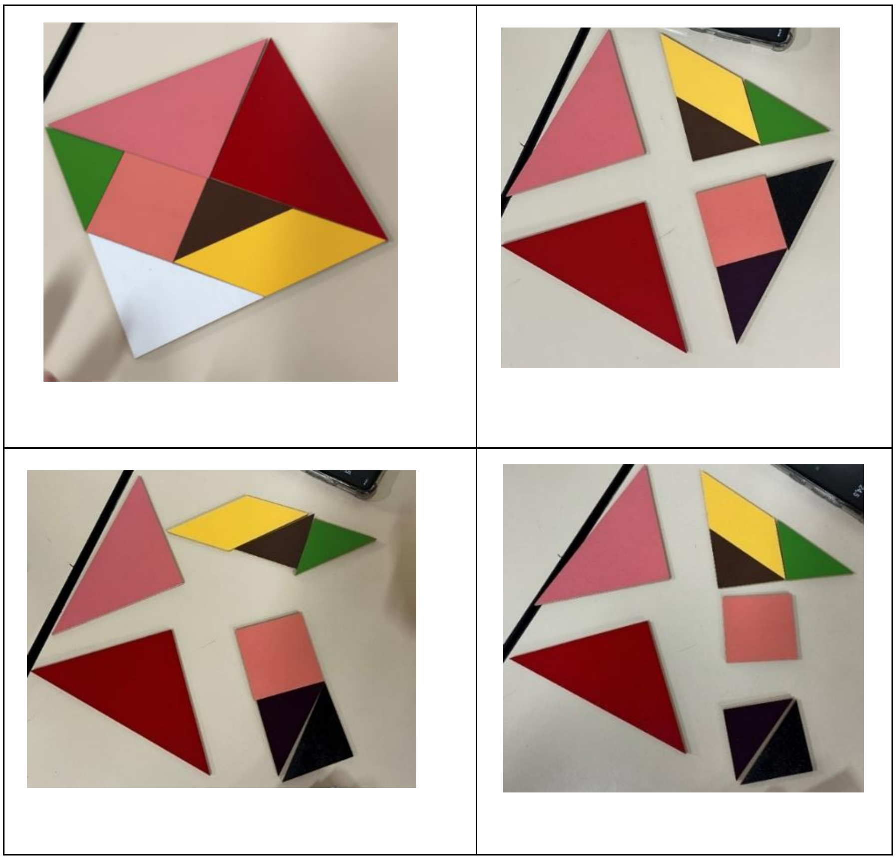
Figura 34 - Equipes durante o processo de instrumentação da gênese instrumental

Fonte: O autor

Nessa situação, surgiram alguns esquemas mobilizados pelas equipes que podem ser evidenciados nos fragmentos do cartão de atividades e nos registros por meio de vídeos e fotos dos estudantes em situação. Solicitamos que os estudantes tentassem explicar o processo resolutivo da situação na qual foi gravado e transcrito na pesquisa.

A equipe 1 utilizou o processo de decomposição e composição de figuras para a resolução da situação conforme a figura 37.

Figura 35 - Esquema mobilizado pela equipe 1 na resolução da situação 02 da pesquisa



Fonte: O autor

A seguir apresentamos a descrição da explicação da equipe na resolução da situação conforme explicado por eles durante a gravação dos possíveis esquemas mobilizados. Ressaltamos que mantivemos fieis as falas dos estudantes. Abaixo está apresentado a descrição.

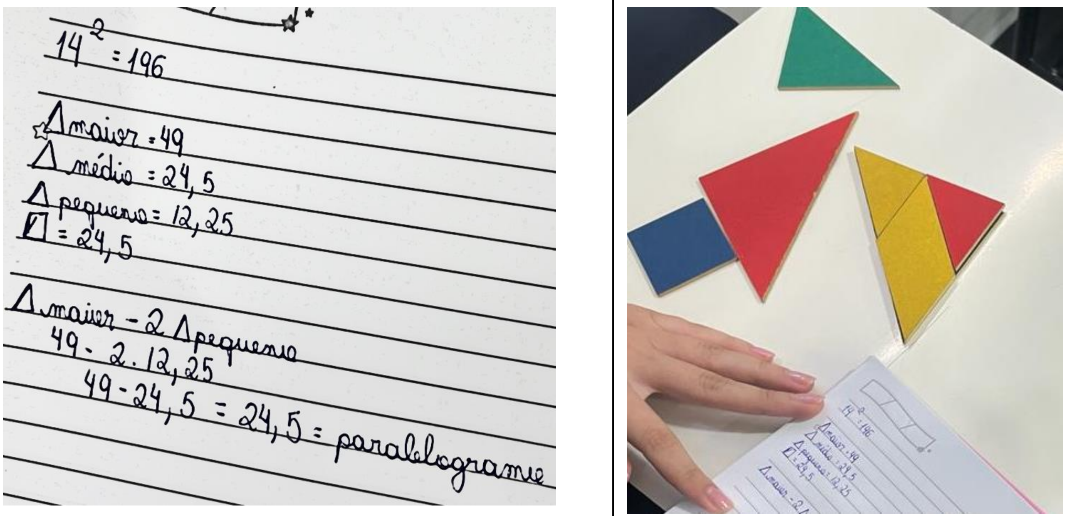
Equipe 1: “Utilizamos o processo de decomposição e recomposição de figuras, primeiro calculamos a área do tangram com todas as peças, como a figura montada forma um quadrado de lado 14 cm sua área deu 196 cm². Em seguida dividimos a figura em dois triângulos que deu 98 cada triângulo, no triângulo formado por dois outros triângulos dividimos por dois novamente que deu 49 cm cada.

Em seguida fomos apenas colocando uma figura sobre a outra para obter a medida das outras figuras. Pegamos dois triângulos menores e montamos outros dois triângulos médios parecidos, em seguida observamos que os quatro triângulos possuíam área igual a 49. Do triangulo formado por um quadrado e dois triângulos menores observamos que os triângulos menores formavam um quadrado então dividimos 49 por dois.

A área do quadrado é 24,5 e como os dois triângulos menores formam um quadrado dividimos por dois novamente e descobrimos que cada triângulo tem área 12,25. No último triângulo, observamos que ele é formado por um paralelogramo e por dois triângulos menores, como já tínhamos calculado a área de cada triângulo menor, tentamos colocar os triângulos sobre o paralelogramo e ficou igual. Logo a área do paralelogramo é de 24,5.”

A equipe 2, utilizou um procedimento semelhante a equipe 1 no qual utilizou como esquema o processo e decomposição e recomposição. Para tanto, eles evocaram os esquemas apresentados na figura 38.

Figura 36 - Esquema mobilizado pela equipe 2 na resolução da situação 02 da pesquisa



Fonte: O autor

A seguir apresentamos a descrição da explicação da equipe na resolução da situação conforme explicado por eles durante a gravação dos possíveis esquemas mobilizados.

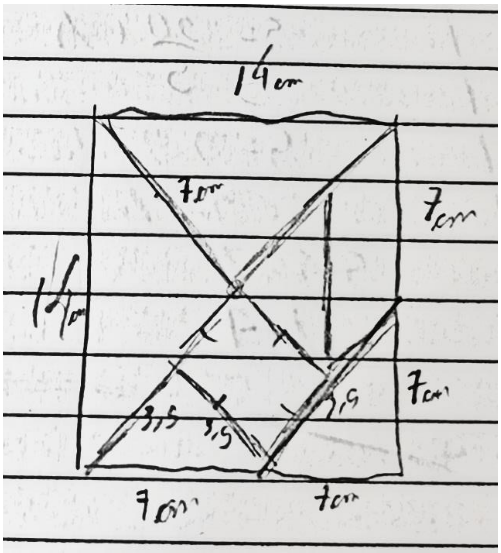
Equipe 2: Primeiro calculamos a área total do tangram, como a figura formada com as sete peças é um quadrado de lado 14, então elevamos o lado ao quadrado e encontramos a sua área. Quando observamos a figura vimos que ela era formada por dois triângulos, um contendo cinco peças e outro contendo duas peças. Para saber a área desses dois triângulos dividimos por dois que deu 98.

Como uma das metades era uma figura formada por triângulos maiores iguais dividimos novamente por dois e deu 49. Ai a gente só foi tentando montar figuras iguais às que a gente já sabia a área. Vimos que o triangulo médio era metade do triângulo maior quando nos colocamos uma peça sobre a outra então a área dele era 24,5. E usamos o mesmo raciocínio para o triangulo pequeno, ele é metade do triangulo médio então ele vale 12,25.

Como o quadro e formado por dois triângulos pequenos então sua área é 24,5. E par descobrir a área do paralelogramo nos somamos as áreas conhecidas e subtraímos a área do triangulo maior.”

A equipe 3 tentou utilizar as fórmulas do cálculo de áreas das figuras utilizando conceitos de geometria plana. A figura 39 apresenta o esquema utilizado pela equipe.

Figura 37 - Esquema mobilizado pela equipe 3 na resolução da situação 02 da pesquisa



Fonte: O autor

A seguir apresentamos a descrição da explicação da equipe na resolução da situação conforme explicado por eles durante a gravação dos possíveis esquemas mobilizados.

Equipe 3 - “Primeiro desenhamos cada figura dentro do quadrado, como o lado é 14 cm dividimos por dois onde obtemos 7cm conforme indicado no desenho. Utilizamos a fórmula da área do triângulo que é base vezes altura dividida por dois onde obtemos 49. Tentamos fazer o mesmo processo para outras figuras tentando utilizar as fórmulas para o cálculo de área, mas deu errado.

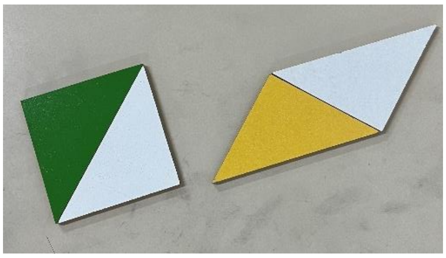
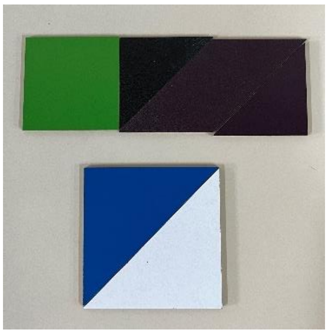
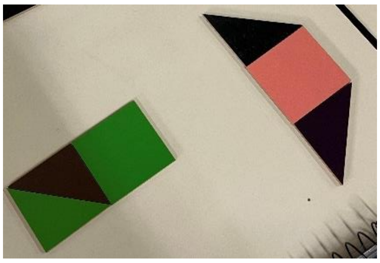
Tentamos também calcular a área total do tangram e dividir pela quantidade de peças, mas com a orientação do professor conseguimos perceber que se fizemos esse procedimento ele seria errado, pois se olharmos as sete figuras tem tamanhos diferentes. Depois de algumas tentativas e com as dicas do professor, conseguimos resolver colocando uma figura sobrea a outra e tentando igualar a área encontrada. Como já tínhamos encontrado a área das sete peças juntas, dividimos por dois e formou dois triângulos que tinham a mesma área. Depois fomos juntando as peças menores e tentamos formar uma figura igual a outra para comparar a área e ver se era igual ou não.”

Figura 38 - Esquema mobilizado pela equipe 3 na resolução da situação 02 após orientação.

Fonte: O autor

As demais situações da OI 2, tratavam da construção de figuras utilizando as peças do tangram dos quais os estudantes deveriam comparar as áreas e perímetros dessas construções. Como resultado, as três equipes conseguiram de modo satisfatório resolver as situações. A figura 41 apresenta algumas dessas construções.

Figura 39 - Construção das equipes

Fonte: O autor

Desse modo, é possível perceber as várias interações que ocorrem nas atividades instrumentais, denominadas por Rabardel (1995) como modelo SAI presente no referencial teórico do trabalho. Dentre elas temos:

• **A relação sujeito-objeto:** as equipes conseguiram observar de forma satisfatória as ações transformadoras dirigidas sobre o objeto que, no caso, era o cálculo da variação da área e perímetro por meio do tangram no qual era necessário utilizar a decomposição e recomposição de figuras para resolver a situação proposta.

• **A relação sujeito-instrumento:** as equipes conseguiram realizar todo o processo de construção e manipulação do objeto (área e perímetro), utilizando as características e propriedades fornecidos pelo instrumento (tangram), para chegar às conclusões sobre a variância de área e perímetro e comparação entre áreas.

• **A relação instrumento-objeto:** o instrumento (Tangram) atendeu às necessidades de construção e manipulação do objeto (área e perímetro).

• A relação sujeito-objeto mediada pelo instrumento: consequência da boa realização das demais interações.

Por meio desses resultados, a OI 2 foi desenvolvida de forma satisfatória no ambiente formado pelo conjunto de condições que o sujeito deve levar em conta para realizar sua atividade, que é o modelo SAI de Rabardel (1995). Dessa forma, os esquemas de ação instrumental, que são, de acordo com Rabardel (1995), orientados ao objeto da atividade (nesse caso os conceitos de área e perímetro) no qual o artefato (tangram) é um meio de concretização e de realização, também foram bem desenvolvidos pelos grupos de estudantes o que caracteriza a ocorrência da dimensão instrumentação da gênese instrumental.

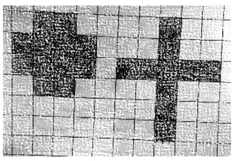
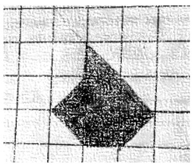
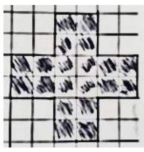
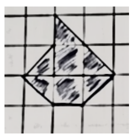
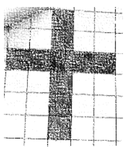
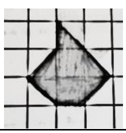
Observou-se também, durante a realização da OI 2 assim como a OI 1 os esquemas de atividade coletiva instrumental através da observação do dialogo dos estudantes durante a realização das situações para atender aos objetivos comuns.

Assim, a partir dos dados apresentados e discutidos, há evidências da ocorrência do processo da gênese instrumental do artefato tangram, uma vez que as equipes foram capazes de utilizar o tangram para resolver as situações solicitadas.

Em relação a ocorrência do processo da gênese instrumental da malha quadriculada, a OI 3 e a OI 4 trataram das duas dimensões desse processo no qual tiveram como objetivo proporcionar a instrumentalização e a instrumentação do artefato malha quadriculada respectivamente.

A OI 3 teve como objetivo proporcionar aos estudantes, durante o desempenho didático, um contato com o artefato malha quadriculada a fim de conhecer as propriedades da malha. Essa etapa descrita na pesquisa corresponde a dimensão de instrumentalização da gênese instrumental presente na interação [I-O], [O-I] (instrumento ↔ objeto). O quadro 13 apresenta as respostas dos grupos para o cartão de atividades do APÊNDICE D onde é possível evidenciar a ocorrência da dimensão instrumentalização.

Quadro 13 - Resposta das equipes para as situações do cartão de atividades utilizado na OI 3

Equipe	**Situação 01**	**Situação 02**	**Situação 03**	
01	Não	Quadrado Sim 1 cm	 	A área e o perímetro do item a) aumentaram e do item b) diminuiu.
02	Não	Quadrado Sim 1cm de lados	 	Na figura 1, os quadrados que eram 1 cm de cada lado aumentaram a mais cada lado, formando uma cruz maior do que a figura inicial. Na segunda figura, ampliamos a figura diminuindo 1 quadrado a menos de cada quadrado, por exemplo, dois quadrados formaram 1.
03	Não	Quadrado Sim 1 cm	 	A a) aumentou e a b) diminuiu

Fonte: O autor

Conforme apresentado no quadro 21, os grupos não haviam tido contado ainda com a malha quadriculada, todavia, foram capazes de resolver as situações propostas e evocaram os conhecimentos necessários para análise, além disso, as equipes durante os diálogos observados, perceberam as mudanças realizadas ao ampliar ou diminuir figuras. Desse modo, é possível perceber que houve interação instrumento-objeto caracterizado como a dimensão da instrumentalização da gênese instrumental pois o instrumento (malha quadriculada) atendeu às necessidades de construção e manipulação do objeto (área e perímetro de figuras).

A última OI teve como foco proporcionar a instrumentação do artefato malha quadriculada, isto é, a interação [S-(I)-O] onde os estudantes utilizaram a malha quadriculada para resolver as situação propostas no cartão de atividades 04 presente no APÊNDICE E da pesquisa. Para tanto, foram entregue para as equipes malhas quadriculadas e um cartão de atividade. A primeira situação do cartão de atividade direcionava as equipes para cobri a malha utilizando algumas figuras como unidade de medidas. O quadro 13 apresenta os resultados obtidos nessa OI.

Quadro 13 - Resposta das equipes para a situação 01 do cartão de atividades utilizado na OI 4

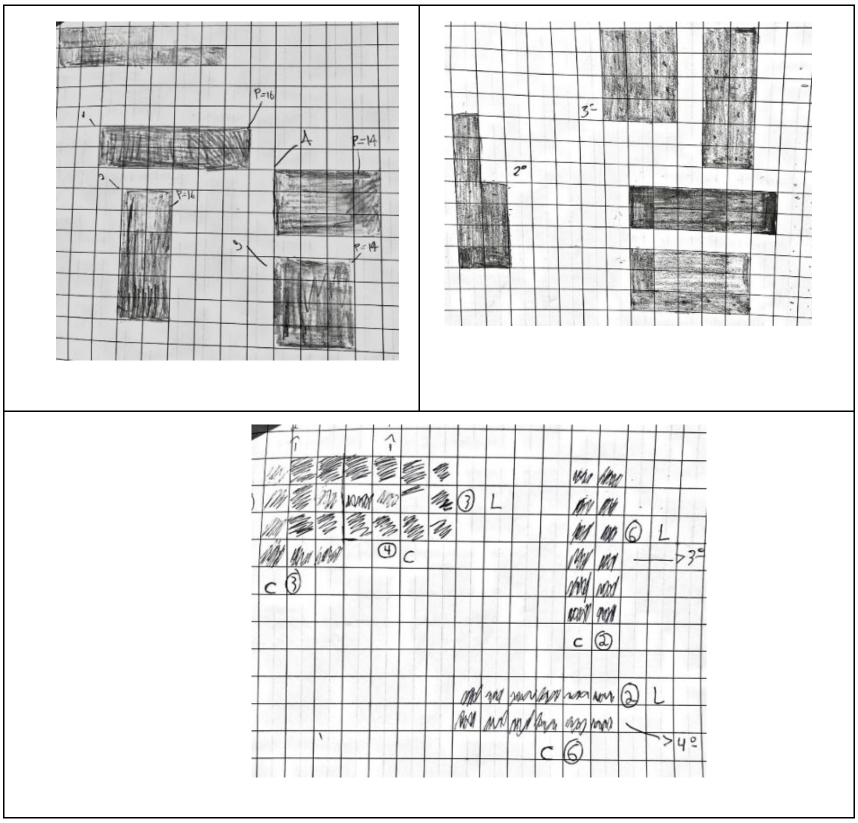
Equipes	**Letra a)**	**Letra b)**	**Letra c)**
01	A medida da malha ao todo da 600, fazendo a multiplicação entre lado vezes lado.	150. Já que quando usamos um quadrado como unidade de medida e agora aumentamos para quatro. Apenas dividimos por quatro.	300, porque agora é dois quadrados. Assim juntamos as duas metades do triangulo que formou um quadrado então dividimos por dois.
02	Existe 600 quadrados, como existe 20 quadrados de cada coluna, fomos contando de coluna por coluna.	Como existe 600 quadrados na malha, somente dividimos por quatro resultando em 150 quadrados	Como temos um quadrado inteiro e dois pedaços separados, somente fizemos a junção dos dois quadrados cortados que resulta em outro quadrado. Como temos dois quadrados dividimos por dois resultando em 300.
03	600 multipliquei o comprimento	150, multipliquei a altura veze o comprimento	150, multipliquei a altura vezes o comprimento.

Fonte: O autor

Do quadro é possível perceber que as equipes 01 e 02 conseguiram compreender o objetivo da situação além de usar a malha quadriculada de forma correta. Todavia, a equipe 03 acabou respondendo essa situação de forma aleatória o que evidencia o uso inadequado da malha para a situação proposta. Ressaltamos que essa OI priorizou as situações de produção presente no quadro das grandezas uma vez que a malha quadriculada proporciona tais construções onde os estudantes podem comparar resultados.

As demais situações presentes no APÊNDICE E trataram da produção de figuras a partir de alguns comandos presentes no cartão de atividades. Essas produções tinham como objetivo verificar a variação de área e perímetro. Ressaltamos que devido ao tempo disponibilizado pelo professor da turma, as equipes não conseguiriam concluir todas as situações. A figura 42 apresenta as produções das equipes.

Figura 40 - Esquema mobilizado pelas equipes na produção das superfícies



Fonte: O autor

Dos resultados acima e tendo como base as situações presentes nos cartões de atividades, elencamos a seguir as interações do modelo SAI de Rabardel (1995).

• **A relação sujeito-objeto:** as equipes no geral conseguiram realizar ações dirigidas sobre o objeto que, no caso, era produzir retângulos e verificar a mudança de área e perímetro.

• **A relação sujeito-instrumento:** as equipes conseguiram realizar o processo de manipulação do objeto (área e perímetro), utilizando as características e propriedades fornecidos pelo instrumento (malha quadriculada), para chegar às conclusões solicitadas no cartão de atividades.

• **A relação instrumento-objeto:** o instrumento (malha quadriculada) atendeu às necessidades de construção e manipulação do objeto (área e perímetro).

• **A relação sujeito-objeto mediada pelo instrumento:** consequência da boa realização das demais interações.

Esses resultados evidenciam a ocorrência do processo de gênese instrumental na interação com o artefato malha quadriculada para as classes de situações propostas, uma vez que foi possível apresentar fragmentos que demonstram os possíveis esquemas mobilizados pelas equipes durante as dimensões de instrumentalização e instrumentação da gênese instrumental. De modo geral, foi possível verificar as interações que ocorreram com os artefatos utilizados (tangram e malha quadriculada) nas atividades instrumentais da pesquisa.

Em relação à gênese instrumental, verificou-se que os grupos de estudantes conseguiram alcançar o processo de instrumentalização, uma vez que, foram capazes de utilizar corretamente as prioridades necessárias do tangram e da malha quadriculada para a construção de superfícies. Também foi possível verificar que essas propriedades colaboraram para a ocorrência da instrumentação, uma vez que, ao manipular as potencialidades dos artefatos, os estudantes condicionaram suas ações para responder às situações propostas através da mobilização de esquemas.

Asim, os esquemas de uso (Rabardel, 1995) foram desenvolvidos de forma satisfatória pelos estudantes para as classes de situações solicitadas, caracterizando, então, a ocorrência do processo de instrumentalização da gênese instrumental. Já os esquemas de ação instrumental, que são, de acordo com Rabardel (1995), orientados ao objeto da atividade (nesse caso os conceitos de área e perímetro) no qual os artefatos (tangram e malha quadriculada) são um meio de concretização e de realização, também foram bem desenvolvidos pelos grupos de estudantes o que caracterizou a ocorrência da dimensão instrumentação da gênese instrumental.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando a hipótese deste estudo, esta pesquisa possibilitou a análise de sujeitos em situação de aprendizagem mediadas por instrumentos. Desse modo, buscamos identificar através dos esquemas mobilizados pelos estudantes o processo da gênese instrumental no qual um sujeito transforma um artefato em instrumento.

Por meio dos dados apresentados na avaliação a priori da pesquisa, constatou-se que os estudantes apresentam dificuldades conceituais acerca dos conceitos de área e perímetro quando trabalhados dentro do campo conceitual das grandezas geométricas. Essas dificuldades foram observadas a partir da análise dos invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em ação) presentes nos esquemas mobilizado por eles durante a situação de aprendizagem.

Tal resultado é observado no levantamento bibliográfico da pesquisa e reforça que o ensino de área e perímetro nas escolas tem priorizado apenas o quadro numérico e/ou geométrico o que acaba gerando concepções errôneas quando se trabalha no quadro das grandezas geométricas. Ao analisar os conhecimentos evocados pelos estudantes, foi possível perceber que estes acreditam que a modificação do contorno de uma região implica, necessariamente na mudança de todos os outros atributos dessa região, como, por exemplo, sua área, o que gera teoremas-em-ação falsos, daí a importância de traçar estratégias a fim de contornar tais concepções.

Para tanto, buscamos por meio do referencial teórico da pesquisa desenvolver uma estratégia no qual fosse possível superar essas dificuldades. Como aporte teórico, utilizamos a TCC (teoria dos campos conceituais) de Verganud (1989), a abordagem instrumental de Rabardel (1995) e a Teoria da orquestração instrumental de Trouche (2005).

As orquestrações instrumentais elaboradas para a pesquisa tiveram como objetivo favorecer a gênese instrumental dos sujeitos. Para tanto, planejamos uma composição de quatro orquestrações instrumentais denominadas O1, OI 2, OI 3 e OI 4 todas idealizadas para serem realizadas na sala de aula. Estas orquestrações instrumentais ocorreram consecutivamente, sem intervalo entre ambas e possuíram finalidades distintas. Cada uma tinha uma situação proposta que deveria ser resolvida pelos grupos de estudantes no qual possível identificar através dos seus esquemas as dimensões de instrumentalização e instrumentação da gênese instrumental.

A partir dos dados analisados dessa etapa, concordamos que as orquestrações instrumentais favoreceram a ocorrência do fenômeno, isto é, a mobilização dos esquemas de uso, ação instrumental e ação coletiva instrumentada, caracterizando assim o fenômeno da gênese instrumental para os grupos de estudantes. Acredita-se que a resolução das situações e as aprendizagens daí decorrentes foram favorecidas pelo trabalho em grupo, pelo diálogo com colegas e intervenções do pesquisador, pela prática da explicação, pela resolução colaborativa e pelas discussões realizadas após a atividade.

Um aspecto a ser considerado como limitação em relação ao estudo aqui proposto consiste no tempo para a coleta de dados e no quantitativo de estudantes participantes. Na avaliação a priori, por exemplo, no momento da sua aplicação, identificamos que os estudantes não possuíam noções quanto aos objetos matemáticos trabalhados, logo foi necessário uma revisão desses conceitos o que necessitou de um tempo maior, fato este que compromete o cronograma do professor da turma quanto a ministração dos conteúdos programáticos. Do mesmo modo as orquestrações instrumentais, o curto tempo impediu que mais dados pudessem ser coletados nas orquestrações, esse fato é observado quando se analisa o cartão de atividades e observamos questões não respondidas pelos grupos.

Diante dessas análises, o estudo revelou que algumas dificuldades conceituais apresentadas na avaliação a priori foram superadas mediante intervenção da pesquisa. Esse fato é observado nos dados gerados das orquestrações instrumentais onde os grupos de estudantes conseguem tratar área e perímetro como grandezas geométricas quando utilizam o tangram e a malha quadriculada para resolver as situações.

Esse estudo constatou, portanto, que a utilização da abordagem instrumental de Rabardel (1995) permitiu a análise da utilização dos artefatos tangram e malha quadriculada em situação de aprendizagem sobre área e perímetro em uma sequência de orquestração instrumentais. Há de se destacar, porém, que esquemas são a todo momento utilizados e adaptados, evoluindo, a depender da situação a qual o indivíduo se depara. Desse modo, analisar as ações e as noções de área e perímetro de figuras planas que estudantes do 9° ano mobilizam quando resolvem uma situação é entender os esquemas mobilizados por eles quanto manipulam um determinado artefato a fim de resolver uma dada situação.

Assim, o estudo aqui apresentado possibilitou discussões sobre a utilização da orquestração instrumental articulada aos materiais manipuláveis como um modelo teórico no processo de ensino-aprendizagem que favorece a gênese instrumental dos estudantes e proporciona melhores níveis de aprendizagem, reduzindo as dificuldades conceituais dos estudantes, sendo um modelo integrador entre teoria e prática no campo de pesquisa em Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira; ALENCAR, Sergio Vicente. A Gênese Instrumental na Interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, p. 349-365, 2013.

ALENCAR, Sergio Vicente. A gênese instrumental na interação com o Geogebra: proposta de uma oficina para professores de matemática. 2012. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

ARAÚJO, Ulisses F. A dimensão afetiva da psique humana e a educação em valores. **Afetividade na escola: alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus**, p. 153-169, 2003.

BALTAR, P. Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. 1996. 352 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BARBOSA, P. R. Efeitos de Visualização em Atividades de Comparação de Comprimentos de Linhas Abertas. Tese de Doutorado em Educação. UFPE. Recife, 2007.

BÉGUIN, Pascal; RABARDEL, Pierre. Designing for instrument-mediated activity. **Scandinavian journal of information systems**, v. 12, n. 1, p. 1, 2000.

BELLEMAIN, Franck; TROUCHE, Luc. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático/comprendre le travail des professeurs avec les ressources de leur enseignement, un questionnement didactique et informatique. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, v. 9, n. 1, 2019.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Estudo de situações problema relativas ao conceito de área. **Encontro de Didática e Prática de Ensino**, v. 10, 2000.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; BIBIANO, Marta Fernanda de Araújo; SOUZA, Cristiane Fernandes de. Estudar grandezas e medidas na Educação Básica. Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Recife, v. 9, n. 1, p. 1-16, 2018.

BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; LIMA, Paulo Figueiredo. Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental. **Geral: John A. Fossa. Natal: SBHMat**, 2002.

BITTAR, Marilena. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em revista**, p. 157-171, 2011.

BITTAR, Marilena. A escolha do software educacional e a proposta didática do professor: estudo de alguns exemplos em matemática. In: BELINE, Willian; COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da (org.). Educação matemática, tecnologia e formação de professores: algumas reflexões. Campo Mourão: Editora de Fecilcam, 2010. p. 215- 243.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 0Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BORGES, Juliana Rosa Alves. Metodologia De Análise De Dados Na Pesquisa Qualitativa: A Análise De Conteúdo. **Revista GeTeC** , v. 9, n. 24 de 2020.

BOYER,Carl Benjamin. História da matemática; tradução: Elza F. **Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo**, 1974.

BUSSOLOTTO, Débora. Gênese instrumental do GeoGebra 3D: um estudo no ensino médio normal/magistério. 2019. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF, 1998

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

CALDEIRA, Maria Filomena Tomaz Henriques Serrano et al. **A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática**. Universidad de Málaga, Servicio de Publicaciones, 2009.

CHAPPELL, Michaele F.; THOMPSON, Denisse R. Take Time for Action: Perimeter or Area? Which Measure Is It? **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 5, n. 1, p. 20-23, 1999.

CORSO, Luciana Vellinho; DORNELES, Beatriz Vargas. Senso numérico e dificuldades de aprendizagem na matemática. **Revista Psicopedagogia**, v. 27, n. 83, p. 298-309, 2010.

COSTA, André Pereira da; VILAÇA, Marcel Muniz; MELO, Larisse Vieira de. O ensino de Grandezas e Medidas em um documento curricular oficial para o ensino básico. **Ensino em Re-Vista**, v. 27, n. 3, p. 934-955, 2020.

COUTO, Rosilângela Maria de Lucena Scanoni. Metaorquestração instrumental: um modelo para repensar a formação de professores de matemática. 2018.

CUNHA, D. M. DA; FERREIRA, J. L.; COSTA, A. P. DA. Qual a Medida dessa Grandeza? Uma Revisão da Literatura sobre Grandezas e Medidas. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 15, n. 37, p. 1-26, 27 abr. 2022.

DANTE, L. R. Tudo é Matemática. 3. ed. São Paulo: editora ática, 2010.

DANTE, L. R. Matemática volume único. 1. ed. São Paulo: editora ática, 2005.

Denzin N. *The research act: a theoretical introduction to sociological methods* Routledge: London; 2009.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics.** Dordrecht, the Netherlands, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVMEIJER, K. The Teacher and the Tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. Educacional Studies in Mathematics, v. 75, n. 2, p. 213-234, 2010.

DROUET, Ruth Caribé da Rocha. Distúrbios da aprendizagem. São Paulo: Editora Ática, 1998.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, p. 11-34, 2003.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Unicamp, 1995.

FERREIRA, L. F. D. A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3o ciclo do ensino fundamental: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

FERREIRA, L. F. D. Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

FIGUEIRA, Angela C. M.; ROCHA, João B. T. **Investigando as concepções dos estudantes do ensino fundamental ao superior sobre ácidos e bases**. Revista Ciências & Ideias, Rio de Janeiro, v. 3, n. 1, p. 1-21, 2011

FLICK, Uwe. Introdução à pesquisa qualitativa. 3ª edição. **Porto Alegre: Armed**, 2009.

FREIRE, Amanda Freitas; et.al. O Uso do Geoplano no Ensino de Geometria: Cálculo de Área e Perímetro. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. São Paulo, v. 3, p. 119-135, jun. 2018.

FRENCH, D. Teaching and learning geometry. London: Continuum, 2004.

GARCIA, Jesus Nicácio. Manual de dificuldades de aprendizagem: linguagem, leitura escrita e Matemática. Tradução de Jussara Haubert Rodrigues. Porto Alegre: Artmed, 1998.

GIL, Antonio Carlos et al. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GITIRANA, Veronica et al. Repensando multiplicação e divisão: contribuições da teoria dos campos conceituais. **São Paulo: PROEM**, 2014.

GONZÁLEZ, B. El modelo analógico como recurso didáctico en ciencias experimentales. Revista Iberoamericana de educación, v. 37, n. 2, p. 1-15, 2005.

HENRIQUES, Alfonso. Abordagem Instrumental e aplicações. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 3, p. 247-280, 2021.

KIEFER, Juliana Gabriele; MARIANI, Rita de Cássia Pistóia. Área como Grandeza Geométrica: uma metanálise de produções stricto sensu sob ponto de vista cognitivo dinâmico (2007-2018). **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 35, p. 1573-1592, 2022.

LEIVAS, José C.P.; MEDEIROS, Maria L.G.; SILVEIRA, Márcia C. s. Fundamentos teóricos e metodológicos da matemática. Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). Curitiba, 2008

LEONARDO, F. M. d. **Conexões com a Matemática**. 1. ed. São Paulo:Moderna, 2020.

LIMA, Elon Lages et al. A Matemática do Ensino Médio Vol. 1–SBM. **Rio de Janeiro**, 2006.

LIMA, P, F. BELLEMAIN, P. M. B. Coleção explorando o ensino: Grandezas e medidas. Matemática. Brasília, DF: 2010. p. 169-201.

LIMA, P. F., BELLEMAIN, P. M. B. Grandezas e Medidas In: Matemática: Ensino Fundamental (Coleção Explorando o Ensino).1 ed. Brasília: Ministério da Educação: Secretaria da Educação Básica, 2010, v.17, p. 167-200.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados**, p. 03-37, 2006.

LUCENA, Rosilângela; GITIRANA, Verônica. Orquestração instrumental da tutoria online da Geometria Analítica. In: **XIV Conferência Interamericana de Educación Matemática**. 2015.

LUCENA, Rosilângela; GITIRANA, Verônica; TROUCHE, Luc. Formação de professores para integração de recursos no ensino de matemática: contribuições da meta-orquestração instrumental. **O Entusiasta da Matemática**, v. 19, n. 1, pág. 187-221, 2022.

MASOLA, Wilson; ALLEVATO, Norma. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. **Educação Matemática Debate**, v. 3, n. 7, p. 52-67, 2019.

MIRANDA, Steffani Maiara Colaço et al. Perímetro e área: análise de pesquisas sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica. 2018.

MOL, Rogério Santos. Introdução à história da matemática. **Belo Horizonte: CAED-UFMG**, 2013.

MONCEAU, Gilles. Transformar as práticas para conhecê-las: pesquisa-ação e profissionalização docente. **Educação e Pesquisa**, v. 31, p. 467-482, 2005.

MOREIRA, Marli Duffles Donato. **REVISITANDO EUCLIDES PARA O ENSINO DE ÁREAS: UMA PROPOSTA PARA AS LICENCIATURAS**. 2010. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

MOREIRA, Marco Antônio. Grandes desafios para o ensino da física na educação contemporânea. Revista do professor de física, v. 1, pág. 1-13, 2017.

MOREIRA, Marco Antonio. Uma alternativa para o ensino da dinâmica a partir da resolução quantitativa de problemas na perspectiva dos campos conceituais. Encontro Estadual de Ensino de Física. (1.: 2005 nov. 24-26: Porto Alegre, RS). Atas. Porto Alegre: Instituto de Física-UFRGS, 2006., 2006.

MOSCOVICI, S. Representações sociais: investigações em psicologia social. 5ª Edição. Trad. P.A. Guareschi. Petrópolis: Editora Vozes, 2007.

National Council of Teachers of Mathematics. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

O'CONNOR, Katherine A.; GREENE, H. Carol; ANDERSON, Patricia J. Action Research: A Tool for Improving Teacher Quality and Classroom Practice. **Online Submission**, 2006

OELERICH, Gertrud; OTTO, Hans-Uwe (Ed.). **Empirische Forschung und Soziale Arbeit: Ein Studienbuch**. Springer-Verlag, 2011.

OLIVEIRA, G. R. F. Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso. 2002. 135 f. Dissertação (mestrado em educação) – Centro de Educação - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Autêntica, 2016.
PAIS, Luiz Carlos.Ensinar e aprender Matemática. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2013.

PARRA, Cecília. SAIZ, I. Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre, Artmed. 1996.

PEREIRA, Francine Baranoski et al. Compreensão Leitora de Problemas Matemáticos no Eixo “Grandezas” e “Medidas”: Um Estudo Comparativo entre respostas de alunos e o resultado da Prova Brasil. **REPPE-Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino**, v. 3, n. 1, p. 148-163, 2019.

PESSOA, Gracivane da Silva. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis**. 2010. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

PIAGET, Jean. A teoria de Piaget. In: MUSSEN, P. H. (org). Psicologia da criança. Desenvolvimento Cognitivo. São Paulo: E.P.U. 1975. Vol. 4, p. 71-117.

PIAGET, Jean. **O diálogo com a criança e o desenvolvimento do raciocíni**o. São Paulo: Scipione, 1997.

PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. **Geometria I. Florianópolis: EAD**. UFSC/CED/CFM, 2010.

PONTES, Eduarda Fernanda da Costa. **Uma composição de orquestrações instrumentais de formação sobre sala de aula invertida**. 2022. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

RABARDEL, P. Los Hombres y las Tecnologías: visión cognitiva de los instrumentos cognitivos. **Tradución de Martin Acosta Gempeler. Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas. Colômbia**, 2011.

RABARDEL, Pierre. Instrumento Qu'est-ce qu'un. **Les dossiers de l'Ingénierie éducative**, v. 19, p. 61-65, 1995.

RABARDEL, Pierre. People and technology—a cognitive approach to contemporary instruments. 2002.

RELVAS, Marta P. Neurociência e transtornos de aprendizagem: as múltiplas eficiências para uma Educação Inclusiva. Rio de Janeiro: Wak Ed., 2011.

RIGHI, Fabiane Lima; SANTAROSA, Maria Cecília Pereira; MATHIAS, Carmen Vieira. Análise dos Esquemas em ação da Grandeza Volume no Ensino Superior. VIDYA, Santa Maria, v. 39, n. 1, p. 179-194, 2019.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da matemática**. 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, (2019).

SANTOS, Josiel Almeida; FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Lúcia Silveira Brum dos. Dificuldades na aprendizagem de Matemática. **Monografia de Graduação em Matemática. São Paulo: UNASP**, 2007.

SANTOS, Valéria Aguiar dos. **Comprimento e perímetro em livros didáticos de matemática do ensino fundamental: uma análise sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. 2019. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

SANKARAN, Shankar. Methodology for an organisational action research thesis. Action Research International, 2001.

SENZAKI, Noemia Naomi et al. Conceitos de área e de perímetro: um estudo metanalítico. 2019.

SILVA, R. A. da. O raciocínio proporcional e o uso do Excel: Um olhar para a gênese instrumental. 2019. 193f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

TEIXEIRA, S. G. **Concepções de alunos de Pedagogia sobre os conceitos de comprimento e perímetro**. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE, Recife, 2004.

TROUCHE, L. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 25, p. 91-138, 2005.

TROUCHE, L. Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? Educational Studies in Mathematics, v. 55, p. 181-197, 2004.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In **Nasser, L (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**: 1993

VERGNAUD, Gérard. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

VERGNAUD, Gérard. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, v. 4, n. 4, 1996.

VERGNAUD, Gérard. Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: Some theoretical and methodological issues. **For the learning of mathematics**, v. 3, n. 2, p. 31-41, 1982.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. **Publications mathématiques et informatique de Rennes**, n. S6, p. 47-50, 1989.

VERGNAUD, Gerard. Multiplicative conceptual field: what and why. **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**, p. 41-59, 1994.

VERGNAUD, Gérard. The theory of conceptual fields. **Human development**, v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009.

VILAÇA, Marcel Muniz. **Investigando o processo de gênese instrumental de licenciandos em matemática ao utilizarem o Geoplano durante a realização de atividades sobre quadriláteros**. 2018. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

XAVIER NETO, Armênio Lannes. **Um estudo da gênese instrumental para função de uma variável real com várias sentenças**. 2016. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação: Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

YEO, Joseph Kai Kow. Teaching area and perimeter: Mathematics-pedagogical-content knowledge-in-action. 2008

APÊNDICE A – AVALIAÇÃO A PRIORI DA PESQUISA

UFAM

AVALIAÇÃO A PRIORI DA PESQUISA Data: / /

Equipe:

Mestrando: LUCAS CUNHA DA SILVA

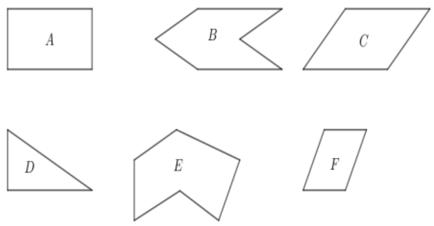
Turma: 9º ano

INSTRUÇÕES PARA REALIZAR A ATIVIDADE EM GRUPO: DISTRIBUA OS SEGUINTES PAPEIS

1. **FACILITADOR:** Garantir que todos entendam e tenham acesso à tarefa. Atentar-se ao que os outros precisam.
2. **CONTROLADOR DO TEMPO:** Combinar o tempo com seu grupo, e ficar atento ao horário
3. **HARMONIZADOR:** Mediar desentendimentos e construir pontes. Reconhecer publicamente as ideias e contribuições de cada participante
4. **REDATOR:** Garantir que a ideia de todos estão representadas no produto final.
5. Use caneta <u>PRETA ou AZUL</u> para responder.

QUESTÃO 01

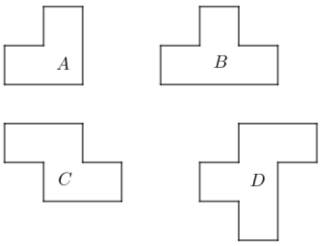
Indique quais das figuras abaixo tem a mesma área que o retângulo *A*



A) B
B) C
C) D
D) E
E) F

QUESTÃO 02

Observe o conjunto de figuras abaixo



Agora, responda as perguntas abaixo:

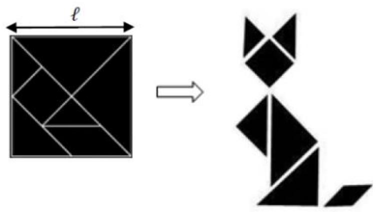
a) Entre as figuras, qual possui maior área e maior perímetro? Explique como você fez

b) Entre as figuras, qual possui menor área e menor perímetro? Explique como você fez

c) Entre as figuras, há figuras de mesma área e de mesmo perímetro? Quais?

QUESTÃO 03

O professor de matemática apresentou aos seus alunos o Tangram, uma quebra-cabeça muito antigo, de origem chinesa, composto por sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Após conhecer o jogo, um aluno teve a ideia de fazer a figura de um gato, utilizando todas as peças do Tangram, que, juntas, também formam um quadrado, como mostra a Figura.

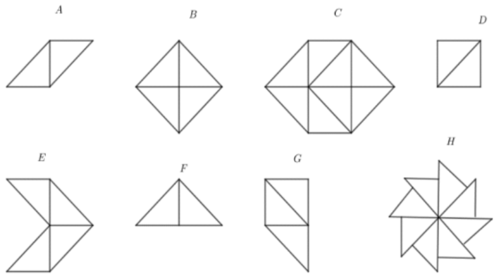


Supondo-se que o lado do quadrado maior formado pelas peças tem medida $L = 4\sqrt{2}$ cm, podemos afirmar que a área da figura do gato mede

A) 8 cm²
B) 16 cm²
C) 32 cm²
D) 64 cm²

QUESTÃO 04

Considere um triângulo ABC do Tangram abaixo. Ele é um triangulo retângulo e é um triângulo isósceles, cujo lados iguais medem x e o lado maior mede y. Com vários triângulos iguais ao triângulo ABC, fizemos as seguintes figuras:



a) Quais figuras têm a mesma área que a figura A?

b) Quais tem a mesma área que a figura B?

c) Quais tem a mesma área que C?

d) As figuras A e D tem a mesma área. Elas também têm o mesmo perímetro? Por quê?

e) As figuras A e F tem a mesma área. Elas têm também o mesmo perímetro? Por quê?

f) Compare as figuras C e E. O que você nota com relação às suas áreas? E em relação aos seus perímetros?

QUESTÃO 05

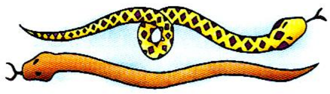
Considere as seguintes afirmações acerca dos conceitos de área e perímetro.

1. Superfícies de mesma área possuem o mesmo perímetro.
2. A área é o lugar ocupado por uma superfície.
3. O perímetro é a medida do contorno de uma superfície.
4. Superfícies de formas diferentes podem possuir áreas equivalentes.
5. O perímetro de uma superfície pode aumentar e a sua área pode permanecer constante.
6. Dois retângulos podem ter os perímetros iguais e áreas diferentes.
7. Se a área de uma superfície aumenta então o perímetro também aumenta.

Indique quais das afirmativas acima são verdadeira e quais são falsas justificando a sua resposta. Você pode usar desenhos nas suas explicações.

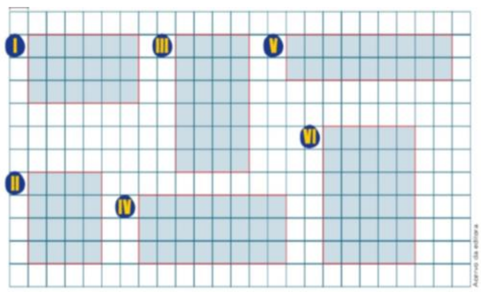
QUESTÃO 06

Analise a figura abaixo e responda o que se pede:
As duas cobras possuem o mesmo comprimento? Ou uma é mais comprida do que a outra? Justifique a sua resposta.



QUESTÃO 07

Os retângulos a seguir foram construídos em uma malha quadriculada, onde cada quadrado possui lado igual a 0,5 cm.

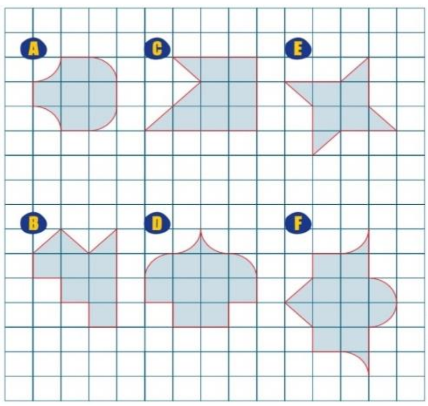


a) Entre as figuras acima há figuras de mesma área? Em caso afirmativo, quais são elas? Explique como você fez.

b) Entre as figuras acima há figuras de mesmo perímetro? Em caso afirmativo, quais são elas? Explique como você fez

QUESTÃO 08

Considere o  como uma unidade de medida de superfície, determine a área de cada figura



Área da figura A:_______

Área da figura B:_______

Área da figura C:_______

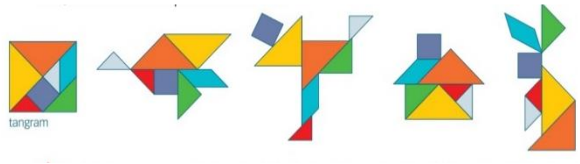
Área da figura D:_______

Área da figura E:_______

Área da figura F:_______

QUESTÃO 09

O tangaram é um quebra-cabeça de origem chinesa composto de sete peças. É possível montar, sem sobrepor as peças, silhuetas de animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas planas, entre outras possibilidades.



Com todas as peças do tangaram, sem sobrepô-las, é possível formar figuras com áreas diferentes? Por quê?

____

____

Produto da equipe

- Use o Cartão de Atividade para o registro da equipe
- Lembre-se que o redator ficará responsável de deixar organizado as respostas de todos.

Rubrica avaliativa:

- Apresentar o entendimento discutidos pela equipe;
- Busque ser específico nas respostas baseado no que se pede;
- Respeite os papeis e busque contribuir respeitosamente.

APÊNDICE B – SITUAÇÕES MATEMÁTICAS PARA A OI 1

CARTÃO DE ATIVIDADE 01

UFAM

SITUAÇÕES MATEMÁTICAS PARA A OI1 DA PESQUISA Data: / /

Equipe:

Mestrando: LUCAS CUNHA DA SILVA

Turma: 9º ano

INSTRUÇÕES PARA REALIZAR A ATIVIDADE EM GRUPO: DISTRIBUA OS SEGUINTES PAPEIS

1. **FACILITADOR:** Garantir que todos entendam e tenham acesso à tarefa. Atentar-se ao que os outros precisam.
2. **CONTROLADOR DO TEMPO:** Combinar o tempo com seu grupo, e ficar atento ao horário
3. **HARMONIZADOR:** Mediar desentendimentos e construir pontes. Reconhecer publicamente as ideias e contribuições de cada participante
4. **REDATOR:** Garantir que a ideia de todos estão representadas no produto final.
5. Use caneta PRETA ou AZUL para responder.

SITUAÇÃO 01

Com base nos seus conhecimentos sobre geometria plana
e o artefato Tangram responda o que se pede:

Você conhece o Tangram? Se sim, já utilizou ele alguma vez?

____

____

SITUAÇÃO 02

Com base na caixa que vocês receberam, respondam:
Em quantas peças são formadas o Tangram? ___________
Qual o nome das figuras que compõem o Tangram?

____

____

SITUAÇÃO 03

Utilizando as peças do Tangram, faça o que se pede. Registre utilizando o smartphone.

a) Utilizando 1 triângulo médio, 2 triângulos menores e 1 quadrado, construa um quadrado.

b) Utilizando os 5 triângulos do Tangram construa um retângulo.

c) Utilizando 2 triângulos construa um paralelogramo.

d) Utilizando 1 triângulo médio, 2 triângulos menores e 1 quadrado, construa um triângulo.

e) Construa um trapézio utilizando 1 triângulo grande e 1 triângulo médio.

Produto da equipe

- Use o Cartão de Atividade para o registro da equipe
- Lembre-se que o redator ficará responsável de deixar organizado as respostas de todos.

Rubrica avaliativa:

- Apresentar o entendimento discutidos pela equipe;
- Busque ser específico nas respostas baseado no que se pede;
- Respeite os papeis e busque contribuir respeitosamente.

APÊNDICE C – SITUAÇÕES MATEMÁTICAS PARA A OI 2

CARTÃO DE ATIVIDADE 02

UFAM

SITUAÇÕES MATEMÁTICAS PARA A OI2 DA PESQUISA Data: / /

Equipe:

Mestrando: LUCAS CUNHA DA SILVA

Turma: 9º ano

INSTRUÇÕES PARA REALIZAR A ATIVIDADE EM GRUPO: DISTRIBUA OS SEGUINTES PAPEIS

1. **FACILITADOR:** Garantir que todos entendam e tenham acesso à tarefa. Atentar-se ao que os outros precisam.
2. **CONTROLADOR DO TEMPO:** Combinar o tempo com seu grupo, e ficar atento ao horário
3. **HARMONIZADOR:** Mediar desentendimentos e construir pontes. Reconhecer publicamente as ideias e contribuições de cada participante
4. **REDATOR:** Garantir que a ideia de todos estão representadas no produto final.
5. Use caneta <u>PRETA ou AZUL</u> para responder

SITUAÇÃO 01

Utilizando as peças do Tangram, construa as figuras abaixo:

Figura 1

Figura 2

Considere algumas afirmações sobre a área e o perímetro das figuras que vocês construíram. Vocês concordam com essas afirmações? Explique sua resposta.

a) A área da Figura 1 é menor que a área da figura 2?

____

____

b) As áreas da figura 1 e da figura 2 são equivalentes?

____

____

c) Os perímetros das figuras 1 e 2 são iguais?

____

____

d) O perímetro da figura 2 é menor que o perímetro da figura1?

____

____

SITUAÇÃO 02

Utilizando as sete peças do Tangram construa um quadrado**.** Sabendo que o quadrado formado por todas as sete peças possui 14 cm de lado determine as áreas de cada uma das peças do Tangram abaixo:

a) Triângulo isósceles maior:__________________
b) Triangulo isósceles maior:__________________
c) Triangulo isósceles médio:__________________
d) Triangulo isósceles menor:__________________
e) Triangulo isósceles menor:__________________
f) Quadrado:_____________
g) Paralelogramo:______________

SITUAÇÃO 03

Utilizando as peças do Tangram como unidade de área, responda o que se pede:

a) Tomando o triângulo menor como unidade de área, qual a área do triângulo médio?

____

b) Tomando o quadrado como unidade de área, qual é a área do triângulo maior?

____

c) Tomando o quadrado como unidade de área, qual a área do triângulo menor?

____

d) Quais as peças do Tangram com a mesma área do quadrado?

____

e) Tomando o triângulo maior como unidade de área qual a área do paralelogramo? Como você obteve essa resposta?

____

SITUAÇÃO 04

Registre com o smartphone o que se pede. Utilizando o triângulo menor do Tangram como unidade de área construa:

a) um quadrado de área dois.
b) um paralelogramo de área dois.
c) um triângulo de área quatro.
d) um trapézio de área quatro.

e) um retângulo de área quatro.
f) um triângulo de área dois.
g) um trapézio retângulo de área três.
h) um paralelogramo de área quatro.
i) um quadrado de área quatro
j) um retângulo de área seis.

SITUAÇÃO 05

Utilizando as 7 peças do Tangram e considerando o quadrado como unidade de área construa e determine as áreas das figuras F1, F2, F3 e F4 respectivamente abaixo:

Área da F1=_______

Área da F2=_______

Área da F3=_______

Área da F4=_______

a) Vocês conseguem observar algum padrão nas áreas das figuras que vocês construíram? Se sim, qual?

____

____

2) Esse padrão é constante para quaisquer figuras construídas com as sete peças do Tangram? Justifique.

____

____

3) O que aconteceu com o perímetro da figura quando vocês foram mudando a posição das peças?

____

____

Produto da equipe

- Use o Cartão de Atividade para o registro da equipe
- Lembre-se que o redator ficará responsável de deixar organizado as respostas de todos.

Rubrica avaliativa:

- Apresentar o entendimento discutidos pela equipe;
- Busque ser específico nas respostas baseado no que se pede;
- Respeite os papeis e busque contribuir respeitosamente

APÊNDICE D – SITUAÇÕES MATEMÁTICAS PARA A OI 3

CARTÃO DE ATIVIDADE 03

UFAM

SITUAÇÕES MATEMÁTICAS PARA A OI3 DA PESQUISA Data: / /

Equipe:

Mestrando: LUCAS CUNHA DA SILVA

Turma: 9º ano

INSTRUÇÕES PARA REALIZAR A ATIVIDADE EM GRUPO: DISTRIBUA OS SEGUINTES PAPEIS

1. **FACILITADOR:** Garantir que todos entendam e tenham acesso à tarefa. Atentar-se ao que os outros precisam.
2. **CONTROLADOR DO TEMPO:** Combinar o tempo com seu grupo, e ficar atento ao horário
3. **HARMONIZADOR:** Mediar desentendimentos e construir pontes. Reconhecer publicamente as ideias e contribuições de cada participante
4. **REDATOR:** Garantir que a ideia de todos estão representadas no produto final.
5. Use caneta PRETA ou AZUL para responder

SITUAÇÃO 01

Com base nos seus conhecimentos sobre geometria plana e o artefato malha quadriculada responda o que se pede:

Você conhece a malha quadriculada? Se sim, já utilizou ela alguma vez?

____

____

____

SITUAÇÃO 02

Com base na malha quadriculada que receberam, respondam:

a) Ela se divide em que figura geométrica que você conhece? ___________

b) Todos possuem a mesma medida?

____

c) Quando mede o lado de um quadrado unitário?

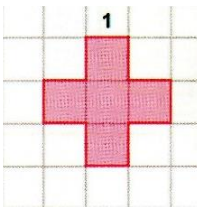
____

____

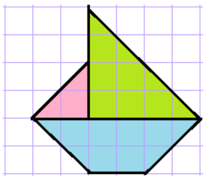
SITUAÇÃO 03

Utilizando a malha quadriculada e considerando um quadrado como uma unidade de área:

a) amplie a figura abaixo para duas unidades de área mantendo a proporção.



b) reduza a figura abaixo para duas unidades de área mantendo a proporção.



c) Explique com suas palavras o que aconteceu com a área e o perímetro da figura inicial após as ampliações realizadas no item a) e b)?

____

____

____

Produto da equipe

- Use o Cartão de Atividade para o registro da equipe
- Lembre-se que o redator ficará responsável de deixar organizado as respostas de todos.

Rubrica avaliativa:

- Apresentar o entendimento discutidos pela equipe;
- Busque ser específico nas respostas baseado no que se pede;
- Respeite os papeis e busque contribuir respeitosamente

APÊNDICE E – SITUAÇÕES MATEMÁTICAS PARA A OI 4

CARTÃO DE ATIVIDADE 04

UFAM

SITUAÇÕES MATEMÁTICAS PARA A OI4 DA PESQUISA Data: / /

Equipe:

Mestrando: LUCAS CUNHA DA SILVA

Turma: 9º ano

INSTRUÇÕES PARA REALIZAR A ATIVIDADE EM GRUPO: DISTRIBUA OS SEGUINTES PAPEIS

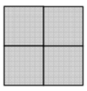
1. **FACILITADOR:** Garantir que todos entendam e tenham acesso à tarefa. Atentar-se ao que os outros precisam.
2. **CONTROLADOR DO TEMPO:** Combinar o tempo com seu grupo, e ficar atento ao horário
3. **HARMONIZADOR:** Mediar desentendimentos e construir pontes. Reconhecer publicamente as ideias e contribuições de cada participante
4. **REDATOR:** Garantir que a ideia de todos estão representadas no produto final.
5. Use caneta PRETA ou AZUL para responder.

SITUAÇÃO 01

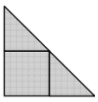
Utilizando a malha quadriculada que receberam responda o que se pede.

a) Usando um quadrado da malha como unidade de área, qual a medida da área da malha quadriculada que vocês receberam? Explique como você fez.

b) Qual a área da malha quadriculada usando a figura abaixo como unidade de medida? Explique como você fez?



c) Qual a área da malha quadriculada usando a figura abaixo como unidade de medida? Explique como você fez?



SITUAÇÃO 02

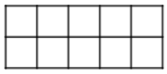
Tomando a área de um quadrado da malha como unidade, construa um polígono de área 11 e perímetro 18.

SITUAÇÃO 03

Usando a malha quadriculada e considerando o quadrado unitário como unidade de área, construa 4 diferentes retângulos de área igual a 12 cm², em seguida calcule seus perímetros, compare os resultados e descreva o que observar.

SITUAÇÃO 04

É possível cobrir completamente a malha quadriculada tomando como unidade de medida o retangulo abaixo sem sobrepor? Em caso afirmativo, justifique a sua resposta.



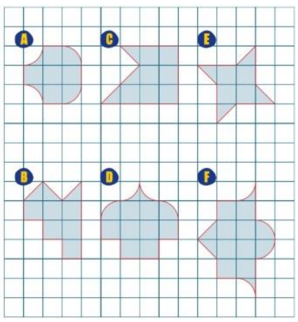
SITUAÇÃO 05

Na malha quadriculada desenhe:

a) Um retângulo de perímetro 18 cm de modo que no seu interior caibam 18 quadrados unitários.
b) Um retângulo de perímetro 20 cm de modo que no seu interior caibam 24 quadrados unitários.
c) Um retângulo de perímetro 22 cm de modo que no seu interior caibam 24 quadrados unitários.
d) Um retângulo de perímetro 22 cm de modo que no seu interior caibam 18 quadrados unitários.
e) Entre as figuras que você construiu acima há figuras de mesma área? Em caso afirmativo, quais são elas? Explique como você fez
f) Entre as figuras que você construiu há figuras de mesmo perímetro? Em caso afirmativo, quais são elas? Explique como você fez

SITUAÇÃO 06

Considere o  como unidade de medida de superfície, determine a área de cada figura.



Área da figura A:_______

Área da figura B:_______

Área da figura C:_______

Área da figura D:_______

Área da figura E:_______