UFAM - UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

ICE - INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PPGM- PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA

VINICIUS ROSÁRIO DAS CHAGAS

SOBRE A EXISTÊNCIA DE DOMÍNIOS NÃO TRIVIAIS PARA O PROBLEMA SOBREDETERMINADO DE SERRIN EM $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$

MANAUS – AM

2024

UFAM - UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

ICE - INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PPGM- PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA

VINICIUS ROSÁRIO DAS CHAGAS

SOBRE A EXISTÊNCIA DE DOMÍNIOS NÃO TRIVIAIS PARA O PROBLEMA SOBREDETERMINADO DE SERRIN EM $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$

Trabalho de Dissertação de Mestrado apresentado como pré-requisito de conclusão do curso de Mestrado em Matemática na Universidade Federal do Amazonas, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda

MANAUS – AM

2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Chagas, Vinicius Rosário das

C433s Sobre a existência de domínios não triviais para o problema sobredeterminado de Serrin em S^n X lR / Vinicius Rosário das Chagas . 2024

76 f.: 31 cm.

Orientadora: Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Problema sobredeterminado. 2. Domínios não triviais. 3. Variedades Riemannianas. 4. Bifurcação de soluções. I. Miranda, Juliana Ferreira Ribeiro de. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Dedico este trabalho para todos aqueles
que acreditaram em mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Arlindo das Chagas e Samira Silva do Rosário, por terem me dado totais condições para seguir os meus sonhos e por terem me apoiado incondicionalmente ao longo desses anos. Eles sempre disseram que gostariam de ter feito muito mais por mim; no entanto, eu recebi o suficiente para poder seguir o meu caminho. Muitas vezes, a força que me faltava eu encontrava somente em ter vocês em meus pensamentos.

Agradeço a minha avó Hortência Maria das Chagas, por ter me incentivado a vir para Manaus e tentar algo diferente.

Agradeço ao Professor Doutor Sandro Dimy Barbosa Bitar por, no primeiro período de graduação, ter me incentivado (ainda que de maneira inconsciente) a tomar a melhor decisão da minha vida, que foi continuar em Matemática. Sem dúvida, foi o mais sensato a ser feito, uma vez que eu amo o que faço. Agradeço por todos os conselhos que sempre me fizeram seguir o caminho mais correto ao longo desses anos, conselhos que muitas vezes me trouxeram conforto em meio à angústia, me geraram respostas em meio à dúvida e me fizeram perceber que aquilo que é nosso está guardado e ninguém poderá nos tirar. Realmente, o Professor foi como um pai para mim.

Agradeço à Professora Doutora Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda por ter primeiramente aceitado me orientar neste trabalho e também por, no início da minha caminhada, ter me dado uma chance de mostrar o meu valor. E em meio a várias dificuldades, a professora sempre me proferiu os seguintes dizeres "vá até o fim", isso sempre me deu forças.

Agradeço ao Professor Doutor Marcus Antônio Mendonça Marrocos por, além de ter me incentivado a estudar o tema deste trabalho, também ter me ajudado em várias dúvidas que tive ao longo do mesmo. E por sempre estar disposto a me ajudar durante o mestrado.

Agradeço a todos os professores doutores da UFAM. Em especial, ao professor Thiago Alves, que foi o professor com quem mais tive aulas na UFAM. Sem dúvida, ele me fez crescer e alcançar meus objetivos. À professora Inês de Oliveira Padilha, que sempre diz que as pessoas a chamam de "Inêsquecível" ou "Inêsterrível", para mim é "Inêsquecível", pois sempre esteve disposta a conversar comigo, me dar ótimos conselhos e também tornar o ambiente mais leve. Ao professor Dragomir Mitkov Tsonev, que sempre me tratou muito bem e nunca negou ao lhe pedir uma recomendação. À professora Flávia Morgana de Oliveira Jacinto, que é como uma mãe para mim na UFAM, sempre preocupada e disposta a ajudar. À professora Maria Rosilene Barroso dos Santos, sempre com sua felicidade contagiante e disposta a me dar um ombro amigo quando precisei. Ao Professor Roberto Cordeiro Prata por querer sempre o meu bem-estar em todos os lugares possíveis.

Agradeço ao meu amigo Rodrigo Moreira Queiroz pelos longos anos de amizade, por sempre estar disposto a me ouvir, mesmo quando talvez eu estivesse demandando tempo demais em um mesmo assunto. Agradeço pela paciência e incentivo em me ajudar nos momentos mais difíceis, até aqueles momentos em que eu mesmo me coloquei. Muito obrigado, amigo, onde quer que a vida me leve, você sempre será bem-vindo em minha casa.

Agradeço ao seu Moisés Bezerra Queiroz e dona Sulamita Moreira Queiroz por me proporcionarem um lar em Manaus e por me permitirem participar da sua linda família. Obrigado por sempre estarem dispostos a me ajudar. Vocês muitas vezes fizeram o papel da minha família em Manaus, fizeram jus à frase "A família não cabe em sangue".

Agradeço ao Henrique Borges, um grande amigo (às vezes até um irmão) que a UFAM me proporcionou conhecer, sempre gentil comigo, sempre prestativo, sempre atencioso, sempre disposto a ouvir os meus devaneios e também a ouvir os meus pesares. Obrigado, a UFAM com certeza foi um lar por conta de pessoas como você.

Agradeço ao Thiago Ferreira Cacau por me proporcionar sua companhia em horas de estudos na sala de mestrado, sempre tocando algumas de nossas músicas favoritas para incentivar nosso desempenho. Sem você, algumas matérias que fizemos juntos seriam bem mais difíceis e bem menos divertidas. Obrigado por sempre estar disposto a conversar comigo durante horas sobre vários temas possíveis e por sempre me proporcionar tomar um bom café na sua companhia. Eu tenho muito orgulho em chamá-lo de amigo.

Agradeço ao Adson Areque por sempre estar comigo em todos os momentos. És um amigo inestimável, sempre esteve disposto a me ouvir falar por horas sobre qualquer assunto, sempre lembrou do quanto eu gosto de jogar futebol e nunca se esqueceu de mim.

Agradeço ao Gleison Stanlley da Silva Marques por sempre estar disposto a me ouvir, por fazer parte da minha vida, por ter me ajudado inúmeras vezes a melhorar alguns textos para apresentações que fiz em eventos e por nunca me negar algo que, em meu ver, é precioso: o tempo. Por me proporcionar sua companhia em um dos momentos mais incríveis da minha vida, que foi estudar por um verão no IMPA.

Agradeço ao Gustavo Costa de Souza por ser uma das melhores pessoas que a UFAM me proporcionou conhecer, por sempre que eu precisei de alguém para compartilhar minhas ideias estar disposto a me ouvir, por sempre que eu precisei desabafar estar lá e por me permitir também ter sua companhia no IMPA. Ver você crescer na matemática foi e é um privilégio.

Agradeço à Samiles Lima de Sousa por me proporcionar uma das melhores companhias na UFAM, por vezes ter a paciência de me ouvir desabafar, por vezes me defender, por vezes me aplaudir, por vezes estar presente quando eu só necessitava da sua presença. Vinícius e Samiles "a dupla mais tranquila da sala do mestrado", a paraense mais bonita que eu conheço (eu só conheço ela, porém uma coisa não tem nada a ver com a outra).

Agradeço à Karolline Vitória Soares da Silva por ser uma amiga na qual o tempo e as dificuldades da convivência não conseguiram apagar a nossa amizade. Por estar presente nos momentos mais felizes da minha vida e às vezes compartilhar de alguns momentos difíceis também. Foram mais ou menos seis anos de convivência entre a graduação e o mestrado e nesses anos eu aprendi muito com a sua companhia.

Agradeço ao Giovanni Zanardo por todas as vezes em que se disponibilizou a me ajudar no decorrer desses anos de universidade, tirando tempo às vezes de onde nem tinha, por ter sido uma inspiração ao longo desses anos. Sua disciplina é invejável.

Agradeço a todos os meus amigos da UFAM, em especial: Erick Guimarães, Mathesus Chaves Fonteles, Giovanni Vieira Pinto e Luís Filipe Vital e Clenilton de Souza Gomes, por me proporcionarem uma ótima companhia em vários momentos na UFAM, por me proporcionarem vários momentos de descontração e por serem grandes amigos em qualquer ocasião.

Agradeço a todos os meus amigos do LAMAP por terem me feito sentir acolhido sempre.

Agradeço a todos os meus amigos do PET Matemática por sempre serem uma ótima companhia.

Agradeço à CAPES por me proporcionar fazer o mestrado com bolsa e assim me dedicar exclusivamente para um melhor desempenho.

“Nunca deixe que alguém lhe diga que não pode fazer algo. Se você tem um sonho, tem que protegê-lo. As pessoas que não podem fazer por si mesmas, dirão que você não consegue. Se quer alguma coisa, vá e lute por ela. Ponto final.” (À Procura da Felicidade)

RESUMO

Neste trabalho estudamos a existência de domínios não triviais em $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$, $N \geq 2$, no qual existe solução para o problema sobredeterminado de Serrin, aplicando a teoria de bifurcação de soluções. Iniciamos exibindo alguns pré-requisitos para o qual essa teoria impõe e fixando alguns conceitos e notações. Ademais, por completude do tema, introduzimos o espaço das funções de Hölder, que são amplamente utilizados. Por fim, apresentamos as devidas técnicas para conclusão do resultado que garante a existência de soluções para o referido problema.

Palavras-chave: Problema sobredeterminado, Domínios não triviais, Variedades Riemmianas, Bifurcação de soluções

ABSTRACT

In this work we study the existence of non-trivial domains in $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$, $N \geq 2$, in which there is a solution to Serrin's overdetermined problem, applying the bifurcation theory of solutions. We begin by displaying some prerequisites for which this theory imposes and establishing some concepts and notations. Furthermore, for the completeness of the topic, we introduce the space of Hölder functions, which are widely used. Finally, we present the appropriate techniques to conclude the result that guarantees the existence of solutions to the aforementioned problem.

Keywords: Overdetermined problem, Non-trivial domains, Riemanian manifolds, solution bifurcation

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Problemas envolvendo o operador Laplaciano têm sido estudados por muitos matemáticos há décadas, sob vários aspectos. Além de motivações matemáticas muitos desses problemas estão diretamente ligados a problemas físicos. A busca por propriedades de seus autovalores, nos mais variados ambientes, sob certas condições sobre seus domínios, é um desses aspectos. No mesmo sentido, podemos pensar como são as autofunções envolvidas nesses problemas. Podemos olhar também para um outro aspecto, como por exemplo, o de encontrar os domínios que satisfaçam um problema envolvendo o Laplaciano, sob certas condições sobre a função definida no ambiente.

Nessa direção, em 1971, J. Serrin em seu artigo *"A symmetry problem in potencial theory"*, [29], comenta que Professor R. L. Fosdic propôs o seguinte problema:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com bordo suave e suponha que exista uma função u satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u = -1 \ em\ \Omega, \\ u = 0 \ sobre\ \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} = \text{const.} \ \ sobre\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

Então Ω deve ser uma bola?

Nesse celebre artigo, Serrin demonstrou que de fato Ω é uma bola e a função u que satisfaz (0.1) é uma função radialmente simétrica.

Tal problema surge, por exemplo, se considerarmos o funcional torção rígida definido por

$$R(\Omega) := \int_{\Omega} ||\nabla u||^2 d\sigma, \tag{0.2}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma seção transversal do cilindro, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz a equação diferencial parcial

$$\begin{cases} \Delta u = -1 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

que mede a resistência da torção de um cilindro de base Ω, e em que ∇ e Δ são, respectivamente, o gradiente e o laplaciano de u, ver [14, Exemplo 3.1, p. 27]. Nesse livro, D. Henry ressalta que a resistência R, depende não somente da constante elástica do material, mas também da geometria da seção transversal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Considerando Ω como um parâmetro em (0.2) e aplicando a teoria de pertubação de domínios, ele chega a conclusão de que Ω satifaz o problema (0.1) se, e somente se, Ω é um ponto crítico para o funcional R, com área fixa, sendo N é o vetor normal exterior ao $\partial\Omega$ e $\dfrac{\partial u}{\partial N}$ é a derivada normal de u.

Motivados pelo trabalho Serrin e pela dependência geométrica de Ω, muitos outros matemáticos se dedicaram à problemas semelhantes a esse, ou seja, encontrar domínios para o qual existe solução de (0.1); esses domínios são chamados de domínios de Serrin. Porém em $\mathbb{R}^n$, como visto acima, a bola é o único domínio de Serrin. Em casos de domínios não limitados existem mais possibilidades para a forma dos mesmos. Nesse sentido, um dos mais famosos trabalhos foi o de H. Berestycki, L. A. Cafarelli e L. Nirenberg, em 1997, que estendeu o problema para domínios não limitados, ver [2]. Eles provaram que, sob algumas hipóteses sobre f e Ω, se o problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} = \text{const. sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

admite uma solução suave e limitada, então Ω é um semi-espaço. Nesse artigo, os autores propuseram uma conjectura, com o objetivo de generalizar o Teorema de Serrin para domínios não limitados. Tal conjectura diz que se f é uma função localmente Lipschitziana, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave tal que $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ é conexo, a existência de uma solução limitada para o problema (0.3) implica que os domínios são precisamente: uma bola; ou um semiespaço; ou um cilindro generalizado $B^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ em que $B^k \subset \mathbb{R}^k$ é uma bola; ou o complementar de um deles. Os domínios já conhecidos são denominados domínios de Serrin triviais, isto é, todos aqueles citados acima. Por consequência, a conjectura acima pode ser reformulada da seguinte forma: Se f é uma função localmente Lipschitziana, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave tal que $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ é conexo, a existência de uma solução limitada para o problema (0.3) implica que Ω é um domínio trivial.

Vários pesquisadores se debruçaram na busca de obter outros domínios de Serrin diferentes dos triviais, ou seja, de tornar a conjectura falsa, usando teoria de pertubação, como por exemplo, a teoria de bifurcação de soluções, introduzida em [10, 27, 28, 30], e aplicadas, por exemplo, em [25] para a bifurcação do semi-espaço em dimensão alta, e bifurcação do complementar de um cilindro que foi obtido em [26]. Finalmente, em 2010, essa conjectura foi refutada para N $\geq$ 3 por P. Sicbaldi, que construiu domínios extremais obtidos como uma perturbação periódica de um cilindro.

Naturalmente, podemos pensar em tentar estender esse problema para outros ambientes, que têm certas semelhanças com $\mathbb{R}^N$. Por conseguinte, é possível reformular o problema da seguinte forma:

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana, e suponha que existe uma função u satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta_g u = -1 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} = \text{const. sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.4}$$

onde Δ_g é o operador Laplace-Beltrami. Qual é a forma de $\Omega \subset M$? Os domínios que são soluções para (0.4) são chamados de domínios de Serrin.

Em 1991, Robert Mozor, [22], publicou um artigo com um resultado para domínios no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^N$. Ele demonstrou que, supondo que existe uma solução para (0.4) com $M = \mathbb{H}^N$, então $\Omega \subset \mathbb{H}^N$ é uma bola geodésica. Além disso, o resultado de Serrin também foi estendido, em 1998, [16], por S. Kumaresan, J. Prajapat, para subdomínios da esfera $M = \mathbb{S}^N$, a esfera unitária $N-$dimensional, que estão contidos em um hemisfério. Mais precisamente, eles denmonstraram que qualquer domínio Serrin suave contido em um hemisfério de $\mathbb{S}^N$ é uma bola geodésica. No entanto, as bolas geodésicas não são os únicos domínios de Serrin de $\mathbb{S}^N$.

De modo mais geral, em 2015, M.M.Fall e I.A. Minled, [8], mostraram que se M é compacta, então o problema sobredeterminado (0.4) tem solução e os domínios foram obtidos por pertubação de pequenas bolas geodésicas.

Em 2016 os pesquisadores Filippo Morabito juntamente com Pieralberto Sicbaldi publicaram um trabalho intitulado *"Delaunay type domains for an overdetermined elliptic problem in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$*", [24], que mostrou a existência de uma família enumerável de Delaunay para o problema de autovalor do laplaciano nessas variedades. Isto é, existem domínios enumeráveis de Delanay $\Omega_j \subset M^n$, onde M^n é $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$ e $n \geq 2$, para o qual existe solução para o seguinte problema sobredeterminado

$$\begin{cases} \Delta_{g_{(\sigma,t)}} u + \lambda u = 0 \text{ em } \Omega_j, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_j, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} = \text{const. sobre } \partial\Omega_j, \end{cases}$$

que foram obtidos por bifurcação do cilindro $B^n \times \mathbb{R}$, onde B^n é uma bola geodésica em M^n, para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $j = \dfrac{1}{n}$. Esse trabalho já indicava um interesse desses pesquisadores em problemas envolvendo variedades Riemanninas do tipo produto, mais especificamente em $M^n \times \mathbb{R}$.

Anos mais tarde, em 2018, M.M.Fall e I.A. Minled, agora juntamente com T. Weth, em [9], provaram a existência de domínios não triviais em $\mathbb{S}^N$, $N \geq 2$, que são soluções para (0.4). Tais domínios foram obtidos por bifurcações de vizinhanças tubulares axialmente simétricas do equador $\mathbb{S}^{N-1}$, identificado por $\mathbb{S}^{N-1} \times \{0\}$, ou seja,

$$\Omega_\varphi =: \{((\cos\theta)\sigma, \operatorname{sen}\theta) : \sigma \in \mathbb{S}^{N-1}, \theta \in \mathbb{R}, |\theta| < \varphi(\sigma)\} \subset \mathbb{S}^N,$$

em que $\varphi : \mathbb{S}^{N-1} \to \mathbb{R}$ é uma função C^2 não constante com $\varphi(\sigma) \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, para todo $\sigma \in \mathbb{S}^N$, são domínios de Serrin "com essa forma".

Esse trabalho foi baseado no artigo [23] de F. Morabito, que exibe domínios de Serrin não triviais em $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ ($N \geq 2$) que são soluções para o problema sobredeterminado

$$\begin{cases} \Delta_{g_{(\sigma,t)}} u = -1 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} = \text{const. sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.5}$$

para $(\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$, em que $\Delta_{g_{(\sigma,t)}}$ é o operador Laplace-Beltrami em $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$, $g_{(\sigma,t)}$ é a métrica produto standart, υ é o vetor normal unitário exterior ao $\partial\Omega$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \upsilon}$ é a derivada normal de u. Tais soluções são obtidas por bifurcação de vizinhanças tubulares simétricas retas de $\mathbb{S}^N \times \{0\}$, que são, precisamente,

$$\{(\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R} : |t| < \lambda \text{ e } \lambda > 0\},$$

esses domínios não são limitados por esferas geodésicas. A técnica utilizada foi introduzida em [9] juntamente com o interesse de Morabito em problemas sobredeterminados em $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ exibido acima, adaptando-se os argumento para este ambiente.

1. NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos, destacaremos resultados importantes e fixaremos a notação a ser utilizada no desenvolvimento do trabalho. Para isso, trazemos duas seções. Na primeira, apresentamos o nosso ambiente de estudo, as variedades diferenciáveis, munindo-as com uma métrica Riemanniana, e definindo as ferramentas diferenciáveis necessárias para trabalhar com operadores diferenciáveis. Na segunda, apresentamos um espaço que desempenhará papel fundamental neste trabalho, uma vez que a teoria de pertubação será aplicada sobre ele; o espaço das funções de Hölder, estudaremos também algumas propriedades de completude segundo a norma que iremos definir nesse espaço e estenderemos essa definição para variedades compactas.

1.1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Nesta seção introduziremos o conceito de variedade Riemanniana sob o ponto de vista de [6] para que possamos usufruir da linguagem deste ambiente de maneira mais geral possível, e, a posteriori, nos restringirmos a um exemplo específico, que será o ambiente deste trabalho. Ressalto que algumas proposições não serão demonstradas, porém vamos ter o cuidado de deixar uma referência para que o leitor possa consultar as devidas demonstrações.

Começamos conhecendo o ambiente de variedade diferenciável. Vale a pena mencionar que as aplicações diferenciáveis no contexto deste trabalho serão tratadas como sendo aplicações C^∞, salvo menção contrária.

Definição 1.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$, de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M, tais que*

(1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;

(2) Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \to x_\beta^{-1}(W)$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(W) \to x_\alpha^{-1}(W)$

são diferenciáveis.

Observação 1.1.1. *O par (U,x) ou ainda $(U,(x_1,\ldots,x_n)) = (U,x_i)$, com $p \in x(U) \subset M$, é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas); $x(U)$ é uma vizinhança coordenada de p em M. Quando quisermos nos referir ao caráter local em algumas demonstrações usaremos os sistemas de coordenadas, salvo menção contrária.*

Observação 1.1.2. *A família $\mathscr{A} := \{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo as condições (1) e (2) da Definição 1.1.1 é denominada estrutura diferenciável em M. É possível mostrar que toda variedade diferenciável M admite uma estrutura maximal $\overline{\mathscr{A}}$, isto é, toda aplicação $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ que satisfaz a condição (2) para toda aplicação $x_\alpha \in \overline{\mathscr{A}}$ também pertence a $\overline{\mathscr{A}}$, como pode ser observado em [17, Proposição 1.17, p. 13].*

Exemplo 1.1.1. *Naturalmente temos que o espaço Euclidiano $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$ com a estrutura $\mathscr{A} = \{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$ é uma variedade diferenciável; maiores detalhes podem ser consultados em [17, Exemplo 1.22, p.17].*

Observação 1.1.3. *Daqui por diante adotaremos a seguinte notação, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Exemplo 1.1.2. *Seja $\mathbb{S}^N := \{(x_1,\ldots,x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} : x_1^2 + \cdots + x_{N+1}^2 = 1\}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^{N+1}$. Podemos pensar na projeção estereográfica e como em [6, Exemplo 4.6, p.20] mostrar que $\mathbb{S}^N$ é uma variedade diferenciável.*

Exemplo 1.1.3. *Sejam $M_1,\ldots,M_k$ variedades diferenciáveis de dimensão $n_1,\ldots,n_k$ respectivamente. Então $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ é uma variedades diferenciável. Com efeito, seja $(p_1,\ldots,p_k) \in M$, então podemos escolher as parametrizações (U_i, x_{α_i}) para M_i tal que*

$$p_i \in x_{\alpha_i}(U_i),$$

e assim a aplicação produto, isto é, $x = x_{\alpha_1} \times \cdots \times x_{\alpha_k} : U_1 \times \cdots \times U_k \subset \mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k} \to M$ satisfaz a condição 1 e 2 da Definição 1.1.1, conforme pode ser visto em [17, Exemplo 1.34, p.21].

Definição 1.1.2. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^n \to N$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{M} \to \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Observação 1.1.4. *Em consequência da definição acima podemos ver as aplicações $f : M \to \mathbb{R}$ como aplicações entre variedades diferenciáveis as quais chamaremos de funções, isto é, funções serão aplicações que tem como domínio uma variedade diferenciável e tem como contradomínio a reta. Nesse contexto, diremos que uma função é diferenciável se satisfaz a definição acima. Denotaremos o espaço das funções diferenciáveis por $C^\infty(M)$.*

Definição 1.1.3. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável*

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M,$$

é chamada de curva em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $C_p^\infty(M)$ o conjuntos das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} \qquad f \in C_p^\infty(M).$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM e chamado de espaço tangente.

Definição 1.1.4. *Seja M e N duas variedades diferenciáveis e seja $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável. A diferencial de F no ponto p é a aplicação linear que para cada $v \in T_pM$ associa um vetor $dF_p(v) \in T_{F(p)}N$.*

Observação 1.1.5. *Sob as mesmas condições acima seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) = v$, assim a curva $\beta(t) = (F \circ \alpha)(t)$ é diferenciável e $\beta(0) = F(p)$ e*

$$\beta'(0) = dF_p(v),$$

como pode ser visto em [6].

Observação 1.1.6. *Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n e (U, x) um sistema de coordenadas. A escolha da parametrização $x : U \to M$ associa uma base*

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_q \right\}$$

em T_pM, onde $p = x(q)$, como pode ser observado em [6, p.9]. Às vezes, para facilitar a notação utilizaremos também $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ ao invés do apresentado acima.

A seguir temos um resultado importante que caracteriza os espaços tangentes em variedades produtos. Por completude apresentaremos também sua demonstração.

Proposição 1.1.1. *Sejam M, N duas variedades diferenciáveis. Então $T_{(q,p)}(N \times M)$ é isomorfo a $T_qN \bigoplus T_pM$, para todo $q \in N$ e $p \in M$.*

Demonstração. Sejam $\pi_1 : N \times M \to N$, definida por $\pi_1(q, p) = q$, e $\pi_2 : N \times M \to M$, definida por $\pi_2(q, p) = p$, as respectivas projeções que são aplicações diferenciáveis. Defina $\Psi : T_{(q,p)}(N \times M) \to T_qN \bigoplus T_pM$ por $\Psi(V) = d_{(q,p)}\pi_1(V) + d_{(q,p)}\pi_2(V)$. Se $V, U \in T_{(q,p)}(N \times M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\Psi(\lambda V + U) &= d_{(q,p)}\pi_1(\lambda V + U) + d_{(q,p)}\pi_2(\lambda V + U) \\
&= [\lambda d_{(q,p)}\pi_1(V) + d_{(q,p)}\pi_1(U)] + [d_{(q,p)}\pi_2(V) + d_{(q,p)}\pi_2(U)] \\
&= \lambda[d_{(q,p)}\pi_1(V) + d_{(q,p)}\pi_2(V)] + [d_{(q,p)}\pi_1(U) + d_{(q,p)}\pi_2(U)] \\
&= \lambda\Psi(V) + \Psi(U),
\end{aligned}$$

ou seja, Ψ é linear. Além disso, como a

$$\dim(T_{(q,p)}(N\times M)) = \dim(N)+\dim(M) = \dim(T_qN)+\dim(T_pM),$$

então, pelo Teorema do Núcleo e Imagem, basta mostra que Ψ é injetiva. Assim, seja $V \in T_{(q,p)}(N\times M)$ tal que $\Psi(V)=0$. Pela definição de Ψ temos que $d_{(q,p)}\pi_1(V)+d_{(q,p)}\pi_2(V)=0$, logo segue que $V\in T_qN\cap T_pM$, e como $T_qN\cap T_pM=\{0\}$, obtemos que $V=0$, e portanto Ψ é injetiva o que concluí a prova. $\square$

Pela proposição acima podemos identificar $T_{(q,p)}(N\times M) = T_qN\bigoplus T_pM$ para todo $(q,p)\in N\times M$. Isso se mostrará muito útil mais adiante neste trabalho.

Exemplo 1.1.4 (O fibrado tangente)**.** *Seja M^n uma variedade diferenciável. Definimos o fibrado tangente de M por $TM := \{(p,v); p\in M, v\in T_pM\}$. Como visto em [6, Exemplo 4.1, p.15], o fibrado tangente é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.*

Definição 1.1.5. *O semi-espaço é o conjunto definido por*

$$\mathbb{H}^N := \{(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N : x_N\geq 0\}.$$

Um subconjunto $V\in\mathbb{H}^N$ aberto tem a forma $V=\mathbb{H}^N\cap U$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^N$. Então, dizemos que uma função $f\colon V\to\mathbb{R}$, definida em um aberto V de $\mathbb{H}^N$, é diferenciável se existir uma função diferenciável $\bar{f}\colon U\to\mathbb{R}$ definida em um aberto U de $\mathbb{R}^N$, em que $V\subset U$, tal que $\bar{f}|_V=f$. Se f é diferenciável em V a diferencial df_p é definida por $df_p=d\bar{f}_p$, onde $p\in V$. Com isso podemos definir uma variedade com bordo.

Definição 1.1.6. *Um conjunto M é dito uma variedade diferenciável com bordo, ou somente variedade com bordo, de dimensão n se existe uma família de aplicações aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha\subset\mathbb{H}^N\to M$, onde U_α é um aberto de $\mathbb{H}^N$, tais que*

(i) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)=M$*;*

(ii) Para todo par α,β, com $x_\alpha(U_\alpha)\cap x_\beta(U_\beta)=W\neq\emptyset$, os conjuntos $x_\alpha(W)$ e $x_\beta(W)$ são aberto em $\mathbb{H}^N$ e as aplicações $x_\alpha\circ x_\beta^{-1}$ e $x_\alpha^{-1}\circ x_\beta$ são diferenciáveis em W.

Os conceitos anteriores e adiante se aplicam totalmente a variedades com bordo.

Observação 1.1.7. *Um ponto $p\in M$ é dito ponto de bordo se para um sistema de coordenadas $x : U\to M$ em torno de p se tem $p=x(0,x_2,\dots,x_N)$. O conjunto de pontos de bordo de M, é chamado de bordo de M e denotaremos por ∂M. É possível mostrar que o bordo não depende da parametrização e que o bordo de uma variedade diferenciável de dimensão n é uma variedade diferenciável de dimensão $n-1$. As demonstrações desses fatos podem ser consultadas em [17, p.54].*

Exemplo 1.1.5. $\mathbb{H}^N := \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N \geq 0\}$ *é uma variedade com bordo.*

Definição 1.1.7. *Um campo de vetores tangentes X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa o vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação*

$$X : M \to TM$$

é diferenciável. Denotaremos o espaço dos campos de vetores diferenciáveis por $\mathscr{X}(M)$.

Definição 1.1.8. *Seja M uma variedade com bordo e seja $p \in \partial M$. Dizemos que o vetor*

$$N \in T_pM$$

aponta para dentro se $N \notin T_p\partial M$ e, para algum $\varepsilon > 0$, existe um seguimento de curva diferenciável $\alpha : [0, \varepsilon] \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = N$. Dizemos que N aponta para fora se $-N$ aponta para dentro. Se N aponta para dentro, chamaremos N de normal interior, caso contrário, N será chamado de normal exterior.

Como pode ser consultado em [17, Proposição 15.33, p.391], dado uma variedade M com bordo, um campo de vetores normais exterior é um campo $X \in \mathscr{X}(M)$ tal que $X(p) \in T_pM$ é um vetor normal exterior para todo $p \in \partial M$.

Definição 1.1.9. *Sejam M uma variedade diferenciável e $X, Y \in \mathscr{X}(M)$. Definimos o campo colchete por $[X, Y] = XY - YX$.*

Proposição 1.1.2. *Sejam M uma variedade diferenciável,*

$$X, Y, Z \in \mathscr{X}(M), \text{ e } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } f, g \in C^\infty(M).$$

Então:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anticomutatividade);*
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *(linearidade);*
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(identidade de Jacobi);*
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y + gY(f)X$.

Definição 1.1.10. *Uma métrica riemanniana (ou estrutura riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, $x(x_1, \ldots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então*

$$g_q\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n),$$

é uma função diferenciável em U.

Exemplo 1.1.6. *Seja $\mathbb{R}^N$ com a métrica*

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i,$$

segue de maneira imediata que (R^N, g) é uma variedade Riemanniana, onde $x = (x_1, \ldots, x_N)$ e $y = (y_1, \ldots, y_N)$. A matriz dessa métrica nos campos ortonormais canônicos de $\mathbb{R}^N$ é dada por

$$g_{i,j}(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \ se \ i = j \\ 0 \ se \ i \neq j, \end{cases}$$

onde $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Em $\mathbb{R}$ denotamos a métrica Riemanniana por dt^2.

Proposição 1.1.3. *Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*

Uma prova para a proposição acima se encontra em [6, Proposição 2.10, p.47].

Exemplo 1.1.7. *Em consequência da proposição acima $\mathbb{S}^N$, a esfera unitária de dimensão N, é uma variedade Riemanniana com uma métrica $g_{\mathbb{S}^N}$.*

Definição 1.1.11. *Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos a distância entre os pontos $p, q \in M$ por*

$$d(p,q) := \inf \left\{ \int_a^b ||\gamma'(t)||dt; \gamma \text{ é curva diferenciável por partes e } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \right\}$$

Como em [6, Proposição 2.5 p.161] é possível provar que (M,d) é um espaço métrico. Também em [6, Proposição 2.6, p.162] temos que a topologia de M coincide com a topologia gerada pela métrica.

Definição 1.1.12. *Sejam M, N variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável, considere g_N a métrica em N. Definimos o pullback de g_N por F como*

$$F^* g_N(X,Y) = g_N(dF(X), dF(Y)) \text{ para todos } X, Y \in \mathscr{X}(M),$$

pontualmente temos que

$$F^* g_N(u,v) = g_N(dF_p(u), dF_p(v)) \text{ para todo } p \in M \text{ e todos } u, v \in T_pM.$$

Definição 1.1.13. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana com bordo. Dizemos que N é um campo normal unitário exterior, se para todo $p \in \partial M$ tivermos*

$$g(v, N(p)) = 0, \text{ para todo } v \in T_p\partial M, \ g(N(p), N(p)) = 1 \text{ e } N(p) \text{ é normal exterior.}$$

Definição 1.1.14. *Sejam (M, g_M) e (N, g_N) variedades Riemannianas e seja $F : M \to N$ um difeomorfismo, isto é, F bijeção diferenciável com inversa diferenciável. Dizemos que F é uma isometria, se para todo $p \in M$ tivermos que $g_M(u, v) = g_N(dF_p(u), dF_p(v))$, para todos $u, v \in T_pM$, isto é, $g_M = F^* g_N$. F é isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança aberta U de p tal que satisfaz a definição de ismetria nessa vizinhança.*

Exemplo 1.1.8. *Pelo Exemplo (1.1.3) dados duas variedades Riemannianas (M, g_M) e (N, g_N) o produto $(M \times N)$ é uma variedade diferenciável, e, pela Observação (1.1.1), a métrica natural a se considerar é*

$$g_{M\times N} = g_M + g_N,$$

o que torna $(M \times N, g_{M\times N})$ uma variedade Riemanniana.

Definição 1.1.15. *Uma Conexão Riemanniana é a aplicação $\nabla : (M) \to (M)$ tal que:*

- $\nabla_{fX_1+X_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$;
- $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$;
- $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$;
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$;
- $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

A uma conexão Riemanniana podemos associar uma derivada covariante, como pode ser visto em [6, Proposição 2.2, p. 55], tal que

1. $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, onde V, W são campos ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$;
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde V é um campo ao longo de $c : I \to M$ e $f \in C^\infty(I)$;
3. Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathscr{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Definição 1.1.16. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ no ponto t_0; se γ é geodésica em t, para todo $t \in I$, dizemos que γ é um geodésica. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada (segmento de) geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Exemplo 1.1.9. *Seja $M = \mathbb{R}^N$, como a derivada covariante, que coincide com a derivada usual de campos, as geodésicas são retas parametrizadas proporcionalmente pelo comprimento de arco. Como pode ser consultado em [6, Exemplo 2.10, p. 73]*

Exemplo 1.1.10. *Considere agora* $\mathbb{S}^N$. *como em [6, Exemplo 2.11, p. 74] as geodésicas de* $\mathbb{S}^N$ *são círculos máximos.*

Exemplo 1.1.11. *Vamos calcular algumas geodésicas em* $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$. *Primeiramente, observe que pela Proposição (1.1.1) dado o ponto* $(\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ *temos que* $T_{(\sigma,t)}(\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}) = T_\sigma \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$, *assim podemos identificar o fibrado tangente do produto por* $T(\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}) = T\mathbb{S}^N \oplus T\mathbb{R}$, *e logo identificamos também o espaço dos campos de vetores, isto é,* $\mathscr{X}(\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}) = \mathscr{X}(\mathbb{S}^N) \oplus \mathscr{X}(\mathbb{R})$. *Assim ganhamos uma conexão Riemanniana, isto é, compatível com a métrica* $g_{(\sigma,t)} = g_{\mathbb{S}^N} + dt^2$ *métrica dada pelo Exemplo (1.1.8), que denotaremos por*

$$\Delta_{\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}} = \Delta_{\mathbb{S}^N} + \Delta_{\mathbb{R}},$$

associado a essa conexão Riemanniana identificamos a derivada covariante por

$$\frac{D}{ds}^{\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}}(\cdot) := \frac{D}{ds}^{\mathbb{S}^N}(\cdot) + \frac{D}{ds}^{\mathbb{R}}(\cdot) = \frac{D}{ds}^{\mathbb{S}^N}(\cdot) + \frac{d^2}{ds}(\cdot).$$

Logo, seja $\gamma : I \to \mathbb{S}^N$ *um circulo máximo e* $\alpha(s) = st + (1-s)t_0 = t_0 + s(t - t_0)$ *um segmento de reta em* $\mathbb{R}$, *onde* $t_0 \in \mathbb{R}$ *fixo e* $t \in \mathbb{R}$ *arbitrário diferente de* t_0. *Considere* $\beta_1(s) = (\gamma(s), t)$, *assim*

$$\frac{D}{ds}^{\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}}(\beta_1'(s)) = \frac{D}{ds}^{\mathbb{S}^N}(\gamma'(s)) + \frac{d^2}{dt}(s) = 0,$$

pois γ *é geodésica em* $\mathbb{S}^N$ *e* t *é constante. E então,* β_1 *é geodésica em* $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$. *Agora, defina* $\beta_2(s) = (p, \alpha(s))$,*onde* $p \in \mathbb{S}^N$ *é um ponto fixado, por argumentos análogos ao de* β_1 *é possível mostrar que* β_2 *é geodésica em* $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$. *Uma pergunta natural é se curvas como* β_1 *e* β_2 *são as únicas geodésica? A resposta para essa pergunta é não, porém, não é tão trivial de classificar as geodésicas dessa variedade Riemanniana. Para ficar claro a dificuldade de classificar todas as geodésicas em* $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ *olharemos abaixo a equação das geodésicas que pode ser expressada em coordenadas locais.*

Como em [6, p. 69], podemos expressar a equações das geodésicas em parametrizações por

$$\frac{d^2 x_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0, \ k = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

onde $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ é uma geodésica em uma variedade Riemanniana M. E os Γ_{ij}^k podem ser obtidos como se segue, em [18, cap. 5, p.69], vale a fórmula de Koszul

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle. \tag{1.2}$$

Tomando um sistema de coordenadas (U, x_i) em torno de $p \in M$ temos, pela fórmula de Koszul (1.2),

$$2\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l\rangle = \partial_i\langle \partial_j, \partial_l\rangle + \partial_j\langle \partial_i, \partial_l\rangle - \partial_l\langle \partial_i, \partial_j\rangle. \tag{1.3}$$

Fazendo $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$ obtemos

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

o que multiplicando pela inversa g^{lm} resulta em

$$\begin{aligned} \sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl} g^{lm} &= \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) g^{lm} \\ \sum_k \Gamma_{ij}^k \delta_{km} &= \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) g^{lm}. \end{aligned}$$

Assim, tomando $m = k$, segue que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_k (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) g^{lk}.$$

Olhando para (1.1) se trata de uma EDO de segunda ordem em que dado um ponto e um vetor tangente garantimos a existência e unicidade de solução, porém se considerarmos a métrica e derivada covariante em $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ fica claro o quão difícil é classificar todas as geodésicas na mesma. Para ilustrar melhor, com as mesmas notações do exemplo acima, podemos expressar a equação das geodésicas em coordenadas em $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$. Considere

$$\alpha(s) = (\gamma(s), t(s)) = (x_1(s), \ldots, x_n(s), t(s)),$$

geodésica em $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$, assim

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{ds}^{\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}}(\alpha'(s)) = \frac{D}{ds}^{\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}}((\gamma'(s), t'(s))) \\ &= \frac{D}{ds}^{\mathbb{S}^N}(\gamma'(s)) + t''(s) \\ &= \sum_{k=1}^{N} (\frac{d^2 x_k}{dt} + \sum_{i,j}^{N} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}) e_k + t''(s) e_{N+1}, \end{aligned}$$

onde e_i é o $i-$ésimo termo da base canônica de $\mathbb{R}^{N+1}$.

Considerando agora $X \in \mathscr{X}(M)$, com as notações anteriores podemos escrever

$$X = \sum_i a_i \partial_i \Longrightarrow \langle X, \partial_j \rangle = \langle \sum_i a_i \partial_i, \partial_j \rangle = \sum_i a_i \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \sum_i a_i g_{ij},$$

assim, $a_i = \langle X, \partial_j \rangle g^{ij}$, e, portanto,

$$X = \sum_i \langle X, \partial_j \rangle g^{ij} \partial_i. \tag{1.4}$$

Definição 1.1.17. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gradiente de f é um campo vetorial em M denotado por ∇f, tal que*

$$g(\nabla f, X) = X(f), \tag{1.5}$$

para todo $X \in \mathscr{X}(M)$.

Proposição 1.1.4. *Seja M uma variedade Riemanniana. Então*

(1) $\nabla(\lambda f + g) = \lambda \nabla f + \nabla g$*, para toda* $f, g \in C^\infty(M)$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

(2) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$ *para toda* $f, g \in C^\infty(M)$*.*

Observação 1.1.8. *Sejam M uma variedade Riemannina,* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável, e seja também* $v \in T_pM$ *e* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$*, tal que* $\alpha(0) = p$ *e* $\alpha'(0) = v$*. Então segue que*

$$g(\nabla f(p), v) = df_p(v) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)|_{t=0}.$$

Observação 1.1.9. *Seja* $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ *uma parametrização de* $p \in M$ *e* $f \in C^\infty(M)$*. Então, na vizinhança* $x(U)$ *temos*

$$\nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j} g^{ij} \partial_j(f) \partial_i,$$

e, além disso, $\nabla f \in \mathscr{X}(M)$*.*

Definição 1.1.18. *Sejam* (M, g) *uma variedade Riemanniana com bordo e* $f \in C^\infty(M)$*. Definimos a derivada normal de f por*

$$\frac{\partial f}{\partial N} = g(\nabla f, N),$$

em que N é o campo normal de vetores unitários ao longo do ∂M*.*

Frequentemente neste trabalho também denotaremos a derivada normal de uma função $f : M \to \mathbb{R}$, definida em uma variedade Riemanniana com bordo M, por $\partial_N f$.

Definição 1.1.19. *Seja M uma variedade Riemanniana. O divergente do campo* $X \in \mathscr{X}(M)$ *é uma função, div :* $M \to \mathbb{R}$*, tal que* $div(X)(p) = tr\{v \to \nabla_v X\}$*, para todo* $v \in T_pM$*, onde tr é o traço da aplicação* $\{v \to \nabla_v X\}$*.*

Proposição 1.1.5. *Seja M uma variedade Riemanniana. Então*

(1) $\operatorname{div}(\lambda X + Y) = \lambda \operatorname{div}(X) + \operatorname{div}(Y)$ *para todo* $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

(2) $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + g(\nabla f, X)$ *para todo* $X \in \mathscr{X}(M)$ *e toda* $f \in C^\infty(M)$*.*

Observação 1.1.10. *Sejam* $X \in \mathscr{X}(M)$ *e* $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ *uma parametrização em* $p \in M$*. Então em* $x(U)$*, temos*

$$\operatorname{div} X = \sum_i \left(\partial_i(a_i) + \sum_j a_j \Gamma^i_{ij} \right),$$

onde $X = \sum_j a_j \partial_j$ *nessa parametrização. Além disso, temos*

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det[g_{ij}]}} \sum_i \partial_i (a_i \sqrt{\det[g_{ij}]}).$$

Definição 1.1.20. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O laplaciano de f, $\Delta f : M \to \mathbb{R}$, é dado por $\Delta f(p) = \mathrm{div}(\nabla f)(p)$.*

Proposição 1.1.6. *Seja M uma variedade Riemanniana. Então, para toda $f, g \in C^\infty(M)$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:*

(1) $\Delta(\lambda f + g) = \lambda \Delta f + \Delta g$;

(2) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + g(\nabla f, \nabla g)$.

A parte (1) da Proposição acima diz que a definição a seguir faz total sentido.

Definição 1.1.21. *O operador $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dado por $f \to \Delta f$ é chamado de Operador Laplace-Beltrami.*

Observação 1.1.11. *Sejam $f \in C^\infty(M)$ e $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização em $p \in M$. Então, em coordenadas temos*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det[g_{ij}]}} \sum_{i,j} \partial_i \left(\sqrt{\det[g_{ij}]} g^{ij} \partial_j(f) \right).$$

1.2 ESPAÇO DAS FUNÇÕES DE HÖLDER EM VARIEDADES COMPACTAS

Nessa seção introduziremos o espaço das funções de Hölder em variedades compactas, que desempenhará um papel fundamental no decorrer do trabalho. Aqui demonstraremos que tais espaços, com uma norma a ser definida, é um espaço de Banach, o que será de suma importância na aplicação de alguns resultados da Teoria de Pertubação de Domínios. Começaremos a construção em $\mathbb{R}^N$ para posteriormente estendermos para variedades Riemanninas compactas.

Definição 1.2.1. *Dizemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ se Ω é aberto, conexo e limitado. Se Ω é somente aberto, conexo e não limitado, dizemos que Ω é um domínio ilimitado.*

Exemplo 1.2.1. *Considere $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não degenerado. Como é conhecido, temos que I é aberto, conexo e limitado. Segue que I é um domínio limitado. Um exemplo de domínio não limitado em $\mathbb{R}$ pode ser o próprio $\mathbb{R}$ ou intervalos não limitados como $(0, +\infty)$.*

Exemplo 1.2.2. *Seja $J = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, observe que J não é conexo, então J não é um domínio.*

Exemplo 1.2.3. *Podemos ter exemplos mais sofisticados em $\mathbb{R}^n$. Vamos exibir dois exemplos. A bola aberta de centro na origem e raio 1,*

$$B_1(0) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : ||(x_1, \ldots, x_n)|| < 1\},$$

é um domínio limitado. Um exemplo de um domínio ilimitado é o conjunto $H := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$.

Vamos fixar para o contexto deste trabalho $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Seja $0 < \alpha < 1$, dizemos que a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é de classe C^α em Ω se existe $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L||x - y||^\alpha,$$

para todos $x, y \in \Omega$. Então, faz sentido

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||^\alpha} < +\infty.$$

Chamaremos as funções que satisfazem a definição acima de funções Hölder contínuas e denotaremos por $C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Exemplo 1.2.4. *Seja $\Omega = (0, 1)$, então $\overline{\Omega} = [0, 1]$. Defina $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $f(t) = t^N$, onde $N \in \mathbb{N}$. Afirmamos que f é Hölder contínua. Com efeito, temos que*

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \frac{|x^N - y^N|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \frac{|x - y||x^N + x^{N-2}y + x^{N-3}y^2 + \cdots + x^{N-j}y^{j-1} + \cdots + y^{N-1}|}{|x - y|^\alpha} \\ &= |x - y|^{1-\alpha}|x^N + x^{N-2}y + x^{N-3}y^2 + \cdots + x^{N-j}y^{j-1} + \cdots + y^{N-1}| \\ &\leq |x - y|^{1-\alpha}[|x^N| + |x^{N-2}y| + |x^{N-3}y^2| + \cdots + |x^{N-j}y^{j-1}| + \cdots + |y^{N-1}|], \end{aligned}$$

que é limitado pois $[0, 1]$ é limitado.

Observação 1.2.1. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^α em Ω, então $f \in C(\Omega)$, isto é, f é contínua. Com efeito, fixe $x_0 \in \Omega$ arbitrário. Então, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta := \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, assim quando $||x - x_0|| < \delta$ implica que*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L||x - y||^\alpha < L\left(\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = \varepsilon,$$

logo f é contínua em x_0. Como x_0 é arbitrário, segue que f é contínua. Também temos que $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um subespaço de $C(\overline{\Omega})$, onde $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω em $\mathbb{R}^N$. Com efeito, seja $f, g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|(f + \lambda g)(x) - (f + \lambda g)(y)|}{||x - y||^\alpha} &= \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) + \lambda g(x) - f(y) - \lambda g(y)|}{||x - y||^\alpha} \\ &\leq \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)| + |\lambda g(x) - \lambda g(y)|}{||x - y||^\alpha} \\ &\leq \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||^\alpha} + |\lambda| \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|g(x) - g(y)|}{||x - y||^\alpha} < \infty, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue do fato de $f, g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e também de λ ser fixo.

Lembrando que em análise funcional, dado um espaço compacto K de Hausdoff, o conjunto das funções contínuas em K, denotado por $C(K)$, é um espaço de Banach, vide [3, Exemplo 1.1.2, p.3], com a norma

$$f \in C(K) \to ||f||_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Então, pela observação acima sobre $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, podemos nos perguntar se $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é fechado em $C(\overline{\Omega})$ com relação a norma $||\cdot||_\infty$. Assim, pela Proposição (A.0.1), concluímos que $(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), ||\cdot||_\infty)$ é Banach. Isso não é verdade em geral. Podemos considerar $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ e observar que $f(t) = t^N$ pertence a $C^{0,\alpha}([0,1])$, para todo $N \in \mathbb{N}$, pelo Exemplo (1.2.4), e como $C^{0,\alpha}([0,1])$ é um espaço vetorial segue que os polinômios com variáveis em $[0,1]$ pertencem a $C^{0,\alpha}([0,1])$.

Dessarte, para mostrar que $C^{0,\alpha}([0,1])$ não é fechado devemos exibir uma sequência de funções Hölder contínuas que convergem parar uma função que não pertence ao espaço. Considere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = t^\beta$, onde $0 < \beta < \alpha < 1$. Observe que $g \in C([0,1])$, porém

$$\frac{|g(x) - g(0)|}{|x - 0|^\alpha} = \frac{x^\beta}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-\beta}} \to \infty,$$

quando $x \to 0$, pois $\beta - \alpha < 0$, isto é, g não pertence a $C^{0,\alpha}([0,1])$, e pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass, vide [21, Proposição 18, p.279], existe uma sequência de polinômios $(F_n)_{n=1}^\infty \subset C^{0,\alpha}([0,1])$ tal que $||F_n - g||_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$, o que conclui que $C^{0,\alpha}([0,1])$ não é fechado. Portanto não temos em geral que $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é fechado em $C(\overline{\Omega})$ em relação a norma $||\cdot||_\infty$.

Para contornar este fato definimos a seguinte norma em $C^{0,\alpha}(\Omega)$

$$||f||_{C^{0,\alpha}} := ||f||_\infty + \sup_{\substack{x,y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x-y||^\alpha}.$$

Proposição 1.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, então $(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^{0,\alpha}})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que de fato $||\cdot||_{C^{0,\alpha}}$ é uma norma em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. É claro que está bem definido, como para todo $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ temos

$$||f||_{C^{0,\alpha}} \geq ||f||_\infty \geq 0.$$

Também, se $||f||_{C^{0,\alpha}} = 0$ então

$$||f||_\infty + \sup_{\substack{x,y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x-y||^\alpha} = 0,$$

e como $\sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{||x-y||^{\alpha}} \geq 0$ e $||f||_{\infty} \geq 0$, segue que $f = 0$. Além disso, sejam $f, g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, assim

$$
\begin{aligned}
||f+g||_{C^{0,\alpha}} &= ||f+g||_{\infty} + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{||x-y||^{\alpha}} \\
&\leq ||f||_{\infty} + ||g||_{\infty} + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{||x-y||^{\alpha}} \\
&\leq ||f||_{\infty} + ||g||_{\infty} + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|(f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|}{||x-y||^{\alpha}} \\
&\leq ||f||_{\infty} + ||g||_{\infty} + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|(f(x)-f(y)|}{||x-y||^{\alpha}} + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{||x-y||^{\alpha}} \\
&= ||f||_{C^{0,\alpha}} + ||g||_{C^{0,\alpha}},
\end{aligned}
$$

isto é, vale a desigualdade triangular. É claro que $||\lambda f||_{C^{0,\alpha}} = |\lambda|||f||_{C^{0,\alpha}}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e toda $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Logo, $||\cdot||_{C^{0,\alpha}}$ é de fato uma norma em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Agora mostraremos que de fato $(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^{0,\alpha}})$ é Banach. Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma sequência de Cauchy, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \in \mathbb{N}$ onde $m, n \geq n_0$ implica que

$$
\varepsilon > ||f_n - f_m||_{C^{0,\alpha}} = ||f_n - f_m||_{\infty} + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(y)|}{||x-y||^{\alpha}} \geq ||f_n - f_m||_{\infty},
$$

logo $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $(C(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{\infty})$, e como $(C(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{\infty})$ é Banach, existe $f \in C(\overline{\Omega})$ tal que $||f_n - f||_{\infty} \to 0$, quando $n \to \infty$. Afirmo que $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, pois como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^{0,\alpha}})$, logo é limitada, assim existe $L > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
L &\geq ||f_n||_{C^{0,\alpha}} = ||f_n||_{\infty} + \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{||x-y||^{\alpha}} \\
&\geq \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{||x-y||^{\alpha}} \geq \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{||x-y||^{\alpha}},
\end{aligned}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$
L||x-y||^{\alpha} \geq |f_n(x)-f_n(y)|,
$$

e, fazendo $n \to \infty$, temos que

$$
|f(x)-f(y)| \leq L||x-y||^{\alpha},
$$

para todo $x, y \in \overline{\Omega}$, ou seja $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ como afirmado. É claro que $||f_n - f||_{C^{0,\alpha}} \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto $(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^{0,\alpha}})$ é Banach. $\square$

Em geral podemos falar de funções Hölder deriváveis em domínios limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Para isso, começamos introduzindo alguns novos conceitos.

Seja $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que $\beta_i \in \mathbb{N}_0$ para todo $i = 1, \ldots, N$. Chamaremos β de multi-índice e denotaremos a ordem de β por

$$|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_N.$$

Seja $k \in \mathbb{N}_0$ e $f \in C^k(\overline{\Omega})$, então definimos a derivada total

$$\partial^\beta f = \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_N}^{\beta_N}}, \tag{1.6}$$

e como $\overline{\Omega}$ é compacto, temos que é limitado, e segue que o número

$$|D^k f|_{0,\Omega} := \max_{|\beta|=k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\beta f(x)|$$

existe, pois todas as derivadas parciais são funções contínuas definidas no conjunto compacto $\overline{\Omega}$.

Assim, dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^k(\Omega)$ é $C^{k,\alpha}(\Omega)$ se $\partial^\beta f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ para todo multi-índice β de ordem k.

Assim, para uma função $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ definimos o número

$$[D^j f] := \max_{0 \leq |\beta| \leq j} \sup_{\substack{x,y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)|}{||x-y||^\alpha},$$

para todo $j = 0 \ldots, k$. Logo definimos em $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ a seguinte norma

$$||f||_{C^{k,\alpha}} := \sum_{j=0}^{k} |D^j f|_{0,\Omega} + [D^j f]_{\alpha,\Omega}.$$

Lema 1.2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de funções de classe C^1 em $\overline{\Omega}$. Se para um ponto $x_0 \in \overline{\Omega}$, a sequência $(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$ converge, existe uma função*

$$g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

tal que as derivadas parciais de f_n convergem uniformemente para g^i em $\overline{\Omega}$, isto é, $\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \to g^i$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ para $i = 1, \ldots, N$, então, existe $f \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $f_n \to f$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = g^i$ para $i = 1, \ldots, N$.

Demonstração. Primeiro, temos que Ω é limitado em $\mathbb{R}^N$, assim $\overline{\Omega}$ é compacto. Logo, $\overline{\Omega}$ é uniformemente limitado, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_1, \ldots, x_k \in \overline{\Omega}$ tais que

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon),$$

onde $B(x_i,\varepsilon)$ é a bola de centro em x_i e raio ε. Então, basta mostrar o resultado quando $\Omega = B(0,1)$, sob as mesmas hipóteses do Lema. Assim, como $\overline{\Omega}$ é convexo, dado $x \in \overline{\Omega}$ temos que $tx+(1-t)x_0 \in \overline{\Omega}$ para $t \in [0,1]$. Então, considere

$$h_n(t, tx+(1-t)x_0) = f_n(tx+(1-t)x_0).$$

Temos que h_n é de classe C^1 em $[0,1]$ por ser composição de aplicações C^1 para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, Observamos que,

$$h_n(0,x_0) = f_n(x_o),$$

e assim a sequência $(h_n(0,x_0))_{n=1}^{\infty}$ converge. Note que

$$\begin{aligned} h_n'(t, tx+(1-t)x_0) &= \langle \nabla f_n(tx+(1-t)x_0), x-x_0 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(tx+(1-t)x_0)(x^i - x_0^i) \end{aligned}$$

na base canônica, e assim, $h_n'(t, tx+(1-t)x_0)$ converge uniformemente para $g^i(tx+(1-t)x_0)$ em $[0,1]$. Por [20, Teorema 4, p.12] existe $h(t, tx+(1-t)x_0) \in C^1([0,1])$ tal que

$$h_n(t, tx+(1-t)x_0) \to h(t, tx+(1-t)x_0)$$

uniformemente em $[0,1]$. Como

$$h_n(1,x) = h_n(0,x_0) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(tx+(1-t)x_0)(x^i - x^0)dt, \tag{1.7}$$

então começando o segmento em um ponto x_1 no segmento $[x_0, x]$, temos, pelo Teorema do Valor Médio

$$\begin{aligned} |h_n(0,x_1) - h_n(0,x_0)| &= |f_n(x_1) - f_n(x_0)| \\ &= |\nabla(\zeta)(x_1 - x_0)| \\ &\leq ||\nabla f_n(\zeta)||||x_1 - x_0|| \\ &\leq C||x_1 - x_0||, \end{aligned} \tag{1.8}$$

em que $C > 0$, desde que $\nabla f_n(\zeta)$ é limitado pois o mesmo tem entradas que convergem uniformemente. Assim, definimos a função $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = h(0,x)$. Segue de (1.8) que f está bem definida, pois a definição de $h(0,x)$ depende continuamente do ponto $x \in \overline{\Omega}$, e de (1.7) que f é exatamente a função que procuramos.

□

Observação 1.2.2. *O Lema anterior também é válido para derivadas totais de multi-índice maiores ou iguais a* 1. *Para a demonstração, basta aplicar indução sobre a ordem do multi-índice e prosseguir com argumentos ao Lema anterior.*

Proposição 1.2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Então $C^k(\overline{\Omega})$ é Banach com a norma $||f||_{C^k} := \sum_{j=0}^{k} |D^j f|_{0,\Omega}$, para $f \in C^k(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Prosseguiremos a demonstração por indução em k. Para $k = 0$ segue de [3, Exemplo 1.1.2, p.3]. Suponha por indução que $(C^{k-1}(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^{k-1}})$ é Banach. Seja $(f_n)_n \subset C^k(\overline{\Omega})$ uma sequência de Cauchy, como $||f_n||_{C^k} \geq ||f_n||_{C^{k-1}}$ e $||f_n||_{C^k} \geq ||f_n||_{\infty}$. Então, pela hipótese de indução e como $(C(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{\infty})$ são Banach existem $f \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ e $g^{\beta} \in C(\overline{\Omega})$ tais que $||f_n - f||_{C^{k-1}} \to 0$ e $||\partial^{\beta} f_n - g^{\beta}||_{\infty} \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo multi-índice β de ordem k. Pelo Lema e observação anteriores, temos que $f \in C^k(\overline{\Omega})$ e assim

$$g^{\beta}(x) = \lim_{n\to\infty} \partial^{\beta}(f_n(x)) = \partial^{\beta}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \partial^{\beta}(f(x)),$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e todo multi-índice β de ordem k. Portanto $||f_n - f||_{C^k} \to 0$ quando $n \to \infty$, isto é $(C^k(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^k})$ é Banach. □

Proposição 1.2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado Então $(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^{k,\alpha}})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma sequência de Cauchy, como

$$||f_n||_{C^{0,\alpha}} \geq ||f_n||_{C^k},$$

segue que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $(C^k(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^k})$ e como pelo Lema acima o mesmo é Banach, segue que existe $f \in C^k(\overline{\Omega})$ tal que $||f_n - f||_{C^k} \to 0$ quando $n \to \infty$. Podemos usar os mesmo argumentos que foram feitos na Proposição (1.2.1) para provar que $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ e daí segue que $||f_n - f||_{C^{0,\alpha}} \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto $(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^{k,\alpha}})$ é Banach. □

Proposição 1.2.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e seja $0 < \alpha < 1$. Então $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e a inclusão é um operador linear limitado, isto é,*

$$i : (C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^{k,\alpha}}) \to (C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{C^{0,\alpha}}),$$

definido por $i(f) = f$.

Demonstração. Seja $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, então temos que

$$||f||_{C^{k,\alpha}} = \sum_{j=0}^{k} |D^j f|_{0,\Omega} + [D^j f]_{\alpha,\Omega} \geq [D^j f] \geq \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega} \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x-y||^{\alpha}},$$

então segue que $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. É claro que a inclusão é linear, então basta mostrar que ela é um operador limitado. Seja $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ arbitrário, assim por definição

$$||i(f)||_{C^{0,\alpha}} = ||f||_{C^{0,\alpha}} \leq ||f||_{C^{k,\alpha}},$$

e então temos que a inclusão é contínua. □

Definição 1.2.2. *Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que $U \subset M$ é um domínio limitado se U é aberto, conexo e limitado com a métrica d definida em (1.1.11).*

Observação 1.2.3. *Pelo Teorema de Hopf Rinow, vide [6, Teorema 2.8, p.162] para o devido enunciado e prova, os limitados e fechados segundo a distância d, definida em (1.1.11), são compactos.*

Definição 1.2.3. *Seja M uma variedade Riemanniana e $U \subset M$ um domínio limitado. Para $0 < \alpha < 1$ e $k \in \mathbb{N}$, uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é dita $C^{k,\alpha}$ em U se, para toda carta coordenada $x : U \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ em M, a função $f \circ x^{-1} : \Omega \to \mathbb{R}$é de classe $C^{k,\alpha}$.*

Observação 1.2.4. *Todas as demonstrações acima se aplicam a variedades. Isto é. Se M é uma vaidade e $U \subset M$ é um domínio limitado, então*

$$(C^{k.\alpha}(\overline{U}), ||\cdot||_{C^{k,\alpha}}),$$

é um espaço de Banach. Em particular se tomamos M como sendo uma variedade conexa e compacta, então

$$(C^{k,\alpha}(M), ||\cdot||_{C^{k,\alpha}}),$$

será uma espaço de Banach.

Daqui por diante sempre que tratarmos de algum conceito nesses espaços a norma utilizada será sempre aquela que dará a melhor estrutura para o espaço, isto é, que torna o espaço Banach. E faremos isso indicando somente $||\cdot||$ sempre que não corrermos o risco de confusão.

2. PROBLEMA DE SERRIN

Neste capítulo veremos quais são as condições que teremos de cumprir para demonstrar o Teorema principal deste trabalho. Para isso passaremos ao ambiente alternativo descrito na seção (2.1). Posteriormente exibiremos os autovetores do operador de linearização e suas propriedades, que serão apresentados na seção (2.2). Por fim, na seção (2.3), apresentaremos os pré-requisitos impostos para a aplicação da Teoria de Bifurcação de soluções, para demonstrarmos o Teorema principal.

2.1 UM AMBIENTE ALTERNATIVO PARA O PROBLEMA DE SERRIN

Como sabemos pelo Exemplo (1.1.3) $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ é uma variedade diferenciável e pelo Exemplo (1.1.8) podemos muni-la com a métrica

$$g_{(\sigma,t)} = g_{\mathbb{S}^N} + dt^2,$$

sendo assim uma variedade Riemanniana, onde $g_{\mathbb{S}^N}$ e dt^2 são as métricas de $\mathbb{S}^N$ e $\mathbb{R}$ respectivamente dados nos Exemplos (1.1.7) e (1.1.6). Nessa métrica o operador Laplace-Beltrami é dado por

$$\Delta_{g_{(\sigma,t)}} = \Delta_{\mathbb{S}^N} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Seja $\alpha \in (0,1)$, definimos

$$U := \{\phi \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N) : \phi(\sigma) > 0 \text{ para todo } \sigma \in \mathbb{S}^N\} \subset C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N), \tag{2.1}$$

que é um aberto de $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$. Com efeito, seja $(\phi_n)_{n=1}^{\infty} \subset U^c$ tal que existe $\phi \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ e

$$||\phi_n - \phi||_{C^{2,\alpha}} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\sigma_n \in \mathbb{S}^N$ tal que

$$\phi_n(\sigma_n) \leq 0.$$

Como $\mathbb{S}^N$ é compacto, logo a menos de subsequência, existe $\sigma \in \mathbb{S}^N$ tal que $||\sigma_n - \sigma|| \to 0$ quando $n \to \infty$. Também temos que, como $\phi_n \in U^c$ e é convergente logo é limitada e assim existe $L > 0$ tal que $|\phi_n(x) - \phi_n(y)| \leq L||x-y||^\alpha$ para todo $x, y \in \mathbb{S}^N$, pois, existe $L > 0$ tal que

$$\begin{aligned} L \geq ||\phi_n||_{C^{2,\alpha}} &= \sum_{j=0}^{2} ||D^j \phi_n||_\infty + \max_{0 \leq k = |\beta| \leq 2} \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{S}^N \\ x \neq y}} \frac{|\partial^{|\beta|}(\phi_n(x) - \phi_n(y))|}{||x-y||^\alpha} \\ &\geq \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{S}^N \\ x \neq y}} \frac{|(\phi_n(x) - \phi_n(y))|}{||x-y||^\alpha} \geq \frac{|\phi_n(x) - \phi_n(y)|}{||x-y||^\alpha}, \end{aligned}$$

e assim, $|\phi_n(x) - \phi_n(y)| \leq L||x-y||^\alpha$ para todo $x, y \in \mathbb{S}^N$.

Portanto

$$\begin{aligned} |\phi_n(\sigma_n) - \phi(\sigma)| &\leq |\phi_n(\sigma_n) - \phi_n(\sigma)| + |\phi_n(\sigma) - \phi(\sigma)| \\ &\leq L||\sigma_n - \sigma||^\alpha + |\phi_n(\sigma) - \phi(\sigma)| \to 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Pela permanência de sinal do limite, segue que $\phi(\sigma) \leq 0$. Portanto U^c é fechado, e assim U é aberto como afirmado

Observação 2.1.1. *Observe que a princípio não faz sentido usar um argumento de sequências em $\mathbb{S}^N$, pois o mesmo aqui neste trabalho está sendo tratado somente como uma variedade Riemanniana, porém ressalto que é conhecido em cursos de análise, vide [19] por exemplo, que a esfera $\mathbb{S}^N$ é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^{N+1}$. E como a inclusão $i : \mathbb{S}^N \to \mathbb{R}^{N+1}$ definida por $i(x) = x$ é um mergulho, isto é, a diferencial de i é injetiva para todo ponto e i é um homeomorfismo sobre a imagem, isto é i é contínua com inversa contínua. Assim, o argumento de sequência usado acima é um abuso de notação pois estamos usando a inclusão para fazer sentido usarmos sequências em $\mathbb{S}^N$.*

Para cada $\phi \in U$ definimos

$$\Omega_\phi := \{(\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R} : |t| < \phi(\sigma)\} \subset \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}.$$

Proposição 2.1.1. *Seja $\phi \in U$. Então Ω_ϕ é um domínio em $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. Dado $\phi \in U$ temos que ϕ atinge o máximo e mínimo, pois ϕ está definido no espaço compacto $\mathbb{S}^N$ como pode ser visto em [21, Proposição 4, p.239], desta forma

$$\Omega_\phi = \mathbb{S}^N \times (\min_{\sigma \in \mathbb{S}^N} \phi(\sigma), \max_{\sigma \in \mathbb{S}^N} \phi(\sigma)),$$

que é conexo e limitado em $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$. Agora nos resta mostrar que Ω_ϕ é aberto na topologia produto de $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$, para isso mostraremos que $\Omega_\phi^c = (\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}) - \Omega_\phi = \{(\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R} : |t| \geq \phi(\sigma)\}$ é fechado. Considere $(\sigma_n, t_n)_{n=1}^\infty \subset \Omega_\phi$ uma sequência tal que

$$(\sigma_n, t_n) \to (\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R},$$

logo $\sigma_n \to \sigma$ e $t_n \to t$. Com isso, $|t_n| \geq \phi(\sigma_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, fazendo $n \to \infty$ e lembrando que $\phi \in U$, seque que $|t| \geq \phi(\sigma)$ e logo Ω_ϕ^c é fechado como queríamos. Portanto, Ω_ϕ é um domínio limitado. $\square$

Como $\partial\Omega_\phi = \{(\sigma,t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R} : |t| = \phi(\sigma)\}$, logo $\partial\Omega_\phi$ pode ser visto como pré-imagem de um valor regular por uma aplicação diferenciável. Então o vetor normal unitário apontando para fora é dado por

$$\mu_\phi(\sigma,t) = \frac{(-\nabla_{\mathbb{S}^N}\phi(\sigma), t/|t|)}{\sqrt{1+||\nabla\phi(\sigma)||^2}} \in T_\sigma\mathbb{S}^N \times \mathbb{R} \ \text{ para } (\sigma,t) \in \partial\Omega_\phi. \tag{2.2}$$

Então podemos reduzir o problema (0.5) a encontrar uma função $\phi \in U$ para o qual

$$\begin{cases} \Delta_{g_{(\sigma,t)}} u = -1 \quad \text{em } \Omega_\phi \\ u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega_\phi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mu_\phi} = \text{const.} \quad \text{sobre } \partial\Omega_\phi, \end{cases} \tag{2.3}$$

tem uma única solução.

Agora, dado $\phi \in U$ definimos a aplicação

$$\Psi_\phi : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^N \times \mathbb{R},$$

dada por

$$\Psi_\phi(\sigma,t) = (\sigma, \phi(\sigma)t).$$

Observe que Ψ_ϕ é diferenciável. Seja $\Omega_1 = \Omega_{\phi=1} = \mathbb{S}^N \times (-1,1)$, dado $(\sigma,t) \in \Omega_1$ temos que $\Psi_\phi(\sigma, \phi(\sigma)t)$ é tal que

$$|\phi(\sigma)t| = |t|\phi(\sigma) < \phi(\sigma),$$

isto é, $\Psi_\phi(\Omega_1) \subset \Omega_\phi$. Então definimos

$$\Psi_\phi = \Psi_\phi|_{\Omega_1} : \Omega_1 \to \Omega_\phi, \tag{2.4}$$

dada por $\Psi_\phi(\sigma,t) = (\sigma, \phi(\sigma)t)$.

Proposição 2.1.2. *A aplicação definida em (2.4) é um difeomorfismo.*

Demonstração. É claro que Ψ_ϕ é diferenciável por ser restrição de uma aplicação diferenciável. Sejam $(\sigma_1,t_1),(\sigma_2,t_2) \in \Omega_1$ tais que

$$\Psi_\phi(\sigma_1,t_1) = \Psi_\phi(\sigma_2,t_2),$$

logo pela definição de Ψ_ϕ temos

$$(\sigma_1, t_1\phi(\sigma_1)) = (\sigma_2, t\phi(\sigma_2)),$$

como $\phi \in U$ segue que $(\sigma_1, t_1) = (\sigma_2, t_2)$ o que é exatamente Ψ_ϕ ser injetiva.

Seguiremos mostrando que Ψ_ϕ é sobrejetiva, tome $(\sigma, t) \in \Omega_\phi$ logo $|t| < \phi(\sigma)$. Seja $\left(\sigma, \dfrac{t}{\phi(\sigma)}\right) \in \Omega_1$, pois

$$\left|\frac{t}{\phi(\sigma)}\right| = \frac{|t|}{\phi(\sigma)} < \frac{\phi(\sigma)}{\phi(\sigma)} = 1,$$

logo

$$\Psi_\phi\left(\sigma, \frac{t}{\phi(\sigma)}\right) = \left(\sigma, \frac{t}{\phi(\sigma)}\phi(\sigma)\right) = (\sigma, t)$$

então Ψ_ϕ é sobrejetiva.

Agora, defina

$$\Psi_\phi^{-1} : \Omega_\phi \to \Omega_1,$$

por $\Psi_\phi^{-1}(\sigma, t) = \left(\sigma, \dfrac{t}{\phi(\sigma)}\right)$ que é claramente diferenciável, o que conclui a prova. □

Considere a métrica

$$g_\phi = \Psi_\phi^*(g_{(\sigma,t)}).$$

Assim, temos que a aplicação

$$\Psi_\phi : (\overline{\Omega}_1, g_\phi) \to (\overline{\Omega}_\phi, g_{(\sigma,t)}),$$

é uma isometria. Seja υ_ϕ o vetor normal unitário apontando para fora do $\partial\Omega_1$ com respeito a g_ϕ. Como Ψ_ϕ é isometria, então os vetores υ_ϕ e μ_ϕ são relacionados por

$$[d\Psi_\phi]\upsilon_\phi = \mu_\phi \circ \Psi_\phi. \tag{2.5}$$

Pois,

$$g_\phi(V, V) = g_{(\sigma,t)}([d\Psi_\phi]V, [d\Psi_\phi]V) \quad \text{para } V = [d(\Psi_\phi^{-1})]\mu_\phi,$$

temos

$$g_\phi([d(\Psi_\phi^{-1})]V, [d(\Psi_\phi^{-1})]V) = g_{(\sigma,t)}(d\Psi_\phi[d(\Psi_\phi^{-1})]\mu_\phi, d\Psi_\phi[d(\Psi_\phi^{-1})]\mu_\phi) = g_{(\sigma,t)}(\mu_\phi, \mu_\phi) = 1.$$

Por Ψ_ϕ ser uma isometria podemos procurar as soluções de (2.3) encontrando as soluções de

$$\begin{cases} \Delta_{g_\phi} u = -1 \quad \text{em } \Omega_1 \\ u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon_\phi} = const. \quad \text{sobre } \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Observe que anteriormente procurávamos uma função $\phi \in U$ para o qual o problema (2.3) tinha uma única solução, e procurar soluções para o mesmo é mais complicado uma vez que estamos perturbando o domínio para cada função $\phi \in U$. Em contra partida, encontrar soluções para (2.6) teoricamente pode ser mais viável pois agora estamos deixando o domínio fixo e perturbando a métrica, isto é, para cada $\phi \in U$ associamos a métrica g_ϕ.

Definição 2.1.1. *Seja $\varphi : \mathbb{S}^N \to \mathbb{R}$ uma função não constante. Dizemos que φ é axialmente simétrica (com respeito ao eixo $\mathbb{R}e_1$) se $\varphi \circ T = \varphi$ para todo $T \in O(N+1)$, onde $O(N+1)$ é o espaço das transformações ortogonais de $\mathbb{R}^{N+1}$, tal que $Te_1 = e_1$, onde e_1 é o primeiro elemento da base canônica de $\mathbb{R}^{N+1}$.*

Exemplo 2.1.1. *Considere $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x_1, \ldots, x_{N+1}) = x_1^2$, observe que F é não constante e*

$$(F \circ T)(x_1, \ldots, x_{N+1}) = F(T(x_1, \ldots, x_{N+1})) = x_1^2,$$

pois $T(x_1, 0, \ldots, 0) = x_1 Te_1 = x_1 e_1$. Então defina $G = F|_{\mathbb{S}^N} : \mathbb{S}^N \to \mathbb{R}$ assim temos que G é axialmente simétrica.

Exemplo 2.1.2. *Seja $p \in \mathbb{R}^{N+1} - \mathbb{S}^N$ e defina $F : \mathbb{S}^N \subset \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ por $F(x) = ||x - p||_E^2$, onde $||\cdot||_E$ é a norma euclideana. Como $O(N+1)$ são isometrias de $\mathbb{R}^{N+1}$, segue que para todo $T \in O(N+1)$ tal que $Te_1 = e_1$ temos que*

$$F(T(x)) = F(x).$$

E então F é axialmente simétrica.

Exemplo 2.1.3. *Agora daremos um exemplo de uma função que não seja axialmente simétrica. Defina $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ por $F(x_1, \ldots, x_{N+1}) = x_{N+1}^2$. Observe que F é não constante. Defina agora $G|_{\mathbb{S}^N} : \mathbb{S}^N \to \mathbb{R}$. Temos que G não é axialmente simétrica em geral, pois se considerarmos $N = 2$ e definirmos a aplicação ortogonal por $Te_1 = e_1$, $Te_2 = e_3$ e $Te_3 = -e_2$. Agora observe que $G(e_2) = 0$ por outro lado $G(Te_2) = G(0, 0, 1) = 1$, então temos que G não é axiamente simétrica.*

Observação 2.1.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com bordo. Seja $T : M \to M$ uma isometria e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(T(p)) = f(p)$ para todo $p \in M$, isto é, f é invariante por T. Então $\frac{\partial f}{\partial_N}(T(p)) = \frac{\partial f}{\partial_N}(p)$, isto é, a derivada normal também é invariante por T, onde N é o campo normal unitário apontando para fora do ∂M. Com efeito, basta observar que*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial_N}(T(p)) &= g(\nabla f(T(p)), N(T(p))) = g(dT_p(\nabla f(p)), dT_p(N(p))) \\
&= g(\nabla f(p), N(p)) = \frac{\partial f}{\partial_N}(p),
\end{aligned}$$

e o resultado segue.

Observação 2.1.3. *Aqui neste trabalho apareceram dois tipos de derivada. Primeiramente a derivada entre espaços de Banach, isto é, dados dois espaços de Banach X, Y e uma aplicação $f : U \subset X \to Y$ uma aplicação é Fréchet-diferenciável em um aberto U denotaremos a derivada de Fréchet no ponto $x_0 \in U$ por $Df(x_0)$ ou $[Df_x|_{x=x_0}](\cdot)$. A outra é a diferenciabilidade entre variedades vide Definição (1.1.4), para esta denotaremos a diferencial por $dF_p(v)$, onde*

$$F : M \to N,$$

é uma aplicação diferenciável em $p \in M$ entre as variedades M e N, e $v \in T_pM$.

Vamos aplicar as teorias de EDP para conseguimos soluções primeiramente para o seguinte problema de bordo.

$$\begin{cases} \Delta_{g_\phi} u = -1 & \text{em } \Omega_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Lema 2.1.1. *Para todo $\phi \in U$, existe uma única solução $u_\phi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ para (2.7) e a aplicação $\phi \in U \to u_\phi$ é Fréchet-diferenciável. A solução goza das seguintes propriedades:*

1. *Para todo $\phi \in U$, as funções $u_\phi : \overline{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$ e $\partial_{\upsilon_\phi} u_\phi : \partial\Omega_1 \to \mathbb{R}$ são pares com respeito a variável $t \in (-1,1)$;*
2. *Se $\phi = \phi(\sigma, t)$ é axialmente simétrica com respeito a variável $\sigma \in \mathbb{S}^N$, então as funções $u_\phi : \overline{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$ e $\partial_{\upsilon_\phi} u_\phi : \partial\Omega_1 \to \mathbb{R}$ são também axialmente simétricas.*

Demonstração. Seja $X := \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_1}) : u = 0 \text{ em } \partial\Omega_1\}$ é fácil ver que é um subespaço fechado de $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$, consequentemente um espaço de Banach por A.0.1, e $Y := C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ que é um espaço de Banach pela Proposição (1.2.1). Considere

$$\mathscr{L}(X,Y) = \{T : X \to Y : T \text{ é linear e contínuo}\},$$

que é diferente do vazio pois a inclusão pertence a esse conjunto pela Proposição (1.2.4). Como os coeficientes da métrica são funções Fréchet-diferenciáveis de ϕ e $d\phi$, segue que $m : U \to \mathscr{L}(X,Y)$ definido por

$$m(\phi) = -\Delta_{g_\phi},$$

é Fréchet-diferenciável. Pela definição de g_ϕ temos que Δ_{g_ϕ} é um operador diferencial elíptico, coercivo de segunda ordem na forma divergente com coeficientes $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$. Logo, pelo principio do máximo ([4, Teorema 9.27, p.307]) e regularidade elíptico ([4, Teorema 9.25, p.298]) temos que $m(\phi) \in \mathscr{I}(X,Y) := \{T : X \to Y : T \text{ é um isomorfismo topológico}\}$, para todo $\phi \in U$ e consequentemente o problema (2.7) admite uma única solução $u_\phi \in X$ para todo $\phi \in U$. Como $\mathscr{I}(X,Y) \subset \mathscr{L}(X,Y)$ é um conjunto aberto pelo Corolário (B.0.2), a aplicação $\mathrm{Inv} : \mathscr{I}(X,Y) \to \mathscr{I}(Y,X)$ definida por $\mathrm{Inv}(A) = A^{-1}$ é Fréchet-diferenciável pelo Exemplo (B.0.2). E assim,

$$u_\phi = \text{Inv}(m(\phi))1,$$

é Fréchet-diferenciável, por ser uma composição de aplicações diferenciáveis.

Para mostrar (1) considere $\tilde{u}_\phi(\sigma, t) = u_\phi(\sigma, -t)$ e assim,

$$m(\phi)\tilde{u}_\phi(\sigma, t) = m(\phi)u_\phi(\sigma, -t) = (m(\phi)\,\text{Inv}(m(\phi)1)(\sigma, -t) = 1,$$

também temos que

$$\tilde{u}_\phi(\sigma, 1) = u_\phi(\sigma, -1) = u_\phi(\sigma, 1) = \tilde{u}(\sigma, -1) = 0,$$

para todo $\sigma \in \mathbb{S}^N$. Então, $\tilde{u}$ também é solução para (2.7), pela unicidade de solução $u_\phi = \tilde{u}_\phi$ o que é exatamente u_ϕ ser uma função par. Para mostrar que $\partial_{\upsilon_\phi} u_\phi$ é par, basta observar que

$$\partial_{\upsilon_\phi} u_\phi = g_\phi(\upsilon_\phi, \nabla u_\phi) = \upsilon_\phi(u_\phi),$$

e como u_ϕ é par segue que $\partial_{\upsilon_\phi} u_\phi$ é par também pois a reflexão é uma isometria de $\mathbb{R}$ e pela Observação (2.1.2) segue.

Para mostrar (2) basta considerar $\tilde{u}(\sigma, t) = u_\phi(T(\sigma), t)$, onde $T \in O(N+1)$ e $Te_1 = e_1$ tal que e_1 é a primeira componente da base ortonormal de $\mathbb{R}^{N+1}$ e seguir a mesma estratégia da demonstração de (1). $\square$

Pelo Lema 2.1.1 temos que a condição de bordo de Neumann $\dfrac{\partial u}{\partial \upsilon_\phi} = \partial_{\upsilon_\phi} u = const.$ em (2.6) é equivalente a

$$\left[\frac{\partial u_\phi}{\partial \upsilon_\phi}\right](\sigma, 1) = \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial \upsilon_\phi}\right](\sigma, -1) = const. \quad \text{para } \sigma \in \mathbb{S}^N.$$

Observe que a aplicação $\phi \in U \to \upsilon_\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega_1, \mathbb{R}^{N+2})$ é diferenciável por (2.2), por (2.5) a aplicação $H : U \to C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ definida por

$$H(\phi)(\sigma) = \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial \upsilon_\phi}\right](\sigma, 1), \tag{2.8}$$

é diferenciável também. Logo, a condição de bordo $\dfrac{\partial u}{\partial \upsilon_\phi} = const.$ é equivalente a

$$H(\phi) = const. \text{ em } \mathbb{S}^N \tag{2.9}$$

Agora exibiremos uma solução para o problema quando $\phi = \lambda > 0$, e posteriormente vamos tentar aplicar a teoria de pertubação de soluções para gerar novas soluções para (2.8) e assim encontrarmos soluções para (0.5).

Lema 2.1.2. *Seja* sgn *denota a função sinal, isto é,* $\text{sgn}(t) = t/|t|$ *. Se* $\phi = \lambda > 0$ *então*

1. $\Omega_\lambda = \mathbb{S}^N \times (-\lambda, \lambda)$;

2. $\mu_\lambda = (0, \mathrm{sgn}(t)) \in T_\sigma \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ *para* $(\sigma, t) \in \partial\Omega_\lambda$;

3. $\Psi_\lambda(\sigma, t) = (\sigma, \lambda t)$ *para* $(\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$;

4. $g_\lambda(\sigma, t) = g_{\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}}(\sigma) + \lambda^2 dt^2$ *para* $(\sigma, t) \in \overline{\Omega}_\lambda = \mathbb{S}^N \times [-1, 1]$;

5. $\upsilon_\lambda(\sigma, t) = \left(0, \dfrac{\mathrm{sgn}(t)}{\lambda}\right) \in T_\sigma \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ *para* $(\sigma, t) \in \partial\Omega_1$;

6. $\Delta_{g_\lambda} = \Delta_{\mathbb{S}^N} + \lambda^{-2} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$;

7. $u_\lambda(\sigma, t) = \tilde{u}(\lambda t) - \tilde{u}(\lambda)$ *para* $(\sigma, t) \in \overline{\Omega}_1$,

onde $\tilde{u}$ *denota a solução par para*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -1,$$

que é dado por $\tilde{u}(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + at + b$ *com* $a = 0$*, que é* $\tilde{u}(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + b$*, que é único a menos da constante aditiva* b*,*

$$H(\lambda) = \tilde{u}'(\lambda) = -\lambda.$$

Demonstração. Seguiremos demonstrando todos os itens:

1. Como $\phi = \lambda$ temos que

$$\begin{aligned} \Omega_\phi &= \Omega_\lambda = \{(\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R} : |t| < \lambda\} \\ &= \mathbb{S}^N \times \{t \in \mathbb{R} : |t| < \lambda\} = \mathbb{S}^N \times (-\lambda, \lambda); \end{aligned}$$

2. Como vimos em (2.3) temos que $\mu_\phi = \dfrac{(-\nabla\phi(\sigma), t/|t|)}{\sqrt{1 + ||\nabla\phi(\sigma)||^2}}$ e sendo $\phi = \lambda$ segue que $\nabla\phi(\sigma) = 0$ e logo $\mu_\lambda = (0, t/|t|) = (0, \mathrm{sgn}(t)) \in T_\sigma \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ para

$$(\sigma, t) \in \partial\Omega_\lambda = \{(\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R} : |t| = \lambda\};$$

3. Pela definição da aplicação $\Psi_\phi(\sigma, t) = (\sigma, \phi(\sigma)t)$, então para $\phi = \lambda$ temos que

$$\Psi_\lambda : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^N \times \mathbb{R},$$

é dada por $\Psi(\sigma, t) = (\sigma, \lambda t)$;

4. Seja $v \in T_\sigma \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ logo existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ tal que $\alpha(0) = (\sigma, t)$ e

$$\alpha'(0) = (\sigma'(0), t'(0)) = v.$$

Donde, $d\Psi_\lambda(\sigma, t)(v) = \dfrac{d}{ds}(\Psi_\lambda(\sigma(s), t(s)))|_{s=0} = (\sigma'(0), \lambda t'(0))$. Segue que

$$g_\lambda(\sigma, t) = g_{\mathbb{S}^N} + \lambda^2 dt^2,$$

para $(\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times [-1, 1]$.

5. Como $\upsilon_\phi(\sigma,t) = [d\Psi_\phi^{-1}] \circ \mu_\phi(\sigma,t)$ e $\Psi_\phi^{-1}(\sigma,t) = \left(\sigma, \dfrac{t}{\phi(\sigma)}\right)$ dado na demonstração da Proposição 2.1.2 temos que para $\phi = \lambda$
$$\upsilon_\lambda(\sigma,t) = [d\Psi_\lambda^{-1}] \circ \mu_\lambda(\sigma,t) = \left(0, \frac{\operatorname{sgn}(t)}{\lambda}\right) \text{ para } (\sigma,t) \in \partial\Omega_1;$$

6. Para provar a fórmula do operador Δ_{g_λ}, primeiramente observe que
$$[g_\lambda(\sigma,t)] = \begin{bmatrix} [g_{\mathbb{S}^N}(\sigma)] & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix},$$
como
$$\det[g_\lambda(\sigma,t)] = \lambda^2 \det[g_{\mathbb{S}^N}(\sigma)]$$
temos que
$$g_\lambda^{-1}(\sigma,t) = \begin{bmatrix} [g_{\mathbb{S}^N}^{-1}(\sigma)] & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$
Seja (U, x_i) um sistema de coordenadas para $(\sigma,t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$, fixe $\{\partial_i\}_{i=1}^N$ os campos coordenados de $\mathbb{S}^N$ em σ e ∂_t o campo coordenado de $\mathbb{R}$ em t, então temos
$$\begin{aligned}
\Delta_{g_\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_\lambda)}}\partial_i\left(\sqrt{\det(g_\lambda)}g_\lambda^{ij}\partial_j\right) \\
&= \frac{1}{\lambda\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}}\partial_i\left(\lambda\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}g_\lambda^{ij}\partial_j\right) \\
&= \frac{1}{\lambda\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}}\left[\partial_i\left(\lambda\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}g_{\mathbb{S}^N}^{ij}\partial_j\right) + \partial_t\left(\frac{\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}}{\lambda}\partial_t\right)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}}\partial_i\left(\lambda\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}g_{\mathbb{S}^N}^{ij}\partial_j\right) + \frac{1}{\lambda\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}}\partial_t\left(\frac{\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}}{\lambda}\partial_t\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}}\partial_i\left(\sqrt{\det(g_{\mathbb{S}^N})}g_{\mathbb{S}^N}^{ij}\partial_j\right) + \frac{1}{\lambda^2}\partial_t^2 = \frac{1}{\lambda^2}\partial t^2 + \Delta_{\mathbb{S}^N}.
\end{aligned}$$

7. Agora mostraremos que $u_\lambda(\sigma,t)$ satisfaz
$$\begin{cases} \Delta_{g_\lambda} u = -1 & \text{em } \Omega_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1. \end{cases}$$
Pelos resultados acima temos que
$$\begin{aligned}
\Delta_{g_\lambda} u_\lambda &= \Delta_{g_\lambda}(\tilde{u}(\lambda t) - \tilde{u}(\lambda)) = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\tilde{u}(\lambda t) - \tilde{u}(\lambda)\right) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\left(-\frac{1}{2}(\lambda t)^2 + b\right) - \left(-\frac{1}{2}\lambda^2 + b\right)\right) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\right) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}(-\lambda^2) = -1 \text{ em } \mathbb{S}^N \times (-1,1).
\end{aligned}$$

Também temos

$$u_\lambda(\sigma,1)=\tilde{u}(\lambda)-\tilde{u}(\lambda)=0=u_\lambda(\sigma,-1),$$

isto é, $u_\lambda(\sigma,t)=0$ em $\mathbb{S}^N\times\{1,-1\}=\partial\Omega_1$. Assim, u_λ é solução para o problema acima.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \frac{\partial u_\lambda(\sigma,t)}{\partial_{\upsilon_\lambda}}=\frac{\operatorname{sgn}(t)}{\lambda}\partial t(\tilde{u}(\lambda t)-\tilde{u}(\lambda))|_{t=1} \\ &= \frac{1}{\lambda}\partial t(-\frac{1}{2}\lambda^2t^2+b-b+\frac{1}{2}\lambda^2)|_{t=1} \\ &= \frac{1}{\lambda}\lambda^2=-\lambda=const. \end{aligned}$$

Como queríamos. □

Lema 2.1.3. *Seja $U=\{\phi\in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N):\phi(\sigma)>0$ para todo $\sigma\in\mathbb{S}^N\}$. Então, temos as seguintes propriedades:*

1. *A aplicação*

$$\begin{aligned} U &\to C^{2,,\alpha}(\overline{\Omega}_1,\mathbb{S}^N\times\mathbb{R})\subset C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1,\mathbb{R}^{N+2}) \\ \phi &\to \Psi_\phi, \end{aligned}$$

é Fréchet-diferenciável e, se $\omega\in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$, então

$$([D_\phi\Psi_\phi]\omega)(\sigma,t)=(0,\omega(\sigma)t),\ para\ (\sigma,t)\in\overline{\Omega}_1.$$

2. *Seja*

$$\begin{aligned} m:U &\to C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1) \\ \phi &\to m_\phi, \end{aligned}$$

uma aplicação Fréchet-diferenciável. Então a aplicação

$$M:U\to C^{1,\alpha}(\partial\Omega_1),$$

dado por $M(\phi)=\partial_{\upsilon_\phi}m_\phi$ é Fréchet-diferenciável também, e a derivada de Fréchet é

$$[D_\phi M(\phi)]\omega=\partial_{\tilde{\upsilon}_\phi(\omega)}m_\phi+\partial_{\upsilon_\phi}([D_\phi m_\phi]\omega)\ para\ \omega\in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N).$$

Onde $\tilde{\upsilon}_\phi(\omega)=[D_\phi\upsilon_\phi]\omega\in C^{1,\alpha}(\partial\Omega_1,\mathbb{R}^{N+2})$ para $\phi\in U$, $\omega\in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$.

Demonstração. Observe que $\Psi_\phi(x_1,\dots,x_{N+1},t)=(x_1,\dots,x_{N+1},t\phi(x_1,\dots,x_{N+1}))$. Logo, seja $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_{N+2})$ um multi-índice tal que $|\beta|=2$. Logo

$$\frac{\partial^{|\beta|}\Psi_\phi}{\partial x_1^{\beta}\cdots\partial x_{N+2}^{\beta_{N+2}}}=\left(0,\frac{\partial^{|\beta|}(t\phi(x_1,\dots,x_{N+1}))}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_{N+2}^{\beta_{N+2}}}\right)\in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_1,\mathbb{R}^{N+2}).$$

Então a aplicação, $\phi \in U \to \Psi_\phi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1, \mathbb{S}^N \times \mathbb{R})$ está bem definido. Pela definição de Ψ_ϕ temos que a mesma é diferenciável. Assim, afirmo que $[D_\phi \Psi_\phi]\omega = (0, t\omega)$ para $\omega \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1, \mathbb{S}^N \times \mathbb{R})$. Pois, seja $T : C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N) \to C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1, \mathbb{S}^N \times \mathbb{R})$ definida por $T(\omega)(\sigma) = (0, \omega(\sigma)t)$ é linear, pois, sejam $\omega_1, \omega_2 \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ e $\theta \in \mathbb{R}$, então temos que

$$\begin{aligned} T(\theta\omega_1 + \omega_2)(\sigma) &= (0, (\theta\omega_1 + \omega_2)(\sigma)t) = (0, \theta\omega_1(\sigma)t + \omega_2(\sigma)t) \\ &= \theta(0, \omega_1(\sigma)) + (0, \omega_2(\sigma)) = \theta T(\omega_1)(\sigma) + T(\omega_2)(\sigma). \end{aligned}$$

Também temos que T é contínua pela norma dos espaços, com efeito,

$$\begin{aligned} ||T(\omega)||_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1, \mathbb{R}^{N+2})} &= ||(0, \omega t)||_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1, \mathbb{R}^{N+2})} = |t|||(0, \omega)||_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1, \mathbb{R}^{N+2})} \\ &\leq ||(0, \omega)||_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1, \mathbb{R}^{N+2})} = ||\omega||, \end{aligned}$$

o que mostra que a aplicação é continua.

Agora mostraremos que T é a derivada de Frechet da aplicação “acima”. Logo temos que

$$\begin{aligned} r(\omega) &= \Psi_{\phi+\omega} - \Psi_\phi - T(\omega) \\ &= (\sigma, t(\phi + \omega)(\sigma)) - (\sigma, t\phi(\sigma)) - (0, \omega(\sigma)t), \end{aligned}$$

e isso implica que $\lim\limits_{\omega \to 0} \dfrac{r(\omega)}{||\omega||_{C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)}} = 0$. Então pela Proposição (B.0.1) $T = [D_\phi \Psi_\phi]$, o que prova (1).

Para provar (2), primeiramente denote

$$\tilde{\upsilon}_\phi[D_\phi \upsilon_\phi]\omega \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega_1, \mathbb{R}^{N+2}) \text{ para } \phi \in U,\ \omega \in C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N).$$

Para $\phi \in U$ e $(\sigma, t) \in \partial\Omega_1$, temos por definição

$$M(\phi)(\sigma, t) = \partial_{\upsilon_\phi} m_\phi(\sigma, t) = D_\phi m_\phi(\sigma, t)\upsilon_\phi(\sigma, t).$$

Como M é uma forma bilinear diferenciável composta com duas funções diferenciáveis, então

$$\begin{aligned} D_\phi M(\phi)(\omega) &= D[Dm_\phi \upsilon_\phi](\omega) \\ &= D([D_\phi m_\phi](\omega))\upsilon_\phi + Dm_\phi[D\upsilon_\phi](\omega) \\ &= \partial_{\upsilon_\phi}([D_\phi m_\phi]\omega) + Dm_\phi \tilde{\upsilon}_\phi(\omega) \\ &= \partial_{\upsilon_\phi}([D_\phi m_\phi]\omega) + \partial_{\tilde{\upsilon}_\phi} m_\phi. \end{aligned}$$

□

Lembrando que no Lema 2.1.2 a função $\tilde{u}(t) = -\dfrac{t^2}{2} + b$ foi fixada. Escolhendo b tal que $\tilde{u}(0) = 1$, segue que $b = 1$. Então, para $\phi \in U$ definimos $u^\phi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ por

$$u^\phi(\sigma, t) = \tilde{u}(\phi(\sigma)t) = -\frac{\phi(\sigma)^2 t^2}{2} + 1.$$

Seja $\overline{u} : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\overline{u}(\sigma, t) = \tilde{u}(t)$. Observe que

$$\Delta_{g(\sigma,t)}\overline{u} = (\Delta_{\mathbb{S}^N} + \frac{\partial^2}{dt^2})\overline{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{dt^2} = -1,$$

em $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$. Como $u^\phi = \overline{u} \circ \Psi_\phi$ e Ψ_ϕ é uma isometria, então temos que $\Delta_{g_\phi} u^\phi = -1$ em Ω_1.

Lema 2.1.4. *A aplicação $h : U \to C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ definida por $h(\phi) = \partial_{\upsilon_\phi} u^\phi(\cdot, 1) \in C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ é Fréchet-diferenciável e sua derivada de Fréchet em funções constantes $\phi = \lambda > 0$ é dada por*

$$[D_\phi|_{\phi=\lambda} h] = -\omega \text{ para } \omega \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N).$$

Demonstração. Seja $\phi \in U$, temos que $\mu_\phi(\sigma, t) = \dfrac{(-\nabla\phi(\sigma), t/|t|)}{\sqrt{1 + ||\nabla\phi(\sigma)||^2}}$, o vetor unitário exterior ao $\partial\Omega_\phi$. Defina $\eta_\phi(\sigma) := \mu_\phi(\Psi_\phi(\sigma, 1)) = \mu(\sigma, \phi(\sigma))$. Como visto anteriormente

$$[d\Psi_\phi]\upsilon_\phi = \mu_\phi \circ \Psi_\phi.$$

Como Ψ_ϕ é uma isometria, então dado $\sigma \in \mathbb{S}^N$, temos

$$\begin{aligned} h(\phi)(\sigma) &= \partial_{\upsilon_\phi} u^\phi(\sigma, 1) = g_\phi(\upsilon_\phi(\sigma, 1), \nabla_\phi u^\phi(\sigma, 1)) \\ &= g_\phi((\mu_\phi \circ \Psi_\phi)(\sigma, 1), \nabla_{g_\phi} u^\phi(\sigma, 1)) \\ &= g_\phi(\eta_\phi(\sigma), \nabla_\phi u^\phi(\sigma, 1)) \\ &= g_{(\sigma,t)}(\eta_\phi(\sigma), \nabla_{g(\sigma,t)}\overline{u}(\phi, \phi(\sigma))). \end{aligned}$$

Observe que, $g_{(\sigma,t)} = g_{\mathbb{S}^N} + dt^2$ e $\tilde{u}(t) = -\dfrac{t^2}{2} + 1$, então

$$\nabla_{(\sigma,t)}\overline{u}(\sigma, t) = (0, \tilde{u}'(t)) = (0, -t) \in T_\sigma\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}, \text{ para } (\sigma, t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}.$$

Assim,

$$h(\phi)(\sigma) = g_{(\sigma,t)}(\eta_\phi, (0, -\phi(\sigma))), \text{ para } \sigma \in \mathbb{S}^N.$$

Dado $\omega \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ logo

$$\begin{aligned} [D_{\phi|_{\phi=\lambda}} h(\phi)]\omega &= g_{(\sigma,t)}([D_{\phi|_{\phi=\lambda}}\eta_\phi]\omega, (0, -\lambda)) + g_{(\sigma,t)}(\eta_\lambda, (0, -\omega)) \\ &= -\lambda g_{(\sigma,t)}([D_{\phi|_{\phi=\lambda}}\eta_\phi]\omega, (0, 1)) + g_{(\sigma,t)}((0, 1), (0, -\omega)) \\ &= -\lambda g_{(\sigma,t)}([D_{\phi|_{\phi=\lambda}}\eta_\phi]\omega, \eta_\lambda) - \omega \text{ em } \mathbb{S}^N, \end{aligned}$$

pois como $\eta_\phi(\sigma) = \mu_\phi(\Psi_\phi(\sigma, t)) = \mu_\phi(\sigma, \phi(\sigma))$ assim tomando $\phi = \lambda$, temos

$$\eta_\lambda(\sigma) = \mu_\lambda(\sigma, \lambda) = (0, \lambda/|\lambda|) = (0, 1) \in T_\sigma\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$$

para todo $\sigma \in \mathbb{S}^N$ como segue do Lema 2.1.2. Para concluir, provaremos que

$$g_{(\sigma,t)}([D_{\phi|_{\phi=\lambda}}\eta_\psi]\omega, \eta_\lambda) = 0,$$

para isso, observe que a aplicação $\phi \in U \to ||\eta_\phi||_{g(\sigma,t)} = 1 \in C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ e assim

$$0 = [D_\phi ||\eta_\phi||^2_{g(\sigma,t)}]\omega = 2g_{(\sigma,t)}([D_\phi \eta_\phi]\omega, \eta_\phi)$$

em $\mathbb{S}^N$ para todo $\phi \in U$, $\omega \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$, como queríamos. Então, segue $[D_{\phi|_{\phi=\lambda}} h(\phi)]\omega = -\omega$ para $\omega \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$.

$\square$

Proposição 2.1.3. *Seja $H : U \to C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ a aplicação definida por $H(\phi) = \left[\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \upsilon_\phi}\right]$. O operador obtido por linearização de H (derivada de Fréchet) em funções constantes,*

$$L_\lambda = DH(\lambda) \in \mathscr{L}(C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N), C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N)),$$

com $\lambda > 0$, tem a seguinte expressão

$$[L_\lambda \omega](\sigma) = \partial_t \psi_{\omega,\lambda}(\sigma, t) - \omega(\sigma), \ \text{para}\ \omega \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N), \sigma \in \mathbb{S}^N, \tag{2.10}$$

onde $\psi_{\omega,\lambda} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ é a única solução para

$$\begin{cases} \Delta_{g_\lambda} \psi_{\omega,\lambda} = 0 \ \text{em}\ \Omega_1 \\ \psi_{\omega,\lambda}(\sigma, t) = \omega(\sigma) \ \text{para}\ (\sigma, t) \in \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Demonstração. Lembremos que $u^\phi(\sigma, t) = \tilde{u}(\phi(\sigma)t)$ satisfaz $\Delta_\phi u = -1$ e que u_ϕ é solução de (2.7) para todo $\phi \in U$, definimos $a_\phi = u_\phi - u^\phi$ e como $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ é espaço vetorial, segue que $a_\phi \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$. E como ,

$$\Delta_\phi a_\phi = \Delta_\phi(u_\phi - u^\phi) = \Delta_\phi u_\phi - \Delta_\phi u^\phi = 1 - 1 = 0$$

para todo $\phi \in U$ e também temos que

$$a_\phi(\sigma, t) = (u_\phi - u^\phi)(\sigma, t) = u_\phi(\sigma, t) - u^\phi(\sigma, t)$$

e se $(\sigma, t) \in \partial\Omega_1$ então $a_\phi(\sigma, t) = -u^\phi(\sigma, t)$. Logo, a_ϕ é solução para

$$\begin{cases} \Delta_{g_\lambda} a_\phi = 0 \quad \text{em } \Omega_1 \\ a_\phi = -u^\phi \quad\ \text{sobre } \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Observe também que se $\phi = \lambda$, então $u^\lambda(\sigma, t) = \tilde{u}(\lambda t)$ e $u_\lambda(\sigma, t) = \tilde{u}(\sigma, -t) - \tilde{u}(\lambda)$ e assim

$$a_\lambda = -\tilde{u}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} - 1 = const.$$

Seja a aplicação Fréchet-diferenciável $T : U \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ definida por $T(\phi) = \Delta_{g_\phi} a_\phi$. Como a_ϕ é solução de (2.12) segue que $T(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in U$ e logo $DT_\phi \omega = 0$ para todo $\omega \in C^{2,\alpha}(S)^N$. Então, como

$$0 = DT(\phi)\omega = D(\Delta_{g_\phi} a_\phi)\omega = [D\Delta_{g_\phi}]\omega a_\phi + \Delta_{g_\phi}[Da_\phi]\omega.$$

Seja $\{\partial_i\}_{i=1}^{N+1}$ o referencial coordenado em $(\sigma,t)\in\mathbb{S}^N\times\mathbb{R}$, logo

$$\Delta_{g_\phi}a_\phi = g_\phi^{ij}\partial_{ij}a_\phi + \frac{1}{\sqrt{\det g_\phi}}\partial_i(\sqrt{\det g_\phi}g_\phi^{ij})\partial_j a_\phi,$$

e assim a igualdade acima fica em coordenadas

$$0 = DT(\phi)\omega = \Delta_{g_\phi}([Da_\phi]\omega) + ([D_\phi g_\phi^{ij}]\omega)\partial_{ij}a_\phi + ([D_\phi\frac{1}{\sqrt{\det g_\phi}}\partial_i(\sqrt{\det g_\phi})g_\phi^{ij}]\omega)\partial_j a_\phi.$$

Então se $\phi=\lambda$ temos que

$$\begin{aligned}0 = DT(\lambda)\omega = \Delta_{g_\lambda}([D_{\phi|_{\phi=\lambda}}a_\phi]\omega) \quad &+ \quad \underbrace{([D_{\phi|_{\phi=\lambda}}g_\phi^{ij}]\omega)\partial_{ij}(a_\lambda)}_{=0,\text{ pois } a_\lambda \text{ é constante}}\\ &+ \quad \underbrace{([D_{\phi|_{\phi=\lambda}}\frac{1}{\sqrt{\det g_\phi}}\partial_i(\sqrt{\det g_\phi})g_\phi^{ij}]\omega)\partial_j(a_\lambda)}_{=0,\text{ pois } a_\lambda \text{ é constante}},\end{aligned}$$

definindo $\tau_{\lambda,\omega} := [D_{\phi|_{\phi=\lambda}}a_\phi]$, logo $\Delta_{g_\lambda}\tau_{\lambda,\omega}=0$.

Relembrando, $a_\phi(\sigma,1) = -u^\phi(\sigma,1) = -\tilde{u}(\phi(\sigma))$, então derivando em $\phi=\lambda$ e aplicando $(\sigma,1)$ temos

$$\tau_{\lambda,\omega}(\sigma,1) = ([D_{\phi|_{\phi=\lambda}}a_\phi]\omega)(\sigma,1) = -\tilde{u}'(\lambda)\omega(\sigma) = \lambda\omega(\sigma) \text{ para } \sigma\in\mathbb{S}^N.$$

Pela parte (2) do Lema (2.1.3) e pelo fato que $a_\lambda = \frac{\lambda^2}{2}-1 = const.$, temos

$$[D_{\phi|_{\phi=\lambda}}\partial_{\upsilon_\phi}a_\phi(\cdot,1)]\omega = \partial_{\tilde{\upsilon}_\phi(\omega)}a_\lambda(\cdot,1) + (\partial_{\upsilon_\lambda}[D_{\phi|_{\phi=\lambda}}a_\phi]\omega)(\cdot,1) = \frac{1}{\lambda}\partial_t\tau_{\lambda,\omega}(\cdot,1),$$

em $\mathbb{S}^N$, uma vez que $\partial_{\upsilon_\lambda} = \frac{\text{sgn}(t)}{\lambda}\partial_t$.

Agora calcularemos a derivada de Fréchet de H usando o Lema (2.1.4) e a fórmula acima. Então,

$$\begin{aligned}[D_{\phi|_\lambda}H(\phi)]\omega &= [D_{\phi|_{\phi=\lambda}}\partial_{\upsilon_\phi}u_\phi(\cdot,1)]\omega\\ &= [D_{\phi|_{\phi=\lambda}}\partial_{\upsilon_\phi}(a_\phi+u^\phi)(\cdot,1)]\omega\\ &= \frac{1}{\lambda}\partial_t\tau_{\lambda,\omega}(\cdot,1)-\omega\end{aligned}$$

em $\mathbb{S}^N$, onde relembramos que $a_\phi = u_\phi - u^\phi$.

Lembremos que $\psi_{\omega,\lambda}$ foi definido como a solução (2.11) segue das propriedades de $\tau_{\omega,\lambda}$ que $\psi_{\omega,\lambda} = \frac{1}{\lambda}\tau_{\omega,\lambda}\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$, consequentemente

$$L_\lambda(\omega) = [D_{\phi|_{\phi=\lambda}}H(\phi)]\omega(\cdot) = \partial_t\psi_{\omega,\lambda}(\cdot,1)-\omega(\cdot).$$

O que conclui a prova. $\square$

2.2 PROPRIEDADES ESPECTRAIS DO OPERADOR DE LINEARIZAÇÃO

Nesta seção estudaremos as propriedades espectrais do operador definido em (2.10), para fazer isso mostraremos quem são seus autovalores e seus autovetores. Posteriormente estudaremos o comportamento dos seus autovalores.

Primitivamente temos que em [5, Proposição 24, p.55] é definido o espaço dos harmônicos esféricos de grau $j \geq 0$, que são polinômios restritos a esfera, $\mathbb{S}^N$, que tem a seguinte propriedade, seja Y_j um harmônico esférico de grau j, então

$$\Delta_{g_{\mathbb{S}^N}} Y_j = \gamma_j Y_j, \tag{2.13}$$

onde $\gamma_j = j(j-1+N)$. A partir de agora denotaremos Y_j o único harmônico esférico de grau $j \geq 0$ tal que satisfaz (2.13), é axialmente simétrico e é $L_2(\mathbb{S}^N) = L_2$ normalizado, isto é

$$\int_{\mathbb{S}^N} Y_j^2 \, d\sigma = 1,$$

onde $L_2(\mathbb{S}^N) = L_2$ é definido em (A.0.4),essas propriedades podem ser consultadas em [13, Capítulo 2].

Proposição 2.2.1. *Seja $\lambda > 0$. O esférico harmônico de grau j, Y_j, é uma autofunção para L_λ, isto é*

$$L_\lambda Y_j = \sigma_j(\lambda) Y_j \text{ em } \mathbb{S}^N,$$

com

$$\sigma_j(\lambda) = \begin{cases} -1 & se\, j = 0 \\ \lambda\sqrt{\gamma_j}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}) - 1 & se\, j > 0. \end{cases}$$

Demonstração. Como os coeficientes de ∇_{g_λ} são pares com respeito a variável t segue que para todo $\omega \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ a função $\psi_{\omega,\lambda}$ é par com respeito a variável t também.

Para mostrar que Y_j é autofunção de L_λ, temos que determinar a função $\psi_{Y_j,\lambda}$ que é solução para

$$\begin{cases} \Delta_{g_\lambda}\psi_{Y_j,\lambda} = 0 \text{ em } \Omega_1 \\ \psi_{Y_j,\lambda}(\sigma,t) = Y(\sigma) \text{ para } (\sigma,t) \in \partial\Omega_1 \end{cases} \tag{2.14}$$

Tendo em vista a estrutura de $\Omega_1 = \mathbb{S}^N \times (-1,1)$ por (1) Lema (2.1.2), de Δ_{g_λ}, a definição de Y_j, e pela observação anterior podemos usar a técnica de separação de variáveis para encontrar soluções da forma

$$\psi_{Y,\lambda}(\sigma,t) = c_{j,\lambda}(|t|)Y_j(\sigma), \text{ onde } c_{j,\lambda} : [0,1) \to \mathbb{R}$$

satisfaz $c'_{j,\lambda}(0) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \Delta_{g_\lambda}\psi_{Y_j,\lambda} &= \Delta_{g_\lambda}(c_{j,\lambda}(t)Y_j(\sigma)) \\ &= (\frac{1}{\lambda^2}\partial t^2 + \Delta_{g_{\mathbb{S}^N}})(c_{j,\lambda}(t)Y_j(\sigma)) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\partial t^2(c_{j,\lambda}Y_j(\sigma)) + \Delta_{g_{\mathbb{S}^N}}(c_{j,\lambda}(t)Y_j(\sigma)) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}c''_{j,\lambda}(t)Y_j(\sigma) + c_{j,\lambda}(t)\Delta_{g_{\mathbb{S}^N}}Y_j(\sigma) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}c''_j(t)Y_j(\sigma) - c_j(t)\gamma_jY_j(\sigma), \end{aligned}$$

onde γ_j é definido em (2.13), então temos que achar $c_{j,\lambda}$ que é solução para seguinte EDO

$$\begin{cases} c''_{j,\lambda}(t) - \lambda^2\gamma_j c_{j,\lambda}(t) = 0, \ t \in [0,1) \\ c'_{j,\lambda}(0) = 0, \\ c_{j,\lambda}(1) = 1. \end{cases}$$

Se $j = 0$ segue que $\gamma_j = j(N-1+j) = 0$ e $c_{j,\lambda}(t) = 1$. Se $j > 0$ segue que $\gamma_j > 0$ e assim usando a técnica de polinômio característico temos $\theta^2 - \lambda^2\gamma_j = 0$ então $\theta = \pm\lambda\sqrt{\gamma_j}$. Assim, a solução geral da equação diferencial é dada por

$$y(t) = D_1e^{\lambda\sqrt{\gamma_j}t} + D_2e^{-\lambda\sqrt{\gamma_j}t}.$$

Sendo assim, para achar a solução única, basta aplicar as condições iniciais, então

$$y'(t) = \lambda\sqrt{\gamma_j}D_1e^{\lambda\sqrt{\gamma_j}t} - D_2\lambda\sqrt{\gamma_j}e^{-\lambda\sqrt{\gamma_j}t}.$$

Como $c'_{j,\lambda}(0)$, segue que $0 = y'(0) = (D_1 - D_2)\lambda\sqrt{\gamma_j}$, então $D_1 = D_2$. Logo,

$$y(t) = (e^{\lambda\sqrt{\gamma_j}t} + e^{-\lambda\sqrt{\gamma_j}t})D_1$$

e como $1 = C_{j,\lambda}(1) = y(1) = (e^{\lambda\sqrt{\gamma_j}} + e^{-\lambda\sqrt{\gamma}})D_1$, segue que

$$D_1 = \frac{1}{e^{\lambda\sqrt{\gamma_j}} + e^{-\lambda\sqrt{\gamma_j}}} = \frac{1}{2\cosh(\lambda\sqrt{\gamma_j})}.$$

Consequentemente

$$c_{j,\lambda}(t) = \frac{\cosh(\lambda\sqrt{\gamma_j}t)}{\cosh(\lambda\sqrt{\gamma_j})}.$$

Como $L_\lambda Y = \partial_t\psi_{\lambda,Y}(\cdot,1) - Y(\cdot)$ segue que

$$\sigma_j(\lambda) = c'_{j,\lambda}(1) = \begin{cases} -1 & \text{se } j = 0 \\ \lambda\sqrt{\gamma_j}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}) - 1 & \text{se } j > 0, \end{cases}$$

como queríamos. □

Lema 2.2.1. *Para todo $\lambda > 0$ segue que*

1. $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{\sigma_j(\lambda)}{\lambda} = \lambda$;
2. $\sigma_j(\lambda) > \sigma_i(\lambda)$ *sempre que* $i < j$, *onde* $i, j \in \mathbb{N}$;
3. $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma_j(\lambda) = -1$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$;
4. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \sigma_j(\lambda) = +\infty$ *para todo* $j \geq 1$;
5. $\sigma_j'(\lambda) > 0$ *para todo* $j \geq 1$.

Demonstração. Primeiramente observe que $\gamma_j = j(N-1+j)$ e também

$$\sigma_j(\lambda) = \lambda\sqrt{\gamma_j}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}) - 1.$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_j(\lambda)}{j} &= \frac{\lambda}{j}\sqrt{\gamma_j}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}) - \frac{1}{j}\\ &= \lambda\sqrt{\frac{j(N-1+j)}{j^2}}\tanh(\lambda\gamma_j) - \frac{1}{j}\\ &= \lambda\sqrt{\frac{N-1}{j}+1}\tanh(\lambda\gamma_j) - \frac{1}{j}.\end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\sigma_j(\lambda)}{j} = \lambda\lim_{j\to\infty}\sqrt{\underbrace{\frac{N-1}{j}}_{=0 \text{ se } j\to\infty}+1}\cdot\underbrace{\lim_{j\to\infty}\tanh(\lambda\gamma_j)}_{=1,\text{ se } j\to\infty} - \underbrace{\lim_{j\to\infty}\frac{1}{j}}_{=0,\text{ se } j\to\infty} = \lambda.$$

O que prova (1).

Para mostrar (2), começamos observando que

$$\lambda\sqrt{\gamma_i} < \lambda\sqrt{\gamma_j} \text{ se } i < j,$$

pois,

$$\text{se } i < j,$$

segue que

$$N-1+i < N-1+j,$$

multiplicando por i em ambos os lados temos

$$\gamma_i = i(N-1+i) < i(N-1+j) < j(N-1+j) = \gamma_j,$$

tirando a raiz quadrada e lembrando que a raiz é crescente, segue que

$$\sqrt{\gamma_i} < \sqrt{\gamma_j}.$$

Como a função $x \in (0, +\infty) \to \tanh(x)$ é crescente e $\lim_{j\to\infty} \tanh(\lambda\gamma_i) = 1$, segue que

$$\sigma_i(\lambda) = \lambda\sqrt{\gamma_i}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_i}) < \lambda\sqrt{\gamma_i}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}) = \sigma_j(\lambda).$$

Como queríamos.

Agora, temos que

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_j(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0}(\lambda\sqrt{\gamma_j}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}) - 1) = -1,$$

pois, $\lambda\sqrt{\gamma_j} \to 0$ quando $\lambda \to 0$ e $\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j})$ é limitada em $(0, +\infty)$. O que prova (3).

Para provar (4), seguiremos com os cálculos de maneira direta

$$\lim_{\lambda\to +\infty}\sigma_j(\lambda) = \lim_{\lambda\to +\infty}(\lambda\sqrt{\gamma_j}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}) - 1) = +\infty,$$

pois, $\lambda\sqrt{\gamma_j} \to +\infty$ quando $\lambda \to +\infty$ e $\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j})$ é limitada em $(0, +\infty)$. O que prova (4).

Enfim, segue que

$$\begin{aligned}
\sigma_j'(\lambda) &= \sqrt{\gamma_j}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}) + \lambda\sqrt{\gamma_j}(\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}))' \\
&= \sqrt{\gamma_j}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}) + \frac{\lambda\sqrt{\gamma_j}\sqrt{\gamma_j}}{\cosh^2(\lambda\sqrt{\gamma_j})} \\
&= \sqrt{\gamma_j}\tanh(\lambda\sqrt{\gamma_j}) + \frac{\lambda\gamma_j}{\cosh^2(\lambda\sqrt{\gamma_j})} > 0,
\end{aligned}$$

o que concluí a prova de (5). □

Observação 2.2.1. *Segue algumas observações com respeito do lema acima.*

1. *Por (1) do Lema (2.2.1) temos que* $\lim_{j\to\infty}\frac{\sigma_j(\lambda)}{j} = \lambda$ *e é claro que* $\lim_{j\to\infty}\left(\frac{\sigma_j(\lambda)}{j}\right)^2 = \lambda^2$. *Logo, existe* $L > 0$ *tal que*
$$\left(\frac{\sigma_j(\lambda)}{j}\right)^2 \leq L.$$
para todo $j \in \mathbb{N}$.

2. *Seja* $l \in \mathbb{N}_0$ *fixo, como*
$$\lim_{j\to\infty}\frac{\sigma_j(\lambda) - \sigma_l(\lambda)}{j} = \lim_{j\to\infty}\left[\frac{\sigma_j(\lambda)}{j} + \frac{\sigma_l(\lambda)}{j}\right] = \lim_{j\to\infty}\frac{\sigma_j(\lambda)}{j} + \lim_{j\to\infty}\frac{\sigma_l(\lambda)}{j} = \lambda.$$
Segue que existe $K > 0$ *tal que*
$$\left(\frac{\sigma_j(\lambda) - \sigma_l(\lambda)}{j}\right)^2 \leq K,$$
para todo $j \in \mathbb{N}$.

3. *Por (2) do Lema (2.2.1) e por $\sigma_i(\lambda)$ não ser limitado superiormente com respeito a i segue que* $\lim_{i\to\infty}\sigma_i(\lambda) = +\infty$*. E assim,* $\lim_{i\to\infty}\frac{1}{\sigma_i(\lambda)} = \lim_{i\to\infty}\frac{1}{\sigma_i(\lambda)-\sigma_l(\lambda)} = 0$*, onde* $l \in \mathbb{N}_0$ *é fixo.*

4. *Também lembrando que se uma sequência* $(x_n)_n^\infty \subset \mathbb{R}^+$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ *então temos que* $\lim_{j\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$.

5. *Pelo item anterior, junto com o item (2) e item (3) segue que existe* $K > 0$ *tal que*

$$\left|\frac{1+m^2}{\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)}\right|^2 \leq K,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ *e* $l \in \mathbb{N}_0$ *fixo.*

Proposição 2.2.2. *Para todo* $j \geq 1$ *existe um único* $\lambda_j > 0$ *tal que* $\sigma_j(\lambda_j) = 0$*. E* λ_j *satisfaz as seguintes propriedades*

1. $\lambda_j < \lambda_i$ *para* $1 \leq i < j$*;*

2. $\lim_{j\to\infty}\lambda_j = 0$.

Demonstração. Como a função $\lambda \to \sigma_j(\lambda)$ é estritamente crescente, por (5) do Lema anterior, e temos que $\lim_{\lambda\to 0}\sigma_j(\lambda) = -1$ e também $\lim_{\lambda\to\infty}\sigma_j(\lambda) = \infty$, pelo Teorema do valor intermediário ([20, Teorema 4, p.78]), existe um único $\lambda_j \in (0,+\infty)$ tal que $\sigma_j(\lambda_j) = 0$. Para $1 \leq i < j$ temos que $\sigma_i(\lambda) < \sigma_j(\lambda)$ e também $\sigma_j(\lambda_i) > \sigma_i(\lambda_i) = 0$ e como $\sigma_j(\lambda)$ é estritamente crescente com respeito a variável λ, segue que $\lambda_j < \lambda_i$.

Para provar (2), observe que como para $i < j$ temos que $\lambda_j < \lambda_i$ e λ_k é limitado inferiormente para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\lim_{k\to\infty}\lambda_k$ existe. Chamemos $L = \lim_{k\to\infty}\lambda_k$. Assim, como

$$0 = \sigma_k(\lambda_k) = \lambda_k\sqrt{\gamma_k}\tanh(\lambda_k\sqrt{\gamma_k}) - 1,$$

então

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}} = \lambda_k\tanh(\lambda_k\sqrt{\gamma_k}),$$

e como

$$\lim_{k\to\infty}\tanh(\lambda_k\sqrt{\gamma_k}) = 1,$$

pois $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$ é limitada por ser convergente e $\gamma_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Então,

$$\lambda_k = \lambda_k\tanh(\lambda_k\sqrt{\gamma_k})\frac{1}{\tanh(\lambda_k\sqrt{\gamma_k})}.$$

Portanto, quando $k \to \infty$ temos que $\lambda_k \to L = 0$. □

2.3 DEMONSTRAÇÃO DA EXISTÊNCIA DE DOMÍNIOS DE SERRIM EM $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$

Agora nossos esforços serão para demonstrarmos o resultado mais importante deste trabalho, primeiramente passaremos por alguns resultados preliminares.

Observação 2.3.1. *Denotaremos daqui por diante os espaços $W^{k,p}(\mathbb{S}^N) = W^{k,p}$ e $H^k(\mathbb{S}^N) = H^k$ (definidos em Exemplo (A.0.6)), para $k \in \mathbb{N}_0$. Faremos análise nesse espaço usando a norma induzida pelo produto interno definido em (A.5) uma vez que as normas são equivalentes.*

Proposição 2.3.1. *Para $\lambda \in (0, +\infty)$ fixo, a aplicação linear contínua definida em (2.10) se estende a uma aplicação linear contínua*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{L}_\lambda : H^2 & \to & H^1 \\ v & \to & \tilde{L}_\lambda = \sum\limits_{l \in \mathbb{N}_0} \sigma_l(\lambda) P_l v. \end{array}$$

Além disso, para cada $l \in \mathbb{N}_0$. o operador $\tilde{L}_\lambda - \sigma_l(\lambda) id : W_l^2 \to W_l^1$ é um isomorfismo.

Demonstração. Vejamos que $\tilde{L}_\lambda$ está bem definido, isto é, para cada $v \in H^2$ temos que provar que $\tilde{L}_\lambda v \in H^1$ e por (A.4) temos que mostrar que $\sum\limits_{m \in \mathbb{N}_0} (1 + m^2)||P_m(\tilde{L}_\lambda v)||_{L^2}^2 < \infty$ para todo $v \in H^1$. Pela Observação (2.2.1) existe $L > 0$ tal que

$$\left| \frac{\sigma_m(\lambda)}{m} \right|^2 \leq L,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, seja $v \in H^2$ arbitrário, logo

$$
\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)||P_m(\tilde{L}_\lambda v)||^2_{L^2} &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)||P_m(\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sigma_l(\lambda)P_l v)||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)||\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sigma_l(\lambda)(P_m\circ P_l)v||^2_{L^2}\\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)\sum_{l\in\mathbb{N}_0}|\sigma_l(\lambda)|^2||(P_m\circ P_l)v||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)|\sigma_m(\lambda)|^2||P_m v||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)\left|\frac{\sigma_m(\lambda)(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}\right|^2||P_m v||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)^2\left|\frac{\sigma_m(\lambda)}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}\right|^2||P_m v||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)^2\frac{|\sigma_m(\lambda)|^2}{1+m^2}||P_m v||^2_{L^2}\\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)^2\frac{|\sigma_m(\lambda)|^2}{m^2}||P_m v||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)^2\left|\frac{\sigma_m(\lambda)}{m}\right|^2||P_m v||^2_{L^2}\\
&\leq L\sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)^2||P_m v||_{L^2} < +\infty,
\end{aligned}
$$

pois $v \in H^2$, logo $\tilde{L}_\lambda v \in H^1$ para cada $v \in H^2$, ou seja, $\tilde{L}_\lambda$ está bem definido. Agora, sejam $u, v \in H^2$ e $t \in \mathbb{R}$, onde da terceira desigualdade pra quarta se dá pela Observação A.0.1, assim temos que

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}_\lambda(tu+v) &= \sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sigma_l(\lambda)P_l(tu+v) = \sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sigma_l(\lambda)(tP_m u + P_m v)\\
&= \sum_{l\in\mathbb{N}_0}[t\sigma_l(\lambda)P_u + \sigma_l(\lambda)P_v]\\
&= t\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sigma_l(\lambda)P_u + \sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sigma_l(\lambda)P_v = t\tilde{L}_\lambda(u) + \tilde{L}_\lambda(v),
\end{aligned}
$$

isto é $\tilde{L}_\lambda$ é linear.

Provaremos agora que $\tilde{L}_\lambda$ é um operador contínuo, então seja $v \in H^2$ arbitrário, assim temos que

$$\begin{aligned}
||\tilde{L}_\lambda v||^2_{H^1} &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)||P_m(\tilde{L}_\lambda v)||^2_{L^2};\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)||P_m(\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sigma_l(\lambda)P_l v)||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)||\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sigma_l(\lambda)(P_m\circ P_l)v||^2_{L^2}\\
&\le \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)\sum_{l\in\mathbb{N}_0}|\sigma_l(\lambda)|^2||(P_m\circ P_l)v||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)|\sigma_m(\lambda)|^2||P_m v||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)\left|\frac{\sigma_m(\lambda)(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}\right|^2||P_m v||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)^2\left|\frac{\sigma_m(\lambda)}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}\right|^2||P_m v||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)^2\frac{|\sigma_m(\lambda)|^2}{1+m^2}||P_m v||^2_{L^2}\\
&\le \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)^2\frac{|\sigma_m(\lambda)|^2}{m^2}||P_m v||^2_{L^2}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)^2\left|\frac{\sigma_m(\lambda)}{m}\right|^2||P_m v||^2_{L^2}\\
&\le L\sum_{m\in\mathbb{N}_0}(1+m^2)^2||P_m v||_{L^2} = L||v||^2_{H^2}.
\end{aligned}$$

Então, temos que $||\tilde{L}_\lambda v||_{H^1} \le \sqrt{L}||v||_{H^2}$, e isso implica que $\tilde{L}_\lambda : H^2 \to H^1$ é um operador linear contínuo. Observe que, para Y_m o esférico harmônico de grau m, temos que

$$\tilde{L}_\lambda Y_m = \sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sigma_l(\lambda)P_l Y_m = \begin{cases} 0 \text{ se } m \neq l \\ \sigma_m(\lambda)Y_m \text{ se } m = l \end{cases},$$

e assim L_λ e $\tilde{L}_\lambda$ tem as mesmas autofunções, e como os esféricos harmônicos são densos em $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^2)$ (pois são polinômios linearmente independentes) segue que $\tilde{L}_\lambda|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)} = L_\lambda$, e como $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ é denso em $H^2(\mathbb{S}^N)$ temos pela unicidade da extensão contínua que $\tilde{L}_\lambda$ é a extensão de L_λ como queríamos.

Provaremos agora que $\tilde{L}_\lambda - \sigma_l(\lambda)id : W^1_l \to W^2_l$ é um isomorfismo. Começamos tomando $l \in \mathbb{N}_0$ e observamos que $\tilde{L}_\lambda|_{W^2_l} : W^2_l \to W^1_l$ por definição de $\tilde{L}_\lambda$. Defina a aplicação $T : W^1_l \to W^2_l$ por $Tw = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\neq l}}\frac{1}{\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)}P_m w$. Temos que provar que T está bem definido, ou seja, dado qualquer $w \in W^1_l$ provaremos que $Tw \in W^2_l$, isto é $\sum_{k\in\mathbb{N}_0}(1+k^2)^2||P_k(Tw)||^2_{L^2} < \infty$. Assim, seja

$w \in W_l^1$ arbitrário, então

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}_0}(1+k^2)^2||P_k(Tw)||_{L^2}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0}(1+k^2)^2||P_k(\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\neq l}}\frac{1}{\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)}P_m w)||_{L^2}^2\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_0}(1+k^2)^2||\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\neq l}}\frac{1}{\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)}(P_k\circ P_m w)||_{L^2}^2\\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}_0}(1+k^2)^2\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\neq l}}\left|\frac{1}{\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)}\right|^2||(P_k\circ P_m)w)||_{L^2}^2\\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\neq l}}(1+m^2)^2\left|\frac{1}{\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)}\right|^2||P_m w||_{L^2}^2\\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\neq l}}(1+m^2)^2\frac{1}{|\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)|^2}||P_m w||_{L^2}^2\\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\neq l}}(1+m^2)\frac{1+m^2}{|\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)|^2}||P_m w||_{L^2}^2\\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\neq l}}(1+m^2)\left[\frac{1}{|\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)|^2}+\frac{m^2}{|\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)|^2}\right]||P_m w||_{L^2}^2\\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\neq l}}(1+m^2)\left[\left|\frac{1}{|\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)}\right|^2+\left|\frac{m}{|\sigma_m(\lambda)-\sigma_l(\lambda)|}\right|^2\right]||P_m w||_{L^2}^2\\
&\leq K\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0\\ m\neq l}}(1+m^2)||P_m w||_{L^2}^2 < +\infty,
\end{aligned}
$$

pois $w \in W_l^1$ e como $P_l(T(w)) = 0$ segue que $Tw \in W_l^2$ para todo $w \in W_l^1$, isto é T está bem definido, onde $K > 0$ na ultima desigualdade é proveniente da Observação (2.2.1) item (5).

Como temos que

$$\begin{aligned}
(T \circ (\tilde{L}_\lambda - \sigma_l(\lambda) id)|_{W_l^2}) &= \\
&= (T \circ \tilde{L}_\lambda|_{W_l^2} - \sigma_l(\lambda) T|_{W_l^2}) \\
&= \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \neq l}} \frac{1}{\sigma_m(\lambda) - \sigma_l(\lambda)} P_m(\tilde{L}_\lambda|_{W_l^2}) \\
&+ \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \neq l}} \frac{\sigma_l(\lambda)}{\sigma_m(\lambda) - \sigma_l(\lambda)} P_m|_{W_l^2} \\
&= \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \neq l}} \frac{1}{\sigma_m(\lambda) - \sigma_l(\lambda)} P_m(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sigma_k(\lambda) P_k|_{W_l^2}) \\
&+ \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \neq l}} \frac{\sigma_l(\lambda)}{\sigma_m(\lambda) - \sigma_l(\lambda)} P_m|_{W_l^2} \\
&= \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \neq l}} \frac{1}{\sigma_m(\lambda) - \sigma_l(\lambda)} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sigma_k(\lambda)(P_m \circ P_k)|_{W_l^2} \\
&+ \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \neq l}} \frac{\sigma_l(\lambda)}{\sigma_m(\lambda) - \sigma_l(\lambda)} P_m|_{W_l^2} \\
&= \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \neq l}} \frac{1}{\sigma_m(\lambda) - \sigma_l(\lambda)} \sigma_m(\lambda) P_m|_{W_l^2} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \neq l}} \frac{\sigma_l(\lambda)}{\sigma_m(\lambda) - \sigma_l(\lambda)} P_m|_{W_l^2} \\
&= \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0 \\ m \neq l}} \frac{\sigma_m(\lambda) - \sigma_l(\lambda)}{\sigma_m(\lambda) - \sigma_l(\lambda)} P_m|_{W_l^2} = P_m|_{W_l^2} = id|_{W_l^2},
\end{aligned}$$

isto é, T é uma inversa à esquerda de $\tilde{L}_\lambda - \sigma_l(\lambda) id$. Por argumentos análogos é possível provar que T é uma inversa à direita e logo, por unicidade da inversa, segue que

$$T = (\tilde{L}_\lambda - \sigma_l(\lambda) id)^{-1} : W_l^1 \to W_l^2,$$

e como W_l^1 e W_l^2 são fechados em H^1, H^2 respectivamente, temos então pelo Teorema (3) que T é contínua. Portanto, temos que $\tilde{L}_\lambda - \sigma_l(\lambda) id$ é um isomorfismo como queríamos. □

Observação 2.3.2. *Como o operador $\tilde{L}_\lambda : H^2 \to H^1$ definido na Proposição (2.3.1) é uma extensão contínua do operador dado em (2.10) $L_\lambda : C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N) \to C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N)$, então o mesmo pode ser caracterizado da seguinte forma. Dado $w \in H^2$, Seja $\psi \in W^{1,2}(\Omega)$ a única solução fraca para o problema*

$$\begin{cases} \Delta_{g_\lambda} \psi = 0 \ em \ \Omega_1 \\ \psi(\sigma, t) = w(\sigma) \ para \ (\sigma, t) \in \partial \Omega_1, \end{cases} \tag{2.15}$$

que é axialmente simétrico na variável σ, onde Δ_{g_λ} é dado em (6) do Lema (2.1.2). Pela Teoria de regularidade elíptica, temos que $\psi \in W^{2,2}(\Omega)$, e $\tilde{L}_\lambda w$ é dado por

$$\tilde{L}_\lambda w = \partial_t \psi(\sigma, 1) - w(\sigma) \ para \ quase \ todo \ ponto \ \sigma \in \mathbb{S}^N, \tag{2.16}$$

onde ∂_t é considerado no sentido de traço.

Vamos introduzir alguns espaços que serão de importância essencial para a demonstração do Teorema principal deste trabalho. Detarde, considere

$$A := \{\phi \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N) : \phi \text{ é axialmente simétrico}\} \tag{2.17}$$

$$B := \{\phi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N) : \phi \text{ é axialmente simétrico}\}. \tag{2.18}$$

Afirmo que A e B são subespaços fechados em $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$, $C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^{\mathbb{N}})$ respectivamente. Com efeito, seja $(\phi_n)_n \subset A$ tal que existe $\phi \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ e $||\phi_n - \phi||_{C^{2,\alpha}} \to 0$ quando $n \to \infty$. Para provar que A é fechado, devemos tomar uma aplicação $T \in O(N+1)$ tal que $Te_1 = e_1$, onde e_1 é o primeiro elemento da base canônica de $\mathbb{R}^{N+1}$, e assim mostrar que

$$\phi(T(\sigma)) = \phi(\sigma) \text{ para todo } \sigma \in \mathbb{S}^N.$$

Então, seja $T \in O(N+1)$ tal que $Te_1 = e_1$, arbitrário. Assim,

$$\phi(T(\sigma)) = \lim_n \phi_n(T(\sigma)) = \lim_n \phi_n(\sigma) = \phi(\sigma) \text{ para todo } \sigma \in \mathbb{S}^N,$$

isto é, ϕ é axialmente simétrico, então A é fechado em $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$. Com os mesmos argumentos é possível provar que B é fechado em $C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N)$. Consequentemente os espaços A e B são Banach.

Proposição 2.3.2. *Seja $\lambda_j, j \geq 2$, os valores λ descritos na Proposição (2.2.2). Então o operador*

$$L_j := L_{\lambda_j}|_A$$

possui as seguintes propriedades

(i) O núcleo ($\ker(L_j)$) de L_j é gerado por Y_j, o único esférico harmônico de grau j axialmente simétrico L^2-normalizado;

(ii) A imagem de L_j é

$$\mathrm{Im}(L_j) = \left\{ v \in B : \int_{\mathbb{S}^N} vY_j \, d\sigma = 0 \right\}.$$

Além disso,

$$\partial_\lambda|_{\lambda=\lambda_j} L_\lambda Y_j \notin \mathrm{Im}(L_j).$$

Demonstração. Pela definição de $(\lambda_j)_{j=2}^{\infty}$ proveniente da Proposição (2.2.2) temos que

$$\sigma_j(\lambda_j) = 0,$$

juntando isso com a Proposição (2.2.1) segue que $L_j Y_j = 0$, então $Y_j \in \ker(L_j)$.

Consideremos os seguintes espaços

$$A_j := \left\{ v \in A : \int_{\mathbb{S}^N} vY_j \, d\sigma = 0 \right\} \subset A;$$

$$B_j := \left\{ v \in B : \int_{\mathbb{S}^N} vY_j \, d\sigma = 0 \right\} \subset B,$$

é fácil ver que A_j e B_j são subespaços fechado de A e B respectivamente.

Para provar as propriedades (i) e (ii), é suficiente mostrar que L_j define um isomorfismo de A_j para B_j. Definimos

$$H^k_{ax} := \{v \in H^k : v \text{ é axialmente simétrica}\},$$

onde $k \in \mathbb{N}_0$, assim, note que

$$A = H^2_{ax} \cap C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N) \text{ e } B = H^1_{ax} \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N).$$

Pela Proposição (2.3.1) temos que

$$\tilde{L}_j : H^2_{ax} \to H^1_{ax},$$

definida por $\tilde{L}_j v = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \sigma_j(\lambda_j) P_l v$ é um operador linear contínuo. Sejam

$$\tilde{V}^k_j := H^k_{ax} \cap V_j, \; \tilde{W}^k_j = H^k_{ax} \cap W^k_j \subset H^k$$

para $k = 1, 2$ onde V_j e W^k_j foram definidos em (A.2) e (A.3), respectivamente. Notemos que $\tilde{V}^k_j$ tem dimensão 1 pois é gerado por Y_j. Como pela Proposição (2.3.1) temos que

$$\tilde{L}_j - \sigma_j(\lambda_j) id : \tilde{W}^2_j \to \tilde{W}^1_j$$

é um isomorfismo, por outro lado, temos que $\sigma_j(\lambda_j) = 0$, segue que $\tilde{L}_j : \tilde{W}^2_j \to \tilde{W}^1_j$ é um isomorfismo. Além disso, como

$$A_j = \tilde{W}^2_j \cap A \text{ e } B_j = \tilde{W}^1_j \cap B,$$

temos que $\tilde{L}_j : A_j \to B_j$ é injetivo. Seja $f \in B_j$, como $\tilde{L}_j$ é um isomorfismo, então existe $w \in \tilde{W}^2_j$ tal que $\tilde{L}_j w = f$. Pela Observação (2.3.2), temos então que

$$f(\sigma) = \partial_t \psi(\sigma, \pm 1) - w(\sigma), \tag{2.19}$$

para quase todo ponto $\sigma \in \mathbb{S}^N$, onde $\psi \in W^{2,2}_{loc}$ (W_{loc} é localmente integrável) é a única solução de (2.11) com $\lambda = \lambda_j$, relembrando que $\Omega_1 = \mathbb{S}^N \times (-1, 1)$ por (1) do Lema (2.1.2). Afirmo que

$$\psi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1). \tag{2.20}$$

Essa propriedade de regularidade segue [12, Teorema 6.3.2.1] quando mostrarmos que

$$\psi \in W^{2,p}(\Omega_1) \text{ para todo } p \in (1, \infty). \tag{2.21}$$

Na verdade, se (2.21) for verdadeiro, o mergulho de Sobolev nos garante que $\psi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ e assim $w \in C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ por 2.3.2. Consequentemente, [12, Teorema 6.3.2.1] se aplica com a ordem $d = 1$ do operador de bordo (ver [12, Seção 2.1]) é válido (2.20).

Para provar (2.21), mostraremos por indução que

$$\psi \in W^{2,p_k}(\Omega_1), \tag{2.22}$$

para uma sequência de números $p_k \in [2, \infty]$ satisfazendo $p_0 = 2$ e $p_{k+1} \geq \dfrac{N-1}{N-2} p_k$ para $k \geq 0$. A base de indução já é satisfeita, isto é, temos que (2.22) é verdadeiro para $p_0 = 2$, pela Observação Observação (2.3.2). Suponhamos que (2.22) é verdadeiro para $k \geq 0$. Temos dois casos distintos a considerar.

Se $p_k < N$, então o Teorema do Traço [1, Teorema 5.4] implica que

$$\psi|_{\partial\Omega_1} \in W^{1,p_{k+1}}(\partial\Omega_1),$$

com $p_{k+1} : (\dfrac{N-1}{N-p_k}) p_k \geq \dfrac{N-1}{N-2} p_k$, e logo $w \in W^{1,p_{k+1}}(\mathbb{S}^N)$. Como também $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^N) \subset W^{1,p_{k+1}}(\mathbb{S}^N)$ e, por (2.19) temos que $g(\sigma) = \partial_t \psi_{w,\lambda_j}(\sigma, \pm 1) - \psi_{w,\lambda_j}(\sigma, \pm 1)$ para quase todo ponto $\sigma \in \mathbb{S}^N$, com

$$g = -f + 2w \in W^{1,p_{k+1}}(\mathbb{S}^N),$$

podemos deduzir de [12, Teorema 2.4.2.6] que $\psi \in W^{2,p_{k+1}}(\Omega_1)$.

Se $p_k \geq N$, o Teorema do Traço implica que $w \in W^{1,p}_{loc}(\partial\Omega_1)$ para quaisquer $p > 2$, e então podemos repetir o argumento acima com $p_{k+1} \geq \dfrac{N-1}{N-2} p_k$ para inferir que $\psi \in W^{2,p_{k+1}}(\Omega_1)$. Concluímos que (2.21) é verdadeiro, e então segue que (2.20) é verdadeiro também. Por passagem do traço novamente, concluímos que $w \in C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$. Consequentemente, $w \in C^{2\alpha}(\mathbb{S}^N) \cap \tilde{W}^2_j = A_j$, e logo $\tilde{L}_j : A_j \to B_j$ é sobrejetivo o que concluí a prova.

Finalmente, temos que

$$\partial_\lambda|_{\lambda=\lambda_i} \tilde{L}_\lambda Y_j = \partial_\lambda|_{\lambda=\lambda_j} \sigma_j(\lambda) Y_j = \sigma_j'(\lambda_j) Y_j \neq 0,$$

pois por (5) do Lema (2.2.1) concluí a prova.

□

Teorema 1 (bifurcação de Crandall-Rabinowitz)**.** *Seja X e Y dois espaços de Bannach, seja*

$$O \subset \mathbb{R} \times X,$$

um conjunto aberto, onde os elementos de $\mathbb{R} \times X$ são denotados por (λ, φ). Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto tal que $I \times \{0\} \subset X$, e seja $G : O \to Y$ uma aplicação duas vezes continuamente diferenciável tal que

1. $G(\lambda, 0) = 0$ *para todo* $\lambda \in I$*;*

2. $\ker(D_\varphi G(\lambda_*, 0)) = \mathbb{R}x_*$ *para algum* $\lambda_* \in I$ *e* $x_* \in X - \{0\}$*;*

3. $\operatorname{Cod} \operatorname{Im}(D_\varphi G(\lambda_*, 0)) = 1$*;*

4. $D_\lambda D_\varphi G(\lambda_*, 0)(x_*) \notin \mathrm{Im}(D_\varphi G(\lambda_*, 0))$. *Então para qualquer complemento Z do subespaço $\mathbb{R}x_* \subset X$, existe uma curva continua*

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \to [\mathbb{R} \times Z] \cap O,\ s \to (\lambda(s), w(s))$$

tal que

1. $\lambda(0) = \lambda_*$, $\varphi(0) = 0$;
2. $(\lambda(s), s(x_* + w(s))) \in O$;
3. $G(\lambda(s), s(x_* + w(s))) = 0$.

Mais ainda, o conjunto solução da equação $G(\lambda, u) = 0$ em uma vizinhança de $(\lambda_*, 0)$ é dada pelas curvas $\{(\lambda, 0); \lambda \in \mathbb{R}\}$ e $\{(\lambda(s), s(x_* + w(s))); s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$.

Para a demonstração do Teorema acima vide [7], ressaltamos que o enunciado não é exatamente o mesmo, porém é equivalente. Para o leitor que queira ver mais aplicações deste Teorema consulte [31] ou ainda [15].

Teorema 2. *Seja $N \geq 2$ e $\alpha \in (0,1) \subset \mathbb{R}$. Existe uma sequência estritamente decrescente $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que*

1. $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = 0$;
2. *Para todo $j \geq 1$ existe $\varepsilon(j) = \varepsilon_j > 0$ e uma curva*

$$\begin{array}{rcl} (-\varepsilon_j, \varepsilon_j) & \to & (0, \infty) \times C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N) \\ s & \to & (\lambda_j(s), \varphi_s^j) \end{array}$$

com $\varphi_0^j = 0$, $\lambda_j(0) = \lambda_j$, e φ_s^j é axialmente simétrica;

3. *Para todo $s \in (-\varepsilon_j, \varepsilon_j)$, existe uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}^j_{\phi_s})$, onde $\phi_s^j = \lambda_j(s) + \varphi_s^j$, para o problema de valor de bordo sobredeterminado*

$$\begin{cases} \Delta_{g_{(\sigma,t)}} u = -1 \text{ em } \Omega_{\phi_s^j} \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_{\phi_s^j} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} = \text{ const. sobre } \partial\Omega_{\phi_s^j}. \end{cases}$$

Além disso $\varphi_s^j = s(Y_j + \omega_s^j)$ onde $s \to \omega_s^j$ é uma aplicação diferenciável sobre $C^{2,\alpha}(\mathbb{S}^N)$ tal que $\omega_0^j = 0$ e

$$\int_{\mathbb{S}^n} \omega_s^j Y_j d\sigma = 0, \tag{2.23}$$

para to $s \in (-\varepsilon_j, \varepsilon_j)$.

Demonstração. Primeiramente observamos que a existência da sequência $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ se dá pela Proposição (2.2.2) e satisfaz a propriedade (1) do Teorema.

Agora consideremos A, B definidos em (2.17) e (2.18) respectivamente, seja

$$O := \{(\lambda, \phi) \in (0, +\infty) \times A\},$$

que é um aberto. Delfina a aplicação

$$G : O \to B,$$

por $G(\lambda, \phi) = H(\lambda + \phi) - H(\lambda)$, onde H é o operador definido em (2.8), observe que G está bem definido por conta do Lema (2.1.1) e é claramente duas vezes diferenciável. Temos pelo Lema (2.1.2) que

$$G(\lambda, \phi) = H(\lambda + \phi) - H(\lambda) = H(\lambda + \phi) + \lambda,$$

então encontrar soluções para (2.9) é equivalente a resolver

$$G(\lambda, \phi) = 0.$$

Para isso, aplicaremos o Teorema (1).

Observamos primeiramente que

$$D_\phi G(\lambda, 0) = D\phi|_{\phi=0}(H(\lambda + \phi) + H(\lambda)) = D_\phi|_{\phi=0} H(\phi + \lambda) = L_\lambda.$$

então seja $j \geq 1$, Defina

$$Z_j := \left\{ v \in A : \int_{\mathbb{S}^N} v Y_j d\sigma = 0 \right\}. \tag{2.24}$$

Observe que

$$G(\lambda, 0) = 0,$$

temos ainda pela Proposição (2.3.2) que $\ker(D_\phi G(\lambda_j, 0)) = \mathbb{R} Y_j$, e como

$$\mathrm{Im}(D_\phi G(\lambda_j, 0)) = \{v \in B : \int_{\mathbb{S}^N} v Y_j d\sigma = 0\},$$

segue que $\mathrm{Cod}\dim(\mathrm{Im}(D_\phi G(\lambda_j, 0))) = 1$ e enfim

$$D_\lambda|_{\lambda=\lambda_j} D_\phi G(\lambda, 0)(Y_j) \notin \mathrm{Im}(L_{\lambda_i}).$$

Então, pelo Teorema (1) existe $\varepsilon_j > 0$ e uma curva diferenciável

$$\begin{array}{rcl} (-\varepsilon_j, \varepsilon_j) & \to & O \\ s & \to & (\lambda_s(s), \varphi_s^j), \end{array}$$

tal que

(i) $\lambda_j(0) = \lambda_j$ para todo $s \in (-\varepsilon_j, \varepsilon_j)$;

(ii) $G(\lambda_j(s), \varphi_s^j) = 0$ para todo $s \in (-\varepsilon_j, \varepsilon_j)$;

(iii) $\varphi_s^j = s(Y_j + w_s^j)$ para $s \in (-\varepsilon_s, \varepsilon_s)$ onde $s \to w_s^j$ é uma curva diferenciável em Z_j tal que $w_j^s = 0$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

observe que como $w_s^j \in Z_j$ para todo s, segue que w_s^j não é constante. Definimos

$$\phi_s^j := \lambda_j(s) + \varphi_s^j \in Z_j \subset A$$

e assim temos que

$$G(\lambda_j(s), \varphi_s^j) = H(\lambda_j(s) + \varphi_s^j) + H(\lambda_j(s)) = H(\phi_s^j) + H(\lambda_j(s)) = -\lambda_j(s).$$

Como temos que $\phi_s^j \in A$ e como $\lambda_j(s) \in U$, definido em (2.1), e U sendo aberto podemos tomar ε_j tão pequeno de tal forma que $\phi_j^s \in U$, segue pelo Lema (2.1.1) existe $u_\phi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ que é solução para (2.7) e pelo visto acima segue que $H(\phi_s^j) = const.$ em $\mathbb{S}^N$ e assim temos que $u_{\phi_s^j}$ é solução para (2.6) em $s \in (-\varepsilon_j, \varepsilon_j)$.

Como $\Psi_{\phi_s^j} : (\overline{\Omega}_1, g_{\phi_s^j}) \to (\overline{\Omega}_{\phi_s^j}, g_{(\sigma,t)})$ é uma isometria consequentemente a aplicação $s \to (\lambda_j(s), \varphi_s^j)$ e a função $u := u_{\phi_s^j} \circ \Psi^{-1}_{\phi_s^j} : \Omega_{\phi_s^j} \to \mathbb{R}$ é tal que satisfaz a equação (0.5). $\square$

REFERÊNCIAS

[1] RA Adams. *Sobolev Spaces Academic Press, San Diego*. 1975.

[2] Henri Berestycki, Luis A Caffarelli e Louis Nirenberg. “Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipschitz domains”. Em: *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* 50.11 (1997), pp. 1089–1111.

[3] G Botelho, D Pellegrino e E Teixeira. “Fundamentos de Análise Funcional”. Português. Em: Coleção Textos Universitários (2015).

[4] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Inglês. 1ª ed. Universitext. New York: Springer, 2011. 600 pp. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[5] Yaiza Canzani. “Analysis on manifolds via the Laplacian”. Em: *Lecture Notes available at: http://www. math. harvard. edu/canzani/docs/Laplacian. pdf* (2013), pp. 41–44.

[6] Manfredo Perdigão do. Carmo. *Geometria Riemanniana*. Português. 2ª ed. Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 335 pp. ISBN: 978-1-4419-9981-8.

[7] Michael G Crandall e Paul H Rabinowitz. “Bifurcation from simple eigenvalues”. Em: *Journal of Functional Analysis* 8.2 (1971), pp. 321–340.

[8] Mouhamed Moustapha Fall e Ignace Aristide Minlend. “Serrin’s over-determined problem on Riemannian manifolds”. Em: *Advances in Calculus of Variations* 8.4 (2015), pp. 371–400.

[9] Mouhamed Moustapha Fall, Ignace Aristide Minlend e Tobias Weth. “Serrin’s overdetermined problem on the sphere”. Em: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 57 (2018), pp. 1–24.

[10] Mouhamed Moustapha Fall, Ignace Aristide Minlend e Tobias Weth. “Unbounded periodic solutions to Serrin’s overdetermined boundary value problem”. Em: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 223 (2017), pp. 737–759.

[11] Gerald B Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Inglês. 2ª ed. Vol. 40. Pure and Applied mathematics. John Wiley & Sons, 1999. 416 pp. ISBN: 0-471-31716-0.

[12] Pierre Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. SIAM, 2011.

[13] Lester L Helms. “Introduction to potential theory”. Em: *Pure and Applied Mathematics* (1975).

[14] D. Henry. *Perturbation of the Boundary in Boundary-Value Problems of Partial Differential Equations*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2005. ISBN: 9780521574914. URL: `https://books.google.com.br/books?id=areiCe6xx4UC`.

[15] Hansjörg Kielhöfer. *Bifurcation theory: An introduction with applications to PDEs*. Vol. 156. Springer Science & Business Media, 2006.

[16] Sukir S. Kumaresan e J. V. Prajapat. "Serrin's result for hyperbolic space and sphere". Em: *Duke Mathematical Journal* 91 (1998), pp. 17–28. URL: `https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120731145`.

[17] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Inglês. 2ª ed. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2012. XVI, 708. ISBN: 978-1-4419-9981-8.

[18] John M. Lee. *Riemanniana Manifolds: An Introduction to Curvature*. Inglês. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1950. 176 pp. ISBN: 0-378-98271-X.

[19] Elon Lages LIMA. *Análise Real. Funções de n Variáveis*. 6ª ed. 2 vol. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[20] Elon Lages LIMA. *Análise Real. Funções de uma Variável*. 12ª ed. 1 vol. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 198 pp.

[21] Elon Lages LIMA. *Espaços Métricos*. Portuguese. 5ª ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. 337 pp. ISBN: 978-85-244-0158-9.

[22] Robert Molzon. "Symmetry and Overdetermined Boundary Value Problems". Em: *Forum Mathematicum* 3.Jahresband (1991), pp. 143–156. DOI: `doi:10.1515/form.1991.3.143`. URL: `https://doi.org/10.1515/form.1991.3.143`.

[23] Filippo Morabito. "Serrin's Overdetermined Problem on $S^N\times$ R". Em: *The Journal of Geometric Analysis* 33.10 (2023), p. 327.

[24] Filippo Morabito e Pieralberto Sicbaldi. "Delaunay type domains for an overdetermined elliptic problem in $\mathbb{S}^N \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$". Em: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 22.1 (2016), pp. 1–28. DOI: `doi.org/10.1051/cocv/2014064`.

[25] Manuel del Pino Manresa, Frank Pacard e Juncheng Wei. "Serrin's overdetermined problem and constant mean curvature surfaces". Em: (2015).

[26] Antonio Ros, David Ruiz e Pieralberto Sicbaldi. "Solutions to overdetermined elliptic problems in nontrivial exterior domains." Em: *Journal of the European Mathematical Society (EMS Publishing)* 22.1 (2020).

[27] David Ruiz, Pieralberto Sicbaldi e Jing Wu. "Overdetermined elliptic problems in onduloid-type domains with general nonlinearities". Em: *Journal of Functional Analysis* 283.12 (2022), p. 109705.

[28] Felix Schlenk e Pieralberto Sicbaldi. “Bifurcating extremal domains for the first eigenvalue of the Laplacian”. Em: *Advances in Mathematics* 229.1 (2012), pp. 602–632.

[29] James Serrin. “A symmetry problem in potential theory”. Em: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 43 (1971), pp. 304–318.

[30] Pieralberto Sicbaldi. “New extremal domains for the first eigenvalue of the Laplacian in flat tori”. Em: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 37.3 (2010), pp. 329–344.

[31] Joel Smoller. *Shock waves and reaction—diffusion equations*. Vol. 258. Springer Science & Business Media, 2012.

A. ANÁLISE FUNCIONAL

Definição A.0.1. *Seja X um conjunto. Dizemos que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma métrica se*

1. $d(x,y) \geq 0$ *para todos* $x, y \in X$ *e* $d(x,y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *para todos* $x, y \in X$;
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *para todos* $x, y, z \in X$.

O par (X,d) é chamado de espaço métrico.

Definição A.0.2. *Uma sequencia $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço métrico (X,d) é dita convergente se existe $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Dizemos que x é o limite de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e denotamos por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definição A.0.3. *Uma sequencia $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é chamada de sequência de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

sempre que $m, n > n_0$ e $m, n \in \mathbb{N}$.

Definição A.0.4. *Um espaço métrico (X,d) é dito completo se toda sequência de Cauchy converge, isto é, se $(x_n)_n^{\infty} \subset X$ é uma sequência de Cauchy então existe $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Definição A.0.5. *Seja $X = (X, d_X)$ e $Y = (Y, d_Y)$ dois espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua em um ponto $x_0 \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

sempre que $d(x, x_0) < \delta$. Dizemos ainda que a aplicação $f : X \to Y$ é contínua se f for contínua para todo $x \in X$.

Exemplo A.0.1. *Sejam* $X = (X, d_X)$ *e* $Y = (Y, d_Y)$ *dois espaços métricos. Uma aplicação* $f : X \to Y$ *é dita lipschitziana se existe* $L > 0$ *tal que* $d_Y(f(x), f(y)) \leq Ld_X(x, y)$ *para todos* $x, y \in X$*, é fácil provar que toda função lipschitziana é contínua.*

Exemplo A.0.2. *Sejam* $X = (X, d_X)$ *e* $Y = (Y, d_Y)$*. Dizemos que uma aplicação* $f : X \to Y$ *é uniformemente contínua se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

sempre que $d_X(x, y) < \delta$*. É fácil verificar que toda aplicação uniformemente contínua é contínua.*

Então temos o seguinte sobre aplicações entre espaços métricos:

lipschitziana $\Longrightarrow$ uniformemente contínua $\Longrightarrow$ contínua $\Longrightarrow$ contínua em um ponto.

Definição A.0.6. *Seja X um espaço vetorial. Uma norma em X é uma função* $x \in X \to ||x||_X \in \mathbb{R}$ *tal que*

1. $||x||_X \geq 0$ *para todo* $x \in X$ *e* $||x||_X = 0 \iff x = 0$*;*
2. $||\lambda x||_X = |\lambda| ||x||_X$ *para todo* $x \in X$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*
3. $||x + y||_X \leq ||x||_X + ||y||_X$ *para todo* $x, y \in X$*.*

O par $(X, || \cdot ||_X)$ *é chamado espaço normado. Dizemos que* $(X, || \cdot ||_X)$ *é um espaço de Banhach se* (X, d) *é completo com a métrica induzida* $d(x, y) := ||x - y||_X$ *para todo* $x, y \in X$*.*

Definição A.0.7. *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{R}$*. Um produto interno em X é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\to \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

tal que

(i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *para todos* $u, v, w \in X$*;*

(ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ *para todos* $u, v \in V$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

(iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ *para todos* $u, v \in X$*;*

(iv) $\langle u, u \rangle \geq 0$ *para todo* $u \in X$*.*

O par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *é chamado de espaço com produto interno. Dizemos que o espaço* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *é um espaço de Hilbert, se* $(X, || \cdot ||)$ *é um espaço de Banach, onde* $||x|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ *é a norma induzida pelo produto interno.*

Exemplo A.0.3. *Admitindo que o leitor tenha familiaridade com teoria da medida e funções integráveis, que pode ser consultado em [11]. Denotamos o espaço das funções integráveis de Ω para $\mathbb{R}$ por $L_1(\Omega,\mu)$, ou $L_1(\Omega)$ (podendo ser apenas L_1 também se não tiver perigo de confusão). Então, o espaço*

$$(L_1(\Omega,\mu), ||\cdot||_{L_1})$$

é um espaço de Banach, onde $f \in L_1(\Omega,\mu) \to ||f||_{L_1} := \int_\Omega |f| d\mu = \int_\Omega |f|$, vide [11, Teorema 6.6, p.183].

Exemplo A.0.4. *Seja $1 \leq p < \infty$ definimos*

$$L_p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L_1(\Omega)\},$$

em [4, Capítulo 4, p.89] tem a demonstração de que L_p é um espaço vetorial, e com a norma

$$f \in L_p(\Omega) \to ||f||.L_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach, e se $p = 2$ é um espaço de Hilber com o seguinte produto interno

$$(u,v) \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \to \langle u,v\rangle_{L_2} := \int uv\, d\mu$$

Exemplo A.0.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e seja $1 \leq p < \infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}$ é definido por*

$$W^{1,p} := \left\{u \in L_p(\Omega) \middle| \begin{array}{c} \text{existem } g_1,\ldots,g_N \in L_p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\mu = -\int_\Omega g_i \varphi\, d\mu \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \forall i = 1,\ldots,N \end{array}\right\}.$$

Denotamos por $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ com a norma

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \to ||u||_{W^{1,p}} := ||u||_{L_p} + \sum_{i=1}^N \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_{L_p},$$

é um espaço de Banach vide [4, Proposição 9.1, p.264] e o espaço $H^1(\Omega)$ com o produto escalar

$$(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \langle u,v\rangle_{H^1} := \langle u,v\rangle_{L_2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

é um espaço de Hilber vide [4, Proposição 9.1, p.264]

Exemplo A.0.6. *Seja $m \geq 2$ um natural, e seja $1 \leq p < \infty$ um número real. Definimos o espaço*

$$W^{m,p} := \left\{u \in L_p(\Omega) \middle| \begin{array}{c} \text{para todo multi-índice } \beta \text{ tal que } |\beta| \leq m,\ \exists g_\beta \in L_p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_\Omega u \partial^\beta \varphi\, d\mu = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega g_\beta \varphi\, d\mu\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array}\right\},$$

onde as notações de multi-índices foram fixadas em (1.6). O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com a seguinte norma

$$u \in W^{m,p}(\Omega) \to ||u||_{W^{m,p}} := \sum_{0 \leq ||\beta|| \leq m} ||\partial^{\beta} u||_{L_p}$$

é um espaço de Banach vide [4, p.271].

O espaço $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ munido com o produto esalar

$$(u,v) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \to \langle u,v \rangle_{H^m} := \sum_{0 \leq |\beta| \leq m} \langle \partial^{\beta} u, \partial^{\beta} v \rangle_{L_2}$$

é um espaço de Hilbert vide [4, p.271].

Proposição A.0.1. *Um subespaço Y do espaço de Banach X é Banach também se, e somente se, Y for fechado em X.*

Para uma demonstração da Proposição acima, vide [3, Proposição 1.1.1, p.2].

Definição A.0.8. *Sejam X e Y dois espaços normado. Dizemos que $T : X \to Y$ é uma aplicação linear (ou operador linear) se $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$ para todos $x, y \in X$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Proposição A.0.2. *Sejam X, Y dois espaços normado e seja $T : X \to Y$ um operador linear. São equivalentes as seguintes afirmações*

(1) T é lipschitziano;

(2) T é uniformemente contínuo;

(3) T é contínuo;

(4) T é contínuo em algum ponto de X;

(5) T é contínuo na origem;

(6) T é limitado na bola, isto é, $\sup_{x \in B_X} ||T(x)||_Y < \infty$, onde $B_X = \{x \in X : ||x||_X \leq 1\}$;

(7) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $||T(x)||_Y \leq C||x||_X$ para todo $x \in X$.

Uma demonstração para a Proposição acima se encontra em [3, Teorema 2.1.1, p.32]. Os operadores que satisfazem um (e portanto todos) dos itens acima são denominados operadores limitados. O espaço dos operadores lineares e limitados que saem de X para Y é um espaço vetorial com a soma pontual e multiplicação por escalar pontual, denotaremos por $\mathscr{L}(X,Y)$ esse espaço.

Proposição A.0.3. *Sejam X e Y espaços normados.*

(a) A expressão

$$||T|| := \sup\{||T(x)||_Y : x \in X \text{ e } ||x||_X \leq 1\}$$

define uma norma em $\mathscr{L}(X,Y)$.

(b) $||T(x)||_Y \leq ||T||||x||_X$ para todo $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ e $x \in X$.

(c) Se Y for uma espaço de Banach, então $\mathscr{L}(X,Y)$ também é Banach.

Uma demonstração para a Proposição acima se encontra em [3, Proposição 2.1.4, p.34].

Definição A.0.9. *Seja $T : X \to Y$ um operador linear entre os espaços normados X, Y. Dizemos que T é um isomorfismo topológico (ou simplesmente isomorfismo) se T é linear, bijetivo, contínuo e com inversa contínua.*

Teorema 3. *Seja X e Y dois espaços de Banach e seja $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ sobrejetivo. Então T é uma aplicação aberta, isto é, se $A \subset X$ é um conjunto aberto então $T(A)$ é aberto em Y. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetivo entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Teorema 4. *Sejam H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de H. Então*

1. *$H = M \bigoplus M^{\perp}$, isto é, cada $x \in H$ admite uma única representação na forma*

$$x = p + q \text{ com } p \in M \text{ e } q \in M^{\perp}.$$

Além disso,

$$||x - p|| = \operatorname{dist}(x, M).$$

O vetor p é chamado de projeção ortogonal de x sobre M.

2. *Os operadores*

$$P, Q : H \to H, \; P(x) = p \text{ e } Q(x) = q$$

são projeções, isto é, são lineares, contínuas e $P^2 = P$ e $Q^2 = Q$. Mais ainda, $P(H) = M$, $Q(H) = M^{\perp}$, $||P|| = 1$ se $M \neq \{0\}$ e $||Q|| = 1$ se $M \neq H$. O operador P é chamado de projeção ortogonal de H sobre M.

3. *$P \circ Q = Q \circ P = 0$.*

Uma demonstração para o Teorema acima se encontra em [3, Teorema 5.2.5, p.111]

Proposição A.0.4. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana. Além disso, se M tem bordo, então impomos condições de bordo de Dirichlet ou de Neumann. Sejam $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ uma base ortonormal de autofunções do operador Laplace-Beltrami com respectivos autovalores $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots$. Então*

$$H^k := \left\{ f \in L_2(M) : \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^k \langle f, \varphi_j \rangle_{L_2}^2 < \infty \right\}.$$

Uma demonstração para essa proposição se encontra em [5, Proposição 56, p.83]. Denotando

$$H^k := H^k(\mathbb{S}^N) \text{ para } k \in \mathbb{N}, \tag{A.1}$$

usualmente $H^0 = L_2 = L_2(\mathbb{S}^N)$. Por Exemplo (A.0.4) temos que L_2 é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v) \to \langle u, v \rangle_{L_2} := \int_{\mathbb{S}^N} uv \, d\sigma \text{ para } u, v \in L_2.$$

Considere $l \in \mathbb{N}_0$, e defina

$$V_l \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} H^k \tag{A.2}$$

o espaço dos harmônicos esféricos de gral l. Por [5, Corolário 28, p.56] $\dim V_l < +\infty$ e logo existe $P_l : L_2 \to L_2$ projeção ortogonal em V_l com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2}$, e temos que

$$W_l^k := \{v \in H^K : P_l v = 0\} \subset H^k, \tag{A.3}$$

isto é, W_l^k é o complemento ortogonal de V_l em H^k. Assim, temos que

$$H^k = V_l \bigoplus W_l^k.$$

Pela Proposição acima podemos caracterizar H^k por sendo o subespaço dos vetores $v \in L_2$ tal que

$$\sum_{l \in \mathbb{N}_0} (1 + l^2)^k \langle P_l v, P_l v \rangle_{L_1} < \infty. \tag{A.4}$$

Podemos assim definir uma produto por escalar em H^k por

$$(u, v) \to \langle u, v \rangle_{H^k} := \sum_{l \in \mathbb{N}_0} (1 + l^2)^k \langle P_l u, P_l v \rangle_{L_2}, \tag{A.5}$$

É imediato verificar que a norma induzida por esse produto interno é equivalente ao produto interno definido em (A.0.6).

Observação A.0.1. *Como $P_l : L^2 \to L^2$ são projeções sobre o espaço V_l, temos pelo Teorema 4 que se $V_l \neq V_m$, então $P_l \circ P_m = P_m \circ P_l = 0$*

B. DIFERENCIÁBILIDADE EM ESPAÇOS NORMADOS

Definição B.0.1. *Sejam E, F espaços de Banach e U um aberto em E. Dizemos que uma função $f : U \to F$ é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$ se existe um operador linear contínuo $A : E \to F$ tal que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + R(x_0, h),$$

para todo h tal que $x_0 + h$ pertence a uma bola aberta centrada em x_0 e contida em U, onde $R(x_0, h) = o(||h||_E)$, isto é:

$$\lim_{h \to 0} \frac{||R(x_0, h||_F)}{||h||_E}.$$

Neste caso A é chamada de derivada de Fréchet de f em x_0 e denotada por $A = Df(x_0)$, ou ainda $Df_{x_0} = A$. Se f dor Fréchet-diferenciável em todos os pontos de U dizemos simplesmente que f é Fréchet-diferenciável.

Proposição B.0.1. *Sejam E, F espaços de Banach e $U \subset E$ aberto. Se a função $f : U \to F$ é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$, então a derivada de Fréchet de f em x_O é única e f é contínua em x_0.*

Para uma demonstração vide [3, Proposição 9.6.2, p.274].

Exemplo B.0.1. *1. Toda aplicação constante em um aberto de um espaço de Banach é Fréchet-diferenciável e tem derivada nula.*

2. Toda aplicação linear contínua $A : E \to F$ é Fréchet-diferenciável e $DA(x_0) = A$ para todo $x_0 \in E$.

3. Seja H um espaço de Hilbert e $f : H \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ||x||^2$. Então f é Fréchet-diferenciável e $Df(s)(h) = 2\langle x, h\rangle$ para todos $x, h \in H$.

Para a devida justificativa desse exemplo vide [3, Exemplo 9.6.3, p.274-275]

Lema B.0.1. *Seja* $(X, ||\cdot||_X)$ *um espaço de Banach. Se* $T \in \mathscr{L}(X)$ *e* $||T|| < 1$*, então* $I - T$ *é um isomorfismo. Onde* $\mathscr{L}(X)$ *é o conjunto dos operadores limitas, I é o operador identidade e* $||T|| = \sup_{||x||_X \leq 1} ||Tx||_X$*. Ademais,*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \text{ em } \mathscr{L}(X).$$

Demonstração. Primeiramente vejamos que $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge em $\mathscr{L}(X)$. Como $\mathscr{L}(X)$ é Banach, basta mostrar que $\sum_{k=0}^{\infty} ||T^k||$ converge. Como

$$||T^k|| \leq ||T||^k \text{ e } ||T|| < 1,$$

o resultado é imediato. Tome $S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \in \mathscr{L}(X)$, afirmo que S é a inversa de $(I - T)$. Com efeito,

$$(I - T)(\sum_{k=0}^{N} T^k) = I - T^{N+1} = (\sum_{k=0}^{N} T^k)(I - T),$$

fazendo $N \to \infty$, temos que

$$(I - T)S = S(I - T) = I.$$

Como queríamos. □

Corolário B.0.2. *Seja X um espaço de Banach. Considere* $\mathscr{I}(X) \subset \mathscr{L}(X)$ *o conjunto dos isomorfismos topológicos de X. Então* $\mathscr{I}(X)$ *é um aberto.*

Demonstração. Seja $T \in \mathscr{I}(X)$. considere $||T - S|| < ||T^{-1}||^{-1}$, então

$$||I - ST^{-1}|| = ||(T - S)T^{-1}|| \leq ||T - S||||T^{-1}|| < 1,$$

segue pelo Lema anterior que $ST^{-1} \in \mathscr{I}(X)$ e por conseguinte $S \in \mathscr{I}(X)$, isto é, a bola

$$B(T, r := ||T^{-1}||^{-1}) \subset \mathscr{I}(X)$$

o que é a definição de conjunto aberto em um espaço métrico. □

Exemplo B.0.2. *Seja X um espaço de Banach. Definimos a aplicação inversão por*

$$\begin{aligned} \text{Inv}: \ \mathscr{I}(X) &\to \mathscr{I}(X) \\ T &\to \text{Inv}(T) = T^{-1}, \end{aligned}$$

é uma aplicação Fréchet-diferenciável e sua defivada de Fréchet é

$$D(\text{Inv}(T))H = T^{-1}HT^{-1}.$$

Com efeito, primeiro observe que

$$\begin{aligned} \mathrm{Inv}(T-S) - \mathrm{Inv}(S) &= (T-S)^{-1} - S^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (ST^{-1})^i \\ &= T^{-1}ST^{-1} + T^{-1}\sum_{i=2}^{\infty}(ST^{-1})^i(T-S)^{-1} = T^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}(ST^{-1})^i. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{Inv}(T-S) = \mathrm{Inv}(T) + T^{-1}ST^{-1} + T^{-1} + T^{-1}(ST^{-1})^2\sum_{i=1}^{\infty}(ST^{-1})^i.$$

Defina

$$L(S) = T^{-1}ST^{-1},$$

é claro que L é linear, assim basta mostrar que é contínua e que aproxima a inversão linearmente. Para mostrar que é contínua basta mostrar que L é limitada, então

$$||L(S)|| = ||T^{-1}ST^{-1}|| \leq ||T^{-1}||^2||S||,$$

o que mostra que L é limitada e consequentemente contínua. Prosseguimos a demonstração observando que

$$(T-S) \in B(T, 1/||T^{-1}||) \iff ||S|| < 1/||T^{-1}||.$$

Definimos o resto por

$$R(S) = T^{-1}(ST^{-1})^2\sum_{i=1}^{\infty}(ST^{-1})^i,$$

assim

$$||R(S)|| \leq ||T^{-1}||||S||^2||T^{-1}||^2\sum_{i=1}^{\infty}||ST^{-1}||^i = \frac{1}{k}||T^{-1}||^3||S||^2,$$

onde $k := ||ST^{-1}|| < 1$. *Logo,*

$$\frac{||R(S)||}{||S||} \leq \frac{1}{k}||T^{-1}||^3||S|| \to 0,$$

quando $||S|| \to 0$. *Portanto* Inv *é Fréchet-diferenciável e a diferenciável de Fréchet é o afirmado.*

Proposição B.0.3. *Sejam* E, F *espaços de Banach e* $U \subset E$ *aberto. Se as funções* $f, g : U \to F$ *são Fréchet-diferenciáveis em* x_0 *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então a função* $f + \lambda g$ *é Fréchet-diferenciável em* x_0 *e* $D(f + \lambda g)(x_0)) = Df(x_0) + \lambda Dg(x_0)$.

Uma demonstração se encontra em [3, Proposição 9.6.4, p.275]

Teorema 5 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam* E, F, G *espaços de Banach,* $f : U \subset E \to F$, $g : V \subset F \to G$, *com U e V abertos e* $f(U) \subset V$. *Se f é Fréchet-diferenciável em* $x_0 \in U$ *e g é Fréchet-diferenciável em* $f(x_0)$, *a aplicação* $g \circ f : U \to G$ *é Fréchet-diferenciável em* x_0 *e*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0).$$

Uma prova para o Teorema acima se encontra em [3, Teorema 9.6.5, p.276].