

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

**Suavização de malhas usando filtros bilaterais
adaptativos**

Alex Oliveira Pinto

Manaus - AM
2024

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

**Suavização de malhas usando filtros bilaterais
adaptativos**

por

Alex Oliveira Pinto

sob as orientações de

Prof. Dr. Dimas Martínez Morera
(Orientador)

Manaus - AM
2024

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P659s Pinto, Alex Oliveira
Suavização de malhas usando filtros bilaterais adaptativos. / Alex
Oliveira Pinto . 2024
59 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Dimas Martínez Morera
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do
Amazonas.

1. Filtro bilateral. 2. Suavização. 3. Preservação de
características. 4. Redução de ruído. I. Morera, Dimas Martínez. II.
Universidade Federal do Amazonas III. Título

Suavização de malhas usando filtros bilaterais adaptativos

por

Alex Oliveira Pinto¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em 18 de junho de 2024.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Dimas Martínez Morera
(Orientador)

Prof. Dr. Thales Miranda de Almeida Vieira
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Cícero Augusto Mota Cavalcante
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Dedicatória

Aos meus pais, irmãos, professores, amigos, colegas e familiares...

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela graça que me foi concedida. Agradeço à minha mãe, Elcinéia Freitas Pinto, ao meu pai, Amarildo da Silva Pinto, ao meu irmão, Alace Freitas Pinto, e à minha irmã, Anita Freitas Pinto, por todo o incentivo e apoio durante todo o período de graduação e pós-graduação.

Expresso minha gratidão ao professor Mr. Carlos José Ferreira Soares, à professora Mr. Denise Medim da Mota, ao professor Dr. Robert Luis Lara, ao professor Dr. Fernando Soares Coutinho e, principalmente, à professora Mr. Sabrina de Sousa Rodrigues, que me orientou durante a graduação e me incentivou a seguir na carreira acadêmica, ingressando no mestrado. Agradeço aos colegas e companheiros de estudo desde a graduação até o mestrado, dos quais destaco Adriano Menezes da Silva, Rodrigo Coelho Gomes, Joanes Duarte dos Santos e Thiago Cacau.

Pelas aulas e orientações durante o período do mestrado, agradeço ao meu professor orientador, Prof. Dr. Dimas Martínez Morera, por todas as disciplinas oferecidas, reuniões e orientações prestadas. Agradeço aos Profs. Drs. Cícero Augusto Mota Cavalcante e Thales Miranda de Almeida Vieira por terem participado da banca examinadora da defesa desta dissertação e pelas valiosas sugestões oferecidas.

Resumo

Em 1998, Tomasi e Manduchi introduziram o filtro bilateral para imagens cinzas e coloridas. Ele foi posteriormente estendido para realizar suavização de malhas com preservação de características por Fleishman et al. e Jones et al. Nesta dissertação, apresentamos um algoritmo de suavização de malhas usando filtros bilaterais adaptativos, que utiliza a arquitetura comum de Suavização de malhas em duas etapas. Na primeira etapa, aplicamos o filtro bilateral ao campo normal da malha considerando distâncias geodésicas entre centróides de faces adjacentes. Essa estratégia respeita a estrutura espacial da própria malha por meio do uso de métricas intrínsecas. Os parâmetros para os pesos espacial e de similaridade do algoritmo são totalmente determinados de forma adaptativa, o que evita o dilema dos métodos anteriores que se baseavam em tentativa e erro para se obter resultados satisfatórios. Na segunda etapa, o fluxo da curvatura média, junto com a estratégia de Sun et. al., são combinadas para atualizar as posições dos vértices de modo que as normais às faces correspondem ao novo campo normal. Ou seja, a direção da atualização do vértice é ajustada para uma combinação linear entre a direção da coordenada diferencial e a direção dada pela média ponderada pelas áreas das faces entre as projeções do vértice nos planos vizinhos correspondentes às novas normais filtradas obtidas na primeira etapa, o que melhora a qualidade das malhas. Extensos experimentos demonstram a eficácia do método na preservação das características da malha enquanto o ruído é removido.

Palavras-Chave: Filtro Bilateral, Suavização, Preservação de Características.

Abstract

In 1998, Tomasi and Manduchi introduced the bilateral filter for grayscale and colored images. It was subsequently extended to perform feature-preserving mesh denoising by Fleishman et al. and Jones et al. In this dissertation, we present a mesh smoothing algorithm using adaptive bilateral filters, which utilizes the common two-step architecture for mesh denoising. In the first step, we apply the bilateral filter to the mesh normal field, considering geodesic distances between centroids of adjacent faces. This strategy respects the spatial structure of the mesh itself by using intrinsic metrics. The parameters for the spatial and similarity weights of the algorithm are fully determined adaptively, avoiding the dilemma of previous methods that relied on trial and error to achieve satisfactory results. In the second step, the mean curvature flow, along with Sun et al.'s strategy, are combined to update the vertex positions so that the face normals correspond to the new normal field. That is, the direction of the vertex update is adjusted to a linear combination of the direction of the differential coordinate and the direction given by the area-weighted average of the projections of the vertex onto the neighboring planes corresponding to the new filtered normals obtained in the first step, which improves the mesh quality. Extensive experiments demonstrate the effectiveness of the method in preserving mesh features while removing noise.

Keywords: Bilateral Filter, Denoising, Feature Preservation.

Sumário

Introdução	4
1 Filtro Bilateral para imagens	6
1.1 Imagens	6
1.2 Filtros	8
1.3 Funções Gaussianas	10
1.4 Filtro Gaussiano	13
1.5 Filtro Bilateral	14
2 Revisão de literatura	19
2.1 Malhas	19
2.2 Suavização de malhas	20
2.3 Suavização de duas etapas	23
3 Filtro Bilateral em malhas	26
3.1 Primeira Etapa	26
3.2 Fluxo da Curvatura Média	30
3.3 Segunda Etapa	31
3.4 Parâmetros Adaptativos	32
3.4.1 Parâmetro de Peso Espacial Adaptativo	33
3.4.2 Parâmetro de Peso de Similaridade Adaptativo	33
4 Resultados e discussões	37
4.1 Análise do número de iterações	39

4.2	Análise da preservação de características	39
4.3	Análise do parâmetro espacial σ	41
4.4	Análise do parâmetro de similaridade τ	41
5	Considerações finais e trabalhos futuros	46

Lista de Figuras

1.1	Imagem simples. Por [2].	7
1.2	Imagem complexa. Por [2].	8
1.3	Função Gaussiana $K_\sigma : R \rightarrow R$	11
1.4	Função Gaussiana $K_\sigma : R^2 \rightarrow R$	11
1.5	Função Gaussiana $K_\sigma : \Omega \rightarrow \Gamma$	12
1.6	Filtros. Imagem original por Neto (1999), as demais pelo autor.	16
1.7	Filtros. Imagem original por Kinast (2019), as demais pelo autor.	17
3.1	Um retalho no modelo do Bunny (a), e detalhe mostrando os vetores normais às faces (b). O retalho corresponde à face destacada em azul.	28
4.1	Efeito de K_N e K_V no número de iterações necessárias para atingir resultados similares. Modelos usados, de cima para baixo: Fandisk, Bunny e Bimba.	38
4.2	Suavização das malhas após um número excessivo de iterações.	40
4.3	Resultados após 6 iterações, da esquerda para direita: Nossa Abordagem (NA), Filtro Laplaciano (FL) e Suavização Taubin (ST). Modelos usados, de cima para baixo: Fandisk, Bunny e Bimba.	42
4.4	Resultados após 30 iterações, da esquerda para direita: Nossa Abordagem (NA), Filtro Laplaciano (FL) e Suavização Taubin (ST). Modelos usados, de cima para baixo: Fandisk, Bunny e Bimba.	43
4.5	Peso similaridade, malha bunny.	44
4.6	Peso similaridade, malha fandisk.	45

Introdução

A Suavização de malhas é um problema fundamental no processamento de sinais, visando eliminar imperfeições enquanto se preserva as características essenciais da estrutura original. A principal dificuldade está em encontrar um equilíbrio entre suavizar o ruído mantendo os detalhes e as importantes características geométricas da malha. Esse será o problema atacado nesta dissertação.

A filtragem é provavelmente a operação mais fundamental no processamento de imagens. No sentido mais amplo do termo, a filtragem consiste em calcular o valor da imagem filtrada em um determinado pixel como uma função dos valores da imagem de entrada em uma pequena vizinhança ao redor desse pixel. Em particular, a filtragem gaussiana calcula uma média ponderada dos valores dos pixels na vizinhança, na qual os pesos diminuem conforme a distância ao centro aumenta. Embora possamos fornecer explicações formais e quantitativas sobre essa diminuição de peso [34], o processo de tomar a média ponderada pelos pesos gaussianos em uma vizinhança do pixel reduz o ruído enquanto preserva o sinal.

O filtro bilateral foi introduzido por Tomasi e Manduchi [38] como uma nova abordagem de filtragem que considera tanto o domínio quanto o contra-domínio do sinal, uma alternativa para melhorar os resultados de Suavização de imagens. Ele reduz o ruído e preserva as características principais das imagens. Devido à sua eficiência, o filtro bilateral foi expandido para abordar o problema da Suavização de malhas ruidosas. Essa expansão foi inicialmente realizada por [13, 21], que se basearam em preditores locais de primeira ordem da malha.

Após anos de desenvolvimento dessas técnicas, surgiu uma arquitetura comum nos algoritmos de Suavização de malhas baseada em duas etapas. Na primeira etapa, o campo normal da malha é filtrado, pois as normais capturam melhor a geometria da superfície do que os vértices. Na segunda etapa, as posições dos vértices são atualizadas para corresponder

às novas normais previamente filtradas. Nesta etapa, os pesquisadores utilizaram principalmente a estratégia proposta por [37], baseada em uma média ponderada de projeções, que será discutida no Capítulo 3.

No entanto, uma nova abordagem proposta por [30] leva em consideração também as coordenadas diferenciais dos vértices, baseando-se no fluxo da curvatura média para atualizar as posições dos vértices. Nesta abordagem, a direção da atualização do vértice é ajustada para uma combinação linear entre a direção da coordenada diferencial e a direção dada pela média ponderada das áreas das faces, entre as projeções do vértice nos planos vizinhos correspondentes às novas normais obtidas na primeira etapa, melhorando a qualidade da malha resultante.

Além disso, [30] definiram os parâmetros da filtragem bilateral de forma adaptativa em relação à malha de entrada, resolvendo o problema de tentativa e erro para obter bons resultados, que anteriormente dependiam da experiência do pesquisador. Também utilizaram distâncias geodésicas no cálculo das funções gaussianas, ao invés da distância euclidiana. Extensos experimentos comprovaram que essas modificações melhoram ainda mais os resultados obtidos.

O objetivo desta dissertação é realizar um estudo aprofundado de [30], explorando suas contribuições para a filtragem bilateral adaptativa e suas aplicações na Suavização de malhas ruidosas. A análise detalhada das técnicas propostas e dos resultados experimentais fornecerá uma compreensão abrangente das melhorias introduzidas e de seu impacto na qualidade das malhas processadas.

Capítulo 1

Filtro Bilateral para imagens

Os filtros bilaterais foram inicialmente desenvolvidos no contexto do processamento de imagens e serviram de inspiração para a criação de filtros bilaterais em malhas. Uma imagem pode ser representada como uma matriz, onde cada elemento da matriz (pixel) é associado a uma função que toma valores no espaço das cores. A seguir, definiremos um filtro por convolução de forma geral, com ênfase nas funções gaussianas e no filtro gaussiano. Por fim, definiremos o filtro bilateral para imagens, discutindo brevemente alguns resultados relevantes.

1.1 Imagens

Imagens digitais podem ser representadas como matrizes numéricas, onde cada elemento da matriz corresponde ao valor da cor no espaço das cores adotado de um pixel. Podemos então definir uma imagem como sendo uma função $I : \Omega \rightarrow \Gamma$, onde Ω é o domínio dos pixels, tomando valores no contra-domínio Γ , que representa o espaço das cores. Uma função no contexto do processamento de imagens e malhas é constantemente chamada de sinal na literatura. Neste trabalho também adotamos essa terminologia.

Por exemplo, se tivermos uma imagem no espaço de cores cinza de dimensões $M \times N$, você pode representá-la como uma matriz $M \times N$ em que cada elemento (i, j) contém o valor da cor do pixel nessa posição. Essa representação facilita a aplicação de algoritmos e técnicas de processamento de imagem, muitos dos quais envolvem operações matriciais para

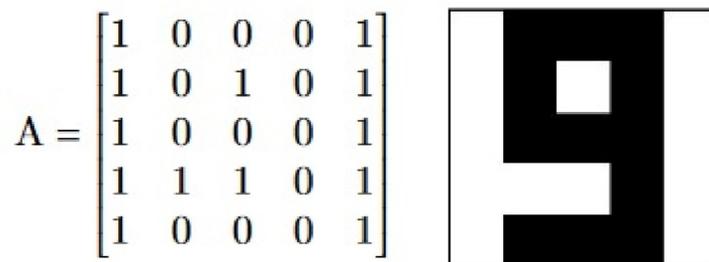


Figura 1.1: Imagem simples. Por [2].

realizar manipulações e análises eficientes das características da imagem. Para uma melhor compreensão o leitor pode consultar o texto de Almeida e Magrini [2].

A representação mais comum é a representação no espaço de cores cinza, onde cada pixel é representado por um único valor numérico que indica a intensidade da luz naquele pixel da imagem. Em uma imagem no espaço de cores cinza, os valores podem variar em um intervalo de valores pré-definidos. Uma escolha comum é o intervalo $[0, 1]$ onde o 0 representa preto e 1 representa branco. Quando usamos 1 byte por pixel podemos usar um número inteiro entre 0 e 255. Outra representação bem comum são de imagens coloridas, em que cada pixel tem três valores, como se fosse um ponto do R^3 com valores para cada canal de cor (como vermelho, verde e azul em uma imagem RGB). Há ainda outros espaços de cores que não consideramos neste trabalho.

A figura 1.1 ilustra uma imagem simples e a figura 1.2 uma imagem complexa, o termo simples e complexo aqui se referem à quantidade de pixels que formam a imagem, assim, uma imagem simples é constituída por poucos pixels, enquanto uma imagem complexa é constituída por um número grande de pixels. Observe que a figura 1.1 utiliza uma escala de cores baseada em valores que variam de 0 a 1, onde o número 0 representa a cor preta e o número 1 a cor branca, este exemplo foi colocado apenas para ilustrar a diversidade de espaços de cores que podem ser adotados. Em geral, quanto maior a resolução da imagem, maior o seu número de pixels e por consequência maior a sua complexidade. As câmeras em geral estão aumentando cada vez mais sua resolução, mas computacionalmente métodos implementados para imagens tem resultados quase instantâneos.

A estrutura de matriz é particularmente útil para o processamento de imagens, pois

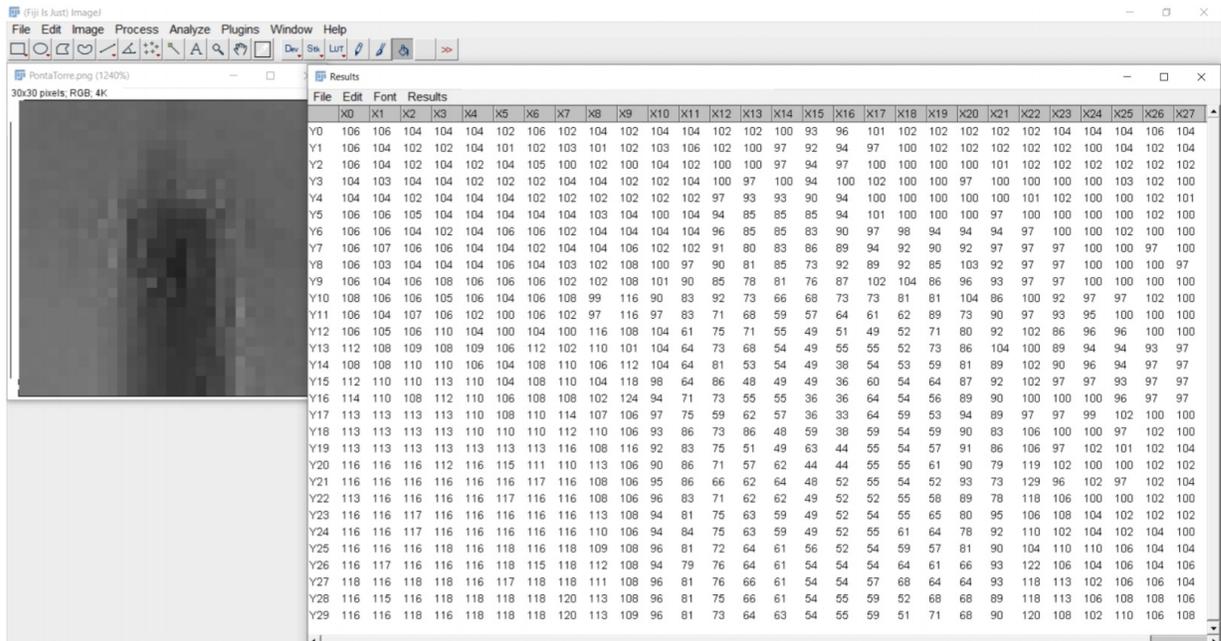


Figura 1.2: Imagem complexa. Por [2].

permite aplicar operações matriciais e algoritmos de forma rápida e eficiente para manipular e analisar imagens. A manipulação de uma imagem como uma matriz pode incluir operações como filtragem, redução de ruído, detecção de bordas e diversas transformações, dependendo dos objetivos de quem está trabalhando com a imagem. Para imagens coloridas tudo segue de forma análoga.

1.2 Filtros

Um filtro de imagem refere-se a uma técnica ou operação aplicada a uma imagem para modificar suas características ou realizar uma transformação específica. Essas transformações podem ter diversos propósitos, como realçar detalhes, suavizar ruídos, detecção de bordas, ou mesmo efeitos estéticos específicos como é comum hoje em dia, entre outros. Aqui estão alguns tipos comuns de filtros de imagem:

Filtro Gaussiano: Remove detalhes finos e suaviza a imagem, aplicando uma média ponderada dos pixels em torno de cada ponto.

Realce de Borda: Realça bordas e detalhes na imagem para tornar as transições de intensidade mais pronunciadas.

Filtro Laplaciano: Utilizados para detecção de bordas em imagens, realçando as regiões onde ocorrem mudanças bruscas de intensidade.

Filtro de Mediana: Usado para remover ruído em imagens, substituindo o valor de cada pixel pela mediana dos valores na sua vizinhança.

Filtro Blur: Causa um efeito de desfoque na imagem, reduzindo a nitidez.

Filtro de Inversão de Cores: Inverte as cores da imagem, transformando áreas escuras em claras e vice-versa.

Filtro de Correção de Cor: Ajusta o equilíbrio de cores, brilho e contraste para melhorar a qualidade visual.

Filtro de Dilatação e Erosão: Utilizados em processos de morfologia matemática para expandir ou contrair regiões de pixels na imagem.

Filtro de Detecção de Linhas: Identifica linhas em uma imagem.

A aplicação de filtros em imagem pode ser realizada manualmente usando softwares de edição de imagens, como o Photoshop, ou programaticamente usando linguagens de programação e bibliotecas especializadas em processamento de imagens, como OpenCV em Python. Cada filtro tem uma aplicação específica e pode ser escolhido com base nos objetivos desejados para a imagem.

Na prática o filtro atua localmente a partir de vizinhanças, ou seja, o novo valor do sinal em um pixel p é uma função dos valores da imagem de entrada em uma vizinhança de p . No caso contínuo, assumindo que o sinal é definido no domínio Ω e tomando valores no contra-domínio Γ , o filtro normal por convolução para um sinal $I : \Omega \rightarrow \Gamma$ pode ser escrito como

$$\bar{I}_p = \frac{1}{W_p} \int_{\Omega} K(p, q) I_q d_q, \forall p \in \Omega \quad (1.1)$$

onde, \bar{I}_p é o valor do sinal filtrado \bar{I} em p ; I_p e I_q são os valores do sinal I no ponto p e q respectivamente; $K : \Omega \times \Omega \rightarrow R$ é chamada de núcleo da filtragem; $W_p = \int_{\Omega} K(p, q) d_q$ é o

fator de normalização. Idealmente trabalharíamos no caso contínuo, mas no nosso contexto trabalhamos com funções discretas. O filtro normal por convolução no caso discreto pode ser escrito a partir de (1.1) como

$$\bar{I}_p = \frac{1}{W_p} \sum_{q \in N_p} K(p, q) I_q, \forall p \in \Omega \quad (1.2)$$

onde, \bar{I}_p é o valor do sinal filtrado \bar{I} no ponto p ; I_p é o sinal central e I_q é seu sinal vizinho, eles são os valores do sinal I no ponto p e q respectivamente; $N_p \subset \Omega$ é a vizinhança de p ; $K : \Omega \times \Omega \rightarrow R$ é chamada de núcleo da filtragem, $W_p = \sum_{q \in N_p} K(p, q)$ é o fator de normalização. Perceba pela expressão que basicamente estamos fazendo uma média ponderada entre o valor central e seus vizinhos onde o peso de cada um é calculado pelo núcleo da filtragem, assim para cada escolha do núcleo da filtragem, tem-se um filtro diferente.

1.3 Funções Gaussianas

Nos séculos XVIII e XIX, alguns matemáticos e físicos desenvolveram uma função densidade de probabilidade que descrevia os erros experimentais obtidos em medidas físicas. Esse erro pode ter diferentes fontes, desde a variação de temperatura, tempo, entre inúmeras outras características não identificáveis. A grande utilidade dessa distribuição de probabilidade está associada ao fato de que aproxima de forma bastante satisfatória as curvas de frequências de medidas físicas [4].

A distribuição normal, que é também conhecida como distribuição gaussiana, é uma das distribuições mais importantes na teoria da probabilidade e estatística. Ela, descreve a distribuição de uma variável contínua que é simétrica em torno de uma média, formando uma curva em forma de sino. Isto não constitui uma surpresa pois, a soma de efeitos independentes (ou efeitos não correlacionados) deveriam, se houvesse muitos desses, se distribuir normalmente (sempre sujeito a certos pressupostos).

Em imagens, o ruído gaussiano (gerado seguindo uma distribuição gaussiana) pode aparecer como uma interferência granulada, que pode suavizar ou distorcer detalhes, tornando a imagem menos nítida. É um tipo comum de ruído que afeta principalmente imagens capturadas por sensores de câmera ou digitalizadas, e sua intensidade pode variar dependendo

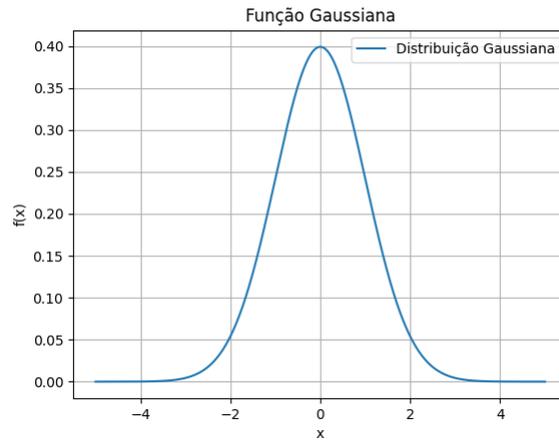


Figura 1.3: Função Gaussiana $K_\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

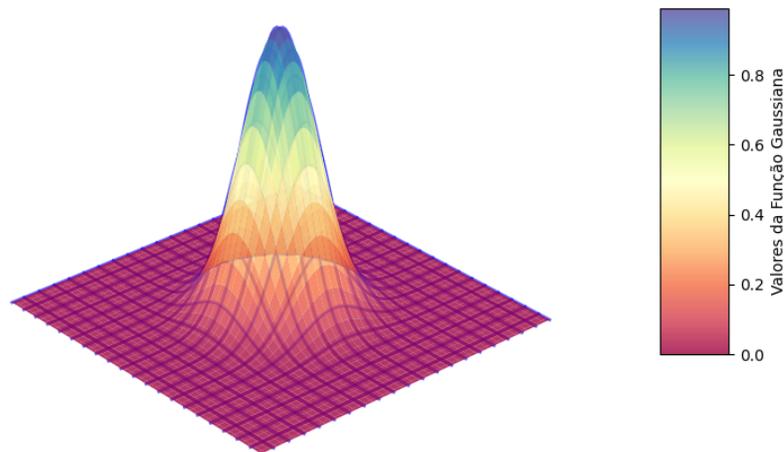


Figura 1.4: Função Gaussiana $K_\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

de fatores como a qualidade do equipamento, as condições de iluminação e o ambiente, introduzindo aleatoriedade e distorção. Entender suas características e saber como suavizá-lo é importante para garantir a qualidade e a precisão das imagens.

A distribuição gaussiana no caso real é uma função $K_\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$K_\sigma(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1.3)$$

e seu gráfico, em \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 está representado, respectivamente, nas figuras 1.3 e 1.4.

A distribuição gaussiana possui dois parâmetros, a média μ , ou seja, onde está centralizada e a variância $\sigma^2 > 0$ que descreve o seu grau de dispersão. Ainda, é comum se

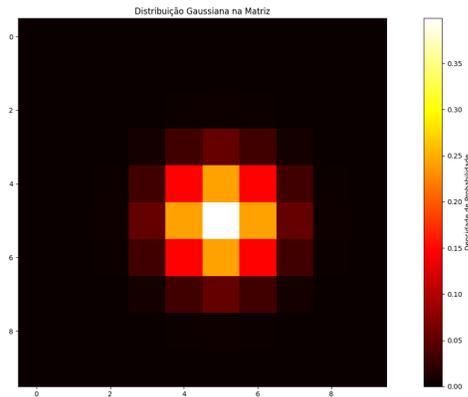


Figura 1.5: Função Gaussiana $K_\sigma : \Omega \rightarrow \Gamma$.

referir à dispersão em termos de unidades padrão, ou seja, o desvio padrão σ que controla a "largura" da curva, com valores maiores resultando em curvas mais largas e valores menores resultando em curvas mais estreitas. Vale destacar que como qualquer outro modelo, dependendo dos parâmetros, teremos diferentes distribuições normais.

A figura 1.4 ilustra a distribuição de valores por meio da escala nas cores de uma função gaussiana na versão espacial definida de forma similar a eq. (1.3). Como se pode observar, os valores, assim como na versão contínua, vão diminuindo à medida que nos afastamos da média. Quando trabalhamos com objetos discretos como matrizes, algo análogo ocorre, como mostrado na figura 1.5. Essa propriedade dos valores diminuindo a medida que nos afastamos do valor central é a propriedade que torna as funções gaussianas tão utilizadas no processamento de sinais em geral.

A distribuição gaussiana é uma ferramenta fundamental em estatística devido ao Teorema Central do Limite, que estabelece que, sob certas condições, a soma ou média de um grande número de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas converge para uma distribuição normal, independentemente da forma da distribuição original dessas variáveis. Esse teorema é essencial para muitos métodos estatísticos. Para um entendimento melhor o leitor pode consultar o Capítulo 7 de [10].

Funções gaussianas são funções que têm a forma de uma distribuição gaussiana, são usadas em estatística, física e engenharia, incluindo análise de sinais, processamento de imagens,

aprendizado de máquina (por exemplo, em redes neurais), entre outros. Essas funções são amplamente utilizadas na modelagem de fenômenos que exibem simetria gaussiana, e as propriedades da gaussiana são exploradas em diversos contextos.

1.4 Filtro Gaussiano

O filtro gaussiano é o caso particular em que tomamos uma função gaussiana que mede a proximidade espacial dos pixels como núcleo da filtragem na eq. (1.1). É uma técnica de Suavização utilizada em processamento de imagens e de sinais para reduzir o ruído e as transições bruscas entre pixels. Ele aplica uma convolução à imagem original com uma função gaussiana, resultando em uma imagem suavizada. Ou seja,

$$\bar{I}_p = \frac{1}{W_p} \sum_{N_p} K_\sigma(p, q) I_q d_q, \forall p \in \Omega \quad (1.4)$$

onde

$$K_\sigma(p, q) = K_\sigma(D(p, q)) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\|p-q\|}{\sigma} \right)^2} \quad (1.5)$$

O parâmetro σ é então quem controla a filtragem, pois define os pesos que são dados na média ponderada a cada pixel q em N_p . A Suavização resultante da aplicação do filtro gaussiano é eficaz para remover ruído de alta frequência, preservando características de baixa frequência na imagem. Além disso, o filtro gaussiano é isotrópico, o que significa que ele suaviza igualmente em todas as direções.

As funções gaussianas são uma boa escolha para serem o núcleo da filtragem devido a sua propriedade bem conhecida de ter valores maiores quando se está próximo da média, e esse valor ir diminuindo à medida que nos afastamos. Quando fazemos a filtragem gaussiana, na verdade estamos fazendo uma média ponderada e normalizada pelos pesos gaussianos do sinal central e seus vizinhos.

Os filtros gaussianos são amplamente utilizados em visão computacional, processamento de imagem, e também são aplicados em diversas áreas onde a Suavização de sinais ou dados é necessária. Eles desempenham um papel crucial em técnicas de pré-processamento e são frequentemente usados como uma etapa inicial em algoritmos de detecção de bordas e segmentação de imagem.

Um filtro clássico amplamente utilizado no processamento de imagens é o filtro mediano, projetado principalmente para reduzir ruídos. Este filtro funciona substituindo o valor de cada pixel na imagem pela mediana dos valores dos pixels em sua vizinhança. Além do filtro mediano, o filtro gaussiano também é frequentemente empregado com o mesmo propósito. Ambos serão utilizados como parâmetros de comparação para avaliar a eficácia do filtro bilateral.

1.5 Filtro Bilateral

O filtro bilateral é uma técnica de filtragem utilizada em processamento de imagens para Suavização enquanto preserva as bordas da imagem. Ele foi projetado para superar as limitações de filtros de Suavização tradicionais, como o filtro gaussiano, que pode eliminar detalhes importantes junto com o ruído. A ideia principal do filtro bilateral é ponderar a contribuição de cada pixel na média ponderada com base em dois fatores: a diferença de similaridade entre o pixel atual e os pixels vizinhos, e a distância espacial entre esses pixels.

O filtro bilateral, como uma tecnologia de média ponderada não linear, é bem conhecida e amplamente utilizado no campo do processamento de sinais. Assumindo que o sinal com ruído é definido no domínio Ω e com valores no domínio Γ , o filtro bilateral para um sinal no caso contínuo $I : \Omega \rightarrow \Gamma$ pode ser escrito como

$$\bar{I}_p = \frac{1}{W_p} \int_{\Omega} K_{\sigma}(D(p, q)) K_{\tau}(D(I_p, I_q)) I_q d_q, \quad \forall p \in \Omega \quad (1.6)$$

onde, \bar{I}_p é o valor do sinal filtrado \bar{I} no ponto p ; I_p é o sinal central e I_q é seu sinal vizinho, eles são os valores do sinal I no ponto p e q respectivamente; $K_{\sigma} : \Omega \times \Omega \rightarrow R$ que atua no domínio e $K_{\tau} : \Gamma \times \Gamma \rightarrow R$ que atua no contra-domínio, são as funções gaussianas não lineares para os pesos espacial e de similaridade, respectivamente; σ e τ são os parâmetros de desvio padrão; $W_p = \int_{\Omega} K_{\sigma}(D(p, q)) K_{\tau}(D(I_p, I_q)) d_q$ é o fator de normalização. A métrica de distância adotada em geral para as função de peso espacial $D(p, q)$ e similaridade $D(I_p, I_q)$ é a distância euclidiana

$$\begin{cases} D(p, q) = \|p - q\| \\ D(I_p, I_q) = \|I_p - I_q\|. \end{cases} \quad (1.7)$$

A ideia é que o filtro bilateral considera pixels próximos tanto na intensidade quanto na posição espacial, atribuindo maior peso a pixels semelhantes e menor peso a pixels diferentes. Ou seja, em um pixel pertencente a uma característica da imagem, seus pixels vizinhos estão espacialmente próximos, o que daria um valor grande na função gaussiana, no entanto, quando as cores destes pixels são muito diferentes, o valor da outra gaussiana é baixo. Assim, ao fazer a multiplicação na convolução isso resulta em um baixo peso na média ponderada. Este filtro permite a Suavização da imagem, mas preserva as características, pois os pixels próximos da borda embora espacialmente próximos, têm cores significativamente diferentes. O filtro bilateral é eficaz para aplicações onde a preservação de detalhes é importante, como em imagens com texturas complexas ou bordas nítidas. No entanto, ele pode ser computacionalmente mais intensivo do que técnicas de Suavização mais simples, como o filtro gaussiano. A eq. (1.6) pode ser discretizada de forma similar a discretização do filtro gaussiano mostrada anteriormente.

A seguir ilustraremos algumas aplicações com o objetivo de discutir apenas umas questões básicas. Embora a aplicação em imagens não seja o foco deste trabalho, nos ajuda a compreender a ação do filtro bilateral e em que contextos ele é indicado, em contraste com o filtros clássicos gaussiano e mediano.

A Figura 1.6 apresenta uma imagem com um nível médio de ruído, o objetivo é que o leitor perceba como o filtro bilateral atua de maneira mais lenta, em comparação com os filtros gaussiano e mediano. Com apenas uma aplicação os filtros gaussiano e mediano reduzem drasticamente a quantidade de ruído, no entanto o resultado é uma imagem mais desfocada, pois perdemos os contornos principais que dão as características da imagem original. O filtro bilateral, no entanto, a primeira vista não apresenta uma grande redução de ruído, mas preserva de forma significativa as principais características da imagem.

Na Figura 1.7 temos uma imagem com um baixo nível de ruído. O objetivo aqui é que o leitor note a eficiência do filtro bilateral que após 10 aplicações está suavizando a imagem original, preservando as principais características, enquanto os filtros gaussiano e mediano estão desfocando cada vez mais a imagem original. Assim, embora nesse contexto você tenha que aplicar o filtro bilateral várias vezes, o resultado é nitidamente melhor.

Com base nos comentários acima que também podem ser observados pelo leitor, o filtro

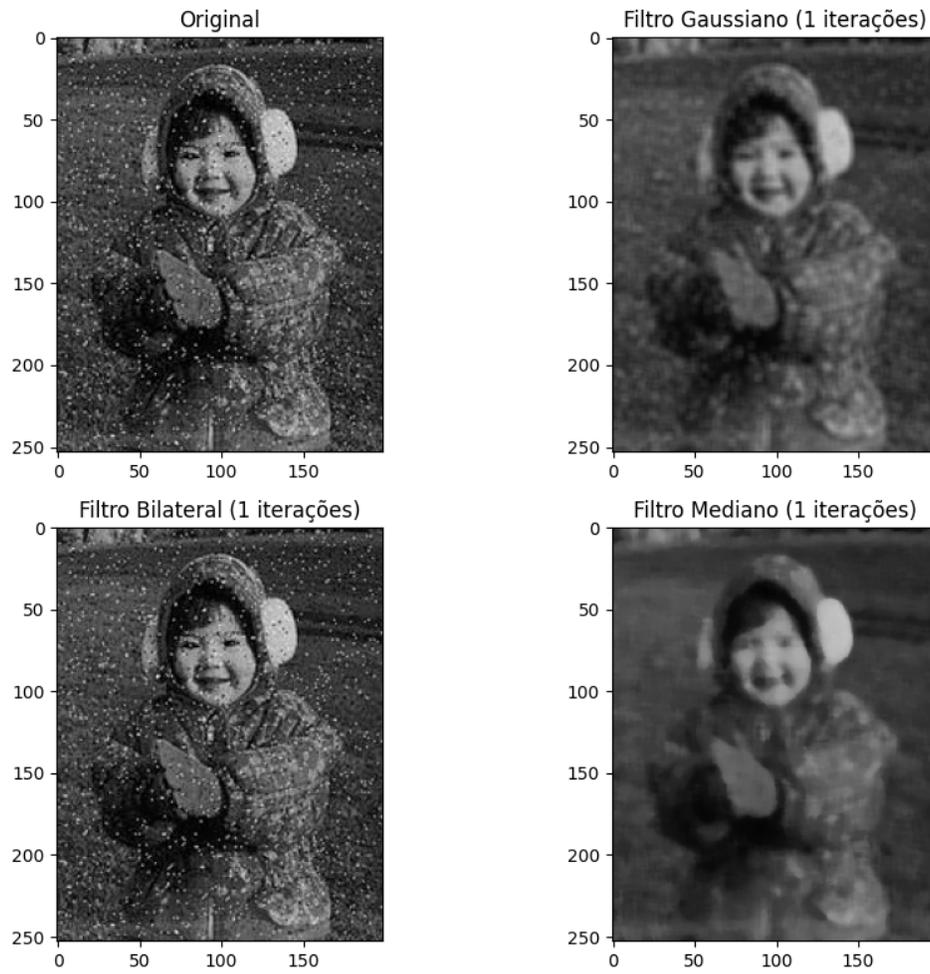


Figura 1.6: Filtros. Imagem original por Neto (1999), as demais pelo autor.

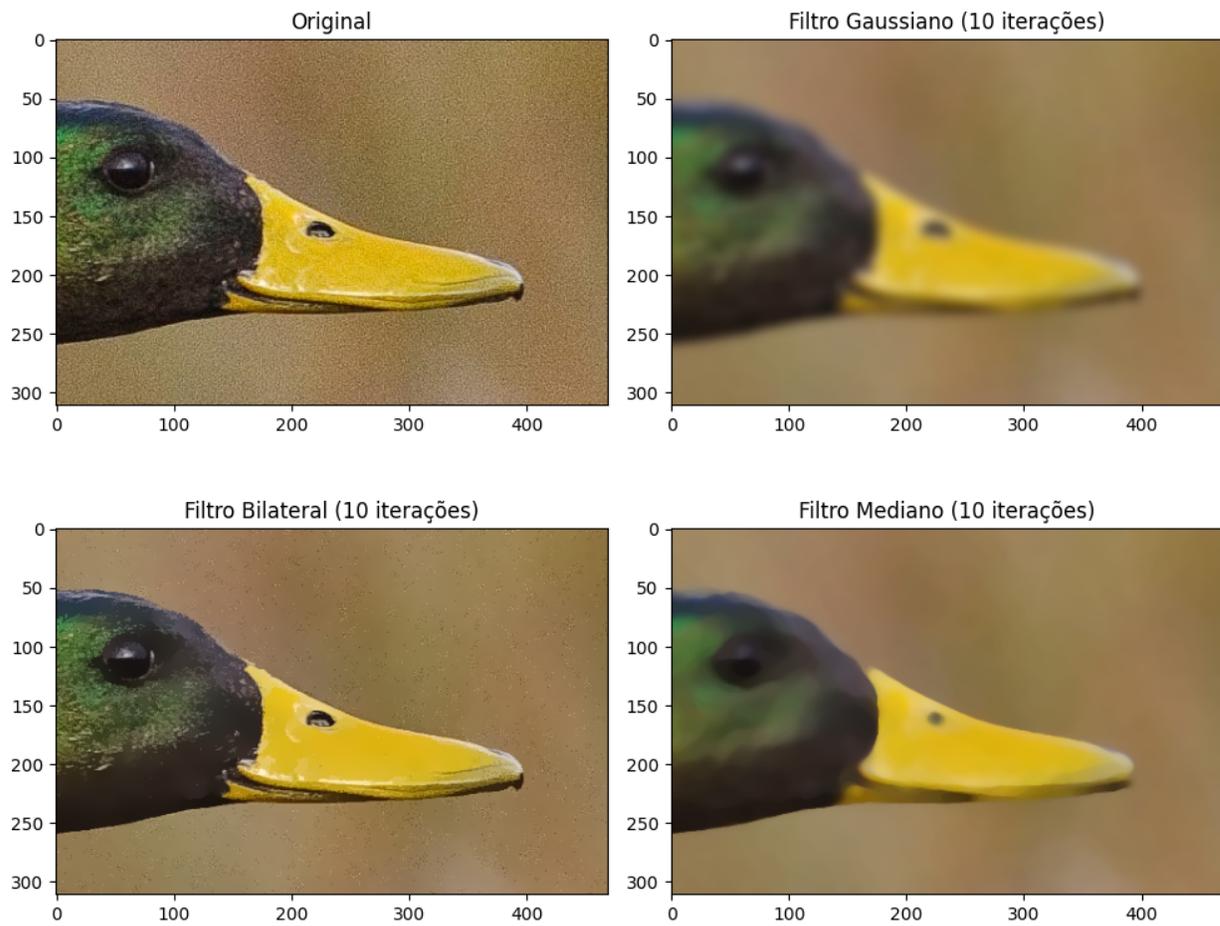


Figura 1.7: Filtros. Imagem original por Kinast (2019), as demais pelo autor.

bilateral não é indicado para casos em que se tem uma imagem original com muito ruído, pois filtros mais simples como o filtro mediano entregam resultados melhores e mais rápidos. Para casos em que a imagem original tem um ruído médio, o filtro bilateral apresenta bons resultados com a observação que terá que ser aplicado mais vezes que os demais. E finalmente, o caso em que o filtro gaussiano é mais indicado, é quando a imagem original tem um baixo nível de ruído. Isso acontece porque, quando se tem uma imagem com pouco ruído, o foco é suavizar esse ruído preservando as principais características da imagem original.

Capítulo 2

Revisão de literatura

Neste capítulo discutimos o estado da arte dos algoritmos de Suavização de malhas. Iniciamos em um contexto mais geral, e depois apresentamos os algoritmos em duas etapas.

2.1 Malhas

As superfícies são comumente representadas por meio de malhas. Os modelos mais complexos são representados por malhas mais densas, ou seja, com um grande número de vértices, arestas e faces para capturar detalhes mais refinados. Por outro lado, modelos mais simples podem ter malhas mais esparsas. A representação usando malhas permite aplicar texturas, iluminação e outras propriedades visuais para tornar o objeto mais realista. Além disso, as malhas são frequentemente manipuladas e transformadas por meio de operações matriciais para animações, visualizações interativas e simulações virtuais.

Conforme definido em [12], um *k-simplexo* é o fecho convexo de $k + 1$ pontos afimemente independentes e um *complexo simplicial* é uma coleção finita \mathcal{K} de simplexos tal que cada face de um simplexo de \mathcal{K} é também um simplexo de \mathcal{K} , e se dois simplexos de \mathcal{K} se intersectam, então ou sua interseção é vazia ou é uma face de ambos. Em resumo, um complexo simplicial é uma coleção de simplexos que encaixam corretamente um no outro, onde as faces compartilhadas por simplexos adjacentes são também simplexos válidos, e a interseção de dois simplexos é uma face comum a ambos ou é vazia.

Definimos uma malha triangular como um complexo simplicial formado por 2-simplexos

(faces triangulares) de tal forma que cada vértice (0-simplexo) e cada aresta (1-simplexo) sempre pertencem a uma face da malha. Além disso, se desejamos que a malha represente uma variedade bidimensional, é necessário que cada ponto desta variedade possua localmente uma vizinhança homeomorfa a um disco. Note que basta verificar esta propriedade apenas nos vértices da malha. No caso de malhas com bordo, aceitamos vizinhança homeomorfa a um semi-disco.

Neste trabalho, utilizamos apenas malhas triangulares. Uma malha é denotada por $M = (V, F)$ onde $V = \{v_i; v_i \in R^3, i = 1, \dots, m\}$ é o conjunto de coordenadas de cada vértice e $F = \{f_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}); v_{i1}, v_{i2}, v_{i3} \in V, i = 1, \dots, n\}$ é o conjunto de faces. O centróide da face f_i é expresso por c_i . A malha dual de M é denotada por G , e cada vértice de G está definido no centróide c_i da face f_i em M .

2.2 Suavização de malhas

A Suavização de malhas, também conhecida como Suavização de superfícies ou Suavização de modelos, é um processo utilizado na computação gráfica para tornar as superfícies de objetos tridimensionais mais suaves e contínuas. Isso é especialmente útil quando se trabalha com modelos ruidosos, resultantes de baixa resolução, erros na aquisição, ou métodos de modelagem. Existem várias técnicas para Suavização de malhas que podem se basear em diferentes elementos da malha, cada uma com suas próprias vantagens e limitações. Algumas das técnicas mais comuns são:

Suavização de vértices: Nesta abordagem, os vértices da malha são movidos para uma posição média ponderada com base na posição dos vértices adjacentes. Isso geralmente é feito através de médias ponderadas ou interpolação de Hermite. Autores como Lorensen e Cline [32] discutem a Suavização de malhas para a construção de superfícies usando o algoritmo Marching Cubes. Greg Turk [39], descreve um método para Suavização de malhas baseada nos vértices. Hugues Hoppe [19], apresenta métodos para suavizar malhas em tempo real com base no ponto de vista do observador. Mario Botsch e Leif Kobbelt [3], discutem algoritmos e técnicas para processamento de malhas poligonais, incluindo redução de ruído. Esses autores oferecem uma variedade de perspectivas e técnicas para a Suavização de malhas baseada em

vértices, abrangendo desde métodos clássicos até abordagens mais recentes.

Suavização das normais: Nesta abordagem, as normais das faces da malha são ajustadas para tornar a malha mais suave. Isso é feito em geral calculando uma média ponderada das normais das faces vizinhas e atribuindo essas médias aos vértices da malha. Autores como Lorensen e Cline introduziram o conceito de Suavização de malhas baseada em médias ponderadas das normais no já citado artigo [32]. Neste trabalho, eles descrevem a técnica de calcular a normal de um vértice da malha como a média ponderada das normais das faces vizinhas. Wang *et. al.* [42] abordam um método de Suavização de malhas que utiliza a minimização L_0 para remover o ruído das malhas. O algoritmo é baseado na Suavização das normais e tem como objetivo preservar características importantes da malha enquanto remove o ruído indesejado. Robin Sibson [35], discute o conceito de interpolação baseada em vizinhos naturais, que pode ser aplicado para Suavização de malhas. Embora não se concentre explicitamente em Suavização de normais, o conceito de interpolação de vizinhos naturais pode ser relevante para essa técnica. Hugues Hoppe [18], descreve uma técnica para simplificação progressiva de malhas, que também pode ser usada para Suavização baseada em normais.

Superfícies de Subdivisão: Nesta abordagem, a malha é subdividida em partes menores, criando mais detalhes e suavizando a superfície. A subdivisão pode ser feita de várias maneiras, como Catmull-Clark, Loop ou Doo-Sabin. Edwin Catmull e Jim Clark são os criadores do algoritmo de subdivisão de superfície conhecido como Catmull-Clark. Seu artigo original, *Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes* [5] é uma referência fundamental nesse campo. Charles Loop que é muito conhecido por suas contribuições para a área de modelagem de superfícies, incluindo o algoritmo de subdivisão de superfície Loop, que pode ser encontrado em [31]. Daniel Doo e Malcolm Sabin criadores do algoritmo de subdivisão de superfície conhecido como Doo-Sabin [11] são uma referência importante. Joe Warren Robinett e Henrik Weimer [43] oferecem uma visão abrangente dos métodos de subdivisão para a modelagem geométrica. Esses autores e trabalhos fornecem uma base sólida para entender os princípios e aplicações da Suavização de malhas baseada em subdivisão de superfície. Vale ressaltar que estes métodos aumentam exponencialmente o número de elementos da malha.

Filtros de redução de ruído: Nesta abordagem, algoritmos de filtragem são aplicados à malha para suavizar. Isso pode incluir filtros como o filtro mediano, filtro laplaciano ou filtro bilateral (utilizados neste trabalho). Autores como Li *et. al.* [28] apresentam um método de filtragem normal, não local e de baixo nível. Um descritor de covariância do retalho para analisar a similaridade entre os retalhos. Em seguida agrupando os vetores normais dos retalhos similares em uma matriz e removendo o ruído da malha como um problema de recuperação matricial. Ju *et. al.* [22] descrevem um método para calcular coordenadas de valor médio em malhas triangulares fechadas, que podem ser usadas para suavizar malhas de forma controlada. Zhong *et. al.* [45] propõem um novo filtro bilateral articular, estimando um campo normal de orientação confiável utilizando análise espectral e minimização L_0 para refinar os retalhos. Gábor Fábrián [14] generalizou o conhecido filtro Savitsky-Golay, projetado para suavizar sinais de medição ruidosos, inicialmente modelos localmente polinomiais, para malhas. Esses autores oferecem algumas perspectivas sobre a Suavização de malhas baseada em filtros.

Suavização baseada em curvas: Nesta abordagem utilizamos curvas ou superfícies adicionais para suavizar a malha. Por exemplo, a Suavização baseada em curvas de Bézier ajusta a malha para seguir uma curva de controle, resultando em uma aparência mais suave. Autores como Hoppe *et. al.* [20] abordam técnicas de Suavização de malhas e sua relação com a Suavização de curvas na reconstrução de superfícies a partir de pontos não organizados. Garland e Heckbert [16] propõem uma abordagem de simplificação de superfície que incorpora Suavização de curvas para preservar características importantes durante o processo de simplificação. Kobbelt e Leif [26] discutem métodos de subdivisão interpolatória que podem ser usados para suavizar malhas de forma eficaz, incorporando técnicas de Suavização de curvas. Levy *et. al.* [27] apresentam um método para geração automática de atlas de textura que envolve a suavização de curvas em malhas para garantir uma boa correspondência de textura. Sumner *et. al.* [36] discutem técnicas de cinemática inversa baseadas em malha, que muitas vezes requerem Suavização de curvas para garantir movimentos fluidos e naturais dos modelos. Esses autores oferecem uma variedade de perspectivas e abordagens diferentes para a Suavização de malhas baseada na Suavização de curvas, cobrindo diferentes aplicações e técnicas específicas.

A escolha da técnica de Suavização depende do tipo de malha, do resultado desejado e dos recursos disponíveis. Em muitos casos, uma combinação de várias técnicas é usada para obter os melhores resultados. A Suavização de malhas é uma etapa importante no processo de modelagem e é amplamente utilizada em diversas aplicações, incluindo animação, jogos, simulação e design de produtos.

2.3 Suavização de duas etapas

Na arquitetura de Suavização de duas etapas, a principal diferença entre a maioria dos métodos está na estratégia escolhida para calcular os pesos entre a face central e suas faces vizinhas durante a filtragem das normais. Podemos dividir essas estratégias nas três categorias a seguir: Métodos Baseados em Filtro, Métodos Baseados no Prior (métodos que utilizam informações prévias ou adicionais da malha) e Métodos Orientados a Dados. Embora esses métodos obtenham bons resultados, seu desempenho depende de parâmetros especificados pelo usuário que devem ser selecionados adequadamente e, muitas vezes, esses parâmetros são difíceis de se entender.

Métodos baseados em filtro: Nesses métodos, os pesos são determinados com base em características dos próprios dados, como a proximidade geométrica das faces vizinhas à face central. Isso pode incluir o uso de filtros de média ponderada ou filtros anisotrópicos, onde os pesos são ajustados de acordo com a direção e a variação dos dados. Autores como Vialaneix e Boubekur [40] propõem uma aproximação separável da filtragem de malha bilateral baseada em uma decomposição local do filtro bidimensional em um produto de dois filtros unidimensionais. A solução explora as direções de curvatura mínima e máxima em cada ponto e demonstra uma aceleração significativa em malhas que variam de milhares a milhões de elementos, permitindo filtragem com preservação de recursos com grande tamanho de suporte em uma variedade de cenários práticos. Liu *et. al.* [29] apresentam um modelo de filtro de malha, que estima o peso entre a face atual e suas vizinhas com base na integral de dois tipos de diferenças normais da face ao longo do caminho geodésico, conectando-as. Portanto, as características proeminentes são melhor preservadas ao remover ruídos ou texturas. Além disso, tendo em vista a esparsidade de grande diferença normal para a maioria

das formas geométricas, utilizam a norma L_1 ao integrar para melhorar ainda mais o filtro. Choudhury e Jack [7] apresentam o filtro trilateral construído a partir de duas formas modificadas do filtro bilateral que suaviza em direção a uma aproximação acentuada e linear por partes que fornece maior Suavização e melhor rejeição de outlier em regiões de alto gradiente com apenas um parâmetro definido pelo usuário, filtra um sinal de entrada em uma única aplicação. Xuequan *et. al.* [33] propõem uma abordagem robusta e eficaz de Suavização de malha que consiste em uma pré-filtragem dos vértices e filtragem mediana das normais antes da atualização das posições dos vértices. Dado um modelo de malha ruidosa de entrada, o método gera um modelo de alta qualidade que preserva as características geométricas. A abordagem é robusta com modelos com diferentes níveis de ruído e pode lidar com modelos de superfície irregular.

Métodos Baseados no Prior: Nesta abordagem, os pesos são determinados com base em informações adicionais ou prévias sobre os dados, como a distribuição estatística das normais das faces. Esses métodos podem usar conhecimento prévio sobre o tipo de ruído esperado ou sobre a estrutura da superfície para ajustar os pesos de filtragem. Autores como Kazhdan *et. al.* [25] apresentam um método para reconstrução de superfícies baseado em uma abordagem de otimização de Poisson, que é eficaz na reconstrução de objetos suaves a partir de nuvens de pontos. Kalogerakis e Hertzmann [23] exploram técnicas de aprendizado para segmentação e rotulagem de malhas, o que pode ser visto como um tipo de Suavização que utiliza informações adicionais sobre a estrutura da malha para melhorar a qualidade da segmentação. Kavan *et. al.* [24] propõem uma técnica de interpolação para animação de personagens baseada em quaternions duplos aproximados, que leva em consideração a geometria da malha para obter animações mais suaves. Chen *et. al.* [6] propõem uma abordagem para amostragem de texturas baseada em ruído bilateral, que leva em consideração informações espaciais e de frequência para melhorar a qualidade da amostragem.

Métodos Orientados a Dados: Esses métodos levam em consideração não apenas as características locais das faces, mas também informações globais ou contextuais sobre o conjunto de dados. Isso pode incluir abordagens de aprendizado de máquina, onde os pesos são determinados com base em características extraídas dos dados de entrada ou em padrões identificados durante o treinamento de um modelo. Autores como Dai *et. al.* [8] abordam o problema de

completar formas 3D incompletas usando redes neurais convolucionais, demonstrando uma abordagem orientada a dados para a reconstrução de formas. Gadelha e Zickler [15] propõem redes neurais baseadas em árvores multirresolução para processamento de nuvens de pontos, oferecendo uma abordagem eficaz e escalável para lidar com dados tridimensionais. Wang *et. al.* [41] apresentam uma abordagem baseada em dados para a Suavização com funções de regressão não-linear em cascata, desenvolvendo um descritor normal da face filtrada (FND) para modelar as características geométricas em torno de cada face na malha ruidosa e criando uma função de regressão utilizando redes neurais para mapear as FNDs das faces normais da malha suavizada. Para lidar com malhas de diferentes características geométricas e reduzir a dificuldade de treinamento, agrupam as faces da malha de entrada de acordo com seus FNDs e treinam redes neurais para cada cluster separadamente em um estágio de aprendizado offline. Achlioptas *et. al* [1] os autores exploram a aprendizagem de representações e modelos generativos para nuvens de pontos, demonstrando avanços significativos na modelagem de dados tridimensionais. Zeng *et. al* [44] propõem um método para estimativa de normais de superfície usando fusão hierárquica de dados RGB-D, oferecendo uma abordagem orientada a dados para a estimativa precisa de normais em ambientes 3D.

Capítulo 3

Filtro Bilateral em malhas

Neste capítulo fazemos um estudo aprofundado do algoritmo de Suavização de malhas em duas etapas proposto por Liu *et. al.* [30] para uma malha ruidosa de entrada M . Primeiro abordamos a aplicação do filtro bilateral ao campo normal unitário da malha (primeira etapa), em seguida introduzimos o fluxo da curvatura média e mostramos sua aplicação na atualização das posições dos vértices (segunda etapa).

3.1 Primeira Etapa

A aplicação do filtro bilateral ao campo normal de uma malha é uma estratégia comum em algoritmos de Suavização de duas etapas para preservar detalhes importantes, especialmente nas regiões onde ocorrem mudanças significativas na orientação dos vetores normais. A seguir destacamos algumas razões para a importância dessa abordagem:

Função de Peso Bilateral: A função de peso do filtro bilateral agora considera a proximidade espacial e a semelhança nos vetores normais. A distância geodésica entre pontos é levada em conta para a componente espacial, enquanto a diferença nos vetores normais é considerada para manter a orientação.

Suavização do Campo Normal: O filtro bilateral é aplicado ao campo normal da malha usando os pesos definidos anteriormente. Isso resulta em uma Suavização que preserva melhor os detalhes de orientação.

Preservação de Bordas: O filtro bilateral considera a diferença nos vetores normais, ga-

rantindo que as mudanças abruptas na orientação (como bordas) sejam preservadas. Isso é crucial para manter a aparência detalhada da malha.

Adaptação à Variação Local na Orientação: A aplicação do filtro bilateral ao campo normal leva em consideração a variação local nos vetores normais, adaptando-se a mudanças rápidas na orientação da malha.

Redução de Artefatos em Superfícies Curvas: Superfícies curvas podem ser preservadas de maneira mais eficaz com a aplicação do filtro bilateral, minimizando artefatos que podem ocorrer em métodos de Suavização que não consideram a orientação.

Controle Sobre a redução de ruído: A utilização do filtro bilateral oferece um maior controle sobre o processo de redução de ruído, permitindo ajustar a influência da proximidade espacial e da diferença nos vetores normais de acordo com a necessidade específica da aplicação.

Assumindo que o vetor normal n_i da face f_i é definida no vértice c_i da malha dual G , podemos adaptar a eq. (1.6) para filtrar o campo normal da malha M .

$$\bar{I}_p = \frac{1}{W_p} \int_M K_\sigma(D(p, q)) K_\tau(D(n_p, n_q)) I_q d_q, \quad \forall p \in M$$

onde d_q é o elemento de área da malha.

Ao passar de imagens para malhas foram necessários alguns ajustes, o pixel p vai corresponder ao vértice c_i da malha dual G , I_p que antes correspondia a cor do pixel p agora passa a ser n_i , o vetor normal da face f_i definida no vértice c_i . Similarmente, q e c_j correspondendo com I_q e n_j respectivamente. O fator de normalização W_p continua sendo o somatório do produto dos pesos $W_p = \sum_{f_j \in N_i} K_\sigma(D(c_i, c_j)) K_\tau(D(n_i, n_j))$. A nova normal filtrada de f_i pode ser calculada por

$$\bar{n}_i = \frac{1}{W_i} \sum_{f_j \in N_i} K_\sigma(D(c_i, c_j)) K_\tau(D(n_i, n_j)) \cdot n_j, \quad \forall f_i \in F \quad (3.1)$$

onde, N_i é o conjunto de faces do retalho de f_i , que é uma vizinhança geométrica formada pelas faces nas quais os seus centróides estão a uma distância menor que um raio r do centro da face f_i conforme definido em [21], o retalho que elas determinam é denotado por Ω_i ; o parâmetro τ_i relacionado ao retalho Ω_i é o desvio padrão do retalho.

Neste ponto temos os primeiros comentários sobre as mudanças propostas por [30]. Anteriormente as distâncias usadas no cálculo dos das funções gaussianas de peso espacial e

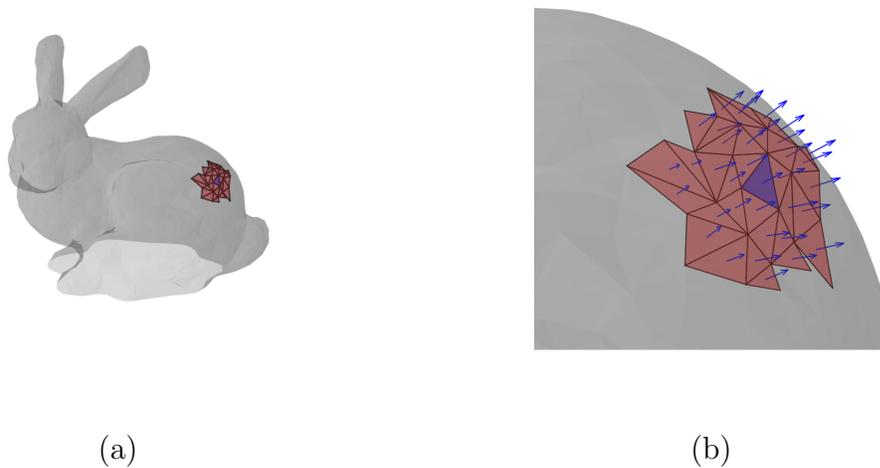


Figura 3.1: Um retalho no modelo do Bunny (a), e detalhe mostrando os vetores normais às faces (b). O retalho corresponde à face destacada em azul.

de similaridade eram feitas usando a distância euclidina. No entanto, como será comentado mais adiante, usar a distância geodésica na malha dual G trás mais benefícios. A métrica de distância dos pesos das funções gaussianas neste trabalho é tomada nesta forma

$$\begin{cases} D(c_i, c_j) = \int_L ds \\ D(n_i, n_j) = \int_L g(x) ds \end{cases} \quad (3.2)$$

onde, L é o caminho geodésico que conecta c_i e seu vizinho c_j em N_i na malha dual G , e $g(x)$ é o gradiente da normal ao longo de L . Nossa estratégia de peso usa o componente integral de diferenças de características no retalho Ω_i . Portanto, nosso filtro respeita a estrutura espacial do próprio sinal e é mais razoável para filtragem normal da malha.

Após a discretização, a eq. (3.2) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} D(c_i, c_j) = \sum_{k=0}^{k-1} \|c_{k+1} - c_k\|_2, \\ D(n_i, n_j) = \sum_{k=0}^{k-1} \|n_{k+1} - n_k\|_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

onde, $\{c_0 = c_i, c_1, \dots, c_k = c_j\}$ é uma amostragem definida ao longo do caminho L , que pode ser especificado pelos vértices na malha G ; e $\{n_0 = n_i, n_1, \dots, n_k = n_j\}$ são as normais das faces definidas nos vértices de amostragem. Esse é o primeiro tópico onde foram introduzidas mudanças, pois, as propostas anteriores eram baseadas totalmente na distância euclidiana.

Ao aplicar o filtro bilateral, é crucial considerar as distâncias geodésicas no cálculo dos pesos das funções gaussianas. A importância dessa abordagem se dá por conta dos motivos a seguir:

Preservação de características locais: A Suavização de malhas visa reduzir a aspereza dos dados, mas é essencial preservar características locais, como bordas e detalhes importantes. Utilizar distâncias geodésicas nas funções gaussianas permite que o filtro bilateral leve em conta a topologia da malha, mantendo a Suavização principalmente em regiões próximas, enquanto preserva bordas e detalhes.

Adaptação à geometria da malha: A distância geodésica leva em consideração a geometria intrínseca da malha, medindo a distância ao longo da superfície em vez da distância euclidiana. Isso é particularmente crucial em malhas tridimensionais, onde a topologia pode ser complexa. A adaptação à geometria da malha ajuda a evitar a distorção desnecessária durante a redução de ruído, obtendo um resultado mais natural e visualmente melhor.

Manutenção da conectividade: Distâncias geodésicas são sensíveis à conectividade entre pontos na malha. Ao incorporar essas distâncias nos pesos das funções gaussianas, o filtro bilateral garante que pontos conectados na malha tenham mais influência uns sobre os outros durante o processo de redução de ruído. Isso é fundamental para manter a integridade estrutural da malha, evitando descontinuidades indesejadas.

Redução de artefatos: Utilizar distâncias geodésicas ajuda a minimizar artefatos que poderiam ocorrer se apenas distâncias euclidianas fossem consideradas. Esses artefatos podem incluir alongamento indesejado de regiões ou Suavização excessiva em áreas críticas. A incorporação das distâncias geodésicas contribui para uma Suavização mais controlada e precisa.

Em resumo, a aplicação de distâncias geodésicas no cálculo dos pesos das funções gaussianas no filtro bilateral é crucial para garantir uma Suavização eficaz e ao mesmo tempo preservar as características importantes da malha tridimensional. Essa abordagem leva em consideração a geometria intrínseca da malha, mantendo a conectividade e minimizando artefatos, resultando em resultados visuais mais satisfatórios.

3.2 Fluxo da Curvatura Média

O fluxo da curvatura média é uma técnica utilizada em geometria diferencial discreta e processamento de malhas para suavizar superfícies. Em particular, é frequentemente aplicado a malhas triangulares para reduzir a rugosidade da superfície e melhorar a regularidade. A curvatura média em um ponto de uma superfície é uma medida da curvatura local nesse ponto. O fluxo da curvatura média atua movendo cada ponto da malha de acordo com a média ponderada das curvaturas médias em seus vizinhos. Esse processo ajuda a nivelar superfícies e aprimorar a qualidade estética e topológica da malha.

O fluxo da curvatura média é geralmente formulado como uma equação diferencial parcial (EDP) que governa a evolução temporal dos pontos da malha. A forma geral da equação é:

$$\frac{dX}{dt} = -H \cdot N \quad (3.4)$$

onde X é a posição do ponto na malha, t é o tempo, H é a curvatura média no ponto e N é a normal à superfície naquele ponto. Essa equação indica que cada ponto se move na direção oposta à sua curvatura média, resultando em uma Suavização ao longo do tempo. O processo de Suavização usando o fluxo da curvatura média é iterativo. Em cada iteração, os pontos da malha são atualizados de acordo com a equação acima. O processo continua até que a malha alcance uma Suavização desejada ou um número fixo de iterações. É importante notar que o fluxo da curvatura média pode ter algumas limitações, como a possibilidade de perda de detalhes finos ou a introdução de artefatos indesejados. Portanto, a escolha do método de Suavização depende dos requisitos específicos da aplicação.

A discretização desta equação é necessária para implementar um método numérico que possa ser aplicado a uma malha. Vamos considerar uma discretização simples usando métodos de diferenças finitas em uma malha triangular:

$$X_i^{t+1} = X_i^t - \Delta t \cdot H_i^t \cdot N_i^t \quad (3.5)$$

onde X_i^{t+1} é a posição, H_i^t é a curvatura média, N_i^t é o vetor normal unitário, todos do vértice i no tempo t e Δt é o passo no tempo. A discretização do fluxo da curvatura média é comumente usada em algoritmos de Suavização de malhas para manter a fidelidade geométrica enquanto reduz irregularidades na superfície. Métodos numéricos avançados, como esquemas

de diferenças finitas adaptativas ou métodos de elementos finitos, podem ser aplicados para melhorar a precisão e a eficácia da discretização em contextos mais complexos.

Conforme mostrado em [17], a curvatura média discreta em um vértice v_i da malha pode ser calculado pela equação:

$$2\mathbf{H}_i = \sum_{v_j \in \Lambda_i} \rho_j \cdot (v_j - v_i) \quad (3.6)$$

onde Λ_i é o conjunto de vértices na 1-vizinhança de v_i e ρ_j é o peso cotangente definido por:

$$\rho_j = \sum_{v_j \in \Lambda_i} (\cot \alpha_j + \cot \beta_j) \quad (3.7)$$

onde α_j e β_j são os ângulos opostos à aresta $v_j v_i$ nos dois triângulos incidentes.

3.3 Segunda Etapa

Após a primeira etapa, as posições dos vértices precisam ser atualizadas para corresponder às novas normais filtradas. A maioria dos métodos são baseados na média das projeções do vértice v_i aos planos vizinhos correspondentes às novas normais, filtradas na primeira etapa. Denotemos por Γ_i o conjunto de faces triangulares que incidem no vértice v_i , teremos:

$$\bar{v}_i = v_i + \frac{1}{|\Gamma_i|} \sum_{f_j \in \Gamma_i} \langle \bar{n}_j, c_j - v_i \rangle \bar{n}_j, \quad (3.8)$$

No entanto, também é importante levar em consideração a área da face f_j para garantir mais influência na média das faces com maior área, assim ponderando a média pelas áreas das faces, temos a expressão proposta por [37]:

$$\bar{v}_i = v_i + \frac{1}{\sum_{f_j \in \Gamma_i} A_j} \sum_{f_j \in \Gamma_i} A_j \langle \bar{n}_j, c_j - v_i \rangle \bar{n}_j, \quad (3.9)$$

onde, A_j é a área do triângulo f_j . A eq. (3.9) implica que o vértice atualizado \bar{v}_i é a média ponderada por área das projeções do vértice v_i nos planos modificados cujas faces triangulares originais têm esse vértice em comum. Esse método, apesar de muito eficiente para atualização das posições dos vértices, pode causar inversões de triângulos e problemas topológicos na malha.

Neste trabalho, vamos abordar uma nova estratégia de atualização dos vértices [30] baseada também no fluxo da curvatura média, que pode evitar efetivamente a inversão de

triângulos. Por um lado, o fluxo da curvatura média suaviza a superfície movendo-a na direção da normal à superfície com uma velocidade igual à curvatura média, por outro, a estratégia proposta por [37] suaviza baseada em uma média ponderada das projeções nas direções das novas normais.

A partir de (3.6) vamos definir neste trabalho a *coordenada diferencial* do vértice v_i (uma variação da curvatura média \mathbf{H}) no caso discreto como

$$\delta_i = \frac{1}{\sum_{v_j \in \Lambda_i} \rho_j} \sum_{v_j \in \Lambda_i} \rho_j \cdot (v_j - v_i) \quad (3.10)$$

onde, ρ_j é o peso cotangente e Λ_i é o conjunto de vértices na 1-vizinhança de v_i . De acordo com o fluxo da curvatura média, a normal do vértice é oposta à direção da coordenada diferencial do vértice. Portanto, atualizando a coordenada do vértice ao longo da direção da coordenada diferencial pode-se restaurar uma malha fazendo com que o número de dobras de normais da face seja o mínimo possível.

Denotamos por

$$\eta_i = \frac{1}{\sum_{f_j \in \Gamma_i} A_j} \sum_{f_j \in \Gamma_i} A_j \cdot \langle \bar{n}_j, c_j - v_i \rangle \bar{n}_j, \quad (3.11)$$

e a nova posição do vértice é ajustada para

$$\bar{v}_i = v_i + \lambda \frac{\langle \eta_i, \delta_i \rangle}{\|\delta_i\|_2} \cdot \frac{\delta_i}{\|\delta_i\|_2} + (1 - \lambda)\eta_i. \quad (3.12)$$

Desta forma, a atualização da posição do vértice corresponde a uma combinação linear entre a direção dada pelas novas normais e a direção da coordenada diferencial do vértice controlada pelo parâmetro $\lambda \in [0, 1]$. Quando $\lambda = 0$ temos a maneira tradicional [37] de atualização do vértice, quando $\lambda = 1$ estamos suavizando a superfície evoluindo-a na direção da curvatura média, de forma similar a [9]. Neste trabalho, tomamos $\lambda = 0.5$ dando pesos iguais a ambas as formas na atualização das posições dos vértices.

3.4 Parâmetros Adaptativos

Nesta seção abordamos a definição dos parâmetros adaptativos, que são usados na primeira etapa para filtrar as normais das faces, uma vez que eles controlam de fato a Suavização da malha. Primeiro definiremos o parâmetro de peso espacial σ , em seguida trataremos sobre

os assuntos referentes a definição do parâmetro de peso de similaridade τ entre as normais das faces da malha.

A fim de obter resultados satisfatórios de redução de ruído, muitos algoritmos de filtragem de malhas que se baseiam na distribuição gaussiana precisam ajustar manualmente os parâmetros gaussianos de desvio padrão. Apresentamos uma estratégia que pode ser ajustada automaticamente durante cada iteração, retirando a recorrência de tentativa e erro, dependente da experiência do usuário, para se obter resultados satisfatórios.

Em resumo, a adaptabilidade dos parâmetros da filtragem bilateral em malhas é fundamental para garantir que o filtro seja eficaz em preservar detalhes importantes enquanto suaviza a malha de forma adequada. Essa adaptação pode ser realizada com base em características intrínsecas da malha. Apresentamos a seguir duas possibilidades que se mostraram escolhas eficientes conforme mostrado por [30].

3.4.1 Parâmetro de Peso Espacial Adaptativo

σ **Adaptativo.** O parâmetro de peso espacial σ é responsável por definir os pesos de cada vértice na vizinhança, baseando-se na distância entre esse vértice vizinho e o vértice central. Definimos σ da seguinte forma:

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{\sum_{(i,j) \in \varphi} D(c_i, c_j)}{|\varphi|} \quad (3.13)$$

onde $\varphi = \{(i, j) \in F \text{ tal que } f_i \text{ e } f_j \text{ são adjacentes}\}$; $|\cdot|$ denota a cardinalidade do conjunto. Este parâmetro σ será recalculado após cada iteração. Por ser uma medida global, esta estratégia adapta-se a cada malha, podendo fornecer melhores resultados, especialmente em malhas com amostragens não uniformes.

3.4.2 Parâmetro de Peso de Similaridade Adaptativo

τ_i **Adaptativo.** O parâmetro τ_i é relativo à distribuição e diferença das normais às faces no retalho Ω_i . Na teoria da informação e estatísticas de probabilidade, a entropia é uma medida do nível de variáveis transtorno. Portanto, pode refletir a intensidade do ruído quando o retalho da superfície está corrompido. Por outro lado, a distribuição das normais das faces no retalho podem refletir a estrutura do retalho, como uma região plana ou recurso

de borda. Assim, vamos basear o parâmetro em uma média geométrica entre a entropia do retalho e a diferença média das normais do retalho.

Entropia das normais das faces do retalho. A entropia das normais em um retalho da malha refere-se à variabilidade ou à uniformidade das direções desses vetores normais dentro de uma região específica da malha. Em termos simples, quanto mais as normais mudam de direção dentro de um retalho, maior é a entropia. Para calcular a entropia do retalho primeiro obtemos o histograma de frequência da distribuição das normais às faces no retalho Ω_i , então a entropia normalizada das normais às faces no retalho pode ser calculada por

$$a_i = \frac{1}{\log H^3} \sum_{j=1}^{H^3} p_j \log p_j. \quad (3.14)$$

Aqui, p_j é a probabilidade de cada caixa no histograma e H^3 é o número de caixas. Como a entropia é limitada por $[0, \log H^3]$, usamos um multiplicador escalar $\frac{1}{\log H^3}$ na eq. (3.13) para normalizar a entropia do retalho. Através de experimentação, foi determinado que resultados satisfatórios podem ser obtidos quando H é ajustado para 10. Em resumo, a entropia das normais em um retalho da malha fornece informações valiosas sobre a estrutura local da superfície e pode ser utilizada em uma variedade de aplicações relacionadas à renderização gráfica, processamento de malhas e análise de dados geométricos.

Diferença das normais das faces do retalho. A diferença média das normais das faces em um retalho é essencialmente uma medida da suavidade ou rugosidade da superfície dentro dessa região. Se as normais das faces forem consistentes e não variarem muito, isso indicaria uma superfície suave. Por outro lado, se houver uma grande variação nas normais das faces, isso indicaria uma superfície mais irregular ou rugosa. A diferença das normais das faces do retalho pode ser definida como

$$b_i = \frac{1}{2} \frac{\sum_{f_j \in \Omega_i} \|n_i - n_j\|_2}{|\Omega_i|} \quad (3.15)$$

onde, $|\cdot|$ denota a cardinalidade de um conjunto, ou seja, o número de faces do retalho. Note que, semelhante à eq. (3.12), b_i também é normalizado para $[0, 1]$ multiplicando a média por $\frac{1}{2}$. Essa medida de suavidade pode ser útil em várias aplicações, como na renderização de gráficos 3D, onde a suavidade da superfície afeta a aparência visual, ou na análise de superfícies em

campos como visão computacional ou processamento de imagens, onde a suavidade pode ser um indicador importante para determinar características da superfície.

Em geral, quando o retalho Ω_i está corrompido, um grande τ_i é tomado para remover o ruído; quando o retalho Ω_i tende a ser suave, um pequeno τ_i é útil para manter as características geométricas. Portanto, τ_i deve ser uma função monotonicamente crescente das variáveis a_i e b_i , dada por

$$\tau_i = \sqrt{a_i b_i} \quad (3.16)$$

Muitos experimentos [30] mostram que essa função é uma boa escolha para a maioria das malhas.

Algoritmo: Suavização de malhas usando filtro bilateral adaptativo.

Entrada: Malha com ruído M , número de filtragens do campo normal (K_N) e o número de atualizações dos vértices (K_V).

for $k_n = 1, \dots, K_N$ **do**

 Cálculo das distâncias geodésicas na malha.

 Cálculo do gráfico dual G .

 Cálculo do parâmetro σ adaptativo.

 Cálculo do retalhos Ω_i .

 Cálculo dos parâmetros τ_i adaptativos pela equação (3.15).

 Filtragem bilateral das normais às faces da malha pela equação (3.1).

for $k_v = 1, \dots, K_V$ **do**

for $i = 1, \dots$, número de vértices **do**

for $j \in \Lambda_i$ **do**

 Cálculo de η_i pela equação (3.11).

 Cálculo de δ_i pela equação (3.10).

 Cálculo de \bar{v}_i pela equação (3.12).

end for

end for

end for

end for

Saída: Malha filtrada \bar{M} .

Capítulo 4

Resultados e discussões

O objetivo neste capítulo é apresentar e discutir resultados provenientes de uma implementação feita pelo autor, do algoritmo de Suavização de malhas em duas etapas apresentado neste trabalho. A Suavização de malhas é uma técnica fundamental em diversos campos da computação gráfica, como modelagem, renderização e simulação física. A qualidade da malha resultante desempenha um papel crucial na representação precisa de objetos tridimensionais, afetando diretamente a visualização e a interação com o ambiente virtual.

Neste contexto, este capítulo se concentra em avaliar os efeitos da Suavização de malhas em termos de qualidade visual, precisão geométrica e eficiência computacional. Serão apresentados resultados, demonstrando a capacidade do algoritmo em preservar características importantes da malha original enquanto suaviza imperfeições e irregularidades.

Além disso, serão discutidas questões relacionadas à robustez do algoritmo em diferentes cenários, sua adaptabilidade a diferentes tipos de malhas e a influência de parâmetros específicos no processo de redução de ruído. Por meio dessas análises, tentamos nos aprofundar na compreensão do desempenho e das limitações do algoritmo, bem como possíveis direções para futuras melhorias e aplicações práticas. onde σ é calculado da forma mostrada na seção 3.4.1 do capítulo 3.



Figura 4.1: Efeito de K_N e K_V no número de iterações necessárias para atingir resultados similares. Modelos usados, de cima para baixo: FanDisk, Bunny e Bimba.

4.1 Análise do número de iterações

O desafio central na Suavização de malhas reside no balanceamento entre a eficiência do algoritmo e a preservação das características essenciais da malha, por isso, a análise da quantidade de iterações necessárias para alcançar uma Suavização eficiente e a escolha dos parâmetros adequados são aspectos cruciais. Na segunda coluna da figura 4.1 temos inicialmente o algoritmo sendo implementado com $K_N = 1$ e $K_V = 1$, ou seja, a cada filtragem das normais, atualizamos uma vez as posições dos vértices. Essa abordagem apesar de ser claramente eficiente, requer uma quantidade maior de filtrações do campo normal. Isso porque apenas uma atualização das posições dos vértices, para cada filtragem das normais, não é o mais eficiente.

Já na terceira coluna da figura 4.1 apresentamos o resultado do algoritmo implementado com $K_N = 25$ e $K_V = 10$, requerindo apenas 6 iterações para atingir resultados similares à abordagem anterior, que precisou de 30 iterações. Estes valores de K_N e K_V , originalmente propostos por Liu et. al. [30], são mais indicados porque cada vez que filtramos o campo normal, reposicionamos os vértices com base em uma média ponderada. Assim, para que esses vértices correspondam melhor às novas normais filtradas é necessário atualizar as posições dos vértices várias vezes, resultando em um número menor de aplicações do algoritmo de Suavização para se obter bons resultados. No entanto, conforme pode ser observado pelo leitor e verificado durante os testes, é possível obter bons resultados de ambas as formas.

Um problema recorrente na Suavização de malhas é o excesso de iterações, que pode resultar na perda das características da malha. Isto pode ser observado na figura 4.2, na qual as malhas *fandisk* e *bunny* rodaram 80 e 30 iterações, respectivamente, usando $K_N = 25$ e $K_V = 10$. Já o modelo da *Bimba* rodou 40 iterações com $K_N = K_V = 1$. Como era de se esperar, pois é comum na Suavização de malhas, mesmo algoritmos que preservam as características, se aplicado um número excessivo de vezes, pode suavizar demais.

4.2 Análise da preservação de características

O filtro laplaciano é uma técnica de suavização que opera iterativamente ajustando a posição de cada vértice para ser a média das posições de seus vértices vizinhos. Essa técnica

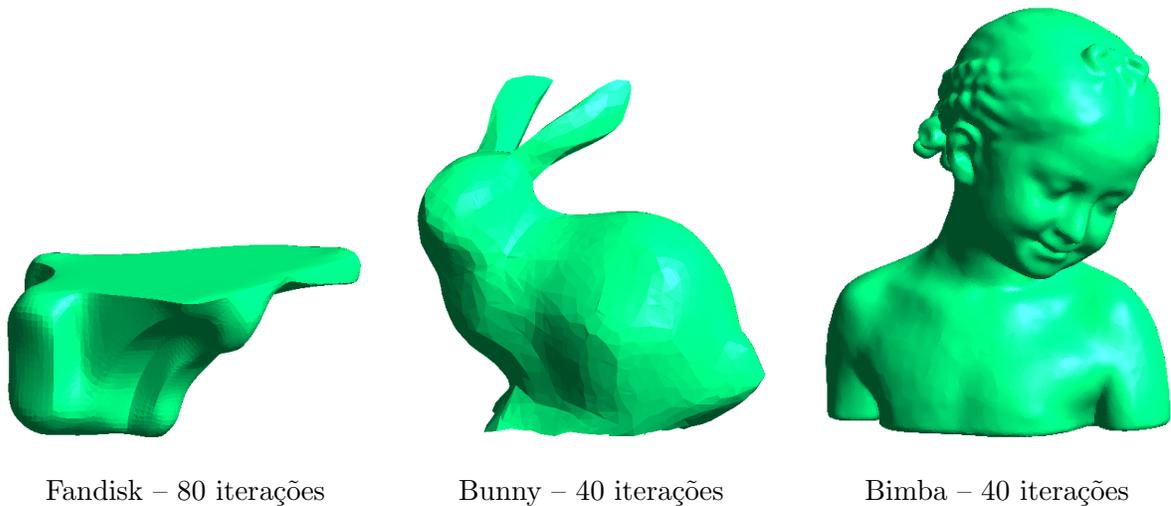


Figura 4.2: Suavização das malhas após um número excessivo de iterações.

é conhecida por ser simples e eficaz para remover ruído de alta frequência, resultando em uma suavização da malha. No entanto, o filtro laplaciano tende a causar encolhimento da malha e pode não preservar bem características de alta frequência, como arestas afiadas e detalhes finos.

A suavização Taubin é uma extensão do filtro laplaciano que visa minimizar o problema de encolhimento da malha. Esta técnica usa uma combinação de operações de suavização com diferentes pesos, aplicadas de forma alternada, para alcançar uma suavização mais uniforme sem alterar significativamente o volume da malha. Taubin utiliza uma sequência de filtragem laplaciana positiva e negativa, o que ajuda a preservar características importantes da malha, como detalhes finos e arestas afiadas, melhor do que a suavização laplaciana simples.

As duas técnicas amplamente utilizadas na literatura para a suavização e preservação de características em malhas são o filtro laplaciano e a suavização Taubin. Juntamente com o algoritmo de suavização estudado neste trabalho, cada uma dessas técnicas possui abordagens e características distintas que influenciam diretamente o resultado final da malha suavizada.

Conforme pode ser observado nas figuras 4.3 e 4.4, a abordagem proposta neste trabalho, em contraste com o filtro laplaciano e a suavização Taubin, apresenta um alto desempenho na preservação das características geométricas da malha. Isso é especialmente evidente na malha Fandisk, que possui arestas e contornos bem definidos. Essas características tendem a se deteriorar à medida que o número de iterações aumenta, mas a técnica proposta mantém

esses detalhes de forma mais eficaz.

4.3 Análise do parâmetro espacial σ

O parâmetro espacial σ é definido de forma simples como a distância média entre as centróides de faces adjacentes em toda a malha. Essa definição já se adapta automaticamente à malha de entrada e, por ser um parâmetro global do algoritmo, varia muito pouco ao longo das iterações, mesmo após as atualizações dos vértices. Isso pode ser observado na tabela 4.1, onde mostramos o valor máximo e mínimo dos valores dos pesos espaciais para os modelos do Bunny e Fandisk, calculados durante 100 iterações em cada modelo. A última coluna da tabela ainda mostra a diferença entre os valores máximos e mínimos de cada modelo. Portanto, é possível calcular σ apenas uma vez no início do algoritmo e manter seu valor fixo, conforme sugerido em [30]. Embora recalculá-lo a cada iteração não seja computacionalmente caro, essa abordagem torna o algoritmo mais eficiente.

Modelo	Mínimo	Máximo	Diferença
Bunny	0.385555056778739	0.407651385138211	0.022096328359472
Fandisk	0.0582853890850734	0.0612093131295463	0.0029239240444729

Tabela 4.1: Peso espacial máximo e mínimo após 100 iterações.

4.4 Análise do parâmetro de similaridade τ

O parâmetro de similaridade τ é fundamental para o controle da filtragem bilateral do campo normal da malha. Por isso, é natural que ele seja ajustado localmente, assumindo valores diferentes para cada região da malha. Em áreas suaves, τ deve ter um valor pequeno para preservar as características detalhadas, enquanto em regiões ruidosas, um valor maior é necessário para promover a redução de ruído. Essas informações locais sobre a malha em cada região foram discutidas no capítulo 3, onde se destacaram as estratégias para a determinação adequada de τ .

Como podemos observar na figura 4.5, tanto a diferença média das normais nos retalhos



Figura 4.3: Resultados após 6 iterações, da esquerda para direita: Nossa Abordagem (NA), Filtro Laplaciano (FL) e Suavização Taubin (ST). Modelos usados, de cima para baixo: Fandisk, Bunny e Bimba.

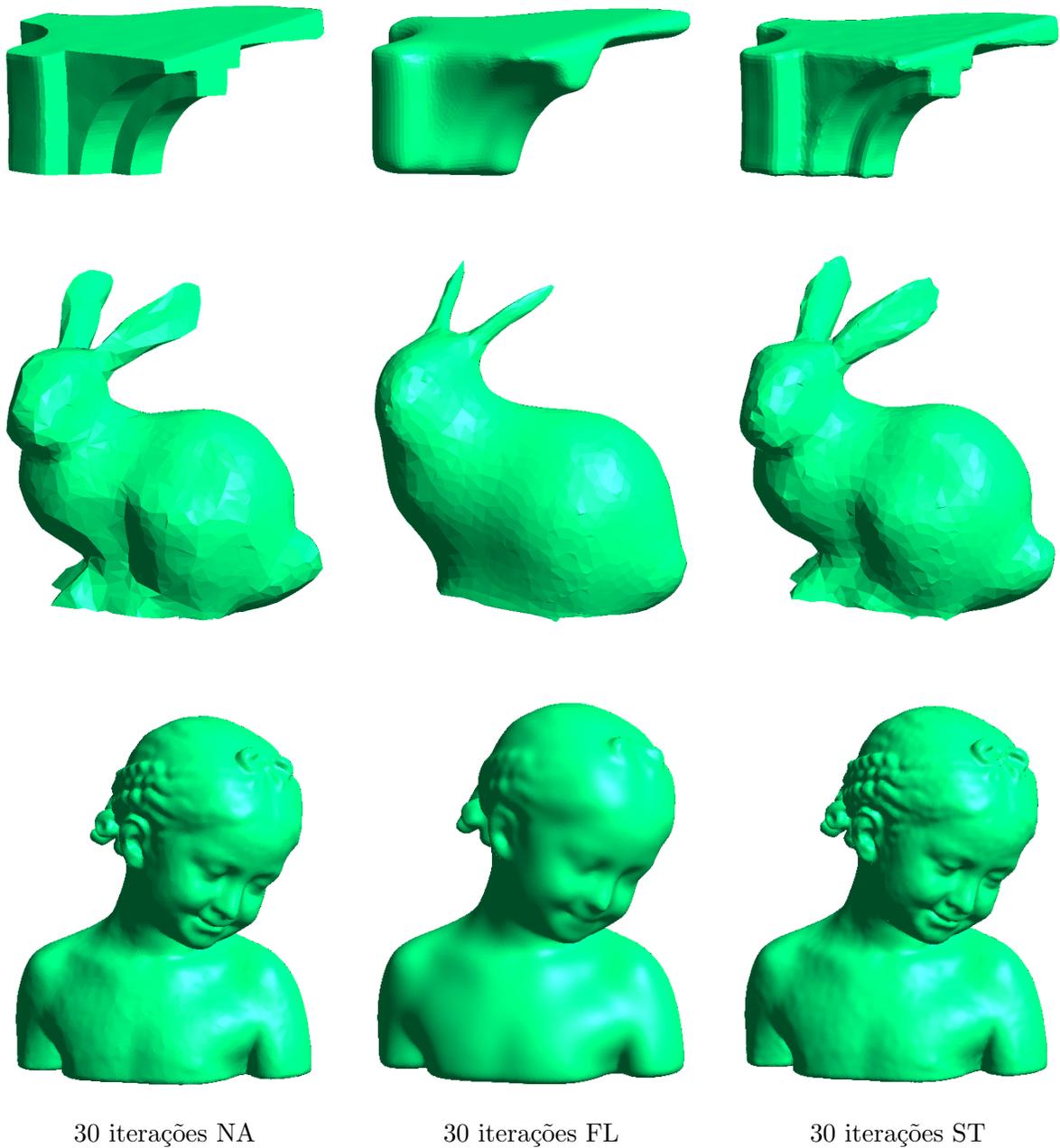


Figura 4.4: Resultados após 30 iterações, da esquerda para direita: Nossa Abordagem (NA), Filtro Laplaciano (FL) e Suavização Taubin (ST). Modelos usados, de cima para baixo: Fandisk, Bunny e Bimba.

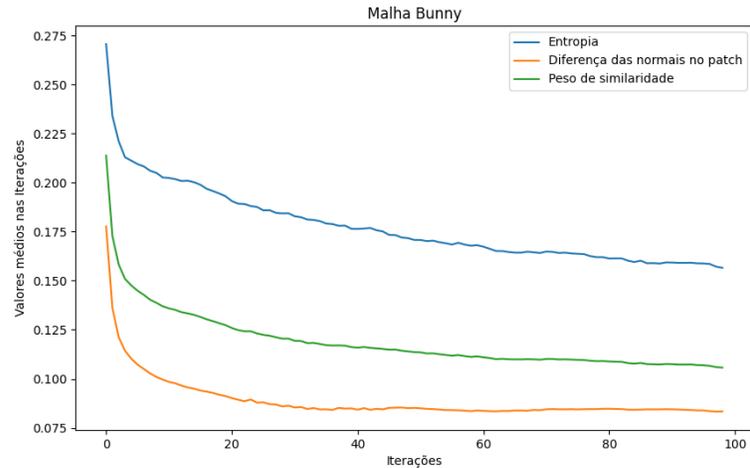


Figura 4.5: Peso similaridade, malha bunny.

quanto sua entropia vão decaindo à medida que o número de iterações aumenta e, consequentemente, o valor de τ . Inicialmente, esses valores parecem se estabilizar, mas, conforme evidenciado na figura 4.6, podem voltar a aumentar posteriormente. Como pode ser observado na figura 4.6 a diferença média das normais no retalho continua estável, a entropia ao contrário, segue aumentando a partir de um certo ponto. Isso porque a entropia das normais em um retalho da malha pode aumentar após várias filtragens devido a vários fatores como por exemplo imperfeições no algoritmo de filtragem, acúmulo de erros numéricos, ruído residual, introdução de novos padrões, perda de estrutura e efeitos acumulativos de pequenas perturbações.

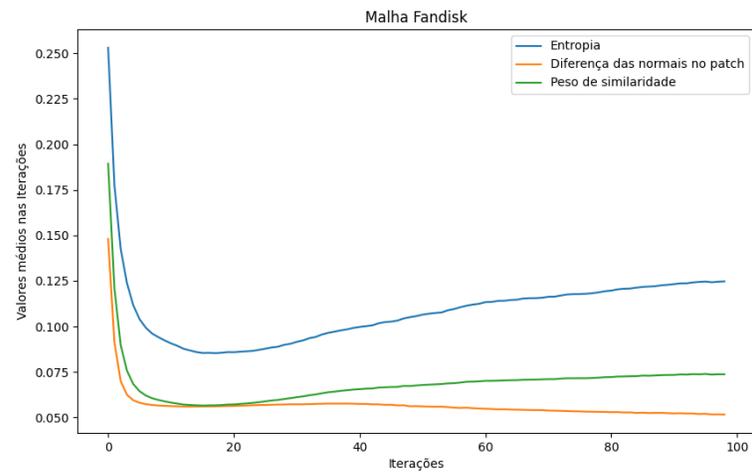


Figura 4.6: Peso similaridade, malha fandisk.

Capítulo 5

Considerações finais e trabalhos futuros

A Suavização de malhas é uma área em pleno desenvolvimento, e a utilização de filtros bilaterais tem se mostrado uma abordagem promissora. Os filtros bilaterais preservam características importantes da malha, como bordas e detalhes finos, enquanto reduzem o ruído. No entanto, vários desafios permanecem, como a necessidade de equilibrar a Suavização com a preservação de detalhes e a gestão eficiente de ruídos residuais.

Os resultados obtidos mostram que, embora a entropia média das normais e a diferença média das normais nos retalhos da malha decaiam com o aumento do número de iterações, há um ponto em que esses valores podem voltar a aumentar. Esse comportamento indica que há um limite na eficácia da filtragem contínua e que, após certo ponto, os efeitos acumulativos podem reintroduzir variabilidade indesejada na malha.

Uma abordagem promissora para um trabalho futuro visando melhorar o algoritmo de Suavização seria introduzir um critério de parada baseado em uma medida de suavidade. Durante os testes, observou-se que a entropia média das normais nos retalhos da malha não foi uma escolha eficaz para esse fim. Ao adotar uma medida de suavidade mais adequada, poderíamos determinar de forma mais precisa o ponto ideal para interromper a filtragem, evitando tanto a insuficiente quanto a excessiva redução de ruído.

Referências Bibliográficas

- [1] Panos Achlioptas, Olga Diamanti, Ioannis Mitliagkas, and Leonidas Guibas. Learning representations and generative models for 3D point clouds. In Jennifer Dy and Andreas Krause, editors, *Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning*, volume 80 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 40–49. PMLR, 10–15 Jul 2018.
- [2] Augusto Ribeiro de Almeida and Luciano Aparecido Magrini. A matemática das imagens digitais como recurso didático na escola básica. *C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 21, dez. 2021.
- [3] M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, and B. Levy. *Polygon Mesh Processing*. CRC Press, 2010.
- [4] Elaine Caire. A história da origem da curva normal. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013.
- [5] E. Catmull and J. Clark. *Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes*, page 183–188. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 1998.
- [6] Jiating Chen, Xiaoyin Ge, Li-Yi Wei, Bin Wang, Yusu Wang, Huamin Wang, Yun Fei, Kang-Lai Qian, Jun-Hai Yong, and Wenping Wang. Bilateral blue noise sampling. *ACM Trans. Graph.*, 32(6), nov 2013.
- [7] Prasun Choudhury and Jack Tumblin. The trilateral filter for high contrast images and meshes. In *Proceedings of the 14th Eurographics Workshop on Rendering*, EGRW ’03, page 186–196, Goslar, DEU, 2003. Eurographics Association.

- [8] Angela Dai, Charles Ruizhongtai Qi, and Matthias Nießner. Shape completion using 3d-encoder-predictor cnns and shape synthesis. In *2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2017, Honolulu, HI, USA, July 21-26, 2017*, pages 6545–6554. IEEE Computer Society, 2017.
- [9] Mathieu Desbrun, Mark Meyer, Peter Schroder, and Alan H. Barr. *Implicit Fairing of Irregular Meshes using Diffusion and Curvature Flow*. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 1 edition, 2023.
- [10] Jay L. Devore. *Probabilidade e estatística: para engenharia e ciências*. Pioneira Thomson Learning, 2006.
- [11] D. Doo and M. Sabin. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer-Aided Design*, 10(6):356–360, 1978.
- [12] Herbert Edelsbrunner and John Harer. *Computational Topology - an Introduction*. American Mathematical Society, 2010.
- [13] Shachar Fleishman, Iddo Drori, and Daniel Cohen-Or. Bilateral mesh denoising. *ACM Transactions on Graphics*, 22, 05 2003.
- [14] Gábor Fábrián. Generalized savitzky–golay filter for smoothing triangular meshes. *Computer Aided Geometric Design*, 100:102167, 2023.
- [15] Matheus Gadelha, Rui Wang, and Subhransu Maji. Multiresolution tree networks for 3d point cloud processing. In *Computer Vision – ECCV 2018: 15th European Conference, Munich, Germany, September 8–14, 2018, Proceedings, Part VII*, page 105–122, Berlin, Heidelberg, 2018. Springer-Verlag.
- [16] Michael Garland and Paul S. Heckbert. *Surface Simplification Using Quadric Error Metrics*. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 1 edition, 2023.
- [17] Eitan Grinspun. Session details: Discrete differential geometry: an applied introduction. In *ACM SIGGRAPH 2006 Courses*, SIGGRAPH '06, New York, NY, USA, 2006. Association for Computing Machinery.

- [18] Hugues Hoppe. Progressive meshes. In *Proceedings of the 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '96, page 99–108, New York, NY, USA, 1996. Association for Computing Machinery.
- [19] Hugues Hoppe. Smooth view-dependent level-of-detail control and its application to terrain rendering. In *Proceedings of the Conference on Visualization '98*, VIS '98, page 35–42, Washington, DC, USA, 1998. IEEE Computer Society Press.
- [20] Hugues Hoppe, Tony DeRose, Tom Duchamp, John McDonald, and Werner Stuetzle. Surface reconstruction from unorganized points. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 26(2):71–78, jul 1992.
- [21] Thouis Raymond Jones, Frédo Durand, and Mathieu Desbrun. Non-iterative, feature-preserving mesh smoothing. *ACM SIGGRAPH 2003 Papers*, 2003.
- [22] Tao Ju, Scott Schaefer, and Joe Warren. Mean value coordinates for closed triangular meshes. *ACM Trans. Graph.*, 24(3):561–566, jul 2005.
- [23] Evangelos Kalogerakis, Aaron Hertzmann, and Karan Singh. Learning 3d mesh segmentation and labeling. *ACM Trans. Graph.*, 29(4), jul 2010.
- [24] Ladislav Kavan, Steven Collins, Jiří Žára, and Carol O'Sullivan. Geometric skinning with approximate dual quaternion blending. *ACM Trans. Graph.*, 27(4), nov 2008.
- [25] Michael Kazhdan, Matthew Bolitho, and Hugues Hoppe. Poisson surface reconstruction. In *Proceedings of the Fourth Eurographics Symposium on Geometry Processing*, SGP '06, page 61–70, Goslar, DEU, 2006. Eurographics Association.
- [26] Leif Kobbelt. Interpolatory subdivision on open quadrilateral nets with arbitrary topology. *Computer Graphics Forum*, 15:12, 04 2000.
- [27] Bruno Lévy, Sylvain Petitjean, Nicolas Ray, and Jérôme Maillot. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. *ACM Trans. Graph.*, 21(3):362–371, jul 2002.

- [28] Xianzhi Li, Lei Zhu, Chi-Wing Fu, and Pheng-Ann Heng. Non-local low-rank normal filtering for mesh denoising. *Computer Graphics Forum*, 37(7):155–166, 2018.
- [29] Bin Liu, Junjie Cao, Weiming Wang, Ning Ma, Bo Li, Ligang Liu, and Xiuping Liu. Propagated mesh normal filtering. *Computers & Graphics*, 74:119–125, 2018.
- [30] Bin Liu, Bo Li, Junjie Cao, Weiming Wang, and Xiuping Liu. Adaptive and propagated mesh filtering. *Computer-Aided Design*, 154:103422, 2023.
- [31] Charles Loop and Scott Schaefer. Approximating catmull-clark subdivision surfaces with bicubic patches. *ACM Trans. Graph.*, 27(1), mar 2008.
- [32] William E. Lorensen and Harvey E. Cline. Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 21(4):163–169, aug 1987.
- [33] Xuequan Lu, Wenzhi Chen, and Scott Schaefer. Robust mesh denoising via vertex pre-filtering and l1-median normal filtering. *Computer Aided Geometric Design*, 54:49–60, 2017.
- [34] Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw Hill, Boston, fourth edition, 2002.
- [35] Robin Sibson. A brief description of natural neighbor interpolation. In Vic Barnett, editor, *Interpreting Multivariate Data*. John Wiley & Sons, January 1981.
- [36] Robert W. Sumner, Matthias Zwicker, Craig Gotsman, and Jovan Popović. Mesh-based inverse kinematics. *ACM Trans. Graph.*, 24(3):488–495, jul 2005.
- [37] Xianfang Sun, Paul L. Rosin, Ralph Martin, and Frank Langbein. Fast and effective feature-preserving mesh denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 13(5):925–938, 2007.
- [38] C. Tomasi and R. Manduchi. Bilateral filtering for gray and color images. In *Sixth International Conference on Computer Vision (IEEE Cat. No.98CH36271)*, pages 839–846, 1998.

- [39] Greg Turk. Re-tiling polygonal surfaces. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 26(2):55–64, jul 1992.
- [40] Guillaume Vialaneix and Tamy Boubekeur. Sbl mesh filter: fast separable approximation of bilateral mesh filtering. In *ACM SIGGRAPH 2011 Talks*, SIGGRAPH '11, New York, NY, USA, 2011. Association for Computing Machinery.
- [41] Peng-Shuai Wang, Yang Liu, and Xin Tong. Mesh denoising via cascaded normal regression. *ACM Trans. Graph.*, 35(6), dec 2016.
- [42] Yu Wang, Tong Liu, Jian Sun, Jinwei Gu, and Heung-Yeung Shum. Mesh denoising via l0 minimization. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 32(6):174, 2013.
- [43] Joe Warren and Henrik Weimer. *Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1st edition, 2001.
- [44] Jin Zeng, Yanfeng Tong, Yunmu Huang, Qiong Yan, Wenxiu Sun, Jing Chen, and Yongtian Wang. Deep surface normal estimation with hierarchical RGB-D fusion. *CoRR*, abs/1904.03405, 2019.
- [45] Saishang Zhong, Zhenzhen Song, Zheng Liu, Zhong Xie, Jianguo Chen, Lu Liu, and Renjie Chen. Shape-aware mesh normal filtering. *Computer-Aided Design*, 140:103088, 2021.