Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Departamento de Matemática

Representações de álgebras associativas e suas álgebras repetitivas

Erick Guimarães Botelho

Manaus – AM
2025

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Departamento de Matemática

Representações de álgebras associativas e suas álgebras repetitivas

por

Erick Guimarães Botelho

sob a orientação de

Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve
(Orientador)

Manaus – AM
2025

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

B748r Botelho, Erick Guimaraes
Representações de álgebras associativas e suas álgebras repetitivas / Erick Guimaraes Botelho. - 2025.
100 f. ; 31 cm.

Orientador(a): Germán Alonso Benitez Monsalve.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Amazonas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Manaus, 2025.

1. Representação de álgebra. 2. Quivers. 3. Álgebras repetitivas. 4. Cocadeias. I. Monsalve, Germán Alonso Benitez. II. Universidade Federal do Amazonas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título

---

Folha de aprovação

ALUNO: Erick Guimarães Botelho.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 2220184.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Álgebra.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Mestrado em matemática.

TÍTULO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO: Representações de álgebras associativas e suas álgebras repetitivas

ORIENTADOR: Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Auditório Professor José Henrique de Sá Mesquita do Departamento de Matemática, Campus UFAM, em 11 de março de 2025, às 10h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve (orientador)
UFAM - Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. Pedro Hernández Rizzo
UdeA - Universidad de Antioquia

Prof. Dr. Ederson Ricardo Frühling Dutra
UFAM - Universidade Federal do Amazonas

Manaus-AM, 11 de março de 2025.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste projeto.

Em primeiro lugar, agradeço a DEUS por me dar força e iluminar meu caminho durante todo este percurso acadêmico.

Agradeço sinceramente à minha mulher, Natalie de Souza, a pessoa mais importante da minha vida. Seu amor incondicional, paciência e apoio foram minha maior fonte de inspiração. Você sempre esteve ao meu lado, me motivando a seguir em frente e a nunca desistir dos meus sonhos. Sou profundamente grato por todos os esforços que você fez para me ajudar.

Agradeço também ao meu pai, Francisco Fabio dos Santos Botelho, que sempre me apoiou e me ensinou a importância da educação. Seu apoio constante e sua crença em meus sonhos foram um dos pilares que me sustentaram ao longo desta jornada.

Gostaria de expressar minha gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve, por sua orientação paciente, por compartilhar seu vasto conhecimento e por acreditar no meu potencial. Sua dedicação e comprometimento foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos e colegas, que me acompanharam em cada passo deste caminho, fornecendo palavras de incentivo, compartilhando risadas e ajudando a aliviar a tensão nos momentos mais difíceis. Agradeço em particular ao Gustavo P. Costa, Vinicius Rosario, Thiago Cacau, Karolline Vitoria, Samiles Lima, Eder Alejandro, Paola Escobar, Edwin Mateus e Dzoara Nunez, por estarem sempre ao meu lado, oferecendo-me apoio acadêmico e emocional.

Aos professores e profissionais que encontrei ao longo da minha carreira acadêmica, que de alguma forma contribuíram para a minha formação. Suas instruções, conselhos e exemplos foram cruciais para o aprimoramento deste trabalho.

Não posso deixar de mencionar a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM), que me forneceu as condições financeiras necessárias para concluir esta pesquisa.

Por fim, gostaria de expressar minha gratidão a todos que ajudaram a concluir este trabalho, incluindo aqueles que não foram mencionados aqui. Cada palavra de encorajamento e gesto de apoio foi essencial para que eu chegasse até aqui.

Resumo

Em 1983, Hughes e Waschbüsch introduziram o conceito de álgebra repetitiva em [HW83] para estudar a estrutura das extensões triviais de álgebras tilted, explorando suas propriedades. Eles caracterizaram essas extensões, especialmente em relação à teoria das representações, mostrando como essas construções podem ampliar a compreensão de módulos e morfismos em álgebras de tipo tilted. Em 2018, Hernán Giraldo estudou morfismos irredutíveis e sequências quase cindidas em [Gir18], aproveitando a interpretação da categoria dos módulos sobre álgebras repetitivas em termos de certos tipos cocadeias. Neste trabalho estudaremos o Teorema de Gabriel e a relação entre representações de quivers e módulos sobre álgebras de caminhos, explorando o isomorfismo de categorias com ênfase em módulos simples, projetivos e injetivos, com base nas abordagens apresentadas em [Gir15] e [ASS06]. Utilizaremos as técnicas de J. Schröer para explicitar os quivers repetitivos (Ver em [Schr99]) e estabelecer uma relação, via isomorfismo de categorias, entre os módulos sobre a álgebra de caminhos desses quivers e os complexos de cocadeias tensorizados pela álgebra correspondente (Consulte [BR24] e [Gir18] para maiores detalhes).

Palavras-chave: Representação de álgebra, Quivers, Álgebras repetitivas, Cocadeias

Abstract

In 1983, Hughes and Waschbüsch introduced the concept of repetitive algebras in [HW83] to study the structure of trivial extensions of tilted algebras, exploring their properties. They characterized these extensions, particularly in relation to representation theory, demonstrating how these constructions can enhance the understanding of modules and morphisms in tilted-type algebras. In 2018, Hernán Giraldo studied irreducible morphisms and almost split sequences in [Gir18], leveraging the interpretation of the module category over repetitive algebras in terms of certain types of cochain complexes. In this work, we will study Gabriel's Theorem and the relationship between quiver representations and modules over path algebras, exploring the category isomorphism with an emphasis on simple, projective, and injective modules, based on the approaches presented in [Gir15] and [ASS06]. We will employ J. Schröer's techniques to explicitly describe repetitive quivers (see [Schr99]) and establish a relationship, via category isomorphism, between the modules over the path algebra of these quivers and cochain complexes tensorized by the corresponding algebra (refer to [BR24] and [Gir18] for further details).

Keywords: Representation of Algebra, Quivers, Repetitive Algebras, Cochains

Sumário

Introdução **10**

1 Preliminares **13**
1.1 Álgebras associativas 13
1.2 Módulos de álgebras associativas 25

2 Quivers e álgebras de caminhos **32**
2.1 Teorema de Gabriel 38
2.2 Representações de quivers 47
2.3 Representações (Módulos) simples, projetiva e injetivas 54

3 Álgebra repetitiva **62**
3.1 O quiver da álgebra repetitiva e seu ideal adimissivél 63
3.2 Álgebra repetitiva de uma álgebra gentle 70
3.3 Categoria dos módulos de uma álgebra repetitiva 78
3.4 Exemplos de $\widehat{A}$-módulos via complexos de cadeia tensorizados por DA . 91
3.4.1 Exemplo $\mathbb{A}_3$ 92
3.4.2 Exemplo Kronecker de duas flechas $\mathbf{K}_2$ 94
3.4.3 Exemplo de quiver com relação de comutatividade 96

Referências Bibliográficas **99**

Lista de Símbolos

(Q, ρ) quiver com relações

$\Bbbk Q$ Álgebra de caminhos

$\Bbbk$ Corpo álgebricamente fechado

$\Bbbk[x]$ Polinômios na indeterminada x com coeficientes em $\Bbbk$

$\mathfrak{L}^b_{DA\otimes}$-$(A\text{-}mod)$ Categoria dos $\otimes$-complexos de cocadeia

$\operatorname{rad} A$ Radical de uma $\Bbbk$-álgebra

ρ Conjunto de relação

$\operatorname{End}_{\Bbbk}(V)$ Conjunto dos endomorfismos de V sobre $\Bbbk$

$\widehat{\overline{p}}_n$ Flechas de conexão

$\widehat{A}$ Álgebra repetitiva

$\widehat{Q}$ Quiver repetitivo

A $\Bbbk$-álgebra associativa

DA Espaço dual de uma $\Bbbk$-álgebra finita

M Módulo à esquerda sobre uma $\Bbbk$-álgebra

$M_n(\Bbbk)$ $\Bbbk$-álgebra de todas as matrizes $n \times n$

Q_A quiver ordinário de A

$\mathscr{M}(Q, \rho)$ Conjunto de caminho máximo

Introdução

No início dos anos 70, a teoria das representações de álgebras associativas foi revolucionada pela introdução dos quivers, apresentada por P. Gabriel em seus trabalhos [Gab72] e [Gab71]. Influenciado por pesquisas anteriores de T. Yoshii, P. Gabriel propôs uma abordagem inovadora para o estudo das representações de álgebras, usando a linguagem dos quivers. Essencialmente, um quiver é um grafo orientado. O trabalho pioneiro de P. Gabriel e a pesquisa subsequente ampliaram significativamente a teoria das representações de álgebras associativas, oferecendo novas ferramentas e perspectivas que até hoje influenciam o campo, evidenciando o valor de abordagens teóricas inovadoras.

Em 1983, D. Hughes e J. Waschbüsch introduziram o conceito de álgebra repetitiva (veja [HW83]). Para uma álgebra associativa finita A sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado de característica zero, essa construção envolve criar cópias de A e do seu dual $DA = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk)$, combinando essas cópias por meio de somas diretas para formar a estrutura algébrica denominada álgebra repetitiva $\widehat{A}$. A pesquisa de D. Hughes e J. Waschbüsch se destacou em áreas como Teoria das Representações, Categorias Derivadas, álgebras tilted e outros campos relacionados. Com base nesse estudo, J. Schröer, em [Schr99], descreve explicitamente o quiver com relações da álgebra repetitiva $\widehat{A}$ de $A = \Bbbk Q/\langle\rho\rangle$ e estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma $\Bbbk$-álgebra seja gentle: a álgebra repetitiva $\widehat{A}$ deve ser uma álgebra bisserial especial. Um dos objetivos deste trabalho é desenvolver um estudo detalhado desse artigo.

Em 2018, H. Giraldo, em [Gir18], estudou morfismos irredutíveis e sequências quase cindidas introduzidas por M. Auslander e I. Reiten em [AR75], aplicando esses conceitos a módulos finitamente gerados sobre álgebras de Artin e analisando seu comportamento em álgebras repetitivas. Inspirado no trabalho de D. Happel em [Hap88], que demonstrou que existe um mergulho da categoria derivada limitada de uma álgebra de dimensão global finita $\mathrm{D}^b(A)$ em $\widehat{A}$-mod, H. Giraldo investigou representações de $\widehat{A}$ na categoria $\widehat{A}$-mod, onde os módulos capturam suas propriedades algébricas, e também em $\mathcal{C}^b_{\otimes}(\widehat{A})$ a categoria de certos "complexos de cocadeia" de módulos sobre A, que explora resoluções e extensões de módulos, proporcionando uma visão mais detalhada das interações algébricas e das estruturas complexas associadas às álgebras repetitivas. Nesta dissertação, aplicaremos as técnicas de H. Giraldo para interpretar $\widehat{A}$-módulos em termos da categoria de complexos de cocadeias tensorizados por A, por meio de um isomorfismo de categorias, conectando a teoria de álgebras associativas com a teoria dos complexos de cocadeias.

Recentemente, em 2024, G. Benitez e P. Rizzo apresentaram uma definição generalizada para álgebras repetitivas, onde a construção envolve criar cópias de A com somas diretas de um bimódulo arbitrário (veja [BR24]). Eles demonstraram que a categoria dos módulos da álgebra repetitiva generalizada é isomorfa à categoria dos complexos de cocadeias tensorizadas por certo pelo bimódulo respectivo. Em nosso contexto, vamos apresentar a demonstraçaõ desse isomorfismo de categorias, considerando a definição clássica de álgebra repetitiva (veja Sessão 3.3). Esse isomorfismo permite traduzir propriedades e invariantes de uma categoria para outra, oferecendo uma análise flexível. H. Giraldo também destaca $\widehat{A}$ como uma álgebra de Frobenius infinita dimensional, sem identidade, mas que satisfaz $\widehat{A}^2 = \widehat{A}$, o que implica que $\widehat{A}M = M$ para módulos M, caracterizando sua estrutura e decomposição em componentes indexados por $\mathbb{Z}$.

Utilizando as técnicas de J. Schröer para construir o quiver repetitivo $\widehat{A} = \Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$, buscaremos encontrar as representações simples, injetivas e projetivas e, a partir delas, traduzir as representações do quiver repetitivo para módulos indecomponíveis por meio de um funtor. Como estamos lidando com módulos sobre uma álgebra repetitiva, aplicaremos as técnicas de H. Giraldo para interpretar estes $\widehat{A}$-módulos como complexos de cocadeias tensorizados pelo dual DA, através de um isomorfismo de categorias. Relacionar $\widehat{A}$-módulos com tais complexos de cocadeias tensorizados facilita a análise de representações de álgebras repetitivas e permite o uso de técnicas para compreender melhor resoluções e invariantes homológicos, enriquecendo a teoria das representações.

Embora a teoria de categorias seja uma ferramenta fundamental para a estruturação e análise de alguns conceitos tratados neste trabalho, optamos por não incluir uma discussão detalhada sobre os tópicos dessa área, dado que isso poderia expandir consideravelmente o escopo da pesquisa. Assumimos que o leitor possui familiaridade com os conceitos básicos da teoria de categorias, que são utilizados ao longo do texto. Para aqueles que necessitarem de uma introdução mais aprofundada, sugerimos [ASS06, Apêndice A] ou [Ben10]. Neste sentido, o trabalho está estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 introduziremos a teoria de álgebras associativas e de módulos sobre álgebras associativas, abordando o conteúdo necessário para o desenvolvimento do trabalho. Serão discutidas propriedades relevantes e exemplos ilustrativos para facilitar a compreensão da teoria.

No Capítulo 2, exploraremos a teoria das representações de quivers. Começaremos com a definição de quivers, ideal admissível e álgebra de caminhos $A = \Bbbk Q/\langle\rho\rangle$. Apresentaremos uma prova do Teorema de Gabriel e estudaremos as representações de quivers, estabelecendo a relação entre representações de quivers e módulos sobre álgebras de caminhos por meio de um isomorfismo de categorias, com foco em módulos simples, projetivos e injetivos.

Por fim, no Capítulo 3, discutiremos a construção de álgebras repetitivas $\widehat{A}$ e a relação entre o quiver associado e seu ideal admissível. Analisaremos a categoria dos

módulos sobre uma álgebra repetitiva, interpretando os $\widehat{A}$-módulos como complexos de cocadeias tensorizados por DA. Mostraremos que essa categoria é isomorfa à categoria dos $\widehat{A}$-módulos, conectando a teoria de álgebras associativas à teoria de complexos de cocadeias. E, finalizaremos a apresentando exemplos práticos para ilustrar os conceitos discutidos.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como objetivo estabelecer os fundamentos necessários para o estudo da $\Bbbk$-álgebras associativas e teoria de módulos. Começaremos introduzindo a notação básica e a terminologia utilizada ao longo deste trabalho, assim como exemplos para uma melhor compreensão dos conceitos abordados, fornecendo uma base sólida para os conceitos subsequentes. Vamos, desde já, fixar que $\Bbbk$ denotará um corpo.

1.1 Álgebras associativas

Nesta seção, discutiremos os conceitos fundamentais das álgebras associativas em um corpo $\Bbbk$. Começaremos definindo álgebras associativas e apresentando alguns exemplos. Em seguida, exploraremos as subálgebras, as condições necessárias para sua existência e exemplos ilustrativos. Apresentaremos a definição de morfismos entre $\Bbbk$-álgebras, acompanhada de exemplos. Analisaremos também a soma direta de álgebras associativas e introduziremos as álgebras indecomponíveis. Por fim, abordaremos os ideais e algumas propriedades importantes.

Definição 1.1. *Uma* $\Bbbk$***-álgebra associativa*** A *é um espaço vetorial sobre* $\Bbbk$ *com estrutura de anel, tal que:*

$$k \cdot (a * b) = (k \cdot a) * b = a * (k \cdot b) = (a * b) \cdot k$$

para todo $k \in \Bbbk$ *e todo* $a, b \in A$*, onde* $*$ *denota a operação de multiplicação do anel e* $\cdot$ *denota a multiplicação por escalar.*

Observação 1.2. *Se* A *possui um elemento identidade, denotado por* 1_A*, então* A *é chamada de* $\Bbbk$*-álgebra associativa com unidade. Além disso, dizemos que uma* $\Bbbk$*-álgebra associativa tem dimensão finita se* A *tem de dimensão finita como espaço vetorial. A partir de agora, fixaremos que ao referir-se a* A *como simplesmente* $\Bbbk$*-álgebra estamos assumindo esta deve ser associativa com unidade. Quando for necessário, avisaremos ao leitor que a* $\Bbbk$*-álgebra considerada não terá unidade.*

Exemplo 1.3.

1. *O conjunto* $\Bbbk[x]$ *dos polinômios na indeterminada* x *com coeficientes em* $\Bbbk$ *possui a estrutura de uma* $\Bbbk$*-álgebra, com as operações usuais de soma, multiplicação por escalar e produto de polinômios.*

2. *O conjunto*
$$\mathrm{End}_{\Bbbk}(V) = \{T : V \longrightarrow V \mid T \text{ é operador linear}\}$$
dos endomorfismos de V sobre $\Bbbk$, possui a estrutura de uma $\Bbbk$-álgebra, com as operações usuais de soma de operadores, multiplicação de operadores por escalares e a composição de operadores.

3. *Seja $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ com a multiplicação definida por $T * G = T \circ G - G \circ T$, onde assumimos $\dim V \geq 2$. Dessa forma, $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ não é uma $\Bbbk$-álgebra, pois o produto assim definido não é associativo. Dessa forma, $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ não é uma $\Bbbk$-álgebra. Para verificar isso, vamos mostrar que o produto assim definido não é associativo, ou seja, basta encontrar três operadores lineares $T, G, H \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ tais que $(T * G) * H \neq T * (G * H)$.*

   Vamos calcular primeiro a expressão $(T * G) * H$ e, em seguida, $T * (G * H)$, e por fim, comparar os resultados das duas expressões.

   Calculando $(T * G) * H$, obtemos:
$$\begin{aligned}(T * G) * H &= (T \circ G - G \circ T) \circ H - H \circ (T \circ G - G \circ T)\\ &= T \circ G \circ H - G \circ T \circ H - H \circ T \circ G + H \circ G \circ T.\end{aligned}$$

   Calculando agora $T * (G * H)$, obtemos:
$$\begin{aligned}T * (G * H) &= T \circ (G \circ H - H \circ G) - (G \circ H - H \circ G) \circ T\\ &= T \circ G \circ H - T \circ H \circ G - G \circ H \circ T + H \circ G \circ T.\end{aligned}$$

   Comparando os resultados de ambas as expressões, temos:
$$\begin{aligned}(T * G) * H &= T \circ G \circ H - G \circ T \circ H - H \circ T \circ G + H \circ G \circ T,\\ T * (G * H) &= T \circ G \circ H - T \circ H \circ G - G \circ H \circ T + H \circ G \circ T,\end{aligned}$$

   assim, vemos que:
$$(T * G) * H \neq T * (G * H).$$

   Em geral (a menos que T, G, H tenham propriedades específicas), podemos concluír que $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ com a multiplicação $*$ não é uma $\Bbbk$-álgebra.

Definição 1.4. *Um subespaço vetorial B de uma $\Bbbk$-álgebra A é uma $\Bbbk$-**subálgebra** de A se, para quaisquer b, b' em B, temos que $b * b'$ está em B, onde $''*''$ é a operação de multiplicação de A.*

Exemplo 1.5.

1. *O* **centro de** *A é o conjunto definido por*
$$Z(A) = \{x \in A \mid xa = ax \text{ para todo } a \in A\},$$
   o qual é uma $\Bbbk$-subálgebra de A.

De fato, seja $x, y \in Z(A)$ e $k \in \Bbbk$. Para todo $a \in A$, temos:

$$(kx)a = k(xa) = k(ax) = a(kx),$$

mostrando que $kx \in Z(A)$. Além disso,

$$(x + y)a = xa + ya = ax + ay = a(x + y),$$

o que implica que $x + y \in Z(A)$. Por fim, para o produto, temos:

$$(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy),$$

garantindo que $xy \in Z(A)$. Assim, $Z(A)$ é fechado sob soma, multiplicação por elementos de $\Bbbk$ e produto, o que mostra que é de fato uma $\Bbbk$-subálgebra de A.

2. *Seja $A = M_n(\Bbbk)$, a $\Bbbk$-álgebra de todas as matrizes $n \times n$. O conjunto das matrizes diagonais em A é uma $\Bbbk$-subálgebra. Vamos verificar que se x e y são matrizes diagonais de A, então xy é uma matriz diagonal. Sejam $x = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = diag(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, onde x_i e y_i são as entradas diagonais das matrizes x e y, respectivamente.*

   A multiplicação das matrizes x e y resulta em uma matriz cujas entradas na posição (i, j) são dadas por:

$$(xy)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj}.$$

   Como x e y são matrizes diagonais, temos que $x_{ik} = 0$ para $i \neq k$ e $y_{kj} = 0$ para $k \neq j$. Assim, a expressão acima se simplifica para:

$$(xy)_{ij} = x_{ii} y_{ij}.$$

   Para que $(xy)_{ij}$ seja não nulo, é necessário que $i = j$. Portanto, as únicas entradas não nulas de xy estão na diagonal, o que implica que xy é uma matriz diagonal. Logo, se x e y são matrizes diagonais de A, então xy também é uma matriz diagonal.

   Segue a mesma ideia para verificar que a soma de matrizes diagonais também resulta em uma matriz diagonal, e que multiplicar uma matriz diagonal por um escalar resulta em outra matriz diagonal.

3. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra. Considere o conjunto*

$$B = \{a \in A \mid a^2 = a\}.$$

   Vamos verificar que este conjunto, em geral, não constitui uma $\Bbbk$-subálgebra de A. Para $k \in \Bbbk$ e $x \in B$, temos $x^2 = x$. No entanto, ao considerar kx, não podemos garantir que $(kx)^2 = kx$ para todo $k \neq 0$ e $x \neq 0$. Portanto, B não satisfaz a propriedade de fechamento sob multiplicação por um escalar, o que implica que B não é uma $\Bbbk$-subálgebra de A.

A seguir, apresentaremos uma definição de morfismo entre $\Bbbk$-álgebras. Um morfismo é uma forma de preservar as estruturas dessas álgebras através de uma aplicação. Esse conceito será importante na definição de representação de $\Bbbk$-álgebra que veremos adiante.

Definição 1.6. *Sejam A e B duas $\Bbbk$-álgebras e $\varphi : A \longrightarrow B$ uma transformação $\Bbbk$-linear. Dizemos que φ é um **morfismo de $\Bbbk$-álgebras** se preserva a estrutura algébrica das $\Bbbk$-álgebras, ou seja, se para todo $a, b \in A$:*

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \star \varphi(b),$$

onde $*$ e $\star$ denotam a operação de multiplicação em A e em B, respectivamente.

Exemplo 1.7.

1. *A aplicação $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ definida por*

$$\varphi(a + bi) := \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

é um morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. De fato, pois dados $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ dois números complexos e λ um escalar em $\mathbb{R}$. Então temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda z_1 + z_2) &= \varphi((\lambda a_1 + a_2) + (\lambda b_1 + b_2)i) \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 \\ -(\lambda b_1 + b_2) & \lambda a_1 + a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ -\lambda b_1 & \lambda a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \lambda\varphi(z_1) + \varphi(z_2),
\end{aligned}$$

o que mostra que φ é uma transformação linear$\Bbbk$-linear, e além disso, tem-se

$$\begin{aligned}
\varphi(z_1 z_2) = \varphi((a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i) &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ -(a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} &= \varphi(z_1)\varphi(z_2),
\end{aligned}$$

o que mostra que φ preserva a operação de multiplicação.

2. *A aplicação $\Psi_a : \Bbbk[x] \longrightarrow \Bbbk$ dada por*

$$\Psi_a(P(x)) = P(a)$$

é um morfismo de $\Bbbk$-álgebras. De fato, pois dados $P(x)$, $Q(x)$ em $\Bbbk[x]$ e λ um escalar em $\Bbbk$. Então temos:

$$\Psi_a(\lambda P(x) + Q(x)) = \lambda P(a) + Q(a) = \lambda \Psi_a(P(x)) + \Psi_a(Q(x))$$

o que mostra que Ψ_a é uma transformação linear, e além disso, tem-se

$$\Psi_a(P(x)\cdot Q(x)) = P(a)\cdot Q(a) = \Psi_a(P(x))\cdot\Psi_a(Q(x))$$

Portanto, a aplicação $\Psi_a(P(x)) = P(a)$ é um morfismo de $\Bbbk$-álgebra.

3. *Considere a aplicação, $\Psi : \Bbbk[x] \longrightarrow \Bbbk[x]$, dada por*

$$\Psi(P(x)) := \frac{dP(x)}{dx},$$

onde estamos considerando a derivada formal. Observe que as expressões:

$$\Psi(P(x)Q(x)) = \frac{dP(x)}{dx}Q(x) + \frac{dQ(x)}{dx}P(x),$$
$$\Psi(P(x))\Psi(Q(x)) = \frac{dP(x)}{dx}\frac{dQ(x)}{dx}$$

São distintas. Logo a aplicação Ψ não é um morfismo de $\Bbbk$-álgebras.

Apresentaremos agora a definição da soma direta de $\Bbbk$-álgebras associativas, que é uma operação que permite construir novas álgebras a partir de álgebras já existentes, mantendo suas estruturas originais.

Definição 1.8. *Sejam A e B duas $\Bbbk$-álgebras. **A soma direta das $\Bbbk$-álgebras** A e B, denotada por $A \oplus B$, é o conjunto definido da seguinte maneira:*

$$A \oplus B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Onde esta equipada com as seguintes operações:
Para $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \oplus B$, a adição em $A \oplus B$ é definida componente a componente:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Para $k \in \Bbbk$ e $(a, b) \in A \oplus B$, a multiplicação por escalar em $A \oplus B$ é definida componente a componente:

$$k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b).$$

Para $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \oplus B$, a multiplicação em $A \oplus B$ é definida componente a componente:

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 * b_2),$$

onde $*$ denota a multiplicação nas álgebras A e B.

Observação 1.9. *Com a definição acima $A \oplus B$ admite uma estrutura de $\Bbbk$-espaço vetorial compatível com a estrutura de anel associativo, tornando-se assim uma $\Bbbk$-álgebra.*

Vamos introduzir duas definições fundamentais. A primeira definição trata de álgebras indecomponíveis, que não podem ser expressas como uma soma direta de duas outras álgebras não triviais. A segunda definição aborda os conceitos de idempotente e elemento central dentro de uma álgebra. Essas definições nos permitem verificar que uma $\Bbbk$-álgebra A é indecomponível se possui apenas elementos idempotentes e centrais triviais. Por fim, faremos um exemplo para ilustrar sua aplicação prática.

Definição 1.10. *Uma $\Bbbk$-álgebra A é **indecomponível** se não pode ser escrita como uma soma direta de duas outras álgebras não triviais.*

Definição 1.11. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra. Um elemento $e \in A$ é chamado de **idempotente** se $e^2 = e$. Um elemento $e \in A$ é chamado de **elemento central** se $ea = ae$ para todo $a \in A$.*

Proposição 1.12. *Uma $\Bbbk$-álgebra A é indecomponível se, e somente se, os únicos elementos idempotentes e centrais em A são os triviais.*

Demonstração. Primeiro, suponha que A seja indecomponível e que $e \in A$ seja um elemento idempotente e central. Sendo e idenmpotente segue que $(1-e)$ é idempotente. Sendo e central segue que $(1-e)$ é central. Com isso podemos concluir que eA e $(1-e)A$ são subalgebras de A. Observamos que $A = B + C$ e que $B \cap C = \{0\}$. De fato, se $x \in B \cap C$, então $x = ex = 0$ e $x = (1-e)x = 0$, implicando $x = 0$.

Se B ou C fosse trivial, digamos $B = \{0\}$, então $eA = \{0\}$, o que implica que $e = 0$. Similarmente, se $C = \{0\}$, então $(1-e)A = \{0\}$, o que implica que $1 - e = 0$ e, portanto, $e = 1$. Isso mostra que os únicos elementos idempotentes e centrais em A são $e = 0$ ou $e = 1$.

Suponhamos, por contradição, que A seja decomponível, ou seja, $A \cong B \oplus C$ como álgebras, onde B e C são subálgebras não triviais de A. Considere o elemento $e = (1_B, 0_C) \in A$. Note que e é idempotente, pois $e^2 = (1_B, 0_C)^2 = (1_B, 0_C) = e$. Além disso, e é central, pois para todo $a = (b, c) \in A$, temos:

$$ea = (1_B, 0_C)(b, c) = (1_B b, 0_C c) = (b, 0) = (b, c)(1_B, 0_C) = ae.$$

Isso contradiz a hipótese de que A tem apenas elementos idempotentes e centrais triviais. Portanto, A é indecomponível. □

Exemplo 1.13. *Seja A uma $\Bbbk$-subálgebra de $M_2(\Bbbk)$, formada por todas as matrizes triangulares inferiores:*

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \Bbbk \right\}.$$

Queremos mostrar que A é indecomponível. Para isso, usaremos o fato da Proposição (1.12), ou seja, verificaremos que os únicos elementos centrais e idempotentes de A são as matrizes

$$1_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para demonstrar isso, tomemos $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ e suponhamos que x é idempotente não nulo:

$$x^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ ba + bc & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix},$$

assim obtemos o seguinte sistema de equações

$$a^2 = a, \tag{1.1}$$
$$b(a + c) = b, \tag{1.2}$$

$$c^2 = c \tag{1.3}$$

Claramente, temos que $a \neq 0$, $b \neq 0$, *ou* $c \neq 0$, *pois já sabemos que a matriz* 0 *é idempotente e central.*

(i) Se $a \neq 0$, *então* $a^2 = a$ *implica que* $a = 1$. *Note que* $c \neq 0$, *caso contrário, teríamos a matriz* $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$, *porém não é central. Tome* $z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *e vejamos que* $xz \neq zx$:

$$xz = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$zx = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, de 1.3 temos que $c = 1$. *Portanto, de 1.2* $b = 0$. *Assim, concluímos que* $x = 1_A$.

(ii) O caso em que $c \neq 0$ *é análogo ao anterior.*

(iii) Se $b \neq 0$, *de 1.2 temos* $a + c = 1$, *o que implica que* $c = 1 - a$. *Isso implica que* $a \neq 0$ *ou* $c \neq 0$, *ambos os casos levam a situações semelhantes às anteriores.*

Vamos agora definir ideais em $\Bbbk$-álgebras, elementos essenciais para entender sua estrutura interna. Um ideal é uma subestrutura que permite a análise e construção de quocientes. Em álgebras não comutativas, a distinção entre ideais à esquerda, à direita e bilaterais é crucial, pois a ordem da multiplicação influencia a preservação dessas subestruturas.

Definição 1.14. *Seja* A *uma* $\Bbbk$*-álgebra. Um* ***ideal à esquerda*** *de* A *é um subespaço* I *de* A *tal que* $ax \in I$ *para todo* $a \in A$ *e* $x \in I$. *De forma análoga, define-se um* ***ideal à direita*** *de* A. *Um subconjunto* I *de* A *é um* ***ideal bilateral****, ou simplesmente ideal, se é ideal à esquerda e à direita.*

Exemplo 1.15.

1. *Considere a* $\Bbbk$*-álgebra* $M_2(\Bbbk)$. *Seja* I *o seguinte conjunto:*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, c \in \Bbbk \right\}.$$

Obviamente I *é um subespaço vetorial de* $M_2(\Bbbk)$. *Portanto para mostrar que* I *é um ideal à esquerda basta mostrar que para qualquer matriz* $M \in M_2(\Bbbk)$ *e qualquer matriz* $N \in I$, *o produto* $M \cdot N \in I$.

Seja $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\Bbbk)$ *e* $N = \begin{bmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \in I$. *Então,*

$$M \cdot N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bf & 0 \\ ce + df & 0 \end{bmatrix}.$$

O produto $M \cdot N$ *também está em* I, *pois a segunda coluna é zero. Portanto,* I *é um ideal à esquerda.*

2. *Considere $T_2(\Bbbk)$, a $\Bbbk$-álgebra das matrizes triangulares superiores:*

$$T_2(\Bbbk) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \Bbbk \right\}$$

Considere também o seguinte subconjunto de $T_2(\Bbbk)$:

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \Bbbk \right\}.$$

Sejam $X, Y \in I$. A soma $X + Y$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Logo, $X + Y \in I$.

Seja $M \in T_2(\Bbbk)$ e $X \in I$. O produto MX é dado por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + b \cdot 0 & ay + b \cdot 0 \\ 0 \cdot x + c \cdot 0 & 0 \cdot y + c \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

assim temos que $MX \in I$, logo I é um ideal à esquerda.

Agora, o produto XM:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa + y \cdot 0 & xb + yc \\ 0 \cdot a + 0 \cdot 0 & 0 \cdot b + 0 \cdot c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & xb + yc \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

assim temos que $XM \in I$, logo I é um ideal à direita. Portanto, I é um ideal bilateral de $T_2(\Bbbk)$.

3. *Considere a $\Bbbk$-álgebra $M_2(\Bbbk)$. Vamos verificar se I, como no item 1 deste exemplo, é um ideal à direita. Para isso, precisamos que, para qualquer matriz $M \in M_2(\Bbbk)$ e qualquer matriz $N \in I$, o produto $N \cdot M \in I$.*

Seja $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\Bbbk)$ e $N = \begin{bmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \in I$. Então,

$$N \cdot M = \begin{bmatrix} e & 0 \\ f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea & eb \\ fa & fb \end{bmatrix}.$$

O produto $N \cdot M$ não está necessariamente em I, pois a segunda coluna $\begin{bmatrix} eb \\ fb \end{bmatrix}$ não é necessariamente zero. Portanto, I não é um ideal à direita.

Definição 1.16. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra e I um ideal de A. A $\Bbbk$-**álgebra quociente** A/I é o $\Bbbk$-espaço quociente*

$$A/I = \{a + I \mid a \in A\},$$

onde cada $a + I$ é a classe lateral de I em A. As operações em A/I são definidas por

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \quad (a + I) \cdot (b + I) = (ab) + I \quad e \quad \lambda \cdot (a + I) = (\lambda a) + I,$$

para todo $a, b \in A$ e $\lambda \in \Bbbk$.

Observação 1.17. *As operações de adição e multiplicação são bem definidas e satisfazem as propriedades esperadas de uma $\Bbbk$-álgebra. Apresentaremos um exemplo de $\Bbbk$-álgebras quaciente no Exemplo 1.21 item 2.*

Definição 1.18. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra e $S \subseteq A$ um subconjunto. O **ideal à esquerda gerado** por S, denotado por $\langle S \rangle$, é o menor ideal à esquerda de A que contém S. Mais precisamente, $\langle S \rangle$ consiste de todas as combinações finitas de elementos da forma, $\sum_i a_i s_i$ onde $a_i \in A$ e $s_i \in S$. Analogamente podemos definir ideal gerado por um subconjunto S de A.*

Exemplo 1.19.

1. *Considere a $\Bbbk$-álgebra $\Bbbk[x]$ e o subconjunto $\{x\}$. Explicitamente, $\langle x \rangle$ é o conjunto de todos os múltiplos de x por um polinômio em $\Bbbk[x]$:*

$$\langle x \rangle = \{x \cdot f(x) \mid f(x) \in \Bbbk[x]\}.$$

2. *Considere a $\Bbbk$-álgebra $\Bbbk[x, y]$, para o subconjunto $\{x, y\}$, temos:*

$$\langle x, y \rangle = \{p(x, y) \cdot x + q(x, y) \cdot y \mid p(x, y), q(x, y) \in \Bbbk[x, y]\}$$

   Em palavras, qualquer elemento de $\langle x, y \rangle$ é um polinômio em $\Bbbk[x, y]$ sem termo indepedente

3. *Considere $\Bbbk[x_1, x_2, x_3, \ldots]$, a $\Bbbk$-álgebra dos polinômios em um número infinito de variáveis x_i com coeficientes em $\Bbbk$. Definimos o ideal I como sendo gerado pelos elementos x_i:*

$$I = \langle x_1, x_2, x_3, \ldots \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i \mid f_i \in \Bbbk[x_1, x_2, x_3, \ldots] \right\}$$

   e apenas um número finito de f_i são não nulos. Isso significa que qualquer elemento de I pode ser escrito como uma combinação linear finita dos geradores x_i com coeficientes em $\Bbbk[x_1, x_2, x_3, \ldots]$. Dessa forma temos que I é um ideal infinitamente gerado.

Definição 1.20. *Seja I um ideal de A e $m \geq 1$ um número inteiro. Definimos I^m como o ideal gerado por todos os produtos $x_1 x_2 \cdots x_m$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_m \in I$. Dizemos que o **ideal I é nilpotente** se existir algum $m \geq 1$ tal que $I^m = 0$.*

Exemplo 1.21.

1. *Seja $M_2(\Bbbk)$ a $\Bbbk$-álgebra das matrizes 2×2. Definimos o subconjunto*

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \Bbbk \right\}.$$

   Queremos verificar se K é um ideal nilpotente, ou seja, se existe um inteiro n tal que $K^n = (0)$. Basta mostrar que $K^2 = (0)$, ou seja, que o produto de quaisquer duas matrizes em K resulta na matriz nula.

Sejam $A, B \in K$, com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde } b, c \in \Bbbk.$$

Então, o produto AB é dado por

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como AB é sempre a matriz nula para quaisquer $b, c \in \Bbbk$, concluímos que $K^2 = (0)$, mostrando que K é um ideal nilpotente.

2. *Considere a $\Bbbk$-álgebra $A = \Bbbk[x]/\langle x^2 \rangle$, onde $\langle x^2 \rangle$ é o ideal gerado pelo polinômio x^2 de $\Bbbk[x]$. Neste caso, consideramos o ideal $I = \langle \overline{x} \rangle$ em A. Os elementos de I são da forma $a \cdot x$, onde $a \in \Bbbk$. Verifiquemos se I é nilpotente:*

$$I^2 = \langle \overline{x} \rangle^2 = \langle \overline{0} \rangle$$

Portanto, $I^2 = \langle \overline{0} \rangle$, o que mostra que $I = \langle \overline{x} \rangle$ é um ideal nilpotente.

Definição 1.22. *Um ideal bilateral I de uma $\Bbbk$-álgebra A é dito **maximal** se, para todo ideal bilateral J de A tal que $I \subseteq J \subseteq A$, temos $J = I$ ou $J = A$.*

Observação 1.23. *De forma simplificada, podemos dizer que um ideal I é maximal se não existe nenhum ideal próprio entre ele e a $\Bbbk$-álgebra A.*

Exemplo 1.24.

1. *Seja a $\Bbbk$-álgebra $T_2(\Bbbk)$ e o ideal bilateral I como no Exemplo 1.15 item 2. Queremos verificar se I é um ideal maximal de $T_2(\Bbbk)$. Considere agora os seguintes subconjuntos de $T_2(\Bbbk)$:*

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \Bbbk \right\}, \quad K = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \Bbbk \right\},$$

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c \in \Bbbk \right\}, \quad N = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid b, c \in \Bbbk \right\}.$$

Note que estes são todos os possíveis ideais de $T_2(\Bbbk)$ incluindo I. Além disso, I não está contido em nenhum deles, ou seja, não existe nenhum outro ideal entre I e $T_2(\Bbbk)$. Portanto, I é um ideal maximal de $T_2(\Bbbk)$.

Usando a mesma ideia, podemos concluir que N também é um ideal maximal de $T_2(\Bbbk)$. Assim, I e N são os únicos ideais maximais de $T_2(\Bbbk)$.

2. *Considere a* $\Bbbk$*-álgebra* $\Bbbk[x]$ *e o ideal*

$$M = \{p(x) \in \Bbbk[x] : p(0) = 0\} = \langle x \rangle.$$

Para demonstrar que M *é um ideal maximal, suponha que* J *seja um ideal de* $\Bbbk[x]$ *tal que* $M \subseteq J$*. Precisamos mostrar que* $J = M$ *ou* $J = \Bbbk[x]$*.*

Assuma que $M \subsetneq J$*. Isso significa que existe um polinômio* $q(x) \in J$ *tal que* $q(x) \notin M$*. Como* $q(x) \notin M$*, então* $q(0) \neq 0$*. Podemos escrever* $q(x)$ *na forma:*

$$q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n,$$

onde $c_0 \neq 0$*.*

Como J *é um ideal, e* $1 = \frac{1}{c_0} q(x) - \frac{c_1}{c_0} x - \cdots - \frac{c_n}{c_0} x^n$*, temos que* $1 \in J$ *porque* $q(x) \in J$ *e todos os outros termos são múltiplos de* x*, que está em* M *e, portanto, em* J*.*

Se $1 \in J$*, então* J *contém todos os múltiplos de* 1*, isto é, todos os polinômios em* $\Bbbk[x]$*. Portanto,* $J = \Bbbk[x]$*.*

Concluímos que, se $M \subseteq J$*, então* $J = M$ *ou* $J = \Bbbk[x]$*, o que demonstra que* M *é um ideal maximal.*

3. *Seja a* $\Bbbk$*-álgebra* $A = T_2(\Bbbk)$ *e o ideal bilateral* K *como no Exemplo 1.24 item 1.* K *não pode ser um ideal maximal pois esta contido em* I *do mesmo Exemplo, ou seja* $K \subseteq I$ *e* $K \neq I$ *e* $I \neq A$*.*

Definição 1.25. *O* ***radical de Jacobson*** $\operatorname{rad} A$ *de uma* $\Bbbk$*-álgebra associativa* A *é a interseção de todos os ideais maximais bilaterais de* A*.*

Exemplo 1.26. *Considere a* $\Bbbk$*-álgebra* $T_2(\Bbbk)$*. Vimos no Exemplo 1.24 item 1 que os únicos ideais maximais de* $T_2(\Bbbk)$ *são* I *e* N*. Observe que o ideal* K *do mesmo Exemplo é a intersecção destes dois ideais, ou seja* $K = \operatorname{rad} A$

A seguir, exploraremos algumas propriedades relacionada ao radical de uma $\Bbbk$-álgebra e apresentaremos mais exemplos para ilustrar esse conceito.

Proposição 1.27. *Seja* $\operatorname{rad} A$ *o radical de uma* $\Bbbk$*-álgebra* A*. Temos as seguintes propriedades:*

(i) $\operatorname{rad} A$ *é um ideal bilateral e* $\operatorname{rad}(A/\operatorname{rad} A) = 0$*.*

(ii) Se I *é um ideal bilateral nilpotente de* A*, então* $I \subseteq \operatorname{rad} A$*. Além disso, se a álgebra* A/I *é isomorfa a um produto* $\Bbbk \times \cdots \times \Bbbk$ *de cópias de* $\Bbbk$*, então* $I = \operatorname{rad} A$*.*

Demonstração. Uma demostração para a Proposição (1.27) pode ser encontrado em [ASS06]

□

Exemplo 1.28.

1. *Seja a* $\Bbbk$*-álgebra* $T_2(\Bbbk)$*. No Exemplo 1.26 vimos que o ideal* $K = \operatorname{rad} A$*, da Proposição 1.27 item (i) temos que* K *é também um ideal bilateral. Além disso* $\operatorname{rad}(T_2(\Bbbk)/K) = 0$*.*

2. *Considere a* $\Bbbk$*-álgebra* $A = \Bbbk[x,y]/\langle x^2, y^2\rangle$*. Como* A *é comutativa, todos os seus ideais são bilaterais.*

   Seja I *o ideal gerado por* x *e* y *em* A*:*

   $$I = \langle x, y\rangle/\langle x^2, y^2\rangle.$$

   Queremos verificar que I *é um ideal nilpotente. Para isso, consideremos seu quadrado:*

   $$I^2 = \langle x, y\rangle \cdot \langle x, y\rangle = \langle x^2, xy, y^2\rangle.$$

   Mas, como $x^2 = 0$ *e* $y^2 = 0$ *em* A*, concluímos que*

   $$I^2 = \langle 0\rangle.$$

   Isso mostra que I *é um ideal nilpotente, e, pela Proposição 1.27, item (ii), primeira parte, temos que* $I \subseteq \operatorname{rad} A$*.*

   Agora, analisemos o quociente A/I*:*

   $$A/I = \left(\Bbbk[x,y]/\langle x^2, y^2\rangle\right) / \left(\langle x, y\rangle/\langle x^2, y^2\rangle\right).$$

   Pelo isomorfismo de quocientes, segue que

   $$A/I \cong \Bbbk[x,y]/\langle x, y\rangle \cong \Bbbk.$$

   Como A/I *é isomorfo a* $\Bbbk$*, um corpo, a Proposição 1.27, item (ii), segunda parte, implica que* I *é um ideal maximal.*

   Portanto, I *é um ideal bilateral nilpotente e maximal de* A*.*

Definiremos agora a representação de uma $\Bbbk$-álgebra, pois estamos interessados em entender como a álgebra pode ser representada através de transformações lineares. Essencialmente, a representação permite estudar uma $\Bbbk$-álgebra através de matrizes e transformações lineares, facilitando a análise de suas propriedades e estrutura em um contexto mais acessível.

Definição 1.29. *Uma* ***representação de uma*** $\Bbbk$***-álgebra*** A *é um morfismo de álgebras* $\varphi : A \longrightarrow \operatorname{End}_{\Bbbk}(V)$*, onde* V *é um* $\Bbbk$*-espaço vetorial.*

Observação 1.30. *Observe que, se* φ *for injetora, temos uma imersão de* A *em* $\operatorname{End}_{\Bbbk}(V)$*. Analogamente, se* φ *for sobrejetora, obtemos uma projeção de* A *em* $\operatorname{End}_{\Bbbk}(V)$*.*

Exemplo 1.31.

1. *Seja* B *uma* $\Bbbk$*-subálgebra da* $\Bbbk$*-álgebra* $\operatorname{End}_{\Bbbk}(V)$*. A aplicação de inclusão de* B *em* $\operatorname{End}_{\Bbbk}(V)$ *é um morfismo de álgebras, o que fornece uma representação natural de* B *em* $\operatorname{End}_{\Bbbk}(V)$*.*

2. *Seja* $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}^2}$ *a aplicação definida da seguinte forma, para cada número complexo* $a+bi \in \mathbb{C}$, φ *associa um endomorfismo de* $\mathbb{R}^2$ *representado pela matriz* 2×2

$$\varphi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Essa matriz age sobre um vetor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, *produzindo o vetor*

$$\varphi(a+bi)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ -bx+ay \end{bmatrix}.$$

Assim, φ *aplica cada número complexo para um endomorfismo de* $\mathbb{R}^2$ *através da multiplicação por essa matriz. Vamos verificar que a aplicação* φ *é um morfismo de* $\mathbb{R}$*-álgebras, o que implica que* φ *é uma representação de* $\mathbb{R}$*-álgebra.*
Sejam $a+bi$ *e* $c+di$ *elementos de* $\mathbb{C}$ *e* $r \in \mathbb{R}$. *Verificamos que:*

$$\begin{aligned}\varphi(r(a+bi)+(c+di)) = \varphi((ra+c)+(rb+d)i) &= \begin{bmatrix} ra+c & rb+d \\ -(rb+d) & ra+c \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = r\varphi(a+bi)+\varphi(c+di).\end{aligned}$$

Assim, φ *é linear. Vejamos agora que* φ *preserva a multiplicação:*

$$\begin{aligned}\varphi((a+bi)(c+di)) = \varphi((ac-bd)+(ad+bc)i) &= \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \varphi((a+bi)(c+di)).\end{aligned}$$

Portanto φ *preserva a multiplicação.*

1.2 Módulos de álgebras associativas

Nesta seção, exploramos os módulos sobre $\Bbbk$-álgebras, que generalizam o conceito de espaços vetoriais ao incluir a ação de $\Bbbk$-álgebras sobre esses espaços. Começamos definindo o conceito de módulo à esquerda e suas propriedades essenciais, com exemplos práticos. Também discutimos alguns resultados importantes no estudo de módulos sobre $\Bbbk$-álgebras, e por fim, apresentamos os conceitos de módulos injetivos e projetivos, que são cruciais para resultados posteriores.

Definição 1.32. *Um* ***módulo à esquerda*** *sobre uma* $\Bbbk$*-álgebra* A *é um* $\Bbbk$*-espaço vetorial* M *munido de uma operação binaria que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer* $x, y \in M$, $a, b \in A$ *e* $\lambda \in \Bbbk$*:*

i) $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$;

ii) $(a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$;

iii) $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$;

iv) $(\lambda a) \cdot x = \lambda \cdot (a \cdot x) = a \cdot (x\lambda)$.

A definição de um módulo à direita sobre a álgebra A é análoga à definição de módulo à esquerda. Neste trabalho, utilizaremos módulos à esquerda sobre uma $\Bbbk$-álgebra. Normalmente, quando não houver confusão, referiremos a esses módulos à esquerda como A-módulos.

Observação 1.33. *Dizemos que um A-módulo é de dimensão finita se o mesmo tem dimensão finita como $\Bbbk$-espaço vetorial*

Exemplo 1.34.

1. *Considerando A como uma $\Bbbk$-álgebra, podemos naturalmente definir A como um A-módulo sobre si mesmo. Nesse caso, para cada par de elementos $a, b \in A$ e cada escalar $\lambda \in \Bbbk$, podemos definir a operação de A-módulo $\cdot$ como a multiplicação usual de A. Isso significa que $a \cdot b$ representa o produto de a e b dentro da $\Bbbk$-álgebra A.*

2. *Considere a $\Bbbk$-álgebra $M_n(\Bbbk)$. Um exemplo de A-módulo sobre $M_n(\Bbbk)$ é o espaço vetorial $\Bbbk^n$, onde a ação $\cdot : M_n(\Bbbk) \times \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^n$ é definida da seguinte forma: Para $M \in M_n(\Bbbk)$ e $v \in \Bbbk^n$, a operação $M \cdot v$ resulta na multiplicação de matriz-vetor padrão, ou seja, a multiplicação de cada linha de M por v.*

3. *Seja M um A-módulo sobre uma $\Bbbk$-álgebra A e seja N um A-submódulo de M. O conjunto das classes laterais $m + N$, onde m percorre M, define um novo A-módulo, chamado de A-**módulo quociente de** M **por** N e denotado por M/N. A estrutura de A-módulo em M/N é dada pela ação:*

$$a \cdot (m + N) = (a \cdot m) + N, \quad \text{para todo } a \in A, \text{ e todo } m + N \in M/N.$$

Esse conceito é fundamental na teoria de A-módulos, pois permite analisar as propriedades de M em relação a seus submódulos e simplifica o estudo da estrutura interna dos A-módulos.

A seguir, vamos definir o que é um A-submódulo de um A-módulo. Essa definição é importante porque os submódulos são uma forma de generalizar os subespaços e ajudam a entender melhor a estrutura dos A-módulos.

Definição 1.35. *Um subespaço vetorial M' de um A-módulo M à esquerda é dito ser um A-**submódulo** de M se $am \in M'$ para todo $m \in M'$ e para todo $a \in A$.*

Exemplo 1.36.

1. *Se M é um A-módulo sobre uma $\Bbbk$-álgebra A e N_1 e N_2 são A-submódulos de M, então $N_1 \cap N_2$ é também um A-submódulo de M.*

2. *Seja M um A-módulo à esquerda e seja I um ideal à esquerdo de A. Definimos o conjunto*

$$IM = \{a_1m_1 + \cdots + a_sm_s \mid s \geq 1,\ a_i \in I,\ m_i \in M\}.$$

Nosso objetivo é mostrar que IM é um A-submódulo de M, ou seja, que é fechado sob adição e multiplicação por elementos de A.

Sejam $x = a_1m_1 + \cdots + a_sm_s$ e $y = b_1n_1 + \cdots + b_tn_t$ dois elementos de IM, com $a_i, b_j \in I$ e $m_i, n_j \in M$. Então, a soma

$$x + y = (a_1m_1 + \cdots + a_sm_s) + (b_1n_1 + \cdots + b_tn_t)$$

também pode ser escrita como uma soma de elementos da forma c_kp_k, onde $c_k \in I$ e $p_k \in M$. Como I é um ideal, é fechado sob soma, ou seja, $a_i + b_j \in I$ sempre que fizer sentido. Isso garante que $x + y \in IM$, mostrando o fechamento sob adição.

Seja $x = a_1m_1 + \cdots + a_sm_s \in IM$ e $a \in A$. Calculamos o produto ax:

$$ax = a(a_1m_1 + \cdots + a_sm_s) = (aa_1)m_1 + \cdots + (aa_s)m_s.$$

Como I é um ideal esquerdo, segue que $aa_i \in I$ para todo i, o que implica que cada termo $(aa_i)m_i$ pertence a IM. Assim, $ax \in IM$, garantindo o fechamento sob a ação de A.

Portanto, IM é um A-submódulo de M, como queríamos demonstrar.

Observação 1.37. *Vale destacar que M/N não deve ser confundido com um submódulo de M, pois sua estrutura é distinta. Um exemplo simples ocorre no contexto de $\mathbb{Z}$-módulos: se tomarmos $M = \mathbb{Z}$ e $N = p\mathbb{Z}$, onde p é um número primo, então M/N é isomorfo ao corpo finito $\mathbb{F}_p$, que não pode ser identificado como um submódulo de $\mathbb{Z}$, pois $\mathbb{Z}$ não contém elementos com a estrutura de um corpo finito.*

Definição 1.38. *Um A-módulo M é dito ser **gerado** por um subconjunto $S \subseteq M$ se todo elemento $m \in M$ puder ser expresso como uma combinação linear finita de elementos de S, ou seja, existe um número finito de elementos $m_1, \ldots, m_n \in S$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que $m = a_1m_1 + \cdots + a_nm_n$. Dizemos que M é **finitamente gerado** se M é gerado por um subconjunto finito S.*

Definição 1.39. *Sejam $M_1, \ldots, M_s$ A-submódulos de um A-módulo M. Definimos $M_1 + \cdots + M_s$ como o A-submódulo de M que consiste em todas as somas $m_1 + \cdots + m_s$, onde $m_1 \in M_1, \ldots, m_s \in M_s$.*

Exemplo 1.40.

1. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra, Como vimos, A pode ser considerado um A-módulo sobre sí mesmo. Nesse caso, M pode ser gerado por um único elemento, por exemplo, identidade 1_A. Todo elemento de A pode ser escrito como $a1_A$, onde $a \in A$, então M é um módulo gerado por um único elemento.*

2. *Considere a $\Bbbk$-álgebra $A = \Bbbk[x]$ e o A-módulo $M = \Bbbk[x]/\langle x^2\rangle$. Os elementos de M são classes laterais da forma $\overline{p(x)} = p(x) + \langle x^2\rangle$, onde $p(x) \in \Bbbk[x]$. Como $x^2 \equiv 0$ em M, cada classe tem uma representante da forma $\overline{a_0 + a_1 x}$, com $a_0, a_1 \in \Bbbk$. Isso mostra que M é gerado pelos elementos $\overline{1}$ e $\overline{x}$, ou seja, M é finitamente gerado como A-módulo.*

Observação 1.41. *Observe que um A-módulo M à esquerda sobre uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita é finitamente gerado se, e somente se, M for de dimensão finita. De fato, se $x_1, \ldots, x_m$ é uma $\Bbbk$-base de M, então é obviamente um conjunto de A-geradores de M. Por outro lado, se o A-módulo M for gerado pelos elementos $m_1, \ldots, m_n$ sobre A e $\xi_1, \ldots, \xi_s$ é uma $\Bbbk$-base de A, então o conjunto $\{\xi_i m_j \mid j = 1, \ldots, n, i = 1, \ldots, s\}$ gera M como $\Bbbk$-espaço vetorial.*

Apresentaremos agora o Lema de Nakayama, um importante resultado na teoria de módulos sobre $\Bbbk$-álgebras. Ele estabelece uma condição suficiente para que um módulo finitamente gerado sobre uma $\Bbbk$-álgebra com um ideal bilateral esteja necessariamente contido no ideal.

Lema 1.42 (Nakayama)**.** *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra, M um A-módulo finitamente gerado e $I \subseteq \operatorname{rad} A$ um ideal bilateral de A. Se $M = IM$, então $M = 0$.*

Demonstração. Suponha que M e $M = Am_1 + \cdots + Am_s$, ou seja, M é gerado pelos elementos $m_1, \ldots, m_s$. Procedemos por indução em s. Se $s = 1$, então a igualdade $Am_1 = Im_1$ implica que $m_1 = x_1 m_1$ para algum $x_1 \in I$. Portanto, $(1 - x_1)m_1 = 0$ e, portanto, $m_1 = 0$, porque $1 - x_1$ é invertível. Consequentemente, $M = 0$, conforme necessário.

Suponha que $s \geq 2$. A igualdade $M = IM$ implica que existem elementos $x_1, \ldots, x_s \in I$ tais que $m_1 = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_s m_s$. Daí $(1 - x_1)m_1 = x_2 m_2 + \cdots + x_s m_s$ e, portanto, $m_1 \in Am_2 + \cdots + Am_s$ porque $1 - x_1$ é invertível, pois $I \subseteq \operatorname{rad} A$. Isso mostra que $M = Am_2 + \cdots + Am_s$ e a hipótese indutiva produz $M = 0$. □

Agora, introduziremos a definição de A-A-bimódulo, um tipo específico de módulo que será utilizado nas discussões subsequentes deste trabalho. Essa estrutura é relevante, pois a compatibilidade entre as ações à esquerda e à direita é uma propriedade fundamental em nosso contexto.

Definição 1.43. *Um A-A-**bimódulo** é um $\Bbbk$-espaço vetorial M equipado com duas estruturas de módulo, uma ação à esquerda e uma ação à direita de A, que são compatíveis entre si da seguinte forma:*

$$(am)b = a(mb) \text{ para todo } a, b \in A \text{ e } m \in M.$$

O seguinte exemplo é importante na definição de álgebra repetitiva (Definição 3.1).

Exemplo 1.44. *O espaço dual DA de uma $\Bbbk$-álgebra A é definido como o conjunto de todos os homomorfismos lineares de A em $\Bbbk$, ou seja, $DA = \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk)$. Este espaço dual possui uma estrutura natural de A-bimódulo, com a ação à esquerda de A em DA definida por*

$$(a \cdot \phi)(b) = \phi(ba), \quad \text{para todos } a, b \in A \text{ e } \phi \in DA$$

e a ação à direita de A em DA é definida por

$$(\phi \cdot a)(b) = \phi(ab), \quad \text{para todos } a, b \in A \text{ e } \phi \in DA.$$

As duas ações são compatíveis entre si. De fato, para todos $a, b, c \in A$ e $\phi \in DA$, temos:

$$(a \cdot (\phi \cdot b))(c) = (a \cdot \phi)(cb) = \phi((cb)a) = \phi(c(ba)) = ((a \cdot \phi) \cdot b)(c).$$

Exploraremos brevemente o conceito de homomorfismo de A-módulo e suas propriedades, essenciais para analisar a estrutura e as relações entre módulos sobre uma $\Bbbk$-álgebra, permitindo comparações e a identificação de propriedades dos homomorfismos.

Definição 1.45. *Sejam M e N módulos sobre A. Uma aplicação $\Bbbk$-linear $h : M \longrightarrow N$ é chamado de **homomorfismo de módulos** sobre A (ou simplesmente um morfismo de A-módulos) se $h(am) = ah(m)$ para todo $m \in M$ e $a \in A$.*

A seguir, definimos monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos, conceitos fundamentais que descrevem as relações entre módulos por meio de injeções, sobrejeções e equivalências estruturais.

Definição 1.46. *Um morfismo de A-módulos $h : M \longrightarrow N$ é chamado de **monomorfismo** se for injetivo, ou de **epimorfismo** se for sobrejetivo. Dizemos que h é um **isomorfismo** se for simultaneamente monomorfismo e epimorfismo. Nesse caso, escrevemos $M \cong N$.*

Dado que os objetos são módulos à esquerda de A e os morfismos são morfismos de módulos à esquerda, obtemos a categoria dos módulos à esquerda de A, denotada por A- Mod. A categoria dos módulos à esquerda finitamente gerados forma uma subcategoria plena de A- Mod e é denotada por A- mod.

Exemplo 1.47.

1. *Considere A uma $\Bbbk$-álgebra e M um A-módulo. Se N é um submódulo de M, podemos definir o homomorfismo canônico de A-módulo dado por $\pi : M \longrightarrow M/N$, onde M/N é o módulo quociente. A condição $\pi(am) = a\pi(m)$ é satisfeita, e π é um epimorfismo.*

2. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra e M um A-módulo à esquerda. Um exemplo de endomorfismo de A-módulo é a multiplicação à esquerda por um elemento fixo $a \in A$. Definimos o endomorfismo $h : M \longrightarrow M$ por $h(m) = a \cdot m$. Como h respeita a compatibilidade com a ação de A no módulo M, isto é, $h(a' \cdot m) = a' \cdot h(m)$ para todo $a' \in A$ e $m \in M$, h é de fato um endomorfismo de A-módulo.*

Definição 1.48. *Sejam $M_1, M_2, \ldots, M_n$ A-módulos. A **soma direta** dos módulos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, denotada por $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$, é o conjunto de todas as tuplas definida por:*

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n = \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \mid m_i \in M_i\}.$$

Onde esta equipado com as seguintes operações:
A adição é feita componente a componente, ou seja, para $(m_1, \ldots, m_n), (m'_1, \ldots, m'_n) \in M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$,

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n) + (m'_1, m'_2, \ldots, m'_n) = (m_1 + m'_1, m_2 + m'_2, \ldots, m_n + m'_n).$$

A multiplicação à esquerda por um elemento $a \in A$ *é dada por:*

$$a \cdot (m_1, m_2, \ldots, m_n) = (a \cdot m_1, a \cdot m_2, \ldots, a \cdot m_n).$$

Observação 1.49. *A soma direta* $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ *é também um A-módulo à esquerda, com as operações definidas como acima.*

Introduzimos a seguir o conceito de A-módulo indecomponível, que se refere a módulos que não podem ser expressos como uma soma direta de outros dois módulos não nulos.

Definição 1.50. *Um A-módulo à esquerda M é dito ser* ***indecomponível*** *se M é diferente de zero e não possui decomposição de soma direta* $M \cong N \oplus L$, *onde L e N são A-módulos distintos de zero.*

Observação 1.51. *É importante destacar que a indecomponibilidade implica que o módulo não possui subestruturas maiores que possam ser separadas em componentes menores de maneira não trivial.*

Exemplo 1.52. *Considere* $\Bbbk$ *como uma* $\Bbbk$*-álgebra e seja* $M = \Bbbk$ *um* $\Bbbk$*-módulo à esquerda. Neste caso, M não pode ser decomposto como uma soma direta de dois módulos não nulos, pois qualquer submódulo não trivial de M seria o próprio* $\Bbbk$ *ou* $\{0\}$. *Portanto,* $M = \Bbbk$ *é um módulo indecomponível.*
Para mais Exemplos de módulos indecomponível ver Exemplo 2.17

A seguir, definiremos sequências exatas, que são essenciais na teoria dos módulos por assegurar que as imagens e núcleos dos homomorfismos estejam precisamente alinhados, permitindo uma análise clara das interações entre módulos. A sequência exata curta, em particular, é uma forma comum e útil que frequentemente surge em diversas aplicações práticas.

Definição 1.53. *Uma sequência*

$$\cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} X_n \xrightarrow{h_n} X_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} X_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

(infinita ou finita) de módulos à esquerda sobre A conectados por A-homomorfismos é chamada de ***sequência exata*** *se* $\ker h_n = \operatorname{Im} h_{n-1}$ *para qualquer n. Em particular,*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{r} N \longrightarrow 0$$

é chamada de sequência exata curta se u é um monomorfismo, r é um epimorfismo e $Ker\ r = \operatorname{Im} u$.

Exemplo 1.54. *Considere a sequência:*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\varphi} L \oplus N \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0.$$

Se φ é uma inclusão, ou seja, $\varphi : L \longrightarrow L \oplus N$, em que $\varphi(l) = l + 0$, e ψ é uma projeção de N, ou seja, $\psi : L \oplus N \longrightarrow N$, em que $\psi(l + n) = n$. Então a sequência é exata. Também podemos reescrever a sequência com a seguinte notação:

$$0 \longrightarrow L \hookrightarrow L \oplus N \twoheadrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Em que, a seta $\hookrightarrow$ representa a inclusão (aplicação injetora) e a seta $\twoheadrightarrow$ a projeção (aplicação sobrejetora).

Definiremos a seguir três classes importantes de módulos: simples, injetivos e projetivos. Esses conceitos são essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. O estudo desses módulos é crucial, pois permite a representação de uma álgebra em termos de seus módulos projetivos, o que facilita a análise e a compreensão de sua estrutura. A aplicabilidade e os exemplos desses conceitos serão explorados na Seção 2.3.

Definição 1.55. *Um A-módulo à esquerda é dito ser **simples** se S é não nulo e qualquer submódulo de S é ou zero ou S. Um módulo M é chamado de **semissimples** se for uma soma direta de módulos simples.*

Definição 1.56. *Um A-módulo à esquerda P, é **projetivo** se, para qualquer epimorfismo $h : M \longrightarrow N$, a aplicação induzida $\mathrm{Hom}_A(P, h) : \mathrm{Hom}_A(P, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M)$ é sobrejetivo. Em outras palavras, para qualquer epimorfismo $h : M \longrightarrow N$ e qualquer $f \in \mathrm{Hom}_A(P, N)$, existe um $f' \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow^{f'} & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ M & \xrightarrow{h} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Definição 1.57. *Um A-módulo à esquerda E é **injetivo** se, para qualquer monomorfismo $u : L \longrightarrow M$, A aplicação induzida $\mathrm{Hom}_A(u, E) : \mathrm{Hom}_A(M, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L, E)$ é sobrejetivo. Em outras palavras, para qualquer monomorfismo $u : L \longrightarrow M$ e qualquer $g \in \mathrm{Hom}_A(L, E)$, existe um $g' \in \mathrm{Hom}_A(M, E)$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} & \swarrow_{g'} & \\ & & E & & \end{array}$$

Capítulo 2

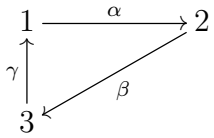
Quivers e álgebras de caminhos

Neste capítulo, introduziremos quivers e utilizaremos essa estrutura para definir álgebras de caminhos, discutir algumas de suas propriedades e apresentar exemplos. Um de nossos objetivos é estabelecer uma relação entre as álgebras de caminhos e $\mathbb{k}$-álgebras básicas, indecomponíveis e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, por meio do Teorema de Gabriel. Posteriormente, exploraremos a conexão entre representações de quivers e módulos de álgebras de caminhos, por meio de um isomorfismo de categorias. Por fim, abordaremos representações simples, projetivas e injetivas.

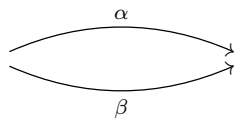
Definição 2.1. *Um **quiver** Q é composto por um conjunto Q_0 de vértices, um conjunto Q_1 de arestas e duas aplicações $s, t : Q_1 \to Q_0$. Para cada aresta $\alpha \in Q_1$, denominamos $s(\alpha)$ e $t(\alpha)$ como o vértice inicial e o vértice terminal de α, respectivamente.*

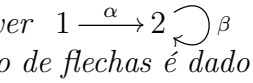
Exemplo 2.2.

1. *O quiver*



   tem o conjunto de vértices dado por $Q_0 = \{1, 2, 3\}$ e o conjunto de flechas é dado por $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, onde $s(\alpha) = t(\gamma) = 1$, $s(\beta) = t(\alpha) = 2$ e $s(\gamma) = t(\beta) = 3$

2. *O quiver*  *é chamado quiver 2-Kronecker, é denotado por* $\mathbf{K}_2$, *Temos que o conjunto de vértices é dado por $Q_0 = \{1, 2\}$ e o conjunto de flechas é dado por $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$ onde $s(\alpha) = s(\beta)$ e $t(\alpha) = t(\beta)$.*

3. *No quiver*  *o conjunto de vértices é dado por $Q_0 = \{1, 2\}$ e o conjunto de flechas é dado por $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$, onde $s(\alpha) = 1$ e $t(\alpha) = s(\beta) = t(\beta)$.*

Observe que naturalmente um quiver é um grafo orientado.

Agora definiremos o conceito de caminho em um quiver Q, fundamental para a construção das álgebras de caminhos, tema central desta seção.

Definição 2.3. *Seja Q um quiver. Um* ***caminho*** *p em $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ de comprimento $l > 0$ é uma sequência de flechas $p = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$, que denotaremos por $p = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$, tal que $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para $1 \leq i < l$.*

$$\bullet \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \xrightarrow{\alpha_2} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{\alpha_l} \bullet$$

Definimos $s(p) = s(\alpha_1)$ e $t(p) = t(\alpha_l)$.

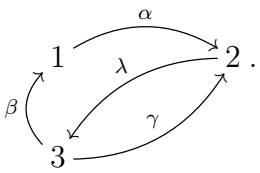
Denotaremos por $\mathscr{P}$ o conjunto de todos os caminho de um quiver Q e um caminho de comprimento zero ou simplesmente um caminho trivial, é um caminho sem flecha associado a um vertice $i \in Q_0$., geralmente denotaremos tal caminho por e_i.

Definição 2.4. *Um caminho de comprimento $l \geq 1$ é chamado de* ***ciclo*** *quando seus vertices inicial e final coincidem.*

Observação 2.5. *Um quiver é chamado acíclico se não contém ciclos.*

Exemplo 2.6.

1. *Seja o quiver Q*



   Observe que $\beta\alpha$ é um caminho de comprimento 2 pois $t(\beta) = s(\alpha)$ por outro lado $\alpha\gamma$ não é um caminho, dado que $t(\alpha) \neq s(\gamma)$. Note que o caminho $\alpha\lambda\beta$ é um ciclo de comprimento 3 pois $s(\alpha) = t(\beta)$.

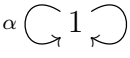
2. *Considerando o quiver*

$$\mathbb{A}_4 := \; 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4$$

   o conjunto de todos os caminhos de $\mathbb{A}_4$ é dado

$$\mathscr{P} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\}.$$

   Observe que o quiver $\mathbb{A}_4$ é acíclico pois não há caminhos p de comprimento $l \geq 1$ tal que $s(p) = t(p)$, ou seja não ha caminhos fechados.

3. *No quiver $Q :=$*  *, o conjunto de todos os caminhos é*

$$\mathscr{P} = \{m(\alpha, \beta) \mid m(X, Y) \text{ é um monômio sem termo constante em } \Bbbk\langle X, Y\rangle\},$$

   onde $\Bbbk\langle X, Y\rangle$ é a álgebra de polinômios nas indeterminadas X, Y não comutativas. Por convênção $\alpha^0 = \beta^0 = e_1$ é o caminho trivial.

A seguir, introduzimos o conceito de subcaminho, essencial para a compreensão da estrutura de caminhos em quivers com relações. Uma discussão mais aprofundada sobre esse tópico será desenvolvida nas Seções 3.1 e 3.2, motivo pelo qual não serão abordados exemplos neste momento.

Definição 2.7. *Seja $p = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ um caminho no quiver Q. Um* ***subcaminho*** *de p é um caminho q que pode ser expresso como $q = \alpha_k\alpha_{k+1}\cdots\alpha_l$, para alguns índices $1 \leq k \leq l \leq n$.*

A partir deste ponto, definiremos álgebras de caminhos e sua multiplicação que é dada por concatenação de caminhos.

Definição 2.8. *Dado um quiver Q, a* ***álgebra de caminhos*** *$\Bbbk Q$ é a álgebra com base nos caminhos de Q, onde a multiplicação de p e q caminhos em Q, é a* ***concatenação de caminhos:***

$$p \cdot q = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l\beta_1\beta_2\cdots\beta_k, & \text{se } t(\alpha_l) = s(\beta_1), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

estendida por bilinearidade.

Observação 2.9. *Para caminhos triviais, temos $e_i \cdot p = p$ se $i = s(p)$, e $e_i \cdot p = 0$ caso contrário. Analogamente, $p \cdot e_i = p$ para $i = t(p)$, e $p \cdot e_i = 0$ se $i \neq t(p)$.*

Exemplo 2.10.

1. *Seja o quiver*

$$\mathbb{A}_3 : \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \, .$$

Note que a base de $\Bbbk\mathbb{A}_3$ é dada por $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ e a multiplicação é dada por:

$\bullet$	e_1	e_2	e_3	α	β	$\alpha\beta$
e_1	e_1	0	0	α	0	$\alpha\beta$
e_2	0	e_2	0	0	β	0
e_3	0	0	e_3	0	0	0
α	0	α	0	0	$\alpha\beta$	0
β	0	0	β	0	0	0
$\alpha\beta$	0	0	$\alpha\beta$	0	0	0

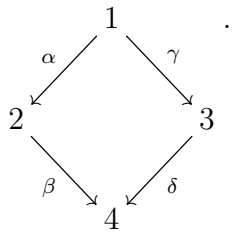
2. *Seja o Quiver*

$$\mathbf{K}_2 : \ 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2 \, ,$$

onde a base de $\Bbbk\mathbf{K}_2$ é dada por $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \alpha, \beta\}$ e a multiplicação é dada por:

$\bullet$	e_1	e_2	α	β
e_1	e_1	0	α	β
e_2	0	e_2	0	0
α	0	α	0	0
β	0	β	0	0

3. Seja Q o quiver



A base de $\Bbbk Q$ é dada por $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\beta, \gamma\delta\}$ e a multiplicação é dada por:

$\bullet$	e_1	e_2	e_3	e_4	α	β	γ	δ	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$
e_1	e_1	0	0	0	α	0	γ	0	$\alpha\beta$	$\gamma\delta$
e_2	0	e_2	0	0	0	β	0	0	0	0
e_3	0	0	e_3	0	0	0	0	δ	0	0
e_4	0	0	0	e_4	0	0	0	0	0	0
α	0	α	0	0	0	$\alpha\beta$	0	0	0	0
β	0	0	0	β	0	0	0	0	0	0
γ	0	0	γ	0	0	0	0	$\gamma\delta$	0	0
δ	0	0	0	δ	0	0	0	0	0	0
$\alpha\beta$	0	0	0	$\alpha\beta$	0	0	0	0	0	0
$\gamma\delta$	0	0	0	$\gamma\delta$	0	0	0	0	0	0

Proposição 2.11. *Seja Q um quiver e $\Bbbk Q$ sua álgebra de caminhos. Então:*

(i) $\Bbbk Q$ é uma álgebra associativa.

(ii) $\Bbbk Q$ tem um elemento identidade se, e somente se, Q_0 é finito.

(iii) $\Bbbk Q$ é de dimensão finita se, e somente se, Q é finito e acíclico.

Demonstração.

(i) Isso decorre diretamente da definição de multiplicação, pois o produto de elementos da base corresponde à concatenação de caminhos, que é uma operação associativa

(ii) Seja w um caminho em Q. Esse caminho necessariamente começa em algum vértice $i \in Q_0$. Como e_i é o caminho trivial que começa e termina em i, temos $e_i \cdot w = w$. Agora, consideremos a soma

$$\sum_{j \in Q_0} e_j \cdot w.$$

Esse somatório contém o termo $e_i \cdot w = w$, e todos os outros termos $e_j \cdot w$ são nulos, pois para $j \neq i$, o caminho trivial e_j não pode ser concatenado com w. Assim, obtemos

$$\sum_{j \in Q_0} e_j \cdot w = w.$$

Isso mostra que $\sum_{j\in Q_0} e_j$ atua como uma identidade em qualquer caminho w em Q. Como Q_0 é finito, concluímos que

$$\sum_{i\in Q_0} e_i$$

é um elemento identidade para $\Bbbk Q$.

Agora, suponha que Q_0 seja infinito e que exista um elemento identidade 1 em $\Bbbk Q$, que pode ser escrito como

$$1 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j,$$

onde os λ_j são escalares não nulos e os w_j são caminhos em Q. Seja Q_0' o conjunto dos vértices iniciais dos caminhos w_j. Como há no máximo m caminhos na soma, o conjunto Q_0' é finito.

Escolha agora um vértice $i \in Q_0 \setminus Q_0'$, ou seja, um vértice que não seja origem de nenhum dos caminhos w_j. Isso implica que $e_i \cdot w_j = 0$ para todo j, logo

$$e_i \cdot 1 = e_i \cdot \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (e_i \cdot w_j) = 0.$$

Por outro lado, como 1 é a identidade, esperamos que $e_i \cdot 1 = e_i$, o que leva à contradição $e_i = 0$, o que não é verdade. Portanto, Q_0 não pode ser infinito.

(iii) Se $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$ é um ciclo em Q, então para cada $t \geq 0$ temos um elemento da base $w^t = (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell)^t$. Além disso, esses elementos são linearmente independentes, pois têm comprimentos diferentes. Portanto, $\Bbbk Q$ é novamente de dimensão infinita. Por outro lado, se Q é finito e acíclico, contém apenas um número finito de caminhos. Como $\Bbbk Q$ é gerada pelos caminhos em Q, segue que $\Bbbk Q$ é de dimensão finita.

□

Agora definiremos o importante conceito de relação em um quiver Q, pois o conjunto dessas relações é fundamental para a construção de álgebra de caminhos com relações.

Definição 2.12. *Seja Q um quiver. Uma relação em Q com coeficientes em $\Bbbk$ é um elemento de $\Bbbk Q$ tal que:*

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$$

onde os λ_i são escalares (não todos zero) e os w_i são caminhos em Q de comprimento pelo menos 2, tal que $s(w_i) = s(w_j)$ e $t(w_i) = t(w_j)$ para todo $i \neq j$.

Se $\rho = \{\sigma_t\}_{t\in T}$ é um conjunto de relação em Q sobre $\Bbbk$, o par (Q, ρ) é chamado de ***quiver com relações*** *em $\Bbbk$.*

Observação 2.13.

i) Se $m = 1$, a relação precedente é chamada de ***relação zero*** *ou relação monomial.*

ii) Se ela é da forma $w_1 - w_2$ (onde w_1, w_2 são dois caminhos), é chamada de ***relação de comutatividade****.*

Alguns exemplos de quivers com relações são apresentados no Exemplo 2.39. Em seções posteriores, exploraremos outros casos e aplicações desse conceito de forma mais detalhada.

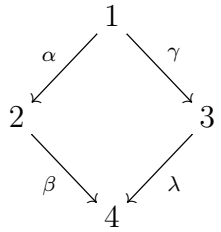
Dizemos que um caminho p em um quiver Q é um caminho em (Q, ρ) se nenhum subcaminho de p está contido no conjunto de relações ρ. Em outras palavras, p não pode ser reduzido a um caminho mais curto aplicando as relações de ρ. O conjunto de todas as classes de equivalência desses caminhos em (Q, ρ) constitui uma base para $\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$. Um caminho em (Q, ρ) de comprimento maior ou igual a 1 é chamado de **máximo** se não puder ser estendido por nenhuma flecha em (Q, ρ) em nenhuma das extremidades. Essas noções serão importantes para a definição seguinte, onde veremos aplicações na Seção 3.1.

Definição 2.14. *Um quiver (Q, ρ) é chamado de* ***localmente limitado*** *se cada flecha de Q pertence a um caminho máximo em (Q, ρ).*

Exemplo 2.15.

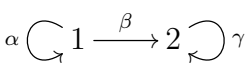
1. *Considere o quiver $\mathbb{A}_3 : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$. Com a relação $\rho = \{\alpha\beta\}$, o par $(\mathbb{A}3, \rho)$ é localmente limitado. Isso ocorre porque α e β são caminhos máximos em $(\mathbb{A}3, \rho)$. Cada uma dessas setas forma um caminho no quiver e, portanto, cada flecha pertence a um caminho máximo em $(\mathbb{A}_3, \rho)$.*

2. *Seja Q o quiver*



   com relações $\rho = \{\alpha\beta - \gamma\lambda\}$. O par (Q, ρ) é localmente limitado. Isso ocorre porque todas as flechas em Q pertencem aos caminhos máximos de (Q, ρ), que são $\alpha\beta$ e $\gamma\lambda$.

3. *Seja o quiver*



   com as relações $\rho = \{\alpha^2, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma^3\}$. O par (Q, ρ) é localmente limitado. Isso ocorre porque todas as flechas em Q pertencem aos caminhos máximos de (Q, ρ), que são α, β e γ^2.

2.1 Teorema de Gabriel

Nesta seção inicialmente, apresentaremos o conceito de $\Bbbk$-álgebra básica, essencial para caracterizar álgebras com estrutura particular em termos de seus módulos indecomponíveis. Em seguida, definiremos o conceito de ideal admissível, que será amplamente explorado nesta seção. Além disso, apresentaremos um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos, o que nos permitirá estabelecer o conceito de quiver ordinário. Nesse contexto, os vértices do quiver corresponderão aos elementos idempotentes ortogonais primitivos da álgebra A. Com esses conceitos definidos, introduziremos uma aplicação

$$\varphi : \Bbbk Q_A \longrightarrow A$$

e verificaremos que ela é um morfismo sobrejetivo. Além disso, demonstraremos que o núcleo de φ, é um ideal admissível. Esta seção tem como base o trabalho apresentado em [Gir15].

Definição 2.16. *Seja $A \cong P_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus P_t^{r_t}$ a decomposição de A em A-módulos indecomponíveis onde $P_i \ncong P_j$ se $i \neq j$. No caso em que $r_i = 1$ para todo $i = 1, \ldots, t$ dizemos que A é **básica**.*

Exemplo 2.17. *Considere a $\Bbbk$-álgebra $A = T_2(\Bbbk)$. Note que podemos decompor A como soma direta de dois módulos à esquerda:*

$$A = Ae_1 \oplus Ae_2,$$

onde

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são idempotentes ortogonais de A.

Os módulos Ae_1 e Ae_2 são gerados pelos produtos à esquerda de A com e_1 e e_2, respectivamente. Agora, vamos verificar que esses módulos são indecomponíveis.

Considere primeiro o módulo Ae_1. Note que qualquer elemento de Ae_1 é da forma

$$\begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\dim Ae_1 = 1$, segue que Ae_1 é indecomponível.

Agora, consideremos Ae_2. Qualquer elemento de Ae_2 é da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Suponha, por contradição, que Ae_2 seja decomponível, isto é, que exista uma decomposição $Ae_2 = M_1 \oplus M_2$, onde M_1 e M_2 são submódulos não triviais. Então, podemos escolher elementos não nulos $m_1 \in M_1$ e $m_2 \in M_2$ da forma

$$m_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \quad e \quad m_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix},$$

com $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \Bbbk$. Como Ae_2 é gerado por elementos dessa forma, podemos escolher m_1 e m_2 de modo que a_1 ou b_1 seja não nulo, e o mesmo para a_2 e b_2.

Seja agora o elemento

$$m = \begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{bmatrix} = m_1 + m_2.$$

Pelo fato de M_1 e M_2 serem submódulos, temos que $m_1, m_2 \in Ae_2$ implicam que $m \in Ae_2$. Como M_1 e M_2 formam uma soma direta, segue que se $m \neq 0$, então $m \notin M_1$ implica que $m_2 \not\subseteq M_1$, o que contradiz a suposição de que $Ae_2 = M_1 \oplus M_2$. Assim, Ae_2 não pode ser escrito como soma direta de dois submódulos não triviais, o que prova que é indecomponível.

Agora retomamos a consider novamente a álgebra de caminhos $\Bbbk Q$ associada a um quiver Q finito e passamos a examinar a estrutura dos ideais bilaterais em $\Bbbk Q$.

Definição 2.18. *Seja Q um quiver finito. O ideal bilateral da álgebra de caminhos $\Bbbk Q$ gerado pelas flechas de Q é chamado de **ideal das flechas** de $\Bbbk Q$ e é denotado por R_Q.*

Observação 2.19. *Note que há uma decomposição em soma direta*

$$R_Q = \Bbbk Q_1 \oplus \Bbbk Q_2 \oplus \cdots \oplus \Bbbk Q_n \oplus \ldots$$

do espaço vetorial R_Q sobre $\Bbbk$, onde $\Bbbk Q_n$ é o subespaço de $\Bbbk Q$ gerado pelo conjunto Q_n de todos os caminhos de comprimento n. Em particular, o espaço vetorial subjacente de R_Q é gerado por todos os caminhos em Q de comprimento $n \geq 1$. Isso implica que, para cada $n \geq 1$,

$$R_Q^n = \bigoplus_{\mathrm{m} \geq n} \Bbbk Q_{\mathrm{m}}$$

e, portanto, R_Q^n é o ideal de $\Bbbk Q$ gerado, como espaço vetorial sobre $\Bbbk$, pelo conjunto de todos os caminhos de comprimento $\geq \ell$.

Exemplo 2.20. *Considere o quiver Q:*

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5,$$

e sua álgebra de caminhos $\Bbbk Q$. O ideal R_Q^3 é o ideal gerado pelos caminhos de comprimento 3, $\alpha\beta\gamma$ e $\beta\gamma\delta$, ou seja, $R_Q^3 = \langle \alpha\beta\gamma, \beta\gamma\delta \rangle$.

Lema 2.21. *Seja Q um quiver finito e $\Bbbk Q$ sua álgebra de caminho. Então, $R_Q = \mathrm{rad}(\Bbbk Q)$ se, e somente se, Q for acíclico.*

Demonstração. Suponha que $R_Q = \mathrm{rad}(\Bbbk Q)$.Recorde que por definição $\mathrm{rad}(\Bbbk Q)$ é a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de $\Bbbk Q$. Se Q não é acíclico, então existe um ciclo em Q, digamos $p = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$. Considere agora $J = \langle p \rangle$, o ideal gerado por p. Note que $J^n = \langle p^n \rangle$, o ideal gerado por p^n. Seja M o ideal maximal à esquerda gerado por todos os caminhos que não passam pelo vértice $s(p) = t(p)$. Então, $p \notin M$ e $J^n \not\subseteq M$.Então, J^n é gerado por caminhos que começam e terminam

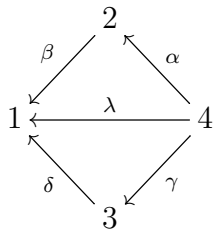
em $s(p) = t(p)$. No entanto, a interseção de todos os ideais maximais à esquerda não contém esses caminhos, pois existe um ideal maximal à esquerda que contém todos os caminhos que não passam por $s(p)$ e, portanto, não contém p nem suas potências. Como $J^n \subset R_Q$, segue que $\mathrm{rad}(\Bbbk Q)$ está estritamente contido em R_Q, o que contradiz a hipótese. Portanto, se $R_Q = \mathrm{rad}(\Bbbk Q)$, então Q deve ser acíclico.

Suponha Q seja aciclico. Considere um caminho p em Q. Qualquer caminho de comprimento suficientemente grande em Q terá que terminar sem voltar ao mesmo vértice, pois não há ciclos.Portanto, para n suficientemente grande, R_Q^n conterá apenas caminhos que não podem ser estendidos indefinidamente, pois, sendo Q acíclico, qualquer caminho suficientemente longo necessariamente termina. Agora, considere o radical de Jacobson, $\mathrm{rad}(\Bbbk Q)$. Ele é definido como a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de $\Bbbk Q$. Se I é um ideal à esquerda que não contém ciclos, então I é um ideal próprio. Portanto, existe um ideal maximal à esquerda M que contém I e também não contém ciclos. Concluímos que $R_Q = \mathrm{rad}(\Bbbk Q)$ quando Q é acíclico. □

Definição 2.22. *Seja Q um quiver finito. Um ideal I de $\Bbbk Q$ é dito* ***admissível*** *se existir $m \geq 2$ tal que*

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2.$$

Exemplo 2.23. *Seja Q o quiver*



Vejamos que o ideal $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ da $\Bbbk$-álgebra $\Bbbk Q$ é admissível. De fato, pois, $R_Q^2 = span\{\alpha\beta, \gamma\delta\}$ e $R_Q^3 = span\{0\}$, logo temos $R_Q^3 \subseteq I \subseteq R_Q^2$.

Seja A uma $\Bbbk$-álgebra básica de dimensão finita indecomponível e seja $A \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_t$ a decomposição de A em A-módulos indecomponíveis. Em particular,

$$1 = \sum_{i=1}^{t} e_i$$

com $e_i \in P_i$. Os elementos $e_1, \ldots, e_t$ possuem as seguintes propriedades:

(i) Para cada i, e_i é um **idempotente**, ou seja, $e_i^2 = e_i$.

(ii) $\{e_1, \ldots, e_t\}$ é um conjunto **ortogonal**, ou seja, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$.

(iii) Para cada i, e_i é **primitivo**, ou seja, se $e_i = e' + e''$ onde e' e e'' são idempotentes ortogonais, então $e' = 0$ ou $e'' = 0$.

De fato, $e_ie_j = 0$ segue do fato que $P_i \ncong P_j$, o qual implica que $e_i \cdot 1 = e_i \sum_{j=1}^{n} e_j = \sum_{j=1}^{n} e_ie_j = e_i^2$ e por fim suponha que exista $a \in A$ tal que $a^2 = a$ e $ae_i = e_ia = a$ para algum i. Então, $a \in P_i$ porque $ae_i = e_ia = a$. Mas isso implica que $a = 0$ ou $a = e_i$, pois e_i é primitivo.

Definição 2.24. *Um conjunto $\{e_1, \ldots, e_t\} \subset A$ como acima é chamado de* ***sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de*** *A.*

Observação 2.25. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra básica de dimensão finita. Então, A pode ser escrita como uma soma direta*

$$A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \cdots \oplus Ae_n,$$

onde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são idempotentes ortogonais primitivos de A, e n é o número de A-módulos projetivos indecomponíveis, considerados a menos de isomorfismo. Além disso, cada termo Ae_i é um módulo indecomponível, e, portanto, essa decomposição corresponde à decomposição de A como soma direta de módulos indecomponíveis.

Para uma melhor exposição e com o intuito de evitar confusão, neste capítulo, denotaremos temporariamente os vértices do quiver por ε_i, diferenciando-os dos idempotentes e_i da $\Bbbk$-álgebra A.

Definição 2.26. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra, definimos o quiver Q_A por n vértices $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ enumerados em correspondência com $\{e_1, \ldots, e_n\}$. O número de flechas começando em ε_i e terminando em ε_j será*

$$\dim_{\Bbbk} e_i \left(\operatorname{rad} A / \operatorname{rad}^2 A\right) e_j.$$

Este quiver Q_A assim definido é chamada de ***quiver ordinário de*** *A.*

Observação 2.27.

(i) Q_A é bem definido, ou seja, não depende do sistema de idempotentes ortogonais primitivos escolhido (a não ser a enumeração dos vértices).

(ii) Se for A indecomponivel, então Q_A é conexo

(iii) Seja Q um quiver e $A = \Bbbk Q$ a álgebra dos caminhos de Q. Então $Q_A = Q$.

Exemplo 2.28.

1. *Seja $A = \Bbbk[t]/\langle t^m \rangle$, onde $m \geq 1$, então Q_A tem apenas um ponto, porque o único idempotente diferente de zero de A é a sua identidade. Temos que $\operatorname{rad} A = \langle \bar{t} \rangle$, onde $\bar{t} = t + \langle t^m \rangle$; de fato, $\langle \bar{t} \rangle^m = 0$ e $A/\langle \bar{t} \rangle \cong \Bbbk$. Consequentemente, $\operatorname{rad}^2 A = \left\langle \bar{t}^2 \right\rangle$ e $\dim_{\Bbbk} \left(\operatorname{rad} A / \operatorname{rad}^2 A\right) = 1$. Uma base de $\operatorname{rad} A / \operatorname{rad}^2 A$ é dada pela classe de $\bar{t}$ no quociente $\langle \bar{t} \rangle / \langle \bar{t}^2 \rangle$. Por isso Q_A é o quiver*

2. *Considere a* $\Bbbk$*-álgebra* $A = T_2(\Bbbk)$*, onde seus elementos idempotentes e ortogonais são:*

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Além disso temos, ver Exemplo 1.26:

$$\operatorname{rad} A = \begin{bmatrix} 0 & \Bbbk \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \operatorname{rad}^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A} = \begin{bmatrix} 0 & \Bbbk \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \dim\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) = 1$$

Calculando $E_{ii}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{jj}$*, temos:*

$$E_{11}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo assim $\dim E_{11}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{11} = 0$

$$E_{11}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & \Bbbk \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo assim $\dim E_{11}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{22} = 1$

$$E_{22}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo assim $\dim E_{22}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{11} = 0$

$$E_{22}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo assim $\dim E_{22}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{22} = 0$

Logo, o quiver Q_A *é dado por.*

$$1 \longrightarrow 2.$$

3. Considere a $\mathbb{k}$*-álgebra*

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{k} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{k} & 0 \\ \mathbb{k} & \mathbb{k} & \mathbb{k} \end{bmatrix}$$

A partir desta $\mathbb{k}$*-álgebra, construiremos seu quiver. Primeiro devemos descobrir seus elementos idempotentes e ortogonais. Notamos que, os elementos*

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e \quad E_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formam um sistema completo idempotentes ortogonais. Além disso,

$$\operatorname{rad} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{k} & \mathbb{k} & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \operatorname{rad}^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{k} & \mathbb{k} & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \dim\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) = 2$$

Calculando $E_{ii}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{jj}$*, temos:*

$$E_{11}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{sendo assim} \quad \dim E_{11}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{11} = 0.$$

$$E_{11}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{sendo assim} \quad \dim E_{11}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{22} = 0.$$

$$E_{11}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{sendo assim} \quad \dim E_{11}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{33} = 0.$$

$$E_{22}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{sendo assim} \quad \dim E_{22}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{11} = 0.$$

$$E_{22}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{sendo assim} \quad \dim E_{22}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{22} = 0.$$

$$E_{22}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{sendo assim} \quad \dim E_{22}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right) E_{33} = 0.$$

$$E_{33}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right)E_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Bbbk & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{sendo assim} \quad \dim E_{33}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right)E_{11} = 1.$$

$$E_{33}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right)E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{sendo assim} \quad \dim E_{33}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right)E_{22} = 1.$$

$$E_{33}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right)E_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{sendo assim} \quad \dim E_{33}\left(\frac{\operatorname{rad} A}{\operatorname{rad}^2 A}\right)E_{33} = 0.$$

Logo, o quiver Q_A é

$$1 \longleftarrow 3 \longrightarrow 2.$$

A seguir enunciaremos e demostraremos um teorema que apresenta uma construção de um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras $\varphi : \Bbbk Q_A \longrightarrow A$, onde $\Bbbk Q_A$ representa a álgebra de caminhos associada a um quiver Q_A e A é uma $\Bbbk$-álgebra dada. A construção é baseada na escolha de um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de A. O homomorfismo φ é definido de maneira linear sobre os geradores de $\Bbbk Q_A$ e consequentemente preserva a multiplicação de caminhos. Para este fim, denotaremos o conjunto de flechas de ε_i para ε_j, por $[\varepsilon_i, \varepsilon_j]$.

Teorema 2.29. *Dado um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de A, existe um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras $\varphi : \Bbbk Q_A \longrightarrow A$ definido da seguinte forma: para cada conjunto de flechas $[\varepsilon_i, \varepsilon_j]$, escolhemos uma base $\{y_\alpha : \alpha \in [\varepsilon_i, \varepsilon_j]\}$ de $e_i(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_j$, e então definimos $\varphi(\varepsilon_i) = e_i$ e $\varphi(\alpha) = x_\alpha$ para $\alpha \in Q_A$, onde $x_\alpha \in e_i(\operatorname{rad} A)e_j$ são escolhidos de forma que $\overline{x}_\alpha = y_\alpha$ para todo $\alpha \in Q_A$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que φ está bem definida; para isso, verificaremos que, se $\alpha_1 = \alpha_2$ em $\Bbbk Q_A$, então $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$.

Se α_1 e α_2 são vértices, digamos $\alpha_1 = \alpha_2 = \varepsilon_i$, temos diretamente pela definição de φ que:

$$\varphi(\alpha_1) = \varphi(\varepsilon_i) = e_i = \varphi(\varepsilon_i) = \varphi(\alpha_2).$$

Se α_1 e α_2 são flechas, digamos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, temos que $\varphi(\alpha) = x_\alpha$, com $x_\alpha \in e_i(\operatorname{rad} A)e_j$ tal que $\overline{x_\alpha} = y_\alpha$. Como a escolha de x_α depende apenas de $\overline{x_\alpha}$ no espaço quociente $e_i(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)e_j$, a definição de $\varphi(\alpha)$ é única e consistente, garantindo que:

$$\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2).$$

Portanto, φ está bem definida.

Para provar que φ é um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras, devemos mostrar que $\varphi(\gamma\delta) = \varphi(\gamma)\varphi(\delta)$ para quaisquer dois caminhos γ e δ em Q_A.

Considerando caminhos $\gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ e $\delta = \beta_1 \cdots \beta_m$ na base usual de $\Bbbk Q_A$, temos:
Se $t(\gamma) = s(\delta)$:

$$\gamma\delta = \alpha_1 \cdots \alpha_n\beta_1 \cdots \beta_m \quad \text{e} \quad \varphi(\gamma\delta) = x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_n}x_{\beta_1} \cdots x_{\beta_m} = \varphi(\gamma)\varphi(\delta).$$

Caso contrário, se $t(\gamma) = j \neq i = s(\delta)$, temos $\gamma\delta = 0$ e $\varphi(\gamma\delta) = 0$. Além disso, $\varphi(\gamma) = x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_n}$, com $x_{\alpha_1} \in (\operatorname{rad} A)e_j$ e $\varphi(\gamma) = x_{\beta_1} \cdots x_{\beta_m}$ com $x_{\rho_1} \in e_i(\operatorname{rad} A)$. Como $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$, segue que $x_{\alpha_m} x_{\beta_1} = 0$, e, portanto, $\varphi(\gamma)\varphi(\delta) = 0$.

Assim, φ preserva a multiplicação de caminhos, estabelecendo que é um homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras. □

Seja $R = \left\{ x_\alpha : \alpha \in \bigcup_{i,j} [\varepsilon_i, \varepsilon_j] \right\}$. Por construção, $\{e_1, \ldots, e_n\} \cup R \subset \operatorname{Im} \varphi$. Para mostrar que φ é sobrejetivo, basta mostrar que cada elemento de A é um polinômio com coeficientes em $\Bbbk$ nos elementos de $\{e_1, \ldots, e_n\} \cup R$, ou equivalentemente que cada elemento de $\operatorname{rad} A$ é um polinômio com coeficientes em $\Bbbk$ nos elementos de R, pois

$$A = \operatorname{rad} A \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \Bbbk e_i$$

como espaço vetorial. Esse resultado segue do [ASS06, Teorema Wedderburn-Malcev, pág. 6], que garante a existência de uma subálgebra $\Bbbk$-álgebra B tal que $A = B \oplus \operatorname{rad} A$ e B é isomorfa a $A/\operatorname{rad} A$. No caso de A ser uma $\Bbbk$-álgebra básica, a subálgebra B pode ser identificada com $\bigoplus_{i=1}^{n} \Bbbk e_i$, como indicado na demonstração da [ASS06, Proposição 6.2(a), pág. 33], a qual afirma que $A/\operatorname{rad} A$ é isomorfa a um produto $\Bbbk \times \Bbbk \times \cdots \times \Bbbk$ de n cópias de $\Bbbk$, onde n corresponde ao número de elementos idempotentes ortogonais primitivos de A. Portanto,

$$\operatorname{rad} A = \langle R \rangle.$$

Observação 2.30. *A hipótese de que $\Bbbk$ é algebricamente fechado é essencial no argumento acima. De fato, como A é uma $\Bbbk$-álgebra básica, sua álgebra semissimples associada satisfaz*

$$A/\operatorname{rad}(A) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \Bbbk e_i.$$

Essa decomposição decorre do fato de que, sobre um corpo algebricamente fechado, toda álgebra semissimples de dimensão finita é isomorfa a um produto de álgebras de matrizes sobre $\Bbbk$. No caso de A ser básica, cada bloco reduz-se a $\Bbbk e_i$, garantindo que os módulos simples de A são precisamente os $\Bbbk$-espaços vetoriais $\Bbbk e_i$.

Se $\Bbbk$ não fosse algebricamente fechado, os módulos simples poderiam ter dimensão maior que 1 sobre $\Bbbk$, alterando a estrutura de $A/\operatorname{rad} A$ e impedindo sua identificação direta com $\bigoplus_{i=1}^{n} \Bbbk e_i$. Isso comprometeria a decomposição de A e, consequentemente, a sobrejetividade da aplicação φ.

Lema 2.31. *Com a notação acima, se $s \geq 1$, então*

$$\operatorname{rad}^s A = \operatorname{rad}^{s+1} A + \langle R \rangle^s.$$

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre s. Vamos considerar a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}^2 A \longrightarrow \operatorname{rad} A \longrightarrow \operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A \longrightarrow 0$$

Agora vamos definir o monomorfismo $g : \text{rad}A/\text{rad}^2A \longrightarrow \text{rad}\, A$ dado por $g(\overline{x}_\alpha) = x_\alpha$ (lembre-se que $\left\{\overline{x}_\alpha : \alpha \in \bigcup_{i,j}[\varepsilon_i, \varepsilon_j]\right\}$ é uma base de $\text{rad}\, A/\,\text{rad}^2\, A$). Como espaços vetoriais $\text{rad}\ A = \text{rad}^2\, A \oplus \text{Im}\, g \subset \text{rad}^2\, A + \langle R\rangle$.

Seja agora $s > 1$ e $x \in \text{rad}^s\, A, x = x_1 \cdots x_s$ com $x_i \in \text{rad}\, A$. Por indução temos que para $x' = x_1 \cdots x_{s-1}$ e x_s temos que existem $y' \in \text{rad}^s\, A$ e $z' \in \langle R\rangle^{s-1}$ tal que $x' = y' + z'y$ também $y_s \in \text{rad}^2\, A$ e $z_s \in \langle R\rangle$ tal que $x_s = y_s + z_s$.

Então $x = x'x_s = y'y_s + y'z_s + zy'_s + z'z_s$. Como $\langle R\rangle \subset \text{rad}\, A$, $yy'_s + y'z_s + zy'_s \in \text{rad}^{s+1}\, A$ e $z'z_s \in \langle R\rangle^s$ temos isso

$$\text{rad}^s\, A = \text{rad}^{s+1} + \langle R\rangle^s.$$

□

A seguir, temos como objetivo verificar que a aplicação $\varphi : \Bbbk Q_A \longrightarrow A$ é sobrejetora.

Proposição 2.32. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra e Q_A o quiver ordinário associado a A. Considere a aplicação $\varphi : \Bbbk Q_A \longrightarrow A$, definida no Teorema 2.29. Então:*

(i) $\text{rad}\, A = \langle R\rangle$.

(ii) A aplicação φ é sobrejetiva.

Demonstração.

(i) Claramente temos que $\langle R\rangle \subseteq \text{rad}\, A$. Por outro lado, para provar que $\text{rad}\, A \subseteq \langle R\rangle$, considere $x \in \text{rad}\, A$. Sabemos que para todo $m \geq 2$, $x = x_m + y$, onde $x_m \in \text{rad}^{\,m} A$ e $y \in \langle R\rangle$. Como $\text{rad}\, A$ é nilpotente, concluímos que $x \in \langle R\rangle$. Portanto $\text{rad}\, A = \langle R\rangle$.

(ii) A sobrejetividade de φ segue do item aterior.

□

A seguir, enuciaremos um teorema, onde vamos verificar que o $Ker\varphi$ é um ideal admissível de $\Bbbk Q_A$.

Teorema 2.33. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra básica, indecomponível e de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado. Seja $\Bbbk Q_A$ a álgebra de caminhos associada ao quiver Q_A e $\varphi : \Bbbk Q_A \longrightarrow A$ um homomorfismo. Então o núcleo de φ é um ideal admissível de $\Bbbk Q_A$.*

Demonstração. Para mostrar que $\ker\varphi$, é um ideal admissível de $\Bbbk Q_A$, devemos provar que existe um $n \geq 2$ tal que $R^n_{Q_A} \subset \ker\varphi \subset R^2_{Q_A}$.

(i) $\ker\varphi \subset R^2_{Q_A}$:

Seja $x \in \Bbbk Q_A$. Podemos expressar uma álgebra de caminhos como um espaço vetorial, como a soma direta dos espaços vetoriais gerados por caminhos de comprimento zero, comprimento um, comprimento dois, etc., ou seja,

$$x = \sum_{\varepsilon_i \in Q_0} \lambda_i \varepsilon_i + \sum_{\alpha \in Q_1} \lambda_\alpha \alpha + y,$$

onde y é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior que dois, e, portanto, $y \in R_{Q_A}^2$.

Se $x \in \ker \varphi$, precisamos mostrar que $\lambda_i = \lambda_\alpha = 0$. Temos

$$0 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{|Q_0|} \lambda_i e_i + \sum_{\alpha \in Q_1} \lambda_\alpha x_\alpha + \varphi(y). \tag{2.1}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{|Q_0|} \lambda_i e_i = -\left(\sum_{\alpha \in Q_1} \lambda_\alpha x_\alpha + \varphi(y) \right) \in \mathrm{rad}A,$$

o que implica que $\lambda_i = 0$ para todo i, já que $\mathrm{rad}A$ é nilpotente. Ao tomar (2.1) módulo $\mathrm{rad}^2 A$, obtemos $0 = \sum_{\alpha \in Q_1} \lambda_\alpha \overline{x}_\alpha$. Dado que $\left\{ \overline{x}_\alpha : \alpha \in \bigcup_{i,j} [\varepsilon_i, \varepsilon_j] \right\}$ é uma base de $\mathrm{rad}A/\mathrm{rad}^2 A$, concluímos que $\lambda_\alpha = 0$ para todo α. Assim, $x \in R_{Q_A}^2$.

(ii) $\ker \varphi$ contém alguma potência de R_{Q_A}:

Observamos que $\varphi\left(R_{Q_A}^r\right) \subset \mathrm{rad}^r A$ para todo $r > 0$. Logo, $R_{Q_A}^r \subset \varphi^{-1}(\mathrm{rad}^r A)$ para cada r. Como $\mathrm{rad}A$ é nilpotente, existe $n \geq 2$ talque $R_{Q_A}^n \subset \varphi^{-1}(\mathrm{rad}^n A) = \varphi^{-1}(0) = \ker \varphi$.

□

De posse dos resultados provados anteriormente, agora enunciamos o teorema de Gabriel, no qual é nosso objetivo nesta Seção.

Teorema 2.34 (Gabriel, 1972)**.** *Se A é uma $\Bbbk$-álgebra básica indecomponível e de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado. Então existe um quiver Q_A e um epimorfismo de álgebras $\varphi : \Bbbk Q_A \longrightarrow A$ tal que $\ker\varphi$ é um ideal admissível de $\Bbbk Q$.*

Demonstração. Segue dos teoremas (2.29,2.32,2.33). □

2.2 Representações de quivers

A partir de agora, estudaremos representações de quivers com o objetivo de estabelecer uma relação entre essas representações e os módulos sobre a álgebra de caminhos, através de isomorfismo de categorias.

Definição 2.35. *Uma **representação de um quiver** Q sobre um corpo $\Bbbk$ consiste de um conjunto de espaços vetoriais sobre $\Bbbk$*

$$\{M(i) \mid i \in Q_0\},$$

acompanhado por um conjunto de aplicações lineares

$$\{\varphi_\alpha : M(i) \longrightarrow M(j) \mid \alpha : i \longrightarrow j,\ i, j \in Q_0,\ \alpha \in Q_1\}.$$

Denotamos uma representação de um quiver Q como (M_i, φ_α) ou simplesmente como (M, φ).

Definição 2.36. *Seja Q um quiver finito e $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ uma representação de Q. Para qualquer caminho não trivial $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell$ de i a j em Q, definimos a* ***avaliação de*** *M no caminho w para ser a aplicação linear $\Bbbk$ de M_i a M_j definido por:*

$$\varphi_w = \varphi_{\alpha_\ell}\varphi_{\alpha_{\ell-1}}\cdots\varphi_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}.$$

A definição de avaliação se estende a combinações $\Bbbk$-lineares de caminhos que seus vertices inicial e final coincidem; assim temos:

$$\rho = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k w_k,$$

seja tal combinação, onde $\lambda_k \in \Bbbk$ e w_k é um caminho em Q, para cada k, então

$$\varphi_\rho = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_{w_k}.$$

Agora somos capazes de definir uma noção de representação de um quiver limitado.

Definição 2.37. *Seja assim Q um quiver finito e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $\Bbbk Q$. Diz-se que uma representação $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ de Q é* ***limitada*** *por $\mathcal{I}$, ou satisfaz as relações de $\mathcal{I}$, se tivermos*

$$\varphi_\rho = 0, \qquad \text{para todas as relações} \qquad \rho \in \mathcal{I}.$$

Observação 2.38. *Se $\mathcal{I}$ é gerado pelo conjunto finito de relações $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$, a representação M é limitada por $\mathcal{I}$ se, e somente se, $\varphi_{\rho_n} = 0$, para todo $1 \leq n \leq m$.*

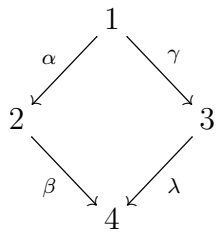
Exemplo 2.39.

1. *Considere o quiver $\mathbb{A}_3 :\ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ com a relação $\rho = \{\alpha\beta\}$. Segue abaixo algumas representações de $\mathbb{A}_3$:*

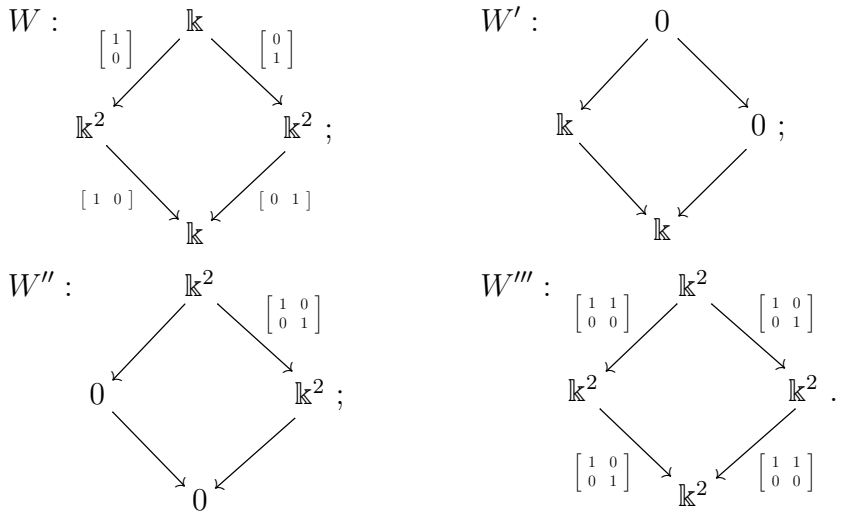
$$M :\ \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \longrightarrow 0\,; \qquad M' :\ \Bbbk^2 \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]} \Bbbk^2 \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]} \Bbbk^2\,; \qquad M'' :\ 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \Bbbk\,;$$

$$M''' :\ \Bbbk^3 \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]} \Bbbk^2 \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]} \Bbbk^3\,; \quad M'''' :\ 0 \longrightarrow \Bbbk \longrightarrow 0\,; \qquad M''''' :\ \Bbbk^2 \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]} \Bbbk^3 \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]} \Bbbk^2\,.$$

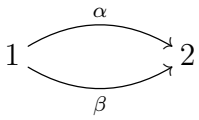
2. *Seja Q o quiver*



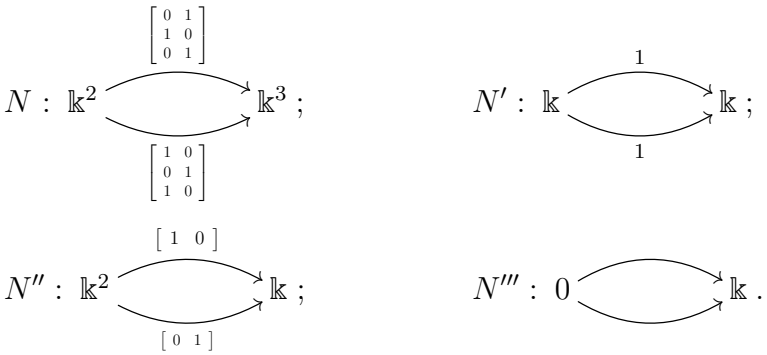
com relações $\rho = \{\alpha\beta - \gamma\lambda\}$. *Algumas representações de* Q *são dadas por.*



3. Seja o quiver 2*-Kronecker* $\mathbf{K}_2$ *dado por:*



algumas representações de $\mathbf{K}_2$ *são dadas por.*



Formalizaremos agora o conceito de morfismo entre representações de um quiver.

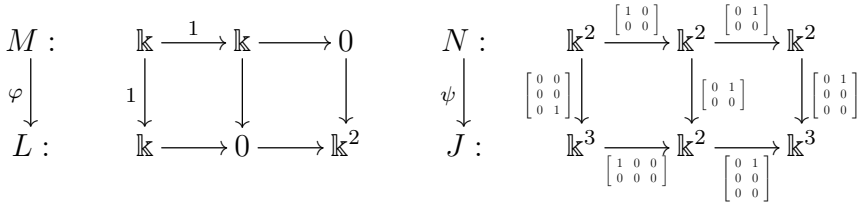
Definição 2.40. *Um* ***morfismo*** $h : (M, \varphi) \longrightarrow (M', \varphi')$ *entre duas representações de* Q *é uma coleção* $\{h_i : M(i) \longrightarrow M'(i)\}_{i \in Q_0}$ *de aplicações* $\Bbbk$*-lineares tal que para cada flecha* $\alpha : i \longrightarrow j$ *em* Q *o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{array}{ccc} M(i) & \xrightarrow{\quad h_i \quad} & M'(i) \\ {\scriptstyle \varphi_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'_\alpha} \\ M(j) & \xrightarrow[\quad h_j \quad]{} & M'(j) \end{array}$$

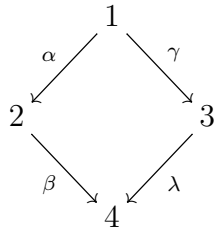
Se $h : (M, \varphi) \longrightarrow (M', \varphi')$ e $g : (M'.\varphi') \longrightarrow (M'', \varphi'')$ são duas aplicações entre representações então a composição é definida pela coleção de aplicações $g_i h_i : M(i) \longrightarrow M''(i)$ para todo $i \in Q_0$. Assim, obtém-se a categoria de representações de Q sobre $\Bbbk$, que é denotada por $\operatorname{Rep} Q$. Denotamos por $\operatorname{Rep}(Q, \mathcal{I})$ a subcategoria plena de $\operatorname{Rep} Q$ limitada pela relação.

Exemplo 2.41.

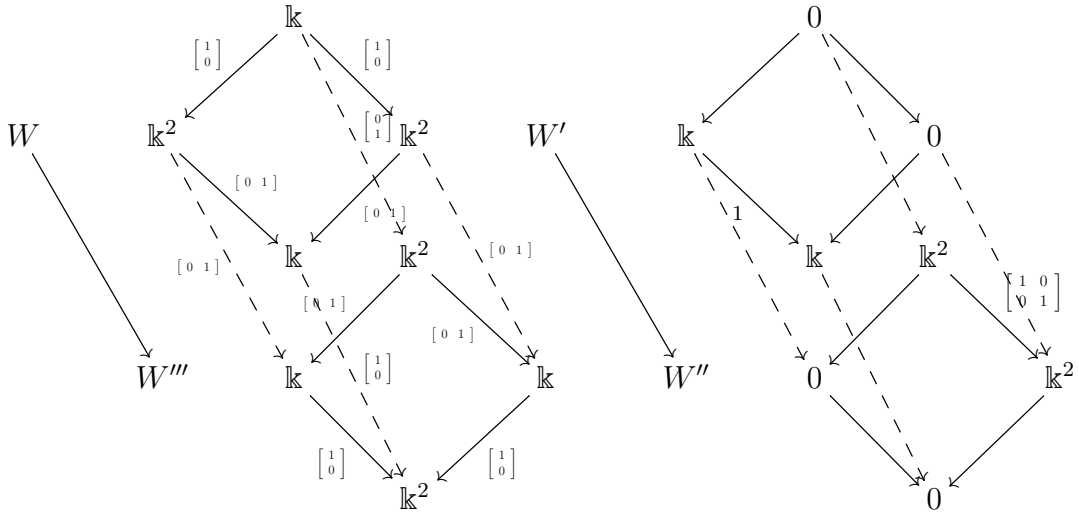
1. *No quiver* $\mathbb{A}_3 : \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ *com a relação* $\rho = \{\alpha\beta\}$ *temos os morfismos de representações:*



2. *Considere as representações do quiver*

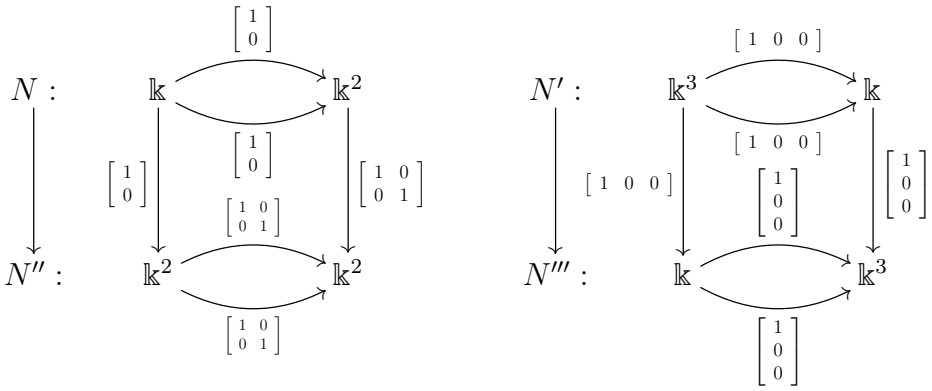


com relações $\rho = \{\alpha\beta - \gamma\lambda\}$*, visto no Exemplo 2.39 item 2, então temos os seguintes morfismos:*



3. *Considerando o quiver* 2*-Kronecker, onde algumas representações de* $\mathbf{K}_2$ *são dadas no Exemplo 2.39 item 3, a seguir temos alguns morfismo entre representações*

de $\mathbf{K}_2$*:*



Construiremos agora o funtor

$$F : A\text{- Mod} \longrightarrow \mathrm{Rep}(Q, \mathcal{I}),$$

onde $A = \Bbbk Q/\mathcal{I}$. Para isso, seja M um A-módulo. Definimos $F(M) = \left(M_i, \varphi_\alpha^M\right)$ da seguinte forma:

- Para cada $i \in Q_0$, consideramos $e_i = \varepsilon_i + \mathcal{I}$, o idempotente primitivo correspondente em $A = \Bbbk Q/\mathcal{I}$, e definimos $M_i = e_i M$.
- Para uma flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ em Q_1, seja $\overline{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$ a classe de α em $\mathcal{I}$. Definimos a aplicação

  $$\varphi_\alpha^M : M_i \longrightarrow M_j, \quad \varphi_\alpha^M(x) = \overline{\alpha}x \quad \text{(ou seja, } e_i\overline{\alpha}e_j x),$$

  para todo $x \in M_i$. Como M é um A-módulo à esquerda, φ_α^M é uma aplicação $\Bbbk$-linear.

Agora, consideremos uma relação $\rho = \sum_{k=1}^m \lambda_k w_k \in \mathcal{I}$ entre os vértices i e j, onde $w_k = \alpha_{k,1}\alpha_{k,2}\cdots\alpha_{k,\ell_k}$ são caminhos no quiver. Temos:

$$\begin{aligned}
\varphi_\rho^M(x) &= \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_{w_k}^M(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_{\alpha_{k,1}}^M \cdots \varphi_{\alpha_{k,\ell_k}}^M(x) \\
&= \sum_{k=1}^m \lambda_k (\overline{\alpha}_{k,1}\cdots\overline{\alpha}_{k,\ell_k})x = \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \overline{w_k}\right) x \\
&= \overline{\rho}x = 0 \cdot x = 0.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $F(M)$ é uma representação bem definida.

Agora, seja $f : M \longrightarrow M'$ um homomorfismo de A-módulos. Definimos o morfismo

$$F(f) : F(M) \longrightarrow F(M')$$

em $\mathrm{Rep}(Q, \mathcal{I})$ da seguinte forma: para $i \in Q_0$ e $x = e_i x \in M_i = e_i M$, temos

$$f(e_i x) = f(e_i^2 x) = e_i f(e_i x) \in e_i M' = M_i'.$$

Assim, a restrição de f a M_i define uma aplicação $\Bbbk$-linear

$$f_i : M_i \longrightarrow M'_i.$$

Definimos $F(f) = (f_i)_{i \in Q_0}$. Verificamos agora que, para qualquer flecha $\alpha : i \longrightarrow j$, a seguinte igualdade é satisfeita:

$$\varphi_\alpha^{M'} f_i(x) = \overline{\alpha} f_i(x) = f_j(\overline{\alpha} x) = f_j \varphi_\alpha^M(x).$$

Logo, $F(f)$ é um morfismo de representações.

Vamos agora fazer a construção do funtor

$$G : \mathrm{Rep}(Q, \mathcal{I}) \longrightarrow A\text{- Mod}$$

.

Seja $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ um objeto de $\mathrm{Rep}(Q, \mathcal{I})$. Definimos $G(M) = \bigoplus_{i \in Q_0} M_i$, onde $G(M)$ será munido de uma estrutura de A-módulo, com $A = \Bbbk Q/\mathcal{I}$, construída a seguir.

Primeiramente, definimos uma estrutura de $\Bbbk Q$-módulo em $G(M)$, que posteriormente se mostrará anulada pelo ideal $\mathcal{I}$. Seja $x = (x_i)_{i \in Q_0} \in G(M)$ e considere w um caminho em Q:

- Se $w = \varepsilon_i$ (o caminho trivial em i), definimos

$$wx = \varepsilon_i x = x_i.$$

- Se $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\ell$ é um caminho não trivial de i para j, definimos a aplicação $\Bbbk$-linear $\varphi_w = \varphi_{\alpha_\ell} \dots \varphi_{\alpha_1} : M_i \longrightarrow M_j$. Assim, o produto wx é dado por:

$$(wx)_c = \delta_{jc} \varphi_w(x_i),$$

onde $c \in Q_0$ e δ_{jc} é o delta de Kronecker. Em outras palavras, wx é o elemento de $G(M) = \bigoplus_{i \in Q_0} M_i$ cuja única coordenada não nula está na posição j, sendo $(wx)_j = \varphi_w(x_i) \in M_j$.

Essa definição garante que $G(M)$ possui uma estrutura de $\Bbbk Q$-módulo, pois a ação de $\Bbbk Q$ em $G(M)$ é bem definida, satisfaz a linearidade e a compatibilidade com a multiplicação de caminhos, além de preservar a identidade pelos caminhos triviais. Além disso, pela definição de $\mathrm{Rep}(Q, \mathcal{I})$, para qualquer $\rho \in \mathcal{I}$ e $x \in G(M)$, temos $\rho x = 0$. Assim, a estrutura de $\Bbbk Q$-módulo de $G(M)$ passa naturalmente a ser uma estrutura de A-módulo, onde $A = \Bbbk Q/\mathcal{I}$, por meio da regra $(v + \mathcal{I})x = vx$, para $v \in \Bbbk Q$ e $x \in G(M)$.

Agora, consideremos um morfismo $f = (f_i)_{i \in Q_0}$ entre representações $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ e $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$ em $\mathrm{Rep}(Q, \mathcal{I})$. Queremos definir um homomorfismo de A-módulos $f : G(M) \longrightarrow G(M')$.

Sabemos que $G(M) = \bigoplus_{i \in Q_0} M_i$ e $G(M') = \bigoplus_{i \in Q_0} M'_i$. Assim, podemos definir f como a aplicação $\Bbbk$-linear:

$$f = \bigoplus_{i \in Q_0} f_i : G(M) \longrightarrow G(M').$$

Resta mostrar que f é um homomorfismo de A-módulos. Para isso, seja $x = x_i \in M_i \subset G(M)$ e $\overline{w} = w + \mathcal{I} \in \Bbbk Q/\mathcal{I}$, onde w é um caminho de i para j. Temos:

$$\begin{aligned} f(wx) &= f(\overline{w}x_i) = f_j(\varphi_w(x_i)) \\ &= \varphi'_w(f_i(x_i)) = \overline{w}f_i(x_i) \\ &= wf(x). \end{aligned}$$

Portanto, f é compatível com a ação de A, ou seja, f é um homomorfismo de A-módulos, como desejávamos.

Com isso, concluímos a construção do funtor G. Com o Teorema a seguir, verificaremos que as categorias $\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{I})$ e A-Mod são isomorfas.

Teorema 2.42. *Seja $A = \Bbbk Q/\mathcal{I}$, onde Q é um quiver conexo finito e $\mathcal{I}$ é um ideal admissível de $\Bbbk Q$. Então, as categorias* $\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{I})$ *e* A-Mod *são isomorfas.*

Demonstração. Para provar que as categorias $\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{I})$ e A-Mod são isomorfas, precisamos mostrar que $FG = 1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{I})}$ e $GF = 1_{A\text{-}\mathrm{Mod}}$, onde F e G foram definidos previamente entre $\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{I})$ e A-Mod.

Primeiro vamos prova que $FG = 1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{I})}$:

Seja $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ um objeto de $\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{I})$. Aplicamos G a M:

$$G(M) = \bigoplus_{i\in Q_0} M_i.$$

Em seguida, aplicamos F a $G(M)$:

$$F(G(M)) = \left(e_i\left(\bigoplus_{j\in Q_0} M_j\right), \varphi_\alpha\right).$$

Por definição de e_i, temos que $e_i\left(\bigoplus_{j\in Q_0} M_j\right) = M_i$. Logo:

$$F(G(M)) = (M_i, \varphi_\alpha).$$

Portanto, $FG(M) = M$.

Agora, seja $f = (f_i)_{i\in Q_0}$ um morfismo entre objetos M e M' em $\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{I})$. Aplicando G e depois F a f, obtemos:

$$G(f) = \bigoplus_{i\in Q_0} f_i, \quad F(G(f)) = (f_i)_{i\in Q_0}.$$

Logo, $FG(f) = f$, mostrando que FG é a identidade nos morfismos.

Por fim provaremos que $GF = 1_{A\text{-}\mathrm{Mod}}$:

Seja M um A-módulo. Aplicando F a M, temos:

$$F(M) = \left(e_iM, \varphi_\alpha^M\right),$$

onde e_iM é a componente correspondente ao idempotente primitivo e_i e

$$\varphi_\alpha^M : e_iM \to e_jM, \quad \varphi_\alpha^M(x) = \overline{\alpha}x, \quad (\alpha : i \to j).$$

Aplicando G a $F(M)$, obtemos:

$$G(F(M)) = \bigoplus_{i \in Q_0} e_iM.$$

Como M pode ser escrito como $\bigoplus_{i\in Q_0} e_iM$, segue que $G(F(M)) = M$. Assim, $GF(M) = M$.

Para um morfismo $f : M \to N$ em A- Mod, temos:

$$F(f) = (f_i)_{i\in Q_0}, \quad G(F(f)) = \bigoplus_{i\in Q_0} f_i.$$

Logo, $GF(f) = f$, mostrando que GF atua como a identidade nos morfismos.

Como $FG = 1_{\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{I})}$ e $GF = 1_{A\text{- Mod}}$, os funtores F e G estabelecem um isomorfismo de categorias entre $\mathrm{Rep}(Q, \mathcal{I})$ e A- Mod. □

2.3 Representações (Módulos) simples, projetiva e injetivas

Na seção anterior estabelecemos uma conexão entre as representações de um quiver com os módulos da álgebra de caminho, atraves de uma equivalência de categorias. Agora, nesta seção vamos explorar as representações simples, projetivas e injetivas via os módulos das álgebras de caminho. Abordaremos representações de quivers com relações, alternando entre o uso de um conjunto de relações ρ e o ideal admissível $\langle\rho\rangle$ gerado por ρ. Ressaltamos que as relações inicialmente apresentadas como um conjunto ρ são geradoras do ideal $\langle\rho\rangle$. Como as representações de (Q, ρ) coincidem com as representações de $(Q, \langle\rho\rangle)$, essa alternância não compromete a generalidade ou a consistência da abordagem.

Para cada vértice $i \in Q_0$, denotaremos por $S(i)$ a representação $(S(i)_j, \varphi_\alpha)$ de Q definida a seguir

$$S(i)_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ \Bbbk & \text{se } j = i, \end{cases}$$
$$\varphi_\alpha = 0 \quad \text{para todos } \alpha \in Q_1.$$

Dado que a representação $S(i)$ tem dimensão 1, segue-se que $S(i)$ é uma representação simples.

Claramente, $S(i)$ é uma representação limitada de $(Q, \mathcal{I})$ (para qualquer $\mathcal{I}$), e temos o seguinte proposição.

Proposição 2.43. *Seja $A = \Bbbk Q/\mathcal{I}$ a álgebra de caminhos do quiver com relações $(Q, \mathcal{I})$. O conjunto $\{S(i) \mid i \in Q_0\}$ é o conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo dos A-módulos simples.*

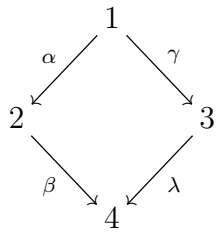
Demonstração. Uma prova para esta proposição pode ser encontrado em ([ASS06, Lema 2.1 item (b), página 76]. □

Exemplo 2.44.

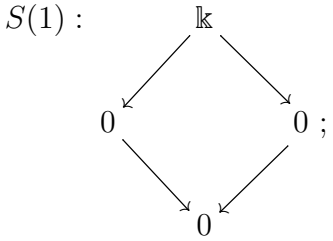
1. *Considere o quiver* $\mathbb{A}_3:\ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ *com a relação* $\rho = \{\alpha\beta\}$. *As representações simples de* $\mathbb{A}_3$ *são.*

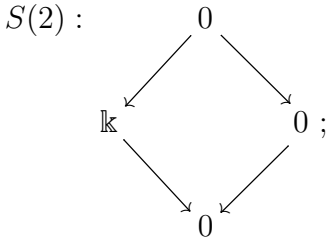
$$S(1):\ \Bbbk \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\,;\quad S(2):\ 0 \longrightarrow \Bbbk \longrightarrow 0\,;\quad S(3):\ 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \Bbbk\,.$$

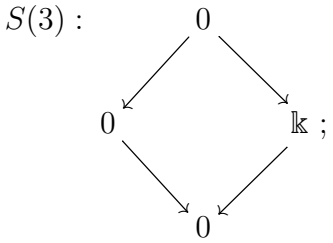
2. *Seja* Q *o quiver*

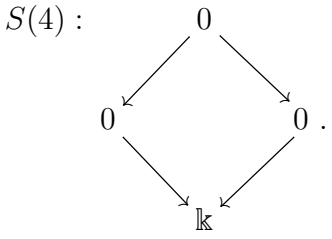


com relações $\rho = \{\alpha\beta - \gamma\lambda\}$. *As representações simples são:*

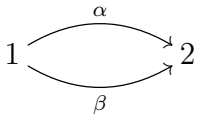








3. *Seja o quiver* 2*-Kronecker* $\mathbf{K}_2$*:*



representações simples de $\mathbf{K}_2$ *são.*

Em seguida, apresentaremos uma proposição relevante. Para ilustrar a teoria, forneceremos alguns exemplos que ajudarão a clarificar a definição e as propriedades das representações projetivas. Para este fim de agora em diante denotemos por $P(i) = Ae_i$ o projetivo indecomponivel associado ao vertice $i \in Q_0$, onde $A = \Bbbk Q/\mathcal{I}$ (Ver Observação 2.25).

Proposição 2.45. *Seja $(Q, \mathcal{I})$ um quiver limitado e $A = \Bbbk Q/\mathcal{I}$. Então,*

(i) A representação associada de $P(i)$ é $(P(i)_j, \varphi_\beta)$, sendo que $P(i)_j$ é o $\Bbbk$-espaço vetorial com base o conjunto de todos os caminhos em A que chegam em i e saem de j. E, para flecha $\beta : j \longrightarrow k$, a aplicação linear $\varphi_\beta : P(i)_k \longrightarrow P(i)_j$ é dada pela multiplicação à esquerda por β.

(ii) A representação associada do radical $\operatorname{rad} P(i)$ é $\left(P'(i)_j, \varphi'_\beta\right)$, sendo que $P'(i)_j = P(i)_j$ para $j \neq i$, e $P'(i)_i$ é o $\Bbbk$-espaço vetorial com base o conjunto de todos os caminhos não triviais em A, que chegam em i e saem de i. Além disso, $\varphi'_\beta = \varphi_\beta|_{P'(i)_{s(\beta)}}$ para qualquer flecha β.

Demonstração. Uma prova para esta proposição pode ser encontrado em [ASS06, Lema 2.4, página 79].

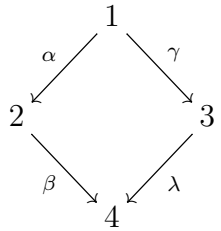
□

Exemplo 2.46.

1. *Considere o quiver $\mathbb{A}_3 : \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ com a relação $\rho = \{\alpha\beta\}$. As representações projetivas de $\mathbb{A}_3$ são.*

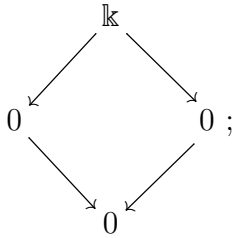
$$P(1) : \ \Bbbk \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \, ; \quad P(2) : \ \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \longrightarrow 0 \, ; \quad P(3) : \ 0 \longrightarrow \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \, .$$

2. *Seja Q o quiver*



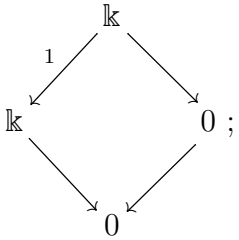
com relações $\rho = \{\alpha\beta - \gamma\lambda\}$. As representações projetivas são:

$P(1)$:

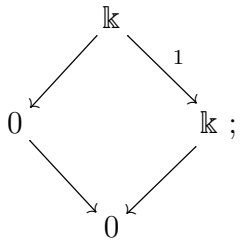
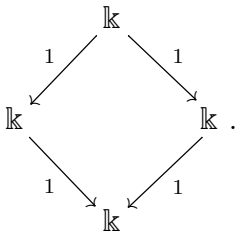


;

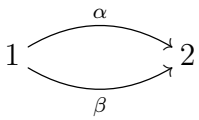
$P(2)$:



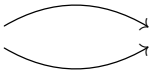
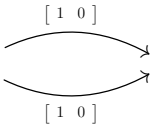
;

$P(3)$:  ; $P(4)$:  .

3. *Seja o quiver 2-Kronecker* $\mathbf{K}_2$ *dado por:*



representações injetivas de $\mathbf{K}_2$ *são.*

$P(1)$:  ; $P(2)$:  .

A seguinte proposição vai no permitir compreender as representações injetivas. Para este fim denotaremos por $I(i) = D\left(Ae_i\right)$ o injetivo indecomponivel associado ao vertice $i \in Q_0$, onde $D = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(-, \Bbbk)$ denota a dualidade padrão entre os A-módulos à esquerda e $A = \Bbbk Q/\mathcal{I}$.

Proposição 2.47. *Seja* $(Q, \mathcal{I})$ *um quiver limitado e* $A = \Bbbk Q/\mathcal{I}$. *Então a representação associada de* $I(i)$ *é* $(I(i)_j, \varphi_\beta)$, *sendo que* $I(i)_j$ *é o* $\Bbbk$*-espaço vetorial com base o conjunto de todos os caminhos em* A *que parte de* i *e chega a* j. *E, para flecha* $\beta : j \longrightarrow k$, *a aplicação linear* $\varphi_\beta : I(i)_j \longrightarrow I(i)_k$ *é dado pelo dual da multiplicação à direita por* β.

Demonstração. Uma prova para esta proposição pode ser encontrado em [ASS06, Lema 2.6 item (b), página 81].

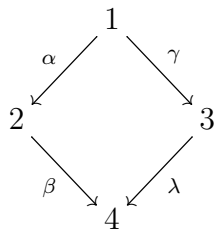
□

Exemplo 2.48.

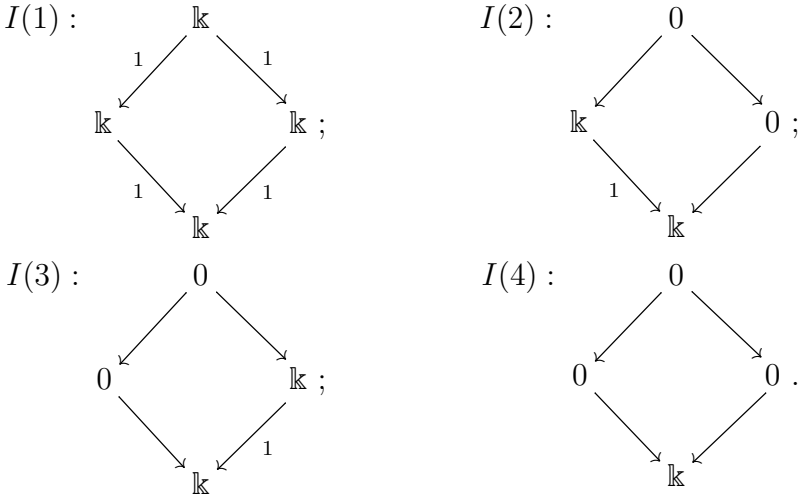
1. *Considere o quiver* $\mathbb{A}_3 : \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ *com a relação* $\rho = \{\alpha\beta\}$. *As representações projetiva de* $\mathbb{A}_3$ *são.*

$$I(1) : \ \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \longrightarrow 0 \ ; \quad I(2) : \ 0 \longrightarrow \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \ ; \quad I(3) : \ 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \Bbbk \ .$$

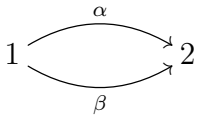
2. *Seja* Q *o quiver*



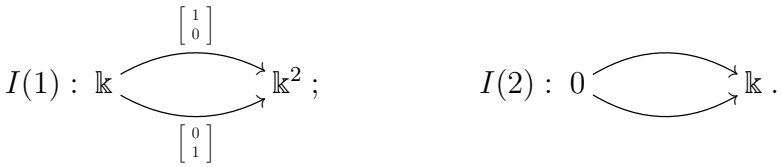
com relações $\rho = \{\alpha\beta - \gamma\lambda\}$. *As representações projetivas são:*



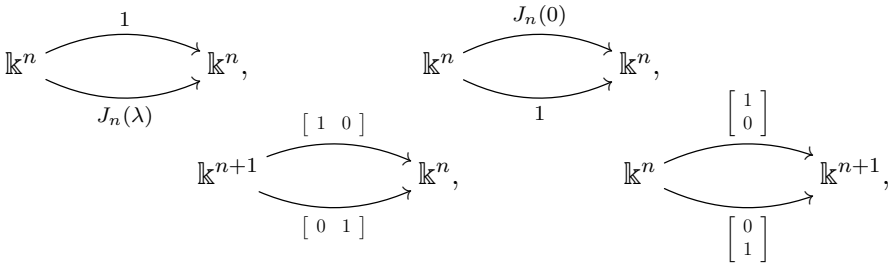
3. *Seja o quiver 2-Kronecker* $\mathbf{K}_2$ *dado por:*



representações projetivas de $\mathbf{K}_2$ *são.*



Observação 2.49. *Considere as álgebras de caminhos dos exemplos 2.44, 2.46 e 2.48 onde calculamos as representações simples, projetivas e injetivas respectivamente. Além das representações indecomponíveis que já calculamos, podem existir outras representações indecomponíveis, por exemplo para* $\mathbf{K}_2$ *as seguintes são indecomponíveis:*



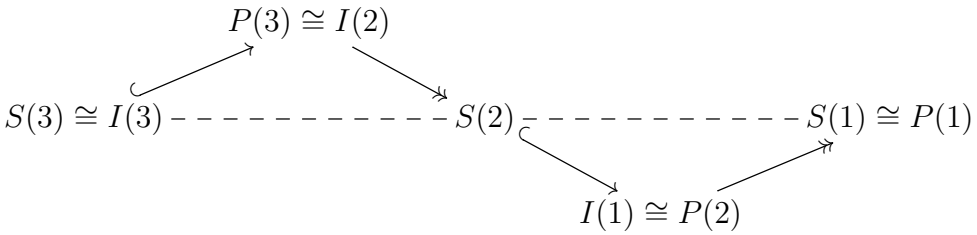
onde $n > 0$ *e* $J_n(\lambda)$ *denota o bloco de Jordan* $n \times n$ *nilpotente correspondente ao autovalor* λ.

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$$

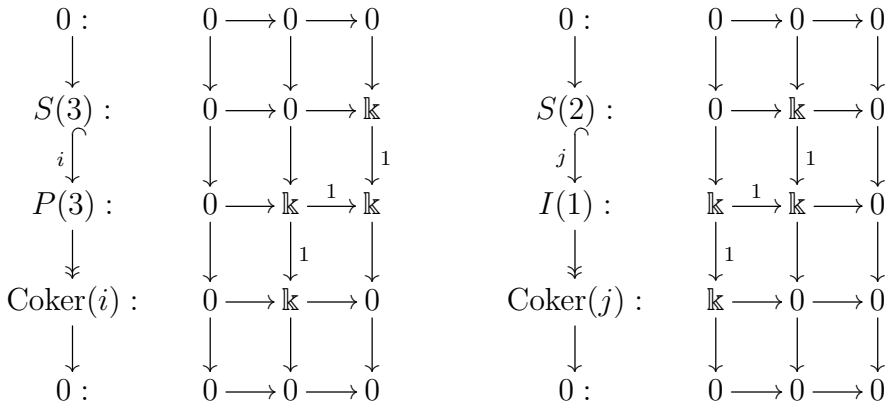
Para mais detalhes ver em ([SS07], página 79).

Podemos visualizar as respectivas categorias de módulos, $\Bbbk\mathbb{A}_3/\langle\alpha\beta\rangle$-mod, $\Bbbk Q/\langle\alpha\beta-\gamma\lambda\rangle$-mod e $\Bbbk\mathbf{K}_2$-mod nos seguites quiver de Auslander-Reiten:

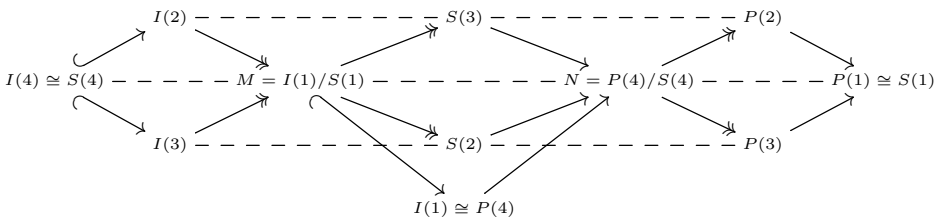
i) $\Bbbk\mathbb{A}_3/\langle\alpha\beta\rangle$*-mod:*



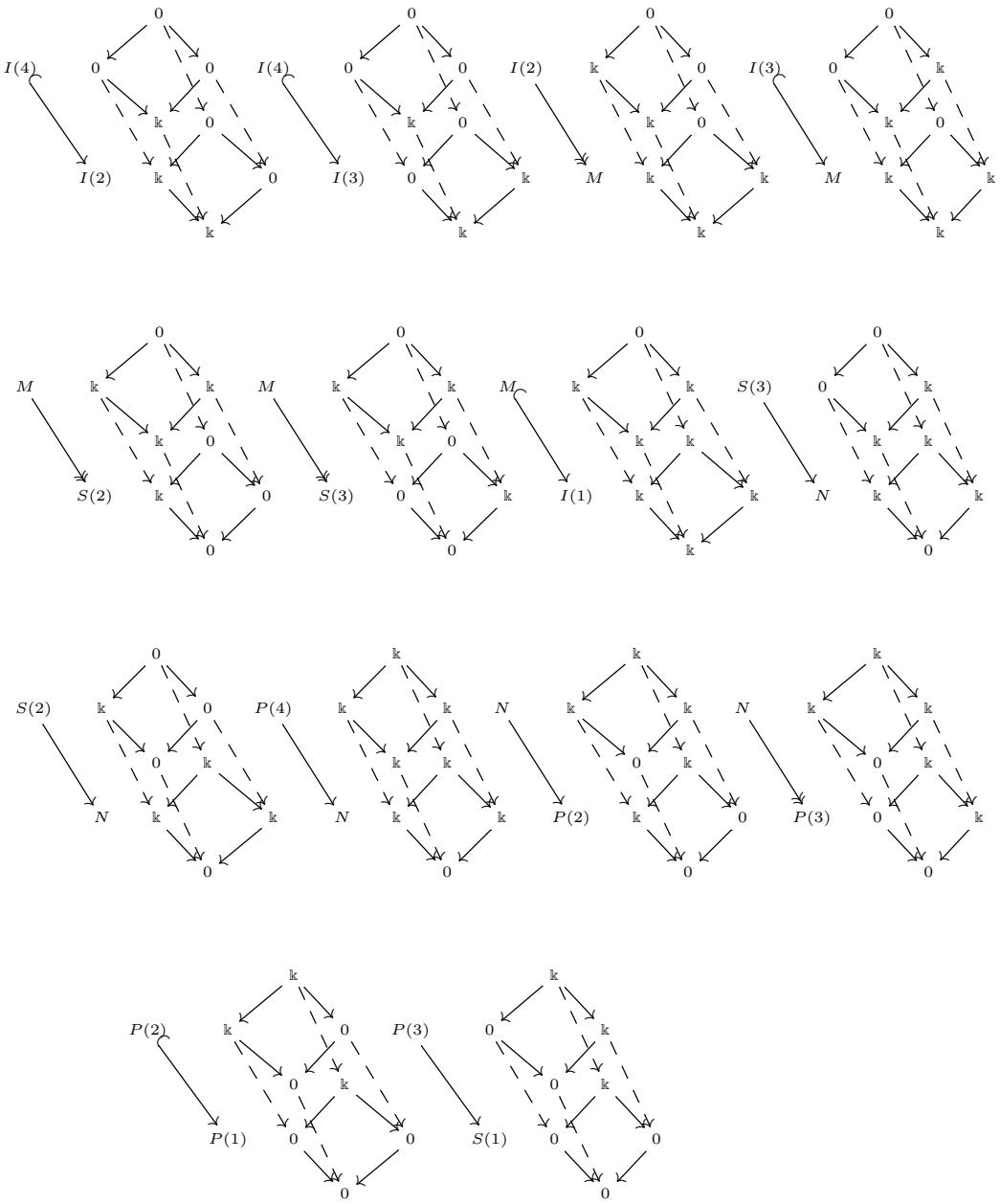
As inclusões e projeções são dadas pelas seguintes sequências exatas curtas:



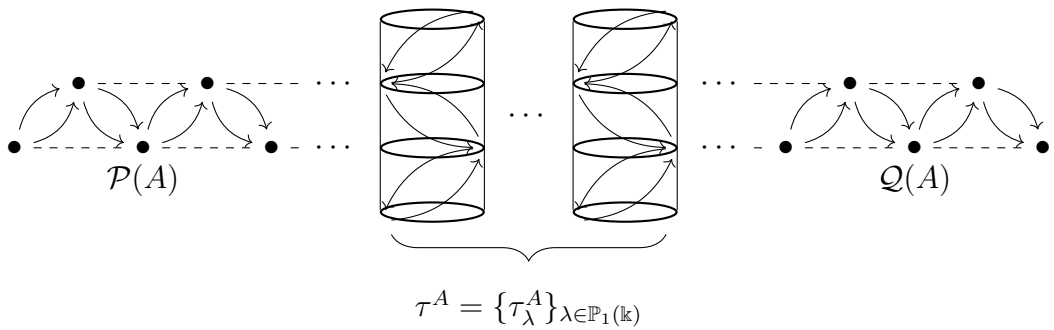
ii) $\Bbbk Q/\langle\alpha\beta-\gamma\lambda\rangle$*-mod:*



onde cada morfismos são dados da seguinte forma abaixo:



iii) $\Bbbk\mathbf{K}_2$*-mod:*



onde a componente $\mathcal{P}(A)$ é chamada de pós-projetiva, a componente $\mathcal{Q}(A)$ de pré-injetiva e a componente $\tau^A = \left\{\tau_\lambda^A\right\}_{\lambda\in\mathbb{P}_1(K)}$ contem a família de tubos homogêneos, para mais detalhes ver ([SS07], Teorema 4.6, página 82.)

Por "visualizar", entendemos que todos os módulos finitamente gerados (bem como os respectivos morfismos de módulos) podem ser expressos como somas diretas (ou, no caso dos morfismos, como combinações lineares de composições) dos módulos e morfismos que aparecem no quiver de Auslander-Reiten. Essa construção fundamenta-se na teoria de Auslander-Reiten (ver [ARS97]), que, no entanto, não será detalhada neste trabalho, pois está fora do seu escopo.

Agora será introduzido o funtor de Nakayama em A-mod, que é descrito como um endofuntor $D\operatorname{Hom}_A(A,-)$, onde D representa a dualidade padrão sobre $\Bbbk$-módulos. Esse conceito sera fundamental para a Seção 3.3.

Definição 2.50. *O funtor de Nakayama em A-mod é definido como o endofuntor $\nu = D\operatorname{Hom}_A(A,-) : A\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$, onde $D = \operatorname{Hom}_\Bbbk(-,\Bbbk)$ denota o funtor de dualidade padrão para $\Bbbk$-módulos.*

A proposição a seguir mostra que o funtor é exato à direita e que há um isomorfismo natural entre ν e o funtor $DA\otimes_A -$.

Proposição 2.51. *O funtor de Nakayama ν é exato à direita e é naturalmente isomorfo a $DA\otimes_A -$.*

Demonstração. A exatidão à direita de ν decorre do fato de que ν é a composição de dois funtores exatos à esquerda contravariantes. Considere o morfismo funtorial $\phi : DA\otimes_A - \longrightarrow \nu = D\operatorname{Hom}_A(A,-)$, definido em um A-módulo M por

$$\begin{array}{rccl} \phi_M : & DA\otimes_A M & \longrightarrow & D\operatorname{Hom}_A(A,M) \\ & f\otimes x & \longmapsto & \phi_M(f\otimes x) \qquad := (\varphi \mapsto f(\varphi(x))), \end{array}$$

para $f\in DA$, $x\in M$, e $\varphi\in\operatorname{Hom}_A(A,M)$. Observa-se que ϕ_M é um isomorfismo quando $M = A_A$, onde A_A é um módulo direito sobre si mesmo. Como ambos os funtores são $\Bbbk$-lineares, ϕ_M é um isomorfismo se M é um módulo projetivo de A. Seja agora M arbitrário e

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

uma apresentação projetiva de M. Como $DA\otimes_A -$ e ν são ambos exatos à direita, temos um diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1\otimes_A DA & \xrightarrow{p_1\otimes DA} & P_0\otimes_A DA & \xrightarrow{p_0\otimes DA} & M\otimes_A DA & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{P_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{P_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_M} & & \\ \nu P_1 & \xrightarrow{\nu p_1} & \nu P_0 & \xrightarrow{\nu p_0} & \nu M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como ϕ_{P_1} e ϕ_{P_0} são isomorfismos, a comutatividade do diagrama e a exatidão das sequências garantem que ϕ_M também seja um isomorfismo. □

Capítulo 3

Álgebra repetitiva

Este capítulo será dedicado ao estudo das álgebras repetitivas, um dos principais objetos abordados neste trabalho. A definição desse conceito foi inicialmente proposta por D. Hughes e J. Waschbüsch e pode ser encontrada em [HW83]. Nosso objetivo inicial é construir o quiver de uma álgebra repetitiva, bem como seu ideal admissível, apresentando alguns resultados e exemplos ilustrativos. Em seguida, estudaremos a álgebra repetitiva de uma álgebra gentle, onde discutiremos um resultado importante que estabelece condições necessárias e suficientes para certas características dessa classe de álgebras. Esse estudo será fundamentado no trabalho de J. Schröer [Schr99]. Por fim, exploraremos a categoria dos módulos de uma álgebra repetitiva, utilizando exemplos que buscam facilitar a compreensão dessa abordagem, com base nos trabalhos de H. Giraldo [Gir18] e G. Benitez, P. Rizzo [BR24].

Lembre que DA tem uma estrutura natural A-A-bimódulo com as seguintes ações

$$(a \cdot \phi)(b) = \phi(ba),$$
$$(\phi \cdot a)(b) = \phi(ab)$$

para $a, b \in A$ e $\phi \in DA$ como foi visto no Exemplo 1.44,

Definição 3.1. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita e $DA = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, \Bbbk)$. A **álgebra repetitiva** de A denotada por $\widehat{A}$ é definida da seguinte forma: O $\Bbbk$-espaço vetorial subjacente é dado por*

$$\widehat{A} = (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n) \oplus (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (DA)_n)$$

onde $A_n = A$ e $(DA)_n = DA$, respectivamente. Nós denotamos os elementos de $\widehat{A}$ algumas vezes por $(a_n, \phi_n)_n$ onde a_n é elemento de A_n e ϕ_n é elemento de $(DA)_n$.

A multiplicação é definida por

$$(a_n, \phi_n)_n (b_n, \psi_n)_n = (a_n b_n, a_n \cdot \psi_n + \phi_n \cdot b_{n-1})_n$$

Observação 3.2. *Observe que, exceto por um número finito, todos os a_n e ϕ_n são iguais a zero. Além disso, na multiplicação em $\widehat{A}$, utilizamos a multiplicação definida em A e a estrutura natural de A-bimódulo em DA. Note que $\widehat{A}$ não tem unidade.*

Uma outra interpretação é considerar $\widehat{A}$ como a álgebra de matrizes duplamente infinitas, sem identidade

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & 0 & \\ \ddots & A_{n-1} & & & \\ & (DA)_{n-1} & A_n & & \\ & & (DA)_n & A_{n+1} & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

em que as matrizes têm apenas finitos elementos não nulos.

3.1 O quiver da álgebra repetitiva e seu ideal adimissivél

A partir deste momento tomaremos Q um quiver e ρ um conjunto de relações para Q, que podem ser relações zero ou relações de comutatividade (ver Observação 2.13). É importante ressaltar que essas relações devem ser escolhidas de forma que o par (Q,ρ) seja localmente limitado. Agora, vamos proceder à construção de um quiver $\widehat{Q} = \left(\widehat{Q}_0, \widehat{Q}_1\right)$ como feito em [Schr99].

Lembre que um caminho máximo em Q sujeito a ρ é um caminho em (Q,ρ) de comprimento maior ou igual a 1 que não puder ser estendido por nenhuma flecha em (Q,ρ) em nenhuma das extremidades. Para este fim denotaremos um conjunto de caminho máximo por $\mathscr{M}(Q,\rho)$.

Definição 3.3. *Considere o conjunto de relações ρ no quiver Q. Definamos o* ***quiver repetitivo*** *$\widehat{Q}$, onde o conjunto de vértices é*

$$\widehat{Q}_0 := \{i_n = (i,n) \mid i \in Q_0 \ \ e \ \ n \in \mathbb{Z}\},$$

e o conjunto de flechas $\widehat{Q}_1$ será definido da seguinte forma:

(i) Para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ em Q_1 e inteiro $n \in \mathbb{Z}$, há uma flecha correspondente $\alpha_n : i_n \longrightarrow j_n$ em $\widehat{Q}_1$.

(ii) Para cada caminho $\overline{p} \in \mathscr{M}(Q,\rho)$, há uma flecha $\widehat{\overline{p}}_n : j_n \longrightarrow i_{n-1}$ em $\widehat{Q}_1$, onde $s(\overline{p}) = i$ e $t(\overline{p}) = j$. Essas flechas são chamadas de ***flechas de conexão.***

Observe que $\widehat{Q}$ depende não apenas de Q mas também de ρ. Além disso, quando $p = p_1p_2$ é caminho máximo em (Q,ρ), o caminho $p_{2n}\widehat{\overline{p}}_n p_{1n-1}$ sera chamado de ***caminho completo*** *do quiver $\widehat{Q}$.*

Definição 3.4. *Definimos um conjunto de relações $\widehat{\rho}$ para $\widehat{Q}$ como segue:*

(r1) Para caminhos p, p_1, p_2 em Q, se $p \in \rho$ (ou $p_1 - p_2 \in \rho$), então $p_n \in \widehat{\rho}$ (ou $p_{1n} - p_{2n} \in \widehat{\rho}$) para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(r2) Seja p um caminho que contém uma flecha de conexão em $\widehat{Q}$. Se p não for um subcaminho de um caminho completo, então $p \in \widehat{\rho}$.

(r3) Para caminhos $p = p_1p_2p_3$ e $q = q_1q_2q_3$ que são caminhos máximos em (Q, ρ) com $p_2 = q_2$, então $p_{3n}\widehat{\overline{p}}_n p_{1n-1} - q_{3n}\widehat{\overline{q}}_n q_{1n-1} \in \widehat{\rho}$ para todos os $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 3.5. *Seja p um caminho em Q. Então a classe de equivalência $\overline{p}_n$ de p_n em $\mathscr{P}(\widehat{Q})$ depende apenas da classe de equivalência $\overline{p}$ de p em $\mathscr{P}(Q)$. Assim,*

Observação 3.6. *Seja Q um quiver finito e ρ um conjunto de relações para Q, onde $A = \Bbbk Q/\langle\rho\rangle$. Definimos os seguintes conjuntos:*

$$\mathscr{B}A_n = \{\overline{p}_n \mid p \text{ é um caminho em } (Q, \rho)\},$$

$$\mathscr{B}(DA)_n = \{\phi_{\overline{p}_n} \mid p \text{ é um caminho em } (Q, \rho)\}.$$

Para $\overline{q}_n \in \mathscr{B}A_n$, definimos $\phi_{\overline{p}_n}(\overline{q}_n)$ da seguinte forma:

$$\phi_{\overline{p}_n}(\overline{q}_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } \overline{q} = \overline{p}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os conjuntos $\mathscr{B}A_n$ e $\mathscr{B}(DA)_n$ são bases para A_n e $(DA)_n$, respectivamente. Isso ocorre porque qualquer elemento $\overline{a}_n$ em A_n pode ser expresso como uma combinação linear de elementos em $\mathscr{B}A_n$. Cada $\overline{a}_n$ é gerado por um caminho em (Q, ρ) e, portanto, pertence a $\mathscr{B}A_n$. Nenhuma combinação linear de elementos em $\mathscr{B}A_n$ pode resultar em zero (exceto pela combinação trivial), pois cada elemento em $\mathscr{B}A_n$ representa um caminho distinto em (Q, ρ). Analogamente, $\mathscr{B}(DA)_n$ é uma base para $(DA)_n$ porque cada $\phi_{\overline{p}_n}$ em $\mathscr{B}(DA)_n$ representa uma ação específica sobre um caminho, e a combinação linear dessas ações abrange todas as operações possíveis em $(DA)_n$.

Considere agora $\mathscr{B}\widehat{A} = \big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}A_n\big) \cup \big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}(DA)_n\big)$. O conjunto $\mathscr{B}\widehat{A}$ é definido como a união de $\mathscr{B}A_n$ e $\mathscr{B}(DA)_n$ para todos os $n \in \mathbb{Z}$. Cada elemento $\overline{a}_n$ em $\widehat{A}$ pode ser expresso como uma combinação linear dos elementos em $\mathscr{B}\widehat{A}$ devido à natureza repetitiva de $\widehat{A}$. Portanto, $\mathscr{B}\widehat{A}$ forma uma base para $\widehat{A}$.

Definição 3.7. *A base $\mathscr{B}\widehat{A}$ comporta-se de forma multiplicativa, e a multiplicação nesta base é definida como segue:*

i) Para $\bar{p}_n \in \mathscr{B}A_n$ e $\bar{q}_{n'} \in \mathscr{B}A_{n'}$, a multiplicação em $\mathscr{B}\hat{A}$ é dada por:

$$\bar{p}_n\bar{q}_{n'} = \begin{cases} \overline{pq}_n, & \text{se } n = n' \text{ e } t(p) = s(q), \text{ e } pq \text{ é um caminho em } (Q, \rho) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ii) Para $\bar{p}_n \in \mathscr{B}A_n$ e $\phi_{\bar{q}_{n'}} \in \mathscr{B}(DA)_{n'}$, a multiplicação em $\mathscr{B}\hat{A}$ é dada por:

$$\bar{p}_n\phi_{\bar{q}_{n'}} = \begin{cases} \phi_{\bar{q}_1 n}, & \text{se } n = n' \text{ e } \exists\, q' \in \bar{q}, p' \in \bar{p} \text{ tal que } q' = q_1p' \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

iii) Para $\phi_{\bar{q}_{n'}} \in \mathscr{B}(DA)_{n'}$ *e* $\bar{p}_n \in \mathscr{B}A_n$*, a multiplicação em* $\mathscr{B}\hat{A}$ *é dada por:*

$$\phi_{\bar{q}_{n'}}\bar{p}_n = \begin{cases} \phi_{\bar{q}_2 n'}, & \text{se } n' = n+1 \text{ e } \exists\, q' \in \bar{q}, p' \in \bar{p} \text{ tal que } q' = p'q_2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

iv) Para $\phi_{\bar{p}_n}\phi_{\bar{q}_{n'}} \in \mathscr{B}DA$*, a multiplicação em* $\mathscr{B}\hat{A}$ *é dada por:*

$$\phi_{\bar{p}_n}\phi_{\bar{q}_{n'}} = 0 \text{ para todos os } p, q, \in (Q,\rho)_n \text{ e } n' \in \mathbb{Z}.$$

Considerando a base $\mathscr{B}\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$, a proposição a seguir afirma que a aplicação η, que envia elementos dessa base para a base correspondente $\mathscr{B}\widehat{A}$, é um homomorfismo.

Proposição 3.8. *Seja* Q *um quiver finito, e seja* ρ *um conjunto de relações para* Q *e seja* $\mathscr{B}\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle = \{\overline{p} \mid p \text{ é um caminho em } (\widehat{Q},\widehat{\rho})\}$ *a base de* $\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$*. A aplicação* $\eta : \mathscr{B}\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle \longrightarrow \mathscr{B}\widehat{A}$ *é um homomorfismo.*

Demonstração. Definimos η da seguinte forma:

$$\eta(\overline{p}) = \begin{cases} \overline{p}_n, & \text{se } \overline{p} \text{ não contém flecha de conexão,} \\ \phi_{\overline{q_2}n}, & \text{se } \overline{p} \text{ contém flecha de conexão } \hat{\bar{q}}. \end{cases}$$

Vamos verificar se η está bem definida, ou seja, dado $\overline{p}$ e $\overline{p'}$ em $\mathscr{B}\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$ tais que $\overline{p} = \overline{p'}$, então $\eta(\overline{p}) = \eta(\overline{p'})$.

Considere o caso em que $\overline{p}$ e $\overline{p'}$ não têm flechas de conexão. Temos que $\eta(\overline{p}) = \overline{p}_n$ e $\eta(\overline{p'}) = \overline{p'}_n$. Como $\overline{p} = \overline{p'}$, temos que $n = n'$, de onde segue que $\eta(\overline{p}) = \overline{p}_n = \overline{p'}_n = \eta(\overline{p'})$.

Seja o caso em que $\overline{p}$ e $\overline{p'}$ têm flechas de conexão. Sabemos que $\eta(\overline{p}) = \phi_{\overline{q_2}n}$ e $\eta(\overline{p'}) = \phi_{\overline{q'_2}n}$. Como $\overline{p} = \overline{p'}$, eles têm a mesma flecha de conexão e também $n = n'$. Logo, $\eta(\overline{p}) = \phi_{\overline{q_2}n} = \phi_{\overline{q'_2}n} = \eta(\overline{p'})$, o que prova que η está bem definida.

Agora vamos demonstrar que η é um homomorfismo. Para $\overline{p}$ e $\overline{p'}$ em $\mathscr{B}\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$, temos que mostrar que η preserva a transformação linear e a multiplicação. Ou seja, devemos verificar as seguintes propriedades:

(i) $\eta(x\overline{p}) = x\eta(\overline{p})$, para $x \in \Bbbk$,

(ii) $\eta(\overline{p} + \overline{p'}) = \eta(\overline{p}) + \eta(\overline{p'})$,

(iii) $\eta(\overline{p}\,\overline{p'}) = \eta(\overline{p})\eta(\overline{p'})$.

Seja $\overline{p}$ um caminhho em $\mathscr{B}\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$ sem flecha de conexão, temos que:

$$\eta(x\overline{p}) = x\overline{p}_n = x\eta(\overline{p}).$$

Considere agora $\overline{p}$ um caminhho em $\mathscr{B}\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$ que contém flecha de conexão, temos que:

$$\eta(x\overline{p}) = x\phi_{p_2 n} = x\eta(\overline{p}).$$

Note que em ambos os caso temos $\eta(x\overline{p}) = x\eta(\overline{p})$, para $x \in \Bbbk$. Assim provamos a propriedade (i) Seja $\overline{p}$ e $\overline{p'}$ dois caminhho em $\mathscr{B}\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$ sem flecha de conexão, temos que:

$$\eta(\overline{p} + \overline{p'}) = \overline{p} + \overline{p'} = \eta(\overline{p}) + \eta(\overline{p'})$$

Considere o caso em que $\overline{p}$ não têm flechas de conexão e $\overline{p'}$ têm flechas de conexão, temos que:

$$\eta(\overline{p} + \overline{p'}) = \overline{p}_n + q_{3n'}\phi_{q_{n'}}q_{1n'-1} = \overline{p} + \phi_{q_2 n'} = \eta(\overline{p}) + \eta(\overline{p'})$$

Considere o caso em que $\overline{p}$ têm flechas de conexão e $\overline{p'}$ não têm flechas de conexão, temos que:

$$\eta(\overline{p} + \overline{p'}) = q_{3n}\phi_{q_n}q_{1n-1} + \overline{p}_{n'} = \phi_{q_2 n} + \overline{p} = \eta(\overline{p'}) + \eta(\overline{p})$$

Seja o caso em que $\overline{p}$ e $\overline{p'}$ dois caminhho em $\mathscr{B}\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$ contém flecha de conexão, temos que:

$$\eta(\overline{p} + \overline{p'}) = q_{3n}\phi_{q_n}q_{1n-1} + q_{3n'}\phi_{q_{n'}}q_{1n'-1} = \phi_{q_2 n} + \phi_{q_2 n'} = \eta(\overline{p}) + \eta(\overline{p'})$$

Note que em todos os caso acima, temos $\eta(\overline{p} + \overline{p'}) = \eta(\overline{p}) + \eta(\overline{p'})$. Assim provamos a propriedade (ii)

Vamos agora prova o a propriedade (iii), para isso considere o caso em que $\overline{p}$ e $\overline{p'}$ não têm flechas de conexão. Como $\overline{p}$ e $\overline{p'}$ são caminhos em $(\widehat{Q}, \widehat{\rho})$ temos que $\overline{p} = \overline{p}_n$ e $\overline{p'} = \overline{p'}_{n'}$, para algum n e n' em $\mathbb{Z}$. Logo:

$$\eta(\overline{p}\overline{p'}) = \eta(\overline{p}_n\overline{p'}_{n'}) = \overline{pp'}_n = \overline{p}_n\overline{p'}_{n'} = \eta(\overline{p}_n)\eta(\overline{p'}_{n'}) = \eta(\overline{p})\eta(\overline{p'}).$$

Isso vale se $n = n'$ e $t(p) = s(p')$, e pp' é um caminho em (Q, ρ), caso contrário $\eta(\overline{p}\overline{p'}) = \eta(\overline{p})\eta(\overline{p'}) = 0$.

Considere o caso em que $\overline{p}$ não têm flechas de conexão e $\overline{p'}$ têm flechas de conexão. Como $\overline{p}$ é um caminho em $(\widehat{Q}, \widehat{\rho})$ temos que $\overline{p} = \overline{p}_n$, e $\overline{p'}$ é da forma $q_{3n'}q_{n'}q_{1n'-1}$, para algum n e n' em $\mathbb{Z}$. Logo:

$$\eta(\overline{p})\eta(\overline{p'}) = \eta(\overline{p}_n)\eta(q_{3n'}q_{n'}q_{1n'-1}) = \overline{p}_n\phi_{q_2 n'} = \phi_{q_1 n} = \eta(\overline{p}_n q_{3n'}q_{n'}q_{1n'-1}) = \eta(\overline{p}\overline{p'}).$$

Isso vale, se $n = n'$, e existe um q' em $\overline{p}$ e um q'' em $\overline{p'}$ tal que $q_1q' = q''$, caso contrário $\eta(\overline{p}\overline{p'}) = \eta(\overline{p})\eta(\overline{p'}) = 0$.

Considere o caso em que $\overline{p}$ têm flechas de conexão e $\overline{p'}$ têm flechas de conexão. Sabemos que $\overline{p}$ é da forma $q_{3n}q_nq_{1n-1}$, e $\overline{p'}$ é um caminho em $(\widehat{Q}, \widehat{\rho})$, ou seja $\overline{p'} = \overline{p}_{n'}$, para algum n e n' em $\mathbb{Z}$. Logo:

$$\eta(\overline{p})\eta(\overline{p'}) = \eta(q_{3n}q_nq_{1n-1})\eta(\overline{p}_{n'}) = \phi_{q_2 n}\overline{p}_{n'} = \phi_{q_3 n} = \eta(q_{3n}q_nq_{1n-1}\overline{p}_{n'}) = \eta(\overline{p}\overline{p'}).$$

Isso vale, se $n = n' + 1$ e existe um q' em $\overline{p}$ e um q'' em $\overline{p'}$ tal que $q'q_3 = q''$, caso contrário $\eta(\overline{p}\overline{p'}) = \eta(\overline{p})\eta(\overline{p'}) = 0$.

Considere o caso em que $\overline{p}$ e $\overline{p'}$ têm flechas de conexão. sabemos que $\overline{p}$ é da forma $q_{3n}q_nq_{1n-1}$ e $\overline{p'}$ é da forma $q'_{3n}q'_nq'_{1n-1}$, de onde segue que:

$$\eta(\overline{p})\eta(\overline{p'}) = \phi_{q_2 n}\phi_{q'_2 n'} = 0 = \eta(q_{3n}q_nq_{1n-1}q'_{3n'}q'_{n'}q'_{1n'-1}) = \eta(\overline{p}\overline{p'})$$

onde a terceira igualdade segue de (r_2).

Vemos assim que $\eta(\overline{pq}) = \eta(\overline{p})\eta(\overline{q})$, e η preserva a multiplicação. Portanto, concluímos que η é um homomorfismo. □

A seguir, enunciaremos e demonstraremos um dos principais resultados deste capítulo, a verificação de que a aplicação η é um isomorfismo, como foi feita em [Schr99]. Esse teorema garante que o quiver repetitivo, juntamente com as relações construídas, define a álgebra de caminhos repetitiva. A partir dessa estrutura, exploraremos novos conceitos nas próximas seções.

Teorema 3.9. *(J. Schröer, 1999). Seja Q um quiver finito, e seja ρ um conjunto de relações para Q. Então $\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$ é a álgebra repetitiva de $\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$ ou seja $\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle \cong \widehat{A}$*

Demonstração. Queremos mostrar que o homomorfismo $\eta : \Bbbk\widehat{Q} \to \widehat{A}$ é um isomorfismo de álgebras entre $\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$ e $\widehat{A}$, para isto basta mostrar que η é injetora e sobrejetora. Suponha que $\eta(\overline{p}) = \eta(\overline{q})$. Queremos mostrar que isso implica $\overline{p} \equiv \overline{q}$ em $\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$.

- Caso $\overline{p}$ e $\overline{q}$ não contêm flechas de conexão: Aqui, $\eta(\overline{p}) = \overline{p}_n$ e $\eta(\overline{q}) = \overline{q}_n$. Se $\eta(\overline{p}) = \eta(\overline{q})$, então temos $\overline{p}_n = \overline{q}_n$ em $\widehat{A}$, ou seja, $\overline{p}$ e $\overline{q}$ representam o mesmo elemento em $\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$ em cada nível n. Pela definição da álgebra de caminhos com relações, isso implica que $\overline{p} \equiv \overline{q}$ módulo $\langle\widehat{\rho}\rangle$, pois as relações em $\widehat{Q}$ são as mesmas que em Q, repetidas nos diferentes níveis.

- Caso $\overline{p}$ e $\overline{q}$ contenham flechas de conexão: Aqui, $\eta(\overline{p}) = \phi_{\overline{p_2}n}$ e $\eta(\overline{q}) = \phi_{\overline{q_2}n}$. Se $\eta(\overline{p}) = \eta(\overline{q})$, então temos $\phi_{\overline{p_2}n} = \phi_{\overline{q_2}n}$ em $\widehat{A}$. Pela construção da álgebra repetitiva, isso significa que os caminhos $\overline{p_2}$ e $\overline{q_2}$ são equivalentes módulo $\langle\widehat{\rho}\rangle$, logo $\overline{p} \equiv \overline{q}$ em $\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$.

Em ambos os casos, mostramos que se $\eta(\overline{p}) = \eta(\overline{q})$, então $\overline{p} \equiv \overline{q}$ módulo $\langle\widehat{\rho}\rangle$. Portanto, η é injetora.

Agora, queremos provar que qualquer elemento de $\widehat{A}$ está na imagem de η. Novamente, analisamos os dois casos.

- Caso $\overline{a} \in \widehat{A}$ seja da forma $\overline{p}_n$, com $\overline{p}$ não contendo flecha de conexão: Como $\widehat{A}$ é construída a partir dos caminhos de Q, cada $\overline{p}_n$ corresponde a um caminho $\overline{p}$ em $\widehat{Q}$. Pela definição de η, temos $\eta(\overline{p}) = \overline{p}_n$, logo $\overline{a}$ está na imagem de η.

- Caso $\overline{a} \in \widehat{A}$ seja da forma $\phi_{\overline{q_2}n}$, com $\overline{q}$ contendo flecha de conexão: Pela construção da álgebra repetitiva, sabemos que $\phi_{\overline{q_2}n}$ é obtido a partir de um caminho $\overline{q}$ em $\widehat{Q}$ contendo a flecha de conexão correspondente. Pela definição de η, temos $\eta(\overline{q}) = \phi_{\overline{q_2}n}$, logo $\overline{a}$ também está na imagem de η.

Portanto, η é sobrejetora. Como η é injetora e sobrejetora, segue que é um isomorfismo de álgebras, e assim concluímos que

$$\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle \cong \widehat{A}.$$

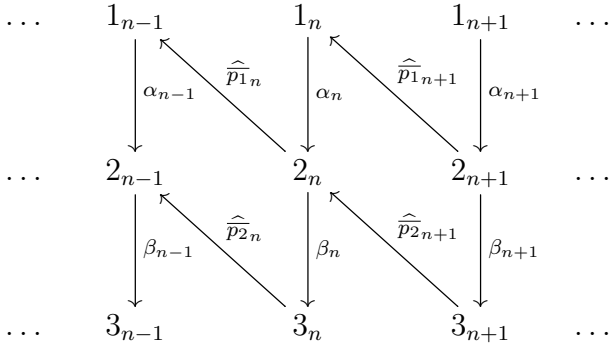
□

Exemplo 3.10.

1. *Seja o quiver* $\mathbb{A}_3$ *dado por*

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

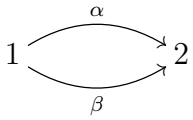
com as relações $\rho = \{\alpha\beta\}$ *onde os caminhos maximais são* $\mathscr{M}(\mathbb{A}_3, \rho) = \{\overline{\alpha}, \overline{\beta}\}$. *Como* $\alpha : 1 \longrightarrow 2$ *temos* $\widehat{\overline{p_1}}_n : 2_n \longrightarrow 1_{n-1}$, *como* $\beta : 2 \longrightarrow 3$ *temos* $\widehat{\overline{p_2}}_n : 3_n \longrightarrow 2_{n-1}$. *Logo, temos que* $\widehat{\mathbb{A}_3}$ *é dado por:*



Os caminhos completos são $\alpha_n\widehat{\overline{p_1}}_n$, $\widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1}$, $\beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n$, $\widehat{\overline{p_2}}_n\beta_{n-1}$, *para todo* n *em* $\mathbb{Z}$.

As relações $\widehat{\rho}$, *primeiramente são* $\alpha_n\beta_n$ *para todo* n *em* $\mathbb{Z}$, *seguindo* $r1$ *da definição 3.4, em segundo temos que todo* p *que não for um subcaminho de um caminho completo é relação em* $\widehat{\rho}$, *isso segue de* $r2$ *da definição 3.4. E finalmente, por* $r3$ *da definição 3.4, temos que* $\widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1} - \beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n \in \rho$, *para todo* n *em* $\mathbb{Z}$.

2. *Seja o seguinte quiver 2-Kronecker* $\mathbf{K}_2$ *dado por:*

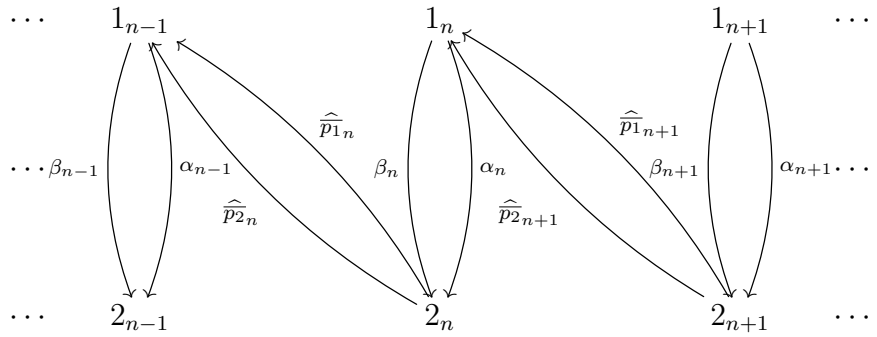


onde o conjunto de relação $\rho = \emptyset$, *temos que* $\mathscr{M}(\mathbf{K}_2, \rho) = \{\overline{p_1} = \{\overline{\alpha}\}, \overline{p_2} = \{\overline{\beta}\}\}$ *é o conjunto de caminhos maxímos*

.

Construiremos as flechas de conexões da seguinte forma:
Se $\overline{p_1} : 1 \longrightarrow 2$ *então* $\widehat{\overline{p_1}}_n : 2_n \longrightarrow 1_{n-1}$
Se $\overline{p_2} : 1 \longrightarrow 2$ *então* $\widehat{\overline{p_2}}_n : 2_n \longrightarrow 1_{n-1}$

O quiver $\widehat{\mathbf{K}_2}$ *tem a seguinte forma*

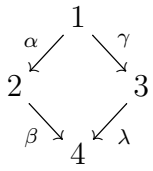


e os caminhos completos em $\widehat{Q}$ *são:*
$\alpha_n\widehat{\overline{p_1}}_n$, $\beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n$, $\widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1}$ *e* $\widehat{\overline{p_2}}_n\beta_{n-1}$.
para todo $n \in \mathbb{Z}$

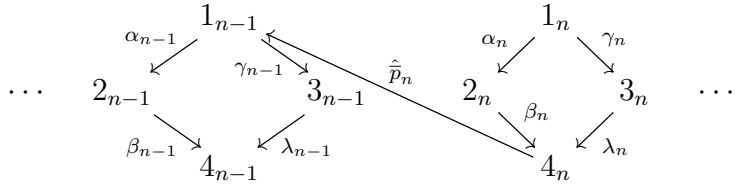
As relações $\widehat{\rho}$ *são as seguintes:*

$\widehat{\rho} = \{\alpha_n\widehat{\overline{p_1}}_n - \beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n\,,\, \widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1} - \widehat{\overline{p_2}}_n\beta_{n-1}\,,\, \alpha_n\widehat{\overline{p_2}}_n, \beta_n\overline{p_1}_n\,,\, \widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1}\,,\, \widehat{\overline{p_2}}_n\beta_{n-1}\}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$

3. *Seja* Q *o quiver*

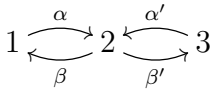


com relações $\rho = \{\alpha\beta - \gamma\lambda\}$. *O quiver* $\widehat{Q}$ *é da forma*



As relações $\widehat{\rho}$ *é dado por* $\alpha_n\beta_n - \gamma_n\lambda_n$ *para todos* $n \in \mathbb{Z}$. *As relações de comutatividade provenientes da condição r3 já são consequência das outras relações. Para mais detalhe da construção do* $(\widehat{Q}, \widehat{\rho})$ *ver* [*Schr99*].

4. *Considere o quiver*

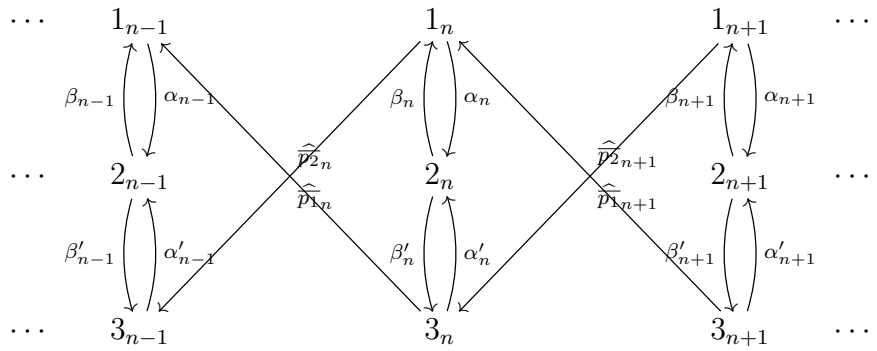


com a seguinte relação $\beta\alpha - \beta'\alpha'$. *Vamos construir o quiver* $(\widehat{Q}, \widehat{\rho})$ *de* (Q, ρ). *Para isso, vamos encontrar primeiramente os caminhos máximos que são dados por* $\mathscr{M}(Q, \rho) = \{\overline{\alpha\beta'}, \overline{\alpha'\beta}\}$. *Agora, vamos construir as flechas de conexões que são dadas por:*

Como $\overline{\alpha\beta'} : 1 \longrightarrow 3$ *temos que* $\widehat{\overline{p_1}}_n : 3_n \longrightarrow 1_n$

Como $\overline{\alpha'\beta} : 3 \longrightarrow 1$ *temos que* $\widehat{\overline{p_2}}_n : 1_n \longrightarrow 2_n$

Então, $\widehat{Q}$ *tem a seguinte forma:*



Os caminhos completos de $\widehat{Q}$ *são,* $\alpha_n\beta'_n\widehat{\overline{p_1}}_n$, $\beta'_n\widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1}$, $\widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1}\beta'_{n-1}$, $\alpha'_n\beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n$, $\beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n\alpha'_{n-1}$, $\widehat{\overline{p_2}}_n\alpha'_{n-1}\beta'_{n-1}$.

As relações $\widehat{\rho}$, *primeiramente são da forma* $\beta_n\alpha_n - \beta'_n\alpha'_n$, *em segundo temos que todo* p *que não for um subcaminho de um caminho completo é relação em* $\widehat{\rho}$, *note que as relações de comutatividade provenientes da condição* $r3$ *já são consequência das outras relações.*

3.2 Álgebra repetitiva de uma álgebra gentle

Nesta seção, baseada em [Schr99], definiremos as álgebras bisseriais especiais e as álgebras gentle, com o objetivo de, a partir de uma álgebra gentle, construir sua álgebra repetitiva e investigar as propriedades que essa nova estrutura pode apresentar. Para isso, começaremos com o par (Q, ρ), estabelecendo as condições sob as quais esse quiver com relações será bisserial e gentle.

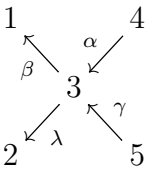
Definição 3.11. *Seja* Q *um quiver e* ρ *um conjunto de relações para* Q. *O par* (Q, ρ) *é* ***chamado de bisserial especial*** *se ocorrer o seguinte:*

(s1) Qualquer vértice de Q *é ponto inicial de no máximo duas flechas e também ponto final de no máximo duas flechas;*

(s2) Dada uma flecha β, *existe no máximo uma flecha* α *tal que* $t(\alpha) = s(\beta)$ *e* $\alpha\beta \notin \rho$ *e no máximo uma flecha* γ *tal que* $t(\beta) = s(\gamma)$ *e* $\beta\gamma \notin \rho$.

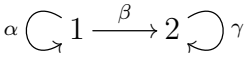
Exemplo 3.12.

1. *O quiver Q dado por*



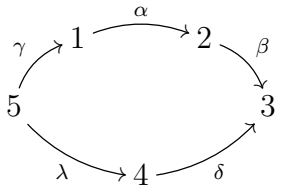
com a seguinte relação $\rho = \{\alpha\beta\}$ e $\gamma\lambda = 0$ é bisserial especial.

2. *O quiver*



com as relações $\rho = \{\alpha^2, \gamma^2\}$ é bisserial especial pois cumpri as condições $s1$ e $s2$.

3. *Seja o quiver*



com as relações $\rho = \{\gamma\alpha\beta - \lambda\delta\}$ é bisserial especial.

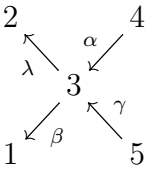
Definição 3.13. *O par (Q, ρ) é chamado **gentle** se for bisserial especial e as seguintes condições adicionais forem satisfeitas:*

(g1) O conjunto ρ consiste em relações zero de comprimento 2 ;

(g2) Para qualquer flecha β existe no máximo uma flecha α tal que $\alpha\beta \in \rho$ e no máximo uma flecha γ tal que $\beta\gamma \in \rho$.

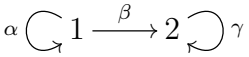
Exemplo 3.14.

1. *Considerando o quiver Q dado por*



com a seguinte relação $\rho = \{\alpha\beta\}$ e $\gamma\lambda = 0$ vimos no Exemplo (3.12) que o par (Q, ρ) é bisserial especial, e como satisfaz também as condições $g1$ e $g2$, temos que o par (Q, ρ) é gentle.

2. *Considere o quiver*



com as relações $\rho = \{\alpha^2, \gamma^2\}$. O par (Q, ρ) é gentle.

3. *Seja o quiver do Exemplo (3.12), item* 3. *Note que o quiver não satisfaz a condição g*1 *da Definição (3.13), logo não pode ser gentle.*

A partir das definições 3.11 e 3.13, introduziremos os conceitos de álgebra bisserial especial e álgebra gentle. Essas definições serão essenciais para o desenvolvimento dos resultados subsequentes.

Definição 3.15. *Uma álgebra é chamada de* ***bisserial especial*** *se for da forma* $\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$*, onde* (Q,ρ) *é bisserial especial.*

Definição 3.16. *Uma álgebra é chamada de* ***gentle*** *se for da forma* $\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$*, onde* (Q,ρ) *é gentle.*

Observação 3.17. *Seja* $A=\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$ *uma álgebra bisserial especial. Uma consequência direta da definição é que os módulos projetivos indecomponíveis de* A *são, no máximo, bisseriais, ou seja, cada projeto indecomponível possui no máximo duas composições sucessivas de monomorfismos ou epimorfismos em sua estrutura de fatoração. Essa propriedade decorre da condição (s1), que restringe a quantidade de flechas incidentes em cada vértice, e da condição (s2), que limita a forma das composições admissíveis de caminhos na álgebra de caminhos com relações. Essa característica será útil ao analisarmos representações de álgebras bisseriais especiais e suas subclasses, como as álgebras gentle.*

Proposição 3.18. *Seja* $A=\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$*, onde* (Q,ρ) *é um quiver de dimensão finita e* A *é gentle. Então,* $\widehat{A}$ *é bisserial especial.*

Demonstração. Seja $A=\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$, uma álgebra gentle. A partir disso, podemos afirmar que $(\widehat{Q},\rho')$ também é gentle, onde ρ' é o subconjunto das relações de comprimento 2 de $\widehat{\rho}$ que satisfazem as condições $r1$ (da Definição 3.4) ou $r2$ (da Definição 3.4). Essa característica implica diretamente que o quiver $(\widehat{Q},\widehat{\rho})$ é bisserial especial.

Além disso, pelo Teorema 3.9, concluímos que $\widehat{A}=\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$ é bisserial especial. □

Lema 3.19. *Se* $\widehat{A}$ *é bisserial especial, então* A *também é bisserial especial.*

Demonstração. Suponha que $\widehat{A}$ seja bisserial especial. Isso implica que existe um quiver finito $\widehat{Q}$ e um conjunto de relações $\widehat{\rho}$ tal que $\widehat{A}=\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$, e que o par $(\widehat{Q},\widehat{\rho})$ é bisserial especial.

Seja Q o quiver subjacente a $\widehat{Q}$ e ρ o conjunto de relações correspondente a $\widehat{\rho}$ em Q. Assim, podemos escrever $A=\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$. Além disso, podemos assumir sem perda de generalidade que ρ consiste apenas de relações zero ou de comutatividade.

De acordo com o Teorema 3.9, temos $\widehat{A}=\Bbbk\widehat{Q}/\langle\widehat{\rho}\rangle$, o que implica que $A=\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$, já que a álgebra repetitiva não introduz novas relações além daquelas presentes em Q.

Portanto, A é da forma $\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$, onde o par (Q,ρ) é bisserial especial. Concluímos que A também é bisserial especial. □

Proposição 3.20. *Seja* A *uma* $\Bbbk$*-álgebra de dimensão finita onde* $\widehat{A}$ *é bisserial especial, então* A *é gentle.*

Demonstração. Do Lema (3.19) temos que se $\widehat{A}$ é bisserial especial, então A é bisserial especial.

Agora suponha, por absurdo, que existe uma relação de comutatividade $v - w = v_1 \cdots v_n - w_1 \cdots w_m$ em ρ, onde v e w são caminhos máximos em (Q, ρ), decorrendo da bisserialidade especial de (Q, ρ). Consequentemente, temos $v_1 \neq w_1$.

Além disso, observe que $\widehat{\overline{v}}_n v_{1n-1}$ e $\widehat{\overline{v}}_n w_{1n-1}$ são subcaminhos de algum caminho completo em $(\widehat{Q}, \widehat{\rho})$. Portanto, ambos não pertencem a $\widehat{\rho}$. Dado que v e w têm comprimento maior ou igual a 2, $\widehat{\overline{v}}_n v_{1n-1}$ e $\widehat{\overline{v}}_n w_{1n-1}$ não ocorrem em uma relação de comutatividade em $\widehat{\rho}$.

Isso implica que o radical do $\widehat{A}$-módulo projetivo indecomponível correspondente a $s(\widehat{\overline{v}}_n)$ não é a soma de dois módulos unisseriais, o que contradiz a bisserialidade especial de $\widehat{A}$. Assim, concluímos que ρ contém apenas relações zero.

Suponha agora que $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ seja uma relação zero de comprimento $n \geq 3$ em ρ. Então, existe algum caminho p tal que $q = p\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ é um caminho máximo em (Q, ρ). No entanto, $\alpha_{n-1_n}\alpha_{nn}$ e $\alpha_{n-1_n}\widehat{\overline{q}}_n$ não são ambos em $\widehat{\rho}$ e não ocorrem em uma relação de comutatividade, o que é uma contradição.

Isso implica que ρ contém apenas relações zero de comprimento 2. Finalmente, sejam $\alpha_1 \neq \alpha_2$ flechas em Q com $e(\alpha_1) = e(\alpha_2)$, e seja β uma flecha em Q com $s(\beta) = e(\alpha_1)$. Suponha que $\alpha_1\beta$ e $\alpha_2\beta$ estejam ambos em ρ. Então, existe um caminho q tal que $p = \beta q$ é um caminho máximo. Isso implica que três flechas, a saber α_{1n}, α_{2n}, e $\widehat{\overline{p}}_{z+1}$, terminam no mesmo vértice, outra contradição.

Assim, demonstramos que A é gentle. □

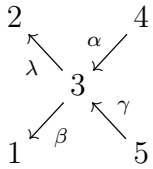
Teorema 3.21. *Seja $A = \Bbbk Q/\langle\rho\rangle$ onde (Q, ρ) de dimensão finita então A é gentle se, e somente se, $\widehat{A}$ é bisserial especial.*

Demonstração. A prova segue da Proposição (3.18) e (3.20) □

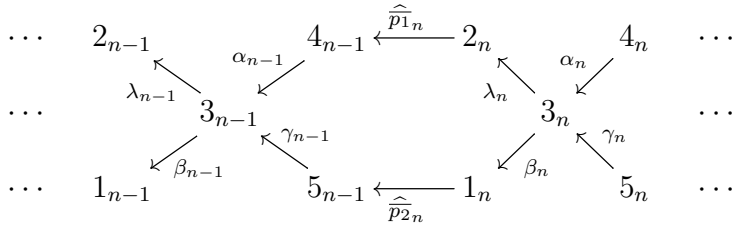
Agora daremos alguns exemplos para ilustrar o Teorema 3.21

Exemplo 3.22.

1. *Seja o quiver*



com as relações com a seguinte relação $\rho = \{\alpha\beta\}$ e $\gamma\lambda = 0$, do Exemplo (3.14) sabemos que $\Bbbk Q/\rho$ é gentle, pois (Q, ρ) é gentle. Note que o conjunto de caminhos maximos é dado por $\mathscr{M}(Q, \rho) = \{\overline{\alpha\lambda}, \overline{\gamma\beta}\}$, então as flechas de conexões são $\widehat{\overline{p_1}}_n : 2_n \longrightarrow 4_{n-1}$ e $\widehat{\overline{p_2}}_n : 1_n \longrightarrow 5_{n-1}$, de onde segue que $\widehat{Q}$ é:

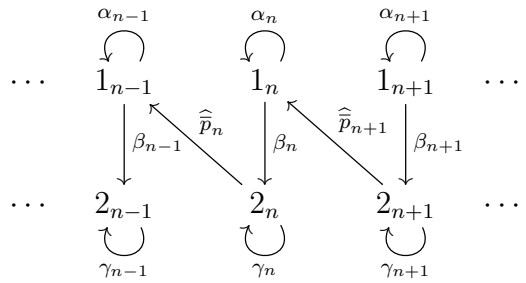


Os caminhos completos são $\alpha_n\lambda_n\widehat{\overline{p_1}}_n$, $\lambda_n\widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1}$, $\widehat{\overline{p_1}}_n\lambda_{n-1}\alpha_{n-1}$, $\gamma_n\beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n$, $\beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n\gamma_{n-1}$ *e* $\widehat{\overline{p_2}}_n\beta_{n-1}\gamma_{n-1}$. *As relação* $\widehat{\rho}$ *são primeiramente,* $\alpha_n\lambda_n = 0$, $\gamma_n\lambda_n = 0$ *para todo* n *inteiro, segundo temos que todo* p *que não for um subcaminho de um caminho completo é relação em* $\widehat{\rho}$, *e finalmente temos* $\lambda_n\widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1} - \beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n\gamma_{n-1}$ *para todo* n *inteiro. Pelo Teorema (3.21) temos que* $\widehat{A} = \Bbbk\widehat{Q}/\widehat{\rho}$ *é bisserial especial.*

2. *Seja o quiver*

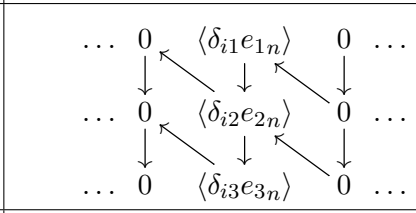
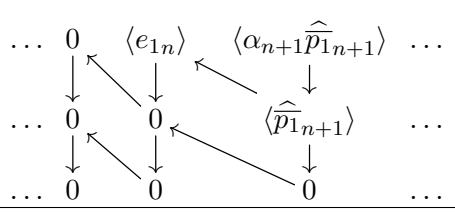
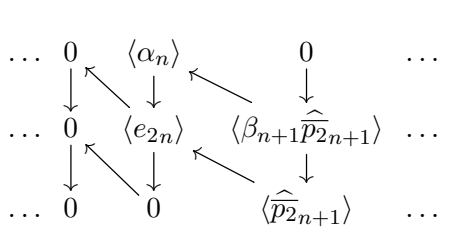
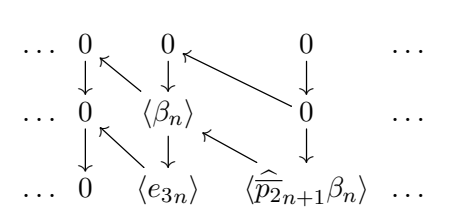
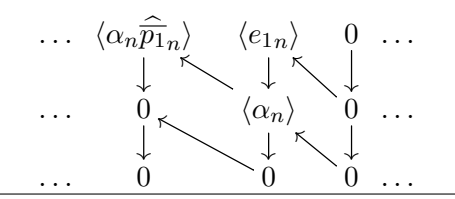
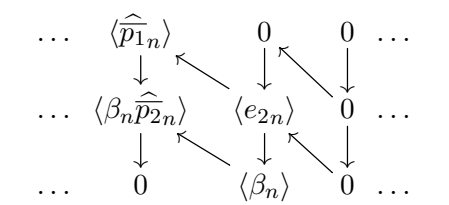
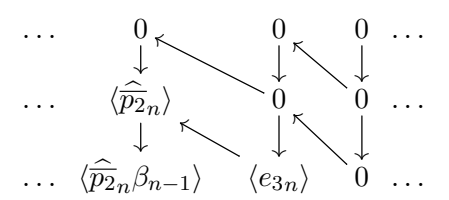
$$\alpha \circlearrowleft 1 \xrightarrow{\beta} 2 \circlearrowright \gamma$$

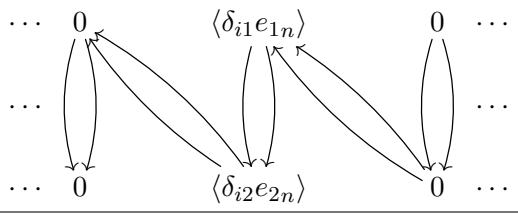
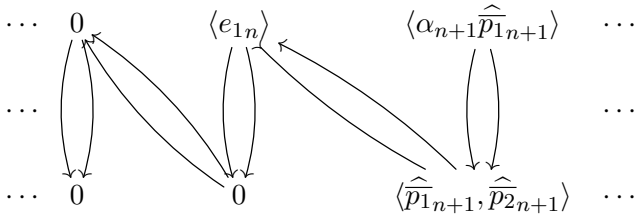
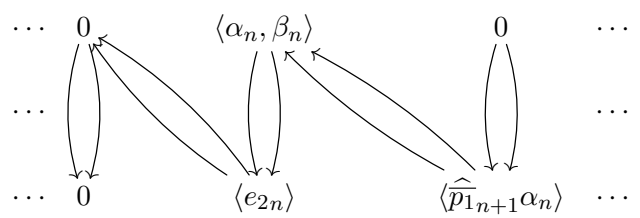
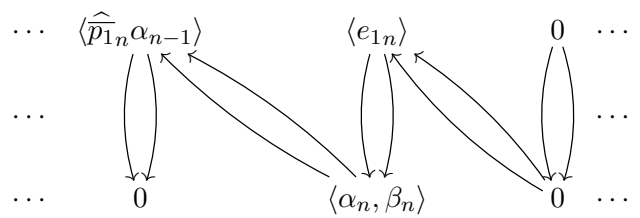
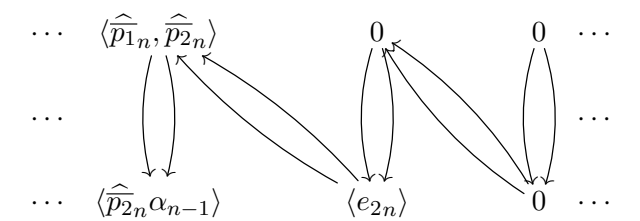
com as relações $\rho = \{\alpha^2, \gamma^2\}$. *O par* (Q, ρ) *é gentle, logo a álgebra de caminho* $\Bbbk Q/\langle\rho\rangle$ *é. O conjunto de caminhos máximos de* (Q, ρ) *é* $\mathscr{M}(Q, \rho) = \{\overline{\alpha\beta\gamma}\}$, *então a felchas de conexão é da seginte forma,* $\widehat{\overline{p}} : 2_n \longrightarrow 1_{n-1}$, *assim o quiver* $\widehat{Q}$ *é dado por:*

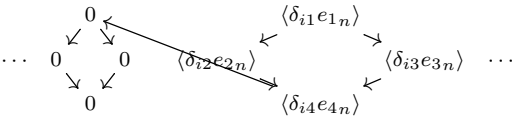
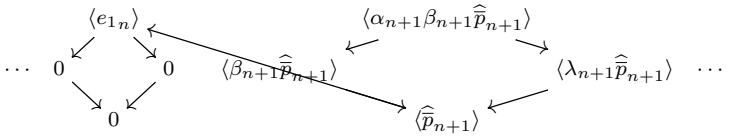
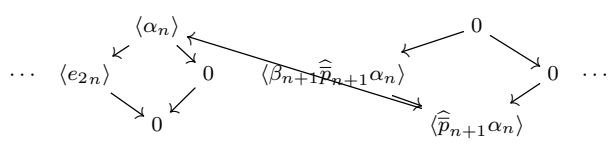
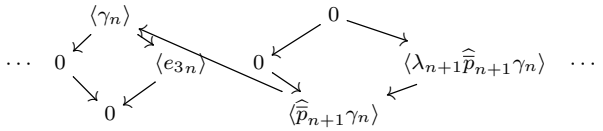
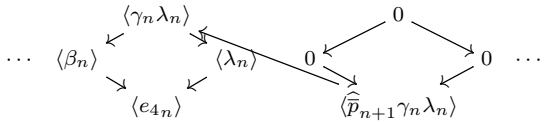
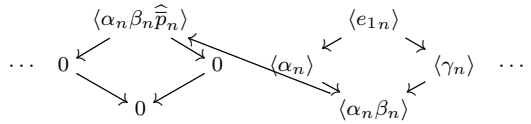
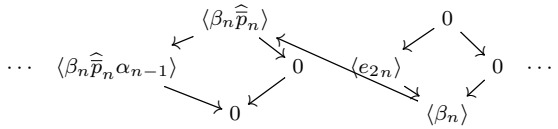
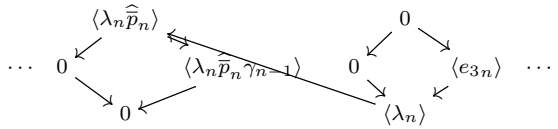
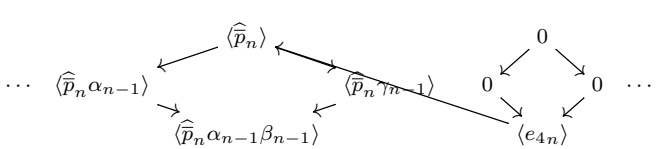


Os caminhos completos são, $\alpha_n\beta_n\gamma_n\widehat{\overline{p}}_n$, $\beta_n\gamma_n\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}$, $\gamma_n\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}\beta_{n-1}$ *e* $\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}\beta_{n-1}\gamma_{n-1}$. *As relações* $\widehat{\rho}$ *são* $\alpha_n^2 = 0$, γ_n^2 *para todo* n *inteiro e todo* p *que não for um subcaminho de um caminho completo é relação em* $\widehat{\rho}$, *Pelo Teorema (3.21) temos que* $\widehat{A} = \Bbbk\widehat{Q}/\widehat{\rho}$ *é bisserial especial.*

Observação 3.23. *As representações simples, injetivas e projetivas dos quivers* $(\widehat{\mathbb{A}_3}, \widehat{\rho})$, $(\widehat{\mathbf{K}_2}, \widehat{\rho})$ *e* $(\widehat{Q}, \widehat{\rho})$, *conforme exemplificado no item 3 do Exemplo 3.22, são apresentadas nas tabelas a seguir na segunda coluna da tabela. Cada tabela inclui seus módulos correspondentes na terceira coluna da tabela, incluindo com as ações determinadas pelo funtor* $G : \mathrm{Rep}(Q, \mathcal{I}) \longrightarrow A\text{-Mod}$, *como definido na Seção 2.2. Denotamos por* $\langle\ \rangle$ *o span de cada módulo.*

	$\mathrm{Rep}(\widehat{\mathbf{A}_3}, \widehat{\rho})$	$\Bbbk\widehat{\mathbf{A}_3}/\widehat{\rho}$-Mod
$S(i)_n$		$\bigoplus_{i=1}^{3}\langle\delta_{ij}e_j\rangle$; *com a ação trivial.*
$P(1)_n$		$\langle e_{1n}, \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases} \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\cdot e_{1n} = \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1} \\ \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\cdot e_{1n} = \widehat{\overline{p_1}}_{n+1} \\ 0 \ \ c.c. \end{cases}$
$P(2)_n$		$\langle e_{2n}, \alpha_n, \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}, \beta_{n+1}\widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases} \alpha_n\cdot e_{2n} = \alpha_n \\ \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\cdot e_{2n} = \widehat{\overline{p_2}}_{n+1} \\ \beta_{n+1}\widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\cdot e_{2n} = \beta_{n+1}\widehat{\overline{p_2}}_{n+1} \\ 0 \ \ c.c. \end{cases}$
$P(3)_n$		$\langle e_{3n}, \beta_n, \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\beta_n\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases} \beta_n\cdot e_{3n} = \beta_n \\ \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\beta_n\cdot e_{3n} = \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\beta_n \\ 0 \ \ c.c. \end{cases}$
$I(1)_n$		$\langle e_{1n}, \alpha_n, \alpha_n\widehat{\overline{p_1}}_n\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases} e_{1n}\cdot\alpha_n = \alpha_n \\ e_{1n}\cdot\alpha_n\widehat{\overline{p_1}}_n = \alpha_n\widehat{\overline{p_1}}_n \\ 0 \ \ c.c. \end{cases}$
$I(2)_n$		$\langle e_{2n}, \beta_n, \widehat{\overline{p_1}}_n, \beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases} e_{2n}\cdot\beta_n = \beta_n \\ e_{2n}\cdot\widehat{\overline{p_1}}_n = \widehat{\overline{p_1}}_n \\ e_{2n}\cdot\beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n = \beta_n\widehat{\overline{p_2}}_n \\ 0 \ \ c.c. \end{cases}$
$I(3)_n$		$\langle e_{3n}, \widehat{\overline{p_2}}_n, \widehat{\overline{p_2}}_n\beta_{n-1}\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases} e_{3n}\cdot\widehat{\overline{p_2}}_n = \widehat{\overline{p_2}}_n \\ e_{3n}\cdot\widehat{\overline{p_2}}_n\beta_{n-1} = \widehat{\overline{p_2}}_n\beta_{n-1} \\ 0 \ \ c.c. \end{cases}$

	$Rep(\widehat{\mathbf{K}_2}, \widehat{\rho})$	$\Bbbk\widehat{\mathbf{K}_2}/\widehat{\rho}$-Mod
$S(i_n)$		$\bigoplus_{i=1}^{2}\langle\delta_{ij}e_j\rangle$; *com a ação trivial.*
$P(1_n)$		$\langle e_{1n}, \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases} \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\cdot e_{1n} = \widehat{\overline{p_1}}_{n+1} \\ \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\cdot e_{1n} = \widehat{\overline{p_2}}_{n+1} \\ \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\cdot e_{1n} = \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1} \\ 0 \ \ c.c. \end{cases}$
$P(2_n)$		$\langle e_{2n}, \alpha_n, \beta_n, \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\alpha_n\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases} \alpha_n\cdot e_{2n} = \alpha_n \\ \beta_n\cdot e_{2n} = \beta_n \\ \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\alpha_n\cdot e_{2n} = \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\alpha_n \\ 0 \ \ c.c. \end{cases}$
$I(1_n)$		$\langle e_{1n}, \alpha_n, \beta_n, \widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1}\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases} e_{1n}\cdot\alpha_n = \alpha_n \\ e_{1n}\cdot\beta_n = \beta_n \\ e_{1n}\cdot\widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1} = \widehat{\overline{p_1}}_n\alpha_{n-1} \\ 0 \ \ c.c. \end{cases}$
$I(2_n)$		$\langle e_{2n}, \widehat{\overline{p_1}}_n, \widehat{\overline{p_2}}_n, \widehat{\overline{p_2}}_n\alpha_{n-1}\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases} e_{2n}\cdot\widehat{\overline{p_1}}_n = \widehat{\overline{p_1}}_n \\ e_{2n}\cdot\widehat{\overline{p_2}}_n = \widehat{\overline{p_2}}_n \\ e_{2n}\cdot\widehat{\overline{p_2}}_n\alpha_{n-1} = \widehat{\overline{p_2}}_n\alpha_{n-1} \\ 0 \ \ c.c. \end{cases}$

	$Rep(\widehat{Q},\widehat{\rho})$	$\Bbbk\widehat{Q}/\widehat{\rho}$-Mod
$S(i_n)$		$\bigoplus_{i=1}^{4}\langle\delta_{ij}e_j\rangle$; *com a ação trivial.*
$P(1_n)$		$\langle e_{1_n},\widehat{\overline{p}}_{n+1},\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1},\lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1},\alpha_{n+1}\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\cdot e_{1_n}=\widehat{\overline{p}}_{n+1}\\ \beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\cdot e_{1_n}=\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\\ \lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\cdot e_{1_n}=\lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\\ \alpha_{n+1}\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\cdot e_{1_n}=\alpha_{n+1}\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\\ 0\ \ c.c.\end{cases}$
$P(2_n)$		$\langle e_{2_n},\alpha_n,\widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n,\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases}\alpha_n\cdot e_{2_n}=\alpha_n\\ \widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n\cdot e_{2_n}=\widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n\\ \beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n\cdot e_{2_n}=\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n\\ 0\ \ c.c.\end{cases}$
$P(3_n)$		$\langle e_{3_n},\gamma_n,\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n,\lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases}\gamma_n\cdot e_{2_n}=\gamma_n\\ \widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\cdot e_{2_n}=\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\\ \lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\cdot e_{2_n}=\lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\\ 0\ \ c.c.\end{cases}$
$P(4_n)$		$\langle e_{4_n},\beta_n,\lambda_n,\gamma_n\lambda_n,\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\lambda_n\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases}\beta_n\cdot e_{4_n}=\beta_n\\ \lambda_n\cdot e_{4_n}=\lambda_n\\ \gamma_n\lambda_n\cdot e_{4_n}=\gamma_n\lambda_n\\ \widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\lambda_n\cdot e_{4_n}=\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\lambda_n\\ 0\ \ c.c.\end{cases}$
$I(1_n)$		$\langle e_{1_n},\alpha_n,\gamma_n,\alpha_n\beta_n\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases}e_{1_n}\cdot\alpha_n=\alpha_n\\ e_{1_n}\cdot\gamma_n=\gamma_n\\ e_{1_n}\cdot\alpha_n\cdot\beta_n=\alpha_n\alpha_n\\ e_{1_n}\cdot\alpha_n\beta_n\widehat{\overline{p}}_n=\alpha_n\beta_n\widehat{\overline{p}}_n\\ 0\ \ c.c.\end{cases}$
$I(2_n)$		$\langle e_{2_n},\beta_n,\beta_n\widehat{\overline{p}}_n\rangle$, *cuja ação é dada por:* $,\langle\beta_n\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}\begin{cases}e_{2_n}\cdot\beta_n=\beta_n\\ e_{2_n}\cdot\beta_n\widehat{\overline{p}}_n=\beta_n\widehat{\overline{p}}_n\\ e_{2_n}\cdot\ \beta_n\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}=\beta_n\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}\\ 0\ \ c.c.\end{cases}$
$I(3_n)$		$\langle e_{3_n},\lambda_n,\lambda_n\widehat{\overline{p}}_n,\lambda_n\widehat{\overline{p}}_n\gamma_{n-1}\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases}e_{3_n}\cdot\lambda_n=\lambda_n\\ e_{3_n}\cdot\lambda_n\widehat{\overline{p}}_n=\lambda_n\widehat{\overline{p}}_n\\ e_{3_n}\cdot\lambda_n\widehat{\overline{p}}_n\gamma_{n-1}=\lambda_n\widehat{\overline{p}}_n\gamma_{n-1}\\ 0\ \ c.c.\end{cases}$
$I(4_n)$		$\langle e_{4_n},\widehat{\overline{p}}_n,\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1},\widehat{\overline{p}}_n\gamma_{n-1},\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}\beta_{n-1}\rangle$, *cuja ação é dada por:* $\begin{cases}e_{4_n}\cdot\widehat{\overline{p}}_n=\widehat{\overline{p}}_n\\ e_{4_n}\cdot\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}=\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}\\ e_{4_n}\cdot\widehat{\overline{p}}_n\gamma_{n-1}=\widehat{\overline{p}}_n\gamma_{n-1}\\ e_{4_n}\cdot\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}\beta_{n-1}=\widehat{\overline{p}}_n\alpha_{n-1}\beta_{n-1}\\ 0\ \ c.c.\end{cases}$

3.3 Categoria dos módulos de uma álgebra repetitiva

Nesta seção, estudaremos a estrutura dos $\widehat{A}$-módulos e sua relação com a teoria dos complexos de cocadeias tensorizados por DA. Começamos introduzindo os conjuntos de idempotentes ortogonais em $\widehat{A}$, cuja interação sutil forma a base para nossa investigação. Em seguida, formalizaremos os $\widehat{A}$-módulos e exploraremos suas propriedades, destacando sua importância.

Uma interpretação alternativa dos $\widehat{A}$-módulos nos leva à categoria dos complexos de cocadeias tensorizados por DA. Mostramos que essa categoria é isomorfa à categoria dos $\widehat{A}$-módulos finitamente gerado como é feita em [BR24]. Grande parte da discussão nesta seção segue a apresentação em [Gir18] e [BR24], que serão nossas principais referência neste momento.

Utilizaremos o conceito de produto tensorial de A-módulos. No entanto, como a abordagem desse tópico exigiria uma expansão significativa, optamos por não incluir uma explanação detalhada sobre a teoria. Para os leitores que não estiverem familiarizados com esses conceitos, recomendamos consultar [Ass97, Capítulo V].

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, denotaresmos $\widehat{\varepsilon}_n = (\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{A}$, onde δ_{nm} é o delta de Kronecker, o conjunto $\{\widehat{\varepsilon}_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais para $\widehat{A}$, pois satisfaz as propriedades que provaremos a seguir

Lema 3.24. *Seja $\widehat{\varepsilon}_n = (\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{A}$, então $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{\varepsilon}_n = \widehat{\varepsilon}_n$ e $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{\varepsilon}_{n'} = 0$ para $n \neq n'$*

Demonstração. Mostraremos que $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{\varepsilon}_n$, calculado temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_n\widehat{\varepsilon}_n &= (\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \cdot (\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= (\delta_{nm} \cdot \delta_{nm}, \delta_{nm} \cdot 0 + 0 \cdot \delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= \left(\delta_{nm}^2, 0\right)_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= (\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \quad (\text{pois } \delta_{nm}^2 = \delta_{nm}) \\
&= \widehat{\varepsilon}_n.
\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{\varepsilon}_{n'}$ para $n \neq n'$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_n\widehat{\varepsilon}_{n'} &= (\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \cdot (\delta_{n'm}, 0)_{n'\in\mathbb{Z}} \\
&= (\delta_{nm} \cdot \delta_{n'm}, \delta_{nm} \cdot 0 + 0 \cdot \delta_{n'm})_{n'\in\mathbb{Z}} \\
&= (\delta_{nm} \cdot \delta_{n'm}, 0)_{n'\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$= \begin{cases} (\delta_{nm} \cdot \delta_{n'm}, 0) & \text{se } n = m \\ (0 \cdot \delta_{n'm}, 0) & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Se caso $n = m$, teriamos que $m \neq n'$,pois pela hipótese temos $n \neq n'$, de onde segue que $(\delta_{nm} \cdot 0, 0) = (0, 0)$, caos $n \neq m$ teriamos $(0 \cdot \delta_{n'm}, 0) = (0, 0)$, e recai no primeiro caso.

Portanto, mostramos que $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{\varepsilon}_{n'} = \widehat{\varepsilon}_n$ se $n = n'$ e $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{\varepsilon}_{n'} = 0$ se $n \neq n'$, como desejado. □

Corolário 3.3.1. *Seja* $\widehat{a} = (a_{n'}, \varphi_{n'})_{n'\in\mathbb{Z}} \in \widehat{A}$ *e* $s \geq 2$. *Então,* $\widehat{\varepsilon}_{n+s}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n = (0,0)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Demonstração. Para demonstrar que $\widehat{\varepsilon}_{n+s}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n = (0,0)_{n\in\mathbb{Z}}$, com $\widehat{a} = (a_{n'}, \varphi_{n'})_{n'\in\mathbb{Z}} \in \widehat{A}$ e $s \geq 2$, começamos calculando o produto $\widehat{\varepsilon}_{n+s}\widehat{a}$ e, em seguida, multiplicamos o resultado por $\widehat{\varepsilon}_n$.

Primeiro, avaliamos o produto $\widehat{\varepsilon}_{n+s}\widehat{a}$:

$$\widehat{\varepsilon}_{n+s}\widehat{a} = \widehat{\varepsilon}_{n+s}\left(a_{n'}, \varphi_{n'}\right)_{n'\in\mathbb{Z}} = \left(\delta_{n'n+s}a_{n'}, 0\right)_{n\in\mathbb{Z}},$$

onde utilizamos a definição de $\widehat{\varepsilon}_{n+s}$ como $(\delta_{ij}, 0)_{n\in\mathbb{Z}}$, com $i = n + s$.

Agora, calculamos $\widehat{\varepsilon}_{n+s}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n$:

$$\widehat{\varepsilon}_{n+s}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n = \left(\delta_{n'n+s}a_{n'}, 0\right)_{n\in\mathbb{Z}} \cdot \left(\delta_{nk}, 0\right)_{k\in\mathbb{Z}} = \left(\delta_{n'n+s}a_{n'}\delta_{nk}, 0\right)_{nk\in\mathbb{Z}}.$$

Note que $\delta_{n'n+s}\delta_{nk}$ é diferente de zero apenas se $n' = n + s$ e $n = k$. Portanto, o produto resulta em:

$$\left(\delta_{n'n+s}\delta_{nk}a_{n'}, 0\right)_{nk\in\mathbb{Z}}.$$

Se $s \geq 2$, a condição $n' = n + s$ implica que n' está pelo menos duas unidades distante de n, ou seja, $n' \neq n$. Como consequência, $\delta_{n'n+s}\delta_{nk} = 0$ para todos os n' e n, o que leva a:

$$\widehat{\varepsilon}_{n+s}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n = (0,0)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Assim, concluímos a prova. □

A seguir, mostraremos que a álgebra A pode ser entendida como $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ por meio de um isomorfismo dado pela aplicação $\theta_n : A \longrightarrow \widehat{\varepsilon}_n\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$. Essa interpretação é necessária, pois permite uma descrição mais clara em nosso contexto.

Proposição 3.25. *Seja* A *uma* $\Bbbk$*-álgebra. A aplicação* $\theta_n : A \longrightarrow \widehat{\varepsilon}_n\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ *definida por* $\theta_n(a) = (a\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}}$ *para todo* $a \in A$ *é um isomorfismo de* $\Bbbk$*-álgebras.*

Demonstração. Primeiramente, consideremos $a, b \in A$ e $x \in \Bbbk$. Vamos verificar que θ_n satisfaz $\theta_n(xa + b) = x\theta_n(a) + \theta_n(b)$ para quaisquer $a, b \in A$ e $x \in \Bbbk$. Temos:

$$\begin{aligned}
\theta_n(xa + b) &= ((xa + b)\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= (xa\delta_{nm} + b\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= (xa\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} + (b\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= x\,(a\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} + (b\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= x\theta_n(a) + \theta_n(b).
\end{aligned}$$

Portanto, θ_n é uma aplicação linear.

Em seguida, provamos que θ_n é um homomorfismo de álgebras, ou seja, satisfaz $\theta_n(a \cdot b) = \theta_n(a) \cdot \theta_n(b)$ para quaisquer $a, b \in A$. Observemos:

$$\begin{aligned}\theta_n(a) \cdot \theta_n(b) &= (a\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \cdot (b\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= ((a\delta_{nm}) \cdot (b\delta_{nm}), 0)_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= ((a \cdot b)\delta_{nm}\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= ((a \cdot b)\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \theta_n(a \cdot b).\end{aligned}$$

Agora, para mostrar que θ_n é injetora, suponha $\theta_n(a) = \theta_n(b)$. Isso implica:

$$(a\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} = (b\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}},$$

o que leva a $a\delta_{nm} = b\delta_{nm}$ para todo n. Se $n \neq m$, ambos os lados da igualdade se anulam, e se $n = m$, obtemos $a = b$. Assim, θ_n é injetora.

Por fim, para mostrar que θ_n é sobrejetora, tome $c = (d\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}}$, onde $d \in A$. Queremos encontrar $a \in A$ tal que $\theta_n(a) = c$. Pela definição de θ_n, isso implica $a\delta_{nm} = d\delta_{nm}$ para todo n. Se $n \neq m$, ambos os lados se anulam; e se $n = m$, obtemos $a = d$. Logo, escolhendo $a = d$, temos:

$$\theta_n(a) = (d\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} = c.$$

Portanto, θ_n é sobrejetora.

Concluímos que θ_n é um isomorfismo de álgebras, como desejado. □

Faremos também uma identificação para DA via isomorfismo dada pela aplicação $\phi_n : DA \longrightarrow \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$, o qual será demonstrado a seguir.

Proposição 3.26. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra, onde DA é o dual de A. A aplicação $\phi_n : DA \longrightarrow \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ definida por $\phi_n(\varphi) = (0, \varphi\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}}$ para todo $\varphi \in DA$ é um isomorfismo de bimódulos.*

Demonstração. Considere $\varphi, \psi \in DA$ e $x \in \Bbbk$. Vamos demonstrar que

$$\phi_n(x\varphi + \psi) = x\phi_n(\varphi) + \phi_n(\psi),$$

para todos $\varphi, \psi \in DA$ e $x \in \Bbbk$.

Pela definição de ϕ_n, temos:

$$\begin{aligned}\phi_n(x\varphi + \psi) &= (0, (x\varphi + \psi)\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= (0, x\varphi\delta_{nm} + \psi\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= (0, x\varphi\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} + (0, \psi\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= x\,(0, \varphi\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} + (0, \psi\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= x\phi_n(\varphi) + \phi_n(\psi).\end{aligned}$$

Portanto, ϕ_n é linear.

Agora, provemos que ϕ_n é um homomorfismo de bimódulos, ou seja, que

$$\phi_n(a'\varphi(a)) = a'\phi_n(\varphi(a)) \quad \text{e} \quad \phi_n(\varphi(a)a'') = \phi_n(\varphi(a))a'',$$

para todos $a, a', a'' \in A$ e $\varphi \in DA$.

Para o primeiro caso, temos:

$$\begin{aligned}
\phi_n(a'\varphi(a)) &= \phi_n(\varphi(a'a)) \\
&= (0, \varphi(a'a)\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= (0, a'\varphi(a)\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= a' (0, \varphi(a)\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= a'\phi_n(\varphi(a)).
\end{aligned}$$

De forma análoga, para o segundo caso, temos:

$$\begin{aligned}
\phi_n(\varphi(a)a'') &= \phi_n(\varphi(aa'')) \\
&= (0, \varphi(aa'')\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= (0, \varphi(a)a''\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} \\
&= (0, \varphi(a)\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}}\, a'' \\
&= \phi_n(\varphi(a))a''.
\end{aligned}$$

Portanto, ϕ_n é um homomorfismo de bimódulos.

Para verificar a injetividade de ϕ_n, considere $\phi_n(\varphi) = \phi_n(\psi)$. Isso implica

$$(0, \varphi\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}} = (0, \psi\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}},$$

o que, por sua vez, implica $\varphi\delta_{nm} = \psi\delta_{nm}$ para todo n. Se $n \neq m$, ambos os termos são zero. Se $n = m$, temos $\varphi = \psi$. Assim, ϕ_n é injetora.

Agora, provemos que ϕ_n é sobrejetora. Considere $\varsigma = (0, \sigma\delta_{nm})_{n\in\mathbb{Z}}$, com $\sigma \in DA$. Queremos encontrar $\varphi \in DA$ tal que

$$\phi_n(\varphi) = \varsigma.$$

Pela definição de ϕ_n, isso implica $\varphi\delta_{nm} = \sigma\delta_{nm}$ para todo n. Se $n \neq m$, ambos os lados são zero. Se $n = m$, temos $\varphi = \sigma$. Logo, escolhendo $\varphi = \sigma$, obtemos $\phi_n(\varphi) = \varsigma$. Portanto, ϕ_n é sobrejetora.

Como ϕ_n é injetora e sobrejetora, concluímos que ϕ_n é bijetora. Assim, ϕ_n é um isomorfismo de bimódulos, como queríamos demonstrar. □

Observação 3.27. *Note que podemos escrever*

$$\widehat{A} = \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A\right) \oplus \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} DA\right)$$

como

$$\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n \widehat{A} \widehat{\varepsilon}_n\right) \oplus \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_{n+1} \widehat{A} \widehat{\varepsilon}_n\right),$$

isso segue das Propoosições 3.25 e 3.26.

Proposição 3.28. *Seja $\widehat{A}$ a álgebra repetitiva de A. Para um n fixo em $\mathbb{Z}$, valem as seguintes identidades:*

(i) $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{A} = \widehat{\varepsilon}_n\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n \oplus \widehat{\varepsilon}_n\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_{n-1}$;

(ii) $\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n = \widehat{\varepsilon}_n\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n \oplus \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$.

Demonstração. Começamos considerando a seguinte decomposição da álgebra repetitiva $\widehat{A}$:

$$\widehat{A} = \left(\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_m\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_m\right) \oplus \left(\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_{m+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_m\right).$$

Multiplicando a expressão acima à esquerda por $\widehat{\varepsilon}_n$, obtemos:

$$\widehat{\varepsilon}_n\widehat{A} = \widehat{\varepsilon}_n\left(\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_m\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_m\right) \oplus \widehat{\varepsilon}_n\left(\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_{m+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_m\right).$$

Utilizando a propriedade de ortogonalidade dos idempotentes $\widehat{\varepsilon}_m$, sabemos que $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{\varepsilon}_m = 0$ se $n \neq m$ e $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{\varepsilon}_m = \widehat{\varepsilon}_n$ se $n = m$. Assim, a expressão se simplifica para:

$$\widehat{\varepsilon}_n\widehat{A} = \widehat{\varepsilon}_n\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n \oplus \widehat{\varepsilon}_n\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_{n-1}.$$

Isso prova a identidade (i).

Agora, multiplicamos a decomposição inicial de $\widehat{A}$ à direita por $\widehat{\varepsilon}_n$:

$$\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n = \left(\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_m\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_m\right)\widehat{\varepsilon}_n \oplus \left(\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_{m+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_m\right)\widehat{\varepsilon}_n.$$

Novamente, aplicando a ortogonalidade dos idempotentes $\widehat{\varepsilon}_m$, temos que $\widehat{\varepsilon}_m\widehat{\varepsilon}_n = 0$ se $m \neq n$ e $\widehat{\varepsilon}_m\widehat{\varepsilon}_n = \widehat{\varepsilon}_n$ se $m = n$. Assim, a expressão se reduz a:

$$\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n = \widehat{\varepsilon}_n\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n \oplus \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n.$$

Isso prova a identidade (ii).

Portanto, as duas identidades foram demonstradas. □

Observação 3.29. *Decorre da Proposição 3.28 que podemos expressar $\widehat{A}$ como uma soma direta das subálgebras associadas a cada $\widehat{\varepsilon}_n$:*

$$\widehat{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n\widehat{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$$

Lema 3.30. *Seja $\widehat{A}$ a álgebra repetitiva de A. Então $\widehat{A}$ satisfaz $\widehat{A}^2 = \widehat{A}$.*

Demonstração. Para provar que $\widehat{A}^2 = \widehat{A}$, onde $\widehat{A}^2$ denota o subespaço de $\widehat{A}$ gerado por todos os produtos $\widehat{a}\cdot\widehat{b}$ com $\widehat{a},\widehat{b} \in \widehat{A}$, mostraremos que $\widehat{A}^2 \subseteq \widehat{A}$ e $\widehat{A} \subseteq \widehat{A}^2$.

Primeiro, provemos que $\widehat{A}^2 \subseteq \widehat{A}$. Suponha que $\widehat{a} \in \widehat{A}^2$. Por definição de $\widehat{A}^2$, o elemento $\widehat{a}$ pode ser escrito como uma combinação linear de produtos de elementos em $\widehat{A}$, isto é,

$$\widehat{a} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{b}_n\widehat{c}_n,$$

onde $\widehat{b}_n, \widehat{c}_n \in \widehat{A}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como $\widehat{b}_n\widehat{c}_n \in \widehat{A}$, segue que $\widehat{a} \in \widehat{A}$, o que implica $\widehat{A}^2 \subseteq \widehat{A}$.

Agora, provemos que $\widehat{A} \subseteq \widehat{A}^2$. Seja $\widehat{a} \in \widehat{A}$. Queremos escrever $\widehat{a}$ como um elemento de $\widehat{A}^2$. Para isso, escrevemos:

$$\widehat{a} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{b}_n\widehat{\varepsilon}_n,$$

onde $\widehat{b}_n \in \widehat{A}$ e $\widehat{\varepsilon}_n \in \widehat{A}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Agora, observe que $\widehat{\varepsilon}_n \in \widehat{A}^2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Isso ocorre porque podemos escrever $\widehat{\varepsilon}_n$ como um produto de dois elementos em $\widehat{A}$:

$$\widehat{\varepsilon}_n = \widehat{\varepsilon}_n \cdot \widehat{\varepsilon}_n.$$

Como $\widehat{\varepsilon}_n \in \widehat{A}$, segue que $\widehat{\varepsilon}_n \in \widehat{A}^2$.

Assim, concluímos que $\widehat{a} \in \widehat{A}^2$, pois $\widehat{a}$ pode ser expressa como uma combinação linear de elementos de $\widehat{A}^2$.

Com isso, provamos que $\widehat{A}^2 \subseteq \widehat{A}$ e $\widehat{A} \subseteq \widehat{A}^2$, o que implica que $\widehat{A}^2 = \widehat{A}$, como desejado. □

A Proposição a seguir demonstrará que a aplicação $\Psi : \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n \longrightarrow D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$ dada por $\Psi_n(\beta)(\alpha) = \alpha\beta(1)$, é um isomorfismo de módulos à esquerda, onde $\beta \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ e $\alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$. Esse resultado é fundamental para a estrutura da categoria de módulos sobre $\widehat{A}$. Em particular, quando A é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, a categoria $\widehat{A}$-mod é uma categoria de Frobenius, o que tem implicações importantes na teoria de representações e dualidade. Para mais detalhes, ver [Gir18] e [AY11].

Proposição 3.31. *Seja $\widehat{A}$ a álgebra repetitiva de A. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, a aplicação $\Psi : \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n \longrightarrow D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$ dada por $\Psi_n(\beta)(\alpha) = \alpha\beta(1)$, para todo $\beta \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ e $\alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$, é um isomorfismo de módulos à esquerda.*

Demonstração. Considerando os $\widehat{A}$-módulos à esquerda $\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ e $D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$, onde as ações são dadas, respectivamente, por:

$$\widehat{a} \cdot \widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n := (\widehat{a}\widehat{b})\widehat{\varepsilon}_n,$$

onde $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}$ e $\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$, e

$$\widehat{a} \cdot \varphi(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}) := \varphi(\widehat{\varepsilon}_{n+1}(\widehat{b}\widehat{a})),$$

onde $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}$, $\varphi \in D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$ e $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b} \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$. Queremos verificar que $\Psi : \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n \longrightarrow D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$ dada por $\Psi_n(\beta)(\alpha) = \alpha\beta(1)$, para todo $\beta \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ e $\alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$, é um isomorfismo de módulos à esquerda.

Observe que Ψ_n está bem definida, pois $\beta\alpha(1) \in DA$. De fato, considerando que $\beta \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ e $\alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$, temos que $\alpha\beta \in \alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$, do Lema 3.30 sabemos que $\widehat{A}^2 = \widehat{A}$, o que implica que $\alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n = \alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}^2\widehat{\varepsilon}_n = \alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$, lembre que $\alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ é identificado com DA, de onde segue que $\beta\alpha(1) \in DA$.

Verificaremos agora que $\Psi_n(\widehat{a}\beta) = \widehat{a}\Psi_n(\beta)$. Aplicando Ψ_n em $\widehat{a}\beta$, temos o seguinte:

$$\Psi_n(\widehat{a}\beta) = \Psi_n(\widehat{a}(\widehat{b\varepsilon}_n))$$

onde $\beta = \widehat{b\varepsilon}_n$. Temos que $\Psi_n(\widehat{a}(\widehat{b\varepsilon}_n)) : \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A} \longrightarrow \Bbbk$ tal que $\Psi_n(\widehat{a}(\widehat{b\varepsilon}_n))(\alpha) = \Psi_n(\widehat{a}(\widehat{b\varepsilon}_n)(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{c})$, onde $\alpha = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{c} \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$. Daí segue que

$$\begin{aligned}\Psi_n((\widehat{a}\widehat{b})\widehat{\varepsilon}_n)(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{c}) &= (\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{c})((\widehat{a}\widehat{b})\widehat{\varepsilon}_n)(1) \\ &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}(\widehat{c}\widehat{a}\widehat{b})\widehat{\varepsilon}_n(1).\end{aligned}$$

Aplicando a ação do módulo à esquerda em Ψ_n, temos o seguinte:

$$\widehat{a}\Psi_n(\beta) = \widehat{a}\Psi_n(\widehat{b\varepsilon}_n)$$

onde $\widehat{a}\Psi_n(\widehat{b\varepsilon}_n) : \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A} \longrightarrow \Bbbk$ tal que $\widehat{a}\Psi_n(\widehat{b\varepsilon}_n)(\alpha) = \widehat{a}\Psi_n(\widehat{b\varepsilon}_n)(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{c})$, onde $\alpha = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{c} \in: \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$. Note que

$$\begin{aligned}\widehat{a}\Psi_n(\widehat{b\varepsilon}_n)(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{c}) &= \Psi_n(\widehat{b\varepsilon}_n)((\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{c})\widehat{a}) \\ &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}(\widehat{c}\widehat{a}\widehat{b})\widehat{\varepsilon}_n(1).\end{aligned}$$

Finalmente, temos que de fato

$$\Psi_n(\widehat{a}\beta) = \widehat{a}\Psi_n(\beta).$$

Agora, verificaremos que $\Psi_n(\beta + \gamma) = \Psi_n(\beta) + \Psi_n(\gamma)$, onde $\beta, \gamma \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ tal que $\beta = \widehat{b\varepsilon}_n$ e $\gamma = \widehat{c\varepsilon}_n$. Lembre-se que $\Psi_n(\beta)(\alpha) = \alpha\beta(1)$. Agora, aplicando isso à soma $\beta + \gamma$, temos:

$$\begin{aligned}\Psi_n(\beta+\gamma)(\alpha) = \Psi_n(\beta+\gamma)(\widehat{d\varepsilon}_n) &= (\widehat{d\varepsilon}_n)(\widehat{b}+\widehat{c})\widehat{\varepsilon}_n(1) \\ &= \widehat{d}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n(1) + \widehat{d}\widehat{c}\widehat{\varepsilon}_n(1) \ = \Psi_n(\beta)(\widehat{d\varepsilon}_n) + \Psi_n(\gamma)(\widehat{d\varepsilon}_n) \\ &= \Psi_n(\beta)(\alpha) + \Psi_n(\gamma)(\alpha).\end{aligned}$$

Portanto, $\Psi_n(\beta + \gamma) = \Psi_n(\beta) + \Psi_n(\gamma)$, onde $\alpha = \widehat{d\varepsilon}_n$.

Para provar a injetividade de Ψ_n, suponha que β e γ sejam elementos arbitrários em $\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ e que $\Psi_n(\beta) = \Psi_n(\gamma)$. Isso significa que, para todo $\alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$, temos $\alpha\beta(1) = \alpha\gamma(1)$. Vamos considerar a escolha específica $\alpha = \widehat{\varepsilon}_{n+1}$. Substituindo isso na equação, obtemos:

$$\widehat{\varepsilon}_{n+1}\beta(1) = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\gamma(1)$$

Agora, observe que $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\beta(1)$ e $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\gamma(1)$ pertencem a $D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$, pois a ação de $D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$ é definida sobre elementos de $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$. Portanto, podemos interpretar essa igualdade como uma igualdade em $D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$. Agora, pela definição de Ψ_n, temos:

$$\Psi_n(\beta)(\widehat{\varepsilon}_{n+1}) = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\beta(1)$$

$$\Psi_n(\gamma)(\widehat{\varepsilon}_{n+1}) = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\gamma(1)$$

Assim, a igualdade $\Psi_n(\beta) = \Psi_n(\gamma)$ implica que $\Psi_n(\beta)(\widehat{\varepsilon}_{n+1}) = \Psi_n(\gamma)(\widehat{\varepsilon}_{n+1})$. Portanto, $\Psi_n(\beta)(\widehat{\varepsilon}_{n+1}) = \Psi_n(\gamma)(\widehat{\varepsilon}_{n+1})$ implica que $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\beta(1) = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\gamma(1)$. Agora, como $\widehat{\varepsilon}_{n+1}$ é um elemento não nulo de $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$, podemos multiplicar ambos os lados da última igualdade por $\widehat{\varepsilon}_{n+1}$ inverso em $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$, obtendo assim:

$$\beta(1) = \gamma(1)$$

Esta última igualdade implica que $\beta = \gamma$, pois é a única forma de um elemento de $\widehat{A}$ agir em $\widehat{A}$ e produzir o mesmo resultado para todos os elementos de $\widehat{A}$. Portanto, se $\Psi_n(\beta) = \Psi_n(\gamma)$, então $\beta = \gamma$, mostrando assim que Ψ_n é injetiva.

Para mostrar que Ψ_n é sobrejetora, ou seja, dado $\varphi \in D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$, queremos encontrar $\beta \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ tal que $\Psi_n(\beta) = \varphi$, precisamos construir tal β. Lembrando a definição de Ψ_n:

$$\Psi_n(\beta)(\alpha) = \alpha\beta(1)$$

onde $\beta \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ e $\alpha \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$. Dado $\varphi \in D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$, queremos encontrar $\beta \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ tal que $\Psi_n(\beta) = \varphi$. Vamos definir β de forma conveniente. Para cada $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b} \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$, definimos β como:

$$\beta = \widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1} \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$$

Agora, para $\alpha = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a} \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$, temos:

$$\begin{aligned}\Psi_n(\beta)(\alpha) &= \alpha\beta(1)\\ &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1}(1)\\ &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}(\widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1})(1)\end{aligned}$$

Vamos definir $\varphi_{\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}} \in D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$ como:

$$\varphi_{\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}}(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}) = (\widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1})(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a})$$

Assim, $\varphi_{\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}}$ está bem definido em $D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$, pois $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1}$ é um elemento de $D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$. Portanto, para todo $\alpha = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a} \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$, temos:

$$\begin{aligned}\Psi_n(\beta)(\alpha) &= \varphi_{\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}}(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a})\\ &= \varphi(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}).\end{aligned}$$

Assim, para cada $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b} \in \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}$, definimos $\beta = \widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1}$ em $\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ tal que $\Psi_n(\beta) = \varphi_{\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}}$. Portanto, para cada $\varphi \in D(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A})$, encontramos $\beta \in \widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ tal que $\Psi_n(\beta) = \varphi$. Portanto, Ψ_n é sobrejetora.

Assim, mostramos que Ψ_n é um isomorfismo de $\widehat{A}$-módulos à esquerda. □

Um $\widehat{A}$-módulo à esquerda M é definido como um espaço vetorial (ou um conjunto) equipado com uma ação de $\widehat{A}$, ou seja, para cada elemento $\widehat{a} \in \widehat{A}$ e cada elemento

$m \in M$, há uma operação que chamaremos de multiplicação à esquerda $\widehat{a} \cdot m$, que é um elemento de M. Esta ação deve satisfazer a condição $\widehat{A}M = M$, onde $\widehat{A}M$ denota o subespaço de M gerado por todos os elementos da forma $\widehat{a}m$, com $\widehat{a} \in \widehat{A}$ e $m \in M$.

Lembre que, um $\widehat{A}$-módulo à esquerda é dito ser finitamente gerado se existirem elementos $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ tais que M seja igual à soma direta dos subespaços gerados por esses elementos, ou seja, $M = \sum_{i=1}^{n} \widehat{A}m_i$.

Proposição 3.32. *Seja M um $\widehat{A}$-módulo. Então $\widehat{A}M = M$ se, e somente se, como espaço vetorial, M se decompõe na forma $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$.*

Demonstração. Suponha que vale $\widehat{A}M = M$ queremos provar que M se decompõe na forma $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$.

Por hipótese temos $M = \widehat{A}M$, pela Observação 3.29 sabemos que $\widehat{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n \widehat{A}$, substituindo $\widehat{A}$, obtemos que $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n \widehat{A}M$, por hipótese novamente temos que $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$.

Suponhamos agora que M pode ser decomposto na forma $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$. Queremos mostrar que $\widehat{A}M = M$.

Primeiro, observe que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\varepsilon}_n M \subseteq M$, pois $\widehat{\varepsilon}_n M$ é o subespaço de M gerado pelos elementos da forma $\widehat{\varepsilon}_n m$ com $m \in M$.

Agora, vamos mostrar a inclusão $\subseteq$. Para cada $\widehat{a} \in \widehat{A}$ e $m \in M$, temos $\widehat{a}m \in M$. Portanto, $\widehat{A}M \subseteq M$.
Agora, vamos mostrar a inclusão $\supseteq$. Seja $m \in M$. Queremos mostrar que m pertence a $\widehat{A}M$.
Como M pode ser decomposto na forma $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$, podemos escrever $m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_n$, onde $m_n \in \widehat{\varepsilon}_n M$. Agora, consideramos a ação de $\widehat{\varepsilon}_n$ em m_n. Como $\widehat{\varepsilon}_n \widehat{e}_{n'} = \delta_{nn'} \widehat{\varepsilon}_n$ (onde $\delta_{nn'}$ é o delta de Kronecker), podemos escrever $\widehat{\varepsilon}_n m_n = \widehat{\varepsilon}_n \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_n = m_n$. Portanto, cada termo m_n pertence a $\widehat{\varepsilon}_n M$. Agora, usando a ação de $\widehat{\varepsilon}_n$ em $\widehat{A}$, podemos escrever $\widehat{\varepsilon}_n \widehat{a} = \widehat{\varepsilon}_n \widehat{a} \widehat{\varepsilon}_n$ para qualquer $\widehat{a} \in \widehat{A}$.

Agora, consideramos a ação de $\widehat{\varepsilon}_n \widehat{a}$ em m_n. Temos $\widehat{\varepsilon}_n \widehat{a} m_n = \widehat{\varepsilon}_n \widehat{a} \widehat{\varepsilon}_n m_n$. Como $\widehat{\varepsilon}_n m_n$ pertence a $\widehat{\varepsilon}_n M$ e $\widehat{\varepsilon}_n \widehat{a} \widehat{\varepsilon}_n \in \widehat{\varepsilon}_n \widehat{A}$, temos que $\widehat{\varepsilon}_n \widehat{a} m_n$ pertence a $\widehat{\varepsilon}_n M$. Portanto, $\widehat{\varepsilon}_n \widehat{a} m_n$ pertence à soma direta $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$. Assim, m_n pode ser escrito como uma combinação de elementos na soma direta $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$. Como $\widehat{a}$ age linearmente, temos que $\widehat{a} m_n$ também pode ser escrito como uma combinação de elementos na soma direta $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$. Portanto, $\widehat{a} m_n \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$. Isso vale para qualquer $\widehat{a} \in \widehat{A}$ e $m \in M$. Portanto, m pertence a $\widehat{A}M$.

Assim, provamos que $\widehat{A}M = M$ se M pode ser decomposto na forma $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$. □

Observação 3.33. *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\varepsilon}_n M$ pode ser visto como um A-módulo ao identificar A com $\widehat{\varepsilon}_n \widehat{A} \widehat{\varepsilon}_n$, onde a ação é dado da seguinte por $\widehat{\varepsilon}_n \widehat{a} \widehat{\varepsilon}_n \cdot \widehat{\varepsilon}_n m := \widehat{\varepsilon}_n \widehat{a} \widehat{\varepsilon}_n m$,*

para todo $\widehat{\varepsilon}_n\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \in \widehat{\varepsilon}_n\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$ *e para todo* $m \in M$.

Proposição 3.34. *Se* $M \in \widehat{A}$*-mod, então para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *existe um* A*-homomorfismo* $f_n : DA \otimes_A \widehat{\varepsilon}_n M \longrightarrow \widehat{\varepsilon}_{n+1}M$ *definido por* $f_n\left(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m\right) := \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n m$*, onde* DA *é identificado por* $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n$.

Demonstração. Primeiramente cosidere a aplicação $F_n : \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{A}\widehat{\varepsilon}_n \times \widehat{\varepsilon}_n M \longrightarrow \widehat{\varepsilon}_{n+1}M$, dada por $f_n\left(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n m\right) := \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n m$, e vejamos que é A-bilinear, o qual segue dos cálculos abaixo:

$$\begin{aligned} F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n + \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n m) &= F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}(\widehat{a}+\widehat{b})\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n m) \\ &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}(\widehat{a}+\widehat{b})\widehat{\varepsilon}_n m = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n m + \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n m \\ &= F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n m) + F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n m), \end{aligned}$$

similamente,

$$\begin{aligned} F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n m + \widehat{\varepsilon}_n n) &= F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n(m+n)) = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}(m+n) \\ &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}m + \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}n) = F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n m) + F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n n), \end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned} F_n((\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n)x, \widehat{\varepsilon}_n m) &= F_n((\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n)\widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n m) = F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n m) \\ &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n m = F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n m) \\ &= F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n, \widehat{\varepsilon}_n\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n(\widehat{\varepsilon}_n m)) = F_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n, x(\widehat{\varepsilon}_n m)). \end{aligned}$$

Da propriedade universal do produto tensorial existe uma unica aplicação linear f_n como definida no enunciado.

Agora mostraremos que f_n é um A-homomorfismo. Cosidere $\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m \in DA \otimes_A \widehat{\varepsilon}_n M$ e $x \in A$, queremos provar que f_n satisfaz $f_n(x \cdot \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m) = x f_n(\cdot\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m)$. Pela Proposição 3.25 podemos identificar $x \in A$ como $\widehat{\varepsilon}_{n'}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n'}$, de onde segue que,

$$f_n(x \cdot \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m) = f_n(\widehat{\varepsilon}_{n'}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n'} \cdot \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m).$$

Note que, se $\widehat{\varepsilon}_{n'} \neq \widehat{\varepsilon}_{n+1}$, pela ortogonalidade dos idempotentes, temos que $\widehat{\varepsilon}_{n'}\widehat{\varepsilon}_{n+1} = 0$ logo $f_n(\widehat{\varepsilon}_{n'}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n'} \cdot \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m) = 0_{\widehat{\varepsilon}_n M}$, caso contrários, se $\widehat{\varepsilon}_{n'} = \widehat{\varepsilon}_{n+1}$ temos:

$$\begin{aligned} f_n(\widehat{\varepsilon}_{n'}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n'} \cdot \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m) &= f_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1} \cdot \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m) = f_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m) \\ &= f_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}(\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a})\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m) = \widehat{\varepsilon}_{n+1}(\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a})\widehat{\varepsilon}_n m \\ &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}(\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a})\widehat{\varepsilon}_n m = \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a})\widehat{\varepsilon}_n m \\ &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n+1} \cdot f_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m) \\ &= \widehat{\varepsilon}_{n'}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_{n'} \cdot f_n(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m) \end{aligned}$$

Assim temos que $f_n(x \cdot \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m) = x f_n(\cdot\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m)$, logo f_n é A-homomorfismo.

□

Observação 3.35. *A categoria de todos os $\widehat{A}$-módulos à esquerda finitamente gerados, denotada por $\widehat{A}$-mod, tem as seguintes propriedades:*

- *Os objetos da categoria $\widehat{A}$-mod são os $\widehat{A}$-módulos à esquerda finitamente gerados da forma $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$, onde $\widehat{\varepsilon}_n M$ representa o submódulo gerado por $\widehat{\varepsilon}_n$ em M, de onde segue da Proposição 3.32.*

- *Seja $h : M \longrightarrow N$ um $\widehat{A}$-homomorfismo , sabemos que $\widehat{\varepsilon}_n M$ pode ser visto como um A-módulo e pela Proposição 3.32 sabemos que $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$ e $N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n N$, os homomorfismos $h_{nm} : \widehat{\varepsilon}_n M \longrightarrow \widehat{\varepsilon}_m N$ podem ser vistos como A-homomorfismos. Note que, se $n \neq m$, os h_{nm} são zero, pois sabemos que $\widehat{\varepsilon}_n$ e $\widehat{\varepsilon}_m$ são ortogonais. Portanto, temos apenas um A-homomorfismo h_n, dado por*

$$\begin{array}{rccl} h_n : & \widehat{\varepsilon}_n M & \longrightarrow & \widehat{\varepsilon}_n N \\ & \widehat{\varepsilon}_n m & \longmapsto & h_n(\widehat{\varepsilon}_n m) \quad := \widehat{\varepsilon}_n h(m), \end{array}$$

  para todo $m \in M$.

Veremos agora uma outra interpretação para formalizar um $\widehat{A}$-módulo M, para isso visamos construir uma categoria, onde denotaremos por $\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{-mod})$, somente então provaremos que a categoria $\widehat{A}$-mod é isomorfa a categoria $\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{-mod})$.

Definamos o $\otimes$-complexo de cocadeia $DA \otimes_A \text{-} : A\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$ como sendo $M = (M^n, d^n_M)_{n\in\mathbb{Z}}$, tal que M^n são módulos de A, onde todos, exceto um número finito dos M_i são iguais a zero, e os d^n_M são $\widehat{A}$-homomorfismos $d^n_M : DA \otimes_A M^n \longrightarrow M^{n+1}$, que satisfaz $d^n_M \left(Id_{DA} \otimes d^{n-1}_M\right) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Podemos ver $M = (M^n, d^n_M)_{n\in\mathbb{Z}}$ graficamente como,

$$M : \qquad \cdots \rightsquigarrow M^{n-1} \overset{d^{n-1}_M}{\rightsquigarrow} M^n \overset{d^n_M}{\rightsquigarrow} M^{n+1} \rightsquigarrow \cdots .$$

Um morfismo entre $\otimes$-complexo $h : M = (M^n, d^n_M)_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow N = (N^n, d^n_N)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A-homomorfismos $h_n : M^n \longrightarrow N^n$, de tal forma que o diagrama a seguir comute para todo $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccc} DA \otimes_A M^n & \xrightarrow{d^n_M} & M^{n+1} \\ {\scriptstyle 1\otimes h_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_{n+1}} \\ DA \otimes_A N^n & \xrightarrow[d^n_N]{} & N^{n+1}. \end{array}$$

Podemos ver $h : M = (M^n, d^n_M)_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow N = (N^n, d^n_N)_{n\in\mathbb{Z}}$ graficamente da seguinte forma,

$$\begin{array}{lccccccccc} M : & \cdots \rightsquigarrow & M^{n-1} & \overset{d^{n-1}_M}{\rightsquigarrow} & M^n & \overset{d^n_M}{\rightsquigarrow} & M^{n+1} & \rightsquigarrow & \cdots \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle h_n} & & \downarrow{\scriptstyle h_{n+1}} & & \\ N : & \cdots \rightsquigarrow & N^{n-1} & \underset{d^n_N}{\rightsquigarrow} & N^n & \underset{d^n_N}{\rightsquigarrow} & N^{n+1} & \rightsquigarrow & \cdots . \end{array}$$

Denotaremos por $Hom_{\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{- mod })}(M,N)$ o conjunto de morfismo de M para N. Considere $h \in Hom_{\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{- mod })}(M,N)$ e $l \in Hom_{\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{- mod })}(N,L)$. A composição $(h \circ l) \in Hom_{\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{- mod })}(M,L)$ é definida por $(l \circ h) := (l_n \circ h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Considerando os morfimos

$$\begin{array}{ccccccccccc} M: & \cdots & \rightsquigarrow & M^{n-1} & \overset{d_M^{n-1}}{\rightsquigarrow} & M^n & \overset{d_M^n}{\rightsquigarrow} & M^{n+1} & \rightsquigarrow & \cdots \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & & \downarrow{\scriptstyle h_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle h_n} & & \downarrow{\scriptstyle h_{n+1}} & & \\ N: & \cdots & \rightsquigarrow & N^{n-1} & \underset{d_N^{n-1}}{\rightsquigarrow} & N^n & \underset{d_N^n}{\rightsquigarrow} & N^{n+1} & \rightsquigarrow & \cdots \end{array},$$

e

$$\begin{array}{ccccccccccc} N: & \cdots & \rightsquigarrow & N^{n-1} & \overset{d_N^{n-1}}{\rightsquigarrow} & N^n & \overset{d_N^n}{\rightsquigarrow} & N^{n+1} & \rightsquigarrow & \cdots \\ {\scriptstyle l}\downarrow & & & \downarrow{\scriptstyle l_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle l_n} & & \downarrow{\scriptstyle l_{n+1}} & & \\ L: & \cdots & \rightsquigarrow & L^{n-1} & \underset{d_L^{n-1}}{\rightsquigarrow} & L^n & \underset{d_L^n}{\rightsquigarrow} & L^{n+1} & \rightsquigarrow & \cdots \end{array}.$$

Podemos ver a composição $(l_n \circ h_n)_{i\in\mathbb{Z}}$ da seguinte forma,

$$\begin{array}{ccccccccccc} M: & \cdots & \rightsquigarrow & M^{n-1} & \overset{d_M^{n-1}}{\rightsquigarrow} & M^n & \overset{d_M^n}{\rightsquigarrow} & M^{n+1} & \rightsquigarrow & \cdots \\ {\scriptstyle l\circ h}\downarrow & & & \downarrow{\scriptstyle l_{n-1}\circ h_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle l_n\circ h_n} & & \downarrow{\scriptstyle l_{n+1}\circ h_{n+1}} & & \\ L: & \cdots & \rightsquigarrow & L^{n-1} & \underset{d_L^{n-1}}{\rightsquigarrow} & L^n & \underset{d_L^n}{\rightsquigarrow} & L^{n+1} & \rightsquigarrow & \cdots \end{array}.$$

Vejamos que de fato $\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{-mod})$ é uma categoria, ou seja a composição $(l_n \circ h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaz:

i) $k\circ(l\circ h) = (k\circ l)\circ h$, onde $h \in Hom_{\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{- mod })}(M,N)$, $l \in Hom_{\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{- mod })}(N,L)$ e $k \in Hom_{\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{- mod })}(L,K)$.

Note que $k_n \circ (l_n \circ h_n) = (k_n \circ l_n) \circ h_n$, pois é morfismo de A-módulos, dai segue $k \circ (l \circ h) = (k \circ l) \circ h$.

ii) Para todo $M \in \mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{-mod})$, $\exists\, Id_M : M \longrightarrow M$, tal que

$$h \circ Id_M = h, \forall h : M \longrightarrow N$$
$$Id_M \circ g = g, \forall g : L \longrightarrow M.$$

Seja $h : M \longrightarrow N$ queremos verificar que $h \circ Id_M = h$. Temos que $h_n \circ Id_{Mn} = h_i$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, de onde segue que $h \circ Id_M$

Consiere agora $g : L \longrightarrow M$ queremos verificar que $Id_M \circ g = g$. Temos que $Id_{Mn} \circ g_n = g_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, de onde segue que $Id_M \circ g$

Definimos o funtor $\mathfrak{F} : \widehat{A}\text{-mod} \longrightarrow \mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{-mod})$ da seguinte forma: Dado que cada objeto $M \in \widehat{A}\text{-mod}$ é da forma $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M$ pela Proposição 3.32, então

$$\mathfrak{F}(M) = (\widehat{\varepsilon}_n M, f_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

com $f_n : DA \otimes_A \widehat{\varepsilon}_n M \longrightarrow \widehat{\varepsilon}_{n+1} M$ como definido na Proposição 3.34 para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Da Observação 3.35 definimos para cada $\widehat{A}$-homomorfismo h

$$\mathfrak{F}(h) = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

onde $h_n : \widehat{\varepsilon}_n M \longrightarrow \widehat{\varepsilon}_n N$. Note que

$$\begin{aligned} f_{n+1}(1 \otimes f_n)\left(\widehat{\varepsilon}_{n+2}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_{n+1} \otimes \left(\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n \otimes \widehat{\varepsilon}_n m\right)\right) &= f_{i+n}\left(\widehat{\varepsilon}_{n+2}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_{n+1} \otimes \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n m\right) \\ &= \widehat{\varepsilon}_{n+2}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}\widehat{\varepsilon}_n m = \widehat{\varepsilon}_{n+2}\widehat{a'}\widehat{\varepsilon}_n m \\ &= 0, \end{aligned}$$

com $\widehat{a'} = \widehat{a}\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{b}$, ou seja, $f_{n+1}(1 \otimes f_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De maneira similar, obtemos para todo $n \in \mathbb{Z}$ que $h_{n+1} f_n = g_n (1 \otimes h_n)$, onde $\mathfrak{F}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n N\right) = (\widehat{\varepsilon}_n N, g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Portanto, $\mathfrak{F}$ está bem definido.

Por outro lado, definimos o funtor $\mathfrak{G} : \mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{-mod}) \longrightarrow \widehat{A}\text{-mod}$ da seguinte forma:

Para cada objeto $(M^n, d^n_M)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{-mod})$ temos

$$\mathfrak{G}\left((M^n, d^n_M)_{n\in\mathbb{Z}}\right) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n,$$

onde a soma direta é de $\Bbbk$-espaços vetoriais e a estrutura do $\widehat{A}$-módulo é definida por

$$\widehat{a} \cdot m = (a_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \cdot (m_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (a_n m_n + f_{i-n}(\varphi_{n-1} \otimes m_{n-1}))_{n\in\mathbb{Z}}$$

para todo $\widehat{a} \in \widehat{A}$ e $m \in M'$.

E para cada $\widehat{A}$-homomorfismo $h : (M^n, d^n_M)_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow (N^n, d^n_N)_{n\in\mathbb{Z}}$, temos

$$\mathfrak{G}\left((h_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} h_n$$

.

Teorema 3.36. *(G. Benitez, P. Rizzo; 2024) As categorias* $\widehat{A}$-mod *e* $\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{-mod})$ *são isomorfas.*

Demonstração. Vamos provar que $\mathfrak{G}\mathfrak{F} = 1_{\widehat{A}\text{- mod}}$ e $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = 1_{\mathfrak{L}^b_{DA\otimes\text{-}}(A\text{-mod})}$.

Considerando $M \in \widehat{A}$-mod e $h \in \mathrm{Hom}_{\widehat{A}\text{-mod}}(M, N)$, temos:

$$\mathfrak{G}\mathfrak{F}(M) = \mathfrak{G}\left((M^n, d^n_M)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M = M.$$

A última igualdade é obtida a partir do Lema 3.32.

Como podemos considerar qualquer $m \in M$ na forma $m = (\widehat{\varepsilon}_n m_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varepsilon}_n M = M$, segue que:

$$(\mathfrak{G}\mathfrak{F}(h))(m) = \left((h^n)_{n\in\mathbb{Z}}\right)(m) = (h^n(\widehat{\varepsilon}_n m_n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$= (\widehat{\varepsilon}_n h(m_n))_{n\in\mathbb{Z}} = (h(\widehat{\varepsilon}_n m_n))_{n\in\mathbb{Z}} = h(m).$$

Portanto, $\mathfrak{G}\mathfrak{F} = 1_{\widehat{A}\text{-mod}}$ é o funtor identidade de $\widehat{A}$-mod.

Por outro lado, considerando $M = (M^n, d_M^n)$ e $N = (N^n, d_N^n)$ dois objetos em $\mathfrak{L}^b_{DA\otimes}(A\text{-mod})$, para facilitar a exposição, denotamos $\mathfrak{G}(M)$ por $\overline{M}$. Assim:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{G}(M) = \mathfrak{F}(\overline{M}) = \left(\overline{M}^{\mathrm{n}}, d^n_{\overline{M}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Como $\widehat{\varepsilon}_n = (\delta_{nm}, 0)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{A}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, da ação de $\widehat{A}$ sobre $\overline{M}$ obtemos que:

$$\overline{M}^n = \widehat{\varepsilon}_n \overline{M} = \widehat{\varepsilon}_n \left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M^k \right) = M^n$$

e para cada $\widehat{a} = (a_n, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{A}$ e $m = (m_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \overline{M}$, temos:

$$\begin{aligned} d^n_M\left((\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n) \otimes \widehat{\varepsilon}_n m\right) &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n m = (0, \delta_{nm}b_m)_{m\in\mathbb{Z}} \cdot (m_n)_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \left(d^{m-1}_M\left(\delta_{n,m-1}b_{m-1} \otimes m_{m-1}\right)\right)_{m\in\mathbb{Z}} = d^n_M\left(b_n \otimes m_n\right) \\ &= d^n_M\left((\widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{a}\widehat{\varepsilon}_n) \otimes \widehat{\varepsilon}_n m\right). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{F}\mathfrak{G}(M) = \left(\overline{M}^n, d^n_{\overline{M}}\right)_{n\in\mathbb{Z}} = (M^n, d^n_M)_{n\in\mathbb{Z}} = M$.

Finalmente, para qualquer morfismo $h : M \longrightarrow N$ em $\mathfrak{L}^b_{DA\otimes}(A\text{-mod})$, temos:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}\mathfrak{G}(h))^n(m) = (\mathfrak{F}\mathfrak{G}(h))^n(\widehat{\varepsilon}_n m) &= \widehat{\varepsilon}_n \mathfrak{F}\mathfrak{G}(h)(m) \\ &= \widehat{\varepsilon}_n \mathfrak{F}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} h_n\right)(m) = \widehat{\varepsilon}_n\left(h_n(m)\right) \\ &= h_n(m) = h(m). \end{aligned}$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e cada $m \in M^n$, temos $(\mathfrak{F}\mathfrak{G}(h))^n(m) = h(m)$. Portanto, concluímos que $\mathfrak{F}\mathfrak{G}(h) = h$, conforme desejado.

Então, $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = 1_{\mathfrak{L}^b_{DA\otimes}(A\text{-mod})}$ representa o funtor identidade de $\mathfrak{L}^b_{DA\otimes}(A\text{-mod})$, o que encerra a demonstração. □

3.4 Exemplos de $\widehat{A}$-módulos via complexos de cadeia tensorizados por DA

Finalizaremos este capitulo com três exemplos de álgebras repetitivas. Apresentaremos a interpretação em complexos de cocadeia tensorizados por DA, conforme determinado pelo funtor $\mathfrak{F} : \widehat{A}\text{-mod} \longrightarrow \mathfrak{L}^b_{DA\otimes-}(A\text{-mod})$, de cada módulo considerado na Observação 3.23, onde calculamos as representações (módulos) simples, projetivos e injetivos sobre $\widehat{A}$ utilizando o funtor G definido na Seção 2.2. Pelo Proposição 3.31 é suficiente calcular apenas para os módulos projetivos, pois sabemos que estes coincidem com os injetivos.

3.4.1 Exemplo $\mathbb{A}_3$

Considere a $\Bbbk$-álgebra $A = \Bbbk\mathbb{A}_3/\langle\rho\rangle$ do Exemplo 2.15 item 1 com sua respectiva álgebra repetitiva $\widehat{A} = \Bbbk\widehat{\mathbb{A}}_3/\langle\widehat{\rho}\rangle$ (ver Exemplo 3.10 item 1) e os $\widehat{A}$-módulos que calculamos na Observação 3.23. Vamos agora representar cada $M \in \widehat{A}$-mod na sua forma de cocadeia (M^n, d_M^n) nas tabelas a seguir, com os cálculos detalhados abaixo de cada tabela, onde são calculados cada componente M^n e seus diferenciais d_M^n, para os respectivos módulos.

Aplicando o funtor $\mathfrak{F}$ no módulo $P(1_n)$, obteremos a seguinte sequência, representada na tabela abaixo, onde também estão definidos os diferenciais.

$M = P(1_n) \in \widehat{A}$-mod	$M^n = \widehat{\varepsilon}_n P(1_n)$	$\mathfrak{F}(M) = (M^n, d_M^n)$
$\mathfrak{F}(P(1_n)) : \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \langle e_1\rangle \overset{d^n_{P(1_n)}}{\rightsquigarrow} \langle \phi_{e_1}, \phi_\alpha\rangle \overset{d^{n+1}_{P(1_n)}}{\rightsquigarrow} 0 \cdots$		
$d^n_{P(1_n)}: \quad DA \otimes_A \langle e_1\rangle \longrightarrow \langle \phi_{e_1}, \phi_\alpha\rangle$		
$\phi_{e_1} \otimes e_1 \longmapsto d^n_{P(1_n)}(\phi_{e_1} \otimes e_1) := \phi_{e_1}$		
$\phi_\alpha \otimes e_1 \longmapsto d^n_{P(1_n)}(\phi_\alpha \otimes e_1) := \phi_\alpha$		

Vamos agora calcular $\widehat{\varepsilon}_n P(1_n)$, justificando a tabela acima, como segue abaixo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_n P(1_n) &= \widehat{\varepsilon}_n\langle e_{1n}, \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_n e_{1n}, \widehat{\varepsilon}_n \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_n\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n (e_1, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_{e_1})_{n+1}, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_\alpha)_{n+1}\rangle \\
&= \langle (\delta_{nm} e_1, 0)_n\rangle \\
&= \langle e_1\rangle
\end{aligned}$$

Observe que, na terceira igualdade, aplicamos η da Proposição 3.8 e usamos as identificações da Proposição 3.25 e da Proposição 3.26. Faremos o mesmo para as demais contas neste exemplo.

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{n+1} P(1_n) &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}\langle e_{1n}, \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_{n+1} e_{1n}, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}\rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (e_1, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (0, \phi_{e_1})_{n+1}, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (0, \phi_\alpha)_{n+1}\rangle \\
&= \langle (0, \delta_{n+1m}\phi_{e_1})_{n+1}, (0, \delta_{n+1m}\phi_\alpha)_{n+1}\rangle \\
&= \langle \phi_{e_1}, \phi_\alpha\rangle
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular os diferenciais $d^n_{P(1_n)}$.

$$\begin{aligned}
d^n_{P(1_n)}(\phi_{e_1} \otimes e_1) &= \\
&= \widehat{\varepsilon}_n \phi_{e_1} \widehat{\varepsilon}_{n+1} \otimes \widehat{\varepsilon}_n e_1 \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_1 n})_n \otimes (\delta_{mn} e_{1n}, 0)_n \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_1 n})_n (\delta_{mn} e_{1n}, 0)_n \otimes 1_A \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_1 n} e_{1n-1})_n \otimes 1_A \\
&= \phi_{e_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^n_{P(1_n)}(\phi_\alpha \otimes e_1) &= \\
&= \widehat{\varepsilon}_n \phi_\alpha \widehat{\varepsilon}_{n+1} \otimes \widehat{\varepsilon}_n e_1 \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{\alpha n})_n \otimes (\delta_{mn} e_{1n}, 0)_n \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{\alpha n})_n (\delta_{mn} e_{1n}, 0)_n \otimes 1_A \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{\alpha n} e_{1n-1})_n \otimes 1_A \\
&= \phi_\alpha
\end{aligned}$$

$M = P(2_n) \in \widehat{A}$-mod	$M^n = \widehat{\varepsilon}_n P(2_n)$	$\mathfrak{F}(M) = (M^n, d_M^n)$
$\mathfrak{F}(P(2_n)) : \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \langle e_1, \alpha\rangle \overset{d^n_{P(2_n)}}{\rightsquigarrow} \langle \phi_{e_2}, \phi_\beta\rangle \overset{d^{n+1}_{P(2_n)}}{\rightsquigarrow} 0 \cdots$		
$d^n_{P(2_n)} :$	$DA \otimes_A \langle e_2, \alpha\rangle \longrightarrow \langle \phi_{e_2}, \phi_\beta\rangle$	
	$\phi_{e_2} \otimes e_2 \longmapsto d^n_{P(2_n)}(\phi_{e_2} \otimes e_2) := \phi_{e_2}$	
	$\phi_\beta \otimes e_2 \longmapsto d^n_{P(2_n)}(\phi_\beta \otimes e_2) := \phi_\beta$	

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_n P(2_n) &= \widehat{\varepsilon}_n \langle e_{2n}, \alpha_n, \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}, \beta_{n+1}\widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_n e_{2n}, \widehat{\varepsilon}_n \alpha_n, \widehat{\varepsilon}_n \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_n \beta_{n+1}\widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n (e_2, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (\alpha, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_\beta)_{n+1}, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_{e_2})_{n+1}\rangle \\
&= \langle (\delta_{nm} e_2, 0)_n, (\delta_{nm}\alpha, 0)_n\rangle \\
&= \langle e_2, \alpha\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{n+1} P(2_n) &= \widehat{\varepsilon}_{n+1} \langle e_{2n}, \alpha_n, \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}, \beta_{n+1}\widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_{n+1} e_{2n}, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \alpha_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \beta_{n+1}\widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (e_2, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (\alpha, 0)_n, \\
&\quad (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (0, \phi_\beta)_{n+1}, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (0, \phi_{e_2})_{n+1}\rangle \\
&= \langle (0, \delta_{n+1m}\phi_\beta)_{n+1}, (0, \delta_{n+1m}\phi_{e_2})_{n+1}\rangle \\
&= \langle \phi_{e_2}, \phi_\beta\rangle
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular os diferenciais $d^n_{P(i_2)}$.

$$\begin{aligned}
d^n_{P(2_n)}(\phi_{e_2} \otimes e_2) &= \\
&= \widehat{\varepsilon}_n \phi_{e_2} \widehat{\varepsilon}_{n+1} \otimes \widehat{\varepsilon}_n e_2 \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_2 n})_n \otimes (\delta_{mn} e_{2n}, 0)_n \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_2 n})_n (\delta_{mn} e_{2n}, 0)_n \otimes 1_A \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_2 n} e_{2n-2})_n \otimes 1_A \\
&= \phi_{e_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^n_{P(2_n)}(\phi_\beta \otimes e_2) &= \\
&= \widehat{\varepsilon}_n \phi_\beta \widehat{\varepsilon}_{n+1} \otimes \widehat{\varepsilon}_n e_2 \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{\beta_n})_n \otimes (\delta_{mn} e_{2n}, 0)_n \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{\beta_n})_n (\delta_{mn} e_{2n}, 0)_n \otimes 1_A \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{\beta_n} e_{2n-1})_n \otimes 1_A \\
&= \phi_\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^n_{P(2_n)}(\phi_{e_2} \otimes \alpha) &= \\
&= \widehat{\varepsilon}_n \phi_{e_2} \widehat{\varepsilon}_{n+1} \otimes \widehat{\varepsilon}_n \alpha \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_2 n})_n \otimes (\delta_{mn}\alpha_n, 0)_n \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_2 n})_n (\delta_{mn}\alpha_n, 0)_n \otimes 1_A \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_2 n}\alpha_{n-1})_n \otimes 1_A \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^n_{P(2_n)}(\phi_\beta \otimes \alpha) &= \\
&= \widehat{\varepsilon}_n \phi_\beta \widehat{\varepsilon}_{n+1} \otimes \widehat{\varepsilon}_n \alpha \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{\beta_n})_n \otimes (\delta_{mn}\alpha_n, 0)_n \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{\beta_n})_n (\delta_{mn}\alpha_n, 0)_n \otimes 1_A \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{\beta_n}\alpha_{n-1})_n \otimes 1_A \\
&= 0
\end{aligned}$$

$M = P(3_n) \in \widehat{A}$-mod	$M^n = \widehat{\varepsilon}_n P(3_n)$	$\mathfrak{F}(M) = (M^n, d_M^n)$
$\mathfrak{F}(P(3_n)) : \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \langle e_3, \beta\rangle \overset{d^n_{P(3_n)}}{\rightsquigarrow} \langle \phi_{e_3}\rangle \overset{d^{n+1}_{P(3_n)}}{\rightsquigarrow} 0 \cdots$		
$d^n_{P(3_n)} : \; DA \otimes_A \langle e_3, \beta\rangle \longrightarrow \langle \phi_{e_3}\rangle$ $\phi_{e_3} \otimes e_3 \longmapsto d^n_{P(3_n)}(\phi_{e_3} \otimes e_3) := \phi_{e_3}$		

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_n P(3_n) &= \widehat{\varepsilon}_n \langle e_{3n}, \beta_n, \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\beta_n\rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_n e_{3n}, \widehat{\varepsilon}_n \beta_n, \widehat{\varepsilon}_n \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\beta_n\rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n (e_3, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (\beta, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)(0, \phi_{e_3})_{n+1}\rangle \\
&= \langle (\delta_{nm} e_3, 0)_n, (\delta_{nm}\beta, 0)_n\rangle \\
&= \langle e_3, \beta\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{n+1} P(3_n) &= \widehat{\varepsilon}_{n+1} \langle e_{3n}, \beta_n, \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\beta_n\rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_{n+1} e_{3n}, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \beta_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \widehat{\overline{p_2}}_{n+1}\beta_n\rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (e_3, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_n (\beta, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)(0, \phi_{e_3})_{n+1}\rangle \\
&= \langle (0, \delta_{n+1m}\phi_{e_3})_{n+1}\rangle \\
&= \langle \phi_{e_3}\rangle
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular os diferenciais $d^n_{P(3_n)}$.

$$\begin{aligned}
&d^n_{P(3_n)}(\phi_{e_3} \otimes e_3) = \\
&= \widehat{\varepsilon}_n \phi_{e_3} \widehat{\varepsilon}_{n+1} \otimes \widehat{\varepsilon}_n e_3 \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_3 n})_n \otimes (\delta_{mn} e_{3n}, 0)_n \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_3 n})_n (\delta_{mn} e_{3n}, 0)_n \otimes 1_A \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_3 n} e_{3n-1})_n \otimes 1_A \\
&= \phi_{e_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&d^n_{P(3_n)}(\phi_{e_3} \otimes \beta) \\
&= \widehat{\varepsilon}_n \phi_{e_3} \widehat{\varepsilon}_{n+1} \otimes \widehat{\varepsilon}_n \beta \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_3 n})_n \otimes (\delta_{mn}\beta_n, 0)_n \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_3 n})_n (\delta_{mn}\beta_n, 0)_n \otimes 1_A \\
&= (0, \delta_{mn}\phi_{e_3 n}\beta_{n-1})_n \otimes 1_A \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.4.2 Exemplo Kronecker de duas flechas $\mathbf{K}_2$

Considere a $\Bbbk$-álgebra $A = \Bbbk\mathbf{K}_2$ do Exemplo 2.10 item 2 com sua respectiva álgebra repetitiva $\widehat{A} = \Bbbk\widehat{\mathbf{K}_2}/\langle\widehat{\rho}\rangle$ (ver Exemplo 3.10 item 2) e os $\widehat{A}$-módulos que calculamos na Observação 3.23. Vamos agora representar cada $M \in \widehat{A}$-mod na sua forma de cocadeia (M^n, d^n_M) nas tabelas tabelas a seguir, com os cálculos detalhados abaixo de cada uma, onde são calculados M^n. Optamos por não realizar os cálculos explícitos das diferenciais d^n_M neste exemplo, já que o procedimento é análogo ao descrito no exemplo 3.4.1.

Ao aplicar o funtor $\mathfrak{F}$ no módulo $P(1_n)$, obtemos a sequência representada na tabela a seguir, onde também são especificados os diferenciais.

$M = P(1_n) \in \widehat{A}$-mod	$M^n = \widehat{\varepsilon}_n P(1_n)$	$\mathfrak{F}(M) = (M^n, d_M^n)$
$\mathfrak{F}(P(1_n)) : \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \langle e_1 \rangle \overset{d^n_{P(1_n)}}{\rightsquigarrow} \langle \phi_{e_1}, \phi_\alpha, \phi\beta \rangle \overset{d^{n+1}_{P(1_n)}}{\rightsquigarrow} 0 \cdots$		
$d^n_{P(1_n)} :$	$DA \otimes_A \langle e_1 \rangle \longrightarrow \langle \phi_{e_1}, \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle$	
	$\phi_{e_1} \otimes e_1 \longmapsto d^n_{P(1_n)}(\phi_{e_1} \otimes e_1) := \phi_{e_1}$	
	$\phi_\alpha \otimes e_1 \longmapsto d^n_{P(1_n)}(\phi_\alpha \otimes e_1) := \phi_\alpha$	
	$\phi_\beta \otimes e_1 \longmapsto d^n_{P(1_n)}(\phi_\beta \otimes e_1) := \phi_\beta$	

Vamos agora calcular $\widehat{\varepsilon}_n P(1_n)$, justificando a tabela acima, como segue abaixo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_n P(1_n) &= \widehat{\varepsilon}_n \langle e_{1n}, \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\overline{p_2}}_{n+1} \rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_n e_{1n}, \widehat{\varepsilon}_n \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_n \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_n \widehat{\overline{p_2}}_{n+1} \rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n (e_1, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_{e_1})_{n+1}, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_\alpha)_{n+1}, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_\beta)_{n+1} \rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n (e_1, 0)_n \rangle \\
&= \langle (\delta_{nm} e_1, 0)_n \rangle \\
&= \langle e_1 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{n+1} P(1_n) &= \widehat{\varepsilon}_{n+1} \langle e_{1n}, \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\overline{p_2}}_{n+1} \rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_{n+1} e_{1n}, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \alpha_{n+1}\widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \widehat{\overline{p_1}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \widehat{\overline{p_2}}_{n+1} \rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1\, m}, 0)_{n+1} (e_1, 0)_n, (\delta_{n+1\, m}, 0)_{n+1} (0, \phi_{e_1})_{n+1}, \\
&\quad (\delta_{n+1\, m}, 0)_{n+1} (0, \phi_\alpha)_{n+1}, (\delta_{n+1\, m}, 0)_{n+1} (0, \phi_\beta)_{n+1} \rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1\, m}, 0)_{n+1} (0, \phi_{e_1})_{n+1}, (\delta_{n+1\, m}, 0)_{n+1} (0, \phi_\alpha)_{n+1}, (\delta_{n+1\, m}, 0)_{n+1} (0, \phi_\beta)_{n+1} \rangle \\
&= \langle (0, \delta_{n+1\, m} \phi_{e_1})_{n+1}, (0, \delta_{n+1\, m} \phi_\alpha)_{n+1}, (0, \delta_{n+1\, m} \phi_\beta)_{n+1} \rangle \\
&= \langle \phi_{e_1}, \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle
\end{aligned}$$

Vamos agora aplicar o funtor $\mathfrak{F}$ no módulo $P(2_n)$, e assim obteremos a seguinte sequência, representada na tabela abaixo, onde também estão definidos os diferenciais.

$M = P(2_n) \in \widehat{A}$-mod	$M^n = \widehat{\varepsilon}_n P(2_n)$	$\mathfrak{F}(M) = (M^n, d_M^n)$
$\mathfrak{F}(P(2_n)) : \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \langle e_2, \alpha, \beta \rangle \overset{d^n_{P(2_n)}}{\rightsquigarrow} \langle \phi_{e_2} \rangle \overset{d^{n+1}_{P(2_n)}}{\rightsquigarrow} 0 \cdots$		
$d^n_{P(2_n)} :$	$DA \otimes_A \langle e_1 \rangle \longrightarrow \langle \phi_{e_1}, \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle$	
	$\phi_{e_2} \otimes e_2 \longmapsto d^n_{P(2_n)}(\phi_{e_2} \otimes e_2) := \phi_{e_2}$	
	$\phi_{e_2} \otimes \alpha \longmapsto d^n_{P(2_n)}(\phi_{e_2} \otimes \alpha) := \phi_{e_2}$	
	$\phi_{e_2} \otimes \beta \longmapsto d^n_{P(2_n)}(\phi_{e_2} \otimes \beta) := \phi_{e_2}$	

E segue abaixo os calculos de $\widehat{\varepsilon}_n P(2_n)$, no qual justificando a tabela acima:

$$\widehat{\varepsilon}_n P(2_n) = \widehat{\varepsilon}_n \langle e_{2n}, \alpha_n, \beta_n, \widehat{\overline{p_1}}_{n+1} \alpha_n \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \widehat{\varepsilon}_n e_{2n}, \widehat{\varepsilon}_n \alpha_n, \widehat{\varepsilon}_n \beta_n, \widehat{\varepsilon}_n \widehat{\overline{p_1}}_{n+1} \alpha_n \rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n (e_2, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (\alpha, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (\beta, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_{e_2})_{n+1} \rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n (e_2, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (\alpha, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (\beta, 0)_n \rangle \\
&= \langle (\delta_{nm} e_2, 0)_n, (\delta_{nm} \alpha, 0)_n, (\delta_{nm} \beta, 0)_n \rangle \\
&= \langle e_2, \alpha, \beta \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{n+1} P(2_n) &= \widehat{\varepsilon}_{n+1} \langle e_{2n}, \alpha_n, \beta_n, \widehat{\overline{p_1}}_{n+1} \alpha_n \rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_{n+1} e_{2n}, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \alpha_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \beta_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1} \widehat{\overline{p_1}}_{n+1} \alpha_n \rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (e_2, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (\alpha, 0)_n, \\
&\quad (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (\beta, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1} (0, \phi_{e_2})_{n+1} \rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1m}, 0)(0, \phi_{e_2})_{n+1} \rangle \\
&= \langle (0, \delta_{n+1m} \phi_{e_2})_{n+1} \rangle \\
&= \langle \phi_{e_2} \rangle
\end{aligned}
$$

3.4.3 Exemplo de quiver com relação de comutatividade

Considere a $\Bbbk$-álgebra $A = \Bbbk Q / \langle \rho \rangle$, do Exemplo 2.15, item 2 com sua respectiva álgebra repetitiva $\widehat{A} = \Bbbk \widehat{Q} / \langle \widehat{\rho} \rangle$, e os $\widehat{A}$-módulos calculados na Observação 3.23. Vamos representar cada $M \in \widehat{A}$-mod na sua forma de cocadeia (M^n, d^n_M) nas tabelas a seguir, com os cálculos abaixo de cada tabela, onde são calculados cada componente M^n. Neste exemplo, deixaremos de lado os cálculos explícitos das diferenciais d^n_M, pois o procedimento é idêntico ao realizado no exemplo 3.4.1.

Ao aplicar o funtor $\mathfrak{F}$ ao módulo $P(1_n)$, obtemos a sequência exibida na tabela a seguir, que também inclui os diferenciais definidos.

$M = P(1_n) \in \widehat{A}$-mod	$M^n = \widehat{\varepsilon}_n P(1_n)$	$\mathfrak{F}(M) = (M^n, d^n_M)$
$\mathfrak{F}(P(1_n)) : \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \langle e_1 \rangle \overset{d^n_{P(1_n)}}{\rightsquigarrow} \langle \phi_{\alpha\beta}, \phi_\alpha, \phi_\gamma, \phi_{e_1} \rangle \overset{d^{n+1}_{P(1_n)}}{\rightsquigarrow} 0 \cdots$		
$d^n_{P(1_n)} :$	$DA \otimes_A \langle e_1 \rangle$	$\longrightarrow \langle \phi_{\alpha\beta}, \phi_\alpha, \phi_\gamma, \phi_{e_1} \rangle$
	$\phi_{\alpha\beta} \otimes e_1$	$\longmapsto d^n_{P(1_n)}(\phi_{\alpha\beta} \otimes e_1) := \phi_{\alpha\beta}$
	$\phi_\alpha \otimes e_1$	$\longmapsto d^n_{P(1_n)}(\phi_\alpha \otimes e_1) := \phi_\alpha$
	$\phi_\gamma \otimes e_1$	$\longmapsto d^n_{P(1_n)}(\phi_\gamma \otimes e_1) := \phi_\gamma$
	$\phi_{e_1} \otimes e_1$	$\longmapsto d^n_{P(1_n)}(\phi_{e_1} \otimes e_1) := \phi_{e_1}$

Vamos agora calcular $\widehat{\varepsilon}_n P(1_n)$, justificando a tabela acima, como segue abaixo:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_n P(1) &= \widehat{\varepsilon}_n \langle e_{1n}, \widehat{\overline{p}}_{n+1}, \beta_{n+1} \widehat{\overline{p}}_{n+1}, \lambda_{n+1} \widehat{\overline{p}}_{n+1}, \alpha_{n+1} \beta_{n+1} \widehat{\overline{p}}_{n+1} \rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_n e_{1n}, \widehat{\varepsilon}_n \widehat{\overline{p}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_n \beta_{n+1} \widehat{\overline{p}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_n \lambda_{n+1} \widehat{\overline{p}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_n \alpha_{n+1} \beta_{n+1} \widehat{\overline{p}}_{n+1} \rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n (e_1, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_{\alpha\beta})_{n+1}, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_\alpha)_{n+1}, \\
&\quad (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_\gamma)_{n+1}, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_{e_1})_{n+1} \rangle
\end{aligned}
$$

$$= \langle (\delta_{nm} e_1, 0)_n \rangle$$
$$= \langle e_1 \rangle$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{n+1} P(1) &= \widehat{\varepsilon}_{n+1} \langle e_{1n}, \widehat{\overline{p}}_{n+1}, \beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}, \lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}, \alpha_{n+1}\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1} \rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_{n+1} e_{1n}, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\alpha_{n+1}\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1} \rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(e_1, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(0, \phi_{\alpha\beta})_{n+1}, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(0, \phi_\alpha)_{n+1}, \\
&\quad (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(0, \phi_\gamma)_{n+1}, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(0, \phi_{e_1})_{n+1} \rangle \\
&= \langle (0, \delta_{n+1m}\phi_{\alpha\beta})_{n+1}, (0, \delta_{n+1m}\phi_\alpha)_{n+1}, (0, \delta_{n+1m}\phi_\gamma)_{n+1}, (0, \delta_{n+1m}\phi_{e_1})_{n+1} \rangle \\
&= \langle \phi_{\alpha\beta}, \phi_\alpha, \phi_\gamma, \phi_{e_1} \rangle
\end{aligned}$$

Vamos agora aplicar o funtor $\mathfrak{F}$ no módulo $P(2_n)$, e assim obteremos a seguinte sequência, representada na tabela abaixo, onde também estão definidos os diferenciais.

$M = P(2_n) \in \widehat{A}$-mod	$M^n = \widehat{\varepsilon}_n P(2_n)$	$\mathfrak{F}(M) = (M^n, d^n_M)$
$\mathfrak{F}(P(2_n)) : \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \langle e_2, \alpha \rangle \overset{d^n_{P(2_n)}}{\rightsquigarrow} \langle \phi_\beta, \phi_{e_2} \rangle \overset{d^{n+1}_{P(2_n)}}{\rightsquigarrow} 0 \cdots$		
$d^n_{P(2_n)} :$	$DA \otimes_A \langle e_2, \alpha \rangle \longrightarrow \langle \phi_\beta, \phi_{e_2} \rangle$	
	$\phi_{e_2} \otimes e_2 \longmapsto d^n_{P(2_n)}(\phi_{e_2} \otimes e_2) := \phi_{e_2}$	
	$\phi_\beta \otimes e_2 \longmapsto d^n_{P(2_n)}(\phi_\beta \otimes e_2) := \phi_\beta$	

Vamos agora calcular $\widehat{\varepsilon}_n P(2_n)$, justificando a tabela acima, como segue abaixo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_n P(2) &= \widehat{\varepsilon}_n \langle e_{2n}, \alpha_n, \widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n, \beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n \rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_n e_{2n}, \widehat{\varepsilon}_n \alpha_n, \widehat{\varepsilon}_n \widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n, \widehat{\varepsilon}_n \beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n \rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n (e_2, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (\alpha, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_\beta)_{n+1}, (\delta_{nm}, 0)_n (0, \phi_{e_2})_{n+1} \rangle \\
&= \langle (\delta_{nm} e_2, 0)_n, (\delta_{nm}\alpha, 0)_n, \rangle \\
&= \langle e_2, \alpha \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{n+1} P(2) &= \widehat{\varepsilon}_{n+1} \langle e_{2n}, \alpha_n, \widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n, \beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n \rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_{n+1} e_{2n}, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\alpha_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\beta_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\alpha_n \rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(e_2, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_n(\alpha, 0)_n, \\
&\quad (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(0, \phi_\beta)_{n+1}, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(0, \phi_{e_2})_{n+1} \rangle \\
&= \langle (0, \delta_{n+1m}\phi_\beta)_{n+1}, (0, \delta_{n+1m}\phi_{e_2})_{n+1} \rangle \\
&= \langle \phi_\beta, \phi_{e_2} \rangle
\end{aligned}$$

Vamos agora plicar o funtor $\mathfrak{F}$ no módulo $P(3_n)$, e assim obteremos a seguinte sequência, representada na tabela abaixo, onde também estão definidos os diferenciais.

$M = P(3_n) \in \widehat{A}$-mod	$M^n = \widehat{\varepsilon}_n P(3_n)$	$\mathfrak{F}(M) = (M^n, d^n_M)$
$\mathfrak{F}(P(3_n)) : \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \langle e_3, \gamma \rangle \overset{d^n_{P(3_n)}}{\rightsquigarrow} \langle \phi_\lambda, \phi_{e_3} \rangle \overset{d^{n+1}_{P(3_n)}}{\rightsquigarrow} 0 \cdots$		
$d^n_{P(3_n)} :$	$DA \otimes_A \langle e_3, \gamma \rangle \longrightarrow \langle \phi_\lambda, \phi_{e_3} \rangle$	
	$\phi_{e_3} \otimes e_3 \longmapsto d^n_{P(3_n)}(\phi_{e_3} \otimes e_3) := \phi_{e_3}$	
	$\phi_\lambda \otimes e_3 \longmapsto d^n_{P(3_n)}(\phi_\lambda \otimes e_3) := \phi_\lambda$	

Vamos agora calcular $\widehat{\varepsilon}_n P(3_n)$, justificando a tabela acima, como segue abaixo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_n P(3) &= \widehat{\varepsilon}_n\langle e_{3n}, \gamma_n, \widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n, \lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_n e_{3n}, \widehat{\varepsilon}_n\gamma_n, \widehat{\varepsilon}_n\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n, \widehat{\varepsilon}_n\lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n(e_3, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n(\gamma, 0)_n, \\
&\quad (\delta_{nm}, 0)_n(0, \phi_\lambda)_{n+1}, (\delta_{nm}, 0)_n(0, \phi_{e_3})_{n+1}\rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}e_3, 0)_n, (\delta_{nm}\gamma, 0)_n\rangle \\
&= \langle e_3, \gamma\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{n+1} P(3) &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}\langle e_{3n}, \gamma_n, \widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n, \lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_{n+1} e_{3n}, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\gamma_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\lambda_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(e_3, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(\gamma, 0)_n, \\
&\quad (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(0, \phi_\lambda)_{n+1}, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(0, \phi_{e_3})_{n+1}\rangle \\
&= \langle (0, \delta_{n+1m}\phi_\lambda)_{n+1}, (0, \delta_{n+1m}\phi_{e_3})_{n+1}\rangle \\
&= \langle \phi_\lambda, \phi_{e_3}\rangle
\end{aligned}$$

Vamos agora plicar o funtor $\mathfrak{F}$ no módulo $P(4_n)$, e assim obteremos a seguinte sequência, representada na tabela abaixo, onde também estão definidos os diferenciais.

$M = P(4_n) \in \widehat{A}$-mod	$M^n = \widehat{\varepsilon}_n P(4_n)$	$\mathfrak{F}(M) = (M^n, d^n_M)$
$\mathfrak{F}(P(4_n)) : \cdots \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow \langle e_4, \beta, \lambda, \gamma\lambda\rangle \overset{d^n_{P(1_n)}}{\rightsquigarrow} \langle \phi_{e_4}\rangle \overset{d^{n+1}_{P(4_n)}}{\rightsquigarrow} 0 \cdots$		
$d^n_{P(1_n)} : \quad DA \otimes_A \langle e_4, \beta, \lambda, \gamma\lambda\rangle \longrightarrow \langle \phi_{e_4}\rangle$ $\phi_{e_4} \otimes e_4 \longmapsto d^n_{P(4_n)}(\phi_{e_4} \otimes e_4) := \phi_{e_4}$		

Vamos agora calcular $\widehat{\varepsilon}_n P(4_n)$, justificando a tabela acima, como segue abaixo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_n P(4) &= \widehat{\varepsilon}_n\langle e_{4n}, \beta_n, \lambda_n, \gamma_n\lambda_n, \widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\lambda_n\rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_n e_{4n}, \widehat{\varepsilon}_n\beta_n, \widehat{\varepsilon}_n\lambda_n, \widehat{\varepsilon}_n\gamma_n\lambda_n, \widehat{\varepsilon}_n\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\lambda_n\rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}, 0)_n(e_4, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n(\beta, 0)_n, \\
&\quad (\delta_{nm}, 0)_n(\lambda, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n(\gamma\lambda, 0)_n, (\delta_{nm}, 0)_n(0, \phi_{e_4})_{n+1}\rangle \\
&= \langle (\delta_{nm}e_4, 0)_n, (\delta_{nm}\beta, 0)_n, (\delta_{nm}\lambda, 0)_n, (\delta_{nm}\gamma\lambda, 0)_n\rangle \\
&= \langle e_4, \beta, \lambda, \gamma\lambda\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_{n+1} P(4) &= \widehat{\varepsilon}_{n+1}\langle e_{4n}, \beta_n, \lambda_n, \gamma_n\lambda_n, \widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\lambda_n\rangle \\
&= \langle \widehat{\varepsilon}_{n+1} e_{4n}, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\beta_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\lambda_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\gamma_n\lambda_n, \widehat{\varepsilon}_{n+1}\widehat{\overline{p}}_{n+1}\gamma_n\lambda_n\rangle \\
&= \langle (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(e_4, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(\beta, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(\lambda, 0)_n, \\
&\quad (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(\gamma\lambda, 0)_n, (\delta_{n+1m}, 0)_{n+1}(0, \phi_{e_4})_{n+1}\rangle \\
&= \langle (0, \delta_{n+1m}\phi_{e_4})_{n+1}\rangle \\
&= \langle \phi_{e_4}\rangle
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[AF92] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and categories of modules*, second edition, Graduate Texts in Mathematics, 13, Springer, New York, 1992; MR1245487

[AR75] M. Auslander and I. Reiten, Representation theory of Artin algebras. III. Almost split sequences, Comm. Algebra **3** (1975), 239–294; MR0379599

[ARS97] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, corrected reprint of the 1995 original, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997; MR1476671

[Ass97] I. Assem, *Algèbres et modules, Cours et exercices*, Les Presses de l'Université d'Ottawa, 1997.

[ASS06] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, London Mathematical Society Student Texts, 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006; MR2197389

[AY11] A. Skowroński and K. Yamagata, *Frobenius algebras. I*, EMS Textbooks in Mathematics, Eur. Math. Soc., Zürich, 2011; MR2894798

[Ben10] G. Benitez, Categorias Trianguladas y Derivadas. Monografía. University of Antioquia, UdeA, 2010. Diponivél em: https://drive.google.com/file/d/1raczArjyXPQDckn27zid21MZyKfOo0LN/view?pli=1

[BR24] G. Benitez, and P. Rizzo, Cochain complexes over a Functor. arXiv:2403.18834v1 [math.RT], 9 Feb. 2024.

[Fon23] A. Fonce-Camacho et al., On a deformation theory of finite dimensional modules over repetitive algebras, Algebr. Represent. Theory **26** (2023), no. 1, 1–22; MR4609161

[Gab71] P. Gabriel, Indecomposable representations. II, in *Symposia Mathematica, Vol. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971 & Convegno di Geometria, INDAM, Rome, 1972)*, pp. 81–104, Academic Press, London-New York, ; MR0340377

[Gab72] P. Gabriel, UnzerlegbareDarstellungen I. ManuscriptaMath., 6:71–103; correction, ibid. 6 (1972), 309, 1972.

[Gir15] H. Giraldo, Una introducción a la teoría de representaciones de álgebras.Universidad de Antioquia .Volumen 36 (1) (2015). 33–67 ISSN0120–1980

[Gir18] H. Giraldo, Irreducible morphisms between modules over a repetitive algebras, Algebr. Represent. Theory **21** (2018), no. 4, 683–702; MR3826722

[Hap88] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988; MR0935124

[HW83] D. Hughes and J. Waschbüsch, Trivial extensions of tilted algebras, Proc. London Math. Soc. (3) **46** (1983), no. 2, 347–364; MR0693045

[Rin84] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, 1099, Springer, Berlin, 1984; MR0774589

[Sch14] R. Schiffler, *Quiver representations*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, Cham, 2014; MR3308668

[Schr99] J. Schröer, On the quiver with relations of a repetitive algebra, Arch. Math. (Basel) **72** (1999), no. 6, 426–432; MR1687516

[SS07] D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 2*, London Mathematical Society Student Texts, 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007; MR2360503