



Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Pós-Graduação em Matemática

Karolline Vitória Soares da Silva

A Aplicação de Gauss de superfícies imersas no grupo de Heisenberg

Manaus - AM
2025

Karolline Vitória Soares da Silva

A Aplicação de Gauss de superfícies imersas no grupo de Heisenberg

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do DM-UFAM como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dra. Inês Silva de Oliveira Padilha

Manaus - AM
2025

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586a	Silva, Karolline Vitória Soares da A aplicação de Gauss de superfícies imersas no grupo de Heisenberg / Karolline Vitória Soares da Silva. - 2025. 71 f. ; 31 cm. Orientador(a): Inês Silva de Oliveira Padilha. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Amazonas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Manaus, 2025. 1. Grupo de Heisenberg. 2. Aplicação de Gauss. 3. Imersões conformes. 4. Superfícies imersas. I. Padilha, Inês Silva de Oliveira. II. Universidade Federal do Amazonas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título
-------	---

TERMO DE APROVAÇÃO

ALUNA: Karolline Vitória Soares da Silva.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Geometria Diferencial.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Mestrado em Matemática.

TÍTULO DO TRABALHO: A Aplicação de Gauss de superfícies imersas no grupo de Heisenberg

ORIENTADORA: Profa. Dra. Inês Silva de Oliveira Padilha.

Esta dissertação foi aprovada em 28 de maio de 2025, às 10h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

Profa. Dra. Inês Silva de Oliveira Padilha (orientadora)
Universidade Federal do Amazonas (UFAM) - DM

Profa. Dra. Kelly Alves Marães de Almeida
Universidade Estadual do Amazonas (UEA) - DM

Prof. Dr. Moacir Aloísio Nascimento dos Santos
Universidade Federal dos Vales Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) - DM

Sê forte e corajosa.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me permitir chegar até aqui, pois todas as coisas acontecem com a Sua permissão. Com Sua graça e misericórdia me sustentou e renovou minhas forças dia após dia.

Agradeço à minha mãe, que por mesmo morarmos em estados diferentes, foi presente nas orações, mensagens, ligações e esteve sempre em todas as etapas da minha vida. É o motivo dos meus maiores sonhos e, sem dúvidas, sem o seu amor, inspiração, força e cuidado eu não seria quem sou hoje. Gratidão por apoiar meus sonhos, minhas decisões e por nunca desistir de lutar por mim.

Não menos importante, agradeço aos meus familiares, que sempre vibram com minhas conquistas e renovam minhas forças a cada abraço que nos encontramos anualmente. E como poderia deixar de agradecer aos meus amigos que ao longo dos anos se tornaram família? Vocês, meus amigos, foram presentes aos meus desabafos e preocupações, mas também estiveram em momentos felizes e alegres. Obrigada por caminharem comigo em cada momento que geraram boas memórias, apesar de não ter família em Manaus, vocês foram minha família e não tem nada nesse mundo que possa retribuir todo o suporte que me dão todos os dias.

À professora Inês, minha orientadora desde a minha primeira semana na graduação, és de fato Inêsqecível. Sem o seu incentivo, apoio e puxões de orelha, eu não estaria aqui hoje, finalizando mais uma etapa acadêmica. Obrigada por todo suporte e, principalmente, por nunca desistir de mim. Foram 7 anos de orientação, de muitas superações, contas quase infinitas, amadurecimento e por vezes, de quase desistência da minha parte, mas devo citar que além de orientadora, foi ombro amigo para ouvir minhas queixas e até mesmo me acalmar quando só sabia chorar. Nunca esquecerei de tudo que pude aprender com a senhora e também nunca esqueça que sempre terá minha admiração pela mulher, professora, orientadora e mãe que és. És uma inspiração!

Aos professores do Departamento de Matemática, meus mais sinceros agradecimentos por contribuírem com a minha formação.

Com muita gratidão e alegria que escrevo esses agradecimentos e escrevendo-os, passa um filme de como foi chegar até aqui, não foi fácil, mas com o apoio de todos vocês, foi possível. Muito obrigada!

Dedico este trabalho à minha mãe, Elisandra Soares dos Santos Páscoa, minha inspiração e motivo dos meus maiores sonhos.

Resumo

Nesta dissertação, investigamos a geometria do grupo de Heisenberg (H_3) e apresentamos a generalização da aplicação normal de Gauss de superfícies orientadas imersas em grupos de Lie tridimensionais. Nosso objetivo é analisar as propriedades e implicações geométricas dessa construção, com ênfase no caso particular em que o espaço ambiente é o grupo de Heisenberg. Além disso, exploramos a aplicação de Gauss no contexto de imersões conformes em H_3 , utilizando ferramentas importantes da Análise Complexa para fundamentar esse estudo. Entre os principais resultados apresentados neste trabalho, destacamos, na primeira parte, os obtidos por Christiam Figueroa [9] que demonstrou que os planos verticais são as únicas superfícies conexas em H^3 com aplicação de Gauss constante e que não existem superfícies mínimas compactas em H_3 . Na segunda parte, ao considerarmos imersões conformes em H_3 obtivemos interpretações geométricas interessantes da aplicação de Gauss. Os resultados teóricos que embasam esta abordagem foram desenvolvidos a partir do artigo intitulado The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg Group, de autoria de Daniel Benôit [2].

Palavras-chave: Grupo de Heisenberg, Aplicação de Gauss, Imersões Conformes, Superfícies Imersas.

Abstract

In this dissertation, we investigate the geometry of the Heisenberg group (H_3) and present a generalization of the normal Gauss map for oriented surfaces immersed in three-dimensional Lie groups. Our goal is to analyze the geometric properties and implications of this construction, with emphasis on the particular case where the ambient space is the Heisenberg group. Additionally, we explore the Gauss map in the context of conformal immersions in H_3 , using key tools from Complex Analysis to support this study. Among the main results presented, we highlight in the first part, those obtained by Christiam Figueroa [9], who demonstrated that vertical planes are the only connected surfaces in H^3 with constant Gauss map, and that there are no compact minimal surfaces in H_3 . In the second part, by considering conformal immersions in H_3 , we obtain interesting geometric interpretations of the Gauss map. The theoretical foundation for this study is based on the article entitled The Gauss Map of Minimal Surfaces in the Heisenberg Group, by Daniel Benôit [2].

Palavras-chave: Heisenberg's group, Gauss application, Conformal Immersions, Immersed Surfaces.

Sumário

Introdução	11
1 O grupo de Heisenberg	13
1.1 Grupo de Heisenberg	13
1.2 Curvatura de H_3	18
1.3 Isometrias	23
2 Aplicação de Gauss de superfícies em H_3	26
2.1 Aplicação de Gauss em H_3	26
2.2 Superfícies Mínimas em H_3	33
3 Aplicação de Gauss para imersões conformes em H_3	36
3.1 A aplicação de Gauss e resultados relacionados	37
Conclusão	58
Referências Bibliográficas	59
Apêndice	61
3.2 Grupos de Lie	61
3.3 Projeção Estereográfica	64
3.4 Noções de Análise Complexa	65

Introdução

O estudo da aplicação normal de Gauss de superfícies orientadas em $\mathbb{R}^3$ constitui um tema de grande relevância em Geometria Diferencial. A análise do comportamento geométrico da superfície é feito a partir de entes geométricos importantes que surgem a partir da diferencial dessa aplicação. Vale ressaltar que no caso de superfícies mínimas no espaço euclidiano, a aplicação de Gauss apresenta interpretações geométricas interessantes e estabelece uma relação direta com a teoria das funções holomorfas e harmônicas. Em particular, para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$, a aplicação de Gauss pode ser utilizada na construção explícita da parametrização da superfície por meio da representação de Weierstrass - Enneper.

Dada a importância desse estudo em ambientes euclidianos, é natural questionar a possibilidade e o significado de se generalizar tal conceito para superfícies orientadas imersas em grupos de Lie. Essa generalização permite investigar como a geometria intrínseca e extrínseca da superfície se manifesta em ambientes com curvatura e estrutura diferenciadas, como nos grupos de Lie tridimensionais com métrica invariante à esquerda. Nessas configurações, a aplicação de Gauss pode evidenciar novas relações geométricas e analíticas, ampliando a compreensão das superfícies mínimas.

Para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e de curvatura média constante (CMC) 1 no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ foi mostrado que a aplicação de Gauss é meromorfa [3]. Já para o caso de superfícies CMC em $\mathbb{R}^3$ (respectivamente CMC spacelike no espaço Minkowski $\mathbb{L}^3$) foi provado que tal aplicação é harmônica sobre a esfera $\mathbb{S}^2$ (respectivamente sobre o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$).

Em 2005, Ricardo Sá Earp e Eric Toubiana [15] apresentaram resultados relevantes sobre imersões conformes nos espaços produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Parte das técnicas empregadas nesta dissertação são inspiradas nas ideias desenvolvidas por esses autores, especialmente no que diz respeito ao uso de métodos da Análise Complexa aplicados no estudo geométrico de superfícies em ambientes com estrutura diferenciada.

Isabel Fernández e Pablo Mira [8], em 2007, deram importantes contribuições sobre o estudo de aplicações harmônicas e superfícies de curvatura média constante no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Eles construíram no caso de superfícies CMC 1/2 uma certa aplicação sobre o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, chamada de aplicação de Gauss hiperbólica, provando a harmonicidade da mesma. Também mostraram que toda aplicação harmônica (sob certas condições) pode ser a aplicação de Gauss hiperbólica de uma imersão CMC 1/2.

Neste trabalho, temos como objetivo compreender a estrutura do grupo de Heisenberg (H_3), analisar como a aplicação de Gauss pode ser definida para superfícies orientadas imersas em grupos de Lie tridimensionais munidos de uma métrica invariante à esquerda e investigar a harmonicidade de tal aplicação. Com esse intuito, iniciamos a dissertação, no Capítulo 1, com o estudo detalhado do espaço ambiente no qual as superfícies estarão imersas, abordamos a estrutura diferenciável e a geometria de H_3 enfatizando suas propriedades como grupo de Lie tridimensional.

No Capítulo 2, introduzimos o conceito da aplicação de Gauss em grupos de Lie. Em particular apresentamos alguns resultados provados por Christiam Figueroa [9] que afirmam que os planos verticais são as únicas superfícies conexas em H_3 com aplicação de Gauss constante e que não existem superfícies mínimas compactas em H_3 .

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo de imersões conformes em H_3 com base em ferramentas da Análise Complexa. A partir de resultados obtidos por Daniel Benôit [2], investigamos a relação entre superfícies mínimas e a harmonicidade da aplicação de Gauss.

Por fim, incluímos um Apêndice com definições e resultados auxiliares da teoria de Grupos de Lie e Análise Complexa que sustentam o desenvolvimento teórico do trabalho.

O presente estudo contribui para uma melhor compreensão da geometria das superfícies mínimas em espaços não euclidianos, abrindo caminho para investigações futuras nesta temática.

Capítulo 1

O grupo de Heisenberg

Neste capítulo apresentamos a geometria do grupo de Heisenberg e sua estrutura como grupo de Lie. Exibimos a métrica invariante à esquerda, a conexão, a curvatura, além de suas isometrias. Para mais detalhes, veja [6] e [16]. No apêndice também são mostrados alguns resultados relacionados a teoria de grupos de Lie.

1.1 Grupo de Heisenberg

Definição 1.1.1. (*Grupo de Heisenberg*) Seja $GL(3, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes de ordem 3 invertíveis, munido com a operação de multiplicação de matrizes. O grupo de Heisenberg, denotado por H_3 , é o subgrupo de $GL(3, \mathbb{R})$, dado por

$$H_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observação 1. Note que $GL(3, \mathbb{R})$ é um aberto de $\mathbb{R}^9$, já que que o conjunto dos pontos em que o determinante é diferente de zero é um aberto em $M(3, \mathbb{R})$ que pode ser identificado com $\mathbb{R}^9$ ($\det : M(3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um aberto em $\mathbb{R}$). Assim, sendo um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^9$, $GL(3, \mathbb{R})$ herda naturalmente a estrutura de variedade diferenciável de $\mathbb{R}^9$. Além disso, $GL(3, \mathbb{R})$ é um grupo em relação à multiplicação de matrizes e as operações de grupo (multiplicação e inversão) são suaves, o que garante que $GL(3, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie. O conjunto H_3 , por sua vez, é um subconjunto fechado de $GL(3, \mathbb{R})$ e também é subgrupo de $GL(3, \mathbb{R})$. Portanto, por um resultado geral da teoria de grupos de Lie - que afirma que subgrupos fechados de grupos de Lie são também grupos de Lie, conclui-se que H_3 é um grupo de Lie. Para mais detalhes veja [13].

Sendo o grupo de Heisenberg um grupo de Lie, temos que sua álgebra de Lie, $\mathfrak{h}_3$, é formada pelas matrizes do tipo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

De fato, se $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_3$ é uma curva diferenciável dada por

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} 1 & a(t) & c(t) \\ 0 & 1 & b(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $a, b, c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então temos que o vetor tangente $\alpha'(t)$ em $t = 0$ é

$$\alpha'(0) = \begin{bmatrix} 0 & a'(0) & c'(0) \\ 0 & 0 & b'(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, a álgebra de Lie h_3 de H_3 é formada por matrizes do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Considere agora a aplicação exponencial

$$\begin{aligned} \exp : h_3 &\longrightarrow H_3 \\ A &\longmapsto \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \end{aligned}$$

Observe que para $n \geq 3$, $A^n = 0$, o que o caracteriza H_3 como um *Grupo de Lie Nilpotente de step-2*. Desse modo,

$$\begin{aligned} \exp(A) &= I + A + \frac{A^2}{2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A aplicação exponencial é globalmente um difeomorfismo entre a álgebra de Lie h_3 e o grupo H_3 e a aplicação $\exp^{-1} : H_3 \longrightarrow h_3$ é dada por

$$\exp^{-1} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & z - \frac{xy}{2} \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Usando a aplicação exponencial como uma parametrização global, com a identificação da álgebra de Lie h_3 com $\mathbb{R}^3$ dada por

$$(x, y, z) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

obtemos a seguinte operação

$$p * q = \exp^{-1}(\exp(p) \cdot \exp(q)),$$

onde $p = (x_1, y_1, z_1)$ e $q = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Logo,

$$\begin{aligned}
p * q &= \exp^{-1} [\exp(p) \cdot \exp(q)] \\
&= \exp^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 + \frac{x_1 y_1}{2} \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_2 & z_2 + \frac{x_2 y_2}{2} \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \exp^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_2 & z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_2 y_2 + x_1 y_1) + x_1 y_2 \\ 0 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & x_1 + x_2 & z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ 0 & 0 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A aplicação $\exp : \mathbb{R}^3 \longrightarrow H_3$ define um isomorfismo entre grupos de Lie, o que permite vermos H_3 como $\mathbb{R}^3$, mas com uma estrutura de grupo não comutativa que é dada pela operação

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} \right).$$

Assim, H_3 pode ser definido como $\mathbb{R}^3$ munido com a operação de grupo dada acima.

A fim de encontrarmos uma métrica invariante à esquerda em H_3 , para cada $p = (x, y, z) \in H_3$ definimos a translação à esquerda $L_p : H_3 \longrightarrow H_3$ por $L_p(q) = p * q$ para todo $q \in H_3$. A diferencial de L_p na identidade $e = (0, 0, 0)$ é dada por

$$(dL_p)_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolhendo uma parametrização global $X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow H_3$, uma base do espaço tangente $T_e H_3$ na identidade do grupo é dada por

$$e_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_e, \quad e_2 = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_e, \quad e_3 = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_e.$$

Estendendo os vetores $e_i, i = 1, 2, 3$, a campos invariantes à esquerda pela fórmula

$$E_i(p) = (dL_p)_e e_i, \quad p \in H_3, \quad i = 1, 2, 3,$$

temos que

$$\begin{cases} E_1 = (dL_p)_e \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_e = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ E_2 = (dL_p)_e \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_e = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ E_3 = (dL_p)_e \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_e = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = E_1 + \frac{y}{2} E_3 \\ \frac{\partial}{\partial y} = E_2 - \frac{x}{2} E_3 \\ \frac{\partial}{\partial z} = E_3 \end{cases} \quad (1.1)$$

Utilizando estes campos invariantes à esquerda, podemos calcular os seguintes colchetes

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2]f &= E_1 E_2 f - E_2 E_1 f \\
&= E_1 \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) f - E_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) f \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{y}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{xy}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{y}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{xy}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z} \\
&= E_3 f,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_1, E_3]f &= E_1 E_3 f - E_3 E_1 f \\
&= E_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) f - E_3 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) f \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{y}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_2, E_3]f &= E_2 E_3 f - E_3 E_2 f \\
&= E_2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) f - E_3 \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) f \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

E, portanto,

$$[E_1, E_2] = E_3 \text{ e } [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0 = [E_i, E_i], i = 1, 2, 3.$$

Como L_p é uma isometria $\forall p \in H_3$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal para $T_e H_3$, temos que $\{E_1, E_2, E_3\}$ é uma base de campos de vetores ortonormais invariantes à esquerda. Desta forma, para cada $p \in H_3$ a base $\{E_1(p), E_2(p), E_3(p)\}$ é denominada: "base canônica" de $T_p H_3$. Sejam $p = (x, y, z) \in H_3$ e $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in T_p H_3$. Podemos determinar uma métrica invariante à esquerda g em H_3 fazendo

$$g(u, v) = \langle dL_{p^{-1}}(u), dL_{p^{-1}}(v) \rangle_{\mathbb{R}^3},$$

onde $dL_{p^{-1}} = (dL_p)^{-1}$.

Assim, obtemos

$$g(u, v) = \left\langle \left(u_1, u_2, u_3 + \frac{1}{2}(yu_1 - xu_2) \right), \left(v_1, v_2, v_3 + \frac{1}{2}(yv_1 - xv_2) \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^3},$$

e com isso podemos concluir que

$$g = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2}(ydx - xdy) + dz \right)^2. \quad (1.1)$$

Assim, H_3 é uma variedade Riemanniana munida com a métrica definida em (1.1).

Em termos dos campos coordenados, a matriz que representa a métrica é dada por

$$G = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar a notação denotaremos a seguir $g(u, v)$ simplesmente por $\langle u, v \rangle$. Recordamos que uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- (ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$, sendo $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Além disso, a conexão é dita simétrica se $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ tivermos:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

No caso em que M é uma variedade Riemanniana, a conexão é dita compatível com a métrica se

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Uma conexão simétrica e compatível com a métrica Riemanniana é chamada de conexão de Levi-Civita. Vejamos a seguir o cálculo da conexão de Levi-Civita em H_3 associada à métrica (1.1).

A conexão Riemanniana de $(H_3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ será denotada por ∇ . Observe que se X, Y e Z são campos invariantes à esquerda de H_3 temos que $\langle X(p), Y(p) \rangle = \langle dL_p X(e), dL_p Y(e) \rangle = \langle X(e), Y(e) \rangle, \forall p \in H_3$. Desta forma considerando os campos invariantes à esquerda E_1, E_2, E_3 de H_3 temos para $i, j, k = 1, 2, 3$

$$\langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle = \frac{1}{2} (\langle [E_i, E_k], E_j \rangle - \langle [E_j, E_k], E_i \rangle + \langle [E_i, E_j], E_k \rangle).$$

Em particular:

$$\nabla_{E_1} E_2 = aE_1 + bE_2 + cE_3$$

com

$$a = \langle \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle - \langle [E_1, E_1], E_2 \rangle + \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle \} = 0$$

$$b = \langle \nabla_{E_1} E_2, E_2 \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [E_2, E_2], E_1 \rangle - \langle [E_1, E_2], E_2 \rangle + \langle [E_2, E_1], E_2 \rangle \} = 0$$

$$c = \langle \nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [E_2, E_3], E_3 \rangle - \langle [E_1, E_3], E_2 \rangle - \langle [E_2, E_1], E_3 \rangle \} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\nabla_{E_1} E_2 = \frac{1}{2} E_3$. De modo geral $\nabla_{E_j} E_i = \sum_{k=1}^3 \langle E_k, \nabla_{E_j} E_i \rangle E_k$ e fazendo uso disso, obtemos:

$$\nabla_{E_1} E_2 = \frac{1}{2} E_3 = -\nabla_{E_2} E_1$$

$$\nabla_{E_1} E_3 = -\frac{1}{2} E_2 = \nabla_{E_3} E_1$$

$$\nabla_{E_2} E_3 = \frac{1}{2} E_1 = \nabla_{E_3} E_2$$

e $\nabla_{E_i} E_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$.

1.2 Curvatura de H_3

Nesta seção relembramos alguns conceitos importantes de Geometria Riemanniana e apresentamos a curvatura de H_3 .

Definição 1.2.1. *A curvatura de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \in \mathcal{X}(M)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Em particular, no caso em que $M = \mathbb{R}^n$, temos que

$$R(X, Y)Z = 0, \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ são as componentes do campo Z e de maneira análoga identificamos as componentes de X e Y . Ou seja,

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0.$$

É importante ressaltar que uma variedade Riemanniana M é localmente isométrica a $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $R = 0$.

Geometricamente, pode-se dizer que a curvatura mede o quanto M deixa de ser euclidiana. Considerando um sistema de coordenadas $\{x_i\}$ em torno de $p \in M$ e usando que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, obtemos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

o que mostra que a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

Apresentaremos a seguir algumas propriedades relacionadas à curvatura.

Proposição 1.2.1. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,*

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \end{aligned}$$

$f, g \in \mathcal{D}(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

(ii) *Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,*

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\ R(X, Y)fZ &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{D}(M)$, $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Demonstração. Observe que

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.2)$$

$$R(X, Y)W = \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_X \nabla_Y W + \nabla_{[X, Y]} W, \quad (1.3)$$

somando (1.2) e (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} & \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_X \nabla_Y W + \nabla_{[X, Y]} W \\ &= \nabla_Y (\nabla_X Z + \nabla_X W) - \nabla_X (\nabla_Y Z + \nabla_Y W) + \nabla_{[X, Y]} (Z + W) \\ &= \nabla_Y (\nabla_X (Z + W)) - \nabla_X (\nabla_Y (Z + W)) + \nabla_{[X, Y]} (Z + W) \\ &= \nabla_Y \nabla_X (Z + W) - \nabla_X \nabla_Y (Z + W) + \nabla_{[X, Y]} (Z + W) \\ &= [\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X, Y]}] (Z + W) \\ &= R(X, Y)(Z + W). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \nabla_Y [\nabla_X (fZ)] &= \nabla_Y (f \nabla_X Z + (Xf)Z) \\ &= \nabla_Y (f \nabla_X Z) + \nabla_Y (Xf)Z \\ &= f \nabla_Y (\nabla_X Z) + (Yf) \nabla_Y Z + (Xf) \nabla_Y Z + Y(Xf)Z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X [\nabla_Y (fZ)] &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + (Yf)Z) \\ &= \nabla_X (f \nabla_Y Z) + \nabla_X (Yf)Z \\ &= f \nabla_X (\nabla_Y Z) + (Xf) \nabla_X Z + (Yf) \nabla_X Z + X(Yf)Z, \end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned}
& \nabla_Y[\nabla_X(fZ)] - \nabla_X[\nabla_Y(fZ)] \\
&= f\nabla_Y(\nabla_X Z) + (Yf)\nabla_Y Z + (Xf)\nabla_Y Z + Y(Xf)Z - \\
& \quad [f\nabla_X(\nabla_Y Z) + (Xf)\nabla_X Z + (Yf)\nabla_X Z + X(Yf)Z] \\
&= f(\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y)Z + ((YX - XY)f)Z,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Proposição 1.2.2. (*Primeira identidade de Bianchi*)

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z \\
R(Y, Z)X &= \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_{[Y, Z]}X \\
R(Z, X)Y &= \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]}Y.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\
&= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z + \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_{[Y, Z]}X + \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]}Y \\
&= \nabla_Y(\nabla_X Z - \nabla_Z X) + \nabla_Z(\nabla_Y X - \nabla_X Y) + \nabla_X(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) + \nabla_{[X, Y]}Z + \nabla_{[Y, Z]}X + \nabla_{[Z, X]}Y \\
&= \nabla_Y[X, Z] + \nabla_Z[Y, X] + \nabla_X[Z, Y] - \nabla_{[Y, X]}Z - \nabla_{[Z, Y]}X - \nabla_{[X, Z]}Y \\
&= (\nabla_Y[X, Z] - \nabla_{[X, Z]}Y) + (\nabla_Z[Y, X] - \nabla_{[Y, X]}Z) + (\nabla_X[Z, Y] - \nabla_{[Z, Y]}X) \\
&= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] = 0,
\end{aligned}$$

pela identidade de Jacobi para campos de vetores. Portanto,

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

como queríamos mostrar. □

Proposição 1.2.3. *Sejam $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$. Vale que*

- (a) $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$
- (b) $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$
- (c) $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$
- (d) $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$

Demonstração. (a) Para este item utilizamos a identidade de Bianchi,

$$\begin{aligned}
(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle \\
&= \langle R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y, T \rangle \\
&= \langle R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y, T \rangle = 0;
\end{aligned}$$

(b) Pela definição (1.2.1) temos que

$$\begin{aligned}
(X, Y, Z, T) &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle \\
&= \langle \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z, T \rangle \\
&= -\langle \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z, T \rangle \\
&= -\langle R(Y, X)Z, T \rangle \\
&= -(Y, X, T, Z);
\end{aligned}$$

(c) Observe que mostrar que $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$ é equivalente mostrar que $(X, Y, Z, Z) = 0$.

Observe que quando $Z = T$ temos que

$$(X, Y, Z, Z) = -(X, Y, Z, Z). \text{ Segue que } (X, Y, Z, Z) = 0.$$

Por outro lado, se $(X, Y, Z, Z) = 0$, vejamos a seguir que $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$. Como

$$\begin{aligned} 0 &= (X, Y, T + Z, T + Z) \\ &= \langle R(X, Y)(T + Z), T + Z \rangle \\ &= \langle R(X, Y)(T + Z), T \rangle + \langle R(X, Y)(T + Z), Z \rangle \\ &= \langle R(X, Y)T, T \rangle + \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(X, Y)T, Z \rangle + \langle R(X, Y)Z, Z \rangle \\ &= (X, Y, T, T) + (X, Y, Z, T) + (X, Y, T, Z) + (X, Y, Z, Z) \\ &= (X, Y, Z, T) + (X, Y, T, Z). \end{aligned}$$

Logo,

$$(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z).$$

Vejamos agora que $(X, Y, Z, Z) = 0$:

$$(X, Y, Z, Z) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle.$$

Entretanto,

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle = Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle,$$

e além disso,

$$\langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle = \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} (X, Y, Z, Z) &= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y (X \langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2} X (Y \langle Z, Z \rangle) + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= -\frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

(d) Utilizaremos (a), sendo assim

$$\begin{aligned} (X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) &= 0 \\ (Y, Z, T, X) + (Z, T, Y, X) + (T, Y, Z, X) &= 0 \\ (Z, T, X, Y) + (T, X, Z, Y) + (X, Z, T, Y) &= 0 \\ (T, X, Y, Z) + (X, Y, T, Z) + (Y, T, X, Z) &= 0, \end{aligned}$$

somando todas as equações acima, obtemos

$$2(Z, X, Y, T) + 2(T, Y, Z, X) = 0,$$

logo,

$$\begin{aligned}(Z, X, Y, T) &= -(T, Y, Z, X) \\ (Z, X, Y, T) &= (Y, T, Z, X),\end{aligned}$$

o que finaliza a prova. □

Dado um espaço vetorial V , indicamos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

que representa a área de um paralelograma bi-dimensional gerado pelos vetores $x, y \in V$.

Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $x, y \in T_p M$ vetores linearmente independentes. Definimos assim:

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}.$$

Definição 1.2.2. Dado um ponto $p \in S$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p S$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer do σ , é chamada curvatura seccional de σ no ponto p .

A seguir calculamos a curvatura do grupo de Heisenberg. Observe que

$$\begin{aligned}R(E_1, E_2)E_1 &= \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 + \nabla_{[E_1, E_2]} E_1 \\ &= \frac{1}{2} \nabla_{E_1} E_3 + \nabla_{E_3} E_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} E_2 \right) - \frac{1}{2} E_2 \\ &= -\frac{3}{4} E_2.\end{aligned}$$

Logo,

$$R_{1211} = R_{1213} = 0, R_{1212} = -\frac{3}{4},$$

onde $R_{ijkl} = \langle R(E_i, E_j)E_k, E_l \rangle$. Os cálculos posteriores seguem de forma análoga. Ou seja,

$$\begin{aligned}R_{1211} &= R_{1213} = 0 \\ R_{1212} &= R_{2121} = -\frac{3}{4} \\ R_{2112} &= R_{1221} = \frac{3}{4} \\ R_{1313} &= R_{3131} = R_{2323} = R_{3232} = \frac{1}{4} \\ R_{1331} &= R_{3113} = R_{2332} = R_{3223} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

E portanto, as curvaturas seccionais são:

$$\begin{aligned}K(E_1, E_2) &= \frac{R_{1212}}{|E_1 \wedge E_2|^2} = -\frac{3}{4}, \\ K(E_1, E_3) &= \frac{R_{1313}}{|E_1 \wedge E_3|^2} = \frac{1}{4}, \\ K(E_2, E_3) &= \frac{R_{2323}}{|E_2 \wedge E_3|^2} = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

o que significa que H_3 não tem curvatura seccional constante.

1.3 Isometrias

Vejamos a seguir resultados relacionados às isometrias em H_3 .

Lema 1.1. *Se $\Psi : H_3 \rightarrow H_3$ é uma isometria que preserva a origem, então Ψ é dada por uma das representações abaixo:*

1. $\Psi(x, y, z) = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta, z)$
2. $\Psi(x, y, z) = (x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta, -z)$

para algum $\theta \in [0, 2\pi)$.

Demonstração. Seja $\{E_1, E_2, E_3\}$ a base canônica de H_3 e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a representação matricial de $d(\Psi)_e$ nesta base. Assim, para todo $v = (v_1, v_2, v_3) \in H_3$, temos que

$$d\Psi_e(v) = (a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3, a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3, a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3).$$

E como $d\Psi_e$ é um automorfismo da álgebra h_3 e $[E_1, E_2] = E_3$ temos que

$$\begin{aligned} d\Psi_e(E_3) &= d\Psi_e([E_1, E_2]) \\ &= [d\Psi_e(E_1), d\Psi_e(E_2)]. \end{aligned}$$

Utilizando bilinearidade e os colchetes da álgebra de Lie de H_3 , temos:

$$\begin{aligned} [d\Psi_e(E_1), d\Psi_e(E_2)] &= [a_{11}E_1 + a_{21}E_2 + a_{31}E_3, a_{12}E_1 + a_{22}E_2 + a_{32}E_3] \\ &= a_{11}a_{12}[E_1, E_1] + a_{11}a_{22}[E_1, E_2] + a_{11}a_{32}[E_1, E_3] + \\ &\quad a_{21}a_{12}[E_2, E_1] + a_{21}a_{22}[E_2, E_2] + a_{21}a_{32}[E_2, E_3] + \\ &\quad a_{31}a_{12}[E_3, E_1] + a_{31}a_{22}[E_3, E_2] + a_{31}a_{32}[E_3, E_3] \\ &= a_{11}a_{22}E_3 - a_{21}a_{12}E_3 \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})E_3, \end{aligned}$$

pois

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_2, E_1] = -E_3.$$

Portanto:

$$a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

A matriz $A = (a_{ij})$ assume a forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}.$$

Como Ψ é uma isometria que preserva a origem, então Ψ deve ser uma transformação ortogonal, isto é, $AA^T = I$, onde A^T é a matriz que representa $d\Psi_e^{-1}$ na base $\{E_1, E_2, E_3\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
AA^T &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & 0 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Multiplicando a terceira equação do sistema (1.4) por a_{21} e a quarta equação por a_{22} , obtemos:

$$\begin{aligned}
a_{11}a_{21}^2 + a_{12}a_{22}a_{21} &= 0 \\
a_{11}a_{22}^2 - a_{12}a_{21}a_{22} &= \pm a_{22}.
\end{aligned}$$

Somando as equações acima,

$$a_{11}a_{21}^2 + a_{11}a_{22}^2 = \pm a_{22},$$

ou ainda,

$$a_{11}(a_{21}^2 + a_{22}^2) = \pm a_{22}.$$

Logo, pela segunda equação do sistema (1.4), temos que:

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1.$$

Segue que

$$a_{11} = \pm a_{22}.$$

Subtraindo a primeira equação do sistema (1.4) com a segunda equação, temos:

$$a_{12}^2 - a_{21}^2 = 0,$$

e assim,

$$\boxed{a_{12}^2 = a_{21}^2}$$

Agora vejamos os dois últimos casos das equações que restaram do sistema, para resolvê-las.

(i) $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1$

Já sabemos que $a_{11} = a_{22}$. Se $a_{11} \neq 0$, e usando que $a_{11} = a_{22}$, a terceira equação será

$$a_{11}a_{21} + a_{11}a_{12} = 0, \text{ ou ainda, } a_{11}(a_{21} + a_{12}) = 0. \text{ Logo, } a_{21} = -a_{12} \quad (\text{ou seja, } a_{21}^2 = a_{12}^2).$$

Se $a_{11} = 0$ e usando o fato que $a_{21}^2 = a_{12}^2$, então temos que

$$-a_{21}a_{12} = 1. \text{ Logo, } a_{21} = -a_{12}.$$

Em qualquer caso, a matriz A será da forma:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -1$

De maneira análoga ao caso anterior, temos:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

o que conclui a prova. □

Proposição 1.3.1. *Seja $\Phi : H_3 \longrightarrow H_3$ uma isometria tal que $\Phi(0) = p$. Então $\Phi = L_p \circ \Psi$ é uma isometria pelo lema acima.*

Demonstração. Como $L_{p^{-1}}$ e Φ são isometrias, a composição $L_{p^{-1}} \circ \Phi$ também o é. Além disso,

$$\begin{aligned} (L_{p^{-1}} \circ \Phi)(0) &= L_{p^{-1}}(\Phi(0)) \\ &= L_{p^{-1}}(p) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pelo lema anterior, $L_{p^{-1}} \circ \Phi = \Psi$, onde Ψ é uma isometria tal que $\Psi(0) = 0$. Logo, $\Phi = L_p \circ \Psi$, como queríamos. □

Capítulo 2

Aplicação de Gauss de superfícies em H_3

Dada $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada, a aplicação de Gauss é a aplicação dada por $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ que associa a cada ponto de S o vetor normal unitário $N(p)$. Considerando $\mathbb{R}^3$ como um grupo de Lie comutativo, a aplicação de Gauss é exatamente a translação do vetor normal unitário em qualquer ponto da superfície para a origem, o elemento identidade de $\mathbb{R}^3$.

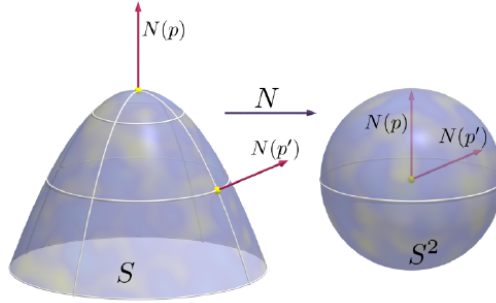


Figura 2.1: Aplicação de Gauss em $\mathbb{R}^3$ retirada de [7].

Neste capítulo apresentamos o que vem a ser a aplicação de Gauss de superfícies orientadas imersas em um grupo de Lie G , bem como resultados relacionados a tal aplicação. Alguns resultados apresentados neste capítulo baseiam-se nos obtidos por Christiam Figueroa [9].

2.1 Aplicação de Gauss em H_3

A seguir, definimos superfícies em H_3 e apresentamos resultados importantes envolvendo a aplicação de Gauss.

Definição 2.1.1. (*Superfícies em H_3*) Seja $S \subset H_3$. Dizemos que S é uma superfície se para todo $p \in S$, existem abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $V \subset H^3$, com $p \in V$ e uma aplicação $\varphi : \Omega \rightarrow S \cap V$, tal que

- (i) φ é um homeomorfismo;
- (ii) φ é diferenciável;
- (iii) $d\varphi_q$ é injetora $\forall q \in \Omega$.

Definição 2.1.2. (*Aplicação de Gauss*) Seja S uma superfície orientável em um grupo de Lie G de dimensão 3, munido com uma métrica invariante à esquerda. A aplicação

$$\gamma : S \rightarrow S^2 = \{v \in \mathfrak{g}; |v| = 1\},$$

onde $\gamma(p) = dL_p^{-1} \circ \eta(p)$, $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G e η o campo de vetores normal unitário de S , é chamada a aplicação de Gauss de S .

Note que a imagem da diferencial da aplicação de Gauss, $d\gamma(T_p S)$, está contida no espaço tangente à esfera S^2 no ponto $\gamma(p)$, ou seja:

$$d\gamma(T_p S) \subset T_{\gamma(p)} S^2 = \{\gamma(p)\}^\perp = dL_p^{-1}(T_p S)$$

e portanto $dL_p \circ d\gamma(T_p S) \subseteq T_p S$.

Vejamos a seguir alguns resultados relacionados à superfícies em H_3 . Em particular consideramos o caso de superfícies do grupo de Heisenberg, do tipo gráfico, isto é,

$$S = G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in H_3; (x, y) \in \Omega\},$$

onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

Tomando como base a definição acima, considere a parametrização de S dada por

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)), (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

Uma base de $T_p S$ associada a tal parametrização é dada por

$$X_x = (1, 0, f_x) = E_1 + \left(\frac{y}{2} + f_x\right)E_3 \quad (2.2)$$

$$X_y = (0, 1, f_y) = E_2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)E_3. \quad (2.3)$$

Exibiremos a seguir os cálculos para encontrar o campo normal à S .

Considere $\eta = aE_1 + bE_2 + cE_3$ o campo normal à S . Observe que

$$\langle \eta, X_x \rangle = a + c\left(f_x + \frac{y}{2}\right) = 0$$

$$\langle \eta, X_y \rangle = b + c\left(f_y - \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} a + c\left(f_x + \frac{y}{2}\right) = 0 \Rightarrow a = -c\left(f_x + \frac{y}{2}\right) \\ b + c\left(f_y - \frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = -c\left(f_y - \frac{x}{2}\right). \end{cases}$$

Segue que $\eta = c\left(-\left(f_x + \frac{y}{2}\right)E_1 - \left(f_y - \frac{x}{2}\right)E_2 + E_3\right)$, $c \in \mathbb{R}^*$. Em particular para $c = 1$, obtemos

$$\eta = -\left(f_x + \frac{y}{2}\right)E_1 - \left(f_y - \frac{x}{2}\right)E_2 + E_3,$$

e conseqüentemente

$$W = \|\eta\| = \sqrt{\left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2 + 1}.$$

Desse modo,

$$\xi(x, y) = \frac{\eta(x, y)}{\|\eta(x, y)\|} = -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right)E_1 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right)E_2 + \frac{1}{W}E_3 \quad (2.4)$$

é o campo normal unitário a S . Além disso, os coeficientes da primeira forma fundamental de S são:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_x, X_x \rangle = \langle E_1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E_3, E_1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E_3 \rangle = 1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 \\ F &= \langle X_x, X_y \rangle = \langle E_1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E_3, E_2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E_3 \rangle = \left(f_x + \frac{y}{2}\right) \left(f_y - \frac{x}{2}\right) \\ G &= \langle X_y, X_y \rangle = \langle E_2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E_3, E_2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E_3 \rangle = 1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Se ∇ é a conexão Riemanniana de $(H_3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, pela fórmula de Weingarten para superfícies, temos que

$$A_\xi v = -\nabla_v \xi, v \in T_p S.$$

Com isso, os coeficientes da segunda forma fundamental são calculados por

$$\begin{aligned} l &= \langle -\nabla_{X_x} \xi, X_x \rangle \\ m &= \langle -\nabla_{X_x} \xi, X_y \rangle \\ n &= \langle -\nabla_{X_y} \xi, X_y \rangle, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla_{X_x} \xi &= \nabla_{X_x} \left[-\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right) E_1 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right) E_2 + \left(\frac{1}{W}\right) E_3 \right] \\ &= -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right)_x E_1 - \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right) \nabla_{X_x} E_1 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right)_x E_2 \\ &\quad - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right) \nabla_{X_x} E_2 + \left(\frac{1}{W}\right)_x E_3 + \frac{1}{W} \nabla_{X_x} E_3. \end{aligned}$$

Usando agora a expressão de X_x dada em (2.2):

$$\begin{aligned} \nabla_{X_x} \xi &= -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right)_x E_1 - \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right) \nabla_{X_x} E_1 \\ &\quad - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right)_x E_2 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right) \nabla_{X_x} E_2 + \left(\frac{1}{W}\right)_x E_3 + \frac{1}{W} \nabla_{X_x} E_3 \\ &= -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right)_x E_1 - \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right) \nabla_{E_1} E_1 - \frac{(f_x + \frac{y}{2})^2}{W} \nabla_{E_3} E_1 \\ &\quad - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right)_x E_2 - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right) \nabla_{E_1} E_2 - \frac{(f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{W} \nabla_{E_3} E_2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{W}\right)_x E_3 + \frac{1}{W} \nabla_{E_1} E_3 + \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right) \nabla_{E_3} E_3 \\ &= -\left[\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right)_x + \left(\frac{(f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{2W}\right) \right] E_1 \\ &\quad + \left[\frac{(f_x + \frac{y}{2})^2}{2W} - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right)_x \right] E_2 + \left[\left(\frac{1}{W}\right)_x - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{2W}\right) \right] E_3. \end{aligned}$$

E de maneira análoga, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_{X_y}\xi &= \left[\frac{1 - (f_y - \frac{x}{2})^2}{2W} - \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W} \right)_y \right] E_1 + \left[\frac{(f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{2W} - \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W} \right)_y \right] E_2 \\ &\quad + \left[\frac{f_x + \frac{y}{2}}{2W} + \left(\frac{1}{W} \right)_y \right] E_3.\end{aligned}$$

Os coeficientes da 2ª Forma Fundamental são dados por

$$\begin{aligned}l &= \langle -\nabla_{X_x}\xi, X_x \rangle = \langle \nabla_{X_x}X_x, \xi \rangle = \frac{f_{xx} + (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{W} \\ m &= \langle -\nabla_{X_x}\xi, X_y \rangle = \langle \nabla_{X_x}X_y, \xi \rangle = \frac{f_{xy} + \frac{1}{2}(f_y - \frac{x}{2})^2 - \frac{1}{2}(f_x + \frac{y}{2})^2}{W} \\ n &= \langle -\nabla_{X_y}\xi, X_y \rangle = \langle \nabla_{X_y}X_y, \xi \rangle = \frac{f_{yy} - (f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})}{W}.\end{aligned}$$

Definição 2.1.3. (*Superfície Vertical*) Uma superfície $S \subset H_3$ é dita uma superfície vertical no ponto $p \in S$ se $\frac{\partial}{\partial z}\big|_p \in T_pS$. Dizemos que S é vertical se ela é vertical em todos os seus pontos.

Teorema 2.1.1. Seja S uma superfície orientável de um grupo de Lie 3-dimensional G . Então

$$dL_p \circ d\gamma_p(v) = -(A_\eta(v) + \alpha_{\bar{\eta}}(v)), v \in T_pS,$$

onde A_η é o operador de Weingarten, $\alpha_{\bar{\eta}}(v) = \nabla_v \bar{\eta}$ e $\bar{\eta}$ é o campo de vetores invariantes à esquerda tal que $\bar{\eta}(p) = \eta(p)$.

Demonstração. Seja S uma superfície, p um ponto de S e $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de T_pG tal que $e_3(p) = \eta(p)$. Considere E_1, E_2, E_3 as translações à esquerda de e_1, e_2, e_3 , respectivamente. Nesse caso, $\bar{\eta} = E_3$.

Dado $q \in S$, escrevemos

$$\eta(q) = \alpha_1 E_1(q) + \alpha_2 E_2(q) + \alpha_3 E_3(q) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i E_i(q), \quad (2.5)$$

onde $\alpha_j(p) = 0$ para $j = 1, 2$ e $\alpha_3(p) = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma(q) &= dL_{q^{-1}} \circ \eta(q) \\ &= dL_{q^{-1}}(\alpha_1 E_1(q) + \alpha_2 E_2(q) + \alpha_3 E_3(q)) \\ &= \alpha_1(q) E_1(e) + \alpha_2(q) E_2(e) + \alpha_3(q) E_3(e) \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i(q) E_i(e).\end{aligned}$$

Desse modo, para $v \in T_pS$, temos

$$\begin{aligned}d\gamma_p(v) &= v \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i(q) E_i(e) \right) \\ &= v \left(\alpha_1 E_1(e) + \alpha_2 E_2(e) + \alpha_3 E_3(e) \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 v(\alpha_i) E_i(e).\end{aligned}$$

Se compormos dL_p com $d\gamma_p$ em v , obtemos

$$\begin{aligned}
dL_p \circ d\gamma_p(v) &= dL_p \left(\sum_{i=1}^3 v(\alpha_i) E_i(e) \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 v(\alpha_i) dL_p(E_i(e)) \\
&= \sum_{i=1}^3 v(\alpha_i) E_i(p).
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_v \eta|_p &= \nabla_v \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i E_i \right)|_p \\
&= \nabla_v (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3)|_p \\
&= \sum_{i=1}^3 v(\alpha_i) E_i(p) + \sum_{i=1}^3 \nabla_v E_i|_p \\
&= dL_p \circ d\gamma_p(v) + \nabla_v E_3|_p \\
&= dL_p \circ d\gamma_p(v) + \alpha_{\bar{n}}(v).
\end{aligned}$$

Portanto, $-A_\eta(v) = dL_p \circ d\gamma_p(v)$ e o resultado segue. $\square$

Observação 2. Note que para o $\mathbb{R}^3$, os campos invariantes à esquerda são constantes. Ou seja, $\alpha_{\bar{\eta}}(v) = \nabla_v \bar{\eta} = 0$ e, portanto, a equação do teorema acima é dada por $dL_p \circ d\gamma_p(v) = -A_\eta(v)$, onde $dL_p = Id$. Assim, no caso Euclidiano a diferencial da aplicação de Gauss é exatamente a 2ª forma fundamental para superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.1.1. Vejamos agora um caso particular do teorema 2.1.1 quando $S = G(f)$ é o gráfico de uma função $f(x, y)$. Usando a parametrização de (2.1) e a base $\{X_x, X_y\}$ de (2.2) e (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
d\gamma_p(X_x) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} E_i(e) \\
d\gamma_p(X_y) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial y_i} E_i(e),
\end{aligned}$$

onde a_i são os componentes da normal η e $p \in S = G(f)$. Logo,

$$\begin{aligned}
dL_p \circ d\gamma_p(X_x) &= dL_p \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} E_i(e) \right) \\
&= dL_p \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} E_1(e) + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} E_2(e) + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} E_3(e) \right) \\
&= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} E_1(p) + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} E_2(p) + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} E_3(p) \\
&= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} E_i(p).
\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$dL_p \circ d\gamma_p(X_y) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial y_i} E_i(p).$$

Por outro lado, temos que $dL_p \circ d\gamma_p(T_p S) \subseteq T_p S$ e portanto

$$dL_p \circ d\gamma_p(X_x) = aX_x + bX_y,$$

$$dL_p \circ d\gamma_p(X_y) = cX_x + dX_y.$$

Usando (2.2) e (2.3) e comparando os dois sistemas acima, obtemos a seguinte matriz:

$$dL_p \circ d\gamma_p = \begin{bmatrix} -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right)_x & -\left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{W}\right)_y \\ -\left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right)_x & -\left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{W}\right)_y \end{bmatrix}.$$

Note que o determinante da matriz é dado por

$$\det(dL_p \circ d\gamma_p) = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 + \frac{1}{4}}{W^2},$$

ao qual chamaremos de determinante da aplicação de Gauss e α_n é dado pela seguinte matriz:

$$\alpha_{\bar{\eta}}(X_x) = \nabla_{X_x} \bar{\eta} = \frac{1}{2W} \begin{bmatrix} -\left(f_x + \frac{y}{2}\right)\left(f_y - \frac{x}{2}\right) & 1 - \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2 \\ \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 - 1 & \left(f_x + \frac{y}{2}\right)\left(f_y - \frac{x}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.1.1. *Seja S uma superfície orientável de um grupo de Lie G . Se $p \in S$ é um ponto tal que $d\gamma_p \equiv 0$ então $dL_p^{-1}(T_p S)$ é uma subálgebra de Lie com codimensão 1.*

Demonstração. Por hipótese, sabemos que $p \in S$ é tal que $d\gamma_p \equiv 0$. Assim pelo teorema (2.1.1) temos que $\alpha_{\bar{\eta}} = -A_{\eta}$ no ponto p e se A_{η} é um operador simétrico, $\alpha_{\bar{\eta}}$ também o é.

Considere $\{X_1, X_2\}$ uma base ortonormal de $T_p S$ e considere $E_i = dL_{p^{-1}}(X_i)$, $i = 1, 2$ e $E = \gamma(p)$. Sendo

$$\alpha_{\bar{\eta}} = (\langle \nabla_{E_i} E, E_j \rangle), \quad i, j = 1, 2,$$

a matriz de $\alpha_{\bar{\eta}}$, temos que

$$\langle \nabla_{E_i} E, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_j} E, E_i \rangle, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.6)$$

pois $\alpha_{\bar{\eta}}$ é um operador simétrico. Pela expressão

$$\langle Z, \nabla_X Y \rangle = -\frac{1}{2}(\langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle),$$

temos que a derivada covariante é dada por

$$\langle E_j, \nabla_{E_i} E \rangle = -\frac{1}{2}(\langle [E, E_i], E_j \rangle + \langle [E, E_j], E_i \rangle + \langle [E_i, E_j], E \rangle), \quad (2.7)$$

utilizando as equações (2.6) e (2.7), obtemos

$$\langle [E_i, E_j], E \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

ou seja, $[E_i, E_j] \in dL_{p^{-1}}(T_p S) = \text{span}\{E_1, E_2\}$.

□

Proposição 2.1.2. *Seja S uma superfície em H_3 .*

- (a) *Se S é um gráfico, então S não é vertical em nenhum de seus pontos.*
(b) *S é uma superfície vertical se, e somente se, a menos de isometria S é localmente da forma $(t, a(t), s)$, $(t, s) \in \Omega$, onde Ω é um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$.*

Veja demonstração em [16].

Proposição 2.1.3. *Seja S uma superfície em H_3 . Então para todo $p \in S$, temos que S é vertical em p ou é, localmente em p , o gráfico de uma função diferenciável f .*

Demonstração. Seja S uma superfície em H_3 e $p \in S$. Se S for localmente um gráfico em p , não há nada a fazer.

Suponha agora que S está parametrizada localmente por

$$X(t, s) = (f(t, s), t, s).$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_t &= (f_t, 1, 0) = f_t E_1 + E_2 + \left(\frac{t f_t}{2} - \frac{f}{2}\right) E_3, \\ X_s &= (f_s, 0, 1) = f_s E_1 + \left(1 + \frac{t f_s}{2}\right) E_3. \end{aligned}$$

Considerando o ponto p da forma $p = (f(t_0, s_0), t_0, s_0)$, temos que $E_3(p) \in T_p S$ se, e somente se, $f_s(t_0, s_0) = 0$. Desta forma, se S não é vertical em p , então $f_s(t_0, s_0) \neq 0$.

Se definirmos $F(t, x, s) = f(t, s) - x$, temos que se $x_0 = f(t_0, s_0) \implies F_s(t_0, x_0, s_0) = f_s(t_0, s_0) \neq 0$. Pelo teorema da função implícita, existe uma função diferenciável g definida em $B \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $F(t, x, g(x, t)) = 0$ no aberto B . Assim, $f(t, g(x, t)) = x \forall (x, t) \in B$. Se $(x, t) \in B$ e $s = g(x, t)$, temos que

$$(f(t, s), t, s) = (f(t, g(x, t)), t, s) = (x, t, g(x, t)).$$

Portanto, S é localmente o gráfico de f . Para as parametrizações $X(t, s) = (t, f(t, s), s)$ e $X(t, s) = (t, s, f(t, s))$ a ideia de prova é análoga, modificando apenas o ponto de S . $\square$

Teorema 2.1.2. *O plano vertical é a única superfície conexa em H_3 com a propriedade de que sua aplicação de Gauss é constante.*

Demonstração. Seja S uma superfície de H_3 dada como o gráfico de uma função suave $f(x, y)$, ou seja, S é parametrizada por $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Uma base do espaço tangente de S é dada por

$$X_x = E_1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E_3 \text{ e } X_y = E_2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E_3. \quad (2.8)$$

Se existe $p \in S$ tal que $d\gamma_p \equiv 0$, então $dL_p^{-1}(T_p S)$ é uma subálgebra de h_3 , o que é uma contradição, pois

$$\begin{aligned} [dL_p^{-1}(X_x), dL_p^{-1}(X_y)] &= dL_p^{-1}[X_x, X_y] \\ &= dL_p^{-1}\left[E_1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E_3, E_2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E_3\right] \\ &= dL_p^{-1}[E_3] \\ &= e_3. \end{aligned}$$

Isto nos diz que $e_3 \in dL_p^{-1}(T_p S)$. Logo, $\exists u \in T_p S$ tal que $dL_p^{-1}(u) = e_3$. Mas se $u = aX_x + bX_y$, então

$$\begin{aligned} dL_p^{-1}(u) &= dL_p^{-1}(aX_x + bX_y) \\ &= dL_p^{-1}(aE_1 + bE_2 + (a(f_x + \frac{y}{2}) + b(f_y - \frac{x}{2}))E_3) \\ &= ae_1 + be_2 + e_3(a(f_x + \frac{y}{2}) + b(f_y - \frac{x}{2})). \end{aligned}$$

Assim $a = b = 0$, o que é uma contradição pois $e_3 \neq 0$. Assim, não existem gráficos em H_3 de tal forma que a aplicação de Gauss seja constante.

Considere agora S sendo uma superfície vertical. Neste caso podemos considerá-la pela proposição 2.1.2 como uma superfície parametrizada por

$$X(t, s) = (t, a(t), s), (t, s) \in U \subset \mathbb{R}^2,$$

e sejam

$$X_t = (1, a'(t), 0) = E_1 + a'E_2 + \frac{(a - a't)}{2}E_3 \quad e \quad X_s = (0, 0, 1) = E_3,$$

a base associada a tal parametrização.

Temos que o campo normal unitário é dado por

$$\eta = \frac{X_t \times X_s}{\|X_t \times X_s\|} = \frac{a'E_1 - E_2}{\sqrt{1 + a'^2}} = \frac{a'}{\sqrt{1 + a'^2}}E_1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2}}E_2.$$

Observe que η é constante quando $a'(t)$ também o é, ou seja, $a(t)$ é uma função afim. Como $\gamma(p) = dL_p^{-1} \circ \eta(p)$ temos que γ é constante se, e somente se, η é constante. Neste caso, S é um plano. □

2.2 Superfícies Mínimas em H_3

Definição 2.2.1. (*Curvatura média*) Definimos como curvatura média a expressão dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{lG - 2mF + nE}{EG - F^2},$$

onde E, F e G e l, m e n são coeficientes da Primeira e Segunda Forma Fundamental, respectivamente.

Definição 2.2.2. (*Superfície Mínima em H_3*) Uma superfície em H_3 é chamada mínima se a sua curvatura média é identicamente nula.

Note que se $H = 0$ e a superfície é dada como gráfico de uma função suave, então a equação dos gráficos mínimos em H_3 é dada por

$$(1 + (f_y - \frac{x}{2})^2)f_{xx} - 2(f_y - \frac{x}{2})(f_x + \frac{y}{2})f_{xy} + (1 + (f_x + \frac{y}{2})^2)f_{yy} = 0.$$

Exemplo 1.3.1 Os planos $f(x, y) = ax + by + c$ são exemplos de gráficos mínimos.

Vejamos a seguir definições importantes que envolvem o princípio do máximo geométrico. Para mais detalhes veja [17].

Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$F[u] = F(x, y, u, Du, D^2u) = 0,$$

com $F : \Gamma = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times S(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $S(2, \mathbb{R})$ é o espaço das matrizes reais de ordem 2 simétricas e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Os elementos de Γ são escritos como (x, y, z, p, r) onde $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $r = (r_{ij})_{2 \times 2} \in S(2, \mathbb{R})$. Nós assumimos que F é diferenciável com respeito aos r'_{ij} s.

Definição 2.2.3. (*Operador Elíptico*) O operador definido na expressão acima é dito elíptico em $u \in C^2(\Omega)$ se

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, y, u, Du, D^2u) \right)_{2 \times 2}$$

é uma matriz positiva definida.

Segue um resultado importante que envolve o Princípio do Máximo:

Considere uma equação diferencial elíptica da forma

$$F[u] = F(x, y, u, Du, D^2u) = 0$$

com $F : \Gamma = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times S(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $S(2, \mathbb{R})$ é o espaço simétrico de matrizes de ordem 2 com entradas reais. Dado $u_0, u_1 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, e suponha

- (1) $F \in C^1(\Gamma)$;
- (2) F é elíptico em todas as funções $tu_1 + (1 - t)u_0, 0 \leq t \leq 1$;
- (3) $\frac{\partial F}{\partial u} \leq 0$ em Ω .

Se $u_1 \leq u_0$ sobre $\partial(\Omega)$ e $F[u_1] \geq F[u_0]$ em Ω , então ou $u_1 < u_0$ em Ω ou $u_0 \equiv u_1$ em Ω .

A seguir apresentamos algumas definições importantes.

Definição 2.2.4. (*Ponto de tangência interior*) Sejam as superfícies $S_i \subset H_3, i = 1, 2$ e $p \in \text{int}(S_1) \cap \text{int}(S_2)$ tal que o plano tangente e o vetor normal unitário de S_1 e S_2 em p coincidem. Nessas condições, o ponto p é denominado um ponto de tangência interior de S_1 e S_2 .

Definição 2.2.5. (*Ponto de tangência no bordo*) Sejam as superfícies $S_i \subset H_3, i = 1, 2$, com $\partial S_i \neq \emptyset$ e $p \in \partial S_1 \cap \partial S_2$ um ponto tal que o plano tangente, o vetor normal unitário de S_1 e S_2 , e os vetores normais interiores de ∂S_1 e ∂S_2 em p coincidem. Nessas condições, o ponto p é denominado um ponto de tangência no bordo de S_1 e S_2 .

Definição 2.2.6. (*Comparação entre superfícies*) Sendo p um ponto de tangência interior ou no bordo de $S_1 = \text{graf}(u_1)$ e $S_2 = \text{graf}(u_2)$, então u_1 e u_2 podem ser definidas sobre um mesmo plano tangente. Nesse caso, S_1 está acima de S_2 se $u_1 \geq u_2$ e está abaixo de S_2 se $u_1 \leq u_2$. Será denotado respectivamente por $S_1 \geq S_2$ e $S_1 \leq S_2$.

O resultado abaixo refere-se ao Princípio da Tangência Interior.

Teorema 2.2.1. (*Princípio da Tangência Interior*) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo e $z_1, z_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, soluções de uma EDP elíptica $\phi = 0$ em U . Se $z_1 \leq z_2$ em U e se existe $P \in U$ tal que $z_1(P) = z_2(P)$, então $z_1 = z_2$ em U .

O teorema a seguir é conhecido como o Princípio do Máximo Geométrico. Uma ideia da prova no caso euclidiano pode ser encontrada em [17].

Teorema 1.3.1 Sejam as superfícies $S_i \subset \mathbb{H}^3, i = 1, 2$, que satisfazem o princípio do máximo. Suponha que p é um ponto de tangência interior ou no bordo de S_1 e S_2 e, em alguma vizinhança de p , $S_1 \geq S_2$, então $S_1 = S_2$.

Teorema 2.2.2. Não há nenhuma superfície mínima compacta (limitada e fechada) em H_3 .

Demonstração. Suponha que existe uma superfície S mínima e compacta (sem bordo) em H_3 . Considere a aplicação $\pi_3 : S \rightarrow \mathbb{R}$ como a projeção na terceira coordenada, ou seja, $\pi_3(x, y, z) = z \forall (x, y, z) \in S$. Temos que π_3 é contínua e como S é compacta, atinge seu máximo em S . Seja $p \in S$ um ponto de máximo para π_3 e P o plano dado como gráfico da função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $g(x, y) = c, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sabemos que tal superfície é mínima, pois sua curvatura média é identicamente nula ($g_{xx} = g_{yy} = g_{xy} = 0$).

Além disso, afirmamos que S está abaixo de P . De fato, como S é compacta, temos que $S \cap P$ é um fechado de P e consequentemente um fechado de H_3 . Mas $p \in S \cap P$ o que significa que $S \cap P \neq \emptyset$. Se existir outro ponto $q \in S \cap P$, então S não é vertical em q e pela proposição (2.1.1) só pode então ser dada como gráfico de uma função diferenciável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Vamos definir $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F[u] = \left(1 + \left(u_y - \frac{x}{2}\right)\right)u_{xx} - 2\left(u_y - \frac{x}{2}\right)\left(u_y + \frac{y}{2}\right)u_{xy} + \left(1 + \left(u_x + \frac{y}{2}\right)^2\right)u_{yy}.$$

Observe que $F \in C^1(\Gamma)$ e Γ não depende de u . Sendo assim $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$. Se considerarmos

$$u_1 = u_x + \frac{y}{2} \text{ e } u_2 = u_y - \frac{x}{2},$$

obtemos,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\right) = \begin{pmatrix} 1 + u_2^2 & -u_1 u_2 \\ -u_1 u_2 & 1 + u_1^2 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que P e S são superfícies mínimas, então $F[f] = F[g] = 0$. Por hipótese S está abaixo de P e assim $f \leq g$. Se $f(q) = g(q)$, segue pelo princípio do máximo que S coincide com P em Ω . Logo, existe uma vizinhança V do ponto q tal que $V \subset S \cap P$. Mas isto significa que $S \cap P$ também é um aberto de P e como P é conexo, segue que $P = S \cap P$. Entretanto P não é limitado, o que gera uma contradição, pois S é compacta. Dessa forma, a prova está completa e de fato mostramos que não existe superfície mínima compacta em H_3 . $\square$

Capítulo 3

Aplicação de Gauss para imersões conformes em H_3

Neste capítulo, apresentamos a aplicação de Gauss para imersões conformes em H_3 , utilizando técnicas e conceitos da Geometria Riemanniana e da Análise Complexa. Analisamos também as condições necessárias para que essa aplicação seja harmônica. A seguir, estabelecemos a notação que será adotada ao longo do capítulo.

No capítulo 1 vimos que o grupo de Heisenberg pode ser munido com a métrica

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \left(\frac{1}{2}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) + dx_3 \right)^2.$$

Ao longo do texto identificaremos $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$ e chamaremos de referencial canônico em H_3 , o referencial ortonormal de campos invariantes à esquerda $\{E_1, E_2, E_3\}$ dado por

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_3}, E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3}, E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Além disso, diremos que um vetor é vertical se ele for proporcional ao campo E_3 e horizontal se for ortogonal a E_3 . Uma superfície não é vertical em nenhum ponto se o campo E_3 nunca for tangente a ela. Identificaremos um vetor em $x = (x_1, x_2, x_3)$ com suas coordenadas no referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$. Estas coordenadas serão denotadas entre colchetes. Desta forma, temos que

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 + \frac{1}{2}(x_2 a_1 - x_1 a_2) \end{bmatrix}.$$

Relembramos a seguir algumas definições importantes.

Definição 3.0.1. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\phi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$ é injetora $\forall p \in M$.*

*Uma imersão $\phi : M \rightarrow N$ é chamada **conforme** se para todo $p \in M$ e quaisquer $u, v \in T_p M$ temos $\langle d\phi_p(u), d\phi_p(v) \rangle_N = \lambda^2(p) \langle u, v \rangle_M$, onde λ é uma função diferenciável em M que nunca se anula. Além disso, ϕ é **mínima** se a curvatura média da superfície imersa for igual a zero em cada ponto da superfície.*

3.1 A aplicação de Gauss e resultados relacionados

Considere Σ uma superfície de Riemann orientada e $z = u + iv$ a coordenada conforme em Σ . Seja $X : \Sigma \longrightarrow H_3$ uma imersão conforme. Denotaremos por $F = \pi \circ X$ a projeção horizontal de X e por $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ a terceira coordenada de X . Desta forma, escreveremos $X = (F, h)$. Vamos considerar ainda F com uma função complexa, ao identificar $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$. O campo normal unitário a X é denotado por $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$, onde $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária da álgebra de Lie de H_3 .

Definição 3.1.1. A aplicação de Gauss de X é a aplicação $g = \varphi \circ N : \Sigma \longrightarrow \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, onde φ é a projeção estereográfica com respeito ao polo sul dada por

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 + x_3}.$$

Assim, $g : \Sigma \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ está definida por $N = \varphi^{-1} \circ g$, onde $g = (Re g, Im g)$ e a inversa de φ , φ^{-1} é dada por

$$\varphi^{-1}(z) = \left(\frac{2Re(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2Im(z)}{1 + |z|^2}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right),$$

onde $z \in \bar{\mathbb{C}}$. Desta forma temos que

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{2Re g}{Re^2 g + Im^2 g + 1}, \frac{2Im g}{Re^2 g + Im^2 g + 1}, \frac{-(Re^2 g + Im^2 g) + 1}{Re^2 g + Im^2 g + 1} \right) \\ &= \frac{1}{|g|^2 + 1} \begin{bmatrix} 2Re g \\ 2Im g \\ 1 - |g|^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definição 3.1.2. Defina $\eta = 2\langle E_3, X_z \rangle$. Chamamos o par (g, η) de dados de Weierstrass da imersão X .

Denotando a imersão conforme como

$$X(u, v) = (F(u, v), h(u, v))$$

e escrevendo explicitamente F e $\bar{F}$ como

$$F = Re F + i Im F \tag{3.1}$$

$$\bar{F} = Re F - i Im F, \tag{3.2}$$

segue das equações entre (3.1) e (3.2) que

$$Re F = \frac{F + \bar{F}}{2} \text{ e } Im F = i \frac{(\bar{F} - F)}{2}.$$

Desta forma, a imersão X pode ser representada como

$$X = \left(\frac{F + \bar{F}}{2}, i \frac{\bar{F} - F}{2}, h \right).$$

Observação 3. Se $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$ formam uma base para o plano tangente $T_p \Sigma$, então podemos associar a estes campos

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Para cada ponto $p \in \Sigma$, o conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$ é uma base para o plano tangente complexificado $T_p^{\mathbb{C}} \Sigma$.

Observação 4. Observe que

$$X_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\bar{F} + F)_z \\ i(\bar{F} - F)_z \\ \eta \end{bmatrix},$$

sendo esta representação a escrita de X_z no referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$. Na definição 3.1.2 temos que $\eta = 2\langle E_3, X_z \rangle$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2} &= h_z + \frac{i}{8} \left[(\bar{F} + F)_z (\bar{F} - F) - (F + \bar{F})(\bar{F} - F)_z \right] \\ h_z &= \frac{\eta}{2} - \frac{i}{8} \left[\bar{F}_z \bar{F} - \bar{F}_z F + F_z \bar{F} - F_z F - (F \bar{F}_z - F F_z + \bar{F} \bar{F}_z - \bar{F} F_z) \right] \\ &= \frac{\eta}{2} - \frac{i}{8} \left[-2F \bar{F}_z + 2\bar{F} F_z \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$h_z = \frac{\eta}{2} - \frac{i}{4} \left[\bar{F} F_z - F \bar{F}_z \right]. \quad (3.3)$$

Além disso, temos que

$$X_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\bar{F} + F)_{\bar{z}} \\ i(\bar{F} - F)_{\bar{z}} \\ \bar{\eta} \end{bmatrix}.$$

Observe que para que X seja conforme devemos ter que $\langle X_z, X_z \rangle = 0$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \langle X_z, X_z \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \left((F + \bar{F})_z E_1 + i(\bar{F} - F)_z E_2 + \eta E_3 \right), \frac{1}{2} \left((F + \bar{F})_z E_1 + i(\bar{F} - F)_z E_2 + \eta E_3 \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left((F_z + \bar{F}_z)^2 + i^2 (\bar{F}_z - F_z)^2 + \eta^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(F_z^2 + 2F_z \bar{F}_z + \bar{F}_z^2 - (\bar{F}_z^2 - 2F_z \bar{F}_z + F_z^2) + \eta^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(F_z^2 + 2F_z \bar{F}_z + \bar{F}_z^2 - \bar{F}_z^2 + 2F_z \bar{F}_z - F_z^2 + \eta^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(4F_z \bar{F}_z + \eta^2 \right) \\ &= F_z \bar{F}_z + \frac{\eta^2}{4}. \end{aligned}$$

E , portanto, a conformalidade de X é equivalente a

$$F_z \bar{F}_z = -\frac{\eta^2}{4}. \quad (3.4)$$

Note que

$$\begin{aligned} X_z \times X_{\bar{z}} &= \left(\frac{i\bar{\eta}}{4}(\bar{F} - F)_z - \frac{i\eta}{4}(\bar{F} - F)_{\bar{z}} \right) E_1 + \left(-\frac{\bar{\eta}}{4}(F + \bar{F})_z + \frac{\eta}{4}(\bar{F} + F)_{\bar{z}} \right) E_2 \\ &+ \left(\frac{i}{4}(\bar{F} + F)_z(\bar{F} - F)_{\bar{z}} - \frac{i}{4}(F + \bar{F})_{\bar{z}}(\bar{F} - F)_z \right) E_3. \end{aligned}$$

A componente de $X_z \times X_{\bar{z}}$ na direção de E_3 ainda pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{i}{4}(\bar{F} + F)_z(\bar{F} - F)_{\bar{z}} - \frac{i}{4}(F + \bar{F})_{\bar{z}}(\bar{F} - F)_z &= \frac{i}{4} \left[(F_z + \bar{F}_z)(\bar{F}_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}) - (F_{\bar{z}} + \bar{F}_{\bar{z}})(\bar{F}_z - F_z) \right] \\ &= \frac{i}{4} \left[F_z \bar{F}_{\bar{z}} - \bar{F}_z F_{\bar{z}} - F_{\bar{z}} \bar{F}_z + \bar{F}_{\bar{z}} F_z \right] \\ &= \frac{i}{4} \left[2F_z \bar{F}_{\bar{z}} - 2\bar{F}_z F_{\bar{z}} \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[F_z \bar{F}_{\bar{z}} - \bar{F}_z F_{\bar{z}} \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[|F_z|^2 - |F_{\bar{z}}|^2 \right]. \end{aligned}$$

Da mesma forma podemos reescrever as duas primeiras componentes de $X_z \times X_{\bar{z}}$ e com isso obtemos que

$$X_z \times X_{\bar{z}} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} \text{Re}(\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z) \\ \text{Im}(\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z) \\ |F_z|^2 - |F_{\bar{z}}|^2 \end{bmatrix}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} X_z \times X_{\bar{z}} &= \left[\frac{1}{2}(X_u - iX_v) \right] \times \left[\frac{1}{2}(X_u - iX_v) \right] \\ &= \frac{i}{4}X_u \times X_v - \frac{i}{4}X_v \times X_u \\ &= \frac{i}{4} \left[2(X_u \times X_v) \right] \\ &= \frac{i}{2}X_u \times X_v, \end{aligned} \quad (3.5)$$

multiplicando (3.5) por $(-2i)$ obtém-se

$$-2i(X_z \times X_{\bar{z}}) = X_u \times X_v.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
||X_u \times X_v|| &= 2\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle \\
&= 2\langle \frac{1}{2}(F + \bar{F})_z E_1 + \frac{i}{2}(\bar{F} - F)_z E_2 + \frac{\eta}{2} E_3, \frac{1}{2}(F + \bar{F})_{\bar{z}} E_1 + \frac{i}{2}(\bar{F} - F)_{\bar{z}} E_2 + \frac{\bar{\eta}}{2} E_3 \rangle \\
&= 2\langle \left(\frac{1}{2}(F_z + \bar{F}_z) E_1 + \frac{i}{2}(\bar{F}_z - F_z) E_2 + \frac{\eta}{2} E_3, \frac{1}{2}(F_{\bar{z}} + \bar{F}_{\bar{z}}) E_1 + \frac{i}{2}(\bar{F}_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}) E_2 + \frac{\bar{\eta}}{2} E_3 \right) \rangle \\
&= |F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2.
\end{aligned}$$

Assim quando $g \neq \infty$, temos que ao analisar as duas primeiras componentes do vetor normal

$$\frac{2}{1 + |g|^2} (Reg + iImg) = \frac{2g}{1 + |g|^2}.$$

Como

$$N = \frac{X_u \times X_v}{||X_u \times X_v||} = \frac{-2i(X_z \times X_{\bar{z}})}{|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2},$$

ao analisarmos as duas primeiras componentes do vetor $X_z \times X_{\bar{z}}$ temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{4} (\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z + \eta \bar{F}_z - \eta \bar{F}_{\bar{z}}) + \frac{i}{4} (\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z - \eta \bar{F}_z + \eta \bar{F}_{\bar{z}}) \\
&= \frac{i}{2} (\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

e desta forma obtemos que as duas primeiras coordenadas do vetor $\frac{X_z \times X_{\bar{z}}}{||X_z \times X_{\bar{z}}||}$ pode ser representada por

$$\frac{\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z}{|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2}.$$

Já a terceira coordenada é encontrada diretamente. E assim obtemos quando $g \neq \infty$:

$$\frac{2g}{1 + |g|^2} = \frac{\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z}{|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2}, \frac{1 - |g|^2}{1 + |g|^2} = \frac{|F_z|^2 - |F_{\bar{z}}|^2}{|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2},$$

E portanto,

$$g = \varphi \circ N = \frac{\eta F_{\bar{z}} - \bar{\eta} F_z}{2|F_z|^2 + \frac{1}{2}|\eta|^2}.$$

Usando (3.4), concluimos que quando $g \neq \infty$,

$$\bar{g}F_z = -\frac{\eta}{2}, F_{\bar{z}} = \frac{g\bar{\eta}}{2}. \tag{3.7}$$

Observação 5. Podemos concluir que pelas equações (3.7) as funções $\frac{\eta}{g}$ e $g\bar{\eta}$ podem ser estendidas para os pontos, onde $g = 0$ ou ∞ .

As equações (3.4) e (3.7) caracterizam (g, η) a menos de transformações $(g, \eta) \mapsto (-g, -\eta)$.

Note que F, g e η estão bem definidas independentes do modelo de H_3 , enquanto h depende do modelo, já que da forma que h foi definida ela representa a coordenada vertical da imersão. A função h satisfaz que

$$h_z = \frac{\eta}{2} - \frac{i}{4} [\bar{F}F_z - F\bar{F}_z]. \tag{3.8}$$

De fato, observe que

$$X_z = \frac{1}{2} \left((\bar{F} + F)_z E_1 + i(\bar{F} - F)_z E_2 + \eta E_3 \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2} &= \langle X_z, E_3 \rangle \\ &= h_z + \frac{1}{2} \left(\operatorname{Im} F \frac{(\bar{F} + F)_z}{2} - i \operatorname{Re} F \frac{(\bar{F} - F)_z}{2} \right), \end{aligned}$$

e como

$$\operatorname{Im} F = \frac{i}{2}(\bar{F} - F) \quad \text{e} \quad \operatorname{Re} F = \frac{1}{2}(F + \bar{F}),$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2} &= h_z + \frac{1}{4} \left[\frac{i}{2}(\bar{F} - F)(F + \bar{F})_z - \frac{i}{2}(F + \bar{F})(\bar{F} - F)_z \right] \\ &= h_z + \frac{i}{8} [(\bar{F}F_z + \bar{F}\bar{F}_z - FF_z - F\bar{F}_z + FF_z - F\bar{F}_z - \bar{F}\bar{F}_z + \bar{F}F_z)] \\ &= h_z + \frac{i}{8} [2\bar{F}F_z - 2F\bar{F}_z] \\ &= h_z + \frac{i}{4} [\bar{F}F_z - F\bar{F}_z]. \end{aligned}$$

E portanto,

$$h_z = \frac{\eta}{2} - \frac{i}{4} [\bar{F}F_z - F\bar{F}_z].$$

Vejamos a seguir que $F_{zz} = F_{z\bar{z}}$. Como $F_z = \operatorname{Re} F_z + i \operatorname{Im} F_z$, temos que

$$\begin{aligned} F_{z\bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_z}{\partial u} + i \frac{\partial F_z}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} F_z}{\partial u} + i \frac{\partial \operatorname{Im} F_z}{\partial u} + i \frac{\partial \operatorname{Re} F_z}{\partial v} - \frac{\partial \operatorname{Im} F_z}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \operatorname{Re} F_z}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Im} F_z}{\partial v} + i \left(\frac{\partial \operatorname{Im} F_z}{\partial u} + \frac{\partial \operatorname{Re} F_z}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial u \partial u} - \frac{\partial^2 \operatorname{Im} F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial v \partial v} + i \left(\frac{\partial \operatorname{Im}^2 F}{\partial u \partial u} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} F}{\partial v \partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial u \partial u} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial v \partial v} + i \left(\frac{\partial \operatorname{Im}^2 F}{\partial u \partial u} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} F}{\partial v \partial v} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
F_{\bar{z}z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \operatorname{Re} F_{\bar{z}}}{\partial u} + \frac{\partial \operatorname{Im} F_{\bar{z}}}{\partial v} + i \left(\frac{\partial \operatorname{Im} F_{\bar{z}}}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Re} F_{\bar{z}}}{\partial v} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial u \partial u} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} F}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 \operatorname{Im} F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial v \partial v} + i \left(\frac{\partial \operatorname{Im}^2 F}{\partial u \partial u} - \frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \operatorname{Im} F}{\partial v \partial v} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial u \partial u} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} F}{\partial v \partial v} + i \left(\frac{\partial \operatorname{Im}^2 F}{\partial u \partial u} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} F}{\partial v \partial v} \right) \right].
\end{aligned}$$

E, portanto, $F_{\bar{z}z} = F_{z\bar{z}}$, como queríamos.

Proposição 3.1.1. *Seja $X : \Sigma \rightarrow H_3$ uma imersão conforme. Então sua aplicação de Gauss g não pode ser identicamente nula ou ∞ em um conjunto aberto.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $g \equiv 0$ em um conjunto aberto U . Pela equação (3.7), se $g = 0$, então $\bar{\eta} = F_{\bar{z}} = 0$ em um aberto U . Logo, concluímos que $F_{z\bar{z}} = F_{\bar{z}z} = 0$ em U . Mas pela equação (3.8),

$$h_z = \frac{\eta}{2} - \frac{i}{4} \left[\bar{F} F_z - F \bar{F}_z \right],$$

e como $\bar{\eta} = 0$, segue que $\eta = 0$. Logo,

$$h_z = -\frac{i}{4} \left(\bar{F} F_z - F \bar{F}_z \right).$$

Utilizando o fato que $\bar{F}_z = \overline{F_{\bar{z}}}$, obtemos

$$h_z = -\frac{i}{4} \left(\bar{F} F_z - F \overline{F_{\bar{z}}} \right),$$

e $F_{\bar{z}} = 0$, então

$$h_z = -\frac{i}{4} \bar{F} F_z.$$

Derivando h_z com respeito a $\bar{z}$,

$$\begin{aligned}
h_{z\bar{z}} &= -\frac{i}{4} \left[\bar{F}_{\bar{z}} F_z - \bar{F} F_{z\bar{z}} \right] \\
&= -\frac{i}{4} \bar{F}_{\bar{z}} F_z \\
&= -\frac{i}{4} \overline{F_z} F_z \\
&= -\frac{i}{4} |F_z|^2.
\end{aligned}$$

Como $h_{z\bar{z}} \in \mathbb{R}$, segue que $h_{z\bar{z}} = 0$. Assim $F_z = 0$ em U e, portanto, $X_z \times X_{\bar{z}} \equiv 0$, o que é impossível, já que X é uma imersão. Usando a mesma ideia, concluímos que g não pode ser identicamente ∞ em um conjunto aberto. $\square$

A equação do seguinte teorema será utilizada para a demonstração do corolário 1 e do lema 3.1, sendo feita a demonstração deste teorema posteriormente.

Teorema 3.1.1. *Seja $X : \Sigma \longrightarrow H_3$ uma imersão mínima conforme. Então a aplicação de Gauss $g : \Sigma \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ satisfaz*

$$(1 - |g|^2)g_{z\bar{z}} + 2\bar{g}g_zg_{\bar{z}} = 0. \quad (3.9)$$

Esta igualdade se mantém quando $g \neq \infty$. Na vizinhança de um ponto, onde $g = \infty$, a aplicação g precisa ser substituída por $\frac{1}{g}$.

Corolário 1. *Seja $X : \Sigma \longrightarrow H_3$ uma imersão mínima conforme que não é vertical em nenhum ponto e suponha que o normal aponta para cima. Então sua aplicação de Gauss g toma valores no disco hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$ e é harmônica (na métrica hiperbólica).*

Demonstração. A terceira componente de N é $\frac{1 - |g|^2}{1 + |g|^2}$. Assim N satisfaz a condição do enunciado se, e somente se, $|g| < 1$, isto é, $g \in \mathbb{H}^2$.

Além disso, usando a equação (3.9) obtemos que

$$g_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{g}}{1 - |g|^2}g_zg_{\bar{z}} = 0,$$

o que significa que g é harmônica.

Isto ocorre, pois no caso particular de considerarmos a aplicação $g : \Sigma \rightarrow H^2 = \mathbb{D}$, onde $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$ está munido com a métrica $\frac{4|dw|^2}{(1 - |w|^2)^2}$, obtemos que g é harmônica quando:

$$g_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda(g(z))}\lambda_w(g(z))g_zg_{\bar{z}} = 0,$$

em que $\lambda(g(z)) = \frac{2}{1 - |g(z)|^2}$ e fazendo $g(z) = w$, obtemos que a equação harmônica é dada por:

$$g_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{g}}{1 - |g|^2}g_zg_{\bar{z}} = 0.$$

□

Para detalhes a respeito da equação harmônica, veja o apêndice para o caso geral.

Lema 3.1. *A imersão conforme X é mínima se, e somente se,*

$$\begin{cases} F_{z\bar{z}} = \frac{i}{8}|\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2}g, \\ \eta_{\bar{z}} + \bar{\eta}_z = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

A primeira equação em (3.10) é válida quando $g \neq 0, \infty$. Quando $g = 0, \infty$, significa que $F_{z\bar{z}} = 0$ (veja também a observação 4).

Demonstração. A imersão conforme X é mínima se, e somente se,

$$\nabla_{X_u}X_u + \nabla_{X_v}X_v = 0.$$

Observe que

$$X_z = \frac{1}{2}(X_u - iX_v) \text{ e } X_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(X_u + iX_v),$$

em que X_z e $X_{\bar{z}}$ são como na observação (3) e a componente de $X_z + X_{\bar{z}}$ na direção de E_3 é dada por $\frac{\eta + \bar{\eta}}{2}$.

Observe ainda que,

$$\begin{aligned} X_u &= (ReF)_u \frac{\partial}{\partial x_1} + (ImF)_u \frac{\partial}{\partial x_2} + h_u \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &= (ReF)_u \left(E_1 + \frac{ImF}{2} E_3 \right) + (ImF)_u \left(E_2 - \frac{ReF}{2} E_3 \right) + h_u E_3 \\ &= (ReF)_u E_1 + (ImF)_u E_2 + \left(\frac{(ReF)_u}{2} ImF - \frac{(ImF)_u}{2} ReF + h_u \right) E_3. \end{aligned}$$

Por outro lado, também podemos escrever

$$X_u = (ReF)_u E_1 + (ImF)_u E_2 + \frac{(\eta + \bar{\eta})}{2} E_3.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \nabla_{X_u} X_u &= \nabla_{X_u} (ReF)_u E_1 + (ImF)_u E_2 + \frac{(\eta + \bar{\eta})}{2} E_3 \\ &= \nabla_{X_u} (ReF)_u E_1 + \nabla_{X_u} (ImF)_u E_2 + \nabla_{X_u} \frac{(\eta + \bar{\eta})}{2} E_3 \\ &= (ReF)_{uu} E_1 + (ReF)_u \nabla_{X_u} E_1 + (ImF)_{uu} E_2 + (ImF)_u \nabla_{X_u} E_2 \\ &\quad + \frac{(\eta + \bar{\eta})_u}{2} E_3 + \frac{(\eta + \bar{\eta})}{2} \nabla_{X_u} E_3 \\ &= (ReF)_{uu} E_1 + (ReF)_u \left[- (ImF)_u \frac{E_3}{2} - \frac{(\eta + \bar{\eta})}{2} \frac{E_2}{2} \right] \\ &\quad + (ImF)_{uu} E_2 + (ImF)_u \left[(ReF)_u \frac{E_3}{2} + \frac{(\eta + \bar{\eta})}{2} \frac{E_1}{2} \right] \\ &\quad + \frac{(\eta + \bar{\eta})_u}{2} E_3 + \frac{(\eta + \bar{\eta})}{2} \left[- (ReF)_u \frac{E_2}{2} + (ImF)_u \frac{E_1}{2} \right] \\ &= \left((ReF)_{uu} + (ImF)_u \frac{(\eta + \bar{\eta})}{2} \right) E_1 + \left((ImF)_{uu} - (ReF)_u \frac{(\eta + \bar{\eta})}{2} \right) E_2 + \left(\frac{(\eta + \bar{\eta})_u}{2} \right) E_3, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \nabla_{X_u} X_u &= \left(\frac{(F + \bar{F})_{uu}}{2} + \frac{i(\bar{F} - F)_u (\eta + \bar{\eta})}{2} \right) E_1 + \left(\frac{i(\bar{F} - F)_{uu}}{2} - \frac{(F + \bar{F})_u (\eta + \bar{\eta})}{2} \right) E_2 \\ &\quad + \left(\frac{(\eta + \bar{\eta})_u}{2} \right) E_3. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$\nabla_{X_u} X_u = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(F + \bar{F})_{uu} + i(\bar{F} - F)_u(\eta + \bar{\eta}) \\ 2i(\bar{F} - F)_{uu} - (F + \bar{F})_u(\eta + \bar{\eta}) \\ 2(\eta + \bar{\eta})_u \end{bmatrix}.$$

De maneira análoga,

$$X_v = (ReF)_v E_1 + (ImF)_v E_2 + i \frac{(\eta - \bar{\eta})}{2} E_3.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \nabla_{X_v} X_v &= \nabla_{X_v} \left[(ReF)_v E_1 + (ImF)_v E_2 + i \frac{(\eta - \bar{\eta})}{2} E_3 \right] \\ &= \nabla_{X_v} (ReF)_v E_1 + \nabla_{X_v} (ImF)_v E_2 + \nabla_{X_v} i \frac{(\eta - \bar{\eta})}{2} E_3 \\ &= (ReF)_{vv} E_1 + (ReF)_v \nabla_{X_v} E_1 + (ImF)_{vv} E_2 + (ImF)_v \nabla_{X_v} E_2 \\ &\quad + i \frac{(\eta - \bar{\eta})_v}{2} E_3 + i \frac{(\eta - \bar{\eta})}{2} \nabla_{X_v} E_3 \\ &= (ReF)_{vv} E_1 + (ReF)_v \left[- (ImF)_v \frac{E_3}{2} - \frac{(\eta - \bar{\eta})}{4} E_2 \right] \\ &\quad + (ImF)_{vv} E_2 + (ImF)_v \left[(ReF)_v \frac{E_3}{2} + i \frac{(\eta - \bar{\eta})}{2} \frac{E_1}{2} \right] \\ &\quad + i \frac{(\eta - \bar{\eta})_v}{2} E_3 + i \frac{(\eta - \bar{\eta})}{2} \left[- (ReF)_v \frac{E_2}{2} + (ImF)_v \frac{E_1}{2} \right] \\ &= \left((ReF)_{vv} + i(ImF)_v \frac{(\eta - \bar{\eta})}{2} \right) E_1 + \left((ImF)_{vv} - i(ReF)_v \frac{(\eta - \bar{\eta})}{2} \right) E_2 + i \frac{(\eta - \bar{\eta})_v}{2} E_3. \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} \nabla_{X_v} X_v &= \left(\frac{(F + \bar{F})_{vv}}{2} + i^2 \frac{(\bar{F} - F)}{2} \frac{(\eta - \bar{\eta})}{2} \right) E_1 + \left(\frac{i(\bar{F} - F)_{vv}}{2} - i \frac{(F + \bar{F})_v (\eta - \bar{\eta})}{2} \right) E_2 \\ &\quad + i \frac{(\eta - \bar{\eta})_v}{2} E_3. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla_{X_v} X_v = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(F + \bar{F})_{vv} - (\bar{F} - F)_v(\eta - \bar{\eta}) \\ 2i(\bar{F} - F)_{vv} - i(F + \bar{F})_v(\eta - \bar{\eta}) \\ 2i(\eta - \bar{\eta})_v \end{bmatrix}.$$

A parte vertical de $\nabla_{X_u}X_u + \nabla_{X_v}X_v$ é dada pela soma das últimas coordenadas. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\eta + \bar{\eta})_u + \frac{i}{2}(\eta - \bar{\eta})_v &= \frac{1}{2}(\eta_u + \bar{\eta}_u) + \frac{i}{2}(\eta_v - \bar{\eta}_v) \\ &= \frac{1}{2}(\eta_u + i\eta_v) + \frac{1}{2}(\bar{\eta}_u - i\bar{\eta}_v) \\ &= \eta_{\bar{z}} + \bar{\eta}_z.\end{aligned}$$

E, portanto, a parte vertical de $\nabla_{X_u}X_u + \nabla_{X_v}X_v$ será igual a zero se, e somente se,

$$\eta_{\bar{z}} + \bar{\eta}_z = 0.$$

Já para a parte horizontal de $\nabla_{X_u}X_u + \nabla_{X_v}X_v$ somamos as duas primeiras coordenadas de cada conexão e fazendo um cálculo análogo encontramos que a condição para que a parte horizontal de $\nabla_{X_u}X_u + \nabla_{X_v}X_v$ seja igual a zero:

$$F_{z\bar{z}} = \frac{i}{4}(\bar{\eta}F_z + \eta F_{\bar{z}}).$$

Quando $g \neq 0, \infty$, concluímos usando (3.7). Quando $g = 0, \infty$, temos que $\eta = 0$, e portanto, $F_{z\bar{z}} = 0$, o que conclui a prova. $\square$

Demonstração. (Teorema 3.1.1).

Considere um domínio no qual $g \neq 0$, isto é, sobre o qual $F_z \neq 0$ e substitua F_z e $F_{\bar{z}}$ usando a equação (3.7). Ainda utilizando a equação (3.7) temos que

$$g = \frac{2F_{\bar{z}}}{\bar{\eta}} \text{ e } \bar{g} = -\frac{\eta}{2F_z}, \quad (3.11)$$

ou ainda,

$$g = \overline{(\bar{g})} = -\frac{\bar{\eta}}{2\bar{F}_{\bar{z}}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}g^2 &= \frac{2F_{\bar{z}}}{\bar{\eta}} \left(-\frac{\bar{\eta}}{2\bar{F}_{\bar{z}}} \right) \\ &= -\frac{F_{\bar{z}}}{\bar{F}_{\bar{z}}}.\end{aligned} \quad (3.12)$$

Derivando agora a equação (3.12) com respeito a z obtemos que

$$\begin{aligned}2gg_z &= -\frac{F_{\bar{z}z}\bar{F}_{\bar{z}} + F_{\bar{z}}\bar{F}_{\bar{z}z}}{(\bar{F}_{\bar{z}})^2} \\ &= -\frac{F_{\bar{z}z}}{\bar{F}_{\bar{z}}} + \frac{F_{\bar{z}}\bar{F}_{\bar{z}z}}{(\bar{F}_{\bar{z}})^2}.\end{aligned}$$

Por (3.10),

$$2gg_z = -\frac{i}{8}|\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} g \left(\frac{1}{\bar{F}_{\bar{z}}} \right) - \left(\frac{g\bar{\eta}}{2} \right) \frac{i}{8}|\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} \bar{g} \left(\frac{1}{(\bar{F}_{\bar{z}})^2} \right). \quad (3.13)$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\bar{F}_z)^2} &= \frac{1}{\left(-\frac{\bar{\eta}}{2g}\right)^2} \\ &= \frac{4g^2}{\bar{\eta}^2}.\end{aligned}$$

Retornando a (3.13),

$$\begin{aligned}2gg_z &= -\frac{i}{8}|\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} g \left(-\frac{2g}{\bar{\eta}}\right) - \left(\frac{g\bar{\eta}}{2}\right) \frac{i}{8}|\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} \bar{g} \left(-\frac{2g}{\bar{\eta}}\right)^2 \\ &= \frac{i}{4}|\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} \frac{g^2}{\bar{\eta}} - \frac{ig\bar{\eta}}{16}|\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} \bar{g} \left(\frac{4g^2}{\bar{\eta}^2}\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}2g_z &= \frac{i}{4}|\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} \frac{g}{\bar{\eta}} - \frac{i}{4} \frac{|\eta|^2}{\bar{\eta}} (|g|^2 - 1)g \\ &= \frac{i}{4} \frac{|\eta|^2 g}{\bar{\eta}} (|g|^2 - 1) \left(\frac{1}{|g|^2} - 1\right) \\ &= \frac{i}{4} \frac{|\eta|^2 g}{\bar{\eta}} (|g|^2 - 1) \left(\frac{1 - |g|^2}{|g|^2}\right) \\ &= \frac{i}{4} \frac{|\eta|^2 g}{\bar{\eta}} (-1 + |g|^2) \left(\frac{-(-1 + |g|^2)}{|g|^2}\right) \\ &= -\frac{i}{4} \frac{\eta\bar{\eta}g}{\bar{\eta}} (-1 + |g|^2) \left(\frac{-1 + |g|^2}{|g|^2}\right) \\ &= -\frac{i}{4} \eta g \frac{(1 - |g|^2)^2}{g\bar{g}} \\ &= -\frac{i}{4} \eta \frac{(1 - |g|^2)^2}{\bar{g}},\end{aligned}$$

ou ainda

$$g_z = \frac{i}{4} \left(-\frac{\eta}{2\bar{g}}\right) (1 - |g|^2)^2$$

Logo,

$$g_z = \frac{i}{4} F_z (1 - |g|^2)^2. \quad (3.14)$$

Por continuidade esta equação também ocorre quando $g = 0$.

Agora, derivando (3.14) com respeito a $\bar{z}$,

$$\begin{aligned} g_{z\bar{z}} &= \frac{i}{4} \left[F_{z\bar{z}}(1 - |g|^2)^2 + 2F_z(1 - |g|^2)(1 - |g|^2)_{\bar{z}} \right] \\ &= \frac{i}{4} \left[F_{z\bar{z}}(1 - |g|^2)^2 + 2F_z(1 - |g|^2)(-g_z\bar{g} - g\bar{g}_{\bar{z}}) \right]. \end{aligned}$$

Utilizando a expressão de $F_{z\bar{z}}$ dada em (3.10)

$$g_{z\bar{z}} = \frac{i}{4} \left[\frac{i}{8} |\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} g(1 - |g|^2)^2 - 2F_z(1 - |g|^2)(g_z\bar{g} + g\bar{g}_{\bar{z}}) \right] \quad (3.15)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.15) por $(1 - |g|^2)$

$$\begin{aligned} (1 - |g|^2)g_{z\bar{z}} &= \frac{i}{4} \left[\frac{i}{8} |\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} g(1 - |g|^2)^3 - 2F_z(1 - |g|^2)^2(g_z\bar{g} + g\bar{g}_{\bar{z}}) \right] \\ &= -\frac{1}{32} |\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} g(1 - |g|^2)^3 - \frac{i}{2} F_z(1 - |g|^2)^2(g_z\bar{g} + g\bar{g}_{\bar{z}}) \end{aligned}$$

Substituindo (3.14)

$$\begin{aligned} (1 - |g|^2)g_{z\bar{z}} &= -\frac{1}{32} |\eta|^2 \frac{(|g|^2 - 1)}{|g|^2} g(1 - |g|^2)^3 - 2g_z g_z \bar{g} - 2g_z g \bar{g}_{\bar{z}} \\ &= -\frac{|\eta|^2 (|g|^2 - 1)}{32 |g|^2} g(1 - |g|^2)^3 - 2g_z g_z \bar{g} - 2g_z g \bar{g}_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (1 - |g|^2)g_{z\bar{z}} + 2g_z g_z \bar{g} &= -\frac{|\eta|^2 (|g|^2 - 1)}{32 |g|^2} g(1 - |g|^2)^3 - 2g_z g \bar{g}_{\bar{z}} \\ &= \frac{|\eta|^2 (1 - |g|^2)^4}{32 |g|^2} g - 2g_z g \bar{g}_{\bar{z}} \\ &= \frac{|\eta|^2 (1 - |g|^2)^4}{32 |g|^2} g - 2|g_z|^2 g. \end{aligned}$$

Substituindo $|g_z|^2$ e $|F_z|^2$,

$$\begin{aligned} (1 - |g|^2)g_{z\bar{z}} + 2g_z g_z \bar{g} &= \frac{|\eta|^2 (1 - |g|^2)^4}{32 |g|^2} g - 2 \frac{|F_z|^2 (1 - |g|^2)^4}{16} g \\ &= \frac{|\eta|^2 (1 - |g|^2)^4}{32 |g|^2} g - \frac{|F_z|^2 (1 - |g|^2)^4}{8} g \\ &= \frac{|\eta|^2 (1 - |g|^2)^4}{32 |g|^2} g - \frac{|\eta|^2}{32 |g|^2} (1 - |g|^2)^4 g. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$(1 - |g|^2)g_{z\bar{z}} + 2g_z g_z \bar{g} = 0,$$

como queríamos. Usando a mesma ideia na vizinhança de um ponto onde $g = \infty$, é possível mostrar que $\frac{1}{g}$ satisfaz a equação (3.9). $\square$

Observação 6. Se $|g| \equiv 1$ em um aberto, então por (3.9) temos que g é constante, já que $\bar{g} \neq 0$. E com isso obtemos usando (3.7) que $\bar{g}F + g\bar{F}$ é constante.

De fato, derivando $\bar{g}F + g\bar{F}$ com respeito a $\bar{z}$ e usando a equação (3.7) temos que

$$\begin{aligned} (\bar{g}F + g\bar{F})_{\bar{z}} &= \bar{g}_{\bar{z}}F + \bar{g}F_{\bar{z}} + g_{\bar{z}}\bar{F} + g\bar{F}_{\bar{z}} \\ &= \bar{g}F_{\bar{z}} + g\bar{F}_{\bar{z}} \\ &= \bar{g}g\frac{\bar{\eta}}{2} + g\bar{F}_{\bar{z}} \\ &= |g|^2\frac{\bar{\eta}}{2} + g\bar{F}_{\bar{z}} \\ &= \frac{\bar{\eta}}{2} - \frac{\bar{\eta}}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (\bar{g}F + g\bar{F})_z &= \bar{g}_zF + \bar{g}F_z + g_z\bar{F} + g\bar{F}_z \\ &= \bar{g}F_z + g\bar{F}_z \\ &= -\frac{\eta}{2} + |g|^2\frac{\eta}{2} \\ &= -\frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sendo $|g| \equiv 1$, então a terceira coordenada de N será igual a zero e temos então que $X(\Sigma)$ é um plano vertical, isto é, uma superfície com equação

$$ax_1 + bx_2 = c,$$

onde $(a, b) \neq (0, 0)$ e $c \in \mathbb{R}$. Além de ser uma superfície plana, também é mínima, pois sua curvatura média é igual a zero, como visto no lema 3.1, pois $\nabla_{X_u}X_u + \nabla_{X_v}X_v = 0$.

Proposição 3.1.2. Seja $X : \Sigma \longrightarrow H_3$ uma imersão mínima conforme tal que $X(\Sigma)$ não é um plano vertical. Seja (g, η) os seus dados de Weierstrass. Então

$$\eta = 8i \frac{\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2} \quad (3.16)$$

e a métrica induzida em Σ por X é

$$ds^2 = 16 \frac{(1 + |g|^2)^2}{(1 - |g|^2)^4} |g_z|^2 |dz|^2. \quad (3.17)$$

Essas expressões ocorrem em pontos onde $|g| \neq 1, \infty$, e se estendem suavemente em pontos onde $|g| = 1, \infty$. Em particular, se $|g| < 1$, então g não é antiholomorfa em nenhum ponto (ou seja, g_z nunca se anula).

Demonstração. Observe inicialmente que a equação (3.16) vem de (3.7) e (3.14) pois:

$$\begin{aligned} g_z &= \frac{i}{4} F_z (1 - |g|^2)^2 \\ &= \frac{i}{4} \left(-\frac{\eta}{2\bar{g}} \right) (1 - |g|^2)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$8\bar{g}g_z = -i\eta(1 - |g|^2)^2$$

Segue que

$$\frac{8\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2} = -i\eta,$$

ou ainda,

$$\frac{8i\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2} = \eta.$$

Já para a equação (3.17), utilizamos (3.7). Como

$$\bar{g}F_z = -\frac{\eta}{2}, \text{ então } \overline{(F_z)} = -\frac{\bar{\eta}}{2g}.$$

Usando a equação (3.16), podemos escrever

$$2\bar{g}F_z = -\eta = -\frac{8i\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2},$$

ou seja,

$$F_z = \frac{-4ig_z}{(1 - |g|^2)^2}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por $\overline{(F_z)}$,

$$F_z \overline{(F_z)} = \frac{-4ig_z}{(1 - |g|^2)^2} \overline{(F_z)}.$$

Logo,

$$|F_z|^2 = \frac{2ig_z}{(1 - |g|^2)^2} \frac{\bar{\eta}}{g},$$

onde $\eta = \frac{8i\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2}$. Desse modo,

$$\begin{aligned} |F_z|^2 &= \frac{2ig_z}{(1 - |g|^2)^2} \left[\frac{-8ig(\bar{g}_z)}{(1 - |g|^2)^2} \frac{1}{g} \right] \\ &= \frac{-16i^2|g_z|^2}{(1 - |g|^2)^4} \\ &= \frac{16|g_z|^2}{(1 - |g|^2)^4}. \end{aligned}$$

Ainda utilizando a equação (3.7), temos que

$$F_{\bar{z}} = \frac{g\bar{\eta}}{2}, \text{ e portanto } \overline{(F_{\bar{z}})} = (\bar{F})_z = \frac{\bar{g}\eta}{2}.$$

E usando a equação (3.16),

$$\begin{aligned} F_{\bar{z}} &= \frac{g}{2} \frac{(-8ig(\overline{g_z}))}{(1-|g|^2)^2} \\ &= \frac{-4ig^2(\overline{g_z})}{(1-|g|^2)^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da equação anterior por $(\bar{F})_z$, obtemos:

$$\begin{aligned} |F_{\bar{z}}|^2 = F_{\bar{z}}(\bar{F})_z &= \frac{-4ig^2(\overline{g_z})}{(1-|g|^2)^2} (\bar{F})_z \\ &= \frac{-4ig^2(\overline{g_z})}{(1-|g|^2)^2} \frac{\bar{g}\eta}{2} \\ &= \frac{-2ig^2(\overline{g_z})\bar{g}}{(1-|g|^2)^2} \frac{8i\bar{g}g_z}{(1-|g|^2)^2} \\ &= \frac{-16i^2g^2\bar{g}^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4} \\ &= \frac{16|g|^4|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\eta|^2 &= \eta \cdot \bar{\eta} \\ &= \frac{8i\bar{g}g_z}{(1-|g|^2)^2} \left(-\frac{8ig(\overline{g_z})}{(1-|g|^2)^2} \right) \\ &= -\frac{64i^2|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4} \\ &= \frac{64|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{2} \left(|F_z|^2 + |F_{\bar{z}}|^2 + \frac{1}{4} |\eta|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{16|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4} + \frac{16|g|^4|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4} + \frac{1}{4} \left(\frac{64|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4} \right) \right] \\ &= \frac{8|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4} + \frac{8|g|^4|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4} + \left(\frac{16|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4} \right) \\ &= \frac{8|g_z|^2 + 8|g|^4|g_z|^2 + 16|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4} \\ &= \frac{8|g_z|^2(1 + |g|^4 + 2|g|^2)}{(1-|g|^2)^4} \\ &= 8 \frac{(1 + |g|^2)^2}{(1-|g|^2)^4} |g_z|^2. \end{aligned}$$

Assim a métrica induzida em Σ por X é dada por

$$ds^2 = 2\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle |dz|^2.$$

E portanto,

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2 \left[8 \frac{(1 + |g|^2)^2}{(1 - |g|^2)^4} |g_z|^2 |dz|^2 \right] \\ &= 16 \frac{(1 + |g|^2)^2}{(1 - |g|^2)^4} |g_z|^2 |dz|^2, \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Teorema 3.1.2. *Sejam Σ uma superfície de Riemann simplesmente conexa e $g : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^2$ uma aplicação harmônica que não é antiholomorfa em nenhum ponto. Seja $z_0 \in \Sigma$, $F_0 \in \mathbb{C}$ e $h_0 \in \mathbb{R}$. Então existe uma única imersão mínima conforme $X : \Sigma \longrightarrow H_3$ tal que g é a aplicação de Gauss de X e $X(z_0) = (F_0, h_0)$.*

Além disso, a imersão $X = (F, h)$ satisfaz

$$\begin{aligned} F_z &= -4i \frac{g_z}{(1 - |g|^2)^2}, \quad F_{\bar{z}} = -4i \frac{g^2 \bar{g}_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^2} \\ h_z &= 4i \frac{\bar{g} g_z}{(1 - |g|^2)^2} - \frac{i}{4} (\bar{F} F_z - F \bar{F}_{\bar{z}}). \end{aligned}$$

Demonstração. Inicialmente vamos recuperar a parte horizontal F . Para isso afirmamos que o sistema

$$\begin{cases} F_z = -4i \frac{g_z}{(1 - |g|^2)^2}, \\ F_{\bar{z}} = -4i \frac{g^2 \bar{g}_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^2}, \end{cases} \quad (3.18)$$

possui uma única solução $F : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $F(z_0) = F_0$. De fato, definindo

$$A = -4i \frac{g_z}{(1 - |g|^2)^2} \quad \text{e} \quad B = -4i \frac{g^2 \bar{g}_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^2}, \quad (3.19)$$

é suficiente verificar que $A_{\bar{z}} = B_z$, pois como Σ é simplesmente conexa segue do teorema de Frobenius a existência de uma única solução F com as condições iniciais dadas. Vejamos que isso realmente ocorre

$$\begin{aligned} A_{\bar{z}} &= \frac{(-4i g_z)_{\bar{z}} (1 - |g|^2)^2 + i 4 g_z [(1 - |g|^2)^2]_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^4} \\ &= \frac{-4i g_{z\bar{z}} (1 - |g|^2)^2 + 8i g_z (1 - |g|^2) (1 - g\bar{g})_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^4} \\ &= \frac{-4i g_{z\bar{z}} (1 - |g|^2)^2 + 8i g_z (1 - |g|^2) (-g\bar{g}_{\bar{z}} - g_{\bar{z}}\bar{g})}{(1 - |g|^2)^4}, \end{aligned}$$

agrupando,

$$\begin{aligned}
&= \frac{-4ig_{z\bar{z}}(1-|g|^2)^2 - 8ig_z(1-|g|^2)g_{\bar{z}}\bar{g} - 8ig_z(1-|g|^2)g\bar{g}_{\bar{z}}}{(1-|g|^2)^4} \\
&= \frac{(1-|g|^2) \left[-4ig_{z\bar{z}}(1-|g|^2) - 8ig_zg_{\bar{z}}\bar{g} - 8ig_zg\bar{g}_{\bar{z}} \right]}{(1-|g|^2)^4} \\
&= \frac{-4ig_{z\bar{z}}(1-|g|^2) - 8ig_zg_{\bar{z}}\bar{g} - 8ig_zg\bar{g}_{\bar{z}}}{(1-|g|^2)^3} \\
&= \frac{-4i \left[g_{z\bar{z}}(1-|g|^2) + 2g_zg_{\bar{z}}\bar{g} \right] - 8ig_zg\bar{g}_{\bar{z}}}{(1-|g|^2)^3} \\
&= -\frac{8ig_zg\bar{g}_{\bar{z}}}{(1-|g|^2)^3},
\end{aligned}$$

já que g é harmônica.

Agora derivando B com respeito a z ,

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{(-4ig^2\bar{g}_{\bar{z}})_z(1-|g|^2)^2 - (-4ig^2\bar{g})[(1-|g|^2)^2]_z}{[(1-|g|^2)^2]^2} \\
&= \frac{-4i(2gg_z\bar{g}_{\bar{z}} + g^2\bar{g}_{\bar{z}z})(1-|g|^2)^2 + 8ig^2\bar{g}_{\bar{z}}(1-|g|^2)(1-|g|^2)_z}{(1-|g|^2)^4} \\
&= \frac{(1-|g|^2) \left[-4i(2gg_z\bar{g}_{\bar{z}} + g^2\bar{g}_{\bar{z}z})(1-|g|^2) + 8ig^2\bar{g}_{\bar{z}}(-g_z\bar{g} - g\bar{g}_z) \right]}{(1-|g|^2)^4} \\
&= \frac{-4i(2gg_z\bar{g}_{\bar{z}} + g^2\bar{g}_{\bar{z}z})(1-|g|^2) - 8ig^2\bar{g}_{\bar{z}}(g_z\bar{g} + g\bar{g}_z)}{(1-|g|^2)^3} \\
&= \frac{-4i(2gg_z\bar{g}_{\bar{z}} + g^2\bar{g}_{\bar{z}z})(1-|g|^2) - 8ig^2\bar{g}_{\bar{z}}g_z\bar{g} - 8ig^2\bar{g}_{\bar{z}}g\bar{g}_z}{(1-|g|^2)^3} \\
&= \frac{-4ig^2(\bar{g}_{\bar{z}z}(1-|g|^2) + 2g\bar{g}_{\bar{z}}\bar{g}_z) - 8igg_z\bar{g}_{\bar{z}}(1-|g|^2) - 8ig^2\bar{g}_{\bar{z}}g_z\bar{g}}{(1-|g|^2)^3},
\end{aligned}$$

e como g é harmônica segue que

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{-8igg_z\bar{g}_{\bar{z}}(1-|g|^2) - 8ig^2\bar{g}_{\bar{z}}g_z\bar{g}}{(1-|g|^2)^3} \\
&= \frac{-8igg_z\bar{g}_{\bar{z}} + 8igg_z\bar{g}_{\bar{z}}|g|^2 - 8ig^2\bar{g}_{\bar{z}}g_z\bar{g}}{(1-|g|^2)^3} \\
&= \frac{-8igg_z\bar{g}_{\bar{z}} + 8ig^2\bar{g}_{\bar{z}}g_z\bar{g} - 8ig^2\bar{g}_{\bar{z}}g_z\bar{g}}{(1-|g|^2)^3} \\
&= \frac{-8igg_z\bar{g}_{\bar{z}}}{(1-|g|^2)^3}.
\end{aligned}$$

Logo, $A_{\bar{z}} = B_z = \frac{-8igg_z\bar{g}_{\bar{z}}}{(1-|g|^2)^3}$, como queríamos.

Agora vamos recuperar a função h . Tomando

$$\eta = \frac{8i\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2}, \quad (3.20)$$

afirmamos que a equação diferencial

$$h_z = \frac{1}{2}\eta - \frac{i}{4}(\bar{F}F_z - F\bar{F}_z). \quad (3.21)$$

tem uma única solução $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $h(z_0) = h_0$. Vejamos que é suficiente mostrar que

$$\left(\frac{1}{2}\eta - \frac{i}{4}(\bar{F}F_z - F\bar{F}_z) \right)_{\bar{z}} \in \mathbb{R}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} h_{z\bar{z}} &= \left(\frac{\eta}{2} \right)_{\bar{z}} - \left(\frac{i}{4}(\bar{F}F_z - F\bar{F}_z) \right)_{\bar{z}} \\ &= \left(\frac{4i\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2} \right)_{\bar{z}} - \frac{i}{4}(\bar{F}_{\bar{z}}F_z + \bar{F}F_{z\bar{z}} - F_{\bar{z}}\bar{F}_z - F\bar{F}_{z\bar{z}}) \\ &= \left(\frac{4i\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2} \right)_{\bar{z}} - \frac{i}{4}(|F_z|^2 + \bar{F}F_{z\bar{z}} - |F_{\bar{z}}|^2 - F\bar{F}_{z\bar{z}}). \end{aligned}$$

Como $\eta = \frac{8i\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2}$, temos que

$$\begin{aligned} \eta_{\bar{z}} &= \left(\frac{8i\bar{g}g_z}{(1 - |g|^2)^2} \right)_{\bar{z}} \\ &= \frac{8i(\bar{g}_{\bar{z}}g_z + \bar{g}g_{z\bar{z}})(1 - |g|^2)^2 - 8i\bar{g}g_z[(1 - |g|^2)^2]_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^4} \\ &= \frac{8i(|g_z|^2 + \bar{g}g_{z\bar{z}})(1 - |g|^2)^2 - 16i\bar{g}g_z(1 - |g|^2)(-g_{\bar{z}}\bar{g} - g\bar{g}_{\bar{z}})}{(1 - |g|^2)^4}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{\bar{z}}}{2} &= \frac{4i(|g_z|^2 + \bar{g}g_{z\bar{z}})(1 - |g|^2) - 8i\bar{g}g_z(-g_{\bar{z}}\bar{g} - g\bar{g}_{\bar{z}})}{(1 - |g|^2)^3} \\ &= \frac{4i(|g_z|^2 + \bar{g}g_{z\bar{z}})(1 - |g|^2) + 8i\bar{g}g_z(g_{\bar{z}}\bar{g} + g\bar{g}_{\bar{z}})}{(1 - |g|^2)^3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\eta_{\bar{z}}}{2} = \frac{4i(|g_z|^2 + \bar{g}g_{z\bar{z}})(1 - |g|^2) + 8i\bar{g}^2g_zg_{\bar{z}} + 8i|g|^2|g_z|^2}{(1 - |g|^2)^3}. \quad (3.22)$$

Além disso, por (3.18) temos

$$F_z = \frac{-4ig_z}{(1 - |g|^2)^2} \text{ e } F_{\bar{z}} = \frac{-4ig^2\bar{g}_{\bar{z}}}{(1 - |g|^2)^2}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\bar{F}_{\bar{z}}F_z &= |F_z|^2 \\ &= \left| \frac{-4ig_z}{(1-|g|^2)^2} \right|^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{F}_{\bar{z}}F_z = \frac{16|g_z|^2}{(1-|g|^2)^4}. \quad (3.23)$$

De maneira análoga,

$$F_{\bar{z}}\bar{F}_z = |F_{\bar{z}}|^2 = \frac{16|g_z|^2|g|^4}{(1-|g|^2)^4}. \quad (3.24)$$

Sendo assim, por (3.22), (3.23) e (3.24)

$$\begin{aligned}h_{z\bar{z}} &= \frac{4i(|g_z|^2 + \bar{g}g_{z\bar{z}})(1-|g|^2) + 8i\bar{g}^2g_zg_{\bar{z}} + 8i|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^3} + \frac{(-16|g_z|^2 + 16|g_z|^2|g|^4)}{4(1-|g|^2)^4} + \frac{i}{4}(F\bar{F}_{z\bar{z}} - \bar{F}F_{z\bar{z}}) \\ &= \frac{4i(1-|g|^2)|g_{\bar{z}}|^2 + 4i\bar{g}(g_{z\bar{z}}(1-|g|^2) + 2\bar{g}g_zg_{\bar{z}}) + 8i|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^3} + \frac{4i|g_z|^2(|g|^4 - 1)}{(1-|g|^2)^4} + \frac{i}{4}(F\bar{F}_{z\bar{z}} - \bar{F}F_{z\bar{z}}) \\ &= \frac{4i|g_z|^2 - 4i|g|^2|g_{\bar{z}}|^2}{(1-|g|^2)^3} + \frac{8i|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^3} + \frac{4i|g_z|^2(|g|^4 - 1)}{(1-|g|^2)^4} + \frac{i}{4}(F\bar{F}_{z\bar{z}} - \bar{F}F_{z\bar{z}}),\end{aligned}$$

já que g é harmônica. Assim,

$$\begin{aligned}h_{z\bar{z}} &= \frac{4i|g_z|^2 - 4i|g|^2|g_{\bar{z}}|^2}{(1-|g|^2)^3} - \frac{4i|g_z|^2(1-|g|^2)}{(1-|g|^2)^3} + \frac{i}{4}(F\bar{F}_{z\bar{z}} - \bar{F}F_{z\bar{z}}) \\ &= \frac{4i|g_z|^2 - 4i|g|^2|g_{\bar{z}}|^2}{(1-|g|^2)^3} - \frac{4i|g_z|^2(1-|g|^2)(1+|g|^2)}{(1-|g|^2)^3} + \frac{i}{4}(F\bar{F}_{z\bar{z}} - \bar{F}F_{z\bar{z}}) \\ &= \frac{4i|g_z|^2 - 4i|g|^2|g_{\bar{z}}|^2}{(1-|g|^2)^3} - \frac{4i|g_z|^2(1+|g|^2)}{(1-|g|^2)^3} + \frac{i}{4}(F\bar{F}_{z\bar{z}} - \bar{F}F_{z\bar{z}}) \\ &= \frac{i}{4}(F\bar{F}_{z\bar{z}} - \bar{F}F_{z\bar{z}}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{i}{2} (F\bar{F}_{z\bar{z}} - \bar{F}F_{z\bar{z}}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{F}F_{z\bar{z}}) \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

e, portanto, $h_{z\bar{z}} \in \mathbb{R}$.

Tomando $X = (F, h) : \Sigma \longrightarrow H_3$, vejamos que X satisfaz as conclusões do teorema.

Note que da forma que X está definida, vale que $X(z_0) = (F_0, h_0)$, uma vez que a solução do sistema (3.18) existe e é única mediante as condições iniciais dadas.

Por (3.21), temos que $\eta = 2\langle E_3, X_z \rangle$.

Além disso, usando (3.18) e (3.20), temos que (3.4) é satisfeita, pois

$$\begin{aligned}
F_z \bar{F}_z &= \frac{-4ig_z}{(1-|g|^2)^2} \frac{+4i\bar{g}^2\bar{g}_z}{(1-|g|^2)^2} \\
&= \frac{-16i^2 g_z^2 \bar{g}^2}{(1-|g|^2)^4} \\
&= \frac{16g_z^2 \bar{g}^2}{(1-|g|^2)^4},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$F_z \bar{F}_z = -\frac{\eta^2}{4}.$$

E portanto X é uma aplicação conforme. Temos ainda que

$$\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2} \left(|F_z|^2 + |F_z|^2 + \frac{1}{4} |\eta|^2 \right) > 0,$$

desde que g_z não se anule e conseqüentemente X é uma imersão.

Também podemos observar que (3.7) ocorre pois como $F_z = \frac{-4ig_z}{(1-|g|^2)^2}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\bar{g}F_z &= \frac{-4i\bar{g}g_z}{(1-|g|^2)^2} \\
&= -\frac{8i\bar{g}g_z}{2(1-|g|^2)^2} \\
&= \frac{-\eta}{2},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F_{\bar{z}} &= \frac{-4ig^2\bar{g}_z}{(1-|g|^2)^2} \\
&= \frac{g}{2} \frac{(-8ig\bar{g}_z)}{(1-|g|^2)^2} \\
&= \frac{g}{2}\bar{\eta},
\end{aligned}$$

o que significa que g é a aplicação de Gauss de X . Finalmente, (3.18) ocorre, já que:

$$\begin{aligned}
F_{z\bar{z}} &= \frac{-8ig g_z \bar{g}_z}{(1-|g|^2)^3} \\
&= \frac{-8ig|g_z|^2}{(1-|g|^2)^3} \\
&= \frac{i}{8} \frac{64|g|^2|g_z|^2(|g|^2-1)}{(1-|g|^2)^4|g|^2} g \\
&= \frac{i}{8} |\eta|^2 \frac{(|g|^2-1)}{|g|^2} g.
\end{aligned}$$

E como $\eta = \frac{8i\bar{g}g_z}{(1-|g|^2)^2}$, já vimos que

$$\eta_{\bar{z}} = \frac{8i(|g_z|^2 + \bar{g}g_{z\bar{z}})(1-|g|^2) + 16i\bar{g}^2g_zg_{\bar{z}} + 16i|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^3},$$

e,

$$\bar{\eta}_z = -\frac{8i(|g_z|^2 + g\bar{g}_{z\bar{z}})(1-|g|^2) - 16ig^2\bar{g}_{\bar{z}}\bar{g}_z - 16i|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \eta_{\bar{z}} + \eta_z &= \frac{8i(|g_z|^2 + \bar{g}g_{z\bar{z}})(1-|g|^2) + 16i\bar{g}^2g_zg_{\bar{z}} + 16i|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^3} \\ &\quad - \frac{8i(|g_z|^2 + g\bar{g}_{z\bar{z}})(1-|g|^2) - 16ig^2\bar{g}_{\bar{z}}\bar{g}_z - 16i|g|^2|g_z|^2}{(1-|g|^2)^3} \\ &= \frac{8i|g_z|^2(1-|g|^2) + 8i\bar{g}g_{z\bar{z}}(1-|g|^2) + 16i\bar{g}^2g_zg_{\bar{z}} - 8i|g_z|^2(1-|g|^2)}{(1-|g|^2)^3} \\ &\quad - \frac{-8ig\bar{g}_{z\bar{z}}(1-|g|^2) - 16ig^2\bar{g}_{\bar{z}}\bar{g}_z}{(1-|g|^2)^3}, \end{aligned}$$

usando a hipótese que g é harmônica, então vale que $(1-|g|^2)g_{z\bar{z}} + 2\bar{g}g_zg_{\bar{z}} = 0$ e com isso,

$$\eta_{\bar{z}} + \eta_z = 0,$$

ou seja, X é mínima. □

Conclusão

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, investigamos a geometria do grupo de Heisenberg (H_3), com o objetivo de analisar a aplicação de Gauss de superfícies orientadas imersas nesse ambiente, destacando suas propriedades geométricas e implicações na teoria das superfícies.

Inicialmente, revisamos a estrutura de H_3 enquanto grupo de Lie nilpotente, apresentando sua álgebra de Lie, a métrica invariante à esquerda, bem como a conexão, a curvatura e o grupo de isometrias associado.

Além disso, estudamos a aplicação de Gauss de superfícies em grupos de Lie tridimensionais. A generalização deste conceito permitiu estudarmos a geometria das superfícies em grupos de Lie de maneira semelhante ao que é feito no espaço euclidiano, mas adaptado à estrutura do grupo. Verificamos em particular, que a aplicação de Gauss de uma superfície orientada nesse novo ambiente pode ser considerada como uma aplicação que toma seus valores na esfera unitária da álgebra de lie.

Ao considerarmos imersões conformes, com base nos resultados demonstrados por Benoît Daniel, analisamos teoremas fundamentais relacionados à aplicação de Gauss no contexto do grupo de Heisenberg. Dentre esses, destacam-se dois resultados centrais: I) Harmonicidade da aplicação de Gauss: A aplicação de Gauss de uma superfície mínima em H_3 , que não seja vertical em nenhum ponto, é uma aplicação harmônica no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ (munido da métrica hiperbólica); II) Caracterização inversa: Toda aplicação harmônica em $\mathbb{H}^2$, que não seja antiholomorfa em nenhum ponto, corresponde à aplicação de Gauss de uma superfície mínima em H_3 .

Por fim, o apêndice complementa a pesquisa ao reunir definições auxiliares e resultados relevantes que fundamentam a abordagem adotada.

A dissertação apresentada contribui para a compreensão das superfícies em espaços com estrutura não euclidiana, como o grupo de Heisenberg, além de envolver diversos outros temas importantes na pesquisa matemática, o que a torna mais rica em seu estudo.

Referências Bibliográficas

- [1] BIEZUNER, Rodney Josué. Notas de aula de Geometria Riemanniana. UFMG, Minas Gerais, 2016.
- [2] BENOÎT, Daniel. *The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg group*. Math. Res. Not. IMRN, (3):674–695, 2011.
- [3] BRYANT, Robert L. *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*. Société mathématique de France, 1987.
- [4] CAMBRAIA JÚNIOR, Ady. *Imersões mínimas e conformes em $M^2 \times \mathbb{R}$* . PUC-Rio, 2009. (Dissertação de Mestrado em Matemática Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, para obtenção do grau de Mestre em Matemática).
- [5] CAMINHA, Antonio Muniz Neto. *Tópicos de Geometria Diferencial*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [6] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. (Coleção projeto Euclides).
- [7] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia. Notas de aula de Geometria Diferencial, UFF, Rio de Janeiro, Brasil.
- [8] FERNANDÉZ, Izabel; MIRA, Pablo. Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in $H^2 \times \mathbb{R}$. Amer. J. Math., 129(4):1145-1181, 2007.
- [9] FIGUEROA, Christiam. *The Gauss map of Minimal graphs in the Heisenberg group*. Journal of Geometry and Symmetry in Physics: June 2011.
- [10] GNERI, Paula Olga. *Superfícies Mínimas no grupo de Heisenberg*. Unicamp, Campinas, São Paulo, 2007.
- [11] LACERDA, Conrado Damato de. *Introdução aos grupos de Lie: e às variedades diferenciáveis*. UFSC, 2007.
- [12] LÓPEZ, Rafael, INOUCHI, Jun-Ich, MUNTEANU, Marian Ioan José Edson. *Minimal translation surfaces in the heisenberg group nil_3* . arXiv: 1109.1628v1. (Geometriae Dedicata). Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1109.1628>.
- [13] MARTIN, Luiz A. B. San. *Grupos de Lie*. 15 de Agosto de 2011.
- [14] MERCURI, F; MONTALDO, S; PIU, P. *A Weirstrass representation formula for minimal surfaces in $\mathbb{H}_3$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . Acta Mathematica Sinica, v. 22, Springer, 2006.

- [15] SÁ EARP, Ricardo; TOUBIANA, Eric . *Screw Motion Surfaces in $H^2 \times R$ and $S^2 \times R$* . Illinois Journal of Mathematics, USA, v. 49, n.4, p. 1323-1362, 2005.
- [16] SAMPAIO, José Edson. *A aplicação de Gauss de superfícies mínimas no espaço de Heisenberg*. Fortaleza, 2012.(Dissertação de Mestrado em Matemática à Universidade Federal do Ceará, para obtenção do grau de Mestre em Matemática).
- [17] SANTOS, Victor Chaves. *Tópicos de Análise Geométrica*. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/163JMQNZpEIC6hbKHHqCR3N0ShQBO8r6a/view>. Universidade Federal do Amazonas, Manaus: 2019.
- [18] SANTOS JÚNIOR, Valdecir Alves dos. *Representação tipo Weierstrass para superfícies imersas em espaços de Heisenberg*. UFPB/CCEN, João Pessoa, 2011. (Dissertação de Mestrado em Matemática à Universidade Federal da Paraíba, para obtenção do grau de Mestre em Matemática)
- [19] YUNELSY, Nápoles Alvarez. *Superfícies Mínimas Completas e Limitadas em R^3* . PhD thesis, PUC-Rio, 2015.

Apêndice

Neste apêndice, apresentamos definições auxiliares e demonstrações que complementam este trabalho. Para mais detalhes veja [11].

3.2 Grupos de Lie

Definição 3.2.1. (*Grupo de Lie*) Um grupo de Lie é um grupo G com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação $G \times G \rightarrow G$ dada por $(x, y) \rightarrow xy^{-1}, xy \in G$, é diferenciável.

Definição 3.2.2. (*Álgebra de Lie*) Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, munido de uma operação bilinear denotada por:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. **Bilinearidade:** Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ e $a, b \in \mathbb{K}$, temos:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \quad [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

2. **Antissimetria:** Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

Em particular, isso implica que $[X, X] = 0$.

3. **Identidade de Jacobi:** Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Definição 3.2.3. (*Álgebra de Lie de um Grupo de Lie*) A Álgebra de Lie de um grupo de Lie G , denotado por $\mathfrak{g}$, é a álgebra de Lie dos campos vetoriais em G invariantes à esquerda.

Definição 3.2.4. (*Subgrupo de Lie*) Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de G . Dizemos que H é um subgrupo de Lie de G se H pode ser munido com uma topologia e estrutura diferenciável que o torne grupo de Lie e uma subvariedade imersa de G .

Definição 3.2.5. (*Subálgebra de Lie*) Um subespaço K de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamado uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ se $[x, y] \in K, \forall x, y \in K$.

Exemplo 3.2.1. (*Subgrupos mergulhados*) Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de G tal que G é uma subvariedade mergulhada de G , então H satisfaz as condições da definição 3.2.4 e é um subgrupo de Lie.

Definição 3.2.6. (*Translação à esquerda*) Seja $(G, *)$ um grupo de Lie e $a \in G$. Definimos a translação à esquerda pela aplicação $L_a : G \longrightarrow G$ tal que $L_a(g) = ag$.

Observação 7. Para cada $a \in G$, a translação à esquerda

$$L_a : G \longrightarrow G, \quad L_a(g) = ag$$

é um difeomorfismo. De fato, defina

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad m(g, h) = gh, \quad i_p : G \rightarrow G \times G, \quad i_p(g) = (p, g).$$

Como as aplicações m e i_p são diferenciáveis, logo

$$L_a = m \circ i_a$$

é diferenciável.

Por outro lado, note que

$$L_a(L_{a^{-1}}(g)) = a(a^{-1}g) = g, \quad L_{a^{-1}}(L_a(g)) = a^{-1}(ag) = g,$$

ou seja,

$$L_a \circ L_{a^{-1}} = \text{Id}_G \quad \text{e} \quad L_{a^{-1}} \circ L_a = \text{Id}_G.$$

Logo, $L_{a^{-1}}$ é a inversa de L_a e também é diferenciável. Portanto L_a é um difeomorfismo de G .

Definição 3.2.7. (*Campos Invariantes à esquerda*) Seja G um grupo de Lie. Um campo de vetores X em $(G, *)$ é dito invariante à esquerda se para todo $a \in G$, $(dL_a)_x(X_x) = X_{a*x}$.

Denote $\text{Lie}(G)$ como sendo o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda de G .

Proposição 3.2.1. Sejam $X, Y \in \text{Lie}(G)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, $\alpha X + \beta Y \in \text{Lie}(G)$. Em particular, $\text{Lie}(G)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{X}(G)$.

Demonstração. Dados $a, g \in G$, temos

$$\begin{aligned} d(L_a)_g(\alpha X + \beta Y)_g &= \alpha d(L_a)_g X_g + \beta d(L_a)_g Y_g \\ &= \alpha X_{ag} + \beta Y_{ag} \\ &= (\alpha X + \beta Y)_{ag} \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2.2. Sejam $X, Y \in \text{Lie}(G)$. Então $[X, Y] \in \text{Lie}(G)$.

Demonstração. Como X e Y são invariantes à esquerda, temos

$$(dL_a)X = X \quad \text{e} \quad (dL_a)Y = Y,$$

onde $L_a : G \rightarrow G$ é a translação à esquerda $L_a(g) = ag$.

Como

$$(dL_a)([X, Y]) = [(dL_a)X, (dL_a)Y] = [X, Y] \in \text{Lie}(G).$$

□

Teorema 3.2.1. *Seja G um grupo de Lie. A aplicação*

$$\xi: \text{Lie}(G) \longrightarrow T_e G,$$

definida por $\xi(X) = X_e$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração. Note que ξ é linear, pois dados $X, Y \in \text{Lie}(G)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\xi(\alpha X + \beta Y) = (\alpha X + \beta Y)(e) = \alpha X(e) + \beta Y(e) = \alpha \xi(X) + \beta \xi(Y).$$

Vejamos agora a sobrejetividade de ξ . Dado $V \in T_e G$, definimos um campo vetorial $\tilde{V} \in \text{Lie}(G)$ por $\tilde{V}_p = d(L_p)_e(V)$, onde $L_g: G \rightarrow G$ é a translação à esquerda $L_g(h) = gh$. Seja $f: U \subset G \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Considere uma curva diferenciável $\gamma: I \rightarrow G$ tal que $\gamma(0) = e$ e $\gamma'(0) = V$. Para todo $p \in U$, obtemos

$$(\tilde{V}f)(p) = \tilde{V}_p(f) = [d(L_p)_e(V)](f) = V(f \circ L_p) = \gamma'(0)(f \circ L_p) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ L_p \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

Defina a seguinte aplicação diferenciável $\varphi: I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(t, p) = f(L_p(\gamma(t))) = f(p\gamma(t))$. Com isso, temos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, p) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ L_p \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} = (\tilde{V}f)(p).$$

Pela diferenciabilidade de φ , segue que $\tilde{V}f$ é diferenciável e, portanto, $\tilde{V}$ é um campo diferenciável. Além disso,

$$d(L_p)_q(\tilde{V}_q) = d(L_p)_q(d(L_q)_e(V)) = d(L_p \circ L_q)_e(V) = d(L_{pq})_e(V) = \tilde{V}_{pq},$$

isto é, $\tilde{V} \in \text{Lie}(G)$. Mas,

$$\xi(\tilde{V}) = \tilde{V}(e) = d(L_e)_e(V) = V.$$

E, portanto, ξ é sobrejetiva. Para que ξ seja injetiva, dado $X \in \text{Lie}(G)$ tal que $\xi(X) = X(e) = 0$, temos que, para cada $p \in G$, $X_p = d(L_p)_e(X_e) = d(L_p)_e(0) = 0$. Desse modo, X é um campo nulo e o núcleo de ξ é trivial. E, portanto, ξ é injetiva. Logo, ξ é um isomorfismo como queríamos. $\square$

Definição 3.2.8. *(Homomorfismo de grupos de Lie) Sejam G e H dois grupos de Lie. Dizemos que $f: G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos de Lie se f é um homomorfismo de grupos e é diferenciável.*

Definição 3.2.9. *(Isomorfismo de grupos de Lie) Um homomorfismo $f: G \rightarrow H$ de grupos de Lie é um isomorfismo, quando f for isomorfismo de grupos e um difeomorfismo.*

Definição 3.2.10. *(Métrica invariante à esquerda) Dizemos que uma métrica é invariante à esquerda em G quando L_p é uma isometria, para todo $p \in G$, isto é,*

$$\langle u, v \rangle_g = \langle d(L_p)_g(u), d(L_p)_g(v) \rangle_{pg}, \quad \forall g \in G, u, v \in T_g G.$$

Para introduzir em G uma métrica invariante à esquerda, considere um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ em $\mathfrak{g}$ e defina

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d(L_{p^{-1}})_p(u), d(L_{p^{-1}})_p(v) \rangle_e, \quad p \in G, u, v \in T_p G.$$

3.3 Projeção Estereográfica

Seja $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, e seja $S = (0, 0, -1)$ o polo sul de $\mathbb{S}^2$. A projeção estereográfica $\varphi : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \pi$ é a aplicação de $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ ao plano π , definida da seguinte forma: dado um ponto $P \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, traça-se a reta que passa por P e S tal que o ponto $Q = \varphi(P)$ é o ponto de interseção de PS com o plano π .

Considere $P = (x, y, z)$ e $S = (0, 0, -1)$. A reta que passa por P e S tem a equação vetorial dada por:

$$\begin{aligned} r(t) &= S + t(P - S) \\ &= (0, 0, -1) + t((x, y, z) - (0, 0, -1)) \\ &= (0, 0, -1) + t(x, y, z + 1) \\ &= (tx, ty, -1 + t(z + 1)). \end{aligned}$$

Tomando o plano π como sendo o plano $z = 0$, temos que a interseção da reta PS com o plano π acontece quando

$$-1 + t(z + 1) = 0,$$

ou seja,

$$t = \frac{1}{z + 1}.$$

Sendo $\varphi(P)$ o ponto que a reta encontra o plano π , obtemos:

$$\varphi(P) = \left(\frac{x}{z + 1}, \frac{y}{z + 1}, 0 \right).$$

De forma análoga, podemos obter a aplicação que leva um ponto Q do plano para um ponto P da esfera. Para isso, considere a reta que passa por $Q = (u, v, 0)$ e $S = (0, 0, -1)$, cuja equação vetorial é dada por

$$\begin{aligned} s(t) &= S + t(Q - S) \\ &= (0, 0, -1) + t((u, v, 0) - (0, 0, -1)) \\ &= (0, 0, -1) + t(u, v, 1) \\ &= (tu, tv, -1 + t). \end{aligned}$$

Para que um ponto da reta acima pertença à esfera, devemos ter

$$\begin{aligned} (tu)^2 + (tv)^2 + (-1 + t)^2 &= 1 \\ t^2(u^2 + v^2 + 1) - 2t + 1 &= 1 \\ t^2(u^2 + v^2 + 1) - 2t &= 0. \end{aligned}$$

As raízes desta equação quadrática são

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{2}{1 + u^2 + v^2},$$

e como $t \neq 0$ (caso contrário tem-se o ponto $S = (0, 0, -1)$), temos que

$$t = \frac{2}{1 + u^2 + v^2}.$$

Desta forma, substituindo o t encontrado, obtemos a aplicação de um ponto $Q \in \pi$ para um ponto $P \in \mathbb{S}^2 - \{S\}$, que é a inversa da aplicação φ :

$$\varphi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{1 - (u^2 + v^2)}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

3.4 Noções de Análise Complexa

Definição 3.4.1. (Função holomorfa) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ onde Ω é um aberto de $\mathbb{C}$. Dizemos que f é uma função holomorfa se existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (3.25)$$

em todo ponto z de Ω .

Sendo $z = u_1 + iu_2$ e $\bar{z} = u_1 - iu_2$, então

$$u_1 = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ e } u_2 = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}).$$

Utilizando os operadores complexos temos a seguinte proposição:

Proposição 3.4.1. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função definida por $f(z) = w_1(z) + iw_2(z)$ e denotemos por $\bar{f}$ a função conjugada de f , ou seja, $\bar{f} = w_1(z) - iw_2(z)$. Então

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Demonstração. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que

$$f(z) = w_1(z) + iw_2(z), \quad (3.26)$$

$$\bar{f}(z) = w_1(z) - iw_2(z). \quad (3.27)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} + i \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_1} + i \frac{\partial w_2}{\partial u_1} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_2} + i \frac{\partial w_2}{\partial u_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_1}{\partial u_1} + i \frac{\partial w_2}{\partial u_1} + i \frac{\partial w_1}{\partial u_2} - \frac{\partial w_2}{\partial u_2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_1}{\partial u_1} - \frac{\partial w_2}{\partial u_2} + i \left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1} + \frac{\partial w_1}{\partial u_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u_1} - i \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_1}{\partial u_1} - i \frac{\partial w_2}{\partial u_1} - i \frac{\partial w_1}{\partial u_2} - \frac{\partial w_2}{\partial u_2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_1}{\partial u_1} - \frac{\partial w_2}{\partial u_2} - i \left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1} + \frac{\partial w_1}{\partial u_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

□

O seguinte teorema define as equações de Cauchy-Riemann, sendo estas equações de suma importância para o resultado a seguir.

Teorema 3.4.1. (*Equações de Cauchy-Riemann*) *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em Ω , com $f(z) = w_1(z) + iw_2(z)$. Então:*

$$\frac{\partial w_1}{\partial u_1} = \frac{\partial w_2}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial w_2}{\partial u_1} \in \Omega.$$

Demonstração. Pela definição 3.4.1 sendo f uma função holomorfa, então seu limite existe. Se h tende a zero pela parte real, então sua parte imaginária é zero. Por (3.25) temos que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w_1(u_1 + h, u_2) + i w_2(u_1 + h, u_2) - w_1(u_1, u_2) - i w_2(u_1, u_2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w_1(u_1 + h, u_2) - w_1(u_1, u_2)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w_2(u_1 + h, u_2) - w_2(u_1, u_2)}{h}, \end{aligned}$$

então,

$$f'(z) = \frac{\partial w_1}{\partial u_1} + i \frac{\partial w_2}{\partial u_1}.$$

Agora, se h tende a zero pela parte imaginária, então a parte real é zero. Sendo assim,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{w_1(u_1, u_2 + k) + i w_2(u_1, u_2 + k) - w_1(u_1, u_2) - i w_2(u_1, u_2)}{i k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{w_1(u_1, u_2 + k) - w_1(u_1, u_2)}{k} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{w_2(u_1, u_2 + k) - w_2(u_1, u_2)}{k} \\ &= -i \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_2} + i \frac{\partial w_2}{\partial u_2} \right), \end{aligned}$$

logo,

$$f'(z) = \left(\frac{\partial w_2}{\partial u_2} - i \frac{\partial w_1}{\partial u_1} \right).$$

E, portanto,

$$\frac{\partial w_1}{\partial u_1} = \frac{\partial w_2}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial w_2}{\partial u_1} \in \Omega,$$

como queríamos. □

Proposição 3.4.2. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe C^1 definida por $f(z) = w_1(z) + iw_2(z)$. Então f é holomorfa se, e somente se,*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \in \Omega.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se f é holomorfa, então w_1 e w_2 satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (C-R).

Além disso, f é de classe C^1 , garantindo que as derivadas parciais são contínuas. Assim, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_1}{\partial u_1} - \frac{\partial w_2}{\partial u_2} + i \left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1} + \frac{\partial w_1}{\partial u_2} \right) \right], \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_1}{\partial u_1} - \frac{\partial w_2}{\partial u_2} - i \left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1} + \frac{\partial w_1}{\partial u_2} \right) \right]. \quad (3.29)$$

Utilizando as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial w_1}{\partial u_1} - \frac{\partial w_2}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial u_1} + \frac{\partial w_1}{\partial u_2} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0.$$

Reciprocamente, se vale

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{\partial f}{\partial z},$$

então por (3.28) e (3.29) vale as equações de Cauchy-Riemann, então f é holomorfa, como queríamos. $\square$

Proposição 3.4.3. *Se $F(z)$ e $\bar{F}(z)$ são analíticas em um domínio D , então F é constante em D .*

Demonstração. Suponha que F e $\bar{F}$ são analíticas no domínio D . Seja $F = u(x, y) + iv(x, y)$. Como F é analítica, então vale as condições de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Note que $\bar{F} = u(x, y) - iv(x, y)$. Logo,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Sendo assim, por (3.30) e (3.31),

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Então u e v são constantes. E portanto, F é constante em D . $\square$

Definição 3.4.2. (Função meromorfa) Seja $h : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dizemos que h é uma função meromorfa se é holomorfa em $\Omega - P$, onde P é o conjunto de pontos isolados e cada um desses pontos é um polo de h .

Definição 3.4.3. (Superfície de Riemann) Uma superfície de Riemann é uma variedade bidimensional localmente homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e cujas funções de mudança de coordenadas são holomorfas.

Definição 3.4.4. Sejam (M^n, g_1) uma variedade Riemanniana n -dimensional, Σ uma superfície de Riemann e $f : \Sigma \rightarrow M$ uma aplicação suave. Como o fibrado tangente TM é um fibrado vetorial podemos induzir um fibrado em Σ . O fibrado pullback $f^*(TM)$ é definido por

$$f^*(TM) = \{(e, v) \in \Sigma \times TM : \pi(v) = f(e), v \in T_{f(e)}M\},$$

e possui uma métrica e uma conexão compatível, a conexão pullback, induzidas pela métrica Riemanniana e a conexão de Levi-Civita da variedade M .

Considerando a complexificação do fibrado $\mathbb{E} = f^*(TM) \otimes \mathbb{C}$, a métrica g_1 pode ser estendida para $\mathbb{E}$ como uma forma bilinear complexa $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$; ou com uma métrica Hermitiana $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$, e estão relacionadas por $\langle \langle V, W \rangle \rangle = (V, \bar{W})$.

Sejam (u, v) as coordenadas locais em Σ e $z = u + iv$ um parâmetro local complexo. Definimos, como usualmente, os operadores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

A conexão pullback se estende a uma conexão complexa em $\mathbb{E}$, hermitiana com respeito a métrica $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ e tem-se que $\mathbb{E}$ possui uma única estrutura holomorfa tal que a seção $W : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}$ é holomorfa se, e somente se, $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} W = 0$, onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão pullback.

Considerando $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}$ a seção do fibrado $\mathbb{E}$ dada por

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_p = f_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \Big|_p, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_p = f_{*p} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \Big|_p,$$

valem as seguintes propriedades:

- i) A aplicação f é uma imersão se, e somente se, $\langle \langle \phi, \phi \rangle \rangle \neq 0$;
- ii) Se f é uma imersão, então f é conforme se, e somente se, $\langle \langle \phi, \phi \rangle \rangle = 0$.

Observe que i) ocorre pois

$$\begin{aligned}\langle\langle\phi, \phi\rangle\rangle &= \frac{1}{4}\langle\langle\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\rangle\rangle \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} + i\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2\right).\end{aligned}$$

Já ii) é válida pois $(\phi, \phi) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) - 2i\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$.

Assim, $(\phi, \phi) = 0$ se, e somente se, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$, ou seja, se e somente se, f é conforme.

Seja $f : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão conforme e $z = u + iv$ um parâmetro local conforme. Então, a métrica induzida é dada por $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) = \lambda^2|dz|^2$, onde $\lambda = \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|$ e o operador Beltrami-Laplace em Σ , com respeito à métrica induzida, é dado por:

$$\Delta = \lambda^{-2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 4\lambda^{-2}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Definição 3.4.5. *Seja Σ uma superfície de Riemann. Uma aplicação $f : \Sigma \rightarrow M$ é harmônica se, e somente se,*

$$\tau(f) = \text{tr}(\nabla df) = 0,$$

onde $\tau(f)$ é dito campo de tensão de f .

F. Mercuri, S. Montaldo e P. Piu apresentaram em [14] a equação harmônica em termos de coordenadas $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ em uma vizinhança $U \subset M$ tal que $U \cap f(\Sigma) \neq \emptyset$. Assim, em um aberto $\Omega \subset \Sigma$,

$$\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

para algumas funções complexas ϕ_j definidas em Ω . Com respeito a decomposição de ϕ , o campo de tensão pode ser escrito como:

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^n \left\{ \Delta f_i + 4\lambda^{-2} \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_k}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ou ainda,

$$\tau(f) = 4\lambda^{-2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \phi_j \bar{\phi}_k \right\} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde Γ_{jk}^i são os símbolos de Christoffel de M .

Veamos agora o que ocorre ao considerarmos a aplicação $s : \Sigma \rightarrow \Sigma_1$ entre superfícies de Riemann. Fixamos os parâmetros conformes $z = u + iv$ e $w = x_1 + ix_2$ em Σ e Σ_1 .

Os coeficientes da métrica em Σ_1 nas coordenadas (x_1, x_2) são denotados por

$$g_{ij}(x_1, x_2) = \lambda^2(x_1, x_2) \delta_{ij},$$

cujos representação matricial é dada por:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad (g_{ij})^{-1} = g^{ij} = \frac{1}{\lambda^4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}.$$

Como os símbolos de Christoffel são definidos por

$$\sum_{i,j}^m \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right] g^{km},$$

temos que com respeito ao referencial $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$, os símbolos de Christoffel são dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{1k} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{1k} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{11} \right\} g^{k1} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} - \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} \right\} g^{11} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{21} - \frac{\partial}{\partial x_2} g_{11} \right\} g^{21} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} \right] g^{11} \\ &= \frac{1}{2} (2\lambda \cdot \lambda_{x_1}) \cdot \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{\lambda_{x_1}}{\lambda}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_{x_1}}{\lambda}.$$

De maneira análoga obtemos,

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} g_{2k} + \frac{\partial}{\partial x_2} g_{2k} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{22} \right\} g^{k2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} g_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2} g_{12} - \frac{\partial}{\partial x_2} g_{22} \right\} g^{12} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} g_{22} + \frac{\partial}{\partial x_2} g_{22} - \frac{\partial}{\partial x_2} g_{22} \right\} g^{22} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} g_{22} \right] g^{22} \\ &= \frac{1}{2} (2\lambda \cdot \lambda_{x_2}) \cdot \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{\lambda_{x_2}}{\lambda}. \end{aligned}$$

Desta forma, usando a definição dos símbolos de Christoffel obtemos que

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{\lambda_{x_1}}{\lambda} \quad \text{e} \quad \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{\lambda_{x_2}}{\lambda}.$$

Usando o fato que s é harmônica se, e somente se, $\tau(s) = 0$. Então,

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial z \partial \bar{z}} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x_j}{\partial z} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{z}} = 0, \quad i = 1, 2$$

Abrindo este somatório temos que

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial z \partial \bar{z}} + \Gamma_{11}^1 \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right\} + \Gamma_{22}^1 \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial z \partial \bar{z}} + \Gamma_{22}^2 \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right\} + \Gamma_{11}^2 \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \right\} = 0$$

Somando a primeira equação acima com a segunda equação multiplicada por i , obtemos:

$$s_{z\bar{z}} + (\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2) \left\{ \left(\frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) + i \left(\frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \right) \right\} = 0.$$

Que é equivalente a

$$s_{z\bar{z}} + (\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2) \left(\frac{\partial x_1}{\partial z} + i \frac{\partial x_2}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) = 0,$$

ou, ainda,

$$s_{z\bar{z}} + (\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2) s_z s_{\bar{z}} = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2) s(z) &= \left(\frac{\lambda_{x_1}}{\lambda} - i \frac{\lambda_{x_2}}{\lambda} \right) s(z) \\ &= \left(\frac{\lambda_{x_1} - i\lambda_{x_2}}{\lambda} \right) s(z) \\ &= \frac{1}{\lambda(s(z))} \{ \lambda_{x_1}(s(z)) - i\lambda_{x_2}(s(z)) \} \\ &= \frac{2}{\lambda(s(z))} \lambda_w(s(z)), \end{aligned}$$

que o chamamos como parâmetro conforme.

E, portanto, s é harmônica se, e somente se,

$$s_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda(s(z))} \lambda_w(s(z)) s_z s_{\bar{z}} = 0.$$