



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM

FACULDADE DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA -PPGEE

LEVANTAMENTO PARAMETRICO E CONTROLE  
FRACIONARIO NÃO COMENSURAVEL APLICADO A  
UM CONVERTOR STEP DOWN EM CASCATA

EWERTON ANDREY GODINHO RIBEIRO

Manaus - AM

Agosto, 2025

EWERTON ANDREY GODINHO RIBEIRO

LEVANTAMENTO PARAMETRICO E CONTROLE  
FRACIONARIO NÃO COMENSURAVEL APLICADO A  
UM CONVERTOR STEP DOWN EM CASCATA

Trabalho de dissertação de mestrado apresentado como requisito final de avaliação, para obtenção do título de mestre em engenharia elétrica, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Universidade Federal do Amazonas (UFAM).

Orientador(a)

Prof. Dr. Florindo Antônio de Carvalho Ayres Júnior

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

FACULDADE DE TECNOLOGIA

Manaus - AM

Agosto, 2025



Ministério da Educação  
Universidade Federal do Amazonas  
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

Poder Executivo Ministério da Educação  
Universidade Federal do Amazonas  
Faculdade de Tecnologia  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Av. General Rodrigo Octávio Jordão Ramos, nº 3.000 - Campus Universitário, Setor Norte - Coroado, Pavilhão do CETELI. Fone/Fax (92) 99271-8954 Ramal:2607. E-mail: ppgee@ufam.edu.br

EWERTON ANDREY GODINHO RIBEIRO

### **LEVANTAMENTO PARAMÉTRICO E CONTROLE FRACIONÁRIO NÃO COMENSURÁVEL APLICADO A UM CONVERSOR STEP DOWN EM CASCATA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de concentração Controle e Automação de Sistemas.

Aprovada em 22 de agosto de 2025.

#### **BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Florindo Antonio de Carvalho Ayres Júnior- Presidente  
Prof. Dr. Iury Valente de Bessa - Membro Titular 1 - Interno  
Prof. Dr. Marcus Ciro Martins Gomes - Membro Titular 2 - Externo

Manaus, 21 de agosto de 2025.



Documento assinado eletronicamente por **Marcus Ciro Martins Gomes, Usuário Externo**, em 28/08/2025, às 22:54, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Iury Valente de Bessa, Professor do Magistério Superior**, em 01/09/2025, às 10:23, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Florindo Antonio de Carvalho Ayres Júnior, Professor do Magistério Superior**, em 01/09/2025, às 14:37, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2756761** e o código CRC **282F2BC3**.

---

Av. General Rodrigo Octávio Jordão Ramos, nº 3.000 - Bairro Coroado Campus Universitário, Setor Norte  
- Telefone: 99271-8954  
CEP 69080-900 Manaus/AM - Pavilhão do CETELI. E-mail: [ppgee@ufam.edu.br](mailto:ppgee@ufam.edu.br)

Referência: Processo nº 23105.018135/2025-15

SEI nº 2756761

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

---

- R484l      Ribeiro, Ewerton Andrey Godinho  
            Levantamento paramétrico e controle fracionário não comensurável aplicado a um step-down em cascata / Ewerton Andrey Godinho Ribeiro. - 2025.  
            111 f. : il., color. ; 31 cm.
- Orientador(a): Florindo Antônio de Carvalho Ayres Júnior.  
            Coorientador(a): Michel Wanderson de Souza Campos.  
            Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Amazonas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Manaus, 2025.
1. Controle fracionário. 2. Cálculo fracionário. 3. Conversor Step Down. 4. Alocação de polos. 5. Eletrônica de potência. I. Ayres Júnior, Florindo Antônio de Carvalho. II. Campos, Michel Wanderson de Souza. III. Universidade Federal do Amazonas. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título
-

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo amor incondicional e pelo apoio em todos os momentos.

---

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por me proporcionar sabedoria, saúde e persistência em permanecer dentro da área de conhecimento de elétrica superando todos os desafios e obstáculos e podendo assim concluir mais uma etapa da minha vida acadêmica. A minha esposa Evellyn Rocha e meus pais Álvaro Reis e Elinete Godinho, pelo apoio e orações. Aos meus colegas que fiz de Laboratório da PPGEE pela ajuda nos projetos práticos e meus colegas de trabalho pelo incentivo. Ao meu orientador, professor Dr. Florindo Ayres Júnior, que me orientou no desenvolvimento do projeto, teve paciência para esperar eu me resolver nas minhas atividades. Ao meu coorientador, professor Dr. Michel, que me auxiliou nos experimentos no laboratório, ao Professor Cleonor, que sempre esteve disposto a ajudar. Agradeço também a banca examinadora e a todos os outros professores de áreas diferentes que contribuíram para o enriquecimento desta pesquisa.

*"Medir é saber. Se você não pode medir, não pode melhorar."*

— Lord Kelvin

# LEVANTAMENTO PARAMETRICO E CONTROLE FRACIONARIO NÃO COMENSURAVEL APLICADO A UM CONVERSOR STEP DOWN EM CASCATA

Autor: EWERTON ANDREY GODINHO RIBEIRO

Orientador: Prof. Dr. Florindo Antônio de Carvalho Ayres Júnior

## Resumo

Esta dissertação apresenta o desenvolvimento, implementação e análise de controladores PID de ordem fracionária aplicados à regulação de tensão em conversores CC/CC do tipo Buck em cascata. A pesquisa parte da premissa de que componentes passivos como capacitores e indutores, quando submetidos a longos ciclos de operação ou condições específicas, exibem comportamentos não ideais, com efeitos de memória e dinâmica dependentes do histórico. Tais características motivam a aplicação do cálculo fracionário para modelagem e controle mais precisos desses sistemas. Inicialmente, são apresentados os fundamentos teóricos do cálculo fracionário e do cálculo numérico, com destaque para definições clássicas de derivadas de ordem não inteira e funções especiais como a de Mittag-Leffler. Em seguida, realiza-se a modelagem clássica e fracionária do conversor Buck, considerando sua operação em malha fechada com estrutura em cascata. Para o levantamento de parâmetros de memória dos componentes, são conduzidos experimentos com circuitos RC e RL, utilizando técnicas de ajuste numérico e análise de resposta temporal para estimar os expoentes fracionários associados. O processo de sintonia dos controladores fracionários é realizado com base na abordagem de alocação de polos fracionária clássica (FOFP clássico) quanto a alocação de polos fracionária não comensurável (NCFOPP). Esses métodos são aplicados em ambiente de

simulação e, posteriormente, validados em uma planta experimental., permitindo observar o comportamento das diferentes ordens fracionárias. Como resultado demonstrados graficamente, obteve-se um bom desempenho do controlador. Portanto, este trabalho demonstrou que o uso de controladores fracionários, aliados à modelagem com efeitos de memória e à aplicação de técnicas de NCFOPP de ordem não inteira, representa uma alternativa promissora para o sistema de controle, contribuindo para o avanço das técnicas de controle que pode ser aplicadas nas práticas de engenharia.

**Palavras-chave:** Controle fracionário; Cálculo fracionário; Conversor Step Down; Alocação de polos; Eletrônica de potência.

# LEVANTAMENTO PARAMETRICO E CONTROLE FRACIONARIO NÃO COMENSURAVEL APLICADO A UM CONVERTOR STEP DOWN EM CASCATA

Autor: EWERTON ANDREY GODINHO RIBEIRO

Orientador: Prof. Dr. Florindo Antônio de Carvalho Ayres Júnior

## Abstract

This dissertation presents the development, implementation, and analysis of fractional-order PID controllers applied to voltage regulation in cascaded DC/DC Buck converters. The research is based on the premise that passive components such as capacitors and inductors, when subjected to long operating cycles or specific conditions, exhibit non-ideal behaviors, with memory effects and history-dependent dynamics. Such characteristics motivate the application of fractional calculus for more accurate modeling and control of these systems. Initially, the theoretical foundations of fractional calculus and numerical methods are presented, with emphasis on classical definitions of non-integer order derivatives and special functions such as the Mittag-Leffler function. Subsequently, both classical and fractional modeling of the Buck converter are carried out, considering its closed-loop operation with a cascaded structure. To identify the memory-related parameters of the components, experiments with RC and RL circuits are conducted, employing numerical fitting techniques and time-response analysis to estimate the associated fractional exponents. The tuning process of the fractional controllers is performed based on the classical fractional-order pole placement approach (classical FOFP) as well as the non-commensurate fractional-order pole placement (NCFOPP). These methods are applied in a simulation environment and later validated in an experimental setup,

allowing the observation of different fractional orders. As graphically demonstrated, the controller achieved good performance. Therefore, this work shows that the use of fractional controllers, combined with memory-effect modeling and the application of non-integer NCFOPP techniques, represents a promising alternative for control systems, contributing to the advancement of control strategies that can be applied in engineering practice.

**Keywords:** Fractional control; Fractional calculus; Buck converter; Pole placement; Power electronics.

---

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Comportamento da função Gama. . . . .  | 31 |
| Figura 2 – Conversor CC/CC (Step-Down). . . . .   | 38 |
| Figura 3 – Conversor CC/CC no estado ligado ( $t_{on}$ ) - Step-Down. . . . .   | 39 |
| Figura 4 – Conversor CC/CC no estado desligado ( $t_{off}$ ) - Step-Down. . . . .   | 40 |
| Figura 5 – Imagens dos circuitos RC (a) e RL (b) montados no Laboratório de Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos (FT/UFAM) . . . . . | 56 |
| Figura 6 – Esquemático do circuito RC (Autor: Próprio) . . . . .  | 56 |
| Figura 7 – Esquemático do circuito RL (Autor: Próprio) . . . . .  | 57 |
| Figura 8 – Imagem do front do osciloscópio na medição da carga e descarga do capacitor (Autor: Próprio) . . . . .                           | 59 |
| Figura 9 – Curva dos Dados do Tensão no Capacitor (a) e Curva Corrigida dos Dados da Tensão no Capacitor (b) (Autor: Próprio) . . . . .     | 59 |
| Figura 10 – Aplicação do Filtro Digital Butterworth (Autor: Próprio) . . . . .  | 60 |
| Figura 11 – Extração da curva de subida com filtro Butterworth (Autor: Próprio) . . . . .   | 61 |
| Figura 12 – Ajuste com funções de Mittag-Leffler (Autor: Próprio) . . . . .   | 61 |
| Figura 13 – Captura do osciloscópio da tensão no indutor . . . . .  | 63 |
| Figura 14 – Curvas de Subida da Tensão no Indutor . . . . .   | 64 |
| Figura 15 – Tensão no Indutor com Filtro de Média Móvel . . . . .   | 65 |
| Figura 16 – Curva de Subida com Estatísticas . . . . .  | 65 |
| Figura 17 – Ajuste de Funções de Mittag-Leffler . . . . .   | 66 |
| Figura 18 – Estrutura funcional do controlador PID de ordem fracionária (FOPID). . . . .  | 71 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 19 – Regiões de estabilidade para diferentes ordens fracionárias segundo o Teorema de Matignon. . . . .   | 72  |
| Figura 20 – Representação geométrica das regiões de estabilidade segundo os parâmetros fracionários adotados. . . . .  | 73  |
| Figura 21 – Topologia Buck-Buck em cascata. . . . .  | 83  |
| Figura 22 – Modelo de controle dos conversores Buck-Buck em cascata no Simulink. . . . .   | 85  |
| Figura 23 – (a) Vista da bancada experimental no Laboratório de Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos (FT/UFAM); (b) Configuração do conversor Buck em cascata utilizada nos experimentos. . . . .                       | 95  |
| Figura 24 – Resposta ao degrau do sistema controlado aplicada ao conversor <i>Buck</i> sob controle fracionário. . . . .   | 97  |
| Figura 25 – Diagrama de Bode do sistema controlado <i>Buck</i> fracionário. . . . .  | 98  |
| Figura 26 – (a) Tensão de entrada. (b) Evolução do <i>Duty Cycle</i> para os controladores FFOPP (azul) e NCFOPP (vermelho). (Autor: Próprio) . . . . .  | 99  |
| Figura 27 – (a) Tensão de saída $V_{out}$ para os controladores FFOPP (azul) e NCFOPP (vermelho). (b) Avaliação de rastreamento . . . . .  | 100 |
| Figura 28 – (a) Tensão de entrada $V_{in}$ no cenário de variação de referência. (b) <i>Duty cycle</i> para os controladores FFOPP (azul) e NCFOPP (vermelho) no cenário de variação de referência. (Autor: Próprio) . . . . . | 101 |
| Figura 29 – Avaliação de rastreamento da tensão de saída para FFOPP e NCFOPP no cenário de variação de referência. (Autor: Próprio) . . . . .  | 102 |
| Figura 30 – (a) Comparação entre referência e saída para controladores FFOPP e NCFOPP (b) <i>Duty</i> FFOPP e NFOPP (Autor: Próprio) . . . . .   | 103 |
| Figura 31 – Zoom da resposta em tensão de saída entre 50 s e 85 s para controladores FFOPP e NCFOPP. (Autor: Próprio) . . . . .  | 103 |

---

## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 – Comparação visual entre osciloscópio e gráfico corrigido do circuito RC. . . . . | 60 |
| Tabela 2 – Resultados do ajuste para diferentes valores de $\beta$ . . . . .                | 62 |
| Tabela 3 – Resultados do ajuste para diferentes valores de $\alpha$ . . . . .               | 67 |
| Tabela 4 – Valores dos parâmetros para implementação do conversor Buck em cascata. . . . .  | 84 |

---

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**ADC** Conversor Analógico-Digital

**ANEEL** Agência Nacional de Energia Elétrica

**CF** Cálculo Fracionário

**CRONE** *Commande Robuste d'Ordre Non Entier* (Controle Robusto de Ordem Não Inteira)

**DC** Corrente Contínua (Direct Current)

**EDO** Equação Diferencial Ordinária

**EDP** Equação Diferencial Parcial

**FOMCON** Toolbox de Modelagem e Controle Fracionário no MATLAB

**FOPID** Controlador PID de Ordem Fracionária

**FOPP** Fractional Order Pole Placement (Alocação de Polos Fracionária)

**IRID-FOD** Identificação Recursiva Aprimorada para Derivadas de Ordem Fracionária Discretas

**LMI** Desigualdade Matricial Linear

**LT** Transformada de Laplace

**LTI** Sistema Linear Invariante no Tempo

**MMQ** Método dos Mínimos Quadrados

**MNQR** Mínimos Quadrados Não Recursivo

**MOSFET** Transistor de Efeito de Campo de Metal-Óxido-Semicondutor

**MW** Megawatts

**NCFOPP** Non-Commensurate Fractional Order Pole Placement (Alocação de Polos Fracionária Não Comensurável)

**PI** Controlador Proporcional-Integral

**PID** Controlador Proporcional-Integral-Derivativo

**RC** Resistência e Capacitância

**RL** Resistência e Indutância

**RMSE** Erro Quadrático Médio da Raiz

**RMS** Valor Eficaz (Root Mean Square)

**SFV** Sistema Fotovoltaico

**UFAM** Universidade Federal do Amazonas

**V<sub>cc</sub>** Tensão de Alimentação de Corrente Contínua

**V<sub>in</sub>** Tensão de Entrada

**V<sub>max</sub>** Tensão Máxima

**V<sub>out</sub>** Tensão de Saída

---

## LISTA DE SÍMBOLOS

$R$  Resistência elétrica [ $\Omega$ ]

$L$  Indutância [H]

$C$  Capacitância [F]

$V_{in}$  Tensão de entrada [V]

$V_{out}$  Tensão de saída [V]

$V_{cc}$  Tensão de alimentação em corrente contínua [V]

$V_{max}$  Tensão máxima [V]

$I$  Corrente elétrica [A]

$t$  Tempo [s]

$f_s$  Frequência de chaveamento [Hz]

$D$  Ciclo de trabalho (duty cycle)

$\alpha$  Ordem fracionária Indutor

$\beta$  Ordem fracionária do Capacitor

$K_p$  Ganho proporcional do controlador

$K_i$  Ganho integral do controlador

$K_d$  Ganho derivativo do controlador

$s$  Variável complexa de Laplace

$\mathcal{L}\{f(t)\}$  Transformada de Laplace de  $f(t)$

$D^\alpha$  Derivada fracionária de ordem  $\alpha$

$T_s$  Tempo de amostragem [s]

$T_a$  Tempo de acomodação [s]

$\epsilon_{ss}$  Erro em regime permanente [V]

$\eta$  Eficiência do conversor [%]

$\sigma$  Desvio padrão

$\hat{y}$  Valor estimado de  $y$

$y$  Saída medida

$x(t)$  Estado do sistema no tempo  $t$

$u(t)$  Sinal de controle

$\theta$  Vetor de parâmetros estimados

---

# SUMÁRIO

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .  | <b>20</b> |
| <b>1.1</b> | <b>Contextualização</b> . . . . .  | <b>20</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Análise do Estado da Arte</b> . . . . .   | <b>21</b> |
| <b>1.3</b> | <b>Motivação e Justificativa</b> . . . . .   | <b>24</b> |
| <b>1.4</b> | <b>Objetivo Geral</b> . . . . .  | <b>26</b> |
| <b>1.5</b> | <b>Objetivos Específicos</b> . . . . .   | <b>26</b> |
| <b>1.6</b> | <b>Organização do Trabalho</b> . . . . .   | <b>27</b> |
| <b>2</b>   | <b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS: CÁLCULO FRACIONÁRIO E NU-<br/>MÉRICO</b> . . . . .                    | <b>29</b> |
| <b>2.1</b> | <b>A Origem do Cálculo Fracionário</b> . . . . .   | <b>29</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Função Gama</b> . . . . .   | <b>30</b> |
| <b>2.3</b> | <b>Função Beta</b> . . . . .   | <b>31</b> |
| <b>2.4</b> | <b>Integral Fracionária de Riemann-Liouville</b> . . . . .                                     | <b>32</b> |
| <b>2.5</b> | <b>Derivada Fracionária de Riemann-Liouville</b> . . . . .                                     | <b>32</b> |
| <b>2.6</b> | <b>Derivada Fracionária segundo Caputo</b> . . . . .   | <b>33</b> |
| <b>2.7</b> | <b>Mittag-Leffer</b> . . . . .   | <b>33</b> |
| 2.7.1      | Função de Mittag-Leffer de um parâmetro . . . . .  | 33        |
| 2.7.2      | Função de Mittag-Leffer de dois parâmetro . . . . .  | 34        |
| 2.7.3      | Função de Mittag-Leffer Casos Particulares . . . . .   | 35        |
| <b>2.8</b> | <b>Conclusão</b> . . . . .   | <b>35</b> |
| <b>3</b>   | <b>ANÁLISE, MODELAGEM CLÁSSICA E FRACIONÁRIA DE UM<br/>CONVERSOR CC/CC STEP-DOWN</b> . . . . . | <b>37</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Introdução: Step-Down</b> . . . . .   | <b>37</b> |

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>3.2</b> | <b>Modelagem Classica do Conversor Step-Down</b>                                   | <b>38</b> |
| 3.2.1      | Estado Ligado ( $t_{on}$ )   | 38        |
| 3.2.2      | Estado Ligado ( $t_{on}$ )   | 39        |
| 3.2.3      | Estado Desligado ( $t_{off}$ )   | 39        |
| <b>3.3</b> | <b>Aplicação da Média em Pequenos Sinais</b>                                       | <b>40</b> |
| <b>3.4</b> | <b>Modelagem em Pequenos Sinais</b>  | <b>40</b> |
| <b>3.5</b> | <b>Equações Diferenciais fracionaria do Conversor Buck</b>                         | <b>41</b> |
| 3.5.1      | Modo com a chave aberta (MOSFET OFF, diodo conduz)                                 | 42        |
| 3.5.2      | Resumo das Equações no Modo Chave Aberta   | 43        |
| <b>3.6</b> | <b>Modelagem com Derivadas Fracionárias de Caputo e Condições Iniciais Nulas</b>   | <b>44</b> |
| 3.6.1      | Aplicando às equações linearizadas   | 45        |
| 3.6.2      | Sistema no domínio de Laplace (com derivadas de Caputo e condições iniciais nulas) | 45        |
| 3.6.3      | Substituindo $\Delta I_L(s)$ da equação (1) na equação (2):                        | 45        |
| <b>3.7</b> | <b>Comparação com o Modelo Clássico</b>  | <b>46</b> |
| <b>3.8</b> | <b>Conclusão</b>   | <b>46</b> |
| <b>4</b>   | <b>LEVANTAMENTO DE PARÂMETROS EM UM MODELO FÍSICO: CIRCUITO RC E RL</b>            | <b>48</b> |
| <b>4.1</b> | <b>Introdução aos Circuitos RC e RL</b>  | <b>48</b> |
| <b>4.2</b> | <b>Modelagem Matemática Clássica de Circuitos Série RL e RC</b>                    | <b>49</b> |
| 4.2.1      | Fase de Carga do Capacitor   | 49        |
| 4.2.2      | Fase de Descarregamento do Capacitor   | 50        |
| 4.2.3      | Fase de Carga do Indutor   | 51        |
| 4.2.4      | Fase do Descarregamento do Indutor   | 53        |
| <b>4.3</b> | <b>Equações Fracionárias para Circuitos RC e RL</b>                                | <b>54</b> |
| 4.3.1      | Circuito RC de ordem fracionária   | 54        |
| 4.3.2      | Circuito RL de ordem fracionária   | 55        |
| <b>4.4</b> | <b>Materiais e Métodos</b>   | <b>55</b> |
| 4.4.1      | Descrição do Experimento e Análise de Dados  | 55        |

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>4.5</b> | <b>Aplicação da Metodologia para o levantamento dos parâmetros RC e RL</b> . . . . .      | <b>58</b> |
| 4.5.1      | Análise Experimental no Ambiente VSCode . . . . .   | 59        |
| 4.5.2      | Análise dos Resultados do Ajuste para Diferentes Valores de $\beta$ . . . . .             | 62        |
| 4.5.3      | Ajuste do Modelo ao Sistema RL com Dados Reais no Ambiente VSCode . . . . .               | 62        |
| 4.5.4      | Análise dos Resultados do Ajuste para Diferentes Valores de $\alpha$ . . . . .            | 66        |
| <b>4.6</b> | <b>Conclusão</b> . . . . .  | <b>67</b> |
| <b>5</b>   | <b>FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE CONTROLE PARA O CONVERSOR STEP DOWN</b> . . . . .              | <b>69</b> |
| <b>5.1</b> | <b>Controlador PID de Ordem Fracionária</b> . . . . .                                     | <b>70</b> |
| <b>5.2</b> | <b>Estabilidade do Sistema de Ordem Fracionária</b> . . . . .                             | <b>71</b> |
| <b>5.3</b> | <b>Controlador pelo Método da Alocação de Polos (FOPP)</b> . . . . .                      | <b>74</b> |
| <b>5.4</b> | <b>Projeto do Controlador via Equação Polinomial Matricial</b> . . . . .                  | <b>75</b> |
| <b>5.5</b> | <b>Método de Aproximação de Oustaloup Recursiva</b> . . . . .                             | <b>77</b> |
| 5.5.1      | Método de Transformação de Tustin . . . . .   | 79        |
| <b>5.6</b> | <b>Conclusão</b> . . . . .  | <b>80</b> |
| <b>6</b>   | <b>PROCEDIMENTO DA METODOLOGIA DE CONTROLE PARA O CONVERSOR BUCK EM CASCATA</b> . . . . . | <b>82</b> |
| <b>6.1</b> | <b>Sistema Conversor DC/DC: Topologia Buck em Cascata</b> . . . . .                       | <b>82</b> |
| <b>6.2</b> | <b>Especificação dos Componentes do Conversor Buck em Cascata</b> . . . . .               | <b>84</b> |
| <b>6.3</b> | <b>Estrutura da Planta e de Seus Blocos de Controladores no Simulink</b> . . . . .        | <b>85</b> |
| 6.3.1      | Função de Transferência para Análise de Controle do Buck . . . . .                        | 86        |
| 6.3.2      | Generalização Fracionária da Função de Transferência do Conversor Buck . . . . .          | 87        |
| 6.3.3      | Projeto do Controlador para o Conversor Buck . . . . .                                    | 89        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>6.4</b> | <b>Metodologia de Projeto do Controlador por Alocação de Polos de Ordem Fracionária Não Comensurável</b> . . . . . | <b>90</b>  |
| 6.4.1      | Função de Transferência Fracionária Desejada . . . . .   | 91         |
| 6.4.2      | Obtenção da Função do Controlador . . . . .  | 91         |
| 6.4.3      | Etapas do Procedimento de Sintonia . . . . .   | 93         |
| <b>6.5</b> | <b>Descrição do Ambiente Experimental do Sistema Buck em Cascata</b> . . . . .                                     | <b>93</b>  |
| <b>7</b>   | <b>AVALIAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS</b> . . . . .  | <b>96</b>  |
| <b>7.1</b> | <b>Análise da Resposta ao Degrau</b> . . . . .   | <b>96</b>  |
| <b>7.2</b> | <b>Análise do Diagrama de Bode do Sistema Controlado</b> . . . . .   | <b>97</b>  |
| <b>7.3</b> | <b>Análise Gráfica</b> . . . . .   | <b>99</b>  |
| <b>8</b>   | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .  | <b>105</b> |
|            | <b>Bibliografia</b> . . . . .  | <b>107</b> |

# 1

---

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Contextualização

**N**os últimos anos, o Brasil tem registrado um aumento significativo na demanda por energia elétrica, impulsionado por fatores econômicos e mudanças nos padrões de consumo. Em 2023, a oferta de energia elétrica no país cresceu 3,6%, com destaque para a contribuição das fontes renováveis, que representam 89,2% da matriz elétrica nacional. Esse crescimento foi liderado pela energia hidráulica, eólica, solar fotovoltaica e biomassa. Projeções indicam que a demanda continuará a crescer em uma média de 2,5% ao ano até 2026, (Ministério de Minas e Energia 2024), alimentada pela atividade econômica e maior consumo residencial. Em 2024, a ANEEL prevê uma expansão de 10.106 megawatts (MW) na capacidade de geração, consolidando a tendência de crescimento sustentado observado nos anos anteriores. Esses desenvolvimentos ressaltam a importância de investimentos contínuos em infraestrutura e fontes de energia renováveis para atender à crescente demanda e assegurar a sustentabilidade do setor energético brasileiro.

Com o aumento da demanda por energia elétrica, as operações dos sistemas de potência trabalharão próximos aos seus limites de estabilidade e requererão técnicas avançadas de controle para melhorar as margens de estabilidade do sistema. A busca por um desempenho e robustez aprimorados tem impulsionado a pesquisa em direção a estratégias de controle inovadoras. A evolução tecnológica e a necessidade de sistemas eletrônicos mais eficientes têm impulsionado a pesquisa em técnicas avançadas de

controle, particularmente em conversores de potência.

A partir de meados do século XX, a eletrônica de potência começou a ganhar destaque, tornando-se importante na engenharia elétrica por abordar o comportamento da energia a partir do uso de conversores estáticos de potência (Barbi 2006).

Esses dispositivos são amplamente utilizados em aplicações industriais e eletrônicas devido à sua capacidade de fornecer uma tensão de saída estável a partir de uma fonte de tensão variável. Os conversores CC-CC podem ser definidos como sistemas constituídos por elementos passivos (resistores, capacitores, indutores e diodos) e por elementos ativos (interruptores), como transistores, triacs, tiristores, GTOs, IGBTs e MOSFETs, sendo responsáveis por tratar eletronicamente a energia elétrica e controlarem o fluxo de energia entre dois ou mais sistemas elétricos (Barbi 2006).

No entanto, a eficiência e a robustez desses conversores são frequentemente desafiadas por variações de carga e parâmetros, exigindo métodos de controle mais sofisticados. Tradicionalmente, os controladores de ordem inteira têm sido utilizados para estabilizar e otimizar o desempenho dos conversores. Contudo, esses métodos muitas vezes não conseguem lidar adequadamente com a dinâmica presente nesse sistema. Nesse contexto, os controladores de ordem fracionária emergem como uma alternativa promissora, oferecendo um bom desempenho no ajuste dos parâmetros de controle.

## 1.2 Análise do Estado da Arte

A evolução das técnicas de controle para esses conversores CC-CC é fundamental para melhorar seu desempenho em termos de resposta transitória, estabilidade e eficiência energética. Nesta análise do estado da arte, abordaremos as principais técnicas de controle aplicadas aos conversores buck, incluindo controle linear e não linear.

Com a finalidade de melhorar o desempenho dos controladores PID em conversores buck, diversas metodologias de sintonia foram estudadas. O artigo (Sharma 2023) examina métodos tradicionais, como o de Ziegler-Nichols, e técnicas modernas baseadas em algoritmos de otimização e controle adaptativo. Os autores afirmam que

“o estudo visa determinar quais técnicas proporcionam melhor desempenho em termos de resposta dinâmica, estabilidade e robustez do sistema. A análise é feita por meio de simulações e experimentos práticos, e os resultados indicam que as técnicas modernas apresentam melhores resultados em precisão e robustez, especialmente em condições operacionais variáveis e desafiadoras”.

(Olomu et al. 2023) analisa o desempenho de controladores PID tradicionais aplicados a um conversor buck. O estudo compara a resposta do conversor sob diferentes estratégias de controle, avaliando aspectos como resposta transitória, estabilidade e eficiência. Os autores destacam o impacto dos parâmetros do PID no desempenho do sistema, com o objetivo de melhorar a regulação da tensão e reduzir o ripple.

O artigo de (Ounnas et al. 2019) propõe o projeto e a implementação de um controlador PID digital para um conversor buck DC-DC. O estudo foca na melhoria da performance do conversor por meio de ajustes no controlador PID, com ênfase na estabilidade e precisão da tensão de saída. O controlador foi desenvolvido para atender a diferentes condições de operação do conversor, visando otimizar a resposta do sistema em termos de regulação e redução de flutuações na saída. O trabalho destaca a importância do controle digital em sistemas de conversão de energia.

(Huang et al. 2023) aborda o controle de modo deslizante (SMC) em conversores DC/DC paralelos. Os autores propõem uma nova estratégia de SMC para melhorar a resposta dinâmica e robustez dos conversores paralelos. A técnica é capaz de lidar com incertezas de parâmetros e distúrbios externos, garantindo operação estável. Os resultados de simulações e experimentos demonstram melhorias significativas na regulação da tensão de saída e no compartilhamento de carga entre os conversores paralelos.

(Lee et al. 2023) discutem técnicas de controle para conversores buck com múltiplas saídas (SIMO) operando em duas frequências distintas. O objetivo é melhorar a regulação da tensão e a eficiência, especialmente em condições de carga variáveis. O estudo destaca métodos de controle para minimizar a interação entre as saídas e melhorar a resposta dinâmica com foco na otimização de desempenho e estabilidade.

Já (Zhang et al. 2020) apresenta uma abordagem inovadora para controle de conversores buck multimodo. A pesquisa foca em otimizar o desempenho do sistema

por meio de um algoritmo que minimiza as perdas. A técnica proposta permite um controle digital eficiente que melhora a eficiência geral do conversor, especialmente em cenários de carga variável. Esse controle multimodo garante flexibilidade no desempenho, adaptando-se a diferentes condições operacionais e melhorando a eficiência energética.

A principal contribuição de (Gao et al. 2015) foi propor um controlador fuzzy adaptativo para conversores buck com o objetivo de melhorar a resposta dinâmica e a estabilidade do sistema adaptando os parâmetros do controlador fuzzy em tempo real, permitindo que o sistema se ajuste automaticamente às variações de carga e à mudança de condições operacionais. Esse tipo de controle é especialmente útil em situações onde os conversores precisam lidar com mudanças rápidas e imprevisíveis, como ocorre em sistemas de energia renovável ou em aplicações automotivas. O controlador fuzzy adaptativo é capaz de otimizar a performance do conversor buck ao reduzir os efeitos de perturbações e melhorar a precisão da regulação da tensão de saída.

O artigo de (Sadeghian et al. 2020) explora a aplicação de técnicas de inteligência artificial, particularmente a lógica fuzzy, para controle em malha fechada de conversores buck. O uso de algoritmos de aprendizado de máquina e lógica fuzzy se fez necessário neste artigo para ajustar dinamicamente os parâmetros do controlador, permitindo que o conversor buck se adapte automaticamente às mudanças nas condições de carga e nas perturbações do sistema com alto grau de não linearidade e variabilidade, onde técnicas tradicionais de controle podem ser menos eficientes.

Em (Ayres Junior et al. 2020), é proposta uma nova metodologia para a sintonização de controladores de ordem fracionária, através da técnica de alocação de polos fracionários. No entanto, com base na técnica clássica (ordem inteira) de posicionamento de polos, o autor usa a função de transferência comensurável para representar controladores de ordem não inteira de modo a colocar seus polos dominantes fracionários dentro de uma região de estabilidade estendida com base em três termos.. A pesquisa foca na aplicação de métodos de controle de ordem fracionária para aperfeiçoar o desempenho dinâmico do conversor, visando uma resposta mais eficiente e robusta, além de proporcionar uma maior estabilidade frente a distúrbios e variações de carga. Esse

método permite visualizar o comportamento do conversor de maneira a atingir um desempenho superior, especialmente no controle de sistemas dinâmicos não lineares, como é o caso dos conversores buck.

O artigo de (Ibrahim et al. 2021) aborda a aplicação de controladores PID fracionários no controle de conversores buck, focando em uma metodologia híbrida para a sintonia do controlador. Os autores utilizam uma combinação do algoritmo de voo de Lévy com o algoritmo de resfriamento simulado para otimizar os parâmetros do controlador PID de ordem fracionária, visando melhorar a resposta dinâmica do conversor, minimizando erros e aumentando a robustez do sistema que proporciona uma melhor performance e estabilidade do conversor buck, especialmente sob condições de carga variável.

### 1.3 Motivação e Justificativa

O avanço de sistemas de controle modernos tende a buscar incessantemente métodos de controle mais robustos e mais assertivos que possam atender à crescente demanda por tecnologias mais eficientes, robustas e precisas, especialmente em aplicações complexas como as que envolvem sistemas de conversão de energia.

Contudo, a eficiência e a estabilidade desses sistemas dependem diretamente do desempenho dos controladores utilizados em seus componentes, como os conversores DC/DC e inversores. O comportamento dinâmico dos SFVs é intrinsecamente não linear e sujeito a perturbações externas. internas, como variações de irradiância solar, comportamentos anômalos dos componentes, temperatura e carga conectada.

Os controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) têm sido amplamente utilizados em diversos setores, inclusive de geração de energia, devido à sua simplicidade, robustez e eficácia no controle de sistemas dinâmicos. No entanto, sua aplicação apresenta limitações quando se trata de lidar com sistemas complexos, não lineares ou com características dinâmicas que variam amplamente nas frequências.

Além disso (C. Monje 2006), menciona que muitos dos sistemas dinâmicos reais são melhor representados utilizando modelos de ordem não-inteira, pois estes caracte-

rizam melhor a dinâmica real de plantas físicas, permitindo aliviar as limitações das equações diferenciais convencionais em que apenas as potências inteiras do operador são usadas.

Estudos feitos por (C. Monje et al. 2008; Chen e Moore 2005) afirmam que o controlador fracionário possui um melhor desempenho que o controlador de ordem inteira. E segundo (Chen 2006), que baseou-se em casos práticos, o controle de ordem fracionária é ideal quando se trata principalmente de sistemas a parâmetros distribuídos.

Uma generalização do PID clássico que utiliza derivadas e integrais de ordem não inteira permite maior flexibilidade e ajuste fino no controle do sistema. Portanto, o uso dos controladores  $PI^\lambda D^\mu$  fracionários, que possuem cinco graus de liberdade relacionados aos seus ganhos  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ,  $\lambda$  e  $\mu$ , será aplicado para atender às demandas de controle em SFVs, sendo justificado pela sua capacidade de lidar com sistemas dinâmicos de alta ordem, não lineares e com características de frequência complexas, como as que serão observadas em uma planta com dois bucks em cascata no domínio da frequência.

Isso faz com que os controladores PID fracionários permitam ajustar as ações proporcional, integral e derivativa com maior precisão, otimizando a resposta do sistema.

A motivação central deste estudo foi investigar o potencial dos controladores projetados com base na alocação de polos fracionária (FOPP), em especial na sua forma não comensurável, aplicados a conversores step-down (buck) em topologia cascata com isso será feito um estudo de comportamento através dos dados coletados para análise de estimativa de parâmetros para os componentes com memória que fazem parte significativa da topologia buck.. Essa abordagem busca não apenas superar as limitações inerentes do controlador, mas também introduzir parâmetros de ordem não inteira, no qual a flexibilidade da ordem fracionária permita analisar simultaneamente o desempenho dinâmico do conversor buck em cascata.

Como resultado final, serão apresentados análises gráficas do comportamentos da planta com a inserção destes controladores para a estabilidade da tensão de saída do conversor Buck em cascata no ambiente *Matlab*, para que possamos observar o

comportamento durante a operação do mesmo. Com isso, será aplicando a metodologia de ordem fracionária desenvolvida em (Ayres Junior 2018), no ambiente realístico no laboratório de modelagem da UFAM.

## 1.4 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo principal a análise e implementação de controladores PID de ordem fracionária aplicados ao controle da tensão de saída de um conversor Buck operando em malha fechada, com estrutura em cascata. Através do levantamento paramétrico dos circuitos elétricos fracionários RC e RL, é possível extrair os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , que melhor representam o comportamento real dos dispositivos. A estimação dos parâmetros dos componentes (capacitor e indutor) será realizada utilizando funções especiais, como a função de Mittag-Leffler, para representar o comportamento de carga e descarga dos elementos, bem como o ajuste de curvas de resposta transiente por meio do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Portanto, as avaliações dos controladores e métodos de sintonia são conduzidas tanto em ambiente de simulação quanto em uma planta experimental real, permitindo analisar o desempenho comparativo entre abordagens clássicas e fracionárias.

## 1.5 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral proposto, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:

- Realizar o levantamento bibliográfico, revisar a modelagem clássica e fracionária do conversor Step down (Buck), incluindo a verificação clássica e fracionária do comportamento dos circuitos RC e RL com características de memória que esteja relacionado a topologia em estudo.
- Estimar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  associados aos efeitos de memória dos componentes passivos do conversor em estudo, com base na resposta experimental e no ajuste

de funções fracionárias (exponencial, Mittag-Leffler e MMQ)

- Aplicar os conceitos de cálculo fracionário na modelagem do sistema dinâmico, incorporando as propriedades de memória na formulação dos modelos em tempo contínuo;
- Projetar controladores PID de ordem fracionária com base na metodologia de alocação de polos fracionária (FOPP), especialmente na forma não comensurável, NCFOPP.
- Validar os resultados finais no ambiente de simulação *Matlab* e em uma planta experimental do laboratório de modelagem, utilizando dados reais de operação do conversor Buck em Cascata.

## 1.6 Organização do Trabalho

Este trabalho está estruturado em seis capítulos, além das seções introdutórias e finais. A seguir, descreve-se brevemente o conteúdo de cada capítulo:

- **Capítulo 1 – Introdução:** apresenta o contexto geral da pesquisa, a motivação, os objetivos geral e específicos, bem como a estrutura do trabalho.
- **Capítulo 2 – Fundamentos Teóricos: Cálculo Fracionário e Numérico:** aborda os conceitos fundamentais relacionados ao cálculo fracionário, incluindo definições clássicas de derivadas fracionárias, como Riemann-Liouville e Caputo, além das funções especiais como a função de Mittag-Leffler. Também são discutidos aspectos do cálculo numérico aplicados à estimação de parâmetros em modelos fracionários.
- **Capítulo 3 – Análise, Modelagem Clássica e Fracionária de um Conversor CC/CC Step-Down:** apresenta a modelagem matemática do conversor Buck, tanto sob a abordagem clássica (modelo de média contínua) quanto considerando efeitos de memória por meio de modelagem fracionária. São discutidas as diferenças estruturais e implicações dinâmicas entre os dois modelos.

- **Capítulo 4 – Levantamento de Parâmetros em um Modelo Físico: Circuito RC e RL:** trata da metodologia experimental de coleta e análise de dados em circuitos RC e RL, visando à extração dos parâmetros de memória  $\alpha$  e  $\beta$  dos componentes passivos. São empregados métodos de ajuste numérico e técnicas baseadas em funções fracionárias para estimar tais parâmetros.
- **Capítulo 5 – Formulação do Método de Controle para o Conversor Step Down:** São apresentados os fundamentos da análise das condições de estabilidade em sistemas de ordem fracionária, a formulação dos controladores PID e FOPID, o método de alocação de polos FOFP, bem como a aproximação de Oustaloup.
- **Capítulo 6 – Procedimento da Metodologia de Controle para o Conversor Buck em Cascata:** É apresentado a Topologia Buck em Cascata, o Critério de Dimensionamento e a arquitetura de controle adotada. São discutidos o equacionamento clássico e a Generalização Fracionária da Função de Transferência, que servem de base para o Projeto do Controlador. Em seguida, descreve-se a Metodologia de Projeto por Alocação de Polos Fracionários Não Comensuráveis e, por fim, o Ambiente Experimental do Sistema Buck em Cascata, utilizado para validação prática
- **Capítulo 7 – Avaliação e Análise dos Resultados:** apresenta os resultados obtidos a partir das simulações e dos experimentos com a planta real, analisando o desempenho do controlador projetado sob diferentes perspectivas. E fazendo um paralelo com controlador clássicos FOFP e fracionários NCFOPP.
- **Considerações Finais:** reúne as conclusões do trabalho, discute as contribuições alcançadas e apresenta sugestões para trabalhos futuros relacionados ao uso de controle fracionário e modelagem com efeitos de memória.

## 2

---

# FUNDAMENTOS TEÓRICOS: CÁLCULO FRACIONÁRIO E NUMÉRICO

**N**este capítulo tem como finalidade apresentar uma breve fundamentação teórica e histórica do cálculo fracionário e os principais tópicos que versam sobre este estudo. Os quais são necessários para a compreensão e desenvolvimento deste trabalho. Dentre eles a metodologia das transformadas de Fourier e Laplace que são utilizadas no estudo do cálculo de ordem não inteira, definição de função gama, função beta e propriedades, definição de derivada e de integral segundo o conceito de Riemann-Liouville, Caputo e a função de Mittag Leffler de um e dois parâmetros e por fim Mínimos quadrados representando os cálculos numéricos.

### 2.1 A Origem do Cálculo Fracionário

O cálculo fracionário originou-se em uma correspondência trocada entre Leibniz e L'Hôpital em 30 de setembro de 1695. Onde L'Hôpital questionou Leibniz sobre uma notação particular que ele havia utilizado em sua publicação para a  $n$ -ésima derivada de uma função, conforme a Equação (2.1), perguntando-lhe qual seria o resultado para  $n = \frac{1}{2}$ , e a troca de cartas entre ambos personagens sobre a derivada de ordem não inteira levou ao surgimento do cálculo fracionário, segundo (Das 2011; K. S. Miller e Ross 1993). No entanto, durante muitos anos, o conceito permaneceu apenas como uma curiosidade matemática. Mas foi somente no século XIX que estudiosos como Liouville, Riemann e

Caputo desenvolveram formulações mais rigorosas para o cálculo fracionários, seguido do matemático sueco Mittag-Leffler (1903) que teve um dos papéis mais importantes, pois representou uma generalização para a função exponencial, fundamental para o estudo de equações diferenciais não inteiras, (Camargo et al. 2015). Portanto, tornando possível sua aplicação prática em diversas áreas da engenharia e das ciências.

$$D_n = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad (2.1)$$

A aplicação do cálculo fracionário na modelagem de sistemas físicos começou a ganhar relevância no século XX, especialmente em fenômenos onde a dinâmica exibia memória e efeitos hereditários. O trabalho de (Oldham et al. 1974), contribuiu significativamente para a formalização matemática do cálculo fracionário em aplicações de engenharia. Paralelamente, pesquisadores começaram a explorar suas vantagens no contexto de sistemas dinâmicos e controle.

## 2.2 Função Gama

A Função Gama ou função de Euler de segunda espécie foi desenvolvida com o intuito de se generalizar o conceito de fatorial de um número natural. Dessa forma, definindo-se adequadamente, é possível computar o fatorial até de números complexos. A Função Gama possui polos no 0 e em todos os inteiros negativos, portanto, não pode ser usada para se calcular o valor do fatorial desses números (a função diverge para eles). A definição mais comum da função Gama é sua forma integral demonstrada na equação (2.2), que está representada a seguir (Carvalho et al. (2018)):

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \text{para } x \neq 0, -1, -2, \dots \quad (2.2)$$

Uma de suas principais propriedades é a seguinte relação demonstrada nas equações (2.3) e (2.4):

$$\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x) \quad (2.3)$$

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

A função Gama é útil na definição de integral fracionária e no cálculo fracionário de maneira geral. A Figura 1 demonstra o comportamento da função Gama.

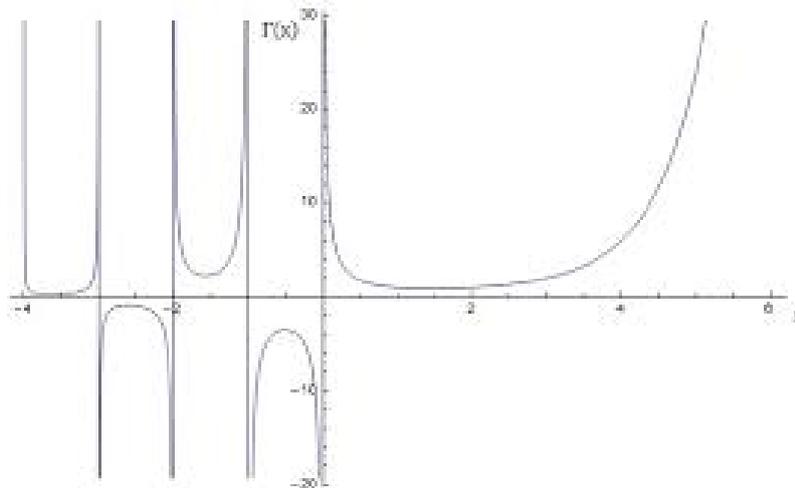


Figura 1 – Comportamento da função Gama.  
Fonte: Adaptação de (Spiegel 1890).

## 2.3 Função Beta

A função Beta, denotada por  $B(p, q)$ , é definida pela seguinte integral, conforme a Equação (2.5), para  $\text{Re}(p) > 0$  e  $\text{Re}(q) > 0$ :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (2.5)$$

Essa função está relacionada com a função Gama por meio da seguinte identidade, conforme a Equação (2.6):

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (2.6)$$

A função Beta  $B(p, q)$  depende dos parâmetros  $p$  e  $q$ , ambos positivos. Ela pode ser entendida como uma medida da interação entre os termos  $t^{p-1}$  e  $(1-t)^{q-1}$  no intervalo de integração de 0 a 1.

### Propriedades numéricas

- **Simetria:** A função Beta é simétrica em seus argumentos:

$$B(p, q) = B(q, p) \quad (2.7)$$

- **Para inteiros positivos:** Quando  $p$  e  $q$  são inteiros positivos, a função Beta pode ser expressa em termos de fatoriais:

$$B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \quad (2.8)$$

## 2.4 Integral Fracionária de Riemann-Liouville

A integral de ordem fracionária generaliza a ideia de integral convencional, de modo a possibilitar cálculos por meio de uma única integral. Como demonstrado pela equação (2.9) (Carvalho et al. (2018)), temos:

$$I^{n+1}f(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f(t) dt \quad (2.9)$$

Fazendo uso de  $J_\alpha$  como notação da integral de ordem positiva real arbitrária, e utilizando a função Gama, define-se então a equação (2.10), (Carvalho et al. (2018)):

$$J_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0 \quad (2.10)$$

## 2.5 Derivada Fracionária de Riemann-Liouville

Definida a integral de ordem arbitrária, fica simples obter a derivação fracionária. Na formulação de Riemann-Liouville para derivada, primeiramente se faz uma integração de ordem arbitrária e, posteriormente, uma derivação de ordem inteira, como na equação (Carvalho et al. (2018)):

$$J_\alpha f(x) = D_m[J_v f(x)], \quad m = \lfloor \alpha \rfloor, \quad v = m - \alpha \quad (2.11)$$

O grande problema dessa formulação é que, ao utilizá-la para a resolução de equações diferenciais fracionárias por transformada de Laplace, não se obtêm valores iniciais com derivada inteira, o que não é fisicamente interpretável (Carvalho et al. (2018)).

## 2.6 Derivada Fracionária segundo Caputo

A derivada fracionária de Caputo é, de certa forma, muito similar à de Riemann-Liouville, somente diferindo pela ordem das operações, o que pode parecer a primeira vista um simples detalhe, porém possui consequências relevantes, levando a utilizar preferencialmente uma no lugar da outra (Teodoro *et al.* (2017)). Na formulação de Caputo se faz em primeiro lugar uma derivação de ordem inteira e posteriormente uma integração de ordem fracionária, como fica explícito na equação a seguir (Teodoro *et al.* (2017)):

$$D_{\alpha}^C f(x) = J_v [D_m f(x)], \quad m = \lfloor \alpha \rfloor, \quad v = m - \alpha \quad (2.12)$$

Na proposta de Caputo há uma vantagem quando utilizada em aplicações que envolvam Equações Diferenciais Fracionárias, a presença de valores iniciais fisicamente interpretáveis, outro fator relevante, para a derivada qualquer de uma constante é sempre nula, isso é extremamente útil quando se procura interpretar as derivadas como taxas de variação e se quer calcular a taxa de uma constante, de modo que seja nula (Teodoro *et al.* (2017)).

## 2.7 Mittag-Leffler

### 2.7.1 Função de Mittag-Leffler de um parâmetro

A Função de Mittag-Leffler, é de grande importância no estudo do cálculo fracionário. A Função de Mittag-Leffler trata-se de uma generalização da exponencial, e tem um papel equivalente na resolução de equações diferenciais fracionárias lineares ao que a função exponencial tem para as equações diferenciais lineares de ordens inteiras (Carvalho *et al.* (2018)). A Função de Mittag-Leffler foi introduzida primeiramente em 1903 pelo matemático sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler (Rosendo 2008), e posteriormente generalizada contendo mais parâmetros. Essa função é dependente de um parâmetro complexo, como se mostra na série em ? a seguir:

$$E_{\alpha}(z) = 1 + \frac{z}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{z^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \quad (2.13)$$

Essa série também pode ser representada simplesmente pela relação da expressão descrita na equação (2.14):

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (2.14)$$

que também pode ser interpretada como uma generalização da função exponencial, visto que, para  $\alpha = 1$ , é possível representá-la pela equação (2.15):

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.15)$$

### 2.7.2 Função de Mittag-Leffler de dois parâmetro

No ano de 1905, a função de Mittag-Leffler passou por uma alteração, que foi a adição de um segundo parâmetro (Rosendo 2008). A forma com este segundo parâmetro da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros está expressa a seguir na equação (2.16):

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \quad \text{Re}(\beta) > 0 \quad (2.16)$$

como sendo outra possível generalização da função de Mittag-Leffler, na qual, no caso de  $\beta = 1$ , ela pode ser representada pela equação (2.17):

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) \quad (2.17)$$

Baseado na definição descrita na equação (2.16), podemos encontrar as seguintes relações:

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k + 1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{e^z - 1}{z} \quad (2.18)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k + 2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \quad (2.19)$$

De maneira mais geral, pode-se descrever a seguinte relação conforme é demonstrado na equação (2.20):

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\} \quad (2.20)$$

### 2.7.3 Função de Mittag-Leffler Casos Particulares

Por ser uma generalização da função exponencial e de se esperar que as funções seno e cosseno hiperbólicos também sejam casos particulares da função de Mittag-Leffler, de fato.

$$E_{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \quad (2.21)$$

$$E_{2,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(z) \quad (2.22)$$

As funções hiperbólicas de ordem  $n$ , que são generalizações do seno e cosseno hiperbólico, também podem ser descritas como:

$$h(r, n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1} E(n, r)(z^n), \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (2.23)$$

## 2.8 Conclusão

Foram apresentados neste capítulo os principais fundamentos teóricos do cálculo fracionário e do cálculo numérico, estabelecendo a base conceitual necessária que será desenvolvida nas etapas seguintes deste trabalho. O cálculo fracionário mostrou-se particularmente relevante na modelagem de modelos físicos que apresentam propriedades de memória, como ocorre em componentes passivos reais, cujo comportamento se afasta do modelo ideal clássico ao longo do tempo ou sob determinadas condições de operação. Foram discutidas as principais definições de derivadas de ordem não inteira, com ênfase nas abordagens de Caputo e Riemann-Liouville, bem como a função de Mittag-Leffler, frequentemente associada à resposta temporal de sistemas fracionários. Também foram explorados os métodos numéricos que viabilizam tanto a estimação dos

parâmetros fracionários quanto a implementação computacional dos modelos derivados dessas teorias. O conhecimento consolidado neste capítulo servirá de alicerce para a modelagem fracionária do conversor Buck, a identificação experimental de parâmetros em circuitos RC e RL, e a posterior aplicação de técnicas de controle fracionário.

## 3

---

# ANÁLISE, MODELAGEM CLÁSSICA E FRACIONÁRIA DE UM CONVERSOR CC/CC STEP-DOWN

**E**ste capítulo irá tratar da topologia Buck (Step-Down) e seu conceito, seguindo adiante será feita uma análise descritiva matemática do seu circuito tanto para modelagem clássica como a fracionária, sendo o funcionamento baseado em regime permanente e na função de transferência para representar sua dinâmica de operação.

### 3.1 Introdução: Step-Down

De acordo com (Mohan et al. [2003](#)), o conversor Buck (Step-Down) é um conversor CC-CC utilizado para reduzir a tensão de entrada, fornecendo uma saída regulada inferior à tensão de entrada. Esse conversor opera no modo chaveado, onde um interruptor semiconductor (geralmente um MOSFET ou IGBT) controla a transferência de energia para a carga por meio de um indutor, um capacitor e um diodo de roda-livre se destacando pela alta eficiência. A topologia Buck se destaca entre os conversores CC-CC por seus princípios fundamentais e amplamente utilizados em eletrônica de potência, Segundo (Barbi [2015](#)). Já de acordo com (Hart [2011](#)) e (Barbi [2015](#)), o conversor

Buck destacam que análise do conversor pode ser feita considerando os modos de condução contínuo e descontínuo, dependendo da relação entre a carga, a indutância e a frequência de chaveamento. O modo contínuo é mais desejável em muitas aplicações por proporcionar menor ripple de corrente e maior eficiência.

Por ser um conversor amplamente utilizado em aplicações de fontes de alimentação chaveadas, reguladores de tensão para microprocessadores, conversores de energia para sistemas embarcados, geração de energia e devido à sua eficiência elevada, simplicidade de implementação sua topologia será objeto de nosso estudo.

## 3.2 Modelagem Classica do Conversor Step-Down

O conversor Buck opera em dois estados distintos dentro de um ciclo de chaveamento:

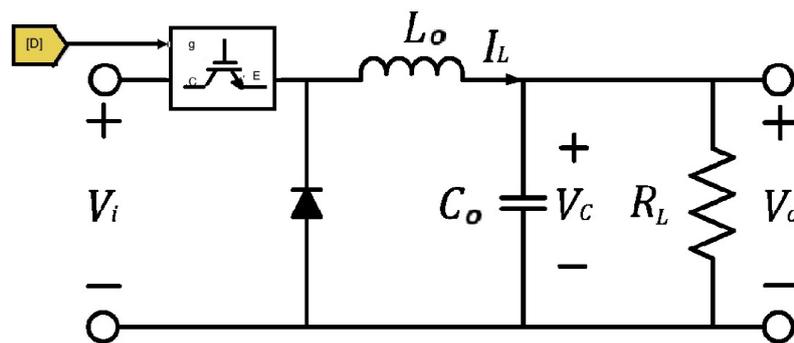


Figura 2 – Conversor CC/CC (Step-Down).

Fonte: Adaptação de (Bessa et al. 2020).

### 3.2.1 Estado Ligado ( $t_{on}$ )

- O MOSFET está ligado e o diodo está reversamente polarizado.
- O indutor recebe energia da fonte  $V_i$ .
- A carga é alimentada pelo indutor; o capacitor carrega ou descarrega conforme  $i_L V_o / R_L$ .

### 3.2.2 Estado Ligado ( $t_{on}$ )

- O MOSFET está conduzindo e o diodo está reversamente polarizado.
- O indutor armazena energia proveniente da fonte  $V_i$ .
- A carga é alimentada pelo indutor; o capacitor carrega se  $i_L > V_o/R_L$  ou descarrega se  $i_L < V_o/R_L$ .

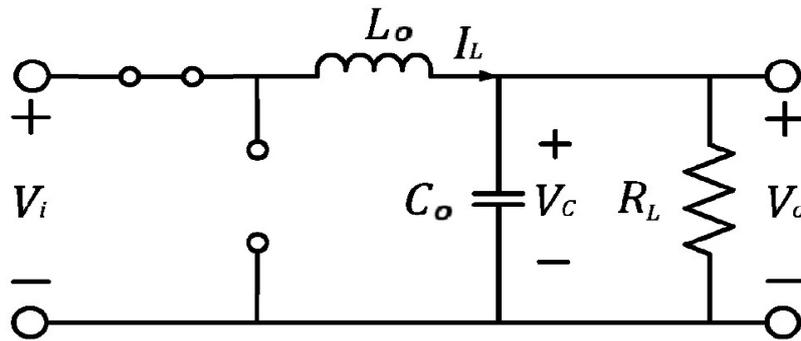


Figura 3 – Conversor CC/CC no estado ligado ( $t_{on}$ ) - Step-Down.

Fonte: Adaptação de (Bessa et al. 2020).

As equações do circuito no CCM são:

$$L_o \frac{di_L}{dt} = V_i - V_o, \quad (3.1)$$

$$C_o \frac{dV_o}{dt} = i_L - \frac{V_o}{R_L}. \quad (3.2)$$

### 3.2.3 Estado Desligado ( $t_{off}$ )

- O MOSFET está desligado e o diodo conduz.
- O indutor libera sua energia para alimentar a carga e recarregar o capacitor.

As equações do circuito no CCM são:

$$L_o \frac{di_L}{dt} = -V_o, \quad (3.3)$$

$$C_o \frac{dV_o}{dt} = i_L - \frac{V_o}{R_L}. \quad (3.4)$$

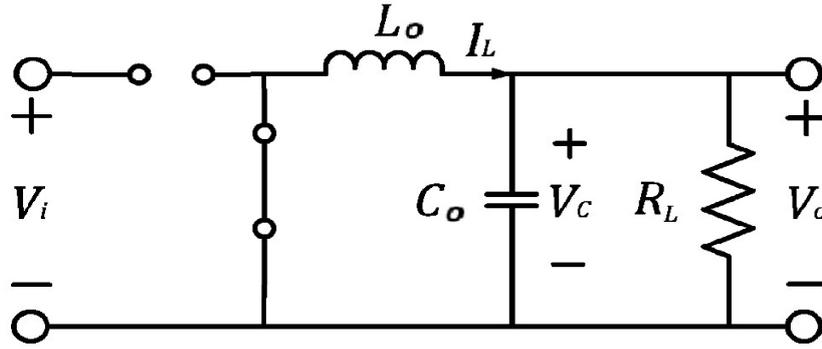


Figura 4 – Conversor CC/CC no estado desligado ( $t_{off}$ ) - Step-Down.  
Fonte: Adaptação de (Bessa et al. 2020).

### 3.3 Aplicação da Média em Pequenos Sinais

No regime de condução contínua (CCM), utilizamos a média do ciclo de chaveamento. Definimos:

- $D$  como o ciclo de trabalho do PWM.
- $\bar{i}_L$  e  $\bar{V}_o$  como valores médios no ciclo de chaveamento.

A média das equações diferenciais ponderadas pelo tempo nos dois estados resulta em:

$$L_o \frac{d\bar{i}_L}{dt} = D(V_i - \bar{V}_o) + (1 - D)(-\bar{V}_o) \quad (3.5)$$

$$C_o \frac{d\bar{V}_o}{dt} = \bar{i}_L - \frac{\bar{V}_o}{R_L} \quad (3.6)$$

Substituímos a equação do indutor:

$$L_o \frac{d\bar{i}_L}{dt} = D V_i - \bar{V}_o \quad (3.7)$$

### 3.4 Modelagem em Pequenos Sinais

Agora perturbamos as variáveis em torno do ponto de operação:

$$D = D_c + \tilde{d}, \quad V_o = V_{o,c} + \tilde{v}_o, \quad i_L = I_{L,c} + \tilde{i}_L \quad (3.8)$$

Substituímos na equação do indutor e desprezamos os termos de segunda ordem:

$$L_o \frac{d\tilde{i}_L}{dt} = V_i \tilde{d} - \tilde{v}_o \quad (3.9)$$

E na equação do capacitor:

$$C_o \frac{d\tilde{v}_o}{dt} = \tilde{i}_L - \frac{\tilde{v}_o}{R_L} \quad (3.10)$$

Agora aplicamos a Transformada de Laplace:

$$L_o s \tilde{I}_L(s) = V_i \tilde{D}(s) - \tilde{V}_o(s) \quad (3.11)$$

$$C_o s \tilde{V}_o(s) = \frac{1}{R_L} (V_i \tilde{D}(s) - \tilde{V}_o(s)) - \frac{\tilde{V}_o(s)}{R_L} \quad (3.12)$$

Resolvemos para  $\tilde{I}_L(s)$ :

$$\tilde{I}_L(s) = \frac{V_i \tilde{D}(s) - \tilde{V}_o(s)}{L_o s} \quad (3.13)$$

Substituímos na equação do capacitor:

$$C_o s \tilde{V}_o(s) = \frac{1}{R_L} \left( \frac{V_i \tilde{D}(s) - \tilde{V}_o(s)}{L_o s} \right) - \frac{\tilde{V}_o(s)}{R_L} \quad (3.14)$$

Multiplicamos tudo por  $L_o s$  para eliminar o denominador:

$$L_o C_o s^2 \tilde{V}_o(s) + (L_o/R_L + R_L C_o) s \tilde{V}_o(s) + \tilde{V}_o(s) = \frac{L_o}{R_L} V_i \tilde{D}(s) \quad (3.15)$$

A função de transferência final é:

$$G_{vd}(s) = \frac{V_o(s)}{D(s)} = \frac{\frac{V_i}{L_o C_o}}{s^2 + \frac{1}{R_L C_o} s + \frac{1}{L_o C_o}} \quad (3.16)$$

### 3.5 Equações Diferenciais fracionaria do Conversor Buck

Para o **indutor**:

$$v_L(t) = L_o \frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha}$$

Para o **capacitor**:

$$i_C(t) = C_o \frac{d^\beta v_C(t)}{dt^\beta}$$

**Lei das Correntes de Kirchhoff (LCK):**

$$i_C = i_L - i_R$$

Substituindo:

$$C_o \frac{d^\beta v_C}{dt^\beta} = i_L - \frac{v_C}{R_L}$$

**Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT):**

$$V_i - V_C = V_L$$

$$\frac{1}{L_o}(V_i(t) - V_C(t)) = \frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha}$$

**3.5.1 Modo com a chave aberta (MOSFET OFF, diodo conduz)**

Quando a chave está aberta, a energia armazenada no indutor continua fluindo, alimentando o capacitor e a carga por meio do diodo.

**1. Lei das Correntes de Kirchhoff (LCK)**

Aplicando a LCK no nó entre o indutor, capacitor e resistor de carga:

$$i_C = i_L - i_R \quad (3.17)$$

Substituindo as expressões fracionárias:

$$C_o \frac{d^\beta v_C(t)}{dt^\beta} = i_L(t) - \frac{v_C(t)}{R_L} \quad (3)$$

Essa equação continua igual à do modo com chave fechada, pois o nó é o mesmo.

**2. Lei das Tensões de Kirchhoff (LKT)**

No modo com a chave aberta, a fonte está desconectada, e o circuito em série é:

*indutor* → *diodo* → *capacitor/carga*

Logo, aplicando a LKT:

$$V_L = -V_C \Rightarrow \frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha} = -\frac{V_C(t)}{L_o} \quad (4)$$

### 3.5.2 Resumo das Equações no Modo Chave Aberta

Equação (3):

$$C_o \frac{d^\beta v_C(t)}{dt^\beta} = i_L(t) - \frac{V_C(t)}{R_L}$$

Equação (4):

$$\frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha} = -\frac{V_C(t)}{L_o}$$

**Primeira equação:**

$$D \left[ \frac{1}{L_o} (V_i(t) - V_C(t)) \right] = D \left[ \frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha} \right]$$

Que se simplifica para:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{L_o} (V_i(t) - V_C(t)) \right) = \frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha}$$

Ou seja:

$$\frac{1}{L_o} (\dot{V}_i(t) - \dot{V}_C(t))$$

**Segunda equação:**

$$(1 - D) \left( \frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha} \right) = (1 - D) \left( -\frac{1}{L_o} V_C \right)$$

Que se simplifica para:

$$\frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha} = -\frac{1}{L_o} V_C + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{L_o} V_i(t) \right)$$

Somando as duas equações:

$$\frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha} = -\frac{1}{L_o} V_C + \frac{1}{L_o} \dot{V}_i(t)$$

Portanto, o resultado correto é:

$$\frac{d^\alpha i_L(t)}{dt^\alpha} = -\frac{1}{L_o} V_C + \frac{D}{L_o} \dot{V}_i$$

**Primeira equação (capacitor, chave fechada):**

$$D \frac{d^\beta v_C}{dt^\beta} = \frac{D}{C_o} i_L - \frac{D}{R_L C_o} V_C \quad (3.18)$$

**Segunda equação (capacitor, chave aberta):**

$$(1 - D) \frac{d^\beta v_C}{dt^\beta} = \frac{1 - D}{C_o} i_L - \frac{1 - D}{R_L C_o} V_C \quad (3.19)$$

Somando:

$$D \frac{d^\beta v_C}{dt^\beta} + (1 - D) \frac{d^\beta v_C}{dt^\beta} = \frac{D}{C_o} i_L - \frac{D}{R_L C_o} V_C + \frac{1 - D}{C_o} i_L - \frac{1 - D}{R_L C_o} V_C \quad (3.20)$$

Simplificando o lado esquerdo:

$$(D + (1 - D)) \frac{d^\beta v_C}{dt^\beta} = \dots$$

Como  $D + (1 - D) = 1$ , temos:

$$\frac{d^\beta v_C}{dt^\beta} = (D C_o + (1 - D) C_o) i_L - (D R_L C_o + (1 - D) R_L C_o) V_C$$

Simplificando os coeficientes:

$$\frac{d^\beta v_C}{dt^\beta} = \frac{1}{C_o} i_L - \frac{1}{R_L C_o} V_C$$

### 3.6 Modelagem com Derivadas Fracionárias de Caputo e Condições Iniciais Nulas

Usando as derivadas fracionárias no sentido de Caputo, com condições iniciais nulas:

**Definição da derivada de Caputo (ordem  $\alpha$ , com  $0 < \alpha < 1$ ):**

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau \quad (3.21)$$

Essa definição é compatível com condições iniciais clássicas, como  $f(0) = 0$ , e por isso é amplamente utilizada em sistemas físicos.

Com condições iniciais nulas no domínio de Laplace

Se  $f(0) = 0$ , então:

$$\mathcal{L} \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) \quad (3.22)$$

### 3.6.1 Aplicando às equações linearizadas

**Para o indutor (ordem  $\alpha$ ):**

$$\frac{d^\alpha \Delta i_L(t)}{dt^\alpha} = -\frac{1}{L_o} \Delta V_C(t) + \frac{V_i}{L_o} \Delta D(t) \quad (3.23)$$

$$\Rightarrow s^\alpha \Delta I_L(s) = -\frac{1}{L_o} \Delta V_C(s) + \frac{V_i}{L_o} \Delta D(s) \quad (3.24)$$

**Para o capacitor (ordem  $\beta$ ):**

$$\frac{d^\beta \Delta v_C(t)}{dt^\beta} = \frac{1}{C_o} \Delta i_L(t) - \frac{1}{R_L C_o} \Delta V_C(t) \quad (3.25)$$

$$\Rightarrow s^\beta \Delta V_C(s) = \frac{1}{C_o} \Delta I_L(s) - \frac{1}{R_L C_o} \Delta V_C(s) \quad (3.26)$$

### 3.6.2 Sistema no domínio de Laplace (com derivadas de Caputo e condições iniciais nulas)

Equação (1):

$$s^\alpha \Delta I_L(s) = -\frac{1}{L_o} \Delta V_C(s) + \frac{v_i}{L_o} \Delta D(s) \quad (3.27)$$

Equação (2):

$$s^\beta \Delta V_C(s) = \frac{1}{C_o} \Delta I_L(s) - \frac{1}{R_L C_o} \Delta V_C(s) \quad (3.28)$$

### 3.6.3 Substituindo $\Delta I_L(s)$ da equação (1) na equação (2):

De (1):

$$\Delta I_L(s) = \frac{1}{s^\alpha} \left( -\frac{1}{L_o} \Delta V_C(s) + \frac{V_i}{L_o} \Delta D(s) \right) \quad (3.29)$$

Substituindo na (2):

$$\left( s^\beta + \frac{1}{R_L C_o} \right) \Delta V_C(s) = \frac{1}{C_o} \cdot \frac{1}{s^\alpha} \left( -\frac{1}{L_o} \Delta V_C(s) + \frac{V_i}{L_o} \Delta D(s) \right) \quad (3.30)$$

**Resultado final:**

$$\left( s^\beta + \frac{1}{R_L C_o} \right) \Delta V_C(s) = \frac{1}{C_o L_o s^\alpha} (-\Delta V_C(s) + V_i \Delta D(s)) \quad (3.31)$$

Multiplicando ambos os lados por  $C_o L_o s^\alpha$ :

$$C_o L_o s^\alpha \left( s^\beta + \frac{1}{R_L C_o} \right) \Delta V_C(s) = -\Delta V_C(s) + V_i \Delta D(s) \quad (3.32)$$

Reorganizando, chegamos a esta expressão :

$$\left[ C_o L_o s^\alpha \left( s^\beta + \frac{1}{R_L C_o} \right) + 1 \right] \Delta V_C(s) = V_i \Delta D(s) \quad (3.33)$$

E por fim a função de transferência:

$$G_{vd}(s) = \frac{\frac{V_i}{L_o C_o}}{s^{\beta+\alpha} + \frac{1}{R_L C_o} s^\alpha + \frac{1}{L_o C_o}} \quad (3.34)$$

### 3.7 Comparação com o Modelo Clássico

No caso clássico ( $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$ ), recuperamos a função de transferência tradicional:

$$G_{vd}(s) = \frac{V_c(s)}{D(s)} = \frac{\frac{V_i}{L_o C_o}}{s^2 + \frac{1}{R_L C_o} s + \frac{1}{L_o C_o}} \quad (3.35)$$

Mas, para um modelo fracionário de  $\beta = 1,15$  e  $\alpha = 0,83$ , extraído da identificação de parâmetros, temos:

$$G_{vd}(s) = \frac{\frac{V_i}{L_o C_o}}{s^{1,98} + \frac{1}{R_L C_o} s^{0,83} + \frac{1}{L_o C_o}} \quad (3.36)$$

### 3.8 Conclusão

Este capítulo apresentou a análise e a modelagem de um conversor CC/CC do tipo redutor (step-down), inicialmente a partir de uma perspectiva clássica baseada em equações diferenciais de ordem inteira, amplamente utilizadas em aplicações de eletrônica de potência. Em seguida, discutiu-se a extensão dessa modelagem para o

domínio fracionário, fundamentada nos conceitos previamente abordados no capítulo anterior, com isso conseguimos chegar as funções de transferencias tanto na ordem inteira como na ordem fracionaria.

## 4

---

# LEVANTAMENTO DE PARÂMETROS EM UM MODELO FÍSICO: CIRCUITO RC E RL

O presente capítulo abordará o equacionamento, bem como os materiais e métodos utilizados na análise experimental da resposta de carga e descarga de circuitos RC e RL clássicos. O objetivo é realizar o levantamento dos parâmetros desses circuitos para, posteriormente, obter os dados experimentais necessários à identificação de parâmetros elétricos fracionários em circuitos RC e RL, por meio da medição da tensão em função do tempo.

### 4.1 Introdução aos Circuitos RC e RL

A análise do comportamento de componentes em determinados circuitos é essencial para a engenharia, pois fornece as bases para o entendimento do comportamento de sistemas dinâmicos. Em particular, os circuitos RC (resistor-capacitor) e RL (resistor-indutor) desempenham um papel fundamental na modelagem de fenômenos transitórios e no processamento de sinais.

Diversos autores exploram a importância desses componentes nos circuitos e suas aplicações práticas, pois garantem que as especificidades da aplicação e as características desejadas melhorem o desempenho do sistema. O autor, (Alexander *et al.* (2013)), em *Fundamentals of Electric Circuits*, enfatizam que circuitos RC e RL são

essenciais para compreender a resposta transitória e o regime permanente de sistemas elétricos, sendo amplamente utilizados em filtragem de sinais, controle de tempo e fontes de alimentação. Já, (Boylestad 2006), em *Análise de Circuitos*, reforça essa visão ao destacar a importância da constante de tempo ( $\tau$ ) na caracterização da rapidez com que um circuito atinge o equilíbrio, além de explorar aplicações práticas, como circuitos de temporização e estabilização de corrente. Por sua vez, (Robbins e W. C. Miller 2007), em *Análise de Circuitos: Teoria e Prática*, adota uma abordagem mais aplicada, combinando teoria com experimentação para ilustrar como esses circuitos influenciam a resposta dinâmica em sistemas elétricos reais.

## 4.2 Modelagem Matemática Clássica de Circuitos Série RL e RC

Neste tópico, vamos analisar matematicamente dois tipos de circuitos simples: os circuitos RC (resistor-capacitor) e os circuitos RL (resistor-indutor). Embora simples, esses circuitos possuem inúmeras aplicações. Quando aplicamos as leis de Kirchhoff, em um circuito puramente resistivo, as equações resultantes são algébricas. No entanto, ao aplicarmos essas leis a circuitos RC e RL, obtemos equações diferenciais de primeira ordem.

### 4.2.1 Fase de Carga do Capacitor

Considerando o circuito RC em série com uma fonte de tensão  $V_{CC}$ , onde o resistor  $R$  e o capacitor  $C$  estão conectados em série, a corrente  $I$  flui através do resistor  $R$  e do capacitor  $C$ . Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões, temos:

$$V_{CC} - V_R - V_C = 0 \quad (4.1)$$

A corrente  $I$  no circuito está relacionada à taxa de variação da carga no capacitor, como  $I = C \frac{dV_C}{dt}$ . Substituindo  $V_R = IR = RC \frac{dV_C}{dt}$  na equação (4.1), obtemos:

$$V_{CC} - RC \frac{dV_C}{dt} - V_C = 0 \quad (4.2)$$

Ou seja, a equação diferencial que descreve o carregamento do capacitor é:

$$RC \frac{dV_C}{dt} = V_{CC} - V_C \quad (4.3)$$

Resolvendo essa equação diferencial de primeira ordem para  $V_C(t)$ , obtemos a solução geral:

$$V_C(t) = V_{CC} \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (4.4)$$

Essa equação descreve a tensão no capacitor durante o carregamento. As principais características dessa equação são:

- No início ( $t = 0$ ), a tensão no capacitor  $V_C(0)$  é igual a 0.
- À medida que o tempo passa,  $V_C(t)$  se aproxima de  $V_{CC}$ .
- Quando  $t = 5\tau = 5RC$ , a tensão no capacitor atinge aproximadamente 99% de  $V_{CC}$ , mas nunca chega exatamente a  $V_{CC}$  em um tempo finito.

A tensão final após o tempo de carga  $t_c$  é dada por:

$$V_C(T_c) = V_{CC} \left( 1 - e^{-\frac{T_c}{RC}} \right) \quad (4.5)$$

### 4.2.2 Fase de Descarregamento do Capacitor

No processo de descarregamento, a fonte de tensão  $V_{CC}$  é desconectada e o capacitor começa a descarregar através do resistor  $R$ . A equação diferencial que descreve o descarregamento do capacitor é semelhante à do carregamento, mas agora a tensão  $V_C$  diminui com o tempo. Isso ocorre porque a corrente  $I$  flui através do resistor  $R$ , mas não há mais fonte de tensão. Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões, temos:

$$-V_C - V_R = 0 \quad (4.6)$$

Ou seja, a tensão no resistor é igual à tensão no capacitor, e a corrente  $I$  é dada por  $I = -C \frac{dV_C}{dt}$ . Substituindo  $V_R = IR = -RC \frac{dV_C}{dt}$  na equação (4.6), obtemos:

$$-V_C - RC \frac{dV_C}{dt} = 0 \quad (4.7)$$

Ou seja, a equação diferencial que descreve o descarregamento do capacitor é:

$$RC \frac{dV_C}{dt} = -V_C \quad (4.8)$$

Resolvendo a equação diferencial para  $V_C(t)$ , separando as variáveis e integrando, obtemos a solução geral:

$$V_C(t) = V_C(0) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.9)$$

Onde  $V_C(0)$  é a tensão inicial no capacitor no momento em que começa o descarregamento.

Se  $V_C(0)$  for a tensão final após o carregamento  $V_C(t_c)$ , temos:

$$V_C(t) = V_C(t_c) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.10)$$

A tensão final após o tempo de descarga  $t_d$  é dada por:

$$V_C(t_d) = V_C(t_c) e^{-\frac{t_d}{RC}} \quad (4.11)$$

### 4.2.3 Fase de Carga do Indutor

Consideremos um circuito em série composto por um resistor  $R$  e um indutor  $L$ , conforme ilustrado na figura abaixo. O objetivo é determinar a resposta do circuito. Para isso, utilizamos a corrente  $i(t)$  que atravessa o indutor como a variável de interesse. No instante inicial  $t = 0$ , podemos assumir que o indutor possui uma corrente inicial  $I_0$ .

Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT) ao circuito, temos:

$$V_{CC} - V_L - V_R = 0 \quad (4.12)$$

Sabemos que a tensão no resistor  $R$  é dada por:

$$V_R = Ri(t) \quad (4.13)$$

E a tensão no indutor  $L$  é expressa como:

$$V_L = L \frac{di}{dt} \quad (4.14)$$

Substituindo essas expressões na equação de Kirchhoff:

$$V_{CC} - L \frac{di}{dt} - Ri(t) = 0 \quad (4.15)$$

Rearranjando para isolar os termos da corrente  $i(t)$ :

$$L \frac{di}{dt} = V_{CC} - Ri(t) \quad (4.16)$$

Dividindo por  $L$ :

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_{CC}}{L} - \frac{R}{L}i(t) \quad (4.17)$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem, cuja solução geral é dada por:

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_{CC}}{R} \quad (4.18)$$

Para determinar a constante  $C$ , utilizamos a condição inicial  $i(0) = 0$ :

$$0 = Ce^0 + \frac{V_{CC}}{R} \quad (4.19)$$

$$C = -\frac{V_{CC}}{R} \quad (4.20)$$

Portanto, a equação final da corrente durante a fase de carga do indutor é:

$$i(t) = \frac{V_{CC}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (4.21)$$

#### 4.2.4 Fase do Descarregamento do Indutor

Quando a fonte de tensão  $V_{CC}$  é removida ( $V_{CC} = 0$ ), aplicamos novamente a Lei de Kirchhoff das Tensões:

$$V_L + V_R = 0 \quad (4.22)$$

Substituindo as expressões de  $V_L$  e  $V_R$ :

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) = 0 \quad (4.23)$$

Rearranjando para isolar os termos de  $i(t)$ :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) \quad (4.24)$$

Esta é uma equação diferencial homogênea, cuja solução geral é:

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.25)$$

Para determinar a constante  $C$ , consideramos que a corrente inicial no instante  $t = 0$  é  $I_0 = \frac{V_{CC}}{R}$ , pois corresponde ao valor final da fase de carga. Assim:

$$i(0) = Ce^0 \quad (4.26)$$

$$C = I_0 = \frac{V_{CC}}{R} \quad (4.27)$$

Portanto, a equação final da corrente durante a fase de descarga do indutor é:

$$i(t) = \frac{V_{CC}}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.28)$$

Este resultado demonstra que a resposta natural de um circuito RL é uma redução exponencial da corrente inicial.

### 4.3 Equações Fracionárias para Circuitos RC e RL

Os circuitos baseados em cálculos tradicionais não são suficientes para descrever de maneira detalhada a complexa dinâmica encontrada em eventos naturais. Por isso, a generalização de ordem fracionária dos circuitos RC e RL clássicos envolve elementos fracionários. Essa operação é determinada pelo parâmetro  $\alpha$ , que pode assumir qualquer valor real positivo, mas não necessariamente inteiro (West 2014). O objetivo deste tópico é, para os circuitos RC e RL clássicos, incorporar efeitos que não podem ser descritos completamente por equações diferenciais de ordem inteira. Isso implica que, ao invés de utilizar as equações diferenciais de ordem 1 para os circuitos RC e RL tradicionais, as equações passam a ter uma ordem fracionária, incorporando o conceito de derivada fracionária.

#### 4.3.1 Circuito RC de ordem fracionária

A equação de um circuito RC tradicional, para a fase de carga do capacitor, é dada por:

$$V_C(t) = V_{CC} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (4.29)$$

No entanto, para um circuito RC de ordem fracionária, a equação é modificada para incluir uma derivada fracionária:

$$V_C(t) = V_{CC} \left(1 - E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \quad (4.30)$$

Onde:

- $E_{\alpha}(z)$  é a função Mittag-Leffler, uma generalização das funções exponenciais para ordens fracionárias.
- $\alpha$  é o parâmetro fracionário que define o comportamento do circuito (normalmente entre 0 e 1, influenciando a velocidade de resposta do circuito em comparação com o circuito RC convencional).

Na fase de descarga:

$$V_C(t) = V_C(0)E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (4.31)$$

### 4.3.2 Circuito RL de ordem fracionária

Para um circuito RL tradicional, a equação de carga da corrente no indutor, com uma fonte de tensão  $V_{CC}$ , é:

$$i(t) = \frac{V_{CC}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right) \quad (4.32)$$

Porém, em um circuito RL de ordem fracionária, a equação é ajustada para incorporar a derivada fracionária:

$$i(t) = \frac{V_{CC}}{R} \left( 1 - E_{\beta,\beta} \left( -\frac{t}{L/R} \right) \right) \quad (4.33)$$

Na fase de descarga (quando a fonte de tensão é removida):

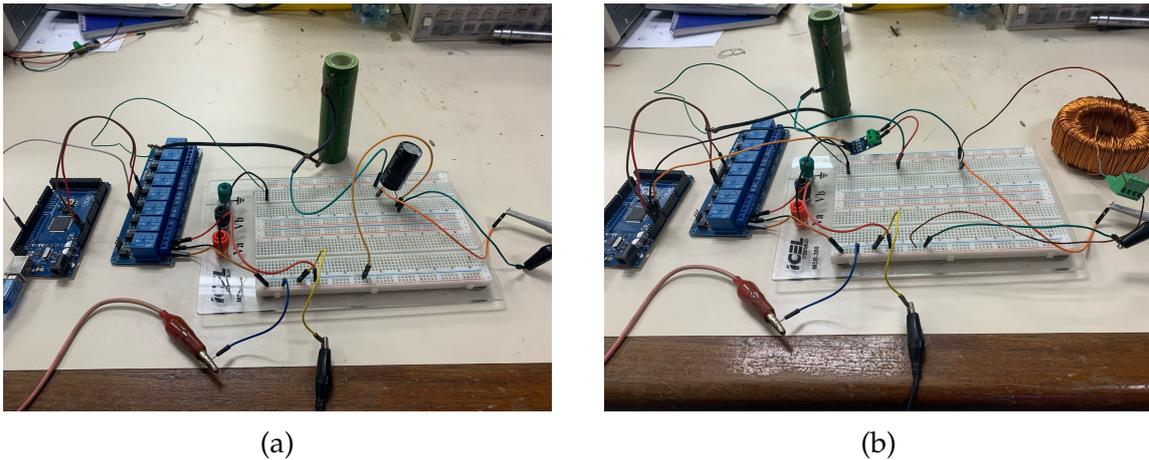
$$i(t) = i(0) E_{\beta,\beta} \left( -\frac{t}{L/R} \right) \quad (4.34)$$

## 4.4 Materiais e Métodos

### 4.4.1 Descrição do Experimento e Análise de Dados

#### Ambiente Experimental

Os experimentos foram baseados na análise de dois circuitos, RC e RL, conforme a Fig. 5 (a) e (b), montados em uma placa de prototipagem com o uso de um Arduino Mega 2560 no laboratório de modelagem da UFAM. Foram utilizados os seguintes equipamentos e componentes: osciloscópios digitais de 70 MHz, fontes de alimentação digitais DC, um indutor toroidal de 12 mH com núcleo magnético, sensor de corrente ACS712, capacitor eletrolítico de 2200  $\mu\text{F}$ , resistor fixo de 20  $\Omega$  e um módulo relé de 5 V. Além disso, foram empregados jumpers e conectores adequados para interligar a fonte de alimentação, o sensor e as pontas de prova do osciloscópio aos pontos de medição.



(a)

(b)

Figura 5 – Imagens dos circuitos RC (a) e RL (b) montados no Laboratório de Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos (FT/UFAM)

O circuito ilustrado na Fig. 5(a) foi montado conforme o esquema da Fig.6: o capacitor foi conectado em série com o resistor (R). A alimentação positiva da fonte foi conectada ao ponto de carga do capacitor (C) por meio do contato normalmente aberto do relé (RY1). O terminal negativo do capacitor foi conectado ao terra. O módulo relé foi acionado pelo pino digital 13 do Arduino Mega, sendo alimentado pelos pinos VCC e GND do próprio Arduino.

Durante o experimento, o relé alternava entre os estados de carga e descarga do capacitor. Para a descarga, o relé (RY1) comutava de forma a conectar diretamente o capacitor (C) ao resistor (R), permitindo sua descarga para o terra. A tensão no capacitor foi monitorada simultaneamente pelo canal CH1 do osciloscópio digital (XSC1) e pela porta analógica A0 do Arduino Mega, possibilitando a aquisição de dados em tempo real via USB ao Monitor Serial do Arduino IDE e exportação em formato CSV.

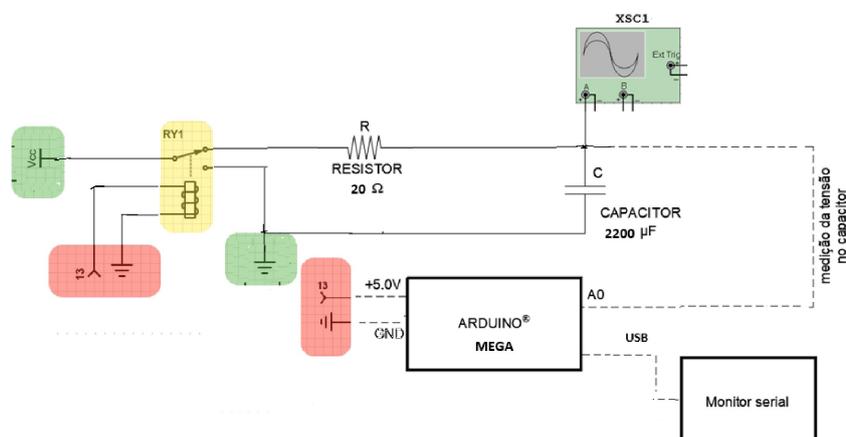


Figura 6 – Esquemático do circuito RC (Autor: Próprio)

Conforme ilustrado na Fig.5(b), o circuito RL foi montado da seguinte forma a fig. 7: o resistor foi conectado em série com o indutor (L), formando o circuito RL. A alimentação positiva da fonte foi aplicada através do contato normalmente aberto do relé (RY1), sendo este responsável por controlar o instante de comutação. O terminal inferior do indutor foi conectado ao terra do sistema.

O módulo relé (RY1) foi acionado pelo pino digital 13 do Arduino Mega, com alimentação fornecida pelos pinos VCC e GND do próprio Arduino. Durante o experimento, ao acionar o relé (RY1), o circuito foi energizado, iniciando a circulação de corrente pelo indutor. A corrente foi medida por meio do sensor ACS712, conectado entre o resistor (R) e o indutor (L), com o sinal analógico sendo lido pelo pino A1 do Arduino Mega. Simultaneamente, a tensão sobre o indutor foi monitorada pelo canal CH1 do osciloscópio digital.

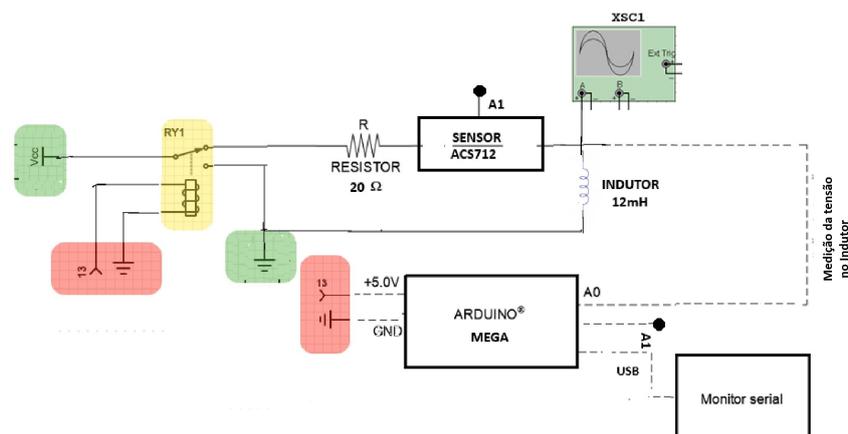


Figura 7 – Esquemático do circuito RL (Autor: Próprio)

Os dados de corrente e tensão foram adquiridos em tempo real, sendo a corrente enviada via Monitor Serial pelo Arduino Mega e a tensão salva via captura do osciloscópio (XSC1) em formato CSV para posterior análise. E para melhores visualizações destes experimento tanto RC e RL estão representados nas fig. 8 e 9 em forma de esquemático.

## 4.5 Aplicação da Metodologia para o levantamento dos parâmetros RC e RL

O ambiente de simulação escolhido foi o software VSCode com Python 3.1.3. Os dados foram carregados do arquivo CSV utilizando a biblioteca `pandas` e o método `curve_fit` foi empregado para encontrar os valores que melhor se ajustam aos dados experimentais. Os problemas de ajuste de curvas de carga de um capacitor em um circuito RC seguiram o uso das funções generalizadas de Mittag-Leffler, substituindo o modelo exponencial clássico, conforme mostrado na Fig.12. Foram comparados diferentes valores do parâmetro de ordem fracionária  $\alpha$ , extraindo-se parâmetros como a tensão máxima ajustada  $V_{cc}$  (considerada igual à tensão máxima do circuito, ou seja,  $V_{cc} = V_{max}$ ), a constante de tempo generalizada  $\tau$ , o erro quadrático médio (EQM) e a raiz do erro quadrático médio (RMSE). O Método dos Mínimos Quadrados é amplamente adotado por sua capacidade de fornecer uma aproximação confiável quando os dados experimentais estão sujeitos a variações ou ruídos inevitáveis (Aguirre 2007). Essencialmente, o MMQ busca determinar os parâmetros de um modelo de forma que a discrepância entre os valores observados e os valores previstos seja minimizada, garantindo um ajuste global que represente de maneira satisfatória a tendência dos dados. Essa abordagem pode ser aplicada a modelos lineares, exponenciais ou polinomiais, permitindo flexibilidade na modelagem de fenômenos complexos. Além disso, a qualidade do ajuste obtido pode ser avaliada por métricas como a raiz quadrada média do erro, que fornece uma medida intuitiva do desvio entre os valores experimentais e os valores estimados pelo modelo (Montgomery e Runger 2014).

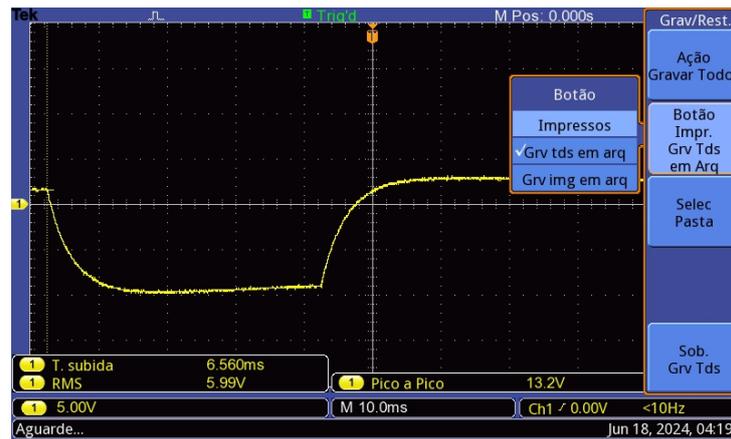


Figura 8 – Imagem do front do osciloscópio na medição da carga e descarga do capacitor (Autor: Próprio)

### 4.5.1 Análise Experimental no Ambiente VSCode

A Figura 9 apresenta o registro da tensão nos terminais do capacitor durante o processo de carga e descarga, obtido com o auxílio de um osciloscópio digital Tektronix. O circuito utilizado consiste em uma fonte de tensão DC, uma resistência em série e um capacitor inicialmente descarregado, com chaveamento via relé comandado por Arduino.

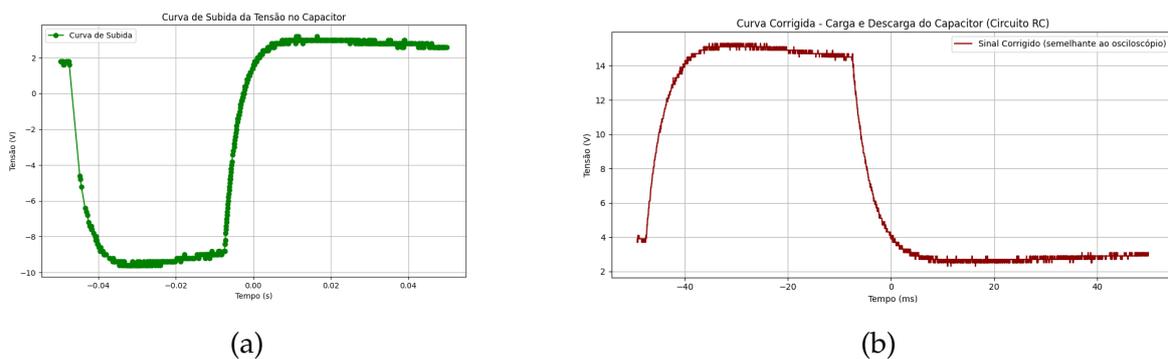


Figura 9 – Curva dos Dados do Tensão no Capacitor (a) e Curva Corrigida dos Dados da Tensão no Capacitor (b) (Autor: Próprio)

A tabela 1 a seguir apresenta uma comparação visual entre o sinal obtido diretamente do osciloscópio e o gráfico gerado a partir dos dados corrigidos via código Python:

Tabela 1 – Comparação visual entre osciloscópio e gráfico corrigido do circuito RC.

| Característica             | Osciloscópio                     | Gráfico Corrigido               |
|----------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| Tensão inicial (descarga)  | Alta ( 5V), decaindo exponencial | Sim, começa em torno de 15V     |
| Mínimo (descarga completa) | 0V                               | 2,5V (offset ajustável)         |
| Transição (carga)          | Subida exponencial suave         | Sim, subida exponencial visível |
| Tensão final (carregado)   | 5V                               | 15V (após offset de +5.5V)      |
| Formato geral da curva     | Clássico (carga-descarga)        | Idêntico visualmente            |

No instante inicial ( $t = 0$ ), a tensão no capacitor é nula, e em seguida, sobe exponencialmente até se aproximar da tensão de regime (aproximadamente 13,2 V pico a pico). O tempo de subida registrado foi de 6,560 ms e o valor de tensão RMS foi de aproximadamente 5,99 V. A resposta segue a equação clássica do circuito RC:

$$V_C(t) = V_{cc} (1 - e^{-t/RC}) \quad (4.35)$$

O arquivo CSV exportado pelo osciloscópio apresentou seis colunas desordenadas. A análise em Python identificou que os dados relevantes de tempo e tensão estavam nas colunas centrais (colunas 3 e 4), a partir da 18ª linha. Foi aplicado um filtro digital Butterworth para suavizar ruídos e preservar o comportamento real da curva de carga.

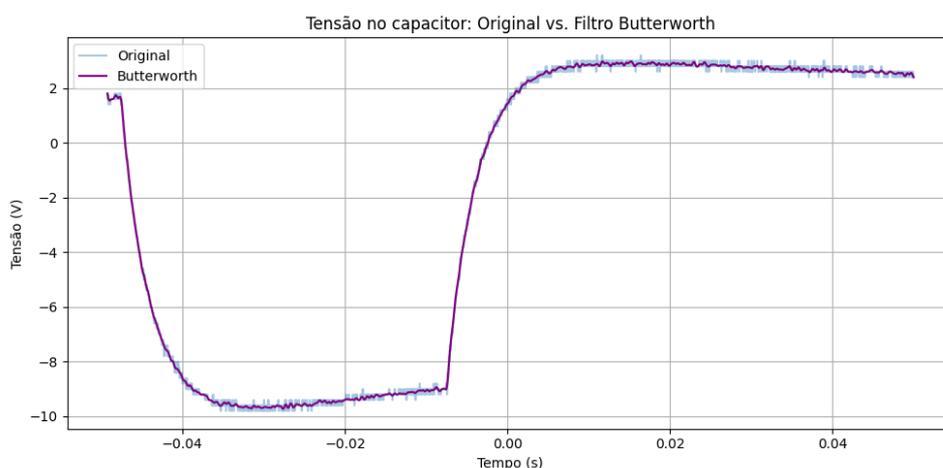


Figura 10 – Aplicação do Filtro Digital Butterworth (Autor: Próprio)

O resultado filtrado mostrou uma curva mais suave, conforme a Fig.10, destacando o comportamento exponencial típico.

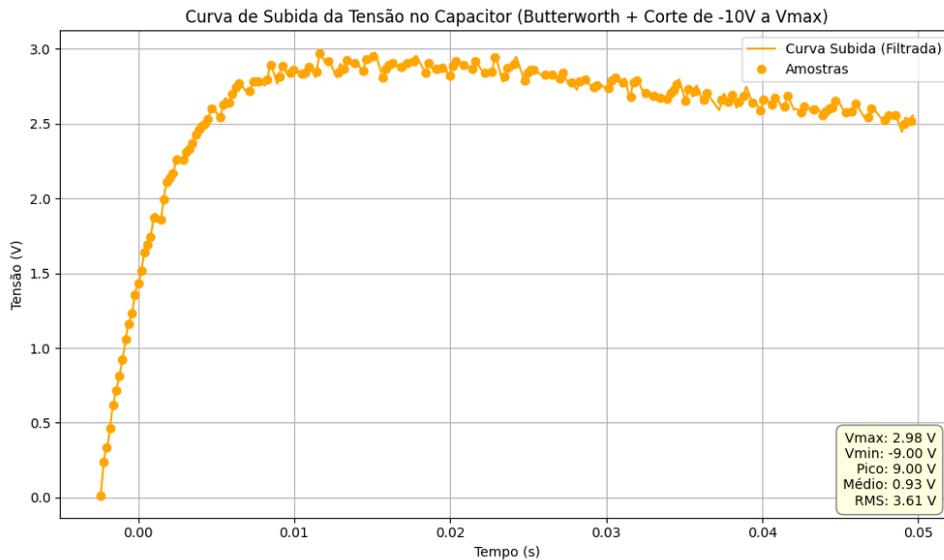


Figura 11 – Extração da curva de subida com filtro Butterworth (Autor: Próprio)

A Fig.12 mostra os ajustes com a função de Mittag-Leffler. O melhor ajuste ocorreu para  $\beta = 1,15$ , com menor EQM e RMSE. Isso indica um comportamento levemente mais rápido que o modelo clássico ( $\beta = 1$ ).

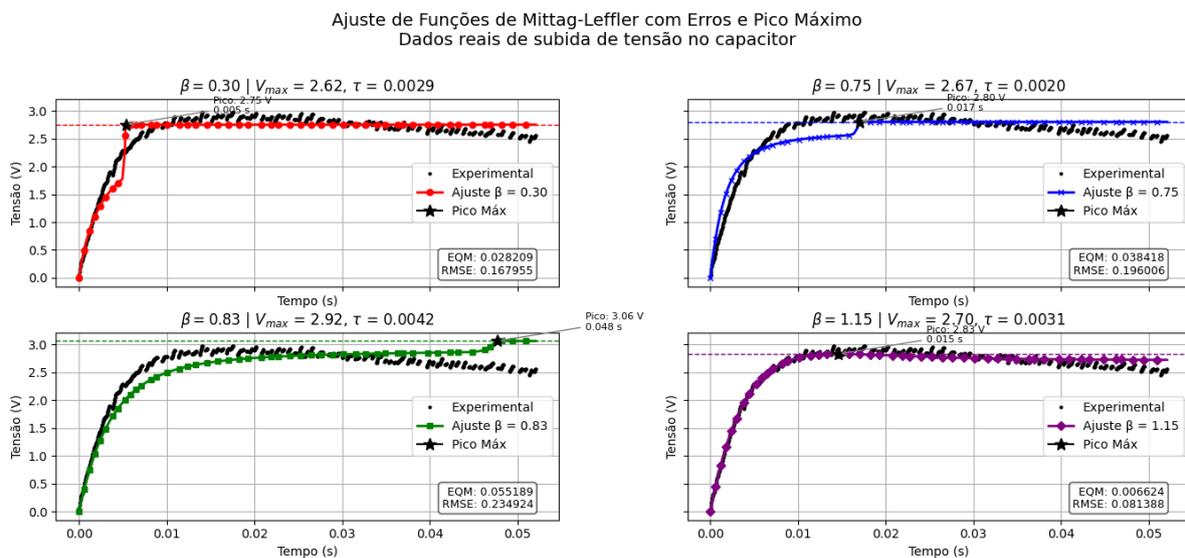


Figura 12 – Ajuste com funções de Mittag-Leffler (Autor: Próprio)

A função de Mittag-Leffler de ordem  $\beta$  é uma generalização da exponencial:

$$E_{\beta,\beta}(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma[\beta(n+1)]} \tag{4.36}$$

No contexto do circuito RC, ela substitui a função exponencial da solução clássica.

### 4.5.2 Análise dos Resultados do Ajuste para Diferentes Valores de $\beta$

Na Tabela 2, são apresentados os resultados obtidos a partir dos ajustes da curva de resposta experimental para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ , representativo da ordem fracionária do modelo adotado. Observa-se que, à medida que o valor de  $\alpha$  varia, há alterações significativas nos parâmetros ajustados, como a tensão máxima ( $V_{\max}$ ), a constante de tempo ( $\tau$ ), e os erros de ajuste (EQM e RMSE).

O menor erro quadrático médio (EQM = 0,0066) e menor RMSE (0,0814) foram obtidos para  $\beta = 1,15$ , indicando que este valor proporcionou o melhor ajuste entre o modelo fracionário e os dados experimentais. Esse resultado sugere que uma ordem ligeiramente superior à unidade pode representar adequadamente a dinâmica observada no circuito analisado.

Por outro lado, para valores menores de  $\beta$  (como 0,30 e 0,75), os erros de ajuste aumentam consideravelmente, indicando que tais ordens não capturam adequadamente a natureza do fenômeno observado. Além disso, nota-se uma variação no tempo de pico e na tensão de pico conforme  $\beta$  se altera, evidenciando a influência direta da ordem fracionária na forma da resposta temporal do sistema.

Tabela 2 – Resultados do ajuste para diferentes valores de  $\beta$

| $\beta$ | $V_{\max}$ | $\tau$ | EQM    | RMSE   | Tempo pico (s) | Tensão pico (V) |
|---------|------------|--------|--------|--------|----------------|-----------------|
| 0.30    | 2.6224     | 0.0029 | 0.0282 | 0.1680 | 0.0053         | 2.7535          |
| 0.75    | 2.6686     | 0.0020 | 0.0384 | 0.1960 | 0.0170         | 2.8020          |
| 0.83    | 2.9200     | 0.0042 | 0.0551 | 0.2349 | 0.0481         | 3.0615          |
| 1.15    | 2.6992     | 0.0031 | 0.0066 | 0.0814 | 0.0146         | 2.8319          |

### 4.5.3 Ajuste do Modelo ao Sistema RL com Dados Reais no Ambiente VsCode

A figura 13 do experimento teve como meta observar o comportamento transitório da tensão sobre um indutor em um circuito série RL, quando submetido a uma excitação por degrau de tensão DC. O sinal da figura abaixo foi adquirido experimentalmente no laboratório da UFAM utilizando um osciloscópio digital Tektronix e os dados

foram salvos em formato CSV para posteriormente serem analisados como no decorrer da pesquisa.

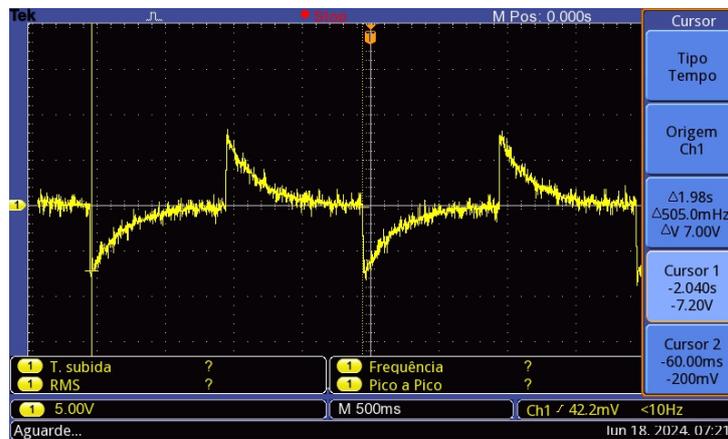


Figura 13 – Captura do osciloscópio da tensão no indutor

Por tanto a tensão foi medida diretamente nos terminais do indutor, sendo capturada no momento da comutação do relé (acionado via Arduino), simulando um degrau de tensão. A figura 13 foi extraída diretamente do osciloscópio, e representa a resposta da tensão no indutor ao degrau de tensão, a fonte DC foi ajustada para 5 V e os parâmetros observados foi a variação entre picos, variação de pico a pico, cursor 1 (valor mínimo): -7.20 V em  $t = -2.040$  s, cursor 2 (ponto de análise): -200 mV em  $t = -60.00$  ms, escala de tempo: 500 ms/div e escala de tensão: 5.00 V/div. Com isso pude interpretar os resultados da forma de onda onde existe um pico inicial negativo intenso na comutação da chave (relé), representando a variação brusca da corrente que tenta se manter contínua, após o pico, observa-se uma decrescimo exponencial da tensão, coerente com a função da derivada do indutor em relação a tensão onde decai conforme a corrente se estabiliza, A periodicidade da forma de onda indica comutação periódica do relé, com intervalo próximo de 2 segundos entre pulsos. Esse comportamento confirma o modelo teórico do circuito RL com carga súbita, onde a constante de tempo pequena o suficiente para justificar a resposta rápida visível nas primeiras divisões de tempo do osciloscópio.

$$\tau = \frac{L}{R} \approx \frac{12 \text{ mH}}{20 \Omega} = 0,6 \text{ ms}, \quad (4.37)$$

Com aquisição dos dados via osciloscópio bem sucedida e o evidenciamento da

resposta dinâmica esperada para um indutor submetido a uma excitação por degrau de tensão permitiu-se extrair e plotar graficamente os parâmetros experimentais importantes e confirmar a modelagem teórica da tensão no indutor da equação 4.37. Os dados em CSV exportados do osciloscópio podem ser observado na figura 14, onde essa nova imagem destaca as curvas de subida da tensão no indutor, sendo uma excelente preparação para o ajuste analítico das constantes do circuito. As características observadas demonstram que cada subida corresponde a um ciclo de chaveamento no qual a corrente no indutor aumenta devido à aplicação da fonte e a forma característica é a de uma exponencial crescente negativa (em valor absoluto) de acordo com a equação 4.37 e as oscilações de alta frequência são sobrepostas ao sinal atribuídas ao ruído da chave e do ambiente, além das limitações de resolução da medição.

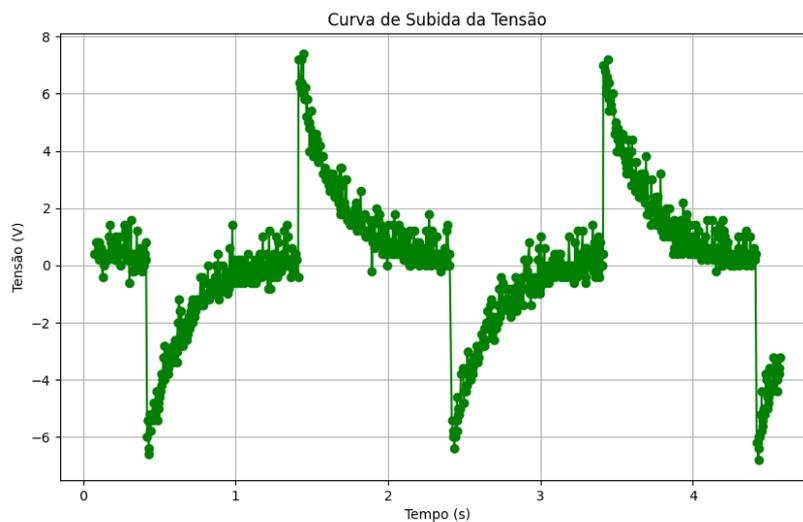


Figura 14 – Curvas de Subida da Tensão no Indutor

Por este motivo que foi aplicado um filtro digital chamado de filtro de média móvel, com o objetivo de reduzir ruídos de alta frequência presentes na medição real da tensão no indutor. A figura 15 mostra a comparação entre o sinal original bruto (em azul claro) e o sinal suavizado (em laranja) com uso deste filtro em Python.

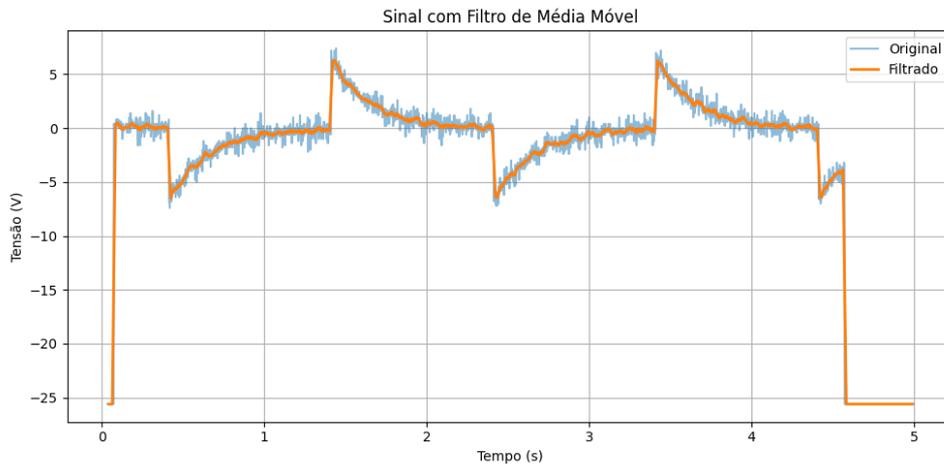


Figura 15 – Tensão no Indutor com Filtro de Média Móvel

Com isso a filtragem preservou a forma geral da resposta do circuito, especialmente as transições exponenciais, ao mesmo tempo que elimina flutuações rápidas e ruído de medição, essa abordagem foi útil para posterior fazemos o ajuste de modelos matemáticos, como exponenciais clássicas ou funções com derivadas fracionárias e a filtragem também facilitou a visualização da dinâmica do circuito, principalmente nas regiões de chaveamento e relaxação. Nesta figura 16 mostra uma análise detalhada de uma única curva de subida da tensão no indutor extraída com auxílio da computação em Python e aplicou-se estatísticas básicas sobre os dados para melhor compreensão dos dados da curva.

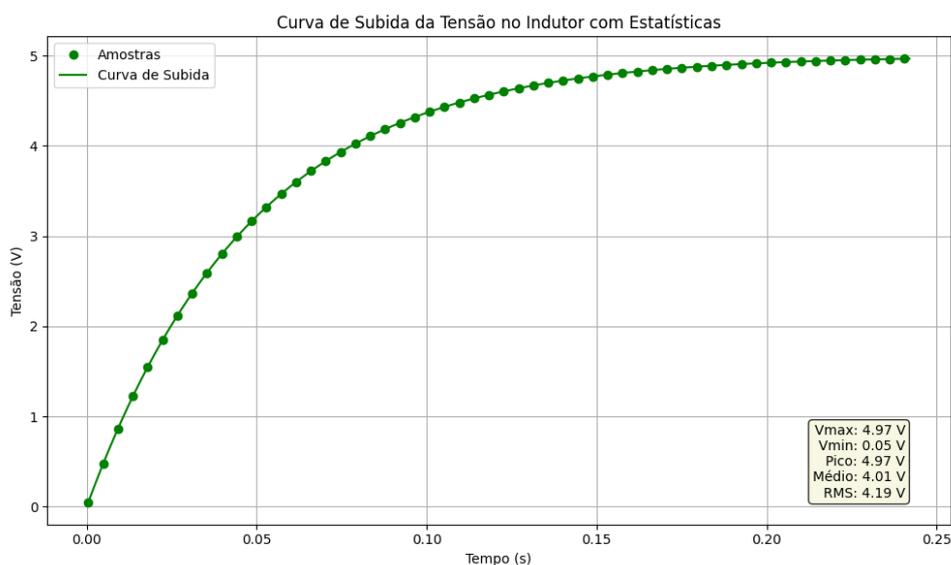


Figura 16 – Curva de Subida com Estatísticas

Esse feito nos proporcionou a extração de uma curva isolada de subida onde foi selecionado um intervalo de tempo correspondente a uma das transições de chaveamento, na qual a tensão no indutor cresce de forma exponencial, com isso a plotagem dos pontos amostrados em verdes em círculos no gráfico passaram a representar as amostras reais coletadas durante o experimento e a linha contínua ("Curva de Subida") foi plotada, indicando que os dados foram suavizados através do filtro média móvel para melhor visualização da tendência. A Figura 17 apresenta o resultado do ajuste da resposta de carga de um capacitor utilizando funções de Mittag-Leffler para diferentes valores da ordem fracionária  $\alpha$ , com a finalidade de comparar o desempenho dessas funções em relação ao modelo exponencial clássico, correspondente a  $\alpha = 1$ , podendo ser testado uma variedade de  $\alpha$ .

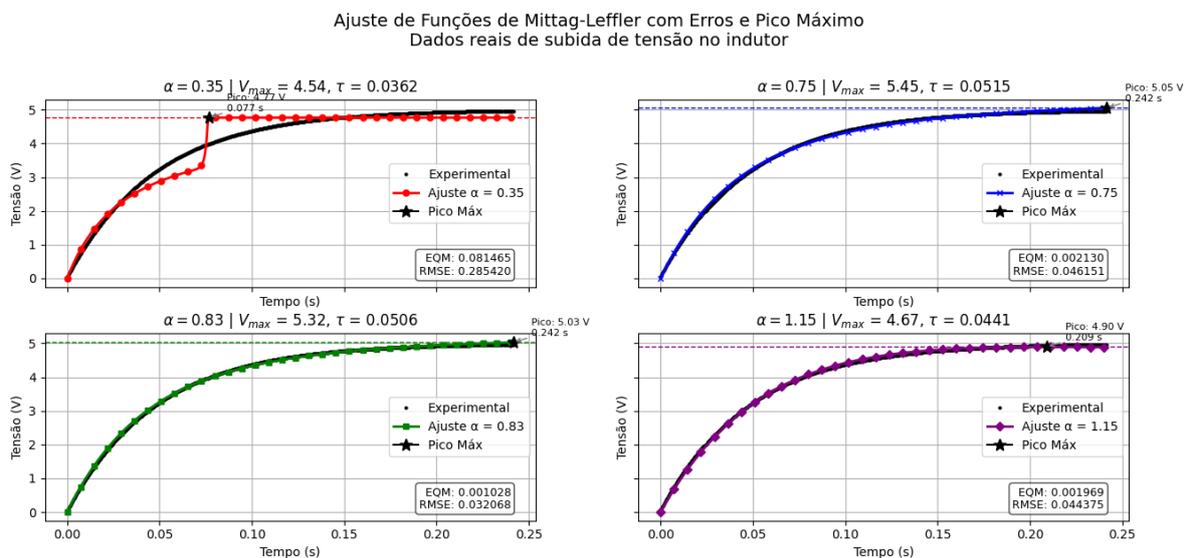


Figura 17 – Ajuste de Funções de Mittag-Leffler

#### 4.5.4 Análise dos Resultados do Ajuste para Diferentes Valores de

$\alpha$

A Tabela 3 apresenta os resultados do ajuste dos dados experimentais para diferentes valores do parâmetro fracionário  $\alpha$ , utilizando uma função do tipo de Mittag-Leffler. Os parâmetros obtidos incluem a tensão máxima  $V_{max}$ , a constante de tempo  $\tau$ , o erro quadrático médio (EQM), a raiz do erro quadrático médio (RMSE), o tempo de

pico e a tensão de pico.

Observa-se que, à medida que  $\alpha$  se aproxima de 1, os erros de ajuste (EQM e RMSE) diminuem significativamente, indicando uma melhor aderência do modelo aos dados experimentais. O valor menor de RMSE foi obtido para  $\alpha = 0,83$ , evidenciando que esse valor fornece o ajuste mais preciso dentro da faixa analisada.

Adicionalmente, os valores de  $V_{\max}$ , tempo de pico e tensão de pico tendem a se estabilizar à medida que  $\alpha$  se aproxima de 1. A tensão de pico permanece próxima de 5 V, e o tempo de pico converge para aproximadamente 0,2415 s nos casos em que o ajuste é mais acurado. Isso sugere que o modelo com  $\alpha$  próximo de 1 descreve com maior fidelidade a dinâmica observada no experimento.

Por outro lado, para valores mais baixos de  $\alpha = 0,35$ , observa-se uma superestimação da tensão máxima e um aumento significativo dos erros, o que indica uma inadequação do modelo nesse regime.

Esses resultados reforçam a importância da escolha apropriada do parâmetro fracionário  $\alpha$  em modelos com derivadas de ordem não inteira, uma vez que este afeta diretamente a qualidade do ajuste e a capacidade do modelo em representar com precisão o comportamento dinâmico observado.

Tabela 3 – Resultados do ajuste para diferentes valores de  $\alpha$

| $\alpha$ | $V_{\max}$ | $\tau$ (s) | EQM    | RMSE   | Tempo do Pico (s) | Tensão de Pico (V) |
|----------|------------|------------|--------|--------|-------------------|--------------------|
| 0.35     | 4.5417     | 0.0362     | 0.0815 | 0.2854 | 0.0766            | 4.7688             |
| 0.65     | 5.6070     | 0.0520     | 0.0038 | 0.0617 | 0.2415            | 5.0810             |
| 0.83     | 5.3180     | 0.0506     | 0.0010 | 0.0321 | 0.2415            | 5.0289             |
| 1.15     | 4.6705     | 0.0441     | 0.0019 | 0.0443 | 0.2095            | 4.9072             |

## 4.6 Conclusão

Neste capítulo, foi realizada a identificação experimental de parâmetros em circuitos físicos RC e RL, com o objetivo de evidenciar os efeitos de memória presentes em componentes passivos reais e justificar a utilização de modelos fracionários. Por meio de procedimentos de aquisição de dados com instrumentos como osciloscópio digital e sensores de corrente, foram obtidas curvas de resposta transitória da tensão e

corrente nos circuitos analisados. A partir desses dados, empregaram-se métodos de ajuste numérico baseados em funções exponenciais e funções de Mittag-Leffler para estimar os expoentes fracionários associados à dinâmica dos componentes, identificados como  $\alpha$  e  $\beta$ .

Os resultados obtidos indicaram desvios significativos em relação aos modelos ideais de primeira ordem, confirmando a presença de comportamento não ideal e dependente do histórico nos componentes utilizados. Tais achados reforçam a necessidade da modelagem com derivadas de ordem não inteira, não apenas como uma alternativa teórica, mas como uma ferramenta prática para representar sistemas reais com maior precisão.

As informações obtidas neste capítulo servirão como base para a implementação e sintonia dos controladores fracionários que serão explorados nos capítulos seguintes. Dessa forma, a identificação dos parâmetros de memória constitui um elo essencial entre a modelagem fracionária e a aplicação do controle fracionário em uma planta experimental de conversor Buck.

## 5

---

# FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE CONTROLE PARA O CONVERSOR STEP DOWN

Controlar um sistema consiste em medir uma variável de interesse e ajustar o sinal de entrada de forma a manter a resposta desejada, mesmo diante de perturbações ou incertezas. Essa concepção é amplamente discutida por autores como (Nise 2011), (Dorf e Bishop 2009) e (Ogata 2010a), sendo aplicável a diversos sistemas dinâmicos. Neste capítulo, apresenta-se a modelagem do conversor Buck em configuração cascata, juntamente com uma análise das condições de estabilidade para sistema linear invariante no tempo, tanto de ordem inteira quanto fracionária. São discutidos os fundamentos dos controladores FOPID e FOPP, além da resposta em frequência associada a funções com expoentes fracionários. Além disso, também é abordada a aproximação de Oustaloup, utilizada para representar operadores fracionários como sistemas racionais de ordem inteira, permitindo sua implementação prática. Por fim, são descritos os métodos de discretização empregados nos controladores.

## 5.1 Controlador PID de Ordem Fracionária

O controlador PID de ordem fracionária (FOPID) representa uma extensão do controlador PID clássico, permitindo que os operadores de integração e diferenciação assumam ordens não inteiras. Esse controlador é definido por cinco parâmetros: os ganhos proporcional ( $K_p$ ), integral ( $K_i$ ) e derivativo ( $K_d$ ), além das ordens fracionárias de integração ( $\lambda$ ) e diferenciação ( $\mu$ ), com  $\lambda, \mu \in R^+$ . Essa estrutura confere maior flexibilidade e capacidade de ajuste fino ao controle de sistemas dinâmicos.

Segundo (Podlubny 1999a), o FOPID oferece melhor desempenho em sistemas de alta ordem ou com comportamento intrinsecamente fracionário, proporcionando respostas mais suaves e robustas. A Figura 18 apresenta o diagrama funcional do controlador FOPID, onde se observa que o PID convencional é um caso particular obtido para  $\lambda = 1$  e  $\mu = 1$ .

Outra vantagem significativa do FOPID é sua menor sensibilidade a variações nos parâmetros da planta. De acordo com (Dingyü Xue et al. 2006), isso se deve aos dois graus de liberdade adicionais fornecidos pelas ordens fracionárias, que conferem ao controlador uma maior robustez diante de incertezas.

Além disso, (Matignon 1998a) demonstrou que controladores fracionários podem ampliar a região de estabilidade dos sistemas lineares invariantes no tempo. Para sistemas descritos por:

$$D^q x(t) = Ax(t), \quad \text{com } 0 < q < 1, \quad (5.1)$$

a condição de estabilidade é dada por:

$$|\arg(\text{eig}(A))| > \frac{q\pi}{2} \quad (5.2)$$

onde  $\text{eig}(A)$  representa os autovalores da matriz  $A$  (ou os polos do sistema). Isso implica que, diferentemente dos sistemas de ordem inteira, os sistemas fracionários podem apresentar estabilidade mesmo com polos fora do semiplano esquerdo clássico do plano complexo. A Figura 19 ilustra essa ampliação da região de estabilidade.

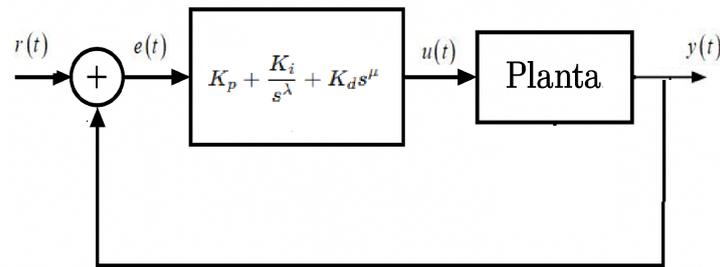


Figura 18 – Estrutura funcional do controlador PID de ordem fracionária (FOPID).

## 5.2 Estabilidade do Sistema de Ordem Fracionária

Na teoria clássica de controle, um sistema linear invariante no tempo (LIT) é considerado estável se todas as raízes do polinômio característico, ou seja, os polos do sistema, possuem parte real negativa. Essa condição equivale a exigir que os polos estejam localizados no semiplano esquerdo do plano complexo, o que garante que as soluções do sistema tendam a zero ao longo do tempo, assegurando a estabilidade assintótica.

Entretanto, quando se trata de sistemas fracionários, essas condições mudam substancialmente. A estabilidade de sistemas dinâmicos de ordem fracionária não pode ser analisada diretamente pelos critérios clássicos, uma vez que a resposta dinâmica passa a depender da ordem fracionária dos derivadores presentes no modelo do sistema.

Para tratar essa nova realidade, o teorema de estabilidade de Matignon, baseado na folha de Riemann, é amplamente utilizado na literatura (Matignon 1998b; C. A. Monje et al. 2010). Esse teorema estabelece que um sistema fracionário linear e invariante no tempo, definido na forma de Caputo, é assintoticamente estável se, e somente se, todos os autovalores  $\lambda_i$  da matriz  $A$  satisfazem:

$$|\angle \lambda_i| > \frac{q\pi}{2}, \quad (5.3)$$

em que  $0 < q < 2$  representa a ordem fracionária do sistema e  $\angle \lambda_i$  denota o ângulo de fase do autovalor  $\lambda_i$  no plano complexo.

A condição imposta pela equação (5.3) implica que a região de estabilidade para sistemas fracionários se expande, permitindo a existência de polos com parte real positiva, desde que respeitem o critério angular. Isso representa uma mudança de paradigma em relação aos sistemas clássicos de ordem inteira, cujos polos devem estar estritamente no semiplano esquerdo.

De acordo com (Podlubny 1999b) e (Dingyu Xue et al. 2006), essa característica é particularmente útil no controle de plantas com dinâmica fracionária ou de ordem muito elevada, pois permite projetar controladores robustos que garantem estabilidade mesmo em condições mais flexíveis.

A Figura 19 ilustra as regiões de estabilidade no plano complexo para diferentes ordens fracionários  $q$ .

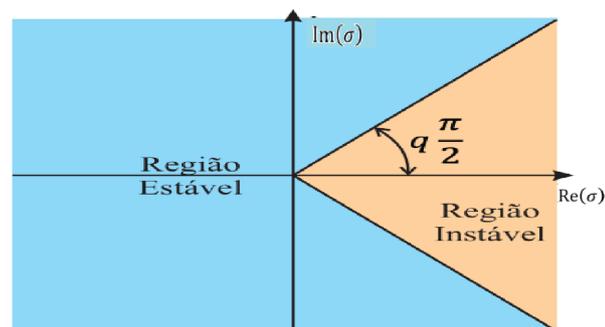


Figura 19 – Regiões de estabilidade para diferentes ordens fracionários segundo o Teorema de Matignon.

Além disso, a Figura 20 apresenta a representação geométrica  $p$  para aproximação de operadores fracionários no plano complexo. O método busca substituir o operador  $s^\alpha$  por uma função racional composta por polos e zeros distribuídos de forma logarítmica no eixo real negativo, reproduzindo o comportamento fracionário em uma banda de frequência previamente definida. Observa-se no diagrama o eixo real ( $Re$ ) e o eixo imaginário ( $Im$ ), com polos localizados em  $-p_1, -p_2, -p_3, \dots$ . A linha azul indica o operador fracionário  $s^\alpha$ , a linha vermelha corresponde a  $s^\beta$  e a linha verde representa o operador clássico  $s$ . As malhas tracejadas evidenciam a distribuição dos polos e zeros da aproximação, garantindo a equivalência entre o operador fracionário e sua forma

racional dentro da região de interesse. Dessa forma, o método fornece uma ferramenta essencial para a implementação prática de controladores fracionários e para a análise de sistemas.

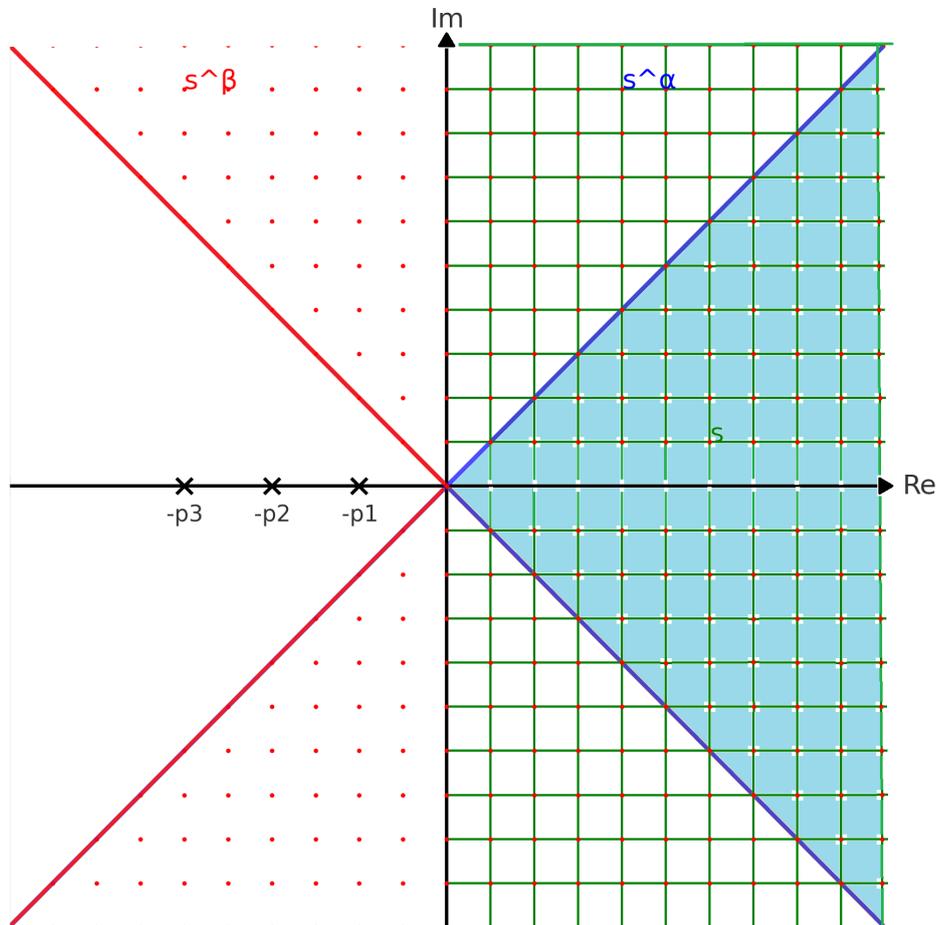


Figura 20 – Representação geométrica das regiões de estabilidade segundo os parâmetros fracionários adotados.

Portanto, ao trabalhar com sistemas fracionários, é fundamental considerar tanto os novos critérios de estabilidade estabelecidos pelo Teorema de Matignon quanto o fato de que, em ordens não comensuráveis, a análise deve adotar o pior caso, contudo neste estudo,  $\beta = 1.15$  garantem que os polos atendam simultaneamente ao critério de intersecção em todas as regiões de estabilidade.

### 5.3 Controlador pelo Método da Alocação de Polos (FOPP)

A técnica de alocação de polos é uma das abordagens mais clássicas no projeto de controladores em sistemas lineares. A ideia central consiste em determinar os ganhos do controlador de forma que os polos da malha fechada assumam posições previamente especificadas no plano complexo, assegurando que o sistema atenda aos critérios de desempenho desejados, como tempo de acomodação, sobressinal e tempo de subida (Ogata 2010b; A. Bazanella e Strapasson 2005; Kuo 2003).

Segundo (A. Bazanella e Strapasson 2005), a realocação dos polos permite o ajuste direto da dinâmica da planta controlada, garantindo desempenho robusto, principalmente em malha fechada. Essa técnica tem ampla aplicação em sistemas de ordem inteira, mas recentes avanços têm possibilitado sua extensão para sistemas fracionários.

O método de Alocação de Polos de Ordem Fracionária (FOFP), proposto em (Ayres Junior et al. 2020), representa uma generalização da alocação de polos clássica. Ele utiliza como referência uma função de transferência desejada de ordem fracionária, o que permite maior flexibilidade no ajuste da resposta dinâmica.

Neste método, adota-se como modelo de referência a resposta ao degrau de um sistema fracionário de três termos, que serve como análogo ao sistema de segunda ordem no contexto inteiro. A partir dessa resposta, são construídas curvas relacionando o máximo sobressinal ( $\xi$ ) e o tempo de acomodação com a frequência natural ( $\omega_n$ ) e a ordem fracionária  $\alpha$ .

$$C(s) = \frac{c_m s^{m\mu} + \dots + c_1 s^\mu + c_0}{s(d_n s^{n\lambda} + \dots + d_1 s^\lambda + d_0)} \quad (5.4)$$

Na equação (5.4):

- $c_i$  e  $d_i$  são coeficientes a serem ajustados para atender às especificações dinâmicas.
- $\alpha$  é a ordem fracionária comensurável comum aos termos, permitindo a manipulação algébrica dos polinômios.
- O fator  $s$  no denominador garante a presença de um integrador puro, assegurando erro nulo em regime permanente para sinais constantes.

A função desejada da malha fechada, com base no modelo de segunda ordem fracionária e polos auxiliares, é dada por:

$$P(s) = (s^{2\alpha} + 2\xi\omega_n^\alpha s^\alpha + \omega_n^{2\alpha}) \cdot (s^\beta + f_0) \cdot (s + f_1)(s + f_2) \quad (5.5)$$

onde:

- $P_d(s)$  é o polinômio de referência da planta fechada.
- $P_{\text{aux}}(s)$  define os polos adicionais (rápidos) para garantir controlabilidade e evitar interações dinâmicas indesejadas.
- $\xi$  é o fator de amortecimento e  $\omega_n$  a frequência natural do sistema desejado.

A introdução dos polos auxiliares, usualmente distantes do domínio de interesse, assegura a implementação prática do controlador e evita oscilações de alta frequência que possam afetar a robustez do sistema. Além disso, a escolha de  $\alpha$  comensurável possibilita a aplicação de técnicas como a aproximação de Oustaloup para implementação computacional (C. A. Monje et al. 2010).

Em resumo, o método FOPP amplia significativamente as possibilidades de projeto em sistemas dinâmicos com comportamento fracionário. Ao permitir uma realocação precisa dos polos em sistemas com dinâmica não inteira, torna-se uma ferramenta valiosa para o controle de plantas complexas ou com memória, superando as limitações da alocação clássica baseada apenas em sistemas de ordem inteira.

## 5.4 Projeto do Controlador via Equação Polinomial Matricial

O projeto de controladores através da técnica de alocação de polos tem sido amplamente utilizado na engenharia de controle, devido à sua robustez conceitual e à clareza com que se relaciona a dinâmica desejada do sistema com os parâmetros do controlador (A. S. Bazanella e Silva Jr 2005). Em sua formulação clássica, essa técnica visa determinar um controlador tal que o polinômio característico da malha fechada seja

exatamente igual a um polinômio desejado especificado pelo projetista. Essa igualdade, muitas vezes denominada *Equação Diofantina* na literatura de controle, é central para o posicionamento dos polos em locais estrategicamente definidos no plano complexo.

A equação polinomial assume a forma:

$$A(s)X(s) + B(s)Y(s) = T(s) \quad (5.6)$$

onde  $A(s)$  e  $B(s)$  representam os polinômios da planta,  $T(s)$  o polinômio desejado, e  $X(s)$ ,  $Y(s)$  são os polinômios do controlador a serem determinados. No contexto de sistemas fracionários, essa formulação pode ser generalizada para acomodar as propriedades específicas de sistemas com derivadas não inteiras, exigindo novas técnicas numéricas e analíticas para a sua resolução (Ayres Junior et al. 2020).

Além disso, diante de incertezas paramétricas inevitáveis nos sistemas físicos reais, surge a necessidade de uma formulação mais robusta: a *Equação Polinomial Intervalar*. Nela, os coeficientes de  $A(s)$ ,  $B(s)$  e  $T(s)$  não são valores fixos, mas intervalos que refletem a faixa de variação dos parâmetros. Segundo (Lordelo e Ferreira 2005), essa abordagem permite projetar controladores que não apenas funcionam para um modelo nominal, mas que também se mantêm robustos frente a perturbações e incertezas, algo essencial em ambientes industriais e biológicos.

A resolução dessas equações pode ser realizada através da construção da matriz de Sylvester, que permite transformar a equação polinomial em um sistema linear de equações algébricas, inclusive no caso fracionário (Ayres Junior et al. 2020). A matriz de Sylvester pode ser representada genericamente como:

$$S = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Essa estrutura permite escrever a equação polinomial como um sistema  $S \cdot \theta = T$ , onde  $\theta$  é o vetor dos coeficientes dos polinômios  $X(s)$  e  $Y(s)$  a serem encontrados.

No caso intervalar, esse sistema torna-se uma família de sistemas lineares parametrizados, exigindo o uso de técnicas de *programação alvo* ou *análise intervalar* para assegurar a viabilidade da solução (Lordelo e Ferreira 2005).

A vantagem dessa abordagem é dupla: ela fornece uma estrutura clara para o projeto e, simultaneamente, garante tolerância a incertezas. Em sistemas fracionários, onde pequenas variações nos parâmetros podem levar a alterações significativas na dinâmica, esse tipo de robustez é especialmente desejável. Além disso, com a crescente aplicação de sistemas fracionários em modelagem de fenômenos complexos como difusão anômala, eletroquímica, bioengenharia e controle térmico (Concepción A. Monje et al. 2010), torna-se cada vez mais relevante desenvolver métodos sistemáticos e confiáveis para projeto de controladores baseados em equações polinomiais intervalares, adaptados à lógica e equacionamento de ordem não inteira.

## 5.5 Método de Aproximação de Oustaloup Recursiva

A implementação direta de operadores diferenciais de ordem fracionária, tal como  $s^\alpha$ , com  $\alpha \in R$ , impõe sérios desafios tanto em termos computacionais quanto práticos, dado o caráter não local desses operadores e a presença de memória infinita associada ao cálculo fracionário (Birs e colab. 2022).

Uma solução amplamente empregada é a aproximação desses operadores por funções de transferência de ordem inteira, permitindo o uso de ferramentas clássicas de projeto e implementação em plataformas digitais.

Dentre os métodos de aproximação disponíveis, destaca-se a técnica de Oustaloup recursiva, também conhecida como *Crone approximation* (Commande Robuste d'Ordre Non Entier). Essa técnica foi proposta inicialmente por Oustaloup et al. e aprimorada por diversos autores ao longo do tempo (Valério e Costa 2013; Ayres Junior et al. 2020). A ideia central é a aproximação de um operador do tipo  $s^\alpha$  por um filtro de ordem inteira com múltiplos polos e zeros localizados em uma faixa de frequência pré-definida  $[\omega_l, \omega_h]$ , conforme apresentado em:

$$s^\alpha \approx k \prod_{n=-N}^N \frac{s + \omega_{z,n}}{s + \omega_{p,n}}, \quad \alpha \in R \quad (5.8)$$

onde  $\omega_{z,n}$  e  $\omega_{p,n}$  são, respectivamente, as frequências dos zeros e polos, distribuídos de forma logarítmica, e  $k$  é um ganho ajustado para garantir unidade de ganho em  $\omega = 1$  rad/s.

Segundo (Valério e Costa 2013), o método apresenta excelente desempenho para aproximações na faixa de frequência especificada, sendo possível obter bons resultados mesmo com ordens relativamente baixas (pequenos valores de  $N$ ). Contudo, há um compromisso entre precisão da aproximação e complexidade do modelo, pois aumentar  $N$  resulta em funções de transferência de ordem mais elevada.

(Deniz et al. 2020) ressaltam que, embora a aproximação de Oustaloup preserve razoavelmente a estabilidade da função de transferência original, a escolha inadequada da banda de frequência ou da ordem de aproximação pode levar a modelos frágeis, especialmente sensíveis a variações nos parâmetros. Tal fragilidade pode comprometer a robustez do controlador, mesmo quando o projeto teórico sugira estabilidade.

Essa preocupação é ainda mais relevante no contexto de controladores de ordem fracionária (COF), cuja implementação prática geralmente requer a conversão para uma estrutura de controle digital. Nesse sentido, a aproximação de Oustaloup oferece uma ponte entre o projeto contínuo fracionário e sua implementação digital com hardware clássico (Concepción A. Monje et al. 2010; Dingyu Xue 2017).

Além disso, para contornar a elevada ordem da função de transferência resultante, é comum empregar técnicas de redução de ordem de modelo, como os métodos baseados em truncamento de Hankel ou aproximação de Padé, a fim de obter modelos mais simples e interpretáveis (Faieghi e Nemati 2011).

No domínio do tempo discreto, a implementação do controle exige a substituição da transformada de Laplace pela transformada  $z$ , viabilizando a programação do controle em dispositivos digitais (Nise 2012; Landau e Zito 2006). Como discutido por (Alexandre S. Bazanella e Júnior 2017), essa transição também permite a aplicação de técnicas avançadas de controle, como o controle preditivo e adaptativo.

Portanto, a aproximação de Oustaloup recursiva se consolida como uma das ferramentas mais eficazes para a implementação de sistemas de controle fracionário em ambientes digitais, unindo precisão, viabilidade prática e flexibilidade para ajustes em diferentes faixas de frequência.

### 5.5.1 Método de Transformação de Tustin

O método de Tustin, também conhecido como transformação bilinear, é uma técnica amplamente empregada na discretização de sistemas contínuos, especialmente em aplicações de controle digital. Este método estabelece uma correspondência entre os domínios contínuo ( $s$ ) e discreto ( $z$ ) por meio da substituição:

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (5.9)$$

onde  $T_s$  representa o período de amostragem do sistema (Ogata 2010a; Franklin et al. 2015). No contexto de sistemas de ordem fracionária, a aplicação direta de operadores diferenciais do tipo  $s^\alpha$  pode ser desafiadora. Para contornar essa limitação, utiliza-se uma função de mapeamento  $s = G(z)$  — como a própria transformação de Tustin — permitindo-se aproximar o sistema fracionário contínuo por uma representação discreta equivalente (Concepción A. Monje et al. 2010).

Essa aproximação é viabilizada por meio de funções geradoras, geralmente expressas como séries de potências, as quais são escolhidas conforme a resposta dinâmica

desejada (Podlubny 1999a). Após a discretização inicial do sistema fracionário, procede-se à expansão dessas funções em uma série de potência de ordem inteira, resultando em uma implementação viável no domínio digital.

A abordagem conhecida como equivalente discreto ou emulação é uma técnica clássica para o projeto de controladores digitais. Nela, um compensador contínuo  $D(s)$  é inicialmente projetado e, em seguida, convertido para o domínio discreto  $D(z)$  por meio de um método de discretização — como o de Tustin (Franklin et al. 2015). É importante destacar que tal transformação implica em uma aproximação: enquanto o controlador contínuo considera o histórico completo do sinal de erro  $e(t)$ , a versão discretizada responde apenas a valores amostrados  $e[kT_s]$ .

A essência do método de Tustin reside na utilização da regra do trapézio para integrar numericamente a evolução do erro entre dois instantes de amostragem, assumindo uma aproximação linear entre os pontos. Com isso, obtém-se uma representação que preserva, de forma satisfatória, as características de estabilidade e resposta temporal do sistema original, tornando-se uma ferramenta eficiente na transição entre sistemas contínuos e discretos, inclusive no caso de modelagens fracionárias (Concepción A. Monje et al. 2010; Petráš 2011).

## 5.6 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentados os fundamentos teóricos que sustentam o desenvolvimento de controladores de ordem fracionária para sistemas dinâmicos, com ênfase no conversor Buck. Inicialmente, revisou-se o controlador PID clássico e sua extensão para o PID de ordem fracionária, destacando a flexibilidade proporcionada pelos parâmetros não inteiros.

A estabilidade dos sistemas fracionários foi abordada com base no critério de Matignon, essencial para a análise do comportamento dinâmico. Em seguida, apresentou-se o método da alocação de polos fracionária (FOPP), permitindo posicionar os polos desejados em sistemas de ordem não inteira.

O projeto de controladores via Equação Polinomial Matricial foi detalhado como

uma abordagem sistemática para lidar com incertezas paramétricas, mostrando como a construção da matriz de Sylvester transforma o problema do projeto em um sistema linear de equações algébricas, aplicável também a sistemas de ordem fracionária.

Para viabilizar a implementação prática, foram introduzidos dois métodos de aproximação fundamentais: o método de Oustaloup recursivo e a transformação de Tustin, ambos permitindo representar operadores fracionários no domínio discreto, com isso esses elementos podem fornecer uma base sólida para a implementação e simulação de controladores de ordem fracionária.

## 6

---

# PROCEDIMENTO DA METODOLOGIA DE CONTROLE PARA O CONVERSOR BUCK EM CASCATA

**E**ste capítulo tem por objetivo apresentar os procedimentos metodológicos utilizados para o projeto dos conversores Buck-Buck em cascata e dos controladores, bem como descrever os aspectos envolvidos nos procedimentos de projeto conforme Ayres Júnior et al. (2020), abrangendo modelagem, simulação e implementação do sistema físico a ser investigado. Como mecanismo de validação, foi avaliado o desempenho do controlador utilizando métodos de controle PID fracionário por meio do método FOPP, que visa controlar a tensão de saída para uma carga fixa.

### 6.1 Sistema Conversor DC/DC: Topologia Buck em Cascata

O conversor Buck CC-CC é uma configuração elementar que produz uma tensão de saída média inferior à da fonte de alimentação do conversor. Um conversor Buck é composto por uma fonte de tensão contínua (CC), uma indutância, um capacitor, um resistor e duas chaves complementares implementadas com um IGBT e um diodo. A Figura 21 ilustra a configuração em cascata de dois conversores Buck.

Neste trabalho, propõe-se um projeto de microrrede baseado na interligação em cascata de dois conversores do tipo Buck, sendo um configurado como *alimentador* e o outro como *carga*. O conversor alimentador tem a função de regular a tensão de saída, permitindo a emulação de um sistema com comportamento de uma fonte fotovoltaica. Nesse contexto, uma tensão  $V_{in1}$  é injetada no Buck alimentador e, com pequenas variações no ciclo de trabalho (*duty cycle*), observa-se pequenas quedas na tensão de saída.

A topologia proposta para a microrrede é, portanto, caracterizada como uma estrutura Buck-Buck, permitindo a análise e o controle da transferência de energia entre os dois estágios do conversor.

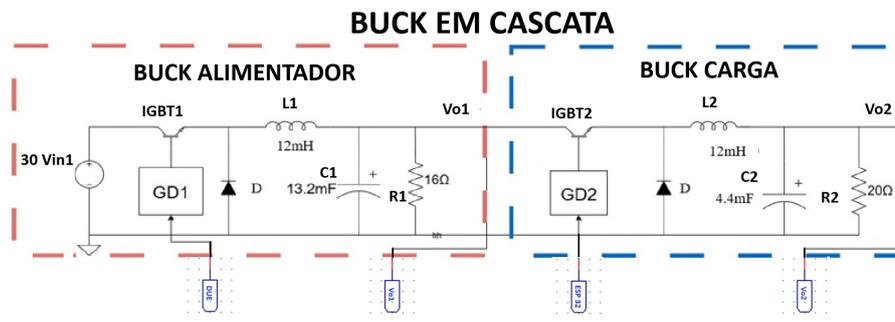


Figura 21 – Topologia Buck-Buck em cascata.

A planta escolhida para uso nesta abordagem metodológica consiste em um sistema conversor CC/CC pertencente à topologia Buck, cuja descrição operacional e modelagem matemática foram apresentadas no Capítulo 3. Tal escolha justifica-se pela ampla aplicação do conversor Buck em sistemas de eletrônica de potência e microrredes, bem como pela sua estrutura relativamente simples, que facilita a análise do comportamento dinâmico do sistema e o projeto de controladores.

A modelagem obtida permite representar adequadamente o comportamento dinâmico do conversor em diferentes condições operacionais, servindo como base para o desenvolvimento e a validação dos controladores fracionários propostos neste trabalho.

## 6.2 Especificação dos Componentes do Conversor Buck em Cascata

O conversor Buck-Buck que constitui a planta investigada neste trabalho foi inicialmente desenvolvido no Laboratório de Modelagem da UFAM, (Correa 2025) em seu projeto original teve como foco principal a fabricação das placas e o dimensionamento dos componentes resistivo ( $R$ ), indutivo ( $L$ ) e capacitivo ( $C$ ) da planta, de acordo com a topologia apresentada na Figura 21.

Para determinar as características paramétricas do circuito, foram definidas as condições de operação esperadas, como o valor da tensão de entrada responsável pela energização do Buck alimentador, que, por sua vez, deveria gerar a tensão de saída desejada para alimentar o Buck carga.

De acordo com as diretrizes de projeto apresentadas por (Barbi 2015), é necessário observar critérios fundamentais para o dimensionamento de conversores, tais como o *ripple* de corrente e tensão, a frequência de chaveamento, entre outros parâmetros. A partir dessas considerações, foram estabelecidas as equações que regem o funcionamento do sistema, permitindo a definição dos ciclos de trabalho  $d_1$  e  $d_2$ , que se tornam variáveis centrais no dimensionamento dos componentes do circuito.

Com base nesses critérios, foram calculados os valores dos indutores, capacitores e resistores que compõem a topologia Buck em cascata. A Tabela 4 apresenta os principais parâmetros utilizados no projeto da planta.

Tabela 4 – Valores dos parâmetros para implementação do conversor Buck em cascata.

| Buck Alimentador          |             |       |          | Buck Carga                |             |       |          |
|---------------------------|-------------|-------|----------|---------------------------|-------------|-------|----------|
| Parâmetro                 | Símbolo     | Valor | Unidade  | Parâmetro                 | Símbolo     | Valor | Unidade  |
| Tensão de entrada         | $V_{in,1}$  | 30    | V        | Tensão de entrada         | $V_{in,2}$  | 15    | V        |
| Frequência de chaveamento | $f_1$       | 40    | kHz      | Frequência de chaveamento | $f_2$       | 50    | kHz      |
| Ciclo de trabalho         | $d_1$       | 0,5   | –        | Ciclo de trabalho         | $d_2$       | 0,6   | –        |
| Tensão de saída           | $V_{out,1}$ | 15    | V        | Tensão de saída           | $V_{out,2}$ | 10    | V        |
| Capacitância              | $C_1$       | 13,2  | mF       | Capacitância              | $C_2$       | 4,4   | mF       |
| Indutância                | $L_1$       | 12    | mH       | Indutância                | $L_2$       | 12    | mH       |
| Resistência de carga      | $R_1$       | 16    | $\Omega$ | Resistência de carga      | $R_2$       | 20    | $\Omega$ |

### 6.3 Estrutura da Planta e de Seus Blocos de Controladores no Simulink

Após o dimensionamento dos conversores apresentado na seção anterior, a próxima etapa consiste na elaboração do projeto dos elementos controladores do sistema. A estrutura de controle proposta é apresentada na Figura 22, que representa o modelo de controle implementado no ambiente Simulink/Matlab.

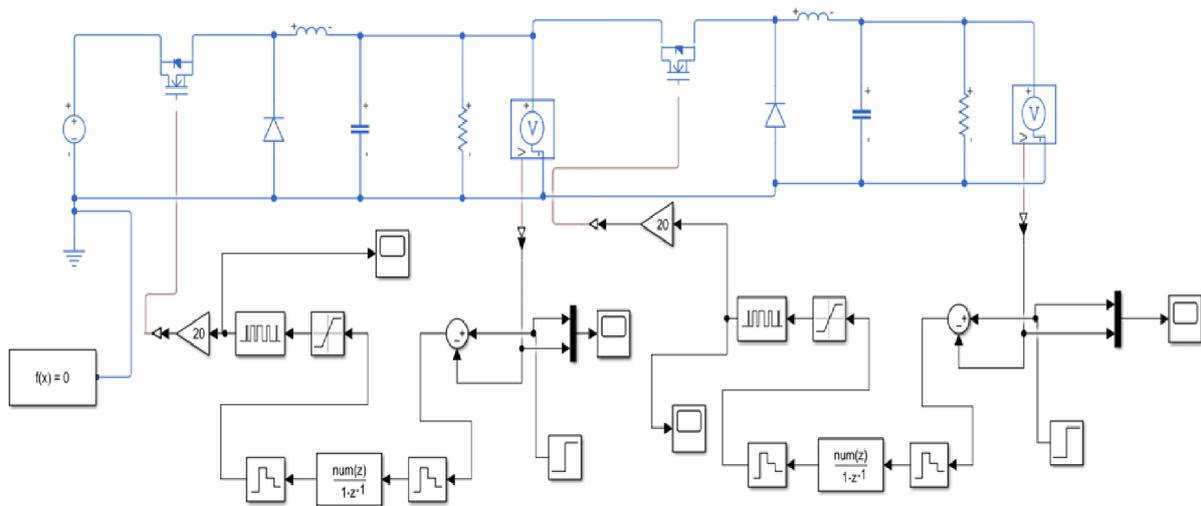


Figura 22 – Modelo de controle dos conversores Buck-Buck em cascata no Simulink.

A arquitetura de controle é composta por dois controladores distintos, cada um responsável pelo controle da tensão de saída de um dos estágios do conversor Buck-Buck. Para isso, são utilizados controladores digitais em malha fechada baseados em estruturas com compensadores discretos na forma de funções de transferência no domínio- $z$ , indicadas no bloco  $\text{num}(z) / (1-z^{-1})$  da figura.

Os sinais de erro de tensão são obtidos pela subtração entre os valores de referência e as medições de tensão de saída, e então processados pelos controladores para gerar os sinais de controle. Esses sinais são posteriormente modulados por PWM (modulação por largura de pulso) e aplicados às chaves semicondutoras (IGBTs) dos conversores.

Além disso, o ganho aplicado aos sinais de controle é ajustado por amplificadores de ganho fixo (representados pelos triângulos com "20" na Figura 22), a fim de adequar a amplitude do sinal aos requisitos da planta. A utilização dessa estratégia possibilita

o controle independente dos dois estágios do conversor, viabilizando a regulação da tensão de saída do segundo estágio com base no comportamento dinâmico da carga.

A implementação deste modelo de controle digital visa garantir estabilidade e desempenho dinâmico adequados do sistema frente às variações na carga e nas condições de operação dos conversores.

### 6.3.1 Função de Transferência para Análise de Controle do Buck

Para o desenvolvimento do sistema de controle do conversor CC–CC Buck, faz-se necessário obter um modelo matemático que represente adequadamente sua dinâmica. Esse modelo é extraído a partir da análise do circuito equivalente do conversor na operação em regime contínuo de condução (Continuous Conduction Mode – CCM), com base nas Equações (2.43) e (2.44) apresentadas no Capítulo 2 deste trabalho.

Considerando o ciclo ativo de chaveamento  $d = \frac{t_{on}}{T}$ , em que  $t_{on}$  representa o tempo em que a chave estática encontra-se ligada durante o período de chaveamento  $T$ , aplicam-se a Lei das Malhas e a Lei dos Nós nas topologias correspondentes aos intervalos  $t_{on}$  e  $t_{off}$ , conforme descrito por Hart (2016). Para facilitar a manipulação algébrica das equações diferenciais obtidas, multiplica-se ambos os lados por  $L$ , de forma a eliminar o denominador, e realizam-se as seguintes substituições de notação:  $V_o \rightarrow V_c$ ,  $V_i \rightarrow V_s$ ,  $L_s \rightarrow L$ ,  $C_o \rightarrow C$  e  $R_L \rightarrow R$ . Como resultado, obtém-se a função de transferência associada ao conversor Buck:

$$G1(s) = \frac{V_o(s)}{D(s)} = \frac{\frac{V_s}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \quad (6.1)$$

Os parâmetros utilizados no projeto do conversor encontram-se especificados na Tabela 4. Com base nesses valores, a função de transferência é então linearizada em torno do ponto de operação, resultando na forma canônica de segunda ordem dada por:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6.2)$$

em que:

- $K$  é o ganho estático do sistema;
- $\omega_n$  é a frequência natural;
- $\xi$  é o coeficiente de amortecimento.

Tais parâmetros são definidos conforme as expressões a seguir (Rashid 2011):

$$K = V_i \quad (6.3)$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6.4)$$

$$\xi = \frac{\sqrt{LC}}{2RC} \quad (6.5)$$

A função de transferência efetiva do conversor Buck, obtida com os valores numéricos dos componentes conforme a Tabela 4., e utilizada no projeto dos controladores deste trabalho, é expressa por:

$$G1(s) = \frac{3,21 \times 10^6}{s^2 + 11,36s + 1,9 \times 10^4} \quad (6.6)$$

Este modelo linear de segunda ordem relaciona a tensão de saída  $V_o(t)$  ao ciclo de trabalho  $D(t)$ , sendo apropriado para a síntese e análise dos controladores propostos nas seções subsequentes.

### 6.3.2 Generalização Fracionária da Função de Transferência do Conversor Buck

A modelagem clássica do conversor *Buck*, operando em regime de condução contínua (CCM), é realizada a partir das equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico dos elementos passivos do circuito. Essas equações, combinadas no domínio da Laplace, resultam na função de transferência de segunda ordem que relaciona a tensão de saída  $V_o(s)$  ao ciclo de trabalho  $D(s)$ . A estrutura do denominador

dessa função indica a presença de dois polos, que podem ser reais ou complexos conjugados, caracterizando um sistema dinâmico de segunda ordem com comportamento típico de oscilação amortecida.

Apesar da sua simplicidade e ampla aplicabilidade, essa modelagem assume que os componentes do circuito são ideais e nem sempre representa adequadamente o comportamento físico real, especialmente quando se consideram efeitos de altas frequências, perdas resistivas e fenômenos de memória em capacitores e indutores. Nessas condições, surgem discrepâncias entre o modelo teórico e a resposta real do sistema.

Com o objetivo de incorporar tais efeitos não ideais, introduz-se a generalização fracionária da modelagem, fundamentada no cálculo fracionário mencionada nos capítulos anteriores. Essa abordagem consiste em substituir as derivadas de ordem inteira por derivadas fracionárias, permitindo representar a dinâmica de sistemas com memória e comportamento anômalo. Em particular, considera-se que a dinâmica do indutor e do capacitor pode ser modelada por derivadas de ordens  $\alpha \in (0, 1]$  e  $\beta \in (0, 1]$ , respectivamente.

A substituição das derivadas clássicas pelas derivadas fracionárias resulta em uma nova estrutura de função de transferência, em que os expoentes da variável complexa  $s$ , no domínio da Laplace, passam a ser não inteiros. Essa generalização pode ser escrita da seguinte forma:

$$G_1(s) = \frac{V_c(s)}{D(s)} = \frac{b_0}{s^{\beta+\alpha} + a_1 s^\alpha + a_0} \quad (6.7)$$

Resultado:

$$G_1(s) = \frac{3.2197 \times 10^5}{s^{1.98} + 11.364 s^{0.83} + 1.8939 \times 10^4}$$

A função de transferência apresentada em (6.7) constitui, portanto, uma generalização direta da função clássica do conversor Buck (ver Equação (6.1)), sendo particularmente útil em aplicações que exigem maior fidelidade na representação da dinâmica do sistema, como em estratégias avançadas de controle fracionário, análise de estabilidade com memória e identificação de sistemas com comportamento não ideal.

### 6.3.3 Projeto do Controlador para o Conversor Buck

O projeto do controlador para o conversor *buck* visa atender aos requisitos de desempenho dinâmico estabelecidos: tempo de acomodação  $t_s = 2$  s e sobressinal máximo permitido  $M_s = 5\%$ . Esses critérios são usados no cálculo dos polos desejados, tanto pela metodologia de alocação de polos de ordem inteira (IOPP) (Dorf e Bishop 2017), quanto pela proposta de alocação fracionária (FOPP) (Podlubny 1999a).

Na abordagem clássica, assume-se resposta de segunda ordem; assim, o coeficiente de amortecimento  $\xi$  e a frequência natural  $\omega_n$  são obtidos por (C. A. Monje et al. 2010),(Ogata 2010b):

$$M_s = e^{\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}, \quad (6.8)$$

$$t_s \approx \frac{4}{\xi\omega_n}. \quad (6.9)$$

Impondo  $M_s = 5\%$  e  $t_s = 2$  s, obtemos:

$$\begin{aligned} \xi &\approx 0,6901 \\ \omega_n &\approx \frac{4}{\xi t_s} = \frac{4}{0,6901 \cdot 2} \approx 2,898 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Assim, os polos dominantes desejados situam-se em:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \approx -2,0 \pm j 2,06$$

Estes polos servem de referência para o ajuste via controle fracionário.

Para a metodologia FOPP, realiza-se um estudo paramétrico considerando a ordem fracionária  $\alpha$  e o expoente  $\beta$ , mantendo  $\omega_n = 2,898$  rad/s. A partir de simulações com diferentes valores de pseudo-amortecimento  $\xi$ , são geradas as curvas:

- Sobressinal  $M_s$  em função de  $\xi$ ;
- Tempo de acomodação  $t_s$  em função de  $\xi$ .

Essas curvas permitem identificar os pares  $(\alpha, \beta, \xi)$  que atendem simultaneamente às especificações desejadas. Um conjunto viável identificado foi:  $\alpha = 0,83$ ,  $\beta = 1,15$  e  $\xi = 0,4$ , resultando em resposta dentro da faixa admissível de desempenho.

Antes da aplicação das técnicas de projeto, foi delimitada a região de interesse no plano  $s$ , conforme a modelagem de Eq. (5.8) e (5.9). Essa região, baseada nas especificações de desempenho, é dada por:

$$\xi \geq 0 \quad \text{e} \quad \xi \cdot \omega_n \geq \frac{2}{t_s} = 1,0 \text{ rad/s}$$

Tal região é essencial para garantir que os polos fracionários estejam localizados em zona que assegure estabilidade e resposta adequada ao sistema controlado.

## 6.4 Metodologia de Projeto do Controlador por Alocação de Polos de Ordem Fracionária Não Comensurável

A abordagem de controle por ordem fracionária adotada neste trabalho baseia-se na possibilidade de especificar dinamicamente o comportamento desejado em malha fechada a partir de funções de transferência com termos de ordem fracionária não comensurável. Dentre as diversas combinações possíveis entre modelos de planta e leis de controle de ordem inteira ou fracionária (Valério e Costa 2013), este estudo restringe-se ao caso particular em que a planta é modelada por uma função de transferência de ordem inteira, enquanto o controlador assume uma estrutura fracionária não comensurável.

A metodologia aqui proposta fundamenta-se na Alocação de Polos de Ordem Fracionária (FOPP) conforme formulado por (Ayres Junior et al. 2020). Este método é uma generalização da técnica clássica de posicionamento de polos para sistemas fracionários, utilizando como dinâmica desejada uma função de transferência fracionária de três termos. Tal dinâmica representa um análogo direto ao modelo de segunda ordem no contexto inteiro, porém expandido para comportar ordens fracionárias  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $u$  não comensuráveis entre si.

### 6.4.1 Função de Transferência Fracionária Desejada

Define-se inicialmente o polinômio característico desejado da malha fechada,  $P_d(s)$ , como:

$$P_d(s) = (s^\alpha + p_1)(s^\beta + p_2)(s^\mu + p_3) \quad (6.10)$$

Expandindo este produto, obtém-se:

$$\begin{aligned} P_d(s) = & s^{\alpha+\beta+\mu} + p_3s^{\alpha+\beta} + p_2s^{\alpha+\mu} + p_2p_3s^\alpha \\ & + p_1s^{\beta+\mu} + p_1p_3s^\beta + p_1p_2s^\mu + p_1p_2p_3 \end{aligned} \quad (6.11)$$

A função de transferência da planta é modelada por:

$$G(s) = \frac{b_0}{s^{\beta+\alpha} + a_1s^\alpha + a_0} \quad (6.12)$$

### 6.4.2 Obtenção da Função do Controlador

A função de transferência do controlador é obtida a partir da resolução de uma equação representada em forma matricial. O ponto de partida é o polinômio característico desejado da malha fechada, que define a dinâmica do sistema controlado. Esse polinômio é construído a partir da combinação dos operadores diferenciais fracionários  $s^\alpha$ ,  $s^\beta$  e  $s^\mu$ , juntamente com os polos reais  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ , resultando na forma desejada para o denominador do sistema.

$$P_d(s) = (s^\alpha + p_1)(s^\beta + p_2)(s^\mu + p_3) \quad (6.13)$$

Ao expandir este produto, obtêm-se sete termos distintos que formam o polinômio de referência utilizado para o posicionamento dos polos. Estes termos servem de base para a construção da equação matricial que relaciona os coeficientes do controlador com os parâmetros desejados do polinômio:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_n = \mathbf{b} \quad (6.14)$$

onde a matriz  $M$  é linearmente dependente, permitindo representar a interdependência entre os coeficientes do controlador:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz M}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}}_{\text{Vetor de coeficientes } C_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ p_1 p_2 - a_0 \\ p_1 p_3 \\ p_1 \\ p_2 p_3 \\ p_2 \\ p_3 - a_1 \end{bmatrix}}_{\text{Vetor resultado b}}$$

A solução desta equação fornece os coeficientes  $\{C_0, C_1, \dots, C_6\}$  do controlador, que são então empregados na função de transferência fracionária do sistema:

$$C_n(s) = \frac{C_6 s^{\alpha+\beta} + C_5 s^{\alpha+\mu} + C_4 s^{\alpha} + C_3 s^{\beta+\mu} + C_2 s^{\beta} + C_1 s^{\mu} + C_0}{s^{\mu}} \quad (6.15)$$

Os coeficientes podem ser explicitamente expressos em função dos polos desejados e dos parâmetros  $a_0$ ,  $a_1$  e  $b_0$ , conforme:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{p_1 p_2 p_3}{b_0}, & C_1 &= \frac{p_1 p_2 - a_0}{b_0}, & C_2 &= \frac{p_1 p_3}{b_0}, \\
 C_3 &= \frac{p_1}{b_0}, & C_4 &= \frac{p_2 p_3}{b_0}, & C_5 &= \frac{p_2}{b_0}, & C_6 &= \frac{p_3 - a_1}{b_0}
 \end{aligned}$$

Resultado com a Forma com potências já simplificadas (dividido por  $s$ ):

$$\begin{aligned}
 C_n(s) \approx & 0.0009318 s^{0.98} + 0.0005859 s^{0.83} + 0.0003106 s^{1.15} + 0.1864 s^{-0.17} + \\
 & 0.09318 s^{0.15} + 0.003294 + 18.6353 s^{-1}
 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Dessa forma, a equação matricial permite uma síntese sistemática do controlador, garantindo que a dinâmica desejada do sistema em malha fechada seja alcançada.

### 6.4.3 Etapas do Procedimento de Sintonia

A seguir, descrevem-se os passos do procedimento de sintonia do controlador CFOPPnc:

1. **Definição de especificações:** definir o tempo de acomodação  $T_s$ , sobressinal  $M_{ss}$  e frequência natural desejada  $\omega_{n,d}$ .
2. **Análise paramétrica:** traçar as curvas  $M_{ss}(\xi)$  e  $T_s(\xi)$  para varredura do coeficiente de amortecimento  $\xi \in [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ .
3. **Escolha da estrutura:** definir a ordem do polinômio característico desejado e estabelecer a quantidade de parâmetros do controlador.
4. **Construção do polinômio desejado:** selecionar polos auxiliares  $P_{\text{aux}}(s)$ , de forma a garantir a ordem adequada e desempenho.
5. **Resolução da equação matricial:** obter os coeficientes do controlador a partir do sistema linear gerado.
6. **Aproximação e redução de ordem:** aplicar o método de Oustaloup seguido da redução de ordem por Hankel.
7. **Discretização:** aplicar o método de Tustin com pré-distorção para implementação discreta (RST).

## 6.5 Descrição do Ambiente Experimental do Sistema Buck em Cascata

A Figura 23 ilustra o sistema experimental do conversor Buck em cascata implementado neste trabalho. Os resultados apresentados nas seções seguintes consideram o desempenho do sistema completo, avaliando a resposta sob diferentes condições operacionais.

Para facilitar a compreensão da montagem experimental, a Figura 23 destaca as principais seções do circuito: **Source (Fonte)**, **Feeder Converter (Buck Alimentador)**,

**Buck Converter (Buck Carga) e Resistive Load (Carga Resistiva).** Essa organização prática foi fundamental para a aplicação de controladores digitais discretos em cada estágio do sistema.

A escolha da chave de potência recaiu sobre o **IGBT**, combinando as vantagens dos MOSFETs (alta impedância de entrada e rápido chaveamento) com as características de elevada capacidade de condução dos transistores bipolares. O acionamento dos IGBTs foi realizado via sinal PWM, gerado por drivers de gate dedicados (**GD1** e **GD2**), utilizando optoacopladores para garantir isolamento galvânico e fornecer os níveis de tensão adequados (mínimo de 15 V).

No **Buck Alimentador**, a capacitância total foi obtida pela associação de capacitores em paralelo, alcançando o valor especificado de **13,2 mF**. De forma análoga, os resistores foram ajustados para garantir a resistência equivalente desejada de **16  $\Omega$** . O indutor (**L1**) utilizado possui indutância de **12 mH**, já disponível no laboratório. Para o **Buck Carga**, foram empregados componentes semelhantes, com capacitância de **4,4 mF** e resistência de carga de **20  $\Omega$** , de acordo com as necessidades do projeto.

A seleção dos diodos de roda livre (**D**) demandou atenção especial, pois era necessário garantir resposta ultrarrápida para acompanhar a frequência de chaveamento. Em uma das implementações, um IGBT foi utilizado como diodo, garantindo a robustez e velocidade necessárias.

Adicionalmente, o sistema incluiu:

- **Sensor de Corrente:** instalado tanto no Buck Alimentador quanto no Buck Carga, para medição em tempo real da corrente.
- **Medição de Tensão:** utilizando ADCs externos para maior precisão na aquisição do sinal de saída.
- **Módulo Relé:** empregado para controle e inserção da carga durante os ensaios experimentais.
- **Microcontroladores Arduino DUE e ESP32:** responsáveis pelo controle digital dos conversores e monitoramento das variáveis de saída. O firmware foi desenvolvido e carregado utilizando a IDE Arduino.

A comunicação entre os controladores e o PC foi realizada via cabo serial, sendo o Arduino DUE dedicado ao controle do Buck Alimentador e o ESP32 ao controle do Buck Carga.

Para a análise e visualização dos resultados, os sinais foram adquiridos e processados no software MATLAB, utilizando a toolbox **FOMCON** para análise do método FOPP não comensurável com base no modelo paramétrico identificado da planta nos Capítulos 2 e 3 com essa ferramenta a implementação dos controladores fracionários baseou-se na aproximação de Oustaloup de ordem finita, permitindo a modelagem precisa da planta e a avaliação prática do desempenho dos controladores. Outro fator importante neste ambiente experimental foi essa integração entre hardware e software que possibilitou a captura experimental dos sinais controlados e sua análise gráfica, permitindo a validação experimental dos métodos propostos, como será discutido na seção subsequente.

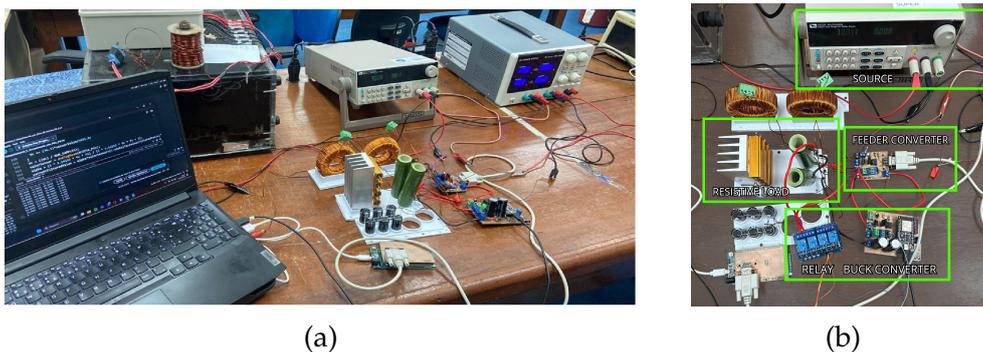


Figura 23 – (a) Vista da bancada experimental no Laboratório de Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos (FT/UFAM); (b) Configuração do conversor Buck em cascata utilizada nos experimentos.

## 7

---

## AVALIAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

A partir da aplicação da metodologia descrita no capítulo 5, procedeu-se à validação por meio da observação, interpretação e discussão dos dados obtidos no processo de modelagem e implementação do sistema por meio de gráficos. Portanto, neste capítulo, apresentam-se os resultados experimentais do sistema *Buck* em cascata e a análise comparativa final entre o **método FFOPP clássico** e o **NCFOPP**. Esses controladores foram selecionados com o objetivo de estabelecer uma comparação direta, adotando-se uma metodologia de sintonia baseada em um modelo incerto, obtido a partir da identificação dos parâmetros dos componentes com memória, conforme discutido nas seções anteriores.

O modelo resultante corresponde às funções de transferência apresentadas na Equação (2.78) e fundamenta a aplicação de *Controladores de Ordem Fracionária*.

### 7.1 Análise da Resposta ao Degrau

A Figura 24 apresenta a resposta ao degrau do sistema controlado por meio de um controlador fracionário aplicado ao conversor *Buck*. O eixo horizontal representa o tempo (s), enquanto o eixo vertical indica a amplitude da saída normalizada. A curva obtida fornece importantes informações sobre a dinâmica transitória do sistema.

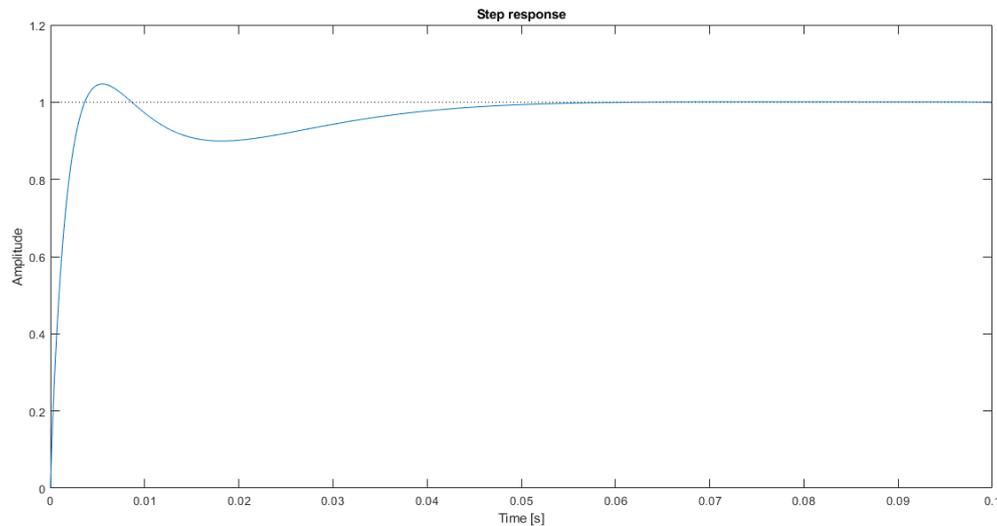


Figura 24 – Resposta ao degrau do sistema controlado aplicada ao conversor *Buck* sob controle fracionário.

Verifica-se uma rápida elevação da resposta logo após a aplicação do degrau, com o sistema alcançando o valor máximo (overshoot) de aproximadamente 1,07 (ou 7% acima do valor de regime). Este pequeno sobresinal indica uma boa capacidade de resposta do sistema, sem comprometer a estabilidade. Posteriormente, observa-se um decaimento suave da amplitude, caracterizando o amortecimento da resposta oscilatória transitória. O tempo para que o sistema atinja e permaneça dentro da banda de tolerância em torno do valor final (1,0) é pequeno, evidenciando um tempo de acomodação (settling time) adequado para aplicações que exigem regulação rápida da tensão de saída. A partir de aproximadamente 0,05 s, a saída estabiliza-se em torno do valor unitário, o que comprova a eliminação do erro estacionário. Este comportamento está de acordo com a presença da ação integrativa incorporada pelo controlador fracionário, garantindo rastreamento preciso da referência.

## 7.2 Análise do Diagrama de Bode do Sistema Controlado

A Figura 25 apresenta o diagrama de Bode do sistema em malha aberta, considerando a aplicação do controlador fracionário projetado para o conversor *Buck*. O diagrama é composto por duas partes: a resposta em magnitude (superior) e a res-

posta em fase (inferior), em função da frequência angular (rad/s), plotada em escala logarítmica.

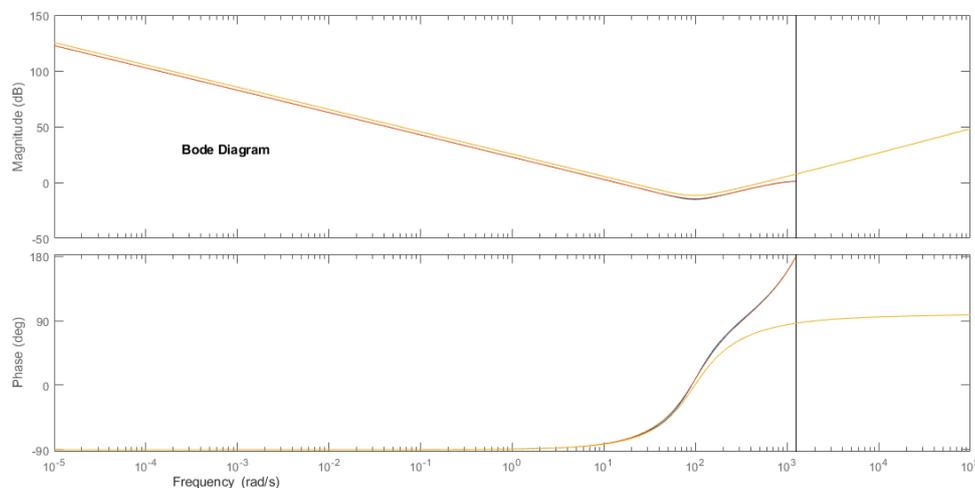


Figura 25 – Diagrama de Bode do sistema controlado *Buck* fracionário.

Observa-se que, em frequências muito baixas (abaixo de  $10^{-4}$  rad/s), a magnitude do ganho do sistema apresenta valores extremamente elevados, evidenciando o comportamento integrativo predominante do sistema fracionário nesta faixa. Para frequências abaixo de  $10^0$  rad/s, o ganho ainda se mantém em aproximadamente 25 dB, indicando uma amplificação significativa. A inclinação negativa constante sugere a presença de polos dominantes de baixa frequência.

Conforme a frequência aumenta, ocorre uma atenuação progressiva do ganho, atingindo um mínimo próximo de  $10^3$  rad/s, que pode ser associada à frequência de cruzamento ou à frequência natural do sistema. Após esse ponto, observa-se um leve aumento da magnitude, possivelmente relacionado ao efeito do controlador fracionário, que introduz um comportamento de avanço de fase e compensação dinâmica.

A diferença sutil entre as duas curvas evidencia o impacto do controlador sobre a dinâmica do sistema.

Na parte inferior da Figura 25, a resposta em fase mostra que, em baixas frequências, a fase se mantém em torno de  $-90^\circ$ , comportamento característico de sistemas com ação integrativa.

A partir de aproximadamente  $10^1$  rad/s, a fase eleva-se gradativamente, alcan-

çando valores próximos de  $+180^\circ$  em altas frequências ( $10^5$  rad/s). Este comportamento é consistente com a presença de um controlador fracionário do tipo avanço, que atua para aumentar a margem de fase e ajustar a resposta dinâmica do sistema.

Observa-se ainda uma leve diferença entre as duas curvas na região de transição (faixa de  $10^2$  a  $10^3$  rad/s), possivelmente decorrente da aproximação numérica do modelo fracionário pelo método de Oustaloup em comparação com o comportamento ideal.

### 7.3 Análise Gráfica

O gráfico da Figura 26(a) apresenta a tensão de entrada ( $V_{in}$ ) do conversor *Buck*. Observa-se que, em condição ideal,  $V_{in}$  permanece constante, representando uma fonte de alimentação estável. No entanto, caso  $V_{in}$  varie ao longo do tempo, o sistema deverá compensar essas oscilações para manter  $V_{out}$  constante. A figura mostra a tensão de entrada do conversor, evidenciando que o sistema foi operado sob condições não ideais, com variações entre aproximadamente 15 V e 21 V. Essas variações foram propositalmente aplicadas como perturbações para avaliar a robustez dos controladores.

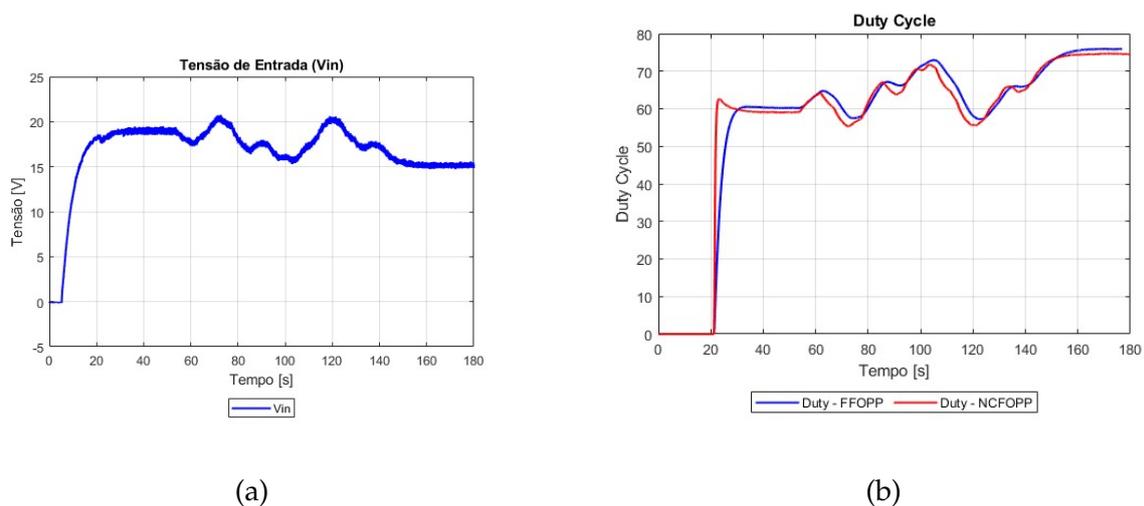


Figura 26 – (a) Tensão de entrada. (b) Evolução do *Duty Cycle* para os controladores FFOPP (azul) e NCFOPP (vermelho). (Autor: Próprio)

O gráfico da Figura 26(b), apresenta a evolução do *duty cycle* ao longo de 180 s para ambos os controladores. Observa-se que ambos atingem rapidamente o regime

próximo a  $t \approx 20$  s, porém o controlador NCFOPP apresenta um pico inicial levemente superior (aproximadamente 63% contra 60% do FFOPP), resultando em um menor tempo de subida. Durante as perturbações aplicadas (em torno de  $t = 60, 100$  e  $140$  s), ambos os controladores exibem oscilações transitórias, sendo que o NCFOPP apresenta maior rapidez na acomodação, embora com picos ligeiramente mais acentuados.

A Figura 27(a), apresenta a tensão de saída para ambos os controladores. O NCFOPP atinge a referência de 10 V de forma mais rápida ( $t_s \approx 18$  s) e com praticamente ausência de overshoot perceptível, enquanto o FFOPP leva cerca de  $t_s \approx 25$  s para acomodar. Em regime permanente, ambos mantêm a tensão média próxima a 10 V, porém o FFOPP apresenta pequenas oscilações residuais nas instantes de perturbação.

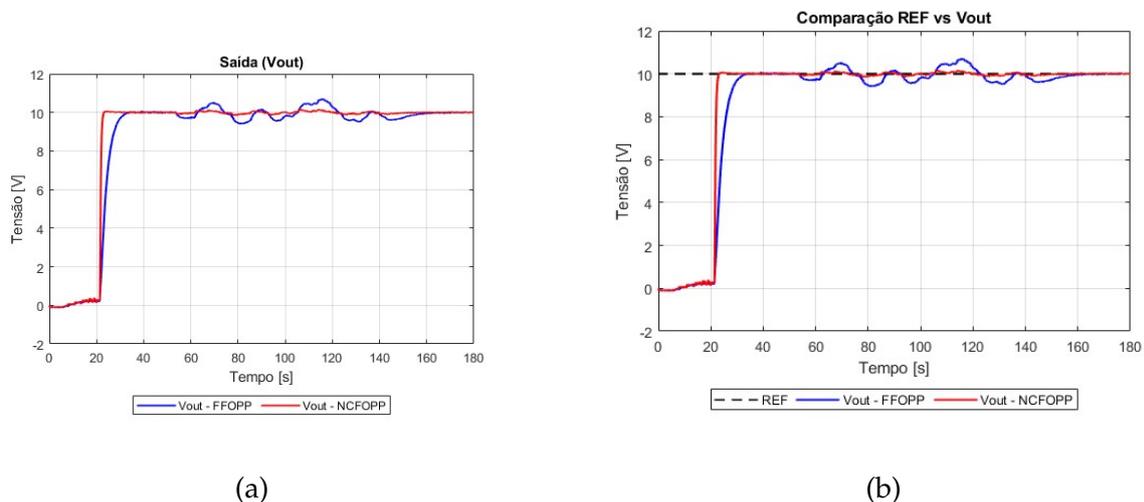


Figura 27 – (a) Tensão de saída  $V_{out}$  para os controladores FFOPP (azul) e NCFOPP (vermelho). (b) Avaliação de rastreamento

A Figura 27(b), compara-se a resposta dos dois controladores com a referência de 10 V. O NCFOPP apresenta menor erro de regime e maior capacidade de rejeição a perturbações, recuperando-se rapidamente após cada variação de carga ou entrada. O FFOPP, embora mais lento, apresenta resposta mais suave e menor sensibilidade a oscilações de alta frequência.

A Figura 28(a), apresenta a tensão de entrada do sistema, que se mantém praticamente constante, em torno de 19 V, após um curto período de estabilização ( $t \approx 15$  s). A ausência de variações significativas em  $V_{in}$  indica que as mudanças observadas em  $V_{out}$  e no *duty cycle* decorrem principalmente das alterações na referência, e não de distúrbios

na alimentação.

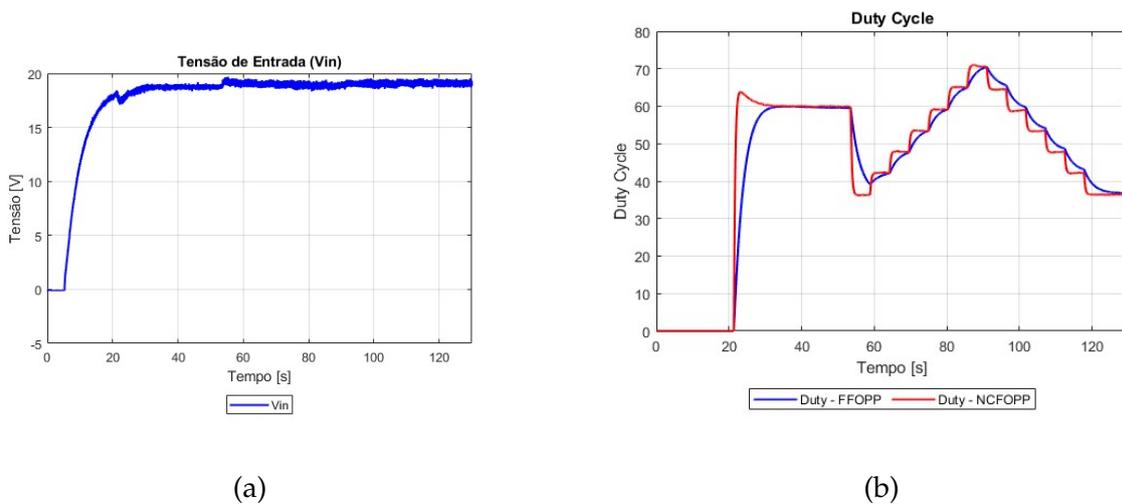


Figura 28 – (a) Tensão de entrada  $V_{in}$  no cenário de variação de referência. (b) Duty cycle para os controladores FFOPP (azul) e NCFOPP (vermelho) no cenário de variação de referência. (Autor: Próprio)

A Figura 28(b), mostra a evolução do *duty cycle* para ambos os controladores. Nota-se que, no primeiro degrau ( $t \approx 20$  s), o controlador NCFOPP apresenta subida mais rápida e um pico inicial próximo a 63%, enquanto o FFOPP atinge aproximadamente 60%. Durante o período de operação em regime ( $20 \text{ s} \leq t \leq 50 \text{ s}$ ), ambos mantêm o *duty cycle* estável em torno de 60%.

Com a queda da referência aos  $t \approx 55$  s, seguida por incrementos gradativos até cerca de  $t \approx 90$  s, observa-se que o NCFOPP reage mais rapidamente a cada degrau, resultando em transições mais curtas, enquanto o FFOPP apresenta resposta mais suave porém ligeiramente mais lenta. Em picos máximos (por volta de  $t \approx 90$  s), o *duty cycle* chega a cerca de 71% no NCFOPP contra 69% no FFOPP.

A Figura 29, compara as respostas dos controladores à referência escalonada. O NCFOPP acompanha de forma mais rápida cada degrau, com tempo de acomodação inferior e menor erro de seguimento em regime, especialmente nas transições de subida. O FFOPP apresenta uma resposta mais filtrada, com menor overshoot, porém atraso maior na convergência à nova referência.

Em degraus positivos, o NCFOPP apresenta tempo de acomodação estimado em  $t_s \approx 3$  s, enquanto o FFOPP leva cerca de  $t_s \approx 4-5$  s. Em degraus negativos, am-

bos apresentam desempenho similar, com leve vantagem do FFOPP na redução de oscilações.

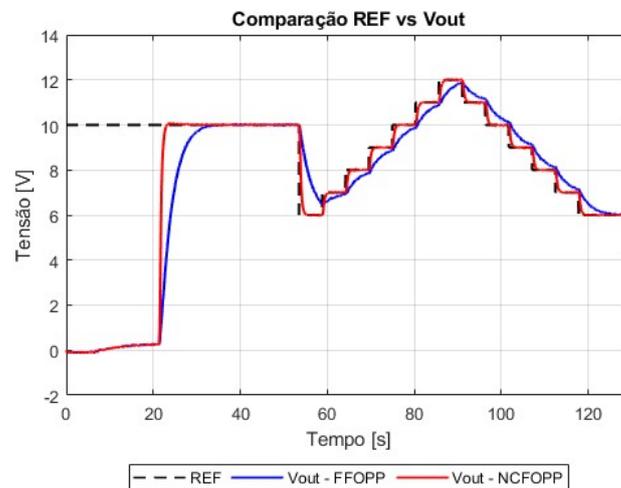


Figura 29 – Avaliação de rastreamento da tensão de saída para FFOPP e NCFOPP no cenário de variação de referência. (Autor: Próprio)

A Figura 30 (a), mostra a avaliação de rastreamento entre a referência e a tensão de saída. A referência (linha preta tracejada) foi fixada em 10 V. Novamente, o NCFOPP apresenta tempo de acomodação menor ( $t_s \approx 26$  s) em relação ao FFOPP ( $t_s \approx 32$  s), além de um *overshoot* ligeiramente superior (10,1 V contra 10,05 V do FFOPP). Em regime permanente, ambos acompanham a referência com erro praticamente nulo.

Perturbações aplicadas em torno de  $t = 55$  s e  $t = 73$  s geraram picos e vales de tensão que foram melhor amortecidos pelo NCFOPP, enquanto o FFOPP apresentou resposta mais lenta para recuperar o valor de referência.

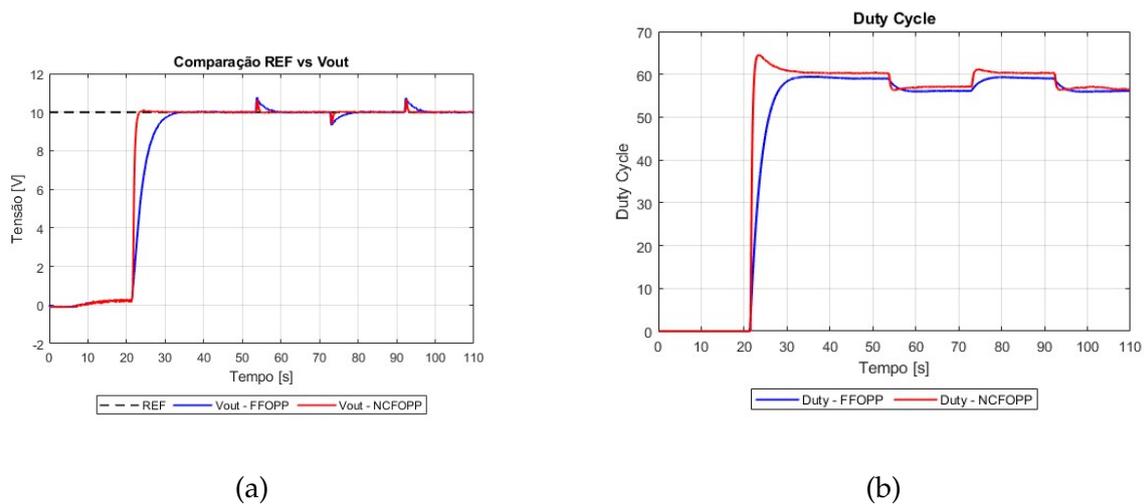


Figura 30 – (a) Comparação entre referência e saída para controladores FFOPP e NCFOPP (b) Duty FFOPP e NFOPP (Autor: Próprio)

A Figura 30 (b), apresenta o perfil de *duty cycle* ao longo do tempo para ambos os controladores. Observa-se que, após a aplicação da tensão de entrada por volta de  $t \approx 20$  s, o controlador NCFOPP (linha vermelha) apresenta uma resposta mais rápida, atingindo aproximadamente 65% de *duty cycle* no pico inicial, enquanto o FFOPP (linha azul) atinge cerca de 60%. O regime permanente se estabiliza em torno de 60% para ambos os casos, com variações pontuais próximas a  $t \approx 55$  s e  $t \approx 75$  s, correspondentes às perturbações de carga.

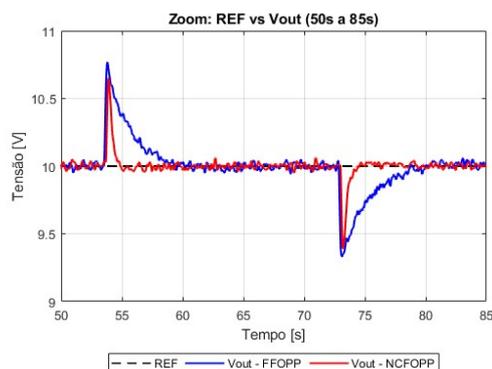


Figura 31 – Zoom da resposta em tensão de saída entre 50 s e 85 s para controladores FFOPP e NCFOPP. (Autor: Próprio)

A Figura 31, detalha o intervalo de 50 s a 85 s. No primeiro distúrbio, o FFOPP apresentou um pico de aproximadamente 10.65 V, enquanto o NCFOPP limitou o *overshoot* a cerca de 10.55 V e retornou mais rapidamente à referência. No segundo

distúrbio, o FFOPP atingiu um vale próximo a 9.35 V, enquanto o NCFOPP permaneceu acima de 9.95 V, evidenciando melhor robustez frente a variações rápidas de carga.

As análises indicam que, neste cenário, o controlador NCFOPP apresentou desempenho superior em relação ao FFOPP, com menor tempo de acomodação e melhor rejeição a distúrbios, embora com overshoot ligeiramente superior no regime transitório inicial.

## 8

---

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho desenvolveu um estudo aprofundado sobre a modelagem, projeto e análise de controladores fracionários para conversores *Buck* dispostos em configuração de dois estágios em cascata. Inicialmente, foi estabelecida a modelagem matemática de cada estágio, busca da identificação de parâmetros dos componentes com memórias considerando as dinâmicas individuais e a interação entre os conversores, possibilitando a representação precisa do sistema no domínio do tempo e da frequência. A partir deste modelo, foram aplicadas as técnicas de alocação de polos fracionária comensurável (FFOPP) e não comensurável (NCFOPP), permitindo o projeto de controladores para o sistema, de forma a posicionar os polos nos locais desejados e ajustar a resposta dinâmica de acordo com os objetivos do projeto.

Os resultados obtidos demonstraram que ambos os controladores fracionários apresentaram desempenho superior quando comparados ao controle clássico do tipo PI, especialmente no que se refere à atenuação de oscilações, redução do *overshoot* e melhoria no tempo de acomodação. O FFOPP apresentou maior simplicidade de implementação e menor esforço computacional, enquanto o NCFOPP proporcionou melhor desempenho dinâmico em condições operacionais adversas, evidenciando a maior flexibilidade do ajuste não comensurável.

Como principais contribuições, destacam-se:

- A identificação dos parâmetros fracionários  $\alpha$  e  $\beta$ , bem como a formulação e validação de um modelo de conversor Buck em cascata, adequado para o projeto e análise de controladores fracionários.

- A aplicação sistemática dos métodos FFOPP e NCFOPP, com comparação direta.
- A comprovação experimental e via simulação da eficiência dos controladores fracionários em melhorar a resposta dinâmica e robustez do sistema.

Como perspectivas futuras, sugerem-se:

- Implementação digital dos controladores fracionários utilizando técnicas de aproximação de ordem fracionária, como o método IRID-FOD.
- Estudo da aplicação de técnicas de controle adaptativo fracionário para variação em tempo real dos parâmetros do controlador.
- Avaliação do desempenho dos controladores em conversores multinível e em aplicações de geração distribuída e sistemas fotovoltaicos.

Dessa forma, o trabalho evidencia que o uso de controladores fracionários, tanto comensuráveis quanto não comensuráveis, representa uma alternativa eficaz e viável para o aprimoramento de conversores *Buck* em cascata, contribuindo para a evolução de estratégias de controle robustas na área de eletrônica de potência.

---

## BIBLIOGRAFIA

- Aguirre, Luis Antonio (2007). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Belo Horizonte: Editora UFMG. ISBN: 9788570416345.
- Alexander, Charles K. e Matthew N. O. Sadiku (2013). *Fundamentals of Electric Circuits*. McGraw-Hill Education.
- Ayres Junior, V. (2018). “Metodologia de Controle Fracionário baseada em Alocação de Polos”. Em: *Revista Brasileira de Engenharia* 23.2, pp. 45–58.
- Ayres Junior, V. et al. (2020). “Pole placement tuning method for fractional-order controllers applied to buck converters”. Em: *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* 31.6, pp. 1427–1439.
- Barbi, Ivo (2006). *Conversores CC-CC não isolados comutados por corrente*. Editora da UFSC.
- (2015). *Modelagem de conversores CC-CC empregando modelo médio em espaços de estados*. Edição do autor.
- Bazanella, A. S. e J. M. G. da Silva Jr (2005). *Sistemas de Controle: Princípios e Métodos de Projeto*. Ed. da UFRGS.
- Bazanella, Alexandre e João Emanuel Strapasson (2005). *Sistemas de Controle: Princípios e Métodos de Projeto*. UFRGS Editora.
- Bazanella, Alexandre S. e João P. Silva Júnior (2017). *Controle Digital*. Elsevier Brasil.
- Bessa, R. et al. (mai. de 2020). “Comparative study of control strategies for stabilization and performance improvement of DC microgrids with a CPL connected”. Em: *Energies* 13, p. 1.

- Birs, I. R. e colab. (2022). "On fractional-order control implementations and stability issues". Em: *Nonlinear Dynamics* 108.3, pp. 1235–1250.
- Boylestad, Robert L. (2006). *Análise de Circuitos em Engenharia*. Pearson Prentice Hall.
- Camargo, R. F. et al. (2015). *Cálculo Fracionário*. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física.
- Carvalho, D. M. e E. J. Ottoni (2018). "Introdução ao Cálculo Fracionário com Aplicações". Em: *Revista de Matemática de Ouro Preto* 1, pp. 50–77.
- Chen, Y.Q. (2006). *Fractional-order Control: Practical Applications*. Springer.
- Chen, Y.Q. e K.L. Moore (2005). *Applied Fractional Calculus in Control*. Springer.
- Correa, Iago Viana (2025). "Desenvolvimento e construção de um sistema de conversores CC-CC Buck operando como alimentador e carga em uma microrrede de escala reduzida". Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica. Universidade Federal do Amazonas.
- Das, S. (jan. de 2011). *Functional Fractional Calculus*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, p. 612. ISBN: 978-3642205446.
- Deniz, F. et al. (2020). "A comparative study on implementation of fractional-order controllers". Em: *ISA Transactions* 98, pp. 198–209.
- Dorf, Richard C. e Robert H. Bishop (2009). *Sistemas de Controle Modernos*. 11ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- (2017). *Modern Control Systems*. 13th. Pearson.
- Faieghi, M. e H. Nematy (2011). "Low order approximation of fractional transfer functions using Genetic Algorithms". Em: *International Journal of Control, Automation and Systems* 9.5, pp. 881–888.
- Franklin, Gene F. et al. (2015). *Feedback Control of Dynamic Systems*. 7ª ed. Pearson.
- Gao, F. et al. (2015). "Adaptive fuzzy control of buck converter under load disturbances". Em: *ISA Transactions* 58, pp. 554–561.
- Hart, Daniel W. (2011). *Power Electronics*. McGraw-Hill Education.
- (2016). *Power Electronics*. 1ª ed. McGraw-Hill Education.
- Huang, L. et al. (2023). "Sliding mode control strategy for parallel DC/DC converters with improved dynamic response". Em: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 70.6, pp. 5321–5330.

- Ibrahim, A. et al. (2021). "Hybrid optimization of fractional-order PID controllers using Lévy flight and simulated annealing for DC-DC buck converters". Em: *Applied Soft Computing* 108, p. 107448.
- Kuo, Benjamin C. (2003). *Sistemas de Controle Automático*. LTC.
- Landau, Ioan D. e Gianluca Zito (2006). *Digital Control Systems: Design, Identification and Implementation*. Springer.
- Lee, S. et al. (2023). "Control of SIMO buck converters operating at dual switching frequencies". Em: *IEEE Access* 11, pp. 12245–12254.
- Lordelo, A. D. S. e P. A. V. Ferreira (2005). "Análise intervalar e projeto de controladores robustos via programação alvo". Em: *SBA Controle & Automação* 16.12.
- Matignon, Denis (1998a). "Stability results for fractional differential equations with applications to control processing". Em: *Computational Engineering in Systems Applications*. Vol. 2, pp. 963–968.
- (1998b). "Stability results for fractional differential equations with applications to control processing". Em: *Computational Engineering in Systems Applications* 2.1, pp. 963–968.
- Miller, K. S. e B. Ross (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York/Singapore: John Wiley & Sons, Inc., p. 384. ISBN: 978-0471588849.
- Ministério de Minas e Energia, ANEEL e (2024). *Relatório de Expansão da Capacidade Instalada 2024*. Disponível em: <<https://www.aneel.gov.br>> [Acesso em: abr. 2025].
- Mohan, Ned et al. (2003). *Power Electronics: Converters, Applications, and Design*. 3ª ed. John Wiley & Sons.
- Monje, C. A. et al. (2010). *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Springer. ISBN: 978-1849963343.
- Monje, C.A. (2006). *Fractional-order Systems and Controls*. Springer.
- Monje, C.A. et al. (2008). *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Springer.
- Monje, Concepción A. et al. (2010). *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Springer.

- Montgomery, Douglas C. e George C. Runger (2014). *Applied Statistics and Probability for Engineers*. 6ª ed. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Nise, Norman S. (2011). *Engenharia de Sistemas de Controle*. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC.
- (2012). *Sistemas de Controle em Engenharia*. 6ª ed. LTC.
- Ogata, Katsuhiko (2010a). *Discrete-Time Control Systems*. 2ª ed. Prentice Hall.
- (2010b). *Engenharia de Controle Moderno*. 5ª ed. Pearson Education.
- Oldham, Keith B. et al. (1974). *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press.
- Olomu, J. et al. (2023). “Performance analysis of conventional PID control in buck converters”. Em: *International Journal of Electronics* 110.1, pp. 35–48.
- Ounnas, A. et al. (2019). “Design and implementation of a digital PID controller for DC-DC Buck converter”. Em: *2019 International Conference on Electrical Engineering (ICEE)*. IEEE, pp. 1–6.
- Petráš, Igor (2011). *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Springer.
- Podlubny, Igor (1999a). *Fractional Differential Equations*. Academic Press.
- (1999b). *Fractional Differential Equations*. Academic Press. ISBN: 9780125588409.
- Rashid, Muhammad H. (2011). *Power Electronics: Circuits, Devices and Applications*. 4ª ed. Pearson Education.
- Robbins, Allan H. e Wilhelm C. Miller (2007). *Análise de Circuitos: Teoria e Prática*. LTC.
- Rosendo, D.C. (2008). “Sobre a função de Mittag-Leffler”. Diss. de mestr. UNICAMP.
- Sadeghian, Amir et al. (2020). “Fuzzy logic and machine learning for adaptive control of buck converters”. Em: *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 95, p. 103899.
- Sharma, A. (2023). “PID controller tuning techniques for buck converters: classical and modern approaches”. Em: *Journal of Power Electronics* 23.2, pp. 115–127.
- Spiegel, M. (1890). *Transformadas de Laplace*. Coleção Schaum.
- Teodoro, G. Sales e D.S. Oliveira (2017). “Sobre Derivas Fracionárias”. Em: *Sociedade Brasileira de Física*.
- Valério, Duarte e José Sá da Costa (2013). *An Introduction to Fractional Control*. The Institution of Engineering e Technology.

- West, Bruce J. (2014). "Colloquium: Fractional calculus view of complexity". Em: *Reviews of Modern Physics* 86.4, pp. 1169–1186.
- Xue, Dingyu (2017). *Fractional-order Control Systems: Fundamentals and Numerical Implementations*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.
- Xue, Dingyu et al. (2006). "Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB". Em: *SIAM Review*.
- Xue, Dingyü et al. (2006). "Robust Tuning of Fractional Order PID Controllers Using Evolutionary Algorithms". Em: *Proceedings of the UKACC International Conference on Control*, pp. 1–6.
- Zhang, Y. et al. (2020). "A multimode control algorithm for high-efficiency buck converters". Em: *IEEE Transactions on Power Electronics* 35.4, pp. 3957–3966.