



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE BASEADO EM EVENTOS DE SISTEMAS LINEARES A
PARÂMETROS VARIANTES SOB DISTÚRBIOS DE ENERGIA LIMITADA E
ATUADORES SATURANTES

Andevaldo da Encarnação Vitório

Manaus – AM

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
FACULDADE DE TECNOLOGIA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE BASEADO EM EVENTOS DE SISTEMAS LINEARES A
PARÂMETROS VARIANTES SOB DISTÚRBIOS DE ENERGIA LIMITADA E
ATUADORES SATURANTES

Andevaldo da Encarnação Vitória

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, PPGEE, da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Iury Valente de Bessa

Pedro Henrique Silva
Coutinho

Manaus

Agosto de 2025

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

- V845c Vitório, Andevaldo da Encarnação
Controle baseado em eventos de sistemas lineares a parâmetros variantes sob distúrbios de energia limitada e atuadores saturantes / Andevaldo da Encarnação Vitório. - 2025.
135 f. : il., color. ; 31 cm.
- Orientador(a): Iury Valente de Bessa.
Coorientador(a): Pedro Henrique Silva Coutinho.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Amazonas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Manaus - AM, 2025.
1. Controle baseado em eventos. 2. Sistemas de controle em rede. 3. Modelos lineares a parâmetros variantes. 4. Atuadores saturantes. 5. Controle robusto. I. Bessa, Iury Valente de. II. Coutinho, Pedro Henrique Silva. III. Universidade Federal do Amazonas. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título
-



Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

FOLHA DE APROVAÇÃO

Poder Executivo Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Faculdade de Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Av. General Rodrigo Octávio Jordão Ramos, nº 3.000 - Campus Universitário, Setor Norte - Coroado, Pavilhão do CETELI. Fone/Fax (92) 99271-8954 Ramal:2607. E-mail: ppgee@ufam.edu.br

ANDEVALDO DA ENCARNAÇÃO VITÓRIO

Controle Baseado em Eventos aplicado a Sistemas de Lineares a Parâmetros Variantes Sujeitos a Distúrbios de Energia Limitada e Atuadores Saturantes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de concentração Controle e Automação de Sistemas.

Aprovada em 02 de setembro de 2025.

BANCA EXAMINADORA
Prof. Dr. Iury Valente de Bessa - Presidente
Prof. Dr. Rodrigo Farias Araújo - Membro Titular 1 - Interno
Prof. Dr. Reinaldo Martínez Palhares - Membro Titular 2 - Externo

Manaus, 15 de agosto de 2025.



Documento assinado eletronicamente por **REINALDO MARTINEZ PALHARES**, **Usuário Externo**, em 03/09/2025, às 10:00, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Farias Araújo**, **Usuário Externo**, em 03/09/2025, às 13:16, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Iury Valente de Bessa**, **Professor do Magistério Superior**, em 08/09/2025, às 20:23, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2745724** e o código CRC **E39DE9CB**.

Av. General Rodrigo Octávio Jordão Ramos, nº 3.000 - Bairro Coroadó Campus Universitário, Setor Norte
- Telefone: 99271-8954
CEP 69080-900 Manaus/AM - Pavilhão do CETELI. E-mail: ppgee@ufam.edu.br

Referência: Processo nº 23105.035805/2025-68

SEI nº 2745724

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre foram a base e o exemplo em minha vida, incentivando-me e apoiando-me incondicionalmente em todos os momentos. Estendo esta dedicatória ao meu professor-orientador, aos demais professores e aos amigos que fizeram parte desta trajetória, cuja contribuição tornou possível a realização deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder saúde, força e sabedoria ao longo desta jornada, guiando-me em cada etapa e permitindo que eu superasse desafios com fé e perseverança.

Sou profundamente grato aos meus pais, Gleiciane e Marivaldo, por terem construído a base sólida que sustenta minha vida. Seu amor, apoio incondicional e incentivo constante foram fundamentais para que eu pudesse crescer, me desenvolver e perseguir meus sonhos.

Registro minha gratidão a todo o corpo docente do PPGEE, que contribuiu significativamente para minha formação acadêmica. Em especial, agradeço ao professor-orientador Iury Bessa e ao coorientador Pedro Coutinho pela orientação paciente, pela parceria e pela disponibilidade durante todo o mestrado. Seu conhecimento e dedicação foram essenciais para o avanço desta pesquisa. Agradeço também aos amigos e colegas da UFAM, conquistados ao longo da graduação e do mestrado, pela colaboração e companheirismo.

Por fim, agradeço o apoio financeiro da CAPES, do CNPq, da FAPEAM e da Cal-Comp/SUFRAMA, por meio do convênio com a Universidade Federal do Amazonas e a FAEPI, Brasil, cuja contribuição tornou possível a realização desta pesquisa.

Resumo da Dissertação apresentada à UFAM como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

CONTROLE BASEADO EM EVENTOS DE SISTEMAS LINEARES A
PARÂMETROS VARIANTES SOB DISTÚRBIOS DE ENERGIA LIMITADA E
ATUADORES SATURANTES

Andevaldo da Encarnação Vitório

Orientadores: Iury Valente de Bessa

Pedro Henrique Silva Coutinho

Programa: Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Os Sistemas de Controle em Rede (NCS) têm papel essencial em aplicações industriais e tecnológicas, permitindo a comunicação entre sensores, controladores e atuadores por meio de redes de comunicação. Entretanto, restrições na transmissão de dados, a saturação dos atuadores e distúrbios podem comprometer o desempenho e até a estabilidade do sistema. Estratégias de Controle Acionado por Eventos (ETC) vêm sendo amplamente exploradas para mitigar esses efeitos, otimizando o uso da rede e preservando a estabilidade e o desempenho. Nesse sentido, este trabalho apresenta um estudo do Controle Periódico Acionado por Eventos (PETC) aplicado a NCSs que podem ser representados por sistemas lineares a parâmetros variantes (LPV), sujeitos a saturação de atuadores e a distúrbios externos de energia limitada. São investigados quatro esquemas de mecanismo de acionamento por eventos (ETM): dois estáticos, um dinâmico e um adaptativo. Para cada esquema, são formuladas condições de co-projeto baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), considerando tanto o cenário síncrono quanto o assíncrono entre os parâmetros da planta e do controlador. Adicionalmente, é apresentada uma extensão dessas condições para tratar restrições de estados em sistemas quase-LPV. A eficácia das abordagens é validada por meio de simulações numéricas, avaliando o desempenho dos diferentes esquemas de PETC em múltiplas condições operacionais.

Palavras-chave: Controle Baseado em Eventos; Sistemas de Controle em Rede; Modelos Lineares a Parâmetros Variantes; Atuadores Saturantes; Controle Robusto.

Abstract of Dissertation presented to UFAM as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering

CONTROLE BASEADO EM EVENTOS APLICADO A SISTEMAS DE
LINEARES A PARÂMETROS VARIANTES SUJEITOS A DISTÚRBIOS DE
ENERGIA LIMITADA E ATUADORES SATURANTES

Andevaldo da Encarnação Vitório

Advisors: Iury Valente de Bessa

Pedro Henrique Silva Coutinho

Department: Postgraduate in Electrical Engineering

Networked Control Systems (NCS) play a crucial role in industrial and technological applications, enabling communication between sensors, controllers, and actuators via communication networks. However, data transmission constraints, actuator saturation, and disturbances can compromise system performance and even stability. Event-Triggered Control (ETC) strategies have been widely explored to mitigate these effects, optimizing network usage while preserving stability and performance. In this context, this work presents a study on Periodic Event-Triggered Control (PETC) applied to NCSs that can be represented by Linear Parameter-Varying (LPV) systems, subject to actuator saturation and bounded-energy external disturbances. Four event-triggering mechanism (ETM) schemes are investigated: two static, one dynamic, and one adaptive. For each scheme, co-design conditions based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) are formulated, considering both synchronous and asynchronous scenarios between the plant and controller parameters. Additionally, an extension of these conditions is presented to handle state constraints in quasi-LPV systems. The effectiveness of the proposed approaches is validated through numerical simulations, evaluating the performance of the different PETC schemes under multiple operating conditions.

Keywords: Event-based Control; Networked Control Systems; Linear Parameter-Varying Models; Saturating Actuators; Robust Control.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Sistemas de Controle em Rede	1
1.2	Trabalhos Relacionados	5
1.3	Objetivos da Dissertação	11
1.3.1	Objetivo geral	11
1.3.2	Objetivos específicos	11
1.4	Organização do Trabalho	12
2	Fundamentação Teórica	14
2.1	Modelos LPV Politópicos	14
2.2	Estabilidade \mathcal{L}_2	16
2.3	Sistemas sob Atuadores Saturantes	18
2.4	Controle Acionado por Eventos Periódico (PETC)	19
2.4.1	Estrutura Geral do PETC	20
2.4.2	Classificação dos Esquemas de PETC: Estático, Adaptativo e Dinâmico	24
2.5	Regiões de Saturação e de Estabilidade Externa	27
3	Formulação do Problema	32
3.1	Sistema em Malha Fechada	32
3.2	Esquemas de PETC Utilizados	34
3.3	Descrição dos Problemas	36
4	Resultados para o Caso Sem Fenômeno de Assincronismo	38
4.1	Análise de Estabilidade \mathcal{L}_2 usando Funcionais em <i>Loop</i>	38
4.2	Condições de Estabilização \mathcal{L}_2	48

4.2.1	Esquema DETM	48
4.2.2	Esquema SETM e SETM*	54
4.2.3	Esquema AETM	59
4.3	Problema de Otimização	62
4.4	Casos Particulares das Condições de Co-projeto	65
4.5	PETC de um Sistema LPV Oscilatório	67
5	Resultados para o Caso Com Fenômeno de Assincronismo	78
5.1	Reformulação do Sistema em Malha Fechada	78
5.2	Condições de Estabilização \mathcal{L}_2	81
5.2.1	Esquema DETM	81
5.2.2	Esquemas SETM e SETM*	83
5.2.3	Esquema AETM	85
5.3	Problema de Otimização	86
5.4	Casos Particulares das Condições de Co-Projeto	87
5.5	PETC de um Sistema LPV Oscilatório	87
5.6	PETC de uma Microrrede CC	96
5.6.1	Modelo quase-LPV de uma Microrrede CC	96
5.6.2	Resultados Numéricos	98
6	Conclusão	106
6.1	Considerações Finais	106
6.2	Perspectivas Futuras	109
	Referências Bibliográficas	112
A	Teoremas e Lemas Úteis	124
A.1	Estabilidade no Sentido de Lyapunov	124
A.2	Desigualdades Matriciais Lineares	128
A.3	Desigualdades Integrais	129
A.4	Desigualdade Matricial para Termos Cruzados	131
A.5	Complemento de Schur e Lema de Finsler	132
A.6	Lema de Barbarlat	133
B	Artigos Aceitos e Submetidos	134

Lista de Figuras

2.1	Esquemas do ETC periódico com controlador dependente de parâmetros com sincronismo ou assincronismo dos parâmetros.	21
2.2	Região de estados iniciais admissíveis \mathcal{D}_0 (linha preta contínua), uma REE \mathcal{D}_x (linha tracejada) e uma trajetórias dos estados iniciando no ponto em azul e finalizando no ponto em verde em um plano do \mathbb{R}^2	28
2.3	Região de validade da condição de não-linearidade setorial \mathcal{D}_u (linha contínua) e uma REE \mathcal{D}_x (linha tracejada) em um plano do \mathbb{R}^2	30
4.1	Projeções dos valores ótimos das variáveis γ , β e $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$ para diferente valores de ϵ	68
4.2	Regiões \mathcal{D}_u , \mathcal{D}_x , \mathcal{D}_0 e as trajetórias dos sistema em malha fechada sob os ETMs projetados. A região em cinza representa a região de saturação $\mathcal{D}_{u,s}$, e em branco, a região de não saturação $\mathcal{D}_{u,ns}$	70
4.3	Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema DETM, da variável dinâmica η , do sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos.	72
4.4	Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema SETM, do sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos.	73
4.5	Regiões \mathcal{D}_u , \mathcal{D}_x , \mathcal{D}_0 e as trajetórias dos sistema em malha fechada sob os esquemas SETM* e AETM projetados. A região em cinza representa a região de saturação $\mathcal{D}_{u,s}$, e em branco, a região de não saturação $\mathcal{D}_{u,ns}$	74
4.6	Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema AETM, do parâmetro $\sigma(t)$, do sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos.	76

4.7	Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema SETM*, do sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos.	77
5.1	Projeções dos valores ótimos das variáveis γ , β e $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$ para diferentes valores de ϵ	88
5.2	Regiões \mathcal{D}_u , \mathcal{D}_x , \mathcal{D}_0 e as trajetórias do sistema em malha fechada sob os esquemas SETM e DETM projetados considerando o fenômeno assíncrono. A região em cinza representa a região de saturação, e em branco, a região de não saturação.	90
5.3	Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema SETM, incluindo o sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos. Em (c), as marcações em vermelho indicam eventos acionados pela condição $\diamond 2$, enquanto as em preto correspondem a eventos acionados pela condição $\diamond 1$	91
5.4	Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema DETM, incluindo o sinal de controle, a variável dinâmica η e os intervalos de tempo entre eventos. Em (d), as marcações em vermelho indicam eventos acionados pela condição $\diamond 2$, enquanto as em preto correspondem a eventos acionados pela condição $\diamond 1$	92
5.5	Regiões \mathcal{D}_u , \mathcal{D}_x , \mathcal{D}_0 e as trajetórias do sistema em malha fechada sob os esquemas SETM* e AETM projetados considerando o fenômeno assíncrono. A região em cinza representa a região de saturação $\mathcal{D}_{u,s}$, e em branco, a região de não saturação $\mathcal{D}_{u,ns}$	93
5.6	Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema SETM*, incluindo o sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos. Em (c), as marcações em vermelho indicam eventos acionados pela condição $\diamond 2$, enquanto as em preto correspondem a eventos acionados pela condição $\diamond 1$	94

5.7	Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema AETM, incluindo o sinal de controle, o parâmetro σ e os intervalos de tempo entre eventos. Em (d), as marcações em vermelho indicam eventos acionados pela condição $\diamond 2$, enquanto as em preto correspondem a eventos acionados pela condição $\diamond 1$	95
5.8	Topologia de uma microrrede CC com 6 unidades DG e 8 linhas.	96
5.9	Circuito elétrico de uma unidade DG com conversor do tipo <i>buck</i>	97
5.10	Topologia da microrrede CC utilizada nas simulações.	99
5.11	Comportamento dos estados da microrrede CC sob o esquema DETM, incluindo o sinal de controle, a variável dinâmica η e os intervalos de tempo entre eventos. Não ocorreram eventos acionados pela condição $\diamond 2$	101
5.12	Comportamento dos estados da microrrede CC sob o esquema SETM, incluindo o sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos. Não ocorreram eventos acionados pela condição $\diamond 2$	102
5.13	Comportamento dos estados da microrrede CC sob o esquema SETM*, incluindo o sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos. Não ocorreram eventos acionados pela condição $\diamond 2$	103
5.14	Comportamento dos estados da microrrede CC sob o esquema AETM, incluindo o sinal de controle, o parâmetro σ e os intervalos de tempo entre eventos. Não ocorreram eventos acionados pela condição $\diamond 2$	104

Lista de Símbolos

Símbolos Matemáticos

\mathbb{R}	O conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	O espaço Euclidiano n -dimensional
$\mathbb{R}^{m \times n}$	O conjunto de matrizes reais de dimensão m por n
$\mathbb{R}_{\geq 0}$ (> 0)	O conjunto de números reais não negativos (positivos)
\mathbb{N}	O conjunto dos números naturais
\mathbb{B}	O domínio booleano $\{0, 1\}$
\mathbb{B}^n	Potência cartesiana n -ária de \mathbb{B}
\mathbb{B}^{n+}	O conjunto $\{\mathbf{i} : i_j \leq i_{j+1}, i_j \in \mathbb{B}, j \in N_{\leq n-1}\}$
\mathbb{S}^n	O conjunto de todas as matrizes simétricas reais de ordem n
$\mathbb{S}_{>0}^n$	O conjunto de todas as matrizes definida positiva de ordem n
$\mathbb{S}_{<0}^n$	O conjunto de todas as matrizes definida negativa de ordem n
$\dot{x}(t)$	A derivada temporal da função $x(t)$
x^\top ou A^\top	A matriz transposta do vetor x ou da matriz A
A^{-1}	A matriz inversa da matriz A
$\exp(n)$	Notação resumida para e^n , onde e é a constante de <i>euler</i>
\mathcal{K}	O conjunto de funções contínuas $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que são estritamente crescentes e satisfazem a $\alpha(0) = 0$
\mathcal{K}_∞	O conjunto de funções $\alpha \in \mathcal{K}$, onde $\alpha(s) \rightarrow +\infty$ para $s \rightarrow +\infty$

$\begin{bmatrix} A & B \\ \star & C \end{bmatrix}$	Notação resumida para $\begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix}$
$\text{He}(A)$	Notação resumida para $A + A^\top$
$\text{diag}(A_1, \dots, A_n)$	A matriz diagonal cujas entradas são A_1, \dots, A_n , $n \in \mathbb{N}$
$\text{tr}(A)$	O traço da matriz A
I_n	A matriz identidade de dimensão n . Se a dimensão é clara no contexto, ela é omitida
$0_{m,n}$	A matriz nula de dimensão m por n . Se a dimensão é clara no contexto, ela é omitida
$\ w(t)\ _2$ ou $\ w(t)\ $	Representa a norma \mathcal{L}_2 de um sinal mensurável $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\ w(t)\ _2^2 = \int_0^\infty w^\top(s)w(s) ds$
$\ w(t)\ _\infty$	Representa a norma \mathcal{L}_∞ de um sinal mensurável $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\ w(t)\ _\infty^2 = w^\top(s)w(s)$
\mathcal{L}_2	Representa o conjunto dos sinais mensuráveis $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\ w(t)\ _2 < \infty$
\mathcal{L}_∞	Representa o conjunto dos sinais mensuráveis $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\ w(t)\ _\infty < \infty$
$\mathcal{P}(\mathbf{i})$	O conjunto de permutações do multi-índice $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{B}^p$
v_ℓ	A ℓ -ésima entrada do vetor v
\prec	Denota que uma matriz é estritamente negativa definida, ou seja, todos os seus autovalores são negativos.
\succ	Denota que uma matriz é estritamente positiva definida, ou seja, todos os seus autovalores são positivos.

Lista de Tabelas

1.1	Trabalhos que propõem estratégias de PETC estático, dinâmico ou adaptativo, destacando características do controlador. AS: Assincronismo, CS: Controle Saturante, AD: Atenuação de Distúrbios, GE: Ganhos Escalonados.	10
3.1	Resumo dos esquemas de ETM.	36
4.1	Média dos intervalos de tempo entre eventos (em segundos).	74
5.1	Parâmetros da microrrede CC.	99
5.2	Resumo dos resultados de simulação para os quatro esquemas de acionamento periódico baseado em eventos.	105

Lista de Siglas

- AETM** *Adaptive Event-triggering Mechanism*. xi–xiii, 10, 12, 32, 35, 36, 38, 45, 47, 48, 59–62, 64–66, 69, 73–76, 78, 81, 85–89, 91, 93–96, 99, 100, 103–109
- BIBO** *Bounded-Input Bounded-Output*. 124
- CC** Corrente Contínua. xiii, xvi, 96, 98, 99, 101–104, 108
- CPL** *Constant Power Load*. 96, 97, 99, 100
- CRL** *Constant Resistance Load*. 96
- DETM** *Dynamic Event-triggering Mechanism*. xi–xiii, 10, 12, 32, 35, 36, 38–40, 42, 48, 50, 51, 53, 54, 61–66, 68–72, 74, 78, 81–83, 86–92, 94, 96, 99–103, 105–109
- DG** *Distributed Generation*. xiii, 96–98
- DoS** *Denial of Service*. 8, 9
- ETC** *Event-triggered Control*. vii, viii, 2, 3, 5, 7–9, 13, 20, 21, 23
- ETM** *Event-triggering Mechanism*. vii, viii, xi, 2, 6, 8–13, 20, 23–26, 31, 32, 35, 36, 38, 61–63, 70–72, 76, 87, 89, 92, 99–101, 104, 106, 107, 109, 110
- LIT** *Linear e Invariante no Tempo*. 6, 10, 23
- LMI** *Linear Matrix Inequality*. vii, viii, 4, 7–9, 11, 23, 48, 53, 54, 57–59, 61, 63–67, 82, 83, 85–87, 106, 111, 128, 129, 132
- LPV** *Linear a Parâmetro Variante*. vii, viii, 4, 7–16, 18, 20, 22, 23, 27, 32–34, 36, 38, 48, 66, 67, 78, 80, 82, 84, 87, 96, 98, 106, 108, 109, 111

NCS *Networked Control System*. vii, viii, 1–5, 8, 11, 12, 16, 19, 20, 32, 106, 110

PETC *Periodic Event-Triggered Control*. vii, viii, xvi, 2, 5–12, 14, 20, 32, 36–38, 65, 67, 70, 78, 96, 106, 109, 110

RA Região de Atração. 27, 28, 31

REE Região de Estabilidade Externa. xi, 27, 28, 30, 31, 41, 42, 44–47, 50, 55, 58, 60, 64, 69, 70, 85, 89

SETM *Static Event-triggering Mechanism*. xi–xiii, 10, 12, 32, 35, 36, 38, 42–45, 48, 54, 55, 57, 59, 63, 64, 66, 68–71, 73–75, 77, 78, 81, 83, 84, 86–91, 93, 94, 96, 99, 100, 102, 103, 105–109

ZOH *Zero-order Holder*. 22, 34

Capítulo 1

Introdução

1.1 Sistemas de Controle em Rede

Os Sistemas de Controle em Rede (NCSs, do inglês *Networked Control Systems*) são sistemas distribuídos que conectam sensores, controladores e atuadores por meio de redes de comunicação em tempo real, permitindo a construção de sistemas em larga escala [1, 2]. Suas principais vantagens incluem redução de custos, instalação simplificada e maior flexibilidade, já que eliminam a necessidade de cabeamento pesado [3, 4]. Isso torna os NCSs altamente aplicáveis em setores como direção autônoma, cirurgia remota, exploração aeroespacial, controle de manufatura inteligente, veículos aéreos não tripulados, redes de sensores móveis e robótica [5–9]. No entanto, à medida que a complexidade da rede e o número de dispositivos aumentam, surgem desafios como congestionamento, ameaças à segurança e instabilidade, que podem afetar os sistemas em tempo real [1, 7]. Além disso, a limitação da largura de banda da rede e os retardos de comunicação induzidos são fatores críticos que impactam diretamente o desempenho e a confiabilidade dos NCSs [10, 11].

A comunicação eficaz entre os componentes dos NCSs é essencial para o bom funcionamento do sistema. As mensagens trocadas entre sensores, atuadores e controladores são pequenas, frequentes e com intervalos curtos, o que se deve à natureza em tempo real do controle [12]. A transmissão dos sinais envolve amostragem, codificação, transmissão e decodificação, processos que podem introduzir retardos devido ao congestionamento na rede e à qualidade do canal de comunicação. Além disso, a utilização de redes digitais compartilhadas e com capacidade limitada de

transmissão impõe desafios significativos na comunicação entre os componentes [13]. Embora a redução de custos seja um benefício, a limitação da largura de banda pode afetar o desempenho do sistema, especialmente em aplicações críticas. Nesses casos, a capacidade da rede pode ser insuficiente, comprometendo a operação do sistema.

As pesquisas sobre NCSs podem ser divididas em duas áreas: o “controle de redes”, que visa melhorar a qualidade do serviço das redes de comunicação, e o “controle sobre redes”, que busca mitigar os efeitos das imperfeições da rede no desempenho do sistema de controle [14]. Diversos estudos têm explorado técnicas específicas para melhorar o desempenho e assegurar a estabilidade dos NCSs, como o controle por dados amostrados [15, 16], que investiga como a escolha do período de amostragem impacta a estabilidade do sistema, o controle com quantização [17], que estuda os efeitos da quantização na performance e estabilidade, além do controle resiliente [18, 19], que foca na proteção dos NCSs contra ataques cibernéticos, garantindo a integridade dos dados e a operação confiável do sistema.

O controle acionado por eventos (ETC, do inglês *Event-Triggered Control*) determina os instantes de transmissão de dados pela rede com base no estado ou saída do sistema, utilizando um mecanismo de acionamento de eventos (ETM, do inglês *Event-Triggering Mechanism*) [4]. Dependendo de como o ETM monitora o sistema, o ETC pode ser classificado em periódico (PETC, do inglês *Periodic Event-Triggered Control*) ou contínuo (CETC, do inglês *Continuous Event-Triggered Control*). Em ambos os casos, a transmissão ocorre apenas quando necessária, reduzindo o número de eventos de transmissão desnecessários.

Na prática, fatores externos como atrasos na rede, jitter de amostragem ou variações na carga computacional podem tornar os instantes de transmissão ligeiramente irregulares, caracterizando uma amostragem efetivamente aperiódica. Essas irregularidades podem introduzir atrasos e variações temporais que afetam o comportamento do sistema, potencialmente comprometendo a estabilidade e o desempenho [20]. Entretanto, esquemas de PETC demonstram robustez frente a essas variações, preservando as propriedades de estabilidade e desempenho do sistema [21]. Dessa forma, o controle acionado por eventos, especialmente em sua forma periódica, mantém suas vantagens mesmo diante de pequenas irregularidades nos instantes de amostragem [22, 23].

O ETC pode também ser classificado conforme a estrutura da condição de acionamento de eventos, sendo dividido em estático, adaptativo e dinâmico. No ETC estático, a condição de acionamento é fixa, dependendo apenas do estado atual do sistema e do último estado transmitido. Já o ETC adaptativo ajusta dinamicamente os limiares de acionamento para reduzir transmissões desnecessárias, considerando fatores como o erro entre as funções de mapeamento do sistema e do controlador e o histórico de dados acionados, explorando estratégias como os métodos de limiar fixo, relativo e comutável, além de abordagens que introduzem múltiplos limiares ajustáveis para otimizar o uso dos recursos de comunicação [24–26]. No ETC dinâmico, uma variável interna adicional é incorporada à condição de acionamento, funcionando como uma versão filtrada da condição estática [22, 27]. Essa abordagem reduz o número de transmissões sem comprometer o desempenho do sistema, muitas vezes resultando em tempos entre eventos maiores do que no ETC estático [23, 28]. Em algumas estratégias, essa variável dinâmica opera como um relógio interno cuja taxa de crescimento depende do estado do sistema, enquanto outras exploram variações não monótonas para tornar o critério de acionamento mais flexível e eficiente [27].

Diante das pesquisas na área, as abordagens de projeto de ETC são frequentemente classificadas em emulação e co-projeto. Na abordagem por emulação, inicialmente é definida uma lei de controle sem considerar a rede, e posteriormente uma condição de acionamento é projetada para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada [29, 30]. Embora essa estratégia seja amplamente utilizada, sua principal limitação reside no fato de que o desempenho do sistema depende da escolha prévia da lei de controle. Por outro lado, a abordagem de co-projeto considera o desenvolvimento simultâneo do controlador e da condição de acionamento, permitindo uma melhor adaptação às restrições da rede e, conseqüentemente, potencializando o desempenho do sistema [31, 32].

Os NCSs frequentemente envolvem sistemas com dinâmicas não lineares e variantes no tempo, inerentes a muitos processos físicos. Embora alguns modelos possam ser aproximados como lineares e invariantes no tempo em certas condições, sistemas eletromecânicos, hidráulicos e pneumáticos frequentemente exibem não linearidades, como saturação, zona morta e efeitos quadráticos [33]. Quando aliado

aos desafios impostos pela presença da rede nos NCS, esses fatores podem impactar significativamente o desempenho do sistema de controle, tornando essencial a consideração dessas dinâmicas no projeto e na análise do sistema. Nesse contexto, os modelos Lineares a Parâmetros Variantes (LPV, do inglês *Linear Parameter-Varying*) são amplamente utilizados para representar sistemas não lineares e/ou com parâmetros variantes dentro de uma estrutura linear, permitindo a aplicação de técnicas clássicas de controle. Nesses modelos, a dinâmica do sistema depende de parâmetros que variam no tempo e permanecem dentro de conjuntos limitados [34, 35].

Técnicas de controle baseadas em modelos LPV têm sido amplamente exploradas, especialmente em controladores com ganhos escalonados, cujos ganhos são ajustados dinamicamente conforme variáveis de escalonamento internas ou externas [36, 37]. Em muitos casos, sistemas não lineares são aproximados por modelos politópicos, nos quais as não linearidades são representadas por parâmetros variantes dentro de um domínio compacto do espaço de estados. Quando esses parâmetros dependem dos estados, o modelo é denominado quase-LPV [22].

No contexto de NCSs, o controlador com ganhos escalonados surge como uma estratégia eficaz para adaptar os ganhos em função de parâmetros variantes no tempo, como atrasos e perdas de pacotes [38]. Essa adaptação pode ser implementada por conjuntos discretos de ganhos ou por leis contínuas. No entanto, é essencial assegurar a precisão na medição ou estimativa dos parâmetros para evitar instabilidades, garantir estabilidade global para todo o conjunto de parâmetros e gerenciar a complexidade computacional associada ao cálculo e à interpolação dos ganhos em tempo real [39, 40].

Para o projeto desses controladores, técnicas baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*) constituem uma ferramenta importante, amplamente utilizada na formulação e resolução de problemas de projeto e análise de sistemas de controle. As LMIs possibilitam transformar desafios complexos em problemas convexos ou quase convexos, que podem ser resolvidos eficientemente por métodos numéricos [41]. No contexto do projeto de controladores, elas facilitam a síntese de controladores robustos e não lineares [42–44], ampliando as possibilidades de análise e síntese para sistemas dinâmicos não lineares, além de garantir estabilidade e desempenho para todo o intervalo de variação dos parâmetros

da rede.

Além das não linearidades, os NCSs também estão sujeitos a distúrbios que podem afetar seus componentes e alterar a trajetória do sistema. Esses distúrbios podem levar o sistema a convergir para pontos de equilíbrio distintos do projetado, evoluir para ciclos limite ou até mesmo apresentar comportamento divergente, resultando em trajetórias de estado não limitadas [45]. Dependendo da natureza da perturbação, diferentes estratégias podem ser utilizadas para mitigar seus efeitos ou até mesmo eliminá-los. Entre as abordagens mais utilizadas, destacam-se técnicas de controle robusto [46], que garantem desempenho satisfatório mesmo sob incertezas e variações do sistema; controle adaptativo [47], que ajusta os parâmetros do controlador em tempo real para compensar perturbações desconhecidas; rejeição ativa de distúrbios [48, 49], que estima e compensa as perturbações em tempo real; e técnicas baseadas em observadores [50, 51], que utilizam modelos matemáticos para reconstruir e atenuar os efeitos dos distúrbios sobre o sistema.

1.2 Trabalhos Relacionados

Nos últimos anos, a pesquisa sobre ETC tem avançado significativamente, especialmente no contexto de NCSs [1, 13, 14, 14, 15, 18, 26, 52, 53]. Esse avanço tem sido impulsionado pela necessidade de tornar os sistemas de controle mais eficientes, reduzindo o uso desnecessário de recursos computacionais e de comunicação sem comprometer a estabilidade e o desempenho do sistema. No entanto, apesar dos progressos na área, diversos desafios ainda precisam ser superados, como a influência de incertezas, a robustez a distúrbios e a inclusão de não linearidades, como a saturação do controle. Diante desse cenário, diversos estudos têm proposto novas abordagens para aprimorar as estratégias de ETC em NCSs. A seguir, são apresentados os trabalhos relacionados cujos resultados foram considerados no desenvolvimento deste estudo.

Em [54], Heemels, Donkers e Teel introduziram o PETC, uma abordagem que combina as vantagens do controle amostrado periódico e do ETC. Diferentemente do ETC contínuo, que verifica continuamente as condições de acionamento de eventos, o PETC realiza essa verificação de forma periódica. Essa estratégia permite otimizar o

uso de recursos, como largura de banda e poder computacional, ao realizar transmissões pela rede de comunicação e cálculos do controlador apenas quando estritamente necessário, mantendo a regularidade na avaliação das condições de acionamento. O PETC foi desenvolvido para controladores estáticos com realimentação de estado, controladores dinâmicos baseados em saída e cenários de acionamento centralizados e descentralizados. Os autores aplicaram essa metodologia a uma planta LIT sujeita a perturbações desconhecidas. Para analisar a estabilidade entrada-saída, baseada no ganho \mathcal{L}_2 , foram exploradas três abordagens: sistemas impulsivos, sistemas lineares por partes discretos e sistemas lineares perturbados discretos. O estudo detalhou as vantagens e limitações de cada abordagem, complementando a análise com um exemplo numérico que demonstrou a eficácia do PETC na redução do consumo de recursos de comunicação e computação, sem comprometer o desempenho do sistema em malha fechada.

Em [4], Coutinho, Moreira e Palhares, apresentaram uma metodologia para o co-projeto de esquemas de PETC dinâmico voltada a sistemas quase-LPV sujeitos a retardos variáveis de comunicação, problema crítico em sistemas de controle em rede devido à degradação de desempenho e risco de instabilidade. Para lidar com essa limitação, o trabalho propôs condições construtivas, baseadas na teoria de Lyapunov–Krasovskii e modelagem por retardo temporal, que permitiram projetar simultaneamente o ganho de realimentação de estados e os parâmetros do ETM dinâmico, garantindo que as trajetórias partindo de um conjunto ampliado de condições iniciais admissíveis permaneçam dentro da região de validade do modelo e convirjam ao ponto de equilíbrio, mesmo sob atrasos na primeira transmissão. O PETC dinâmico é explorado para o intervalo entre instantes de transmissão consecutivos em relação ao esquema de ETM estático, reduzindo o número de eventos e, conseqüentemente, o uso de banda. Além disso, a formulação incorpora um problema de otimização multiobjetivo que equilibra a ampliação da região de atração garantida e a redução da taxa de transmissão, fornecendo soluções ótimas de Pareto que demonstram, nos exemplos numéricos, economia de até 80% de largura de banda frente ao controle acionado por tempo, sem perda de estabilidade.

Em [55], Jiang *et al.* propuseram um PETC adaptativo para estabilizar a atitude de espaçonaves rígidas, superando desafios como incertezas no modelo,

distúrbios externos e saturação de entrada. A inovação central foi a substituição da medição contínua do estado por uma amostragem periódica, uma abordagem mais eficiente em termos de recursos. Para garantir a estabilidade do sistema, os autores desenvolveram novas leis de atualização adaptativa acionadas por eventos e uma estratégia de medição periódica para controle por modo deslizante adaptativo, assegurando que os estados permanecessem em um modo deslizante prático. Um dos principais avanços foi a eliminação do fenômeno de Zenão, garantindo um limite inferior uniforme para o tempo entre eventos igual ao período de amostragem adotado. Além disso, a estratégia proposta demonstrou ser eficaz na redução da necessidade de avaliação contínua, mitigando o aumento excessivo do erro antes da detecção do evento. Resultados numéricos validaram a eficácia da abordagem, evidenciando a redução na comunicação e a consequente economia de recursos.

Em [22], Coutinho e Palhares investigaram um esquema de PETC dinâmico para sistemas não lineares sujeitos a distúrbios de energia limitada, formulando as condições de projeto em termos de LMIs. O estudo propõe um método de co-projeto para sistemas representados por modelos quase-LPV politópicos, abordando a assincronia entre o controlador e a planta. A abordagem baseia-se em um esquema de ETC dinâmico com formulação de retardo temporal, permitindo tratar retardos induzidos pela rede. Para mitigar o conservadorismo decorrente da conversão das condições em um conjunto finito de LMIs, são exploradas desigualdades integrais avançadas, como as de Bessel-Legendre de ordem superior, que se mostram menos restritivas que técnicas tradicionais. Além disso, a assincronia entre os parâmetros do modelo quase-LPV e os ganhos do controlador escalonado é tratada por uma técnica de relaxação de LMIs proposta pelos autores, explorando a convexidade dos parâmetros para reduzir o conservadorismo do projeto. Como principal contribuição, o estudo apresenta uma nova condição baseada na teoria de Lyapunov-Krasovskii para o co-projeto do mecanismo dinâmico de acionamento por eventos e do controlador por ganhos escalonados, garantindo a estabilidade robusta do sistema em malha fechada. Também é formulada uma condição particular para ETC estático, derivada do esquema dinâmico proposto. Exemplos numéricos demonstram a eficácia do método na ampliação dos retardos toleráveis e na redução do número de acionamento de eventos, superando abordagens estáticas. O estudo abre perspectivas para

pesquisas futuras, incluindo estratégias de ETC baseadas em saída e abordagens descentralizadas para sistemas quase-LPV.

Em [56], Peixoto *et al.* apresentaram uma abordagem resiliente de ETC para sistemas LPV sujeitos a ataques de negação de serviço (DoS, do inglês *Denial of Service*) e ataques de engano estocásticos. O estudo propôs um NCS composto por um controlador com ganhos escalonados síncrono e um ETM estático. Para assegurar a estabilidade exponencial do sistema em malha fechada, mesmo sob ataques híbridos, foi adotada uma estratégia baseada em comutação, fornecendo condições de co-projeto formuladas em termos de LMIs. Além disso, desenvolveu-se um procedimento de otimização para aumentar a resiliência contra ataques DoS, minimizando simultaneamente o número de transmissões de dados. Os principais avanços desse estudo incluíram o desenvolvimento de um esquema de PETC resiliente para sistemas LPV sob ataques cibernéticos híbridos e a utilização de uma funcional em *loop* candidata para garantir a estabilidade do sistema. Os resultados demonstraram a eficácia da abordagem proposta por meio de um exemplo numérico, evidenciando o equilíbrio entre resiliência e eficiência na transmissão de dados.

Em [57], Peixoto *et al.* desenvolveram uma abordagem de PETC para sistemas *fuzzy* de Takagi–Sugeno sujeitos a ataques de falsificação de dados e atrasos de comunicação, um cenário que compromete a confiabilidade e a estabilidade de sistemas de controle em rede. O trabalho formula condições de co-projeto, na forma de LMIs, que permitem determinar simultaneamente o controlador de realimentação de estados e os parâmetros do ETM, garantindo estabilidade assintótica local em média quadrática diante de pacotes de dados maliciosos. Para lidar com a ação simultânea de atrasos e ataques, a análise incorpora funcionais de Lyapunov–Krasovskii e considera explicitamente o retardo temporal induzido na primeira transmissão. O ETM é projetado para reduzir o número de eventos de transmissões, atenuando o uso da rede, ao mesmo tempo em que assegura a resiliência contra falsificação de dados. Resultados numéricos evidenciam que, em comparação com estratégias de controle acionado por tempo e ETM estático, o método proposto mantém o desempenho desejado e reduz substancialmente a taxa de uso da rede de comunicação, demonstrando sua aplicabilidade em cenários críticos de segurança cibernética e comunicação limitada.

Em [58], Pang, Zhang e Zhu propuseram um controle baseado em eventos para sistemas de *risers* de perfuração em águas profundas, considerando forças de tensão não lineares e atrito limitado sob condições de rede e comunicação não confiáveis. Ao invés dos métodos linearizados tradicionais, foi utilizado um modelo politópico e um controle assíncrono com ganhos escalonados foi combinado com um esquema de ETC híbrido, a fim de reduzir o consumo de recursos e lidar com perdas de dados e retardos. O sistema foi modelado com um modelo LPV, incorporando retardos na entrada e equações impulsivas, e as condições para atenuação de distúrbios e estabilidade exponencial foram obtidas através do método de Lyapunov-Krasovskii, com desempenho H_∞ . Os resultados numéricos demonstraram que essa abordagem proporcionou uma melhor resposta de recuo no sistema *riser*-tensionador, com menor volume de transmissão de dados quando comparado ao controle linear.

Em [53], Lisbôa *et al.* abordaram a análise de estabilidade de sistemas *Lur'e* em tempo contínuo com controle saturante e PETC dinâmico. Utilizando o projeto baseado em emulação, propriedades de funções não lineares, estabilidade no sentido de Lyapunov e uma abordagem usando funcionais em *loop*, foram derivadas condições na forma de LMIs para garantir a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada. Essas condições foram então formuladas como um problema de otimização convexa para projetar os parâmetros do ETM dinâmico, com o objetivo de reduzir o número de atividades de controle em comparação com o controle acionado por tempo, mantendo a estabilidade assintótica em relação a um conjunto específico de condições iniciais. Além disso, as trajetórias convergiram para a origem, desde que a condição inicial pertencesse a um conjunto admissível estimado pelo problema de otimização.

Em [59], os autores abordaram o ETC em sistemas quase-LPV sujeitos a ataques de DoS e controlador com ganhos escalonados com parâmetros de escalonamento assíncronos. Foram projetados dois ETMs que ajustavam a frequência de comunicação das variáveis de estado e dos parâmetros de escalonamento, reduzindo o risco de transmissão sob ataque. Foram analisados ataques DoS periódicos e aperiódicos, resultando em dois sistemas em malha fechada. A estabilidade foi garantida pelos controladores projetados, considerando intervalos com e sem ataques. O impacto do assincronismo entre controlador e sistema também foi abordado na análise

de estabilidade. A metodologia utilizou funções de Lyapunov por partes para projetar controladores por ganhos escalonados sob fenômeno assíncrono nos parâmetros de escalonamento. A eficácia do método foi validada em um estudo de caso com um sistema RLC comutado, demonstrando a resiliência do sistema e a otimização dos recursos de comunicação.

Trabalho	Ano	Esquema de ETM	Modelo da Planta	Características do Controlador			
				Tipo	AS	CS	AD
[54]	2013	DETM	LIT	LIT	-	Não	Sim
[60]	2024	DETM	Não-linear	LIT	-	Não	Sim
[55]	2020	AETM	Não-linear	Adaptativo	-	Sim	Sim
[32]	2022	DETM	LPV	GE	Sim	Não	Sim
[53]	2024	DETM	Lur'e	LIT	-	Sim	Não
[61]	2024	AETM	LPV	GE	Não	Não	Não
[62]	2021	DETM	LIT	LIT	-	Não	Não
[63]	2022	DETM	Não-linear	LIT	-	Não	Não
[64]	2024	AETM	Não-linear	MPC	-	Não	Sim
[65]	2023	SETM	LIT	LIT	-	Não	Sim
[66]	2025	DETM	LIT	LIT	-	Não	Sim
[67]	2025	SETM	Não-linear	Não-linear	-	Não	Não
[68]	2024	SETM	Não-linear	Não-linear	-	Não	Não
[69]	2023	DETM	Não-linear	LIT	-	Não	Não
[70]	2022	DETM	LIT	LIT	-	Não	Não
[71]	2022	SETM	Não-linear	LIT	-	Não	Sim
[72]	2025	SETM	Não-linear	Não-linear	-	Sim	Sim
[73]	2025	DETM TS/quase-LPV	GE	GE	Não	Não	Sim
[57]	2023	SETM TS/quase-LPV	LIT	LIT	-	Não	Não
[4]	2022	DETM	LPV	LIT	-	Não	Não

Tabela 1.1: Trabalhos que propõem estratégias de PETC estático, dinâmico ou adaptativo, destacando características do controlador. AS: Assincronismo, CS: Controle Saturante, AD: Atenuação de Distúrbios, GE: Ganhos Escalonados.

A Tabela 1.1 apresenta os trabalhos que propõem estratégias de PETC estático, dinâmico ou adaptativo, indicando se o controlador considera a assincronia dos parâmetros de escalonamento (caso se aplique), a saturação do sinal de controle e atenuação de distúrbios. Os estudos analisados foram selecionados a partir de uma busca sobre PETC estático, dinâmico e adaptativo¹, sem restrições quanto às características do controlador ou do modelo do sistema, nas bases digitais *Scopus* e *Web of Science*. Observa-se que nenhum dos trabalhos aborda simultaneamente a

¹Última pesquisa foi realizada no dia 13 de agosto de 2025.

saturação do sinal de controle, a atenuação de distúrbios, controladores com ganho escalonado assíncrono (destacados em negrito). Essa lacuna justifica a abordagem adotada nesta dissertação, que busca propor condições de co-projeto e estratégias de acionamento para esquemas de PETC aplicáveis a NCSs representados por modelos LPV, com foco em reduzir o conservadorismo e assegurar estabilidade e desempenho do sistema sob restrições reais de atuadores e distúrbios.

1.3 Objetivos da Dissertação

1.3.1 Objetivo geral

Esta dissertação tem como objetivo geral projetar esquemas de PETC para NCSs sujeitos a atuadores saturantes e distúrbios externos de energia limitada, representados por modelos LPV.

1.3.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, serão definidos os seguintes objetivos específicos que direcionarão as atividades do projeto:

- (i) Desenvolver condições baseadas em LMIs para o co-projeto dos esquemas de PETC estáticos, dinâmico e adaptativo, visando sua aplicação em NCSs representados por modelos LPVs;
- (ii) Formular problemas de otimização convexa para introduzir índices de desempenho e reduzir o número de eventos de transmissão de dados na rede de comunicação;
- (iii) Projetar diferentes tipos de ETMs estáticos, dinâmico e adaptativo, bem como os respectivos controladores por ganhos escalonados;
- (iv) Investigar e propor condições de acionamento e estratégias de projeto que minimizem o impacto do fenômeno de assincronismo entre parâmetros da planta e do controlador com ganhos escalonados.

- (v) Avaliar o desempenho dos NCSs sob os esquemas de PETC implementados em simulação, considerando diferentes condições operacionais e a presença de distúrbios.

1.4 Organização do Trabalho

Este documento de qualificação está estruturado em quatro capítulos, conforme descrito a seguir.

No Capítulo 2, é apresentada a fundamentação teórica para o desenvolvimento deste trabalho, abordando conceitos matemáticos, modelagens e técnicas de análise relevantes. Inicialmente, são introduzidas ferramentas matemáticas fundamentais, incluindo modelos LPV politópicos, análise de estabilidade em presença de distúrbios com energia limitada, desigualdades integrais e sistemas sob atuadores saturantes. Em seguida, discute-se o PETC, detalhando sua estrutura geral e classificando os esquemas de acionamento em estático, adaptativo e dinâmico. Por fim, realiza-se uma revisão dos trabalhos relacionados, situando este estudo no contexto do estado da arte.

No Capítulo 3, apresenta-se a formulação do problema abordado, iniciando pela modelagem do sistema em malha fechada e destacando suas características e desafios para análise e controle. Em seguida, descrevem-se os quatro esquemas de ETM (DETM, SETM, SETM* e AETM), que fundamentam o estudo, incluindo suas estruturas e condições de acionamento. Por fim, são apresentados os problemas de controle e estabilização considerados, estabelecendo os cenários e parâmetros que servem de base para o desenvolvimento das estratégias de PETC e para a análise de desempenho em sistemas LPV com atuadores saturantes e distúrbios limitados.

No Capítulo 4, apresentam-se os resultados obtidos para sistemas LPV considerando a ausência do fenômeno de assincronismo entre os parâmetros entre o controlador e a planta. O capítulo detalha a análise de estabilidade \mathcal{L}_2 por meio de funcionais em *loop*, seguida das condições de estabilização \mathcal{L}_2 específicas para cada esquema de ETM. Em sequência, discute-se o problema de otimização associado e exemplos de casos particulares das condições de co-projeto. Por fim, ilustra-se a aplicação das estratégias de PETC em um sistema LPV oscilatório, consolidando os

procedimentos de avaliação para o cenário sem assincronismo.

No Capítulo 5, apresentam-se os resultados considerando a presença do fenômeno de assincronismo entre os parâmetros variantes da planta e do controlador. O capítulo inicia com a reformulação do sistema em malha fechada para este contexto e descreve as condições de estabilização \mathcal{L}_2 aplicáveis aos diferentes esquemas de ETM. Em seguida, aborda-se o problema de otimização e os casos particulares das condições de co-projeto. Por fim, são analisadas aplicações novamente em um sistema LPV oscilatório e em uma microrrede de corrente contínua, incluindo seu modelo quase-LPV e resultados numéricos, evidenciando a eficácia das estratégias propostas em cenários com assincronismo.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta as considerações finais, sintetizando os principais avanços obtidos ao longo do estudo. Destacam-se os resultados alcançados, evidenciando a eficácia das estratégias de ETC desenvolvidas.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Este capítulo estabelece os fundamentos teóricos necessários para o desenvolvimento do trabalho. São apresentados conceitos matemáticos e técnicas de modelagem e análise de sistemas, com ênfase em modelos LPV e em critérios de estabilidade entrada-saída. Adicionalmente, são discutidos sistemas com atuadores saturantes e o PETC, incluindo suas diferentes classificações: esquemas estáticos, adaptativos e dinâmicos. Essa base teórica fornece o suporte conceitual para a análise e síntese de estratégias de controle consideradas ao longo do estudo.

2.1 Modelos LPV Politópicos

Sistemas do mundo real são geralmente não lineares e variantes no tempo, o que resulta em comportamentos dinâmicos complexos. Uma abordagem amplamente utilizada para lidar com essa complexidade é a modelagem por sistemas LPV, que permitem representar dinâmicas não lineares por meio de uma estrutura linear dependente de parâmetros variantes no tempo. Essa formulação permite a aplicação de técnicas de controle baseadas em métodos lineares, sendo empregada em diversas áreas, como processos industriais e sistemas robóticos [35, 74–79]. A conversão de modelos não lineares para representações LPV tem sido estudada por meio de métodos locais, que interpolam modelos linearizados em diferentes pontos de operação, e métodos globais, que buscam capturar o comportamento geral do sistema [34]. No entanto, desafios persistem na obtenção de procedimentos sistemáticos e amplamente aplicáveis para essa conversão, o que limita a adoção dessa abordagem em

aplicações de larga escala.

Para estabelecer uma definição formal dos modelos LPV, considera-se a seguinte definição, baseada na apresentada por Bernal *et al.* [80]:

Definição 2.1 *Um modelo LPV é um sistema dinâmico cuja dinâmica depende de um vetor de parâmetros exógenos, variantes no tempo, representado por*

$$\rho(t) = \left[\rho_1(t), \dots, \rho_{n_\rho}(t) \right]^\top \in \mathbb{R}^{n_\rho}. \quad (2.1)$$

A representação da dinâmica de um sistema LPV na forma de espaço de estados é dada por

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) + E(\rho(t))w(t), \quad (2.2)$$

$$z(t) = C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t) + F(\rho(t))w(t), \quad (2.3)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de entradas controláveis, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor de entradas exógenas não controláveis e $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída de desempenho. As matrizes $A(\rho)$, $B(\rho)$, $C(\rho)$, $D(\rho)$, $E(\rho)$ e $F(\rho)$ são funções matriciais do vetor de parâmetros $\rho(t)$. Quando os parâmetros $\rho(t)$ são endógenos, isto é, dependem de sinais internos do sistema, como os estados dinâmicos, o modelo é denominado quase-LPV.

Uma abordagem comum utilizada para representar as matrizes do sistema LPV consiste na dependência afim em relação ao vetor de parâmetros $\rho(t)$, na qual as matrizes são expressas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B(\rho(t)) & E(\rho(t)) \\ C(\rho(t)) & D(\rho(t)) & F(\rho(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & E_0 \\ C_0 & D_0 & F_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n_\rho} \rho_i(t) \begin{bmatrix} A_i & B_i & E_i \\ C_i & D_i & F_i \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Os parâmetros $\rho(t)$ geralmente pertencem a um conjunto politópico, definido considerando que cada parâmetro seja limitado em amplitude, isto é:

$$\rho_i^0 \leq \rho_i(t) \leq \rho_i^1, \quad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n_\rho}. \quad (2.5)$$

Em alguns casos, pode ser necessário impor restrições à derivada temporal de $\rho(t)$,

especialmente ao lidar com funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Essa característica é um dos principais diferenciais dos modelos LPV em relação a outros tipos de modelos lineares.

Com base nisso, as matrizes do sistema podem ser representadas de forma equivalente em uma estrutura politópica como:

$$\begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B(\rho(t)) & E(\rho(t)) \\ C(\rho(t)) & D(\rho(t)) & F(\rho(t)) \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^{n_p}} \alpha_{\mathbf{i}}(\rho(t)) \begin{bmatrix} A_{\mathbf{i}} & B_{\mathbf{i}} & E_{\mathbf{i}} \\ C_{\mathbf{i}} & D_{\mathbf{i}} & F_{\mathbf{i}} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Os coeficientes $\alpha_{\mathbf{i}}(\rho(t))$ são definidos como:

$$\alpha_{\mathbf{i}}(\rho(t)) = \prod_{k=1}^{n_p} \alpha_k^{\mathbf{i}_k}(\rho_k(t)), \quad \forall \mathbf{i} \in \mathbb{B}^{n_p}, \quad (2.7)$$

com

$$\alpha_k^0(\rho_k(t)) = 1 - \alpha_k^1(\rho_k(t)), \quad \alpha_k^1(\rho_k(t)) = \frac{\rho_k^1 - \rho_k(t)}{\rho_k^1 - \rho_k^0}. \quad (2.8)$$

Além disso, $\alpha_{\mathbf{i}}(\rho(t))$ pertencem a um simplex unitário, definido por:

$$\mathcal{U} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^{2^p} : \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^{n_p}} \alpha_{\mathbf{i}} = 1, 0 \leq \alpha_{\mathbf{i}} \leq 1 \right\}. \quad (2.9)$$

A estrutura dos modelos LPV politópicos possibilita a representação parametrizada de sistemas dinâmicos não-lineares, proporcionando uma abordagem flexível para lidar com variações não lineares sem comprometer as técnicas de controle desenvolvidas para sistemas lineares. Dessa forma, os modelos LPV se estabelecem como uma ferramenta útil na análise e no projeto de controladores para sistemas com dinâmicas que variam ao longo do tempo ou em função do estado.

2.2 Estabilidade \mathcal{L}_2

A presença de distúrbios externos pode comprometer as NCSs, sendo essencial mitigar seus impactos. Considera-se o sistema dinâmico descrito por

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), w(t)), \quad (2.10)$$

com função de Lyapunov $\mathcal{V}(x(t))$, vetor de estados dinâmicos $x(t)$, saída de desempenho $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ e distúrbio externo $w(t)$. A estabilidade estado-saída garante que o estado seja limitado pela saída e que, quando esta tende a zero, o estado também converge para zero. A análise correspondente determina conjuntos admissíveis de sinais exógenos, caracterizados por limites na energia (norma \mathcal{L}_2) de $w(t)$ [45]. Se $w(t)$ se anular, a convergência das trajetórias para $x = 0$ é assegurada, caso a origem do sistema saturado seja assintoticamente estável.

Consideram-se distúrbios com energia total finita. A energia \mathcal{E} de um sinal $w(t)$ é definida como:

$$\mathcal{E}(w(t), R) = \int_0^\infty w^\top(\tau) R w(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

onde $R = R^\top \succ 0$. No caso particular em que $R = I$, a métrica corresponde à norma \mathcal{L}_2 :

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w^\top(\tau) w(\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

Assim, o conjunto de distúrbios com energia limitada, conforme a norma \mathcal{L}_2 , é dado por:

$$\mathbb{W}_2(\delta) = \left\{ w \in \mathbb{R}^{n_w} \mid \|w\|_2^2 = \mathcal{E}(w, I) \leq \frac{1}{\delta} \right\}. \quad (2.13)$$

O Lema 2.1 estabelece uma condição de estabilidade regional \mathcal{L}_2 , que limita o efeito da perturbação sobre as trajetórias do sistema e garante robustez frente a distúrbios externos de energia limitada.

Lema 2.1 (Condição de estabilidade \mathcal{L}_2 regional [45]) *Se existir um parâmetro $\gamma > 0$ tal que:*

$$\dot{\mathcal{V}}(x(t)) \leq -\|z(t)\|_2^2 + \gamma^{-1} \|w(t)\|_2^2, \quad (2.14)$$

onde $\gamma^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}_{>0}$ representa o ganho induzido \mathcal{L}_2 , então a trajetória $x(t)$ permanecerá confinada dentro da região:

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \mathcal{V}(x) \leq \mu^{-1}, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}, \quad (2.15)$$

para estados iniciais $x(0) = x_0$ pertencentes ao conjunto:

$$\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \mathcal{V}(x) \leq \beta^{-1}, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}, \quad (2.16)$$

com $\beta^{-1} \leq \mu^{-1}$, conclui-se que:

(i) $\mathcal{V}(x(T)) \leq \mathcal{V}(x(0)) + \gamma^{-1} \int_0^T w^\top(t)w(t) dt \leq \beta^{-1} + \gamma^{-1}\|w\|_2^2 \leq \beta^{-1} + \gamma^{-1}\delta^{-1} = \mu^{-1}$, $\forall T > 0$. Isso implica que as trajetórias do sistema são limitadas pelo sinal $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, permanecendo dentro da região \mathcal{D}_x .

(ii) Para $T \rightarrow \infty$, obtém-se:

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^{-1}\|w(t)\|_2^2 + \beta^{-1}. \quad (2.17)$$

(iii) Se $w(t) = 0$ para $t > t_1 > 0$, então $\dot{\mathcal{V}}(x(t)) \leq -\|z(t)\|_2^2 < 0$ para todo $x(t) \in \mathcal{D}_x$ e $x(0) \in \mathcal{D}_0$, garantindo que, nesse caso, $x(t) \rightarrow 0$.

A minimização do ganho induzido limita a amplificação da energia da perturbação na saída, permitindo projetar controladores com melhor capacidade de rejeição de distúrbios por meio de técnicas de otimização.

2.3 Sistemas sob Atuadores Saturantes

Quando o sistema é impactado por atuadores saturantes, a saturação pode induzir efeitos indesejáveis, como ciclos limites, deslocamento dos pontos de equilíbrio em relação ao valor projetado e até mesmo a perda de estabilidade do sistema [45]. Portanto, torna-se crucial definir uma região ao redor do ponto de equilíbrio, na qual todas as trajetórias iniciais converjam para esse ponto. Isso assegura que o controlador projetado mantenha a estabilidade local, mesmo na presença de atuadores saturantes, para um conjunto específico de condições iniciais.

Considere o sistema LPV descrito em (2.2), no qual o sinal de entrada $u(t)$ representa o sinal de controle $u_c(t)$ saturado, dado por:

$$u(t) = \text{sat}(u_c(t)), \quad (2.18)$$

onde a saturação é aplicada ao sinal de controle por meio da função de saturação $\text{sat}(u_c)$, definida, elemento a elemento, como:

$$\text{sat}(u_{c(\ell)}) = \text{sgn}(u_{c(\ell)}) \min\{|u_{c(\ell)}|, \bar{u}_{c(\ell)}\}, \quad (2.19)$$

sendo $\bar{u}_{c(\ell)}$ o limite máximo do ℓ -ésimo sinal de controle. Alternativamente, a função de saturação pode ser expressa por meio de uma não linearidade zona-morta, conforme:

$$\psi(u_c) = u_c(t) - \text{sat}(u_c(t)), \quad (2.20)$$

onde $\psi(u_c)$ representa a função associada à não linearidade zona-morta.

Lema 2.2 [45] *Considere o seguinte conjunto poliedral \mathcal{D}_u definido como*

$$\mathcal{D}_u = \{(a, b) : |a_{(\ell)} - b_{(\ell)}| \leq \bar{a}_{(\ell)}; a, b \in \mathbb{R}^{n_u}; \forall \ell \in \mathbb{N}_{\leq n_u}\}. \quad (2.21)$$

onde $\bar{a} \in \mathbb{R}_{>0}^{n_u}$ é o valor máximo de $a_{(\ell)}$. Se $(m, n) \in \mathcal{D}_u$, então a seguinte relação é satisfeita:

$$\psi^\top(m) \aleph^{-1}(p(t)) [\psi(m) - n] \leq 0, \quad (2.22)$$

para alguma matriz diagonal, positiva definida e dependente de parâmetros $\aleph(p(t)) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ e a não linearidade zona-morta $\psi(\cdot)$ definida em (2.20).

Para assegurar a estabilidade do ponto de equilíbrio sob controle saturante, é necessário garantir que o par $(u_c(t), v_c(t))$ pertença ao conjunto poliedral definido em (2.21), sendo $u_c(t)$ o sinal de controle não saturado e $v_c(t)$ um sinal auxiliar, geralmente com a mesma estrutura matemática do sinal de controle $u_c(t)$, que atuará como grau de liberdade. Neste contexto, a derivada da função de Lyapunov $\mathcal{V}(x(t))$ pode ser limitada conforme a expressão

$$\dot{\mathcal{V}}(x(t)) < \psi^\top(u_c(t)) \aleph^{-1}(p(t)) [\psi(u_c(t)) - v_c(t)]. \quad (2.23)$$

Garantir que o par $(u_c(t), v_c(t))$ pertença ao conjunto poliedral \mathcal{D}_u assegura a negatividade de $\dot{\mathcal{V}}(x(t))$, o que contribui para a estabilidade do ponto de equilíbrio sob controle saturante.

2.4 Controle Acionado por Eventos Periódico (PETC)

Inicialmente, a simplicidade de projeto e análise favoreceu o controle periódico acionado por tempo em NCSs. Contudo, essa abordagem frequentemente

gera dados redundantes, sobrecarregando a rede de comunicação e desperdiçando recursos, particularmente em regime estacionário. Para mitigar essas ineficiências, o ETC foi desenvolvido. Este paradigma de controle executa tarefas apenas em resposta a eventos específicos, otimizando o uso de recursos sem comprometer o desempenho do sistema. Em NCSs, o ETC se mostra particularmente vantajoso [1, 13, 14, 14, 15, 18, 26, 52, 53]. As diversas modelagens do ETC têm atraído crescente interesse da comunidade de pesquisa, especialmente no que tange à análise de estabilidade e ao projeto de controladores baseados em eventos.

Nesta seção, apresentam-se as principais características dos esquemas de PETC, enfatizando as diferenças entre os métodos estáticos, adaptativos e dinâmicos de acionamento. Inicialmente, discute-se a estrutura geral do acionamento periódico baseado em eventos, seguida da formalização e classificação dos esquemas de ETM.

2.4.1 Estrutura Geral do PETC

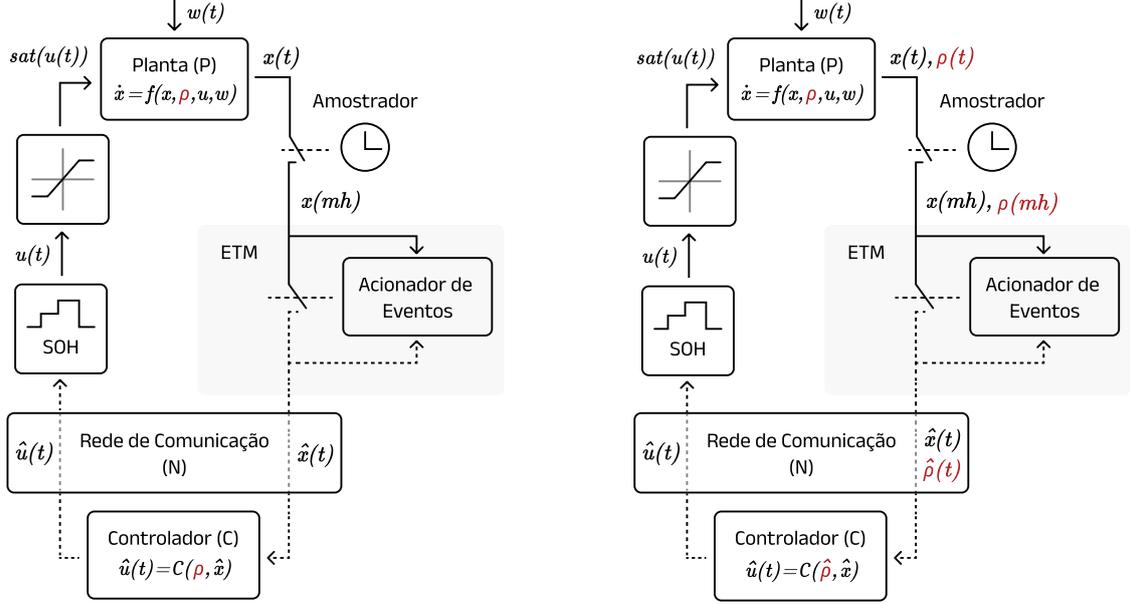
A Figura 2.1 ilustra dois esquemas de ETC considerados nesta dissertação, ambos compostos por uma planta P de tempo contínuo, sujeita à ação de distúrbios $w(t)$ e à saturação do sinal de controle. A dinâmica da planta é descrita por um modelo LPV, conforme a seguinte equação:

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) + E(\rho(t))w(t). \quad (2.24)$$

Nesta abordagem, adota-se um mecanismo de acionamento periódico baseado em eventos, no qual a condição de acionamento é verificada apenas em instantes discretos de tempo. Para isso, o esquema incorpora um amostrador que opera com período de amostragem fixo $h \in \mathbb{R}_{>0}$ (em segundos), gerando a seguinte sequência de instantes de amostragem:

$$\mathcal{S} = \{s_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} : s_m = mh, m \in \mathbb{N}_0\}. \quad (2.25)$$

Nesse contexto, o amostrador coleta periodicamente os dados da planta e os transmite ao ETM, o qual contém um mecanismo de acionamento responsável por avaliar, a cada instante $s_m \in \mathcal{S}$, se a condição de acionamento é satisfeita com



(a) Com sincronismo dos parâmetros.

(b) Com assincronismo dos parâmetros.

Figura 2.1: Esquemas do ETC periódico com controlador dependente de parâmetros com sincronismo ou assincronismo dos parâmetros.

base nas informações amostradas e nos últimos dados transmitidos. Sempre que essa condição é atendida, os dados atuais são enviados pela rede de comunicação \mathbb{N} e armazenados no *buffer* interno do ETM para uso em verificações futuras. Os instantes em que ocorrem acionamentos são denotados por t_k , com $k \in \mathbb{N}_0$ representando o índice do $(k + 1)$ -ésimo evento acionado. Assume-se, ainda, que embora a rede \mathbb{N} possua largura de banda limitada, os efeitos da comunicação sobre os dados são desprezíveis, ou seja, considera-se que não há distorções, atrasos ou perdas de pacotes que comprometam a integridade das transmissões.

A presença do amostrador garante que o intervalo mínimo entre dois eventos sucessivos seja maior ou igual a h , evitando, assim, o fenômeno de Zenão. Esse fenômeno, caracterizado pela ocorrência de uma grande quantidade de acionamentos em um intervalo de tempo muito pequeno, é incompatível com os objetivos do ETC, que busca reduzir a frequência de acionamentos e o uso de recursos computacionais e de comunicação. Além disso, o comportamento de Zenão pode afetar negativamente a dinâmica do sistema, ocasionando instabilidade, degradação de desempenho e oscilações indesejadas.

Os dados transmitidos são recebidos pelo controlador, que gera o sinal de controle com base nessas informações. O sinal de controle resultante é então enviado

pela rede de comunicação e recebido pelo segurador de ordem zero (ZOH, do inglês *Zero-order Hold*). O ZOH mantém o último valor do sinal de controle recebido da rede \mathbb{N} até que uma nova atualização ocorra. Em outras palavras, o ZOH realiza a conversão do sinal de controle discreto $\hat{u}(t_k)$ em um sinal contínuo por partes, definido por:

$$u(t) = \hat{u}(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.26)$$

No caso de uma lei de controle linear, o sinal $\hat{u}(t_k)$ pode ser obtido por:

$$\hat{u}(t_k) = \kappa x(t_k), \quad (2.27)$$

com $\kappa \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ representando um ganho constante. No entanto, esse tipo de estrutura pode conduzir a condições de projeto mais conservadoras. Em contrapartida, no contexto do controle de sistemas LPV, a lei de controle frequentemente assume uma estrutura não linear em relação ao parâmetro do sistema, expressa por:

$$\hat{u}(t_k) = K(\rho(t))x(t_k). \quad (2.28)$$

Assim como as matrizes do modelo LPV (2.24) podem ser escritas de forma afim em relação ao parâmetro $\rho(t)$ ¹, o mesmo ocorre para o ganho do controlador (2.28), que pode assumir, por exemplo, a forma afim:

$$K(\rho(t)) = K_0 + \sum_{i=1}^{n_\rho} \rho_i(t) K_i, \quad (2.29)$$

ou, alternativamente, a forma politópica:

$$K(\rho(t)) = \sum_{i \in \mathbb{B}^{n_p}} \alpha_i(\rho(t)) K_i, \quad (2.30)$$

onde $\alpha(\cdot)$ é a função de ponderação definida em (2.7). Esta última abordagem é conhecida como controle com ganhos escalonados. Nesta formulação, assume-se que os valores dos parâmetros $\rho(t)$ estão continuamente disponíveis ao controlador, caracterizando um regime com sincronismo dos parâmetros de escalonamento, conforme ilustrado na Figura 2.1a.

¹Ver Seção 2.1.

No entanto, certos sistemas podem apresentar parâmetros dependentes dos estados da planta ou de outras variáveis internas que não estão diretamente acessíveis ao controlador. Nesses casos, torna-se necessário que os parâmetros também sejam amostrados e transmitidos pela rede. Nesse cenário, o controlador opera com base nos valores dos parâmetros recebidos da rede, ou seja, utiliza $\rho(t_k)$ no instante de acionamento. A lei de controle passa, então, a ser expressa por:

$$\hat{u}(t_k) = K(\rho(t_k))x(t_k). \quad (2.31)$$

Esse comportamento caracteriza o assincronismo dos parâmetros, ilustrado na Figura 2.1b, e pode ser aplicado a qualquer sistema LPV. Diferentemente do caso síncrono, o assincronismo permite maior generalidade na modelagem e projeto, sendo particularmente relevante em cenários nos quais os parâmetros de escalonamento não são continuamente acessíveis.

Por fim, o projeto eficiente do ETM e das leis de controle é essencial para garantir estabilidade e bom desempenho em sistemas sob ETC. Duas abordagens principais são utilizadas: emulação e co-projeto. Na abordagem por emulação, o controlador é inicialmente projetado para estabilizar o sistema sem considerar o ETM e a rede de comunicação, utilizando um esquema convencional de dados amostrados. Em seguida, o ETM é projetado para preservar as propriedades do controle. Embora essa abordagem permita um projeto modular, pode limitar o desempenho e exigir mais transmissões do que o necessário [22, 52]. Já no co-projeto, o ETM e a lei de controle são projetados simultaneamente para superar as limitações da emulação. No entanto, essa abordagem envolve desafios como problemas de otimização não convexos ou multiobjetivo. Estratégias de co-projeto incluem métodos estáticos para estabilização local de sistemas LITs e métodos dinâmicos para sistemas lineares com entradas não lineares limitadas. As condições de co-projeto são frequentemente formuladas como LMIs, permitindo soluções eficientes via otimização convexa [22].

2.4.2 Classificação dos Esquemas de PETC: Estático, Adaptativo e Dinâmico

Os esquemas de ETM podem ser classificados conforme os critérios utilizados para o acionamento do evento de transmissão. Essa condição pode ser estática ou dinâmica. A seguir, formaliza-se a regra ou lei de transmissão condicionada a um instante s_m de amostragem e ao último instante de transmissão t_k .

$$t_{k+1} = \min_{m \in \mathbb{N}} \{s_m : s_m > t_k \wedge \text{Condição } \diamond 1\} \quad (2.32)$$

Aqui, o símbolo $\diamond 1$ representa a condição lógica de acionamento, ou seja, uma expressão booleana que deve ser satisfeita para que o evento de transmissão ocorra. Essa condição estabelece os critérios exatos que determinam os instantes em que o acionamento do evento é efetuado.

Os esquemas básicos de ETM geralmente apresentam apenas uma condição principal que depende de uma função específica, denominada função de acionamento, definida como [22, 81]:

$$\text{Condição } \diamond 1 : \quad \Gamma(x(s_m), \hat{x}(s_m), \sigma(s_m)) < 0, \quad (2.33)$$

onde

$$\Gamma(x(s_m), \hat{x}(s_m), \sigma(s_m)) = \sigma(s_m)\varpi_x(\|x(s_m)\|) - \varpi_\varepsilon(\|x(s_m) - \hat{x}(s_m)\|), \quad (2.34)$$

com $\sigma(t) \in (0, 1)$ sendo um parâmetro do ETM e $\varpi_x, \varpi_\varepsilon \in \mathcal{K}_\infty$. Nesse contexto, $\hat{x}(s_m)$ representa o último estado transmitido através da rede de comunicação no instante de amostragem s_m .

A função de acionamento (2.34) pode ser interpretada como uma medida do desvio entre as últimas informações transmitidas pela rede de comunicação e os estados atuais do sistema. Além disso, quando $\sigma(t)$ varia ao longo do tempo, ele atua como um fator de ponderação adicional $x(s_m)$, influenciando no acionamento dos eventos.

Denotando $\varepsilon(s_m) = \hat{x}(s_m) - x(s_m)$, a função de acionamento (2.34) pode ser

reformulada como:

$$\Gamma_{\text{ad}}(x(s_m), \varepsilon(s_m), \sigma(s_m)) = \sigma(s_m) \varpi_x(\|x(s_m)\|) - \varpi_\varepsilon(\|\varepsilon(s_m)\|). \quad (2.35)$$

O termo $\varepsilon(t)$, denominado como erro de transmissão dos estados, representa a diferença entre os últimos estados transmitidos pela rede de comunicação e os estados da planta P no instantes de amostragem s_m .

A partir da condição de acionamento básica (2.33), novos esquemas de ETM surgiram como extensões e podem ser classificados em três categorias: estático, adaptativo e dinâmico [22, 27]. Um esquema de ETM é dito estático quando a sua condição de acionamento depende apenas dos estados amostrados $x(s_m)$, do erro de transmissão $\varepsilon(s_m)$ e de limiares fixos. Observe que, na condição de acionamento (2.35), se o parâmetro σ for constante em todos os instantes s_m , a condição e o ETM podem ser classificados como estáticos e a condição pode ser reformulada como:

$$\text{Condição } \diamondsuit 1 : \quad \Gamma_{\text{st}}(x(s_m), \hat{x}(s_m)) < 0, \quad (2.36)$$

onde,

$$\Gamma_{\text{st}}(x(s_m), \varepsilon(s_m), \sigma(s_m)) = \sigma_{\text{st}} \varpi_x(\|x(s_m)\|) - \varpi_\varepsilon(\|\varepsilon(s_m)\|). \quad (2.37)$$

com $\sigma_{\text{st}} \in (0, 1)$.

Por sua vez, o ETM adaptativo é uma extensão do esquema estático, mantendo a mesma estrutura e sem a introdução de novas variáveis. A principal diferença entre eles está no comportamento do parâmetro σ , que no ETM adaptativo é ajustado automaticamente ao longo do tempo com base no comportamento do sistema. Na literatura, esse esquema foi proposto com o objetivo de aprimorar o desempenho do ETM estático, visando, por exemplo, uma maior redução no número de eventos de transmissão. Os valores do parâmetro σ podem ser definidos por meio de funções estáticas ou dinâmicas, e geralmente dependem do erro de transmissão ε .

Assim como o ETM adaptativo, o ETM dinâmico busca aprimorar o esquema estático. A principal diferença está na introdução de uma nova variável dinâmica na condição de acionamento, o que adiciona um novo estado ao sistema. O ETM dinâmico permite uma redução ainda mais eficiente no número de eventos de transmissão. O primeiro ETM dinâmico proposto na literatura é definido da seguinte

forma [27]:

$$\text{Condição } \diamond 1 : \quad \eta(s_m) + \theta \Gamma_{\text{st}}(x(s_m), \hat{x}(s_m)) < 0, \quad (2.38)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$ é um novo parâmetro introduzido no ETM, Γ_{st} é a função de acionamento estática definida em (2.37), e η é a variável dinâmica adicional, regida pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{\eta}(t) = -\lambda \eta(t) + \Gamma_{\text{st}}(x(s_m), \varepsilon(s_m)), \quad t \in [s_m, s_{m+1}), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \quad (2.39)$$

com condição inicial $\eta(0) = \eta_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, e onde $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ representa a taxa de decaimento da variável η .

Lema 2.3 *Sejam os escalares $\eta_0 = \eta(0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $\theta \geq \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda h} - 1)$. Nessas condições, tem-se que $\eta(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Demonstração. A partir da lei de acionamento dinâmico (2.38), a solução da equação diferencial (2.39) no intervalo entre dois instantes consecutivos de amostragem, s_m e s_{m+1} , com $m \in \mathbb{N}$ e condição inicial $\eta(s_m)$, é dada por:

$$\eta(t) = e^{-\lambda(t-s_m)} \eta(s_m) + \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(t-s_m)}) \Gamma_{\text{st}}(x(s_m), \varepsilon(s_m)), \quad \forall t \in [s_m, s_{m+1}). \quad (2.40)$$

Da equação (2.38), segue que:

$$\Gamma_{\text{st}}(x(s_m), \varepsilon(s_m)) > -\frac{1}{\theta} \eta(s_m). \quad (2.41)$$

Considerando que $\eta_0 \geq 0$, a solução da equação diferencial (2.39) no intervalo entre os dois primeiros instantes de amostragem resulta em:

$$\eta(t) > \left[e^{-\lambda t} - \frac{1}{\theta \lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right] \eta_0, \quad t \in [0, h). \quad (2.42)$$

Portanto, assumindo que $\theta \geq \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda h} - 1)$, garante-se que $\eta(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, h)$. Como $\eta(t)$ é contínua, segue que $\eta(h) \geq 0$. Finalmente, por indução, conclui-se que $\eta(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. \square

2.5 Regiões de Saturação e de Estabilidade Externa

Devido à presença de atuadores sujeitos à saturação, a estabilidade global da origem do sistema (2.2) em malha fechada, sob o controlador baseado em eventos (2.26) (no caso sem assincronismo dos parâmetros) ou (2.31) (com assincronismo dos parâmetros), não pode ser garantida quando a origem em malha aberta não é assintoticamente estável. Além disso, a saturação introduz não linearidades intrínsecas ao comportamento do sistema [45].

Neste trabalho, não se assume nenhuma hipótese sobre a estabilidade da origem do sistema em malha aberta. Dessa forma, a análise de estabilização do sistema LPV saturado é conduzida de forma local. Nesse contexto, define-se a região de atração da origem de um sistema LPV (2.2) em malha fechada como segue:

Definição 2.2 *A Região de Atração (RA) da origem do sistema em malha fechada é o conjunto de todos os estados $x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$, com $t_0 \geq 0$, tais que a solução do sistema satisfaz $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Em outras palavras, a RA contém todos os estados a partir dos quais as trajetórias do sistema convergem assintoticamente para a origem.*

A RA corresponde ao conjunto de estados cujas trajetórias convergem para a origem quando $t \rightarrow \infty$. Em geral, determinar a RA exata é uma tarefa complexa; por isso, utilizam-se subconjuntos da RA com descrições analíticas mais simples, como elipsoides ou poliedros, que permitem sua estimação e são de grande relevância na análise de estabilidade e na síntese de controladores. Dessa forma, para todo $x(t_0) \in \mathbb{R}^{n_x}$, com $t_0 \geq 0$, pertencente a esses subconjuntos, as trajetórias do sistema (2.2) em malha fechada sob o controlador baseado em eventos (2.26) (sem assincronismo) ou (2.31) (com assincronismo) satisfazem $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, assegurando a estabilidade assintótica da origem. Contudo, na presença de distúrbios, as trajetórias podem escapar da RA, o que compromete a convergência assintótica. Para tratar essa limitação, introduz-se a seguinte região:

Definição 2.3 *A Região de Estabilidade Externa (REE) é a região que contém todas as trajetórias do sistema em malha fechada (3.8) sob a ação de distúrbios. Além disso, quando os distúrbios atuantes no sistema são nulos, ou seja, $w(t) = 0$ para $t \in [a, b]$, com $b > a \geq 0$, a REE se torna uma RA do sistema.*

A Figura 2.2 ilustra, no plano \mathbb{R}^2 , a relação entre a RA e a REE. A região \mathcal{D}_0 representa o conjunto de estados iniciais admissíveis, a partir dos quais as trajetórias do sistema em malha fechada podem evoluir. A região \mathcal{D}_x corresponde a uma REE, na qual as trajetórias permanecem confinadas mesmo na presença de distúrbios. Na figura, uma trajetória típica é representada por uma linha contínua que se inicia em um ponto azul, situado dentro de \mathcal{D}_0 , e que, devido à ação de distúrbios, pode deixar essa região, mas permanece restrita a \mathcal{D}_x . Quando os distúrbios cessam, \mathcal{D}_x passa a coincidir com uma RA do sistema, de modo que a trajetória converge assintoticamente para a origem, indicada pelo ponto verde.

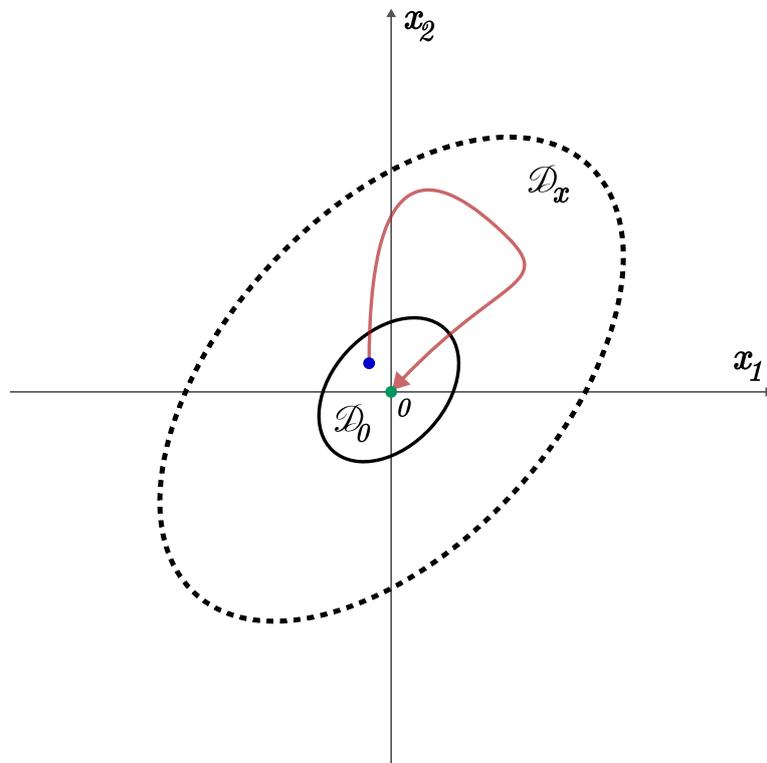


Figura 2.2: Região de estados iniciais admissíveis \mathcal{D}_0 (linha preta contínua), uma REE \mathcal{D}_x (linha tracejada) e uma trajetórias dos estados iniciando no ponto em azul e finalizando no ponto em verde em um plano do \mathbb{R}^2 .

Conforme discutido na Seção 2.3, para tratar a não linearidade de zona morta ψ associada à saturação do sinal de controle, é fundamental definir uma região de validade para a condição de setor generalizada referente a essa não linearidade. Note que o sinal de controle depende tanto do estado quanto do erro de transmissão, já que $\hat{x}(s_m) = x(s_m) + \varepsilon(s_m)$, com $s_m \in \mathcal{S}$. Dessa forma, as leis de controle (2.26) (sem assincronismo) e (2.31) (com assincronismo) podem ser expressas de forma

unificada como:

$$u(t) = K(\tilde{\rho}(t))x(s_m) + K(\tilde{\rho}(t))\varepsilon(s_m) = K_a(\tilde{\rho}(t))x_a(s_m), \quad (2.43)$$

para todo $t \in [s_m, s_{m+1})$, $s_m \in \mathcal{S}$, onde

$$x_a(s_m) = \begin{bmatrix} x^\top(s_m) & \varepsilon^\top(s_m) \end{bmatrix}^\top, \quad K_a(\tilde{\rho}(t)) = \begin{bmatrix} K(\tilde{\rho}(t)) & K(\tilde{\rho}(t)) \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

em que

$$\tilde{\rho}(t) = \begin{cases} \rho(t), & \text{sem fenômeno assíncrono,} \\ \hat{\rho}(t), & \text{com fenômeno assíncrono,} \end{cases} \quad (2.45)$$

e $\hat{\rho}(t) = \rho(t_k)$, para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}_0$. Com essa definição, a condição de setor generalizada assume a forma

$$\Upsilon = \psi^\top(u) \mathfrak{N}(\tilde{\rho}(t)) [\psi(u) - v_a(t)] \leq 0, \quad (2.46a)$$

$$v_a(t) = L_a(\tilde{\rho}(t))x_a(t), \quad (2.46b)$$

onde $L_a(\tilde{\rho}) = \begin{bmatrix} L_{a,1}(\tilde{\rho}) & L_{a,2}(\tilde{\rho}) \end{bmatrix}$, com $L_{a,1}(\tilde{\rho}), L_{a,2}(\tilde{\rho}) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, e $\mathfrak{N}(\tilde{\rho}) \in \mathbb{S}^{n_u}$ é uma matriz diagonal definida positiva.

A região de validade da condição (2.46a) é então formalmente definida como

$$\mathcal{D}_u = \left\{ x_a \in \mathbb{R}^{2n_x} : \left| [K_a(\tilde{\rho}) - L_a(\tilde{\rho})]_{(\ell)} x_a \right| \leq \bar{u}_{(\ell)}, \forall \ell \in \mathbb{N}_{\leq n_u} \right\}, \quad (2.47)$$

onde $\bar{u}_{(\ell)}$ é o limite superior em módulo do ℓ -ésimo componente do sinal de controle, ou seja,

$$-\bar{u}_{(\ell)} \leq u_{(\ell)}(t) \leq \bar{u}_{(\ell)}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.48)$$

A partir dessa construção, apresenta-se a seguir o lema fundamental, baseado no Lema 2.2, que estabelece a validade da condição de setor generalizada dentro da região \mathcal{D}_u :

Lema 2.4 (Adaptado de [53]) *Se o vetor de estado aumentado $x_a = \begin{bmatrix} x^\top & \varepsilon^\top \end{bmatrix}^\top$ pertence à região \mathcal{D}_u definida em (2.47), para $K_a(\tilde{\rho}) = \begin{bmatrix} K(\tilde{\rho}) & K(\tilde{\rho}) \end{bmatrix}$ e $L_a(\tilde{\rho}) = \begin{bmatrix} L_1(\tilde{\rho}) & L_2(\tilde{\rho}) \end{bmatrix}$, então a condição generalizada de setor (2.46a) é satisfeita, isto é, $\Upsilon \leq 0$, para todo $t \geq 0$.*

A Figura 2.3 ilustra, no plano \mathbb{R}^2 , a relação entre a REE \mathcal{D}_x e a região de validade da condição de não linearidade setorial \mathcal{D}_u . Para garantir a validade da condição (2.46a), é necessário que $\mathcal{D}_x \subseteq \mathcal{D}_u$, assegurando que todas as trajetórias confinadas em \mathcal{D}_x satisfaçam a condição setorial e, conseqüentemente, garantam a estabilidade local da origem do sistema em malha fechada, mesmo na presença de saturação do sinal de controle. Embora $\mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^{2n_x}$ e $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^{n_x}$ possuam dimensões distintas, ambas são representadas no mesmo plano da figura. Essa representação é possível porque, no instante inicial $t = 0$, ocorre necessariamente um evento que zera o erro de transmissão, reduzindo a dimensão de \mathcal{D}_u para coincidir com a de \mathcal{D}_x . Para $t > 0$, devido à propriedade de contratividade das regiões, a inclusão $\mathcal{D}_x \subseteq \mathcal{D}_u$ permanece válida, garantindo que a condição setorial continue satisfeita ao longo da evolução do sistema.

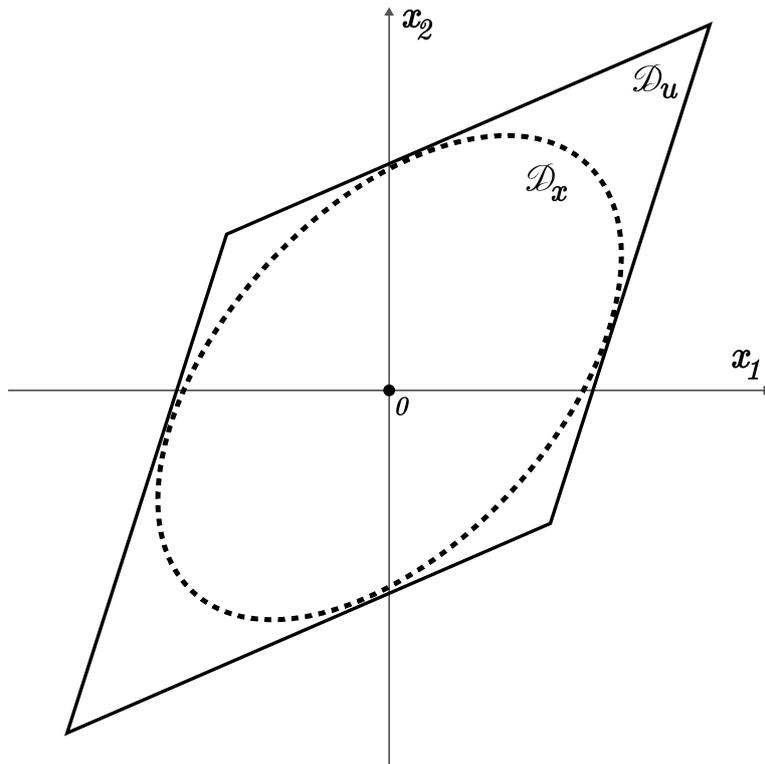


Figura 2.3: Região de validade da condição de não-linearidade setorial \mathcal{D}_u (linha contínua) e uma REE \mathcal{D}_x (linha tracejada) em um plano do \mathbb{R}^2 .

Adicionalmente, definem-se as regiões de saturação e de não saturação do sinal de controle com base na lei de controle (2.43). Considerando a lei de controle na forma politópica:

$$u(t) = \sum_{i \in \mathbb{B}^{n_p}} \alpha_i(\tilde{\rho}(t)) K_i \hat{x}(t), \quad (2.49)$$

Para cada vértice, define-se a região efetiva de não saturação, isto é, o conjunto de estados que garantem que o sinal de controle permaneça dentro dos limites para qualquer valor paramétrico do politopo, é dada pela interseção das regiões nos vértices

$$\mathcal{D}_{u,ns} = \bigcap_{i \in \mathbb{B}^{n_x}} \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : |K_{i(\ell)}x| \leq \bar{u}_{(\ell)}, \forall \ell \in \mathbb{N}_{\leq n_u}\}. \quad (2.50)$$

A região de saturação é o complementar

$$\mathcal{D}_{u,s} = \mathbb{R}^{n_x} \setminus \mathcal{D}_{u,ns}. \quad (2.51)$$

Pelo fato de $K(\tilde{\rho})$ pertencer ao fecho convexo das matrizes de vértice, a verificação da condição de não saturação nos vértices implica sua validade para quaisquer combinações convexas de parâmetros. Em particular, se $\hat{z}x(t) \in \mathcal{D}_{u,ns}$ então, pela lei (2.43),

$$u(t) = K_a(\tilde{\rho}(t))x_a(s_m), \quad |u_{(\ell)}(t)| \leq \bar{u}_{(\ell)}, \quad \forall \ell, \forall t \geq 0. \quad (2.52)$$

Em síntese, as condições de setor generalizadas e as regiões definidas são fundamentais para garantir a correta modelagem da não linearidade de saturação, assegurar a viabilidade do controle e estabelecer a estabilidade assintótica local da origem. A definição rigorosa das RAs estimadas, das REEs e de saturação permite não apenas caracterizar formalmente o comportamento do sistema em malha fechada (3.8), mas também fundamentar as condições de projeto do controlador (3.6) e dos esquemas de ETMs presentes na Tabela 3.1. Dessa forma, obtêm-se garantias formais sobre a robustez e a segurança do sistema, mesmo na presença de saturação e distúrbios.

Capítulo 3

Formulação do Problema

Este capítulo apresenta a formulação do problema a ser tratado, iniciando pela modelagem do sistema em malha fechada e destacando suas principais características, assim como os desafios relativos à análise e ao controle. São definidos e detalhados quatro esquemas de ETM estudados no trabalho: o SETM, o SETM*, o AETM e o DETM, abrangendo os paradigmas estático, dinâmico e adaptativo. Essa fundamentação constitui a base para os desenvolvimentos e avaliações realizados nos capítulos subsequentes.

3.1 Sistema em Malha Fechada

Neste trabalho, propõem-se esquemas de PETC aplicados a NCSs. As NCS consideradas são compostas por uma planta de tempo contínuo, variante no tempo e pertencente à classe de sistemas LPV, sujeita à saturação no sinal de controle e à presença de distúrbios de energia limitada. O sistema é descrito pelo modelo:

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))\text{sat}(u(t)) + E(\rho(t))w(t), \quad (3.1)$$

em que $A(\rho) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(\rho) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ e $E(\rho) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ são matrizes dependentes do vetor de parâmetros $\rho(t) \in \mathbb{R}^{n_\rho}$. O vetor de estados é denotado por $x(t) \in \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ é uma região que inclui a origem $x = 0$, representada de forma poliedral por:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : a_q^\top x \leq 1, \forall q \in \mathbb{N}_{\leq n_q}\}, \quad (3.2)$$

onde $a_q \in \mathbb{R}^{n_x}$ define os hiperplanos para cada $q \in \mathbb{N}_{\leq n_q}$.

O vetor $w(t)$ representa distúrbios externos, pertencentes ao conjunto \mathbb{W}_2 (limitados em energia), e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ corresponde ao sinal de controle, sujeito à função de saturação $\text{sat}(\cdot)$, conforme definida em (2.19). Considera-se, adicionalmente, a saída de desempenho $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$, dada por:

$$z(t) = C(\rho(t))x(t), \quad (3.3)$$

com $C(\rho(t)) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$.

O vetor de parâmetros $\rho(t)$ é contínuo no tempo e limitado inferior e superiormente, satisfazendo:

$$\rho_i^0 \leq \rho_i(t) \leq \rho_i^1, \quad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n_\rho}. \quad (3.4)$$

Assim, o sistema LPV em (3.1) pode ser representado por meio do modelo LPV politópico:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i \in \mathbb{B}^{n_p}} \alpha_i(\rho(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + E_i w(t)], \\ z(t) &= \sum_{i \in \mathbb{B}^{n_p}} \alpha_i(\rho(t)) C_i x(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que $\alpha(\cdot)$ é a função de ponderação definida em (2.7), e A_i , B_i , E_i e C_i representam os vértices do sistema politópico e possuem as mesmas dimensões das matrizes correspondentes.

Para a estabilização do sistema, consideram-se duas leis de controle não linear baseadas em eventos por realimentação de estados com ganhos escalonados: uma sem fenômeno assíncrono e outra com fenômeno assíncrono. Em ambos os casos, a lei de controle adota a mesma estrutura, sendo descrita por:

$$u(t_k) = \begin{cases} K(\rho(t)) x(t_k), & \text{sem fenômeno assíncrono,} \\ K(\rho(t_k)) x(t_k), & \text{com fenômeno assíncrono,} \end{cases} \quad (3.6)$$

em que $K_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ são as matrizes de ganho do controlador.

Embora a expressão (3.6) seja formalmente idêntica nos dois cenários, a diferença fundamental reside na disponibilidade do parâmetro ρ no controlador no instante de transmissão t_k . No caso sem fenômeno assíncrono, assume-se que o

parâmetro $\rho(t)$ está sempre disponível localmente no controlador, dispensando a necessidade de transmissão pela rede. Por outro lado, no cenário com fenômeno assíncrono, o parâmetro $\rho(t_k)$ deve ser transmitido pela rede e, conseqüentemente, fica disponível apenas nos instantes de transmissão t_k . Além disso, considerando-se uma rede de comunicação ideal, sem atrasos ou perdas, a lei de controle no caso sem fenômeno assíncrono é estruturalmente equivalente àquela com fenômeno assíncrono.

Devido à presença do ZOH, o sinal de controle definido apenas nos instantes t_k em (3.6), é convertido em um sinal contínuo no tempo da seguinte forma:

$$u(t) = K(\rho(t_k)) x(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.7)$$

Dessa forma, ao considerar a função não linear de zona morta $\psi(\cdot)$, definida em (2.20), a dinâmica do sistema LPV (3.1) em malha fechada sob o controle baseado em eventos descrito em (3.6) pode ser representada por um modelo LPV politópico, conforme descrito a seguir:

$$\dot{x}(t) = \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{B}^{np}} \alpha_{\mathbf{i}}(\rho(t)) \alpha_{\mathbf{j}}(\tilde{\rho}(t)) [A_{\mathbf{i}} x(t) + B_{\mathbf{i}} K_{\mathbf{j}} x(s_m) + B_{\mathbf{i}} K_{\mathbf{j}} \varepsilon(s_m) + E_{\mathbf{i}} w(t) - B_{\mathbf{i}} \psi(u(t))]. \quad (3.8)$$

para todo $t \in [s_m, s_{m+1})$, $s_m \in \mathcal{S}$, em que as dadas s_m e

3.2 Esquemas de PETC Utilizados

Conforme discutido na Subseção 2.4.2, as condições de acionamento de eventos dependem da função de acionamento Γ descrita em (2.34), a qual é influenciada pelas funções $\varpi_x(\|x(t)\|)$ e $\varpi_\varepsilon(\|\varepsilon(t)\|)$, com $\varpi_x, \varpi_\varepsilon \in \mathcal{K}_\infty$. Considera-se uma função de acionamento definida como

$$\varpi_x(\|x(t)\|) = x^\top(t) \Xi x(t), \quad \varpi_\varepsilon(\|\varepsilon(t)\|) = \varepsilon^\top(t) \Xi \varepsilon(t), \quad (3.9)$$

em que $\Xi \in \mathbb{S}_{>0}^{n_x}$ é denominada matriz de acionamento, responsável por ponderar as normas do vetor de estados e do erro de transmissão, ajustando a sensibilidade do

ETM. Dessa forma, a função de acionamento pode ser expressa como:

$$\Gamma_{\text{ad}}(x(s_m), \varepsilon(s_m), \sigma(s_m)) = \sigma(s_m) x^\top(s_m) \Xi x(s_m) - \varepsilon^\top(s_m) \Xi \varepsilon(s_m), \quad (3.10)$$

com $s_m \in \mathcal{S}$. O termo com o parâmetro de projeto σ permite a definição de uma forma mais geral, utilizando uma segunda matriz de acionamento, conforme descrito a seguir:

$$\Gamma(x(s_m), \varepsilon(s_m)) = x^\top(s_m) \Psi x(s_m) - \varepsilon^\top(s_m) \Xi \varepsilon(s_m), \quad (3.11)$$

em que $\Psi \in \mathbb{S}_{>0}^{n_x}$. Neste caso, a função de acionamento definida em (3.10) pode ser interpretada como um caso particular de (3.11), ao considerar $\Psi = \sigma \Xi$. Ambas as funções desempenham papel fundamental na formulação dos esquemas de ETMs.

Neste trabalho, são estudados quatro esquemas de ETM, baseados nas abordagens estática, adaptativa e dinâmica. O primeiro esquema, denominado ETM estático (SETM, do inglês *Static Event-triggering Mechanism*), é caracterizado por uma condição de acionamento puramente estática, dada por

$$\text{Condição } \diamondsuit 1 : \quad \Gamma(x(s_m), \varepsilon(s_m)) < 0. \quad (3.12)$$

O segundo esquema, denominado SETM*, corresponde a um caso particular do SETM em que a função de acionamento assume a forma $\Psi = \sigma_{\text{st}} \Xi$, com $\sigma_{\text{st}} \in (0, 1)$, mantendo o caráter estático da condição. O terceiro esquema, denominado ETM adaptativo (AETM, do inglês *Adaptive Event-triggering Mechanism*), estende o SETM* por meio de uma função de acionamento adaptativa, na qual o parâmetro σ varia no tempo conforme a dinâmica

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \left(\frac{1}{\sigma(t)} - \tilde{\sigma} \right) \varepsilon^\top(t) \Xi \varepsilon(t), \quad (3.13)$$

com $\sigma \in \mathbb{R}_{>1}$. A condição de acionamento adaptativa é então dada por

$$\text{Condição } \diamondsuit 1 : \quad \Gamma_{\text{ad}}(x(s_m), \varepsilon(s_m), \sigma(s_m)) < 0. \quad (3.14)$$

Por fim, o quarto esquema, denominado ETM dinâmico (DETM, do inglês *Dynamic Event-triggering Mechanism*), considera $\eta \geq 0$ como uma variável dinâmica e $\theta > 0$

como parâmetro de projeto. A condição de acionamento é definida por

$$\text{Condição } \diamond 1: \quad \eta(s_m) + \theta \Gamma(x(s_m), \varepsilon(s_m)) < 0, \quad (3.15)$$

onde a evolução dinâmica de η é descrita por (2.39), caracterizando um esquema de ETM dinâmico.

A Tabela 3.1 apresenta um resumo organizado dos quatro esquemas de ETM estudados neste trabalho. Cada esquema é caracterizado pela condição de acionamento utilizada, pela configuração da matriz de acionamento Ψ (incluindo sua eventual relação com Ξ) e pela classificação geral do esquema em termos de natureza estática, adaptativa ou dinâmica.

Tabela 3.1: Resumo dos esquemas de ETM.

Esquema	Condição $\diamond 1$	Matriz de acionamento	Tipo
SETM	$\Gamma(x, \varepsilon) < 0$	Ψ independente de Ξ	Estático
SETM*	$\Gamma(x, \varepsilon) < 0$	$\Psi = \sigma_{\text{st}} \Xi$, $\sigma_{\text{st}} \in (0, 1)$	Estático
AETM	$\Gamma_{\text{ad}}(x, \varepsilon, \sigma) < 0$	$\Psi = \sigma \Xi$, σ variante no tempo, $\sigma \in (0, 1)$	Adaptativo
DETM	$\eta + \theta \Gamma(x, \varepsilon) < 0$	Ψ independente de Ξ , η dinâmico	Dinâmico

3.3 Descrição dos Problemas

Com base no que foi discutido neste capítulo, formula-se o seguinte problema, destacando os desafios associados ao PETC do sistema LPV (3.1).

Problema 1 *Considere o sistema LPV descrito em (3.1), operando sob um esquema de controle baseado em eventos. Projetar, de forma simultânea, a lei de controle por ganhos escalonados (3.6) e um conjunto de regras de acionamento (2.32) avaliada periodicamente pelo ETM. Além disso, definir o conjunto $\mathcal{D}_x \subseteq \mathcal{D}$ no qual as trajetórias do sistema em malha fechada (3.8) permanecerão confinadas e \mathcal{D} definido em (3.2), de modo a lidar com os seguintes subproblemas:*

Problema 1.1 *Definir o conjunto de estados iniciais admissíveis \mathcal{D}_0 de modo que, para um instante inicial t_0 e uma condição inicial $x_0 = x(t_0)$, se $x_0 \in \mathcal{D}_0$,*

então $x(t) \in \mathcal{D}_x$ para todo $t > t_0$, garantindo que as trajetórias do sistema em malha fechada (3.8) permaneçam dentro de \mathcal{D}_x . Além disso, na ausência de distúrbios, ou seja, para $w(t) = 0$, assegure que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Problema 1.2 Definir a região de validade (2.47) da condição de setor generalizada (2.46a). Além disso, garantir que $\mathcal{D}_x \subseteq \mathcal{D}_u$, assegurando que as variáveis de estado permaneçam dentro do conjunto admissível para o sinal de controle saturado.

Problema 1.3 Propor novos projetos de esquemas de PETC que minimizem o impacto do fenômeno de assincronismo entre parâmetros da planta e do controlador com ganhos escalonados.

Capítulo 4

Resultados para o Caso Sem Fenômeno de Assincronismo

Neste capítulo, apresentam-se os resultados para o caso sem fenômeno de assincronismo dos parâmetros, com foco no co-projeto do controlador e do ETM para os esquemas DETM, SETM, SETM* e AETM. Inicialmente, realiza-se a análise de estabilidade \mathcal{L}_2 utilizando funcionais em *loop*, que permitem reescrever a dinâmica do sistema entre instantes de amostragem consecutivos e definir funcionais contínuos e diferenciáveis cujas propriedades garantem condições suficientes de estabilidade local, considerando atuadores saturantes e distúrbios de energia limitada. Em seguida, são apresentadas as condições de estabilização \mathcal{L}_2 específicas para cada esquema, incluindo a formulação do problema de otimização associado. Além disso, discutem-se casos particulares das condições de co-projeto e, por fim, ilustra-se a aplicação das estratégias de PETC em um sistema LPV oscilatório, consolidando os procedimentos de avaliação para o cenário sem assincronismo entre os parâmetros do controlador e a planta.

4.1 Análise de Estabilidade \mathcal{L}_2 usando Funcionais em *Loop*

Para a obtenção de condições de estabilização do sistema em malha fechada descrito por (3.8), as trajetórias do sistema serão representadas em um domínio transladado por meio da abordagem conhecida como funcional em *loop* [53]. Define-

se, para todo $\mathcal{Q} \in \{\tilde{\rho}, \rho, x, \varepsilon, \eta, \sigma, u, z, w\}$, a seguinte transformação:

$$\mathcal{Q}_m(\tau) = \mathcal{Q}(s_m + \tau), \quad \tau = t - s_m, \quad (4.1)$$

com $s_m \in \mathcal{S}$ e $t \in [s_m, s_{m+1})$, de modo que $\tau \in [0, h)$. Sob essa representação, a dinâmica do sistema em malha fechada entre dois instantes de amostragem consecutivos pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(\tau) = & A(\rho_m)x_m(\tau) + B(\rho_m)K(\tilde{\rho}_m(\tau))x_m(0) \\ & + B(\rho_m)K(\tilde{\rho}_m(\tau))\varepsilon_m(0) - B(\rho_m)\psi(u_m(0)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\tilde{\rho}_m(\tau)$ está definido conforme (2.45). A dinâmica do parâmetro $\sigma(t)$, conforme definida em (3.13), pode ser expressa no domínio transladado como:

$$\dot{\sigma}_m(\tau) = \frac{1}{\sigma_m(\tau)} \left(\frac{1}{\sigma_m(\tau)} - \tilde{\sigma} \right) \varepsilon_m^\top(\tau) \Xi \varepsilon_m(\tau). \quad (4.3)$$

De forma análoga, a dinâmica da variável η , definida em (2.39), torna-se:

$$\dot{\eta}_m(\tau) = -\lambda\eta_m(\tau) + \Gamma(x_m(0), \varepsilon_m(0)). \quad (4.4)$$

Seja uma função escalar $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, associada ao vetor de estados da planta, para a qual existem escalares positivos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, com $c_2 > c_1$, tais que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad c_1\|x(t)\|^2 \leq \mathcal{H}(x(t)) \leq c_2\|x(t)\|^2. \quad (4.5)$$

Adicionalmente, seja $\mathcal{V}_1 : [0, h] \times \mathbb{C}_{[0, h]}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável em relação a $\tau \in [0, h)$, que satisfaz a seguinte condição de contorno:

$$\mathcal{V}_1(0, f) = \mathcal{V}_1(h, f), \quad \forall f \in \mathbb{C}_{[0, h]}^{n_x}. \quad (4.6)$$

Com base nessas definições, estabelece-se o seguinte teorema, que fornece condições suficientes para garantir a estabilidade local da origem do sistema em malha fechada (4.2), sob a condição de acionamento do DETM descrito por (3.15).

Teorema 4.1 *Considere os escalares $h, \theta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ satisfazendo $\theta \geq$*

$\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda h} - 1)$, e uma condição inicial $\eta(0) \in [0, 1)$. Sejam η e \mathcal{H} as funções previamente definidas, e seja $\mathcal{V}_1(\tau, x_m)$ um funcional contínuo e diferenciável para $\tau \in [0, h)$, satisfazendo a condição de contorno (4.6). Suponha que existam matrizes $K, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e uma matriz diagonal $\aleph \in \mathbb{S}_{>0}^{n_x}$, dependente do vetor de parâmetros $\tilde{\rho}_m$, tais que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas ao longo das trajetórias do sistema em malha fechada (4.2), sob a condição de acionamento do DETM descrito por (3.15), com a dinâmica de η dada por (4.4), e para todo $m \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in [0, h)$:

$$\left\| \begin{bmatrix} (K(\tilde{\rho}_m) - L_1(\tilde{\rho}_m))_{(\ell)}^\top \\ (K(\tilde{\rho}_m) - L_2(\tilde{\rho}_m))_{(\ell)}^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} x_m(0) \\ \varepsilon_m(0) \end{bmatrix} \right\|^2 \leq -\Gamma(x_m(0), \varepsilon_m(0)) - \frac{1}{\theta} \eta_m(0) + u_{(\ell)}^2 (\mathcal{H}(x_m(0)) + \eta_m(0) + \delta^{-1} \gamma^{-1}), \quad \forall \ell \in \mathbb{R}_{\leq n_u}, \quad (4.7)$$

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \eta_m) + z_m^\top(\tau) z_m(\tau) - \gamma^{-1} w_m^\top(\tau) w_m(\tau) - 2\Upsilon < 0, \quad (4.8)$$

onde Υ é definido em (2.46a) e

$$\mathcal{V}(\tau, x_m, \eta_m) = \mathcal{V}_0(x_m, \eta_m) + \mathcal{V}_1(\tau, x_m). \quad (4.9)$$

Além disso, suponha que a condição inicial pertença ao conjunto:

$$\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{H}(x) \leq 1 - \eta(0)\}, \quad (4.10)$$

o qual define a região admissível de estados iniciais. Então, as seguintes propriedades são garantidas:

(i) Para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e $\tau \in [0, h)$, verifica-se a condição de looping:

$$\Delta \mathcal{V}_0(m) = \mathcal{V}_0(x_m(\tau), \eta_m(\tau)) - \mathcal{V}_0(x_m(0), \eta_m(0)) < 0, \quad (4.11)$$

com

$$\mathcal{V}_0(x, \eta) = \mathcal{H}(x) + \eta, \quad (4.12)$$

quando a ação dos distúrbios sobre o sistema for nulo entre instantes de amostragem consecutivos.

(ii) Se $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, então o sistema em malha fechada satisfaz a seguinte condição de atenuação de distúrbios:

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^{-1} \|w(t)\|_2^2 + 1 - \eta_0, \quad (4.13)$$

com ganho induzido \mathcal{L}_2 igual a $\sqrt{\gamma^{-1}}$, para algum $x(0) \in \mathcal{D}_0$.

(iii) As trajetórias do sistema permanecem confinadas na região externa definida por:

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{H}(x) \leq \mu^{-1}\}, \quad (4.14)$$

com

$$\mu^{-1} = \delta^{-1} \gamma^{-1} + 1 - \eta_0. \quad (4.15)$$

Assim, \mathcal{D}_x constitui uma REE da origem do sistema, sendo que $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_x$.

(iv) Para todo $x \in \mathcal{D}_x$, o vetor aumentado $x_a = \begin{bmatrix} x^\top & \varepsilon^\top \end{bmatrix}^\top$ pertence ao conjunto \mathcal{D}_u definido em (2.47), satisfazendo a condição de setor generalizada descrita em (2.46a).

Demonstração. A partir da dinâmica de η definida em (4.4), a desigualdade (4.8) pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathcal{V}}_1(\tau, x_m(\tau), \eta_m(\tau)) + z_m^\top(\tau) z_m(\tau) - \gamma^{-1} w_m^\top(\tau) w_m(\tau) - 2\Upsilon \leq 0. \quad (4.16)$$

Supondo que $\Upsilon \leq 0$, a condição acima se reduz a:

$$\dot{\mathcal{V}}_1(\tau, x_m(\tau), \eta_m(\tau)) + z_m^\top(\tau) z_m(\tau) - \gamma^{-1} w_m^\top(\tau) w_m(\tau) < 0. \quad (4.17)$$

Com base no Lema 2.1, na condição de contorno (4.6), e assumindo que $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, a condição (4.17) implica que:

$$\mathcal{V}_0(x_m(T), \eta_m(T)) \leq \mathcal{V}_0(x_0(0), \eta_0(0)) + \gamma^{-1} \delta^{-1}, \quad m, T \rightarrow \infty. \quad (4.18)$$

Assim, ao impor que o estado inicial satisfaça $\mathcal{V}_0(x_0(0), \eta_0(0)) \leq 1$, obtém-se a definição do conjunto dos estados iniciais admissíveis \mathcal{D}_0 em (4.10). Dessa forma, se $x_0(0) \in \mathcal{D}_0$, então, de (4.18), conclui-se que as trajetórias do sistema em malha

fechada, sob ação de distúrbios $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, permanecem contidas na região \mathcal{D}_x definida em (4.14). Além disso, com base no Lema 2.1, na ausência de distúrbios (i.e., $w(t) = 0$), tem-se $\dot{\mathcal{V}} < 0$, o que garante que \mathcal{D}_x constitui uma REE da origem do sistema em malha fechada. Assim, os itens (i)–(iii) do teorema são garantidos.

Para o item (iv), deseja-se mostrar que, para todo $x \in \mathcal{D}_x$, o vetor aumentado $x_a = \begin{bmatrix} x^\top & \varepsilon^\top \end{bmatrix}^\top$ pertence ao conjunto \mathcal{D}_u . A condição de acionamento do DETM definido em (3.15) assegura que:

$$\Gamma(x_m(0), \varepsilon_m(0)) + \theta^{-1}\eta_m(0) \geq 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Por outro lado, quando um evento é acionado, o erro de transmissão é zerado, ou seja, $\varepsilon_m(0) = 0$, e conseqüentemente:

$$\Gamma(x_m(0), \varepsilon_m(0)) = -x_m^\top(0)\Psi x_m(0) < 0.$$

Como $\eta_m(\tau) \geq 0$, conforme garantido pelo Lema 2.3, para todo $m \in \mathbb{N}_0$ têm-se $\Gamma(x_m(0), \varepsilon_m(0)) + \theta^{-1}\eta_m(0) \geq 0$. Dessa forma, a desigualdade (4.7) pode ser reescrita como:

$$\|(K_a(\tilde{\rho}) - L_a(\tilde{\rho}))_{(\ell)}x_a(0)\|^2 \leq u_{(\ell)}^2 (\mathcal{V}(x_m(0), \eta_m(0)) + \mu^{-1}), \quad (4.19)$$

com \mathcal{V}_0 e μ definidos, respectivamente, nas equações (4.12) e (4.15). Portanto, se $x \in \mathcal{D}_x$, então $x_a \in \mathcal{D}_u$, garantindo que a condição de setor generalizada (i.e., $\Upsilon \leq 0$) é satisfeita, de acordo com o Lema 2.4. Isso demonstra a validade do item (iv) e conclui a prova. \square

A partir do Teorema 4.1, podem-se particularizar condições suficientes para garantir a estabilidade local da origem do sistema em malha fechada (4.2) quando submetido a condição de acionamento do SETM (3.12), em presença de distúrbios com energia limitada. Tal esquema se distingue do DETM por não utilizar a variável dinâmica η e por fixar o parâmetro $\theta = 1$. Considerando essas especificidades no contexto das condições já estabelecidas, obtém-se diretamente o resultado apresentado no Teorema 4.2. Ressalta-se ainda que, sob o mesmo esquema, um caso particular (referido como SETM*) pode ser tratado de forma análoga, no qual se

adota a relação $\Psi = \sigma\Xi$, com $\sigma \in (0, 1)$; nesse cenário, as condições do Teorema 4.2 seguem sendo suficientes para assegurar a estabilidade local da origem do sistema em malha fechada (4.2) sob a condição de acionamento do SETM* (3.12).

Teorema 4.2 *Considere $h, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ e o funcional dado por $\mathcal{V}(\tau, x_m) = \mathcal{H}(x_m) + \mathcal{V}_1(\tau, x_m)$, com \mathcal{V}_1 contínuo e diferenciável em $\tau \in [0, h)$, satisfazendo a condição de contorno (4.6). Suponha que existam matrizes $K, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e uma matriz diagonal $\aleph \in \mathbb{S}_{>0}^{n_u}$, dependentes do vetor de parâmetros $\tilde{\rho}_m$, tais que, ao longo das trajetórias do sistema (4.2) sob a condição de acionamento do SETM (3.12), as seguintes condições sejam satisfeitas para todo $m \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in [0, h)$:*

$$\left\| \begin{bmatrix} (K(\tilde{\rho}_m) - L_1(\tilde{\rho}_m))_{(\ell)}^\top \\ (K(\tilde{\rho}_m) - L_2(\tilde{\rho}_m))_{(\ell)}^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} x_m(0) \\ \varepsilon_m(0) \end{bmatrix} \right\|^2 \leq -\Gamma(x_m(0), \varepsilon_m(0)) + u_{(\ell)}^2 (\mathcal{H}(x_m(0)) + \delta^{-1}\gamma^{-1}), \quad \forall \ell \in \mathbb{R}_{\leq n_u}, \quad (4.20)$$

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m) - \varepsilon_m^\top(0)\Xi\varepsilon_m(0) + x_m^\top(0)\Psi x_m(0) + z_m^\top(\tau)z_m(\tau) - \gamma^{-1}w_m^\top(\tau)w_m(\tau) - 2\Upsilon < 0, \quad (4.21)$$

onde Υ é definido em (2.46a). Suponha ainda que a condição inicial pertença ao conjunto admissível

$$\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{H}(x) \leq 1\}. \quad (4.22)$$

Nessas condições, as seguintes propriedades são garantidas:

(i) Para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e $\tau \in [0, h)$, a função \mathcal{H} satisfaz a condição de looping:

$$\Delta\mathcal{H}(m) = \mathcal{H}(x_m(\tau)) - \mathcal{H}(x_m(0)) < 0, \quad (4.23)$$

sempre que não houver ação de distúrbios entre instantes de acionamento consecutivos.

(ii) Se $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, então o sistema apresenta atenuação de distúrbios dada por:

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^{-1}\|w(t)\|_2^2 + 1, \quad (4.24)$$

com ganho induzido $\mathcal{L}_2 = \sqrt{\gamma^{-1}}$, para algum $x(0) \in \mathcal{D}_0$.

(iii) As trajetórias do sistema permanecem confinadas na região:

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{H}(x) \leq \mu^{-1}\}, \quad \mu^{-1} = \delta^{-1}\gamma^{-1} + 1, \quad (4.25)$$

a qual constitui uma REE da origem, com $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_x$.

(iv) Para todo $x \in \mathcal{D}_x$, o vetor aumentado $x_a = \begin{bmatrix} x^\top & \varepsilon^\top \end{bmatrix}^\top$ pertence ao conjunto \mathcal{D}_u definido em (2.47), satisfazendo a condição de setor generalizada $\Upsilon \leq 0$.

Demonstração. A condição de acionamento do SETM (3.12) assegura que:

$$\Gamma(x_m(0), \varepsilon_m(0)) \geq 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Além disso, quando ocorre um evento de controle, o erro de transmissão é reiniciado, ou seja, $\varepsilon_m(0) = 0$, o que implica:

$$\Gamma(x_m(0), \varepsilon_m(0)) = -x_m^\top(0)\Psi x_m(0) < 0.$$

Logo, $\Gamma(x_m(0), \varepsilon_m(0)) \geq 0$, para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Assim, sob as hipóteses do corolário, a desigualdade (4.21) pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m(\tau)) + z_m^\top(\tau)z_m(\tau) - \gamma^{-1}w_m^\top(\tau)w_m(\tau) - 2\Upsilon < 0. \quad (4.26)$$

Assumindo $\Upsilon \leq 0$, a condição acima se reduz a:

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m(\tau)) + z_m^\top(\tau)z_m(\tau) - \gamma^{-1}w_m^\top(\tau)w_m(\tau) < 0. \quad (4.27)$$

Com base no Lema 2.1, na condição de contorno (4.6) e supondo $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, a desigualdade (4.27) garante que:

$$\mathcal{H}(x_m(T)) \leq \mathcal{H}(x_0(0)) + \gamma^{-1}\delta^{-1}, \quad m, T \rightarrow \infty. \quad (4.28)$$

Assim, ao impor a condição inicial $\mathcal{H}(x_0(0)) \leq 1$, define-se o conjunto de estados iniciais admissíveis \mathcal{D}_0 dado em (4.22). Dessa forma, se $x_0(0) \in \mathcal{D}_0$, então a partir de (4.28), segue que as trajetórias do sistema em malha fechada, sob ação de distúrbios $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, permanecem confinadas na região \mathcal{D}_x definida em (4.25). Além disso,

na ausência de distúrbios (isto é, $w(t) = 0$), verifica-se que $\dot{\mathcal{V}} < 0$, o que implica que \mathcal{D}_x é uma REE da origem do sistema. Isso comprova os itens (i)–(iii) do corolário.

Para demonstrar o item (iv), deseja-se garantir que, para todo $x \in \mathcal{D}_x$, o vetor aumentado $x_a = \begin{bmatrix} x^\top & \varepsilon^\top \end{bmatrix}^\top$ pertença ao conjunto \mathcal{D}_u . Como $\Gamma(x_m(0), \varepsilon_m(0)) \geq 0, \forall m \in \mathbb{N}_0$, pode-se assumir, a partir de (4.20), que o estado pertence a uma região tal que a seguinte desigualdade seja satisfeita:

$$\|(K_a(\tilde{\rho}) - L_a(\tilde{\rho}))_{(\ell)} x_a(0)\|^2 \leq u_{(\ell)}^2 (\mathcal{H}(x_m(0)) + \mu^{-1}), \quad (4.29)$$

com μ^{-1} definido em (4.15). Assim, para todo $x \in \mathcal{D}_x$, tem-se $x_a \in \mathcal{D}_u$, garantindo a validade da condição de setor generalizada $\Upsilon \leq 0$, de acordo como Lema 2.4. Isso conclui a demonstração. \square

Por fim, apresentam-se condições suficientes para garantir a estabilidade local da origem do sistema em malha fechada (4.2) sob a condição de acionamento do AETM (3.14), que corresponde a uma extensão do SETM* com adaptação dinâmica do parâmetro σ , conforme a equação (4.3). Neste esquema, o parâmetro σ é ajustado em tempo real em função do erro de transmissão ε , com o intuito de aprimorar o desempenho do mecanismo de acionamento. Dada a proximidade estrutural com o SETM*, as condições podem ser estabelecidas com base nas do Teorema 4.2, conforme formalizado a seguir.

Teorema 4.3 *Considere $h, \gamma > 0, \tilde{\sigma} > 1$ (com $\tilde{\sigma} \neq \sigma^{-1}$) e $\sigma(0) \in \mathbb{R}_{>0}$ e um estado inicial $x(0) \in \mathcal{D}_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{V}_0(x, \sigma) \leq 1\}$. Defina o funcional composto como*

$$\mathcal{V}(\tau, x_m, \sigma_m) = \mathcal{V}_0(x_m, \sigma_m) + \mathcal{V}_1(\tau, x_m),$$

com $\mathcal{V}_0(x, \sigma) = \mathcal{H}(x) + \frac{1}{2}\sigma^2$, onde \mathcal{V}_1 é contínuo e diferenciável em $\tau \in [0, h]$, e satisfaz a condição de contorno (4.6). Suponha que existam matrizes $K, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e uma matriz diagonal $\aleph \in \mathbb{S}_{>0}^{n_x}$, dependentes de $\tilde{\rho}_m$, tais que, ao longo das trajetórias do sistema em malha fechada (4.2) sob o AETM, com dinâmica de σ

dada por (4.3), e para todo $m \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in [0, h)$, valem as seguintes desigualdades:

$$\left\| \begin{bmatrix} (K(\tilde{\rho}_m) - L_1(\tilde{\rho}_m))_{(\ell)}^\top \\ (K(\tilde{\rho}_m) - L_2(\tilde{\rho}_m))_{(\ell)}^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} x_m(0) \\ \varepsilon_m(0) \end{bmatrix} \right\|^2 \leq -\Gamma_{\text{ad}}(x_m(0), \varepsilon_m(0), \sigma_m(0)) + u_{(\ell)}^2 (\mathcal{H}(x_m(0)) + \delta^{-1}\gamma^{-1}), \quad \forall \ell \in \mathbb{R}_{\leq n_u}, \quad (4.30)$$

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \sigma_m) + z_m^\top(\tau)z_m(\tau) - \gamma^{-1}w_m^\top(\tau)w_m(\tau) - 2\Upsilon < 0, \quad (4.31)$$

onde Υ é definido em (2.46a) e

$$\mathcal{V}(\tau, x_m, \sigma_m) = \mathcal{V}_0(x_m, \sigma_m) + \mathcal{V}_1(\tau, x_m). \quad (4.32)$$

Nessas condições, as seguintes propriedades são asseguradas:

(i) Para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e $\tau \in [0, h)$, verifica-se que a função $\mathcal{H}(x)$ satisfaz a condição de looping:

$$\Delta\mathcal{H}(m) = \mathcal{H}(x_m(\tau)) - \mathcal{H}(x_m(0)) < 0, \quad (4.33)$$

sempre que a ação dos distúrbios sobre o sistema for nula no intervalo entre instantes de acionamento consecutivos.

(ii) O sistema em malha fechada satisfaz a seguinte condição de atenuação de distúrbios:

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^{-1}\|w(t)\|_2^2 + 1, \quad (4.34)$$

para algum $x(0) \in \mathcal{D}_0$. Essa desigualdade indica que a energia da saída controlada $z(t)$ é limitada por um ganho induzido \mathcal{L}_2 igual a $\sqrt{\gamma^{-1}}$.

(iii) Dado o resultado anterior, pode-se garantir que as trajetórias do sistema em malha fechada permanecem confinadas na seguinte região externa:

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{V}_0(x, \sigma) \leq \mu^{-1}\}, \quad \mu^{-1} = \delta^{-1}\gamma^{-1} + 1. \quad (4.35)$$

Assim, \mathcal{D}_x caracteriza uma REE (região de estabilidade externa) da origem do sistema em malha fechada. Notadamente, o conjunto dos estados iniciais admissíveis \mathcal{D}_0 encontra-se contido em \mathcal{D}_x , ou seja, $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_x$.

(iv) Para todo $x \in \mathcal{D}_x$, verifica-se que o vetor aumentado $x_a = \begin{bmatrix} x^\top & \varepsilon^\top \end{bmatrix}^\top$ pertence ao conjunto \mathcal{D}_u , previamente definido em (2.47).

Demonstração. A condição de acionamento do AETM (3.14) assegura que:

$$\Gamma_{\text{ad}}(x_m(0), \varepsilon_m(0), \sigma_m(0)) \geq 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Assim, sob as hipóteses do corolário, a desigualdade (4.31) pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m(\tau), \sigma_m(\tau)) + z_m^\top(\tau)z_m(\tau) - \gamma^{-1}w_m^\top(\tau)w_m(\tau) - 2\Upsilon < 0. \quad (4.36)$$

Assumindo $\Upsilon \leq 0$, a condição acima se reduz a:

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m(\tau), \sigma_m(\tau)) + z_m^\top(\tau)z_m(\tau) - \gamma^{-1}w_m^\top(\tau)w_m(\tau) < 0. \quad (4.37)$$

Com base no Lema 2.1, na condição de contorno (4.6), e considerando que $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, a condição (4.37) implica:

$$\mathcal{V}_0(x_m(T), \sigma_m(T)) \leq \mathcal{V}_0(x_0(0), \sigma_0(0)) + \gamma^{-1}\delta^{-1}, \quad m, T \rightarrow \infty. \quad (4.38)$$

Ao se impor que a condição inicial satisfaça $\mathcal{V}_0(x_0(0), \sigma_0(0)) \leq 1$, obtém-se o conjunto dos estados iniciais admissíveis definido em (4.22), ou seja:

$$\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{H}(x) \leq 1\}.$$

Dessa forma, se $x_0(0) \in \mathcal{D}_0$, então, pela desigualdade (4.38), as trajetórias do sistema em malha fechada sob ação de distúrbios $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$ permanecem confinadas na região \mathcal{D}_x definida em (4.25). Além disso, quando $w(t) = 0$, verifica-se que $\dot{\mathcal{V}} < 0$, assegurando que \mathcal{D}_x constitui uma REE da origem. Isso comprova os itens (i)–(iii) do corolário.

Para demonstrar o item (iv), deseja-se garantir que, para todo $x \in \mathcal{D}_x$, o vetor aumentado $x_a = \begin{bmatrix} x^\top & \varepsilon^\top \end{bmatrix}^\top$ pertença ao conjunto admissível \mathcal{D}_u . Como $\Gamma_{\text{ad}}(x, \varepsilon, \sigma) \geq 0$ e assumindo que a desigualdade (4.30) é satisfeita, conclui-se:

$$\|(K_a(\tilde{\rho}) - L_a(\tilde{\rho}))_{(\ell)}x_a(0)\|^2 \leq u_{(\ell)}^2 (\mathcal{H}(x_m(0)) + \mu^{-1}). \quad (4.39)$$

Como $x \in \mathcal{D}_x$ implica $\mathcal{V}_0(x, \sigma) \leq \mu^{-1}$, segue-se que $x_a \in \mathcal{D}_u$. Logo, a condição de setor generalizada $\Upsilon \leq 0$ é garantida, de acordo com o Lema 2.4, encerrando a demonstração. \square

4.2 Condições de Estabilização \mathcal{L}_2

Nesta seção, apresentam-se as condições de co-projeto do controlador com acionamento baseado em eventos, assumindo-se a ausência de assincronismo entre os parâmetros do controlador e da planta, ou seja, considera-se que $\tilde{\rho}(t) = \rho(t)$ na lei de controle definida em (3.6). As condições serão formuladas individualmente para cada um dos quatro esquemas de acionamento baseados em eventos: DETM, STEM, SETM* e AETM.

4.2.1 Esquema DETM

Inicialmente, apresentam-se o resultado de estabilização \mathcal{L}_2 para o sistema LPV em malha fechada (4.2) sob a condição de acionamento do DETM (3.15) desconsiderando o fenômeno assíncrono sobre os parâmetros.

Teorema 4.4 *Sejam $h, v, \delta, \theta, \lambda, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ tais que $\theta \geq \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda h} - 1)$, e uma condição inicial $\eta(0) \in [0, 1)$. Suponha que existam as matrizes $\tilde{P}, \tilde{R}, \tilde{\Xi}, \tilde{\Psi} \in \mathbb{S}_{>0}^{n_x}$, $\tilde{S}_1, \tilde{Q}_1 \in \mathbb{S}^{n_x}$, $\tilde{S}_2, \tilde{S}_4, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_4, X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\tilde{S}_3, \tilde{Q}_3 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $\tilde{M} \in \mathbb{S}^{2n_x + n_u}$, uma matriz diagonal $\mathfrak{N} \in \mathbb{S}_{>0}^{n_u}$, $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{2n_x \times (5n_x + n_u)}$, $\tilde{K}, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, e $\tilde{\mathcal{R}} = \text{diag}(\tilde{R}, 3\tilde{R})$, tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & 0 & 0 & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{1,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{1,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & X^\top \\ \star & \tilde{\Xi} & 0 & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{2,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{2,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & 0 \\ \star & \star & 1 - \tilde{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \bar{u}_{(\ell)}^2 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \gamma \delta \bar{u}_{(\ell)}^2 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \tilde{\Psi} \end{bmatrix} \succeq 0, \forall (\ell, \mathbf{j}) \in \mathbb{N}_{\leq n_u} \times \mathbb{B}^{n_x}, \quad (4.40)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{P}(\mathbf{m}, \mathbf{n})} \begin{bmatrix} \Theta_{ij}(h) & \tilde{Y}^\top & e_2^\top X^\top & e_1^\top X^\top C_i \\ \star & -\frac{1}{h}\mathcal{R} & 0 & 0 \\ \star & \star & -\tilde{\Psi} & 0 \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{B}^{n_p^+}, \quad (4.41)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{P}(\mathbf{m}, \mathbf{n})} \begin{bmatrix} \Theta_{ij}(0) & e_2^\top X^\top & e_1^\top X^\top C_i \\ \star & -\tilde{\Psi} & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{B}^{n_p^+}, \quad (4.42)$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}(\omega) = & -\lambda e_6^\top e_6 - e_5^\top \tilde{\Xi} e_5 - \Theta_1 - \omega \Theta_2 - h e_3^\top \tilde{Q}_1 e_3 + (h - \omega) \Theta_3 - \gamma e_8^\top e_8 \\ & + (h - 2\omega) \kappa_1^\top \tilde{M} \kappa_1 + \text{He} \left(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{B}}_{ij} - \kappa_2^\top \tilde{Y} + e_1^\top \tilde{P} e_4 \right) + (h - \omega) \Theta_4 + \Theta_5, \end{aligned} \quad (4.43a)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{ij} = A_i e_1 X + B_i \tilde{K}_j e_2 - X e_4 + B_i \tilde{K}_j e_5 - B_i \aleph_j e_7 \quad (4.43b)$$

$$\Theta_1 = (e_1 - e_2)^\top \tilde{S}_1 (e_1 - e_2) + \text{He} \left((e_1 - e_2)^\top \left(\tilde{S}_2 e_2 + \tilde{S}_3 e_7 + \tilde{S}_4 e_5 \right) \right) \quad (4.43c)$$

$$\Theta_2 = \text{He} \left(e_3^\top \left(\tilde{Q}_2 e_2 + \tilde{Q}_3 e_7 + \tilde{Q}_4 e_5 \right) \right) \quad (4.43d)$$

$$\Theta_3 = \text{He} \left(e_1^\top \left(\tilde{Q}_1 e_3 + \tilde{Q}_2 e_2 + \tilde{Q}_3 e_7 + \tilde{Q}_4 e_5 \right) \right) \quad (4.43e)$$

$$\Theta_4 = \text{He} \left(e_4^\top \left(\tilde{S}_1 (e_1 - e_2) + \tilde{S}_2 e_2 + \tilde{S}_3 e_7 + \tilde{S}_4 e_5 \right) \right) + e_4^\top \tilde{R} e_4 \quad (4.43f)$$

$$\Theta_5 = -\text{He} \left(e_7^\top \aleph_j e_7 - e_7^\top \tilde{L}_{1,j} e_2 - e_7^\top \tilde{L}_{2,j} e_5 \right) \quad (4.43g)$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = e_1^\top + v e_2^\top + v e_4^\top \quad (4.43h)$$

e as seguinte matrizes auxiliares

$$\kappa_1 = \begin{bmatrix} e_2^\top & e_7^\top & e_5^\top \end{bmatrix}^\top, \quad \kappa_2 = \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_1 + e_2 - 2e_3 \end{bmatrix}, \quad (4.43i)$$

$$e_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x \times (i-1)n_x} & I_{n_x} & \mathbf{0}_{n_x \times (5-i)n_x} & \mathbf{0}_{n_x \times (1+n_u+n_w)} \end{bmatrix}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq 5}, \quad (4.43j)$$

$$e_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 5n_x} & I_1 & \mathbf{0}_{1 \times (n_u+n_w)} \end{bmatrix}, \quad e_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_u \times 5n_x} & \mathbf{0}_{n_u \times 1} & I_{n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_w} \end{bmatrix}, \quad (4.43k)$$

$$e_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_w \times 5n_x} & \mathbf{0}_{n_w \times (1+n_u)} & I_{n_w} \end{bmatrix}, \quad (4.43l)$$

Considerando as seguintes transformações de variáveis:

$$\mathcal{Q}_1 = (X^\top)^{-1} \tilde{\mathcal{Q}}_1 X^{-1}, \quad \mathcal{Q}_1 \in \{P, R, \Xi, S_1, S_2, S_4, Q_1, Q_2, Q_4\}. \quad (4.44a)$$

$$\mathcal{Q}_2 = (X^\top)^{-1} \tilde{\mathcal{Q}}_2 \aleph^{-1}, \quad \mathcal{Q}_2 \in \{S_3, Q_3\}. \quad (4.44b)$$

$$\mathcal{Q}_3 = \tilde{\mathcal{Q}}_3 X^{-1}, \quad \mathcal{Q}_3 \in \{K, L_1, L_2\}. \quad (4.44c)$$

$$M = \text{diag}(X^\top, X^\top, \aleph^\top)^{-1} \tilde{M} \text{diag}(X, X, \aleph)^{-1}. \quad (4.44d)$$

$$Y = \text{diag}(X^\top, X^\top)^{-1} \tilde{Y} \text{diag}(X, X, X, X, X, \aleph)^{-1}. \quad (4.44e)$$

$$\mathcal{R} = \text{diag}(X^\top, X^\top)^{-1} \tilde{\mathcal{R}} \text{diag}(X, X)^{-1}. \quad (4.44f)$$

$$\Psi = \tilde{\Psi}^{-1}. \quad (4.44g)$$

Então, a origem do sistema em malha fechada (4.2), sob a condição de acionamento do DETM definido em (3.15), é \mathcal{L}_2 -estável, com ganho induzido menor ou igual a $\sqrt{\gamma^{-1}}$. Especificamente, para qualquer $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, a saída de desempenho $z(t)$, definida em (3.3), satisfaz a desigualdade:

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^{-1} \|w(t)\|_2^2 + 1 - \eta_0. \quad (4.45)$$

Além disso, as trajetórias do sistema permanecem confinadas em uma REE da origem, e as condições de saturação dos atuadores são respeitadas dentro de subconjuntos bem definidos. As seguintes regiões caracterizam o comportamento do sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{H}(x) \leq 1 - \eta_0\}, \\ \mathcal{D}_x &= \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{H}(x) \leq \mu^{-1}\}, \quad \mu^{-1} = \delta^{-1} \gamma^{-1} + 1 - \eta_0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Aqui, \mathcal{D}_0 representa o conjunto admissível de condições iniciais; \mathcal{D}_x define uma REE da origem, com $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_x$; e \mathcal{D}_u , conforme definido em (2.47), é a região onde se garante a validade da condição de setor generalizada aplicada ao vetor aumentado $x_a = \begin{bmatrix} x^\top & \varepsilon^\top \end{bmatrix}^\top$, para todo $x \in \mathcal{D}_x$.

Demonstração. Considere as transformações de variáveis (4.44a)-(4.44g) e a função candidata $\mathcal{V}_0(x, \eta) = \mathcal{H}(x) + \eta$, onde $\mathcal{H}(x) = x^\top P x$ e $P \in \mathbb{S}_{\geq 0}^{n_x}$. Note que $\mathcal{H}(x)$ satisfaz a condição (4.5), com $c_1 = \lambda_{\min}(P)$ e $c_2 = \lambda_{\max}(P)$. Além disso, considere o

seguinte funcional candidato:

$$\mathcal{V}_1(\tau, x_s(\tau)) = (\tau - h) [\mathcal{V}_{1,1}(x_s(\tau)) + \mathcal{V}_{1,2}(\tau, x_s(\tau)) + \mathcal{V}_{1,3}(\tau, x_s(\tau))], \quad (4.47)$$

onde $\mathcal{V}_{1,i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, são definidos como:

$$\mathcal{V}_{1,1}(x_s(\tau)) = \xi_s^\top(\tau) [S_1 \xi_s(\tau) + 2S_2 x_s(0) + 2S_3 \psi_s(0) + 2S_4 \varepsilon_s(0)], \quad (4.48)$$

$$\mathcal{V}_{1,2}(\tau, x_s(\tau)) = \tau \chi_s^\top(\tau) [Q_1 \chi_s(\tau) + 2Q_2 x_s(0) + 2Q_3 \psi_s(0) + 2Q_4 \varepsilon_s(0)], \quad (4.49)$$

$$\mathcal{V}_{1,3}(\tau, x_s(\tau)) = \tau \varpi_s^\top(0) M \varpi_s(0) + \int_0^\tau \dot{x}_s^\top(v) R \dot{x}_s(v) dv. \quad (4.50)$$

Observe que o funcional (4.47) satisfaz a condição de contorno (4.6), pois $\mathcal{V}_1(0, x_m) = \mathcal{V}_1(h, x_m) = 0$.

Para garantir a estabilização do sistema em malha fechada (4.2) sob a condição de acionamento do DETM (3.15), é suficiente assegurar que as condições do Teorema 4.1 sejam satisfeitas. Para tanto, considera-se a derivada de $\mathcal{V}(\tau, x_m, \eta_m) = \mathcal{V}_0(x_m, \eta_m) + \mathcal{V}_1(\tau, x_m)$ em relação a τ , dada por:

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \eta_m) = \dot{\mathcal{V}}_0(x_m, \eta_m) + \dot{\mathcal{V}}_1(\tau, x_m). \quad (4.51)$$

Notadamente, tem-se $\dot{\mathcal{V}}_0(x_m, \eta_m) = 2\dot{x}_m^\top P x_m + \dot{\eta}_m$. Com base na equação dinâmica (2.39) e no Lema A.2, obtém-se:

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m(\tau), \eta_m(\tau)) \leq 2x_m^\top(\tau) P \dot{x}_m(\tau) - \lambda \eta_m(\tau) + x_m^\top(0) \Psi x_m(0) - \varepsilon_m^\top(0) \Xi \varepsilon_m(0) + \Theta, \quad (4.52)$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta = & -\xi_m^\top(\tau) [S_1 \xi_m(\tau) + 2S_2 x_m(0) + 2S_3 \psi_m(0) + 2S_4 \varepsilon_m(0)] - \tau \chi_m^\top(\tau) [2Q_2 x_m(0) \\ & + (h - \tau) [\dot{x}_m(\tau) [S_1 \xi_m(\tau) + 2S_2 x_m(0) + 2S_3 \psi_m(0) + 2S_4 \varepsilon_m(0)] + \xi_m^\top(\tau) S_1 \dot{x}_m(\tau)] \\ & + 2Q_3 \psi_m(0) + 2Q_4 \varepsilon_m(0)] - h \chi_m^\top(\tau) Q_1 \chi_m(\tau) + (h - \tau) x_m^\top(\tau) [2Q_1 \chi_m(\tau) \\ & + 2Q_2 x_m(0) + 2Q_3 \psi_m(0) + 2Q_4 \varepsilon_m(0)] + (h - 2\tau) \varpi_m^\top(0) M \varpi_m(0) \\ & + (h - \tau) \dot{x}_m^\top(\tau) R \dot{x}_m(\tau) - \mathcal{Y}^\top \Pi - \Pi^\top \mathcal{Y} + \tau \mathcal{Y}^\top \mathcal{R}^{-1} \mathcal{Y}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

com $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$. Para garantir a condição (4.8) do Teorema 4.1, é suficiente

impor:

$$2x_m^\top(\tau)P\dot{x}_m(\tau) - \lambda\eta_m(\tau) + x_m^\top(0)\Psi x_m(0) - \varepsilon_m^\top(0)\Xi\varepsilon_m(0) + \Theta < 0. \quad (4.54)$$

Definindo

$$\zeta_m(\tau) = \left[x_m^\top(\tau) \quad x_m^\top(0) \quad \chi_m^\top(\tau) \quad \dot{x}_m^\top(\tau) \quad \varepsilon_m^\top(0) \quad \sqrt{\eta_m(\tau)} \quad \psi_m^\top(0) \quad w_m^\top(\tau) \right]^\top, \quad (4.55)$$

a desigualdade (4.54) pode ser reescrita como:

$$\zeta_m^\top(\tau) \{ 2e_1^\top P e_4 - \lambda e_6^\top e_6 + e_2^\top \Psi e_2 - e_5^\top \Xi e_5 + \Theta_e \} \zeta_m(\tau) \leq 0 \quad (4.56)$$

onde,

$$\begin{aligned} \Theta_e = & -(e_1 - e_2)^\top S_1(e_1 - e_2) + \text{He}((e_1 - e_2)^\top [S_2 e_2 + S_3 e_7 + S_4 e_5]) - \tau \text{He}(e_3^\top [Q_2 e_2 \\ & + Q_3 e_7 + Q_4 e_5]) - h e_3^\top Q_1 e_3 + (h - \tau) \text{He}(e_1^\top [Q_1 e_3 + Q_2 e_2 + Q_3 e_7 + Q_4 e_5]) + (h \\ & - 2\tau) \kappa_1^\top M \kappa_1 + (h - \tau) e_4^\top R e_4 + (h - \tau) \text{He}(e_4^\top (S_1(e_1 - e_2) + S_2 e_2 + S_3 e_7 + S_4 e_5)) \\ & - \frac{1}{\tau} \kappa_2^\top \mathcal{R} \kappa_2 - 2e_7^\top \aleph^{-1}(\rho_m) e_7 + \text{He}(e_7^\top \aleph^{-1}(\rho_m) L_1(\rho_m) e_2 + e_7^\top \aleph^{-1}(\rho_m) L_2(\rho_m) e_5 \end{aligned} \quad (4.57)$$

A partir do sistema em malha fechada (4.2), tem-se $\mathcal{B}(\rho_m)\zeta = 0$, onde:

$$\mathcal{B}(\rho_m) = A(\rho_m)e_1 + B(\rho_m)K(\rho_m)e_2 - e_4 + B(\rho_m)K(\rho_m)e_5 - B(\rho_m)e_7 + E(\rho_m)e_8 \quad (4.58)$$

Considerando o vetor auxiliar $\zeta_m^\top \mathcal{F}$, com

$$\mathcal{F} = [e_1^\top X^{-\top} + v e_2^\top X^{-\top} + v e_4^\top X^{-\top}], \quad (4.59)$$

e aplicando o lema de Finsler (Lema A.5), a desigualdade (4.56) implica em:

$$2e_1^\top P e_4 - \lambda e_6^\top e_6 + e_2^\top \Psi e_2 - e_5^\top \Xi e_5 + \Theta_e + \text{He}(\mathcal{F} \mathcal{B}(\rho_m)) \leq 0 \quad (4.60)$$

Realizando o processo de congruência com $\text{diag}(X^\top, X^\top, X^\top, X^\top, X^\top, I, \aleph, \gamma I)$, obtém-

se:

$$\begin{aligned}
& 2e_1^\top \tilde{P}e_4 - \lambda e_6^\top e_6 + e_2^\top X \Psi X e_2 - e_5^\top \tilde{\Xi} e_5 - (e_1 - e_2)^\top \tilde{S}_1 (e_1 - e_2) \\
& + \text{He}((e_1 - e_2)^\top [\tilde{S}_2 e_2 + \tilde{S}_3 e_7 + \tilde{S}_4 e_5]) - \tau \text{He}(e_3^\top [\tilde{Q}_2 e_2 + \tilde{Q}_3 e_7 + \tilde{Q}_4 e_5]) - h e_3^\top \tilde{Q}_1 e_3 \\
& + (h - \tau) \text{He}(e_1^\top [\tilde{Q}_1 e_3 + \tilde{Q}_2 e_2 + \tilde{Q}_3 e_7 + \tilde{Q}_4 e_5]) + (h - 2\tau) \kappa_1^\top \tilde{M} \kappa_1 + (h - \tau) e_4^\top \tilde{R} e_4 \\
& - \frac{1}{\tau} \kappa_2^\top \tilde{\mathcal{R}} \kappa_2 - 2e_7^\top \mathfrak{N}(\rho_m) e_7 + \text{He}(e_7^\top \tilde{L}_1(\rho_m) e_2 + e_7^\top \tilde{L}_2(\rho_m) e_5) + \text{He}\left(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{B}}(\rho_m)\right) \\
& + (h - \tau) \text{He}\left(e_4^\top (S_1(e_1 - e_2) + S_2 e_2 + S_3 e_7 + S_4 e_5)\right) \leq 0 \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Aplicando o complemento de Schur (Lema A.4) e a representação politópica, a desigualdade (4.61) pode ser reescrita como:

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^{np}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{B}^{np}} \alpha_{\mathbf{i}}(\rho_m(\tau)) \alpha_{\mathbf{j}}(\rho_m(\tau)) \begin{bmatrix} \Theta_{\mathbf{ij}}(\tau) & \tilde{Y} & e_2^\top X^\top \\ \star & -\frac{1}{\omega} \mathcal{R} & 0 \\ \star & \star & -\tilde{\Psi} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{4.62}$$

A desigualdade (4.62) pode ser relaxada conforme:

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^{np}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{B}^{np}} \alpha_{\mathbf{i}}(\rho_m) \alpha_{\mathbf{j}}(\rho_m) \Lambda_{\mathbf{ij}}(\omega) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{B}^{np+}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{B}^{np+}} \alpha_{\mathbf{m}}(\rho_m) \alpha_{\mathbf{n}}(\rho_m) \mathfrak{F}_{\mathbf{mn}}(\tau) \prec 0, \tag{4.63}$$

onde,

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{mn}}(\tau) = \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{P}(\mathbf{m}, \mathbf{n})} \begin{bmatrix} \Theta_{\mathbf{ij}}(\tau) & \tilde{Y} & e_2^\top X^\top \\ \star & -\frac{1}{\tau} \mathcal{R} & 0 \\ \star & \star & -\tilde{\Psi} \end{bmatrix}. \tag{4.64}$$

Portanto, é suficiente garantir que $\mathfrak{F}_{\mathbf{mn}}(\tau)$ seja negativa definida. Como $\tau \in [0, h]$, pela convexidade, basta verificar nos extremos do intervalo, ou seja, para $\tau = 0$ e $\tau = h$, o que leva às LMIs (4.41) e (4.42), respectivamente.

Por fim, realizando o processo de congruência com $\text{diag}(X^{-1}, X^{-1}, I, I, I, I)$, aplicando o complemento de Schur três vezes na LMI (4.40) e pré- e pós-multiplicando por $\begin{bmatrix} x_{am}^\top(0) & \sqrt{\eta_m}^\top(0) \end{bmatrix}^\top$, reduz-se a verificação da condição (4.7) do Teorema 4.1.

Dessa forma, se as LMIs (4.40)–(4.42) forem satisfeitas, então as condições (4.7) e (4.8) do Teorema 4.1 também o serão, garantindo, assim, a estabilidade local \mathcal{L}_2 da origem do sistema em malha fechada (4.2) sob a condição de acionamento do DETM (3.15) e sob perturbações $w \in \mathbb{W}_2(\delta)$. Isso conclui a demonstração. \square

4.2.2 Esquema SETM e SETM*

Apresenta-se, a seguir, o resultado de estabilização para o esquema SETM. Embora a estrutura do funcional candidato seja a mesma adotada no caso do DETM, as expressões envolvidas na derivada temporal e nas condições matriciais resultam distintas, refletindo as características específicas do SETM, como detalhado a seguir.

Teorema 4.5 *Sejam $h, v, \delta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Suponha que existam as matrizes $\tilde{P}, \tilde{R}, \tilde{\Xi}, \tilde{\Psi} \in \mathbb{S}_{>0}^{n_x}$, $\tilde{S}_1, \tilde{Q}_1 \in \mathbb{S}^{n_x}$, $\tilde{S}_2, \tilde{S}_4, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_4, X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\tilde{S}_3, \tilde{Q}_3 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $\tilde{M} \in \mathbb{S}^{2n_x + n_u}$, uma matriz diagonal $\aleph \in \mathbb{S}_{>0}^{n_u}$, $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{2n_x \times (5n_x + n_u)}$, $\tilde{K}, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, e $\tilde{\mathcal{R}} = \text{diag}(\tilde{R}, 3\tilde{R})$, tais que as LMIs (4.41) e (4.42), bem como a seguinte, sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & 0 & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{1,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{1,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & X^\top \\ \star & \tilde{\Xi} & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{2,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{2,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & 0 \\ \star & \star & \bar{u}_{(\ell)}^2 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \gamma \delta \bar{u}_{(\ell)}^2 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \tilde{\Psi} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall (\ell, \mathbf{j}) \in \mathbb{N}_{\leq n_u} \times \mathbb{B}^{n_x}, \quad (4.65)$$

onde, para o esquema SETM, a função $\Theta_{\mathbf{ij}}(\omega)$, presente em (4.41), assume a forma:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{ij}}(\omega) &= -e_5^\top \tilde{\Xi} e_5 - \Theta_1 - \omega \Theta_2 - h e_3^\top \tilde{Q}_1 e_3 + (h - \omega) \Theta_3 - \gamma e_7^\top e_7 \\ &+ (h - 2\omega) \kappa_1^\top \tilde{M} \kappa_1 + \text{He} \left(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{ij}} - \kappa_2^\top \tilde{Y} + e_1^\top \tilde{P} e_4 \right) + (h - \omega) \Theta_4 + \Theta_5, \end{aligned} \quad (4.66a)$$

com os seguintes termos auxiliares:

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{ij}} = A_i e_1 X + B_i \tilde{K}_{\mathbf{j}} e_2 - X e_4 + B_i \tilde{K}_{\mathbf{j}} e_5 - B_i \aleph_{\mathbf{j}} e_6 + E_i e_7, \quad (4.66b)$$

$$\Theta_1 = (e_1 - e_2)^\top \tilde{S}_1 (e_1 - e_2) + \text{He} \left((e_1 - e_2)^\top \left(\tilde{S}_2 e_2 + \tilde{S}_3 e_6 + \tilde{S}_4 e_5 \right) \right), \quad (4.66c)$$

$$\Theta_2 = \text{He} \left(e_3^\top \left(\tilde{Q}_2 e_2 + \tilde{Q}_3 e_6 + \tilde{Q}_4 e_5 \right) \right), \quad (4.66d)$$

$$\Theta_3 = \text{He} \left(e_1^\top \left(\tilde{Q}_1 e_3 + \tilde{Q}_2 e_2 + \tilde{Q}_3 e_6 + \tilde{Q}_4 e_5 \right) \right), \quad (4.66e)$$

$$\Theta_4 = \text{He} \left(e_4^\top \left(\tilde{S}_1 (e_1 - e_2) + \tilde{S}_2 e_2 + \tilde{S}_3 e_6 + \tilde{S}_4 e_5 \right) \right) + e_4^\top \tilde{R} e_4, \quad (4.66f)$$

$$\Theta_5 = -\text{He} \left(e_6^\top \aleph_{\mathbf{j}} e_6 - e_6^\top \tilde{L}_{1,\mathbf{j}} e_2 - e_6^\top \tilde{L}_{2,\mathbf{j}} e_5 \right), \quad (4.66g)$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = e_1^\top + v e_2^\top + v e_4^\top, \quad (4.66h)$$

e as seguintes matrizes auxiliares:

$$\kappa_1 = \begin{bmatrix} e_2^\top & e_6^\top & e_5^\top \end{bmatrix}^\top, \quad \kappa_2 = \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_1 + e_2 - 2e_3 \end{bmatrix}, \quad (4.66i)$$

$$e_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x \times (i-1)n_x} & I_{n_x} & \mathbf{0}_{n_x \times (5-i)n_x} & \mathbf{0}_{n_x \times (1+n_u+n_w)} \end{bmatrix}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq 5}, \quad (4.66j)$$

$$e_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_u \times 5n_x} & I_{n_u} & \mathbf{0}_{n_u \times n_w} \end{bmatrix}, \quad e_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_w \times 5n_x} & \mathbf{0}_{n_w \times n_u} & I_{n_w} \end{bmatrix}. \quad (4.66k)$$

Considerando ainda as mesmas transformações de variáveis adotadas em (4.44), então a origem do sistema em malha fechada (4.2), sob o esquema SETM definido em (3.12), é \mathcal{L}_2 -estável, com ganho induzido menor ou igual a $\sqrt{\gamma^{-1}}$. Especificamente, para qualquer $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, a saída de desempenho $z(t)$, definida em (3.3), satisfaz:

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^{-1} \|w(t)\|_2^2 + 1. \quad (4.67)$$

Além disso, as trajetórias do sistema permanecem confinadas em uma REE da origem, e as condições de saturação dos atuadores são respeitadas dentro de subconjuntos bem definidos. As seguintes regiões caracterizam o comportamento do sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{H}(x) \leq 1\}, \\ \mathcal{D}_x &= \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{H}(x) \leq \mu^{-1}\}, \quad \mu^{-1} = \delta^{-1} \gamma^{-1} + 1. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Aqui, \mathcal{D}_0 representa o conjunto admissível de condições iniciais; \mathcal{D}_x define uma REE da origem, com $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_x$; e \mathcal{D}_u , conforme definido em (2.47), é a região onde se garante a validade da condição de setor generalizada aplicada ao vetor aumentado $x_a = \begin{bmatrix} x^\top & \varepsilon^\top \end{bmatrix}^\top$, para todo $x \in \mathcal{D}_x$.

Demonstração. Considere as transformações de variáveis definidas em (4.44) e a função candidata $\mathcal{H}(x) = x^\top P x$, com $P \in \mathbb{S}_{\geq 0}^{n_x}$, a qual satisfaz a condição (4.5), conforme demonstrado no Teorema 4.4. Além disso, considere o mesmo funcional candidato definido em (4.47), que satisfaz a condição de contorno (4.6). Para garantir a estabilização do sistema em malha fechada (4.2) sob a condição de acionamento do SETM (3.12), é suficiente que as condições do Teorema 4.2 sejam atendidas. Para tanto, analisa-se a derivada do funcional $\mathcal{V}(\tau, x_m) = \mathcal{H}(x_m) + \mathcal{V}_1(\tau, x_m)$ em relação

à variável τ , dada por:

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m) = \dot{\mathcal{H}}(x_m) + \dot{\mathcal{V}}_1(\tau, x_m). \quad (4.69)$$

Com base no Lema A.2, obtém-se:

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m(\tau)) \leq 2x_m^\top(\tau)P\dot{x}_m(\tau) + \Theta, \quad (4.70)$$

com Θ definido em (4.53) e $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$. Para garantir a condição (4.8) do Teorema 4.1, é suficiente impor:

$$2x_m^\top(\tau)P\dot{x}_m(\tau) + x_m^\top(0)\Psi x_m(0) - \varepsilon_m^\top(0)\Xi\varepsilon_m(0) + \Theta < 0. \quad (4.71)$$

Definindo:

$$\zeta_m(\tau) = \begin{bmatrix} x_m^\top(\tau) & x_m^\top(0) & \chi_m^\top(\tau) & \dot{x}_m^\top(\tau) & \varepsilon_m^\top(0) & \psi_m^\top(0) & w_m^\top(\tau) \end{bmatrix}^\top, \quad (4.72)$$

a desigualdade (4.71) pode ser reescrita como:

$$\zeta_m^\top(\tau) \{ 2e_1^\top P e_4 + e_2^\top \Psi e_2 - e_5^\top \Xi e_5 + \Theta_e \} \zeta_m(\tau) \leq 0 \quad (4.73)$$

com

$$\begin{aligned} \Theta_e = & -(e_1 - e_2)^\top S_1 (e_1 - e_2) + \text{He}((e_1 - e_2)^\top [S_2 e_2 + S_3 e_6 + S_4 e_5]) \\ & - \tau \text{He}(e_3^\top [Q_2 e_2 + Q_3 e_6 + Q_4 e_5]) - h e_3^\top Q_1 e_3 + (h - \tau) \\ & \times \text{He}(e_1^\top [Q_1 e_3 + Q_2 e_2 + Q_3 e_6 + Q_4 e_5]) + (h - 2\tau) \kappa_1^\top M \kappa_1 + (h - \tau) e_4^\top R e_4 \\ & - \frac{1}{\tau} \kappa_2^\top \mathcal{R} \kappa_2 + e_1^\top C^\top(\rho_m) C(\rho_m) e_1 - \gamma^{-1} e_7^\top e_7 - 2e_6^\top \aleph^{-1}(\rho_m) e_6 \\ & + \text{He}(e_6^\top \aleph^{-1}(\rho_m) L_1(\rho_m) e_2 + e_6^\top \aleph^{-1}(\rho_m) L_2(\rho_m) e_5) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Com o sistema em malha fechada (4.2), tem-se $\mathcal{B}(\rho_m)\zeta = 0$, com:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\rho_m) = & A(\rho_m)e_1 + B(\rho_m)K(\rho_m)e_2 - e_4 \\ & + B(\rho_m)K(\rho_m)e_5 - B(\rho_m)e_6 + E(\rho_m)e_7 \end{aligned} \quad (4.75)$$

Defina o vetor auxiliar $\zeta_m^\top \mathcal{F}$, com \mathcal{F} definido em (4.59). Aplicando o lema de Finsler à desigualdade (4.73) e realizando o processo de congruência com

$$\text{diag}(X^\top, X^\top, X^\top, X^\top, X^\top, I, \aleph, \gamma I),$$

obtém-se:

$$2e_1^\top \tilde{P}e_4 + e_2^\top X\Psi Xe_2 - e_5^\top \tilde{\Xi}e_5 + \tilde{\Theta}_e + \text{He}\left(\tilde{\mathcal{F}}\tilde{\mathcal{B}}(\rho_m)\right) \leq 0, \quad (4.76)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_e = & -(e_1 - e_2)^\top \tilde{S}_1(e_1 - e_2) + \text{He}((e_1 - e_2)^\top [\tilde{S}_2e_2 + \tilde{S}_3e_6 + \tilde{S}_4e_5]) \\ & - \tau \text{He}(e_3^\top [\tilde{Q}_2e_2 + \tilde{Q}_3e_6 + \tilde{Q}_4e_5]) - he_3^\top \tilde{Q}_1e_3 + (h - \tau) \\ & \times \text{He}(e_1^\top [\tilde{Q}_1e_3 + \tilde{Q}_2e_2 + \tilde{Q}_3e_6 + \tilde{Q}_4e_5]) + (h - 2\tau)\kappa_1^\top \tilde{M}\kappa_1 + (h - \tau)e_4^\top \tilde{R}e_4 \\ & + e_1^\top (\tau)C^\top(\rho_m)C(\rho_m)e_1 - \gamma^{-1}e_7^\top e_7 - \frac{1}{\tau}\kappa_2^\top \tilde{\mathcal{R}}\kappa_2 - 2e_6^\top \aleph(\rho_m)e_6 + \text{He}(e_6^\top \tilde{L}_1(\rho_m)e_2 \\ & + e_6^\top \tilde{L}_2(\rho_m)e_5) + (h - \tau) \text{He}(e_4^\top (S_1(e_1 - e_2) + S_2e_2 + S_3e_7 + S_4e_5)). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Aplicando o complemento de Schur e a representação politópica, a desigualdade (4.76) pode ser reformulada de modo semelhante ao apresentado em (4.62)-(4.64), conduzindo às mesmas LMIs descritas em (4.41) e (4.42), diferenciando-se apenas na variável Θ_{ij} , que neste caso é definida por (4.66a).

Finalmente, aplicando uma congruência com $\text{diag}(X^{-1}, X^{-1}, I, I, I)$, o complemento de Schur três vezes na LMI (4.40), e pré- e pós-multiplicando por $x_{am}^\top(0)$, chega-se à verificação da condição (4.20) do Teorema 4.2.

Portanto, sendo satisfeitas as condições (4.20) e (4.21), garante-se a estabilidade local \mathcal{L}_2 da origem do sistema em malha fechada (4.2) sob o esquema SETM (3.12), mesmo na presença de perturbações $w \in \mathbb{W}_2(\delta)$. Isso conclui a demonstração. \square

Dando continuidade, apresenta-se o resultado de estabilização para o esquema SETM*. Como já discutido, trata-se de um caso particular do SETM em que se defini a relação $\Psi = \sigma\Xi$, com $\sigma > (0, 1)$. Tal especialização permite simplificar as condições de projeto, que podem ser diretamente derivadas a partir do corolário previamente estabelecido para o SETM.

Corolário 4.1 *Seja o esquema SETM*, caracterizado pela restrição $\Psi = \sigma\Xi$, com $\sigma \in (0,1)$. Considerem-se $h, v, \delta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ e as mesmas matrizes e variáveis do Corolário 4.5, exceto que as LMIs a seguir, específicas para o SETM*, devem ser satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} - \sigma\tilde{\Xi} & 0 & (\tilde{K}_j - \tilde{L}_{1,j})_{(\ell)}^\top & (\tilde{K}_j - \tilde{L}_{1,j})_{(\ell)}^\top \\ \star & \tilde{\Xi} & (\tilde{K}_j - \tilde{L}_{2,j})_{(\ell)}^\top & (\tilde{K}_j - \tilde{L}_{2,j})_{(\ell)}^\top \\ \star & \star & \tilde{u}_{(\ell)}^2 & 0 \\ \star & \star & \star & \gamma\delta\tilde{u}_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall(\ell, \mathbf{j}) \in \mathbb{N}_{\leq n_u} \times \mathbb{B}^{n_x}, \quad (4.78)$$

$$\sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{P}(\mathbf{m}, \mathbf{n})} \begin{bmatrix} \Theta_{\mathbf{ij}}(h) & \tilde{Y}^\top & e_1^\top X^\top C_{\mathbf{i}} \\ \star & -\frac{1}{h}\mathcal{R} & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{B}^{n_p^+}, \quad (4.79)$$

$$\sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{P}(\mathbf{m}, \mathbf{n})} \begin{bmatrix} \Theta_{\mathbf{ij}}(0) & e_1^\top X^\top C_{\mathbf{i}} \\ \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{B}^{n_p^+}, \quad (4.80)$$

onde a função $\Theta_{\mathbf{ij}}(\omega)$, adaptada para o SETM*, assume a forma

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{ij}}(\omega) &= \sigma e_2^\top \tilde{\Xi} e_2 - e_5^\top \tilde{\Xi} e_5 - \Theta_1 - \omega\Theta_2 - h e_3^\top \tilde{Q}_1 e_3 + (h - \omega)\Theta_3 - \gamma e_7^\top e_7 \\ &+ (h - 2\omega)\kappa_1^\top \tilde{M} \kappa_1 + \text{He} \left(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{ij}} - \kappa_2^\top \tilde{Y} + e_1^\top \tilde{P} e_4 \right) + (h - \omega)\Theta_4 + \Theta_5, \end{aligned} \quad (4.81)$$

sendo que os termos auxiliares Θ_i , $i \in \mathbb{N}_{\leq 5}$, as matrizes auxiliares κ_1, κ_2 , vetores e_i , e as transformações de variáveis permanecem conforme definidos no Corolário 4.5. Sob essas condições, a origem do sistema em malha fechada (4.2) é \mathcal{L}_2 -estável, com ganho induzido menor ou igual a $\sqrt{\gamma^{-1}}$. Em particular, para qualquer $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, a saída de desempenho $z(t)$, definida em (3.3), satisfaz:

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^{-1} \|w(t)\|_2^2 + 1. \quad (4.82)$$

Ademais, as trajetórias permanecem confinadas a uma REE da origem, respeitando as condições de saturação dos atuadores. As regiões \mathcal{D}_0 , \mathcal{D}_x e \mathcal{D}_u são definidas conforme em (4.46) e (2.47).

Demonstração. No caso do SETM*, basta substituir diretamente $\Psi = \sigma\Xi$, com

$\sigma \in (0, 1)$, nas condições do SETM. Essa substituição altera as LMIs apenas no termo referente a Ψ , que passa a ser $\sigma \Xi$. Assim, as condições do Corolário 4.1 seguem diretamente das do SETM mediante essa substituição, e garantem a estabilidade local \mathcal{L}_2 do sistema em malha fechada (4.2) sob o esquema SETM*, mesmo na presença de perturbações $w \in \mathbb{W}_2(\delta)$. \square

4.2.3 Esquema AETM

Por fim, retoma-se o esquema AETM previamente apresentado em (3.14), o qual consiste em uma extensão adaptativa do SETM*, com a particularidade de que o parâmetro escalar σ é substituído por uma função de tempo, $\sigma(t) \in (0, 1)$, continuamente diferenciável. Com isso, a matriz Ψ assume a forma $\Psi(t) = \sigma(t)\Xi$, permitindo uma adaptação dinâmica conforme a evolução do erro de transmissão. A seguir, estabelece-se o corolário que fornece as condições suficientes para a estabilização em malha fechada (4.2) sob a condição de acionamento do AETM (3.14).

Teorema 4.6 *Considerem-se $h, \nu, \delta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, $\tilde{\sigma} > 1$, a condição inicial $\sigma(0) \neq \tilde{\sigma}^{-1} \in (0, 1)$ e as mesmas matrizes e variáveis adotadas no Corolário 4.5, com a ressalva de que, para o caso do AETM, devem ser satisfeitas as LMIs definidas em (4.79) e (4.80), além da seguinte condição:*

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} - \tilde{\Xi} & 0 & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{1,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{1,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top \\ \star & \tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\Xi} & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{2,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{2,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top \\ \star & \star & \tilde{u}_{(\ell)}^2 & 0 \\ \star & \star & \star & \gamma\delta\tilde{u}_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall(\ell, \mathbf{j}) \in \mathbb{N}_{\leq n_u} \times \mathbb{B}^{n_x}, \quad (4.83)$$

onde a função $\Theta_{\mathbf{ij}}(\omega)$, adaptada ao contexto do AETM, assume a forma:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{ij}}(\omega) &= e_2^\top \tilde{\Xi} e_2 - \tilde{\sigma} e_5^\top \tilde{\Xi} e_5 - \Theta_1 - \omega \Theta_2 - h e_3^\top \tilde{Q}_1 e_3 + (h - \omega) \Theta_3 - \gamma e_7^\top e_7 \\ &+ (h - 2\omega) \kappa_1^\top \tilde{M} \kappa_1 + \text{He} \left(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{ij}} - \kappa_2^\top \tilde{Y} + e_1^\top \tilde{P} e_4 \right) + (h - \omega) \Theta_4 + \Theta_5, \end{aligned} \quad (4.84)$$

sendo os termos auxiliares Θ_i , $i \in \mathbb{N}_{\leq 5}$, as matrizes auxiliares κ_1, κ_2 , os vetores e_i e as transformações de variáveis definidos conforme o Corolário 4.5. Sob essas condições, a origem do sistema em malha fechada (4.2) é \mathcal{L}_2 -estável, com ganho

induzido inferior ou igual a $\sqrt{\gamma^{-1}}$. Em particular, para qualquer $w(t) \in \mathbb{W}_2(\delta)$, a saída de desempenho $z(t)$, conforme definida em (3.3), satisfaz:

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^{-1} \|w(t)\|_2^2 + 1. \quad (4.85)$$

Ademais, as trajetórias permanecem contidas em uma REE da origem, respeitando as restrições impostas pelas condições de saturação dos atuadores. As regiões \mathcal{D}_0 , \mathcal{D}_x e \mathcal{D}_u são aquelas definidas em (4.46) e (2.47).

Demonstração. Considere a função candidata $\mathcal{V}_0(x, \sigma) = \mathcal{H}(x) + \frac{1}{2}\sigma^2$, com $\mathcal{H}(x) = x^\top P x$ e $P \in \mathbb{S}_{\geq 0}^{n_x}$, a qual satisfaz a condição estabelecida em (4.5), conforme demonstrado no Teorema 4.4. Adicionalmente, considere o funcional auxiliar definido em (4.47), o qual cumpre a condição de contorno apresentada em (4.6). Para garantir a estabilidade \mathcal{L}_2 local do sistema em malha fechada (4.2) sob o acionamento AETM (3.14), é suficiente assegurar o atendimento das condições estabelecidas no Teorema 4.3. Para tanto, considera-se a derivada do funcional total $\mathcal{V}(\tau, x_m, \sigma_m) = \mathcal{V}_0(x_m, \sigma_m) + \mathcal{V}_1(\tau, x_m)$ em relação à variável τ , dada por:

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \sigma_m) = \dot{\mathcal{V}}_0(x_m, \sigma_m) + \dot{\mathcal{V}}_1(\tau, x_m). \quad (4.86)$$

Tem-se que $\dot{\mathcal{V}}_0(x_m, \sigma_m) = 2x_m^\top P \dot{x}_m + \sigma_m \dot{\sigma}_m$. A condição de acionamento do AETM, conforme definida em (3.14), garante que:

$$\varepsilon_m^\top(0) \Xi \varepsilon_m(0) \leq \sigma_m(0) x_m^\top(0) \Xi x_m(0), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0. \quad (4.87)$$

Com base nessa relação e no Lema A.2, pode-se estabelecer a seguinte condição:

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m(\tau), \sigma_m(\tau)) \leq 2x_m^\top(\tau) P \dot{x}_m(\tau) + x_m^\top(0) \Xi x_m(0) - \tilde{\sigma} \varepsilon_m^\top(0) \Xi \varepsilon_m(0) + \Theta, \quad (4.88)$$

com Θ definido em (4.53). A fim de garantir a validade da condição (4.31) do Teorema 4.3, é suficiente assegurar que, a partir da desigualdade acima,

$$2x_m^\top(\tau) P \dot{x}_m(\tau) + x_m^\top(0) \Xi x_m(0) - \tilde{\sigma} \varepsilon_m^\top(0) \Xi \varepsilon_m(0) + \Theta < 0. \quad (4.89)$$

Considerando o vetor ζ_m conforme definido em (4.72), e a identidade $\mathcal{B}(\rho_m)\zeta = 0$,

com \mathcal{B} dado em (4.75), introduz-se o vetor auxiliar $\zeta_m^\top \mathcal{F}$, com \mathcal{F} definido em (4.59). A aplicação do Lema de Finsler, seguida do processo de congruência via $\text{diag}(X^\top, X^\top, X^\top, X^\top, X^\top, I, \mathfrak{N}, \gamma I)$, conduz à seguinte desigualdade:

$$2e_1^\top \tilde{P}e_4 + e_2^\top \tilde{\Xi}e_2 - \tilde{\sigma}e_5^\top \tilde{\Xi}e_5 + \tilde{\Theta}_e + \text{He} \left(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{B}}(\rho_m) \right) \leq 0, \quad (4.90)$$

com $\tilde{\Theta}_e$ definido em (4.57). Por fim, ao aplicar uma segunda congruência com $\text{diag}(X^{-1}, X^{-1}, I, I)$ e o complemento de Schur duas vezes sobre a LMI (4.83), e ao pré- e pós-multiplicar por $x_{am}^\top(0)$, verifica-se a condição (4.30) do Teorema 4.3.

Ademais, a partir da funcional (4.86) e da dinâmica de $\sigma(t)$ em (3.13) obtém-se

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \sigma_m) \leq -x_m^\top(0) \Xi x_m(0) + \left(\frac{1}{\sigma_m(\tau)} - \tilde{\sigma} + 1 \right) \varepsilon_m^\top(0) \Xi \varepsilon_m(0). \quad (4.91)$$

Assim, da condição de acionamento do AETM (3.14), a desigualdade (4.91) implica em

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \sigma_m) \leq \sigma_m(\tau)(1 - \tilde{\sigma}) x_m^\top(0) \Xi x_m(0). \quad (4.92)$$

Para garantir $\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \sigma_m) < 0$, é suficiente escolher $\tilde{\sigma} > 1$.

Como o esquema AETM adota uma lei adaptativa para o parâmetro σ , este não é tratado como um estado adicional, diferentemente da variável dinâmica interna do DETM. Em particular, σ não converge para zero e nem poderia, devido ao termo $1/\sigma$ presente na lei adaptativa. Quando o sistema é estabilizado na origem, tanto o estado quanto o erro de transmissão convergem a zero. A partir da lei adaptativa (3.13), conclui-se que, nesse caso, σ tende a um valor constante pertencente ao intervalo $(0, 1)$. Portanto, apenas com o que foi apresentado até este ponto, não é possível concluir diretamente sobre o comportamento assintótico de $\dot{\mathcal{V}}$ quando $t \rightarrow \infty$, diferentemente dos outros esquemas de ETM.

No entanto, com base no lema de Barbalat (Lema A.6), é possível caracterizar o comportamento assintótico da derivada de \mathcal{V} . Seja

$$\phi(\tau, x_m(\tau), \sigma_m(\tau)) = \dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \sigma_m) \leq 0, \quad (4.93)$$

logo

$$\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \sigma_m) = \int_0^h \phi(\omega, x_m(\omega), \sigma_m(\omega)) d\omega, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \tau \in [0, h]. \quad (4.94)$$

Neste caso, como $\phi \leq 0$, obtém-se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \sigma_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^h \phi(\omega, x_m(\omega), \sigma_m(\omega)) d\omega = L_{\mathcal{V}} < \infty, \quad \tau \in [0, h]. \quad (4.95)$$

Assim, para garantir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$, é suficiente assegurar que ϕ seja uniformemente contínua. De acordo com o Lema A.7, a continuidade uniforme de $\dot{\mathcal{V}}$ é garantida se $\ddot{\mathcal{V}}$ (ou, de forma equivalente, $\dot{\phi}$) for limitada, o que é verdade a partir da definição da funcional \mathcal{V} em (4.86). Logo, pelo lema de Barbalat, conclui-se que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \dot{\mathcal{V}}(\tau, x_m, \sigma_m) = 0. \quad (4.96)$$

Portanto, sob a validade simultânea das condições (4.30) e (4.31), conclui-se que o sistema em malha fechada (4.2), operando sob o esquema AETM (3.14), é localmente \mathcal{L}_2 -estável, mesmo na presença de perturbações $w \in \mathbb{W}_2(\delta)$. \square

4.3 Problema de Otimização

Esta seção apresenta as formulações de problemas de otimização voltadas à síntese de controladores e ETMs, considerando que não ocorre fenômeno assíncrono entre os parâmetros da planta e do controlador. A condição de acionamento do DETM (3.15) regula os instantes de transmissão de dados segundo:

$$\lambda_{\min}(\Psi) \|x(s_m)\|^2 - \lambda_{\max}(\Psi) \|\varepsilon(s_m)\|^2 + \frac{1}{\theta} \eta(s_m) \leq 0, \quad (4.97)$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$, que pode ser reescrita como

$$\mathcal{F}_1(x(s_m), \varepsilon(s_m)) \leq 1 + \mathcal{F}_2(x(s_m), \eta(s_m)), \quad (4.98)$$

onde

$$\mathcal{F}_1(x, \varepsilon) = \frac{\lambda_{\max}(\Xi) \|\varepsilon\|^2}{\lambda_{\min}(\Psi) \|x\|^2}, \quad \mathcal{F}_2(x, \eta) = \frac{1}{\theta} \frac{\eta}{\lambda_{\min}(\Psi) \|x\|^2}. \quad (4.99)$$

Assim, pode-se concluir que a minimização do traço das matrizes $\tilde{\Xi}$ e $\tilde{\Psi}$ reduz \mathcal{F}_1 , dificultando a violação da desigualdade (4.98) e aumentando os intervalos entre transmissões sucessivas. Para o esquema SETM, tem-se $\mathcal{F}_2 = 0$, resultando em

$$\mathcal{F}_1(x(s_m), \varepsilon(s_m)) \leq 1, \quad (4.100)$$

com efeito das matrizes de acionamento sobre o número de acionamentos equivalente ao observado para o DETM.

Uma variável $\beta \geq 0$ é introduzida para controlar o volume da região de estados iniciais admissíveis \mathcal{D}_0 , definida por $\mathcal{H}(x) = x^\top P x \leq 1$, $P = X^{-\top} \tilde{P} X^{-1}$.

A LMI

$$\begin{bmatrix} \beta I & I \\ \star & X + X^\top - \tilde{P} \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (4.101)$$

estabelece a relação entre as matrizes X , \tilde{P} e a variável β , de forma que a sua minimização resulta em uma matriz P menor, implicando no aumento do volume de \mathcal{D}_0 . Assim, minimizar β é desejável, pois está diretamente associado à ampliação da região de estados iniciais admissíveis.

Por sua vez, a atenuação de distúrbios externos é obtida por meio da variável γ , cujo aumento reduz o ganho \mathcal{L}_2 . Como este objetivo contrasta com os demais, γ é tratado como restrição $\gamma \geq \epsilon$, com $\epsilon > 0$ parâmetro de projeto.

Para os esquemas DETM e SETM, o objetivo principal da otimização é encontrar controladores e ETMs que aumentem os intervalos entre transmissões sucessivas e expandam a região de estados iniciais admissíveis, ao mesmo tempo que garantem a atenuação dos distúrbios externos. A função objetivo combina a minimização do traço das matrizes de acionamento $\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi}$, que influencia a frequência de acionamentos, e a variável β , associada à região de estados admissíveis \mathcal{D}_0 . As restrições incluem a LMI de expansão de \mathcal{D}_0 (4.101), as LMIs de estabilização (4.41) e (4.42), e a restrição de robustez $\gamma \geq \epsilon$.

Formalmente, o problema de otimização é escrito como:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi}) + \beta \\
\text{s. a} \quad & (4.101), (4.41), (4.42), \gamma \geq \epsilon, \\
& \text{caso o esquema adotado seja DETM: (4.40), (4.43),} \\
& \text{caso o esquema adotado seja SETM: (4.65), (4.66).}
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Nos esquemas SETM* e AETM, a matriz de acionamento assume uma forma ponderada $\Psi = \sigma(s_m)\Xi$, em que $\sigma(s_m) \in (0, 1)$ permanece constante no tempo no caso do SETM* e varia ao longo do tempo no caso do AETM. Essa ponderação atua como um regulador direto da sensibilidade do mecanismo de acionamento, tornando desnecessária a otimização do traço das matrizes de acionamento. A condição de acionamento destes esquemas pode ser escrita como:

$$\mathcal{F}_3(x(s_m), \varepsilon(s_m), \sigma(s_m)) \leq 1, \quad \mathcal{F}_3(x, \varepsilon, \sigma) = \frac{\lambda_{\max}(\Xi)\|\varepsilon\|^2}{\sigma\lambda_{\min}(\Xi)\|x\|^2}. \tag{4.103}$$

O problema de otimização, neste caso, concentra-se apenas na minimização da variável β , de forma a maximizar a região de estados iniciais admissíveis, sujeita às restrições de estabilidade e desempenho específicas de cada esquema:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \beta \\
\text{sujeito a} \quad & (4.101), (4.79), (4.80), (4.66b) - (4.66k), \gamma \geq \epsilon, \\
& \text{caso o esquema adotado seja SETM*}: (4.78), (4.81), \\
& \text{caso o esquema adotado seja AETM}: (4.83), (4.84).
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Por fim, quando o conjunto de estados admissíveis \mathcal{D} é estrito, ou seja, $\mathcal{D} \neq \mathbb{R}^{n_x}$, impõe-se uma condição adicional nos problemas de otimização a fim de garantir que a REE \mathcal{D}_x esteja contida em \mathcal{D} . Essa exigência é atendida por meio de uma LMI opcional, a ser verificada para todo $q \in \mathbb{N}_{\leq n_q}$, conforme a definição de \mathcal{D} apresentada em (3.2). O resultado a seguir formaliza essa condição, assumindo que o ganho induzido γ é um parâmetro fixado a priori.

Teorema 4.7 *Se o conjunto de estados admissíveis \mathcal{D} , conforme definido em (3.2), é estrito, e se o ganho induzido $\gamma > 0$ é previamente especificado (isto é, não é*

variável de decisão), então a inclusão $\mathcal{D}_x \subseteq \mathcal{D}$ é garantida se, para todo $q \in \mathbb{N}_{\leq n_q}$, a seguinte LMI for satisfeita:

$$\begin{bmatrix} \mu^{-1} \tilde{P} & X^\top a_q \\ \star & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.105)$$

em que o parâmetro μ é definido por:

$$\mu = \begin{cases} 1 + \delta^{-1} \gamma^{-1}, & \text{para SETM, STEM* e AETM,} \\ (1 - \eta(0)) + \delta^{-1} \gamma^{-1}, & \text{para DETM.} \end{cases} \quad (4.106)$$

Demonstração. Considere a região elipsoidal definida por:

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^\top P x \leq \mu\},$$

com μ conforme especificado em (4.106). A LMI apresentada em (4.105) é equivalente à seguinte desigualdade escalar, obtida por pré- e pós-multiplicação por $\begin{bmatrix} -x^\top X^{-\top} & 1 \end{bmatrix}$:

$$1 + \mu^{-1} x^\top P x - 2a_q^\top x \geq 0. \quad (4.107)$$

Como $x \in \mathcal{D}_x$ implica $x^\top P x \leq \mu$, então $\mu^{-1} x^\top P x \leq 1$. Substituindo esse limite superior:

$$1 + \mu^{-1} x^\top P x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 2a_q^\top x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad a_q^\top x \leq 1.$$

Essa desigualdade é satisfeita para todo $q \in \mathbb{N}_{\leq n_q}$, o que garante $x \in \mathcal{D}$ sempre que $x \in \mathcal{D}_x$. Portanto, $\mathcal{D}_x \subseteq \mathcal{D}$.

Por fim, destaca-se que, como γ é tratado como um parâmetro fixado, ele não compõe o conjunto de variáveis de decisão dos problemas de otimização. Consequentemente, a restrição inferior $\gamma > \epsilon$, torna-se desnecessária e pode ser omitida das formulações. \square

4.4 Casos Particulares das Condições de Co-projeto

Conforme discutido, até o momento da elaboração deste trabalho, não foram identificadas na literatura condições de co-projeto para esquemas de PETC que

abordem, de forma simultânea, sistemas LPV, atenuação de distúrbios com energia limitada e saturação de atuadores. Nesta seção, apresentam-se especializações das condições de estabilização discutidas na Seção 4.2.

Nota 4.1 Quando os distúrbios com energia limitada são desconsiderados, isto é, $w(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, não é necessário definir um ganho induzido \mathcal{L}_2 . A região \mathcal{D}_x coincide com \mathcal{D}_0 e as trajetórias do sistema em malha fechada (4.2) iniciadas em \mathcal{D}_0 permanecem nessa região, tendendo ao ponto de equilíbrio $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. As LMIs associadas à inclusão $x \in \mathcal{D}_x \Rightarrow x_a \in \mathcal{D}_u$ passam a ser $x \in \mathcal{D}_0 \Rightarrow x_a \in \mathcal{D}_u$. Neste caso, as LMIs podem ser reescritas como segue:

(i) A LMI (4.40), utilizada nos esquemas DETM (Teorema 4.4), bem como nos esquemas SETM (Teorema 4.5), torna-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & 0 & 0 & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{1,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & X^\top \\ \star & \tilde{\Xi} & 0 & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{2,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top & 0 \\ \star & \star & 1 - \tilde{\theta} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \bar{u}_{(\ell)}^2 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \tilde{\Psi} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall(\ell, \mathbf{j}) \in \mathbb{N}_{\leq n_u} \times \mathbb{B}^{n_x}, \quad (4.108)$$

(ii) A LMI (4.78), associada aos esquemas SETM* (Corolário 4.1), torna-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} - \sigma \tilde{\Xi} & 0 & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{1,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top \\ \star & \tilde{\Xi} & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{2,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top \\ \star & \star & \bar{u}_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall(\ell, \mathbf{j}) \in \mathbb{N}_{\leq n_u} \times \mathbb{B}^{n_x}, \quad (4.109)$$

(iii) A LMI (4.83), utilizada nos esquemas AETM (Teorema 4.6), torna-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} - \tilde{\Xi} & 0 & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{1,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top \\ \star & \tilde{\sigma}^{-1} \tilde{\Xi} & (\tilde{K}_{\mathbf{j}} - \tilde{L}_{2,\mathbf{j}})_{(\ell)}^\top \\ \star & \star & \bar{u}_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall(\ell, \mathbf{j}) \in \mathbb{N}_{\leq n_u} \times \mathbb{B}^{n_x}. \quad (4.110)$$

Nota 4.2 No caso em que o atuador não apresenta saturação, a região de zona morta ψ deixa de existir. Conseqüentemente, não é necessário definir a região \mathcal{D}_u para garantir o cumprimento da condição de setor generalizada Υ , associada à zona

morta. Assim, a inclusão $x \in \mathcal{D}_x \Rightarrow x_a \in \mathcal{D}_u$ torna-se irrelevante. Nessa configuração, as matrizes auxiliares L_1 , L_2 e \aleph podem ser eliminadas das condições de estabilização, e as LMIs associadas à saturação ((4.40), (4.78), (4.83)) não precisam ser consideradas nas condições de co-projeto.

4.5 Controle de um Sistema LPV Oscilatório

Este exemplo tem como objetivo ilustrar a aplicação do PETC proposto a um sistema LPV sujeito à saturação no atuador e à presença de distúrbios com energia limitada. O modelo considerado é adaptado de [82], com modificações para incorporar restrições físicas. O sistema em questão é descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(t) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}(u(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad (4.111)$$

onde $\rho(t) \in \mathbb{R}$ é um parâmetro variante no tempo, $u(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle sujeito à saturação, e $w(t) \in \mathbb{R}$ representa um distúrbio exógeno. O parâmetro variante no tempo é escolhido como

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \cos(t), \quad (4.112)$$

de modo que suas variações permaneçam confinadas ao intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e cuja derivada temporal pertence ao mesmo intervalo, isto é, $|\dot{\rho}(t)| \leq \frac{1}{2}$. Essa escolha garante uma dinâmica oscilatória, permitindo avaliar o desempenho do PETC frente a mudanças contínuas nos parâmetros do sistema.

O sinal de controle está sujeito à saturação simétrica com limite superior definido por:

$$\bar{u} = \frac{1}{2}. \quad (4.113)$$

Além disso, a saída de desempenho considerada é dada por:

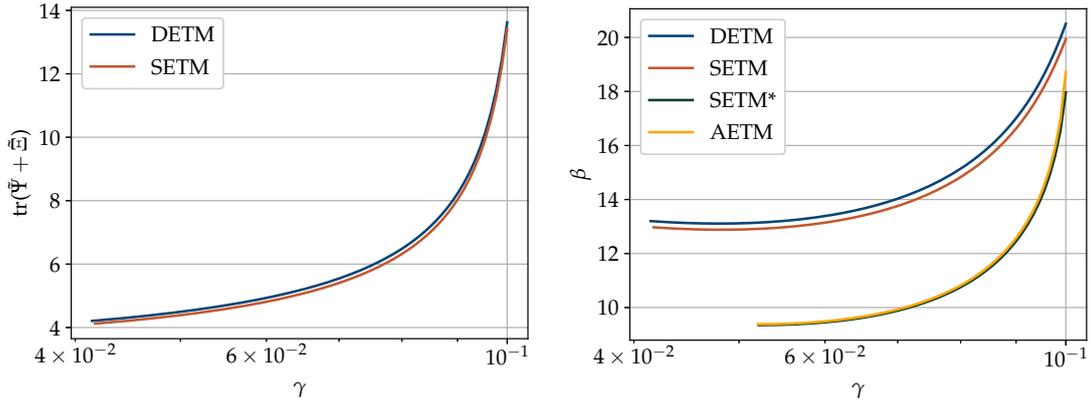
$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (4.114)$$

O sistema é ainda perturbado por um sinal com energia limitada, definido por:

$$w(t) = \exp\left(-\frac{9}{4}t\right) \sin(2\pi t) \in \mathbb{W}_2\left(\frac{1}{10}\right), \quad (4.115)$$

o que implica em $\delta = 10$. Este distúrbio apresenta um pico de aproximadamente 0,6 em $t \approx 0,2$ segundos, e decai exponencialmente, atingindo valores desprezíveis a partir de $t = 2,5$ segundos. Por fim, o período de amostragem h é de 1 milissegundo.

A Figura 4.1 apresenta os valores ótimos obtidos para os parâmetros γ , β e $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$, associados aos problemas de otimização descritos nas equações (4.102) e (4.104). Nesta análise, o parâmetro v foi fixado em 10^{-2} , enquanto os valores de ϵ foram variados no intervalo de 10^{-6} a 10^{-1} . Para cada valor de ϵ , determinou-se o maior valor de γ viável, e, a partir disso, os valores ótimos de β e $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$ foram definidos pela função objetivo.



(a) Valores ótimos de $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$.

(b) Valores ótimos de β .

Figura 4.1: Projeções dos valores ótimos das variáveis γ , β e $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$ para diferente valores de ϵ .

Observa-se que o aumento de ϵ conduz a um crescimento nos valores ótimos de γ , o que acarreta, conseqüentemente, aumentos nos valores de β e de $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$. Esse comportamento indica que a maximização de γ , correspondente à redução do ganho induzido \mathcal{L}_2 , impacta diretamente na maximização da região de estados iniciais admissíveis, ao mesmo tempo em que eleva o número de eventos de transmissão.

As Figuras 4.1a e 4.1b permitem comparar o desempenho dos diferentes esquemas de acionamento. Observa-se que o SETM apresenta uma leve superioridade em relação ao DETM nos valores ótimos de β e $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$. No entanto, deve-se

destacar que, embora as matrizes envolvidas nas condições de acionamento sejam praticamente as mesmas, o DETM introduz a variável dinâmica adicional η , a qual modifica a forma como as desigualdades (4.98) e (4.100) são satisfeitas ao longo do tempo. A presença da variável η aumenta a flexibilidade do mecanismo de acionamento, permitindo que a desigualdade (4.98) seja cumprida de forma menos restritiva que (4.100), o que se traduz em uma redução efetiva do número de eventos. Assim, mesmo quando o SETM e o DETM apresentam valores ótimos de β , bem como de $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$, próximos, o DETM pode oferecer maior economia de recursos. Além disso, nota-se que os esquemas SETM* e AETM proporcionam regiões de estados iniciais admissíveis substancialmente maiores, com valores ótimos de β superiores aos dos demais esquemas. Entretanto, para determinados valores reduzidos de γ , tais esquemas resultam em problemas infactíveis. Por fim, nota-se que, para todos os esquemas analisados, o problema de otimização torna-se infactível quando $\epsilon \geq 10^{-1}$. Assim, o maior valor viável obtido para γ é 0,1.

A Figura 4.2 apresenta a REE \mathcal{D}_x , a região de validade da condição de setor generalizada \mathcal{D}_u e a região dos estados iniciais admissíveis \mathcal{D}_0 para o sistema em malha fechada com saturação, considerando os esquemas SETM (à esquerda) e DETM (à direita). Observa-se que, apesar das particularidades de cada abordagem, as regiões obtidas para ambos os esquemas apresentam formas e áreas semelhantes. As matrizes de acionamento Ξ e Ψ , bem como os ganhos do controlador $K_{\mathbf{j}}$, $L_{1,\mathbf{j}}$ e $L_{2,\mathbf{j}}$, com $\mathbf{j} \in \mathbb{B}$, foram obtidos a partir da resolução do problema de otimização descrito na Equação (4.102), utilizando os parâmetros $\lambda = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10^{-1}$. Para o esquema DETM, foram ainda fixados os parâmetros $\lambda = 10^{-1}$, $\theta = 1,01$ e $\eta(0) = 0$. A figura inclui, adicionalmente, as trajetórias dos estados do sistema em malha fechada. Foram simuladas 20 trajetórias, com pontos iniciais igualmente espaçados ao longo da borda de \mathcal{D}_0 .

Verifica-se que a REE \mathcal{D}_x está contida na região de validade da condição de setor generalizada referente a região de zona morta da saturação \mathcal{D}_u , em conformidade com os resultados apresentados no Teorema 4.4 para o esquema DETM e no Teorema 4.5 para o esquema SETM. Essa inclusão decorre do fato de que os parâmetros obtidos pela solução do problema de otimização satisfazem as condições teóricas exigidas. Além disso, observa-se que todas as trajetórias simuladas per-

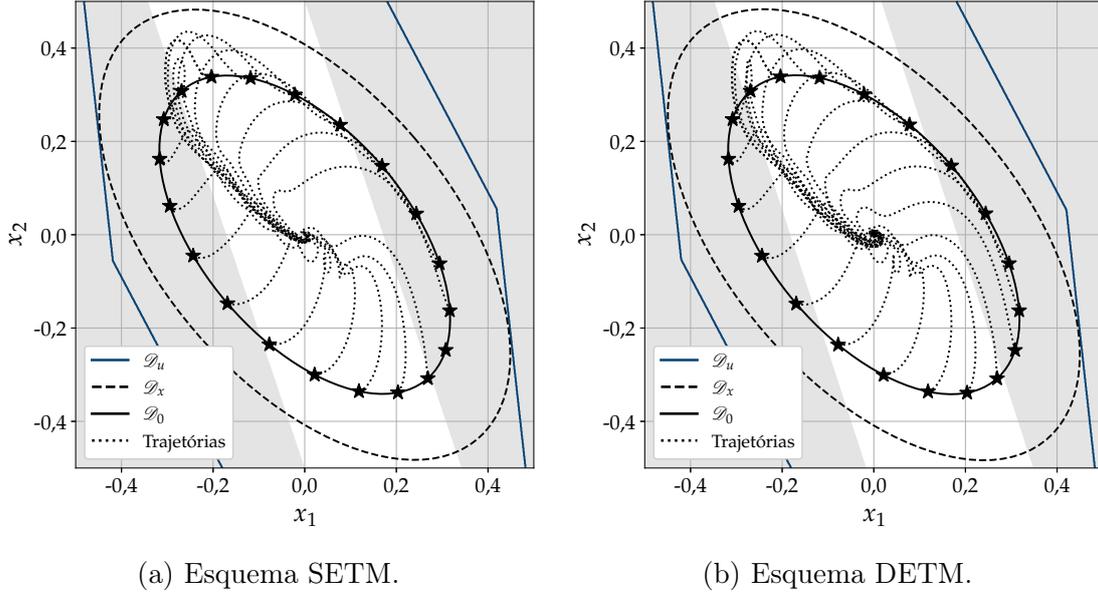


Figura 4.2: Regiões \mathcal{D}_u , \mathcal{D}_x , \mathcal{D}_0 e as trajetórias dos sistema em malha fechada sob os ETMs projetados. A região em cinza representa a região de saturação $\mathcal{D}_{u,s}$, e em branco, a região de não saturação $\mathcal{D}_{u,ns}$.

maneceram dentro da REE e convergiram para a origem logo após que a ação do distúrbio cessou. Tal comportamento era esperado, já que os sinais de entrada $\rho(t)$ e $w(t)$ atendem às restrições de projeto dos ETMs e do controlador.

Por fim, nota-se que grande parte da REE, bem como uma fração da região dos estados iniciais admissíveis, está contida na região de validade da condição de setor generalizada referente a saturação. Isso implica que os sinais de controle gerados a partir desses estados serão saturados independentemente dos valores dos parâmetros utilizados. Tal fenômeno é evidenciado em algumas das trajetórias simuladas, as quais se iniciam em pontos pertencentes à região de saturação $\mathcal{D}_{u,s}$, conforme definido em (2.51), e refletem o comportamento de saturação já na primeira aplicação do controle.

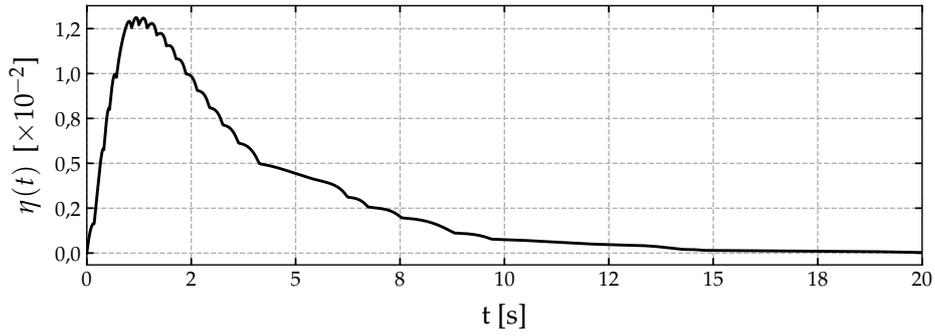
A Figura 4.3 ilustra o controle do sistema com saturação e perturbação descrito em (4.111), operando em malha fechada sob o esquema DETM. Foram utilizados os seguintes parâmetros: $\lambda = 10^{-1}$, $\theta = 1,01$, estados iniciais do sistema $x(0) = [-0,203 \quad 0,338]^\top$ e estado inicial do DETM $\eta(0) = 0$. O esquema de PETC projetado garantiu a estabilidade \mathcal{L}_2 do sistema em malha fechada, considerando os sinais externos $\rho(t)$ e $w(t)$, definidos em (4.112) e (4.115), respectivamente. Observa-se que, durante a atuação da perturbação, os estados se afastaram do ponto

de equilíbrio; contudo, cessada a influência do distúrbio, os estados convergiram novamente para a origem. A variável dinâmica $\eta(t)$ permaneceu não negativa ao longo de toda a simulação e também convergiu para zero.

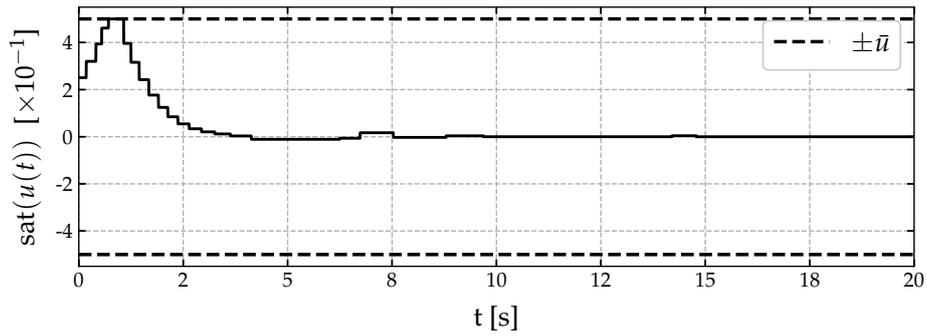
Os intervalos de tempo entre eventos, dados por $(t_{k+1} - t_k)$, variaram entre um valor mínimo de aproximadamente 0,141 segundos e um valor máximo de 1,522 segundos, o que corresponde a 1522 vezes o tempo de amostragem adotado. A média dos intervalos foi de cerca de 0,521 segundos, totalizando 27 eventos de transmissão durante a simulação. Em comparação com um controlador acionado por tempo com a mesma frequência de amostragem, que demandaria 100% da largura de banda da rede de comunicação, observou-se uma redução de aproximadamente 99,92% no uso da rede. Por fim, destaca-se que o sinal de controle permaneceu dentro dos limites impostos pela saturação em toda a simulação. Além disso, verificou-se que o sinal esteve saturado no intervalo de tempo aproximado entre 0,5 e 1 segundo.

A Figura 4.4 apresenta os resultados obtidos para o sistema saturado e perturbado descrito em (4.111) operando sob o esquema SETM e sob as mesmas condições utilizadas na simulação do sistema com o esquema DETM. Os comportamentos observados foram similares em termos de convergência dos estados e sinal de controle, diferindo-se principalmente na quantidade de eventos de transmissão gerados. No caso do SETM, foram registrados 67 eventos de transmissão de estados, o que representa um aumento de 40 eventos em comparação ao DETM. Os intervalos de tempo entre eventos variaram de 47 milissegundos (valor mínimo) a 671 milissegundos (valor máximo), com uma média de aproximadamente 116,24 milissegundos. Além disso, observa-se que os eventos de transmissão cessaram mais cedo sob o esquema SETM. Especificamente, não foram registrados eventos após $t \approx 8$ segundos, enquanto no caso do DETM ainda ocorreram eventos até aproximadamente $t = 14$ segundos.

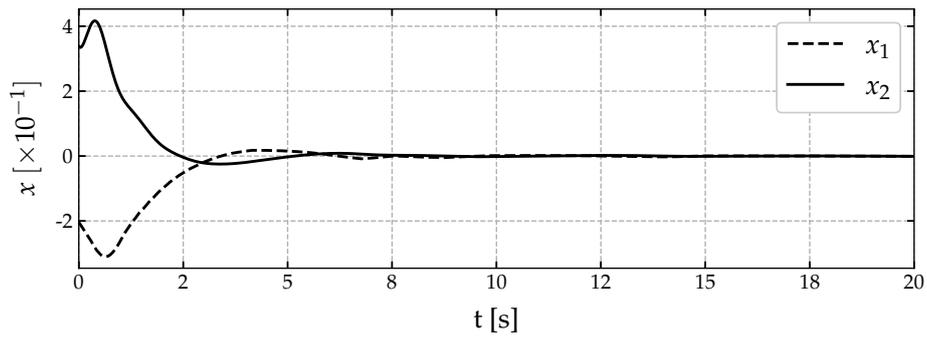
A Tabela 4.1 apresenta as médias dos intervalos de tempo entre eventos para diferentes configurações de esquemas DETM, considerando distintos valores dos parâmetros λ e θ . As matrizes de ganho do controlador e as matrizes de acionamento do ETM foram obtidas por meio da resolução do problema de otimização descrito em (4.102), utilizando os mesmos parâmetros fixos adotados nas simulações anteriores, a saber: $v = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10^{-1}$. Nas simulações, o estado inicial do sistema foi



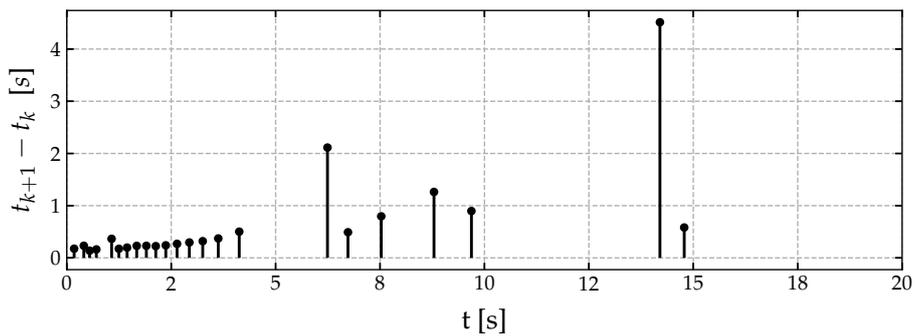
(a) Variável dinâmica do DETM.



(b) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.

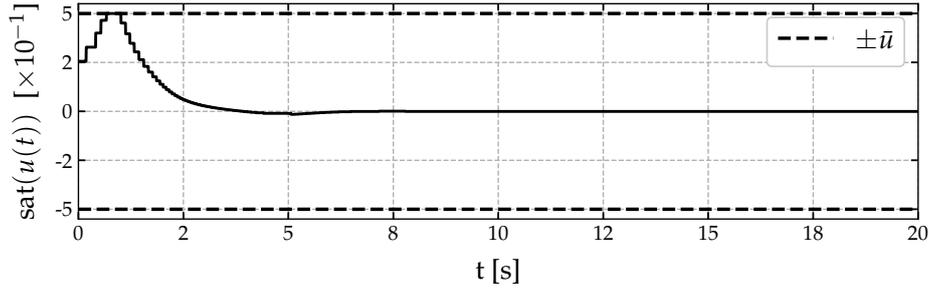


(c) Estados da planta $x(t)$.

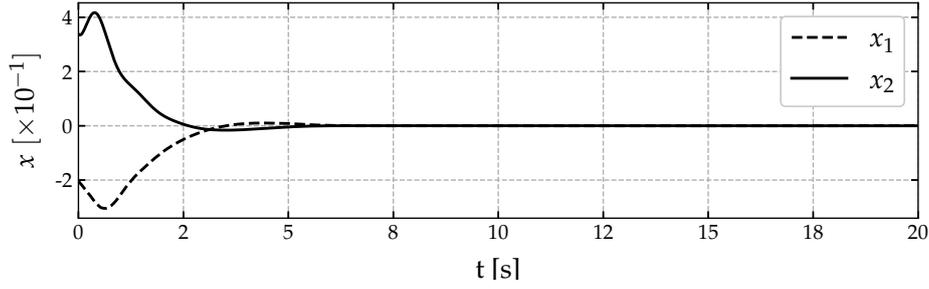


(d) Intervalo de tempo entre eventos.

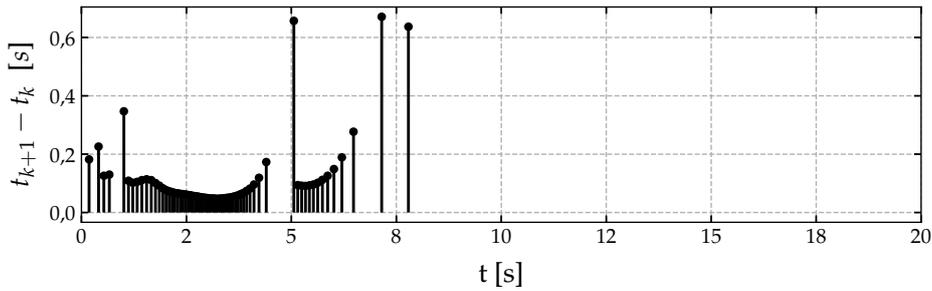
Figura 4.3: Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema DETM, da variável dinâmica η , do sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos.



(a) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.



(b) Estados da planta $x(t)$.



(c) Intervalo de tempo entre eventos.

Figura 4.4: Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema SETM, do sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos.

definido como $x(0) = [-0,203 \quad 0,338]^\top$, e os sinais $p(t)$ e $w(t)$ foram especificados conforme as expressões apresentadas em (4.112) e (4.115), respectivamente. Os resultados revelam que o aumento dos parâmetros λ e θ tende a reduzir a média dos intervalos entre eventos, implicando em um maior número de transmissões. No entanto, observa-se que, até certo ponto, o incremento em θ leva à ampliação da média dos intervalos. A partir desse limiar, contudo, essa tendência se inverte, resultando em uma diminuição da média. Esse comportamento indica que a simples redução de θ não garante, por si só, a minimização do número de eventos de transmissão, conforme observado também em [27].

A Figura 4.5 apresenta resultados análogos aos da Figura 4.2, considerando agora os esquemas SETM* e AETM. As regiões \mathcal{D}_x , \mathcal{D}_u e \mathcal{D}_0 mantêm a mesma

Tabela 4.1: Média dos intervalos de tempo entre eventos (em segundos).

DETM	$\lambda = 10^{-2}$	$\lambda = 10^{-1}$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10^1$	$\lambda = 10^2$
$\theta = 1$	0,354	0,611	0,223	0,325	0,333
$\theta = 10^1$	0,472	0,491	0,228	0,115	0,117
$\theta = 10^2$	0,136	0,359	0,111	0,158	0,115
$\theta = 10^3$	0,268	0,262	0,141	0,101	0,142
$\theta = 10^4$	0,182	0,212	0,101	0,116	0,139

configuração geral observada anteriormente, com a diferença de que, neste caso, as regiões \mathcal{D}_0 e \mathcal{D}_x apresentam uma leve ampliação. O comportamento das trajetórias do sistema em malha fechada também é semelhante, com pequenas variações associadas à expansão da região admissível. As demais características, incluindo a forma das regiões e a resposta dos estados, permanecem essencialmente inalteradas em relação aos esquemas SETM e DETM.

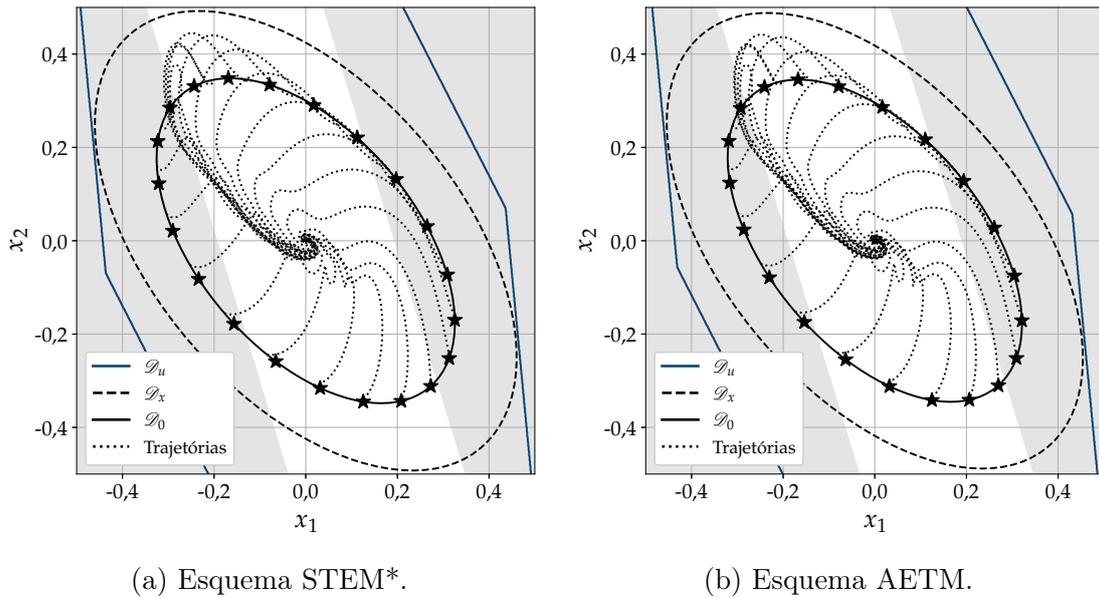
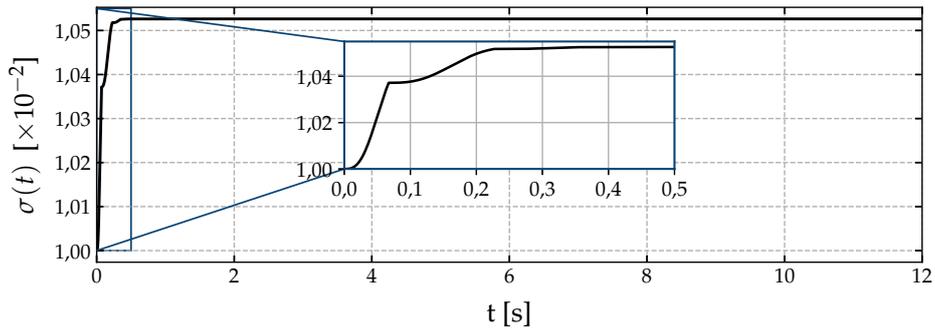


Figura 4.5: Regiões \mathcal{D}_u , \mathcal{D}_x , \mathcal{D}_0 e as trajetórias dos sistema em malha fechada sob os esquemas SETM* e AETM projetados. A região em cinza representa a região de saturação $\mathcal{D}_{u,s}$, e em branco, a região de não saturação $\mathcal{D}_{u,ns}$.

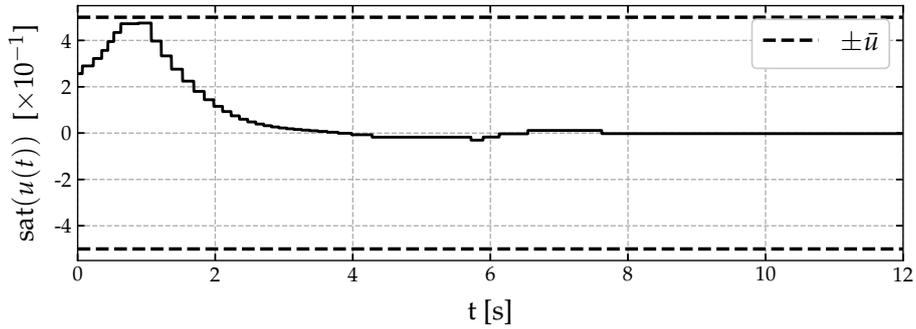
As Figuras 4.6 e Figura 4.7 ilustram o comportamento do sistema em malha fechada sob os esquemas SETM* e AETM, respectivamente. O desempenho dos estados dinâmicos da planta, do sinal de controle saturado, do parâmetro σ , assim como os intervalos de tempo entre eventos, são apresentados de forma detalhada. Nos dois esquemas, o desempenho dos estados e do sinal de controle manteve-se similar aos obtidos nos esquemas DETM e SETM, garantindo estabilidade e con-

vergência adequadas. As diferenças mais significativas ocorreram na frequência e distribuição dos eventos de transmissão, conforme evidenciado pelos intervalos de tempo entre eventos apresentados nas subfiguras.

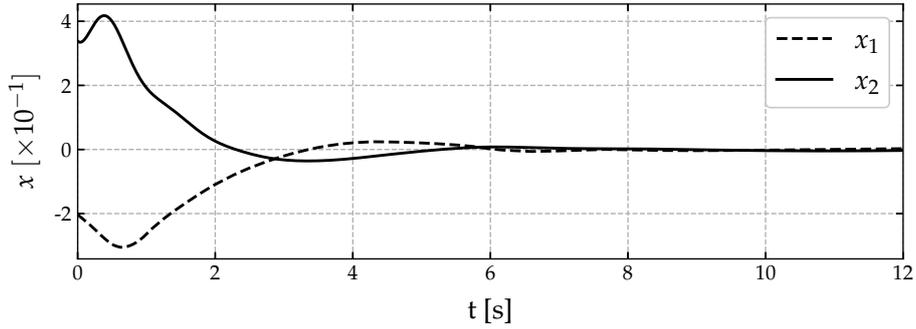
No esquema SETM* (Figura 4.7), observam-se intervalos entre eventos variando aproximadamente entre 44 ms e 1,487 s, com média em torno de 0,173 s, totalizando 61 eventos acionados. Já no esquema AETM (Figura 4.6), os intervalos mínimo, máximo e médio foram, respectivamente, cerca de 67 ms, 1,438 s e 0,212 s, com um total de 36 eventos. Esses dados indicam que o esquema AETM reduz o número de transmissões em relação ao SETM*, mantendo desempenho comparável do sistema.



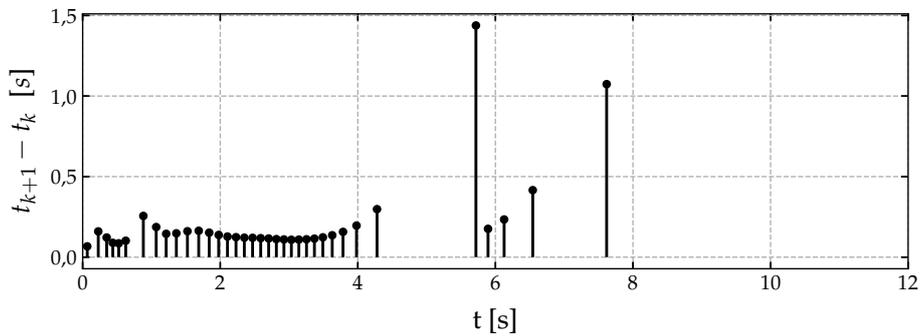
(a) Parâmetro σ do ETM.



(b) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.

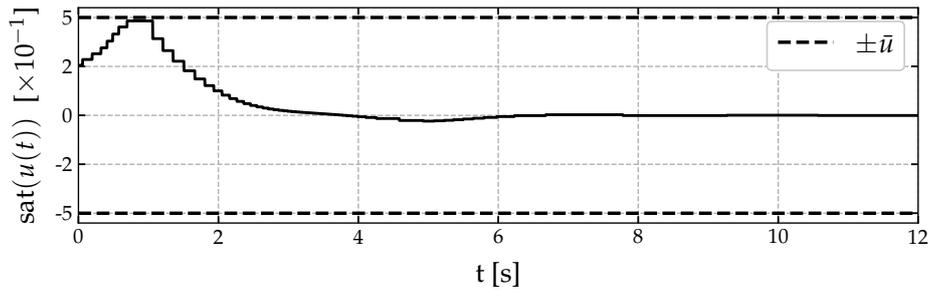


(c) Estados da planta $x(t)$.

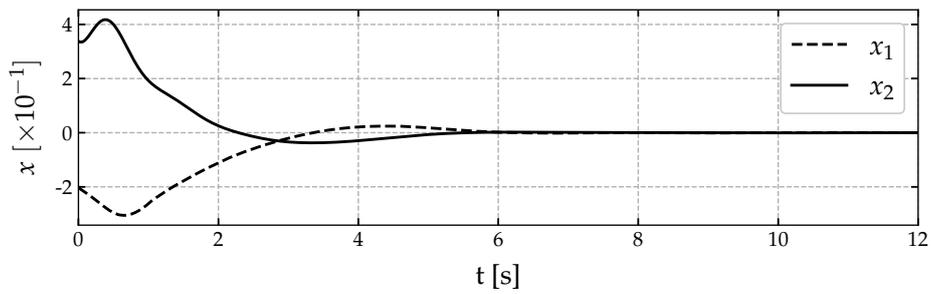


(d) Intervalo de tempo entre eventos.

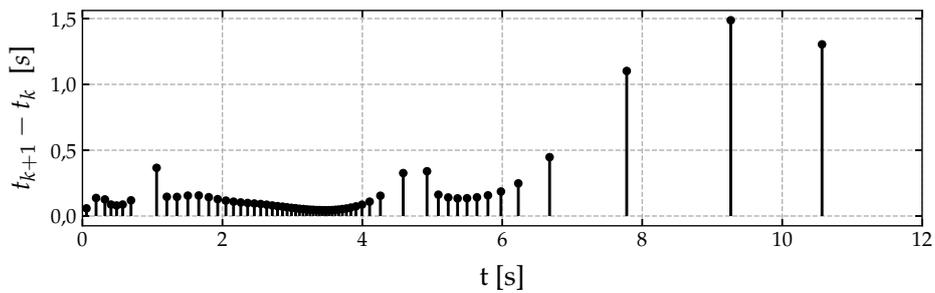
Figura 4.6: Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema AETM, do parâmetro $\sigma(t)$, do sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos.



(a) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.



(b) Estados da planta $x(t)$.



(c) Intervalo de tempo entre eventos.

Figura 4.7: Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema SETM*, do sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos.

Capítulo 5

Resultados para o Caso Com Fenômeno de Assincronismo

Neste capítulo, apresentam-se os resultados para o caso em que o sistema está sujeito ao fenômeno de assincronismo entre o vetor de parâmetros da planta e aquele disponível no controlador. Inicialmente, realiza-se a reformulação do sistema em malha fechada para contemplar os efeitos do assincronismo dos parâmetros, seguido da análise das condições de estabilização \mathcal{L}_2 específicas para os esquemas DETM, SETM, SETM* e AETM. Em sequência, discute-se o problema de otimização associado e os casos particulares das condições de co-projeto. Por fim, são apresentados exemplos de aplicação das estratégias de PETC em um sistema LPV oscilatório e em uma microrrede de corrente contínua, incluindo o modelo quase-LPV detalhado e os resultados numéricos, evidenciando o impacto do assincronismo dos parâmetros no comportamento do sistema e a eficácia das abordagens propostas.

5.1 Reformulação do Sistema em Malha Fechada

Nesta seção, considera-se o cenário em que ocorre assincronismo entre o vetor de parâmetros da planta e aquele disponível no controlador. Nessa situação, a lei de controle (3.6) utiliza o vetor de parâmetros defasado $\tilde{\rho}(t) = \hat{\rho}(t)$, correspondente aos valores transmitidos pela rede no instante t_k . Essa defasagem, resultante das limitações na transmissão do parâmetro $\rho(t)$, leva à presença de matrizes dependentes simultaneamente dos parâmetros atuais da planta, $\rho(t)$, e dos parâmetros defasados

no controlador, $\hat{\rho}(t)$. Como consequência, a dinâmica do sistema em malha fechada assume uma estrutura politópica com duas dependências temporais distintas, formalizada por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{B}^{n_p}} \alpha_{\mathbf{i}}(\rho(t)) \alpha_{\mathbf{j}}(\hat{\rho}(t)) [A_{\mathbf{i}} x(t) + B_{\mathbf{i}} K_{\mathbf{j}} [x(s_m) + \varepsilon(s_m)] + E_{\mathbf{i}} w(t) - B_{\mathbf{i}} \psi(u(t))], \quad (5.1)$$

para todo $t \in [s_m, s_{m+1})$, $m \in \mathbb{N}_0$, onde s_m representa os instantes de transmissão da rede.

Nesse cenário, é essencial tratar explicitamente a diferença entre os parâmetros atuais da planta e aqueles disponíveis no controlador. Para cada componente i , essa diferença pode ser decomposta como

$$\begin{aligned} \rho_i(t) - \hat{\rho}_i(t) &= \rho_i(t) - \rho_i(t_k), \\ &= [\rho_i(t) - \rho_i(s_m)] + [\rho_i(s_m) - \rho_i(t_k)], \end{aligned} \quad (5.2)$$

para $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $s_m \in [t_k, t_{k+1}) \cap \mathcal{S}$. Para caracterizar esse fenômeno assíncrono, aplica-se o teorema do valor médio à diferença dos parâmetros, obtendo-se

$$\dot{\rho}_i(v) = \frac{\rho_i(t) - \rho_i(s_m)}{t - s_m}, \quad v \in [s_m, t]. \quad (5.3)$$

Assumindo uma taxa de variação limitada dos parâmetros, ou seja,

$$|\dot{\rho}_i(t)| \leq \varphi_i, \quad (5.4)$$

e considerando que $t - s_m \leq h$, conclui-se que

$$|\rho_i(t) - \rho_i(s_m)| \leq h\varphi_i, \quad t \in [s_m, t_{k+1}). \quad (5.5)$$

Além disso, define-se a seguinte segunda condição de acionamento, associada ao fenômeno assíncrono:

$$\text{Condição } \diamondsuit 2 : \quad |\rho_i(s_m) - \rho_i(t_k)| \leq \bar{\rho}_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n_p}, \quad (5.6)$$

a qual impõe um limite superior ao valor absoluto da variação do i -ésimo parâmetro

entre os dois últimos instantes de amostragem e de transmissão. Essa diferença será denominada como erro de transmissão dos parâmetros. Com a inclusão da segunda condição de acionamento associada ao fenômeno assíncrono (5.6), a lei de transmissão (2.32) pode ser reescrita como:

$$t_{k+1} = \min_{m \in \mathbb{N}} \{s_m : s_m > t_k \wedge (\diamond 1 \vee \diamond 2)\}. \quad (5.7)$$

Assim, o evento de transmissão é acionado quando pelo menos uma das condições lógicas de acionamento é satisfeita.

Sob tal restrição, para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, obtém-se o seguinte limite superior para a diferença entre os parâmetros da planta e do controlador:

$$|\varrho_i(t)| = |\rho_i(t) - \hat{\rho}_i(t)| \leq \bar{\rho}_i + h\varphi_i. \quad (5.8)$$

Desta forma, a dinâmica do sistema em malha fechada sob o fenômeno assíncrono (5.1) pode ser reformulada para explicitar a influência das duas dependências parametrizadas. Inicialmente, a planta é descrita por

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) + E(\rho(t))w(t) - B(\rho(t))\psi(u(t)), \quad (5.9)$$

enquanto a lei de controle, considerando o fenômeno assíncrono, é dada por

$$u(t) = K(\hat{\rho}(t))\hat{x}(t). \quad (5.10)$$

Logo, o modelo em malha fechada pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & A(\hat{\rho}(t))x(t) + B(\hat{\rho}(t))K(\hat{\rho}(t))\hat{x}(t) - B(\hat{\rho}(t))\psi(u(t)) + E(\hat{\rho}(t))w(t) \\ & + A(\varrho(t))x(t) + B(\varrho(t))K(\hat{\rho}(t))\hat{x}(t) - B(\varrho(t))\psi(u(t)) + E(\varrho(t))w(t), \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde as dependências explícitas em $\hat{\rho}(t)$ e na diferença $\varrho(t) := \rho(t) - \hat{\rho}(t)$ evidenciam o efeito do assincronismo dos parâmetros. Por fim, essa formulação permite representar o sistema em malha fechada como um modelo LPV politópico com múltiplas

dependências temporais, conforme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^{n_p}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{B}^{n_p}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{B}^{n_p}} \alpha_{\mathbf{i}}(\hat{\rho}(t)) \alpha_{\mathbf{j}}(\hat{\rho}(t)) \beta_{\mathbf{k}}(\varrho(t)) [A_{\mathbf{i}}x(t) + B_{\mathbf{i}}K_{\mathbf{j}}\hat{x}(t) \\ & - B_{\mathbf{i}}\psi(u(t)) + E_{\mathbf{i}}w(t) + A_{\mathbf{k}}x(t) + B_{\mathbf{k}}K_{\mathbf{j}}\hat{x}(t) - B_{\mathbf{k}}\psi(u(t)) + E_{\mathbf{k}}w(t)]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Aqui, a nova função de escalonamento β apresenta estrutura análoga à função α definida em (2.7), e, assim como α depende dos limites do vetor ρ , β dependerá dos limites do vetor ϱ estabelecidos em (5.8).

5.2 Condições de Estabilização \mathcal{L}_2

Observe que, com base nas condições de estabilidade \mathcal{L}_2 sob os esquemas DETM (Teorema 4.1), SETM e SETM* (Teorema 4.2), e AETM (Teorema 4.3), apenas o modelo em malha fechada (3.8) precisou ser adaptado para contemplar o fenômeno assíncrono. Dessa forma, as condições de estabilização do sistema LPV (3.1) sob a lei de controle (3.6), considerando esse fenômeno, podem ser obtidas diretamente a partir das condições para o caso síncrono, sendo esse processo facilitado pelo uso do lema de Finsler na dedução de condições suficientes para a estabilização do sistema em malha fechada.

5.2.1 Esquema DETM

O corolário a seguir apresenta as condições de estabilidade \mathcal{L}_2 do sistema em malha fechada (5.11) sob a condição de acionamento do esquema DETM (3.15), considerando o fenômeno assíncrono entre os parâmetros da planta e do controlador.

Corolário 5.1 *Sejam $h, v, \delta, \theta, \lambda, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ tais que $\theta \geq \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda h} - 1)$, e uma condição inicial $\eta(0) \in [0, 1)$. Suponha que existam matrizes $\tilde{P}, \tilde{R}, \tilde{\Xi}, \tilde{\Psi} \in \mathbb{S}_{>0}^{n_x}$, $\tilde{S}_1, \tilde{Q}_1 \in \mathbb{S}^{n_x}$, $\tilde{S}_2, \tilde{S}_4, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_4, X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\tilde{S}_3, \tilde{Q}_3 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $\tilde{M} \in \mathbb{S}^{2n_x + n_u}$, uma matriz diagonal $\mathfrak{N} \in \mathbb{S}_{>0}^{n_u}$, $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{2n_x \times (5n_x + n_u)}$, $\tilde{K}, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, e $\tilde{\mathcal{R}} = \text{diag}(\tilde{R}, 3\tilde{R})$, tais que as*

LMI (4.40) e as seguintes sejam satisfeitas:

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{B}^{n_p}} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{P}(\mathbf{m}, \mathbf{n})} \begin{bmatrix} \Theta_{\mathbf{ijk}}(h) & \tilde{Y}^\top & e_2^\top X^\top & e_1^\top X^\top C_i \\ \star & -\frac{1}{h} \tilde{\mathcal{R}} & 0 & 0 \\ \star & \star & -\tilde{\Psi} & 0 \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{B}^{n_p^+}, \quad (5.13)$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{B}^{n_p}} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{P}(\mathbf{m}, \mathbf{n})} \begin{bmatrix} \Theta_{\mathbf{ijk}}(0) & e_2^\top X^\top & e_1^\top X^\top C_i \\ \star & -\tilde{\Psi} & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{B}^{n_p^+}, \quad (5.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{ijk}}(\omega) = & -\lambda e_6^\top e_6 - e_5^\top \tilde{\Xi} e_5 - \Theta_1 - \omega \Theta_2 - h e_3^\top \tilde{Q}_1 e_3 + (h - \omega) \Theta_3 - \gamma e_8^\top e_8 \\ & + (h - 2\omega) \kappa_1^\top \tilde{M} \kappa_1 + \text{He} \left(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{ijk}} - \kappa_2^\top \tilde{Y} + e_1^\top \tilde{P} e_4 \right) + (h - \omega) \Theta_4 + \Theta_5, \end{aligned} \quad (5.15a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{ijk}} = & A_i e_1 X + B_i \tilde{K}_j e_2 + B_i \tilde{K}_j e_5 - B_i \aleph_j e_7 + E_i e_8 \\ & + A_{\mathbf{k}} e_1 X + B_{\mathbf{k}} \tilde{K}_j e_2 + B_{\mathbf{k}} \tilde{K}_j e_5 - B_{\mathbf{k}} \aleph_j e_7 + E_{\mathbf{k}} e_8 - X e_4, \end{aligned} \quad (5.15b)$$

e as matrizes Θ_i , $i \in \mathbb{N}_{\leq 4}$, $\tilde{\mathcal{F}}$, κ_1 , κ_2 , e_j , $j \in \mathbb{N}_{\leq 8}$, bem como as transformações de variáveis, são as mesmas utilizadas no Teorema 4.4. Então, a origem do sistema em malha fechada (4.2), operando sob a condição de acionamento do DETM descrito em (3.15) e considerando o fenômeno assíncrono entre os parâmetros da planta e do controlador, é \mathcal{L}_2 -estável, com ganho induzido menor ou igual a $\sqrt{\gamma^{-1}}$. As propriedades de desempenho, as regiões envolvidas (\mathcal{D}_0 , \mathcal{D}_x e \mathcal{D}_u) e a validade da condição de setor generalizada permanecem conforme estabelecido no Teorema 4.4.

Demonstração. Conforme discutido anteriormente, apenas a modelagem do sistema LPV (3.1) foi adaptada para lidar com o fenômeno assíncrono no controlador (3.6). Observa-se que tanto a função de Lyapunov quanto o funcional de Lyapunov-Krasovskii utilizados na estabilização do sistema em malha fechada sob o esquema síncrono não dependem do parâmetro assíncrono ϱ , e as matrizes associadas às condições de análise, incluindo aquelas relacionadas à saturação, envolvem apenas o parâmetro disponível no controlador $\hat{\rho}(t)$. Assim, não é necessário modificar nem a estrutura do funcional nem as desigualdades matriciais associadas.

Considerando a reformulação da dinâmica em malha fechada com assincronismo, descrita por (5.11), e o vetor ζ definido em (4.55), define-se a matriz $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{\rho}, \varrho)$ tal que $\tilde{\mathcal{B}}(\hat{\rho}, \varrho)\zeta = 0$, dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}(\hat{\rho}, \varrho) &= A(\hat{\rho})e_1X + B(\hat{\rho})K(\hat{\rho})e_2 + B(\hat{\rho})K(\hat{\rho})e_5 - B(\hat{\rho})\aleph_j e_7 + E(\hat{\rho})e_8 \\ &+ A(\varrho)e_1X + B(\varrho)K(\hat{\rho})e_2 + B(\varrho)K(\hat{\rho})e_5 - B(\varrho)\aleph_j e_7 + E(\varrho)e_8 - Xe_4, \end{aligned} \quad (5.16)$$

o que, pela aplicação do lema de Finsler, conduz às expressões (5.15a) e (5.15b). Como o restante da demonstração segue os mesmos passos estabelecidos no Teorema 4.4, conclui-se que as condições de \mathcal{L}_2 -estabilidade sob atuadores saturantes e a condição de acionamento do DETM (3.15), conforme apresentado em Teorema 4.1, permanecem garantidas. \square

5.2.2 Esquemas SETM e SETM*

O corolário a seguir apresenta as condições de estabilidade \mathcal{L}_2 para o sistema em malha fechada (5.11) operando sob as condições de acionamento dos esquemas SETM e SETM* (3.12), considerando o fenômeno assíncrono entre os parâmetros da planta e do controlador. Apesar das diferenças na definição de SETM*, a estrutura matemática das condições de estabilidade é similar à do SETM, permitindo uma análise conjunta.

Corolário 5.2 *Sejam $h, v, \delta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Suponha que existam as matrizes $\tilde{P}, \tilde{R}, \tilde{\Xi}, \tilde{\Psi} \in \mathbb{S}_{>0}^{n_x}$, $\tilde{S}_1, \tilde{Q}_1 \in \mathbb{S}^{n_x}$, $\tilde{S}_2, \tilde{S}_4, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_4, X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\tilde{S}_3, \tilde{Q}_3 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $\tilde{M} \in \mathbb{S}^{2n_x + n_u}$, uma matriz diagonal $\aleph \in \mathbb{S}_{>0}^{n_u}$, $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{2n_x \times (5n_x + n_u)}$, $\tilde{K}, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, e $\tilde{\mathcal{R}} = \text{diag}(\tilde{R}, 3\tilde{R})$, tais que as LMIs (5.13) e (5.14), bem como a LMI (4.65), sejam satisfeitas, onde, para o esquema SETM sob assincronismo dos parâmetros, a função $\Theta_{\mathbf{ijk}}(\omega)$, presente em (5.13) e (5.14), assume a forma:*

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{ijk}}(\omega) &= -e_5^\top \tilde{\Xi} e_5 - \Theta_1 - \omega \Theta_2 - h e_3^\top \tilde{Q}_1 e_3 + (h - \omega) \Theta_3 - \gamma e_7^\top e_7 \\ &+ (h - 2\omega) \kappa_1^\top \tilde{M} \kappa_1 + \text{He} \left(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{ijk}} - \kappa_2^\top \tilde{Y} + e_1^\top \tilde{P} e_4 \right) + (h - \omega) \Theta_4 + \Theta_5, \end{aligned} \quad (5.17a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{ijk}} &= A_i e_1 X + B_i \tilde{K}_j e_2 + B_i \tilde{K}_j e_5 - B_i \aleph_j e_6 + E_i e_7 \\ &+ A_k e_1 X + B_k \tilde{K}_j e_2 + B_k \tilde{K}_j e_5 - B_k \aleph_j e_6 + E_k e_7 - X e_4, \end{aligned} \quad (5.17b)$$

e as matrizes Θ_i , $i \in \mathbb{N}_{\leq 4}$, $\tilde{\mathcal{F}}$, κ_1 , κ_2 , e_j , $j \in \mathbb{N}_{\leq 7}$, bem como as transformações de variáveis, são as mesmas apresentadas no Teorema 4.5. Então, a origem do sistema em malha fechada (4.2), operando sob o esquema SETM descrito em (3.12) e considerando o fenômeno assíncrono entre os parâmetros da planta e do controlador, é \mathcal{L}_2 -estável, com ganho induzido menor ou igual a $\sqrt{\gamma^{-1}}$. As propriedades de desempenho, as regiões envolvidas (\mathcal{D}_0 , \mathcal{D}_x e \mathcal{D}_u) e a validade da condição de setor generalizada permanecem conforme estabelecido no Teorema 4.5.

Demonstração. Similarmente à demonstração do Corolário 5.1, observa-se que não é necessário modificar a estrutura funcional nem as desigualdades previamente formuladas nos Teorema 4.2 e Teorema 4.5, referentes a análise de estabilidade \mathcal{L}_2 local sob atuadores saturantes, e a estabilização do sistema LPV (3.1) em malha fechada com o (3.6) desconsiderando o fenômeno assíncrono e o SETM (3.12), respectivamente. Desta forma, considerando a dinâmica em malha fechada reformulada para o SETM assíncrono e o vetor ζ definido em (4.72), define-se a matriz $\mathcal{B}(\hat{\rho}, \varrho)$, tal que $\mathcal{B}(\hat{\rho}, \varrho)\zeta = 0$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\hat{\rho}, \varrho) &= A(\hat{\rho})e_1X + B(\hat{\rho})K(\hat{\rho})e_2 + B(\hat{\rho})K(\hat{\rho})e_5 - B(\hat{\rho})\aleph_j e_6 + E(\hat{\rho})e_7 \\ &+ A(\varrho)e_1X + B(\varrho)K(\hat{\rho})e_2 + B(\varrho)K(\hat{\rho})e_5 - B(\varrho)\aleph_j e_6 + E(\varrho)e_7 - Xe_4. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A aplicação do lema de Finsler leva às expressões (5.17a) e (5.17b), e, como os demais passos seguem análogos aos utilizadas na demonstração do Teorema 4.5, conclui-se que as condições de \mathcal{L}_2 -estabilidade sob atuadores saturantes e o esquema SETM (3.12), conforme estabelecido no Teorema 4.2, permanecem garantidas. \square

Nota 5.1 Para o esquema SETM*, o Corolário 5.2 continua válido para garantir a \mathcal{L}_2 -estabilidade sob atuadores saturantes e fenômeno assíncrono, uma vez que compartilha a mesma estrutura matemática do caso SETM. Nesse caso, basta definir $\Psi = \sigma\Xi$, o que conduz as matrizes $\Theta_{\mathbf{ijk}}$ em (5.17a) à forma:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{ijk}}(\omega) &= \sigma e_2^\top \tilde{\Xi} e_2 - e_5^\top \tilde{\Xi} e_5 - \Theta_1 - \omega \Theta_2 - h e_3^\top \tilde{Q}_1 e_3 + (h - \omega) \Theta_3 - \gamma e_7^\top e_7 \\ &+ (h - 2\omega) \kappa_1^\top \tilde{M} \kappa_1 + \text{He} \left(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{ijk}} - \kappa_2^\top \tilde{Y} + e_1^\top \tilde{P} e_4 \right) + (h - \omega) \Theta_4 + \Theta_5, \end{aligned} \quad (5.19)$$

enquanto as LMIs (5.13) e (5.14) assumem, respectivamente, as formas:

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{B}^{n_p}} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{P}(\mathbf{m}, \mathbf{n})} \begin{bmatrix} \Theta_{\mathbf{ijk}}(h) & \tilde{Y}^\top & e_1^\top X^\top C_i \\ \star & -\frac{1}{h} \tilde{\mathcal{R}} & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{B}^{n_p^+}, \quad (5.20)$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{B}^{n_p}} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathcal{P}(\mathbf{m}, \mathbf{n})} \begin{bmatrix} \Theta_{\mathbf{ijk}}(0) & e_1^\top X^\top C_i \\ \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{B}^{n_p^+}. \quad (5.21)$$

Ademais, a LMI (4.65) é substituída pela condição correspondente em (4.78).

5.2.3 Esquema AETM

O corolário a seguir descreve as condições de estabilidade \mathcal{L}_2 do sistema em malha fechada (5.11) operando sob a condição de acionamento do esquema AETM (3.14), enfatizando a preservação da estabilidade local mesmo na presença de assincronismo entre os parâmetros da planta e do controlador.

Corolário 5.3 *Considerem-se $h, v, \delta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, $\tilde{\sigma} > 1$, a condição inicial $\sigma(0) \neq \tilde{\sigma}^{-1} \in (0, 1)$, bem como as mesmas matrizes, variáveis e regiões definidas no Corolário 4.5. No contexto do AETM com fenômeno assíncrono, as LMIs (5.20) e (5.21), além da LMI (4.83), devem ser satisfeitas, em que a função $\Theta_{\mathbf{ijk}}(\omega)$ assume a forma:*

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{ijk}}(\omega) = & e_2^\top \tilde{\Xi} e_2 - \tilde{\sigma} e_5^\top \tilde{\Xi} e_5 - \Theta_1 - \omega \Theta_2 - h e_3^\top \tilde{Q}_1 e_3 + (h - \omega) \Theta_3 - \gamma e_7^\top e_7 \\ & + (h - 2\omega) \kappa_1^\top \tilde{M} \kappa_1 + \text{He} \left(\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{ijk}} - \kappa_2^\top \tilde{Y} + e_1^\top \tilde{P} e_4 \right) + (h - \omega) \Theta_4 + \Theta_5, \end{aligned} \quad (5.22)$$

sendo $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \kappa_1, \kappa_2$, os vetores e_i e as transformações de variáveis definidos conforme o Teorema 4.5 e $\mathcal{B}_{\mathbf{ijk}}$ em (5.17b). Sob essas condições, a origem do sistema em malha fechada (4.2) é \mathcal{L}_2 -estável com ganho induzido inferior ou igual a $\sqrt{\gamma^{-1}}$, e as trajetórias permanecem contidas em uma REE, respeitando as restrições impostas pela saturação dos atuadores, semelhantemente ao Teorema 4.6.

Demonstração. Similarmente à demonstração do Corolário 5.1, observa-se que a estrutura do funcional de Lyapunov-Krasovskii e as desigualdades previamente formuladas nos Teorema 4.3 e Teorema 4.6 permanecem válidas no caso assíncrono,

uma vez que dependem apenas do parâmetro disponível no controlador $\hat{\rho}(t)$. Considerando a reformulação da dinâmica em malha fechada sob o AETM assíncrono e o vetor ζ definido em (4.72), introduz-se a matriz $\mathcal{B}(\hat{\rho}, \varrho)$, construída de modo que $\mathcal{B}(\hat{\rho}, \varrho)\zeta = 0$, sendo compatível com a estrutura de (5.18). A aplicação do lema de Finsler conduz à expressão (5.22), cujos termos mantêm a estrutura das condições do Teorema 4.6. Como os demais passos seguem de forma análoga, conclui-se que a estabilidade local no sentido \mathcal{L}_2 , sob saturação de atuadores, permanece assegurada no AETM com assincronismo dos parâmetros, desde que as condições (4.83), (5.20) e (5.21) sejam satisfeitas. \square

5.3 Problema de Otimização

Quando o fenômeno de assincronismo entre os parâmetros da planta e do controlador é considerado, os objetivos de otimização permanecem os mesmos: maximizar os intervalos entre acionamentos, expandir a região de estados iniciais admissíveis e garantir robustez frente a distúrbios externos. No entanto, as condições de estabilidade e desempenho precisam ser ajustadas para contemplar a dinâmica assíncrona.

Para os esquemas DETM e SETM, as funções \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 definidas em (4.98) continuam válidas, assim como a definição da variável β e a LMI de expansão de \mathcal{D}_0 (4.101). O que muda são as restrições adicionais impostas pelas LMIs, que agora devem assegurar a estabilidade do sistema mesmo em presença do assincronismo dos parâmetros. Essas LMIs são dadas por: (5.13), (5.14), (5.15), (4.43c) – (4.43l) para DETM e (5.17), (4.66c) – (4.66k) para SETM.

Formalmente, o problema de otimização assíncrono é escrito como:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi}) + \beta \\
\text{s. a} \quad & (4.101), (5.13), (5.14), \gamma \geq \epsilon, \\
& \text{caso o esquema adotado seja DETM: (4.40), (5.15), (4.43c) – (4.43l),} \\
& \text{caso o esquema adotado seja SETM: (4.65), (5.17), (4.66c) – (4.66k).}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Nos esquemas SETM* e AETM, a matriz de acionamento ponderada $\Psi = \sigma(s_m)\tilde{\Xi}$ e a função \mathcal{F}_3 continuam válidas conforme (4.103). Novamente, o parâmetro

σ regula diretamente o número de acionamentos, dispensando a otimização do traço das matrizes de acionamento. Para estes esquemas, as LMIs são adaptadas para capturar o efeito do assincronismo dos parâmetros: (5.20), (5.21), (5.17b), (5.19) para SETM* e (5.22) para AETM. O problema de otimização correspondente é então:

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta \\ \text{sujeito a} \quad & (4.101), (5.20), (5.21), (5.17b), (4.66c) - (4.66k), \gamma \geq \epsilon, \\ & \text{caso o esquema adotado seja SETM*}: (4.78), (5.19), \\ & \text{caso o esquema adotado seja AETM}: (4.83), (5.22). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Vale destacar que a inclusão $\mathcal{D}_x \subseteq \mathcal{D}$ permanece válida, conforme estabelecido no Corolário 4.7. Assim, o conjunto de estados iniciais admissíveis continua garantido, mesmo na presença de assincronismo dos parâmetros, mantendo a coerência com as propriedades de atenuação de distúrbios e redução de eventos desejadas.

5.4 Casos Particulares das Condições de Co-Projeto

Para o fenômeno de assincronismo dos parâmetros, os casos particulares discutidos para o cenário desconsiderando o fenômeno de assincronismo dos parâmetros permanecem válidos:

- (i) A situação sem distúrbios com energia limitada ($w(t) = 0$), descrita na Nota 4.1;
- (ii) O caso sem saturação de atuadores, tratado na Nota 4.2.

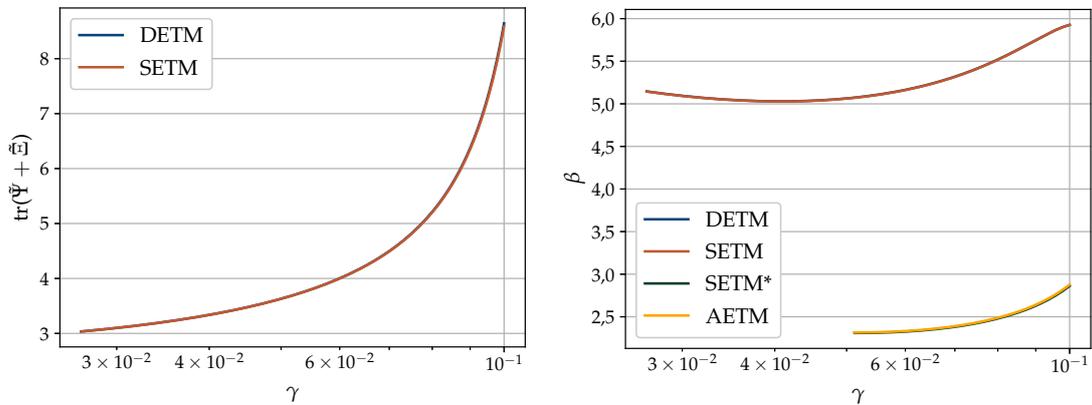
Portanto, todas as especializações das condições de estabilização apresentadas para o caso sem o fenômeno assíncrono aplicam-se de forma direta ao caso com o fenômeno.

5.5 Controle de um Sistema LPV Oscilatório

Nesta seção, é considerado o fenômeno do assincronismo dos parâmetros no sistema. Avalia-se a aplicação dos quatro esquemas de ETM periódico ao sistema LPV (4.111): DETM, SETM, SETM* e AETM. Os problemas de otimização para o projeto do controlador e do ETM no caso assíncrono são formulados para cada esquema considerado, conforme detalhado em (5.23) e (5.24). O acionamento dos

eventos ocorre segundo a lei de acionamento descrita em (5.7). Além das condições de acionamento específicas de cada esquema (Condição $\diamond 1$), incorpora-se uma segunda restrição adicional ao projeto (Condição $\diamond 2$), de modo que uma das duas condições deve ser satisfeita, conforme descrito em (5.6). Por fim, é importante destacar que o valor máximo admissível para a variação do erro de transmissão dos parâmetros, que delimita a segunda condição, foi de $\bar{\rho} = 0,15$ para todos os projetos dos ETM. Valores superiores a esse limite resultaram em infactibilidade nos problemas de otimização e, portanto, este foi o valor adotado em todas as simulações realizadas.

A Figura 5.1 apresenta os valores ótimos obtidos para os parâmetros γ , β e $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$, agora considerando o cenário assíncrono entre os parâmetros variantes no tempo da planta e do controlador. Como no caso anterior, o parâmetro v foi fixado em 10^{-2} , enquanto ϵ variou no intervalo de 10^{-6} a 10^{-1} , e, para cada valor de ϵ , foi determinada a maior γ viável, a partir da qual os valores de β e $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$ foram definidos pela função objetivo.



(a) Valores ótimos de $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$.

(b) Valores ótimos de β .

Figura 5.1: Projeções dos valores ótimos das variáveis γ , β e $\text{tr}(\tilde{\Xi} + \tilde{\Psi})$ para diferente valores de ϵ .

Observa-se que, semelhantemente no caso síncrono, no cenário assíncrono os esquemas DETM e SETM apresentaram resultados praticamente coincidentes para todo o intervalo de γ analisado, não havendo diferenças significativas nem no valor do traço das matrizes de acionamento nem nos valores ótimos de β . De modo análogo, os esquemas SETM* e AETM mantiveram comportamentos praticamente idênticos entre si, ambos resultando em valores ótimos de β superiores aos obtidos com DETM

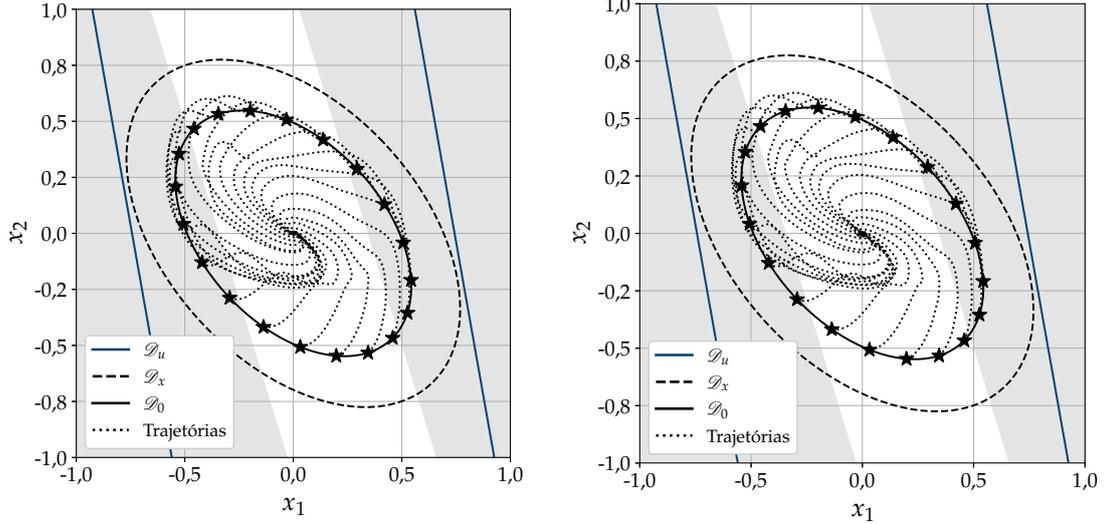
e SETM, preservando regiões de estados iniciais admissíveis consideravelmente maiores ao longo de toda a variação de γ . Além disso, é possível notar que as regiões admissíveis estimadas para o SETM* e AETM são maiores em comparação com as regiões estimadas para o SETM e DETM.

Por fim, assim como no caso em que o assincronismo dos parâmetros não foi considerado, constatou-se que todos os problemas de otimização tornam-se infactíveis para $\epsilon \geq 10^{-1}$, estabelecendo novamente o limite superior viável para γ como sendo 0,1.

A Figura 5.2 apresenta os resultados obtidos para os esquemas SETM e DETM considerando o fenômeno assíncrono. Observa-se que as regiões estimadas são significativamente maiores em comparação ao caso sem assincronismo dos parâmetros, sendo que a região de estados iniciais admissíveis obtida para o DETM supera a correspondente do SETM. As trajetórias dos estados permaneceram dentro da REE e convergiram à origem assim que a ação do distúrbio cessou, comportamento análogo ao verificado no caso sem assincronismo dos parâmetros. Contudo, nota-se que, nesta configuração, apenas uma pequena fração das regiões obtidas encontra-se dentro da zona de saturação, o que indica que a maioria dos estados admissíveis não aciona o limite de saturação do controle. Ressalta-se que o controlador e o ETM utilizados foram projetados considerando os mesmos conjuntos de parâmetros adotados para o caso sem fenômeno assíncrono.

A Figura 5.3 e Figura 5.4 apresentam o comportamento do sistema descrito em (4.111), sujeito à saturação e perturbação, operando sob os esquemas assíncronos DETM e SETM, respectivamente. Nesta configuração, o mecanismo de acionamento considera duas condições distintas: a primeira depende dos estados dinâmicos do sistema (incluindo, no caso do DETM, a variável dinâmica η) e do erro de transmissão; a segunda está associada ao comportamento dos parâmetros variantes no tempo. O evento de transmissão é gerado sempre que uma dessas condições é satisfeita.

A introdução dessa segunda condição de acionamento, inexistente no caso síncrono, leva a uma diferença fundamental no comportamento dos intervalos entre eventos. No cenário sem assincronismo dos parâmetros, a convergência dos estados e de η para zero implicaria, eventualmente, no término das transmissões. No entanto, no caso assíncrono, os parâmetros utilizados nas simulações apresentam variação



(a) Esquema STEM.

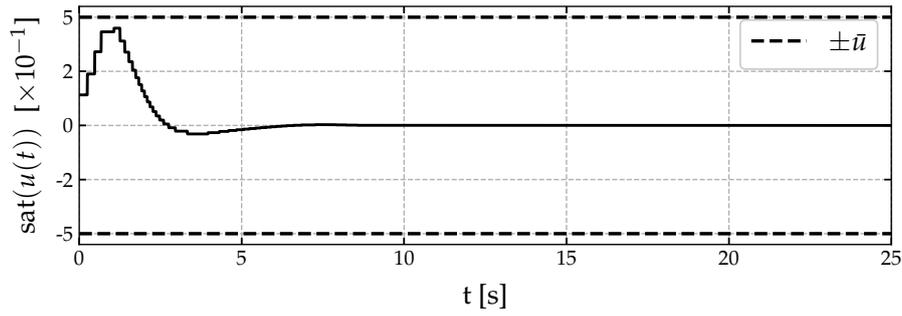
(b) Esquema DETM.

Figura 5.2: Regiões \mathcal{D}_u , \mathcal{D}_x , \mathcal{D}_0 e as trajetórias do sistema em malha fechada sob os esquemas SETM e DETM projetados considerando o fenômeno assíncrono. A região em cinza representa a região de saturação, e em branco, a região de não saturação.

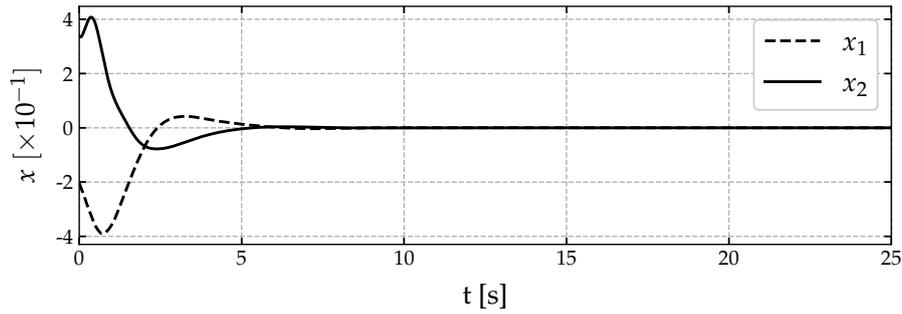
contínua no tempo (neste caso, uma função oscilatória) sobre a qual não há controle direto. Assim, a segunda condição pode ser ativada indefinidamente, resultando em acionamentos de eventos ao longo de toda a simulação, ainda que de forma aperiódica. Observa-se, nas figuras, que a partir de aproximadamente $t = 7$ segundos, os intervalos entre eventos tornam-se semelhantes entre os esquemas SETM e DETM, comportamento diretamente associado à ativação exclusiva da segunda condição.

Os resultados quantitativos obtidos para o DETM indicam um total de 52 eventos de transmissão, com intervalo mínimo de 221 ms, máximo de 1,52 s e média de 473 ms. Para o SETM, foram registrados 72 eventos, com intervalo mínimo de 85 ms, máximo de 1,548 s e média de 341 ms. Observa-se que, assim como no cenário assíncrono, o esquema DETM apresentou menor número de eventos em comparação com o SETM. Este comportamento é explicado pelo fato de que, conforme mostrado na Figura 5.1a, para $\gamma = 10^{-1}$, as matrizes de acionamento do DETM são mais otimizadas que as do SETM, potencializando o efeito da variável dinâmica na redução da taxa de acionamento.

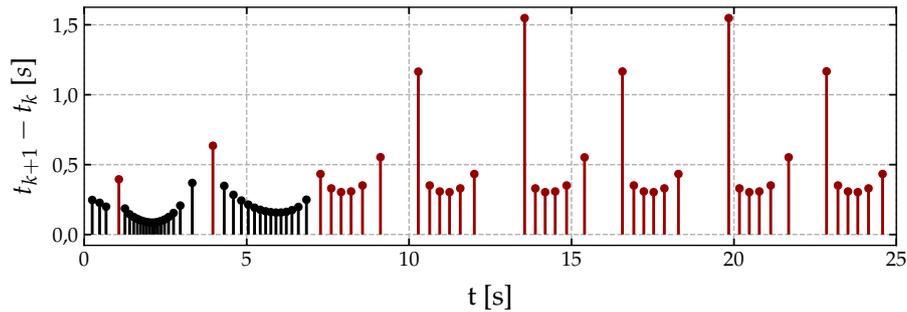
Quanto à resposta em malha fechada, em ambos os casos observou-se que, cessada a ação do distúrbio, os estados convergiram para a origem. O sinal de controle manteve-se dentro dos limites impostos pela saturação durante toda a simulação,



(a) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.



(b) Estados da planta $x(t)$.

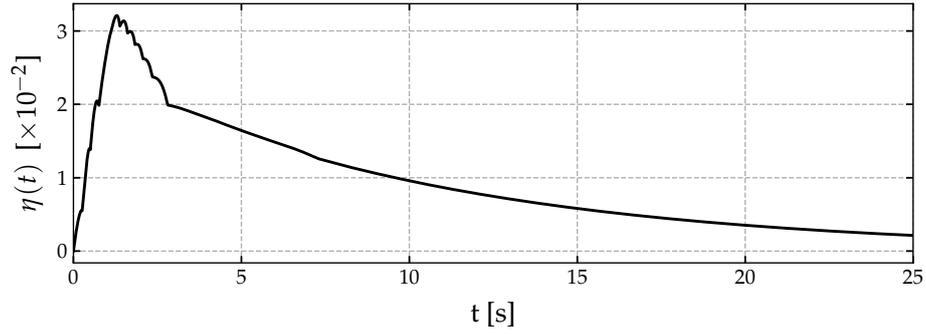


(c) Intervalo de tempo entre eventos.

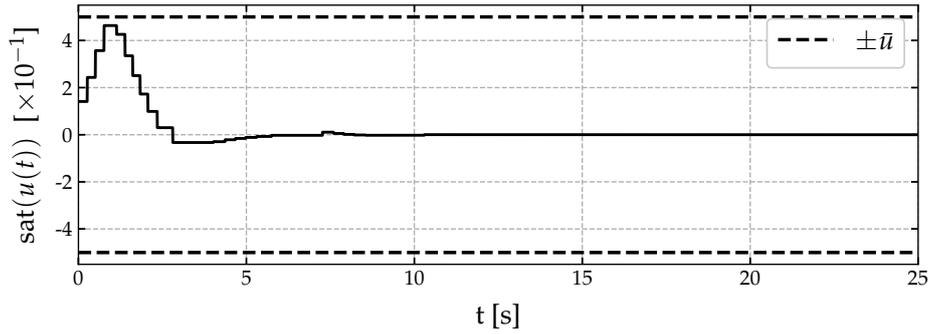
Figura 5.3: Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema SETM, incluindo o sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos. Em (c), as marcações em vermelho indicam eventos acionados pela condição $\diamond 2$, enquanto as em preto correspondem a eventos acionados pela condição $\diamond 1$.

sem apresentar trechos saturados no regime assíncrono.

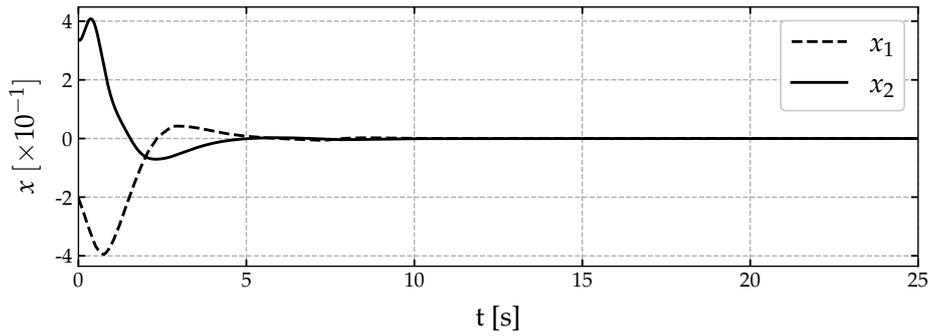
A Figura 5.5 apresenta as regiões estimadas para os esquemas SETM* e AETM considerando o fenômeno assíncrono. Verifica-se que essas regiões são significativamente maiores que aquelas obtidas para os esquemas SETM e DETM na mesma configuração assíncrona, e substancialmente superiores às regiões estimadas para os quatro esquemas na ausência do fenômeno assíncrono. Diferentemente do observado entre os esquemas SETM e DETM, as regiões obtidas para os esquemas SETM* e AETM mostraram-se praticamente coincidentes. Nota-se ainda que deter-



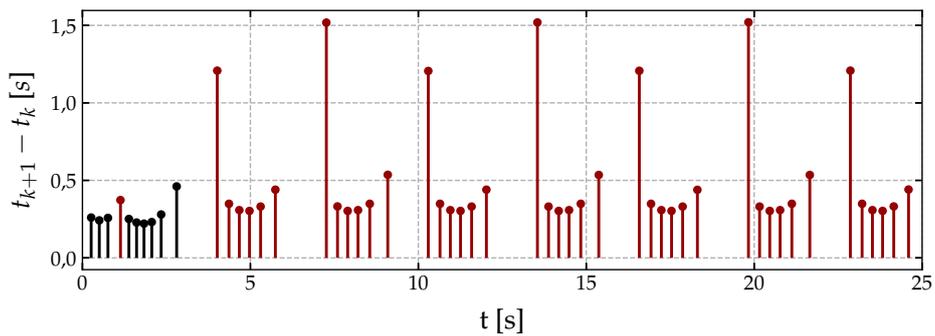
(a) Variável dinâmica do DETM.



(b) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.



(c) Estados da planta $x(t)$.



(d) Intervalo de tempo entre eventos.

Figura 5.4: Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema DETM, incluindo o sinal de controle, a variável dinâmica η e os intervalos de tempo entre eventos. Em (d), as marcações em vermelho indicam eventos acionados pela condição $\diamond 2$, enquanto as em preto correspondem a eventos acionados pela condição $\diamond 1$.

minadas porções dessas regiões encontram-se dentro da zona de saturação, de modo que algumas trajetórias do sistema, ao evoluírem, atravessam tais áreas. Isso indica que, em determinados instantes, o sinal de controle atinge os limites de saturação, comportamento verificado em ambos os esquemas.

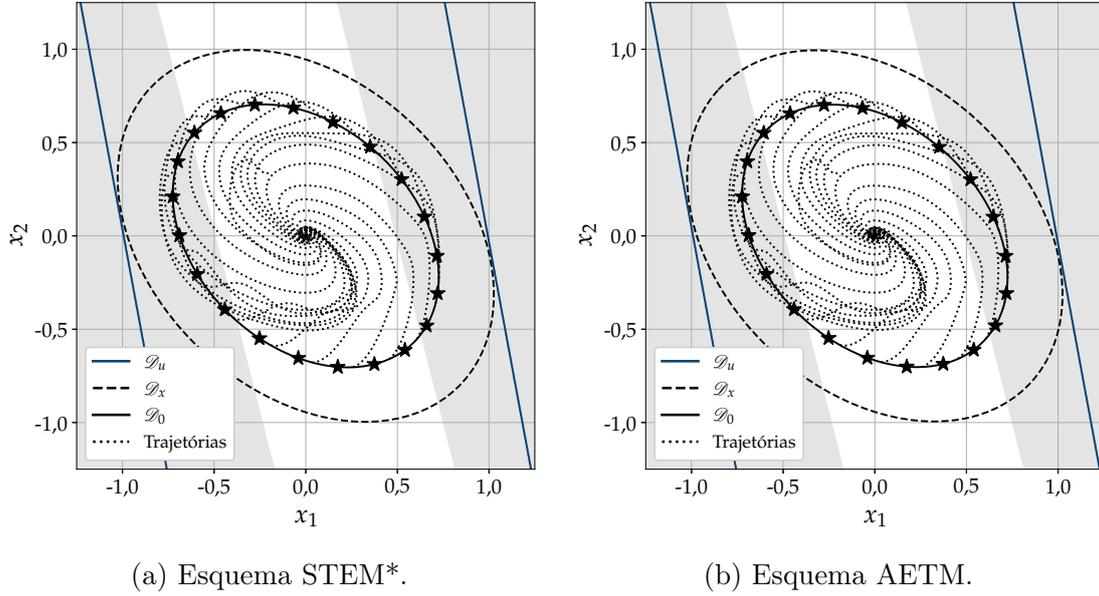
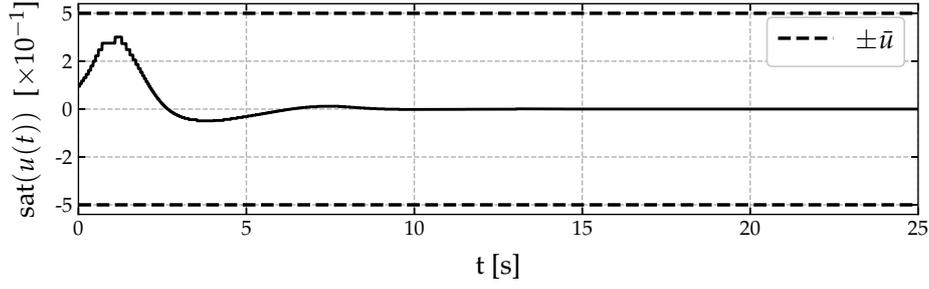


Figura 5.5: Regiões \mathcal{D}_u , \mathcal{D}_x , \mathcal{D}_0 e as trajetórias dos sistema em malha fechada sob os esquemas SETM* e AETM projetados considerando o fenômeno assíncrono. A região em cinza representa a região de saturação $\mathcal{D}_{u,s}$, e em branco, a região de não saturação $\mathcal{D}_{u,ns}$.

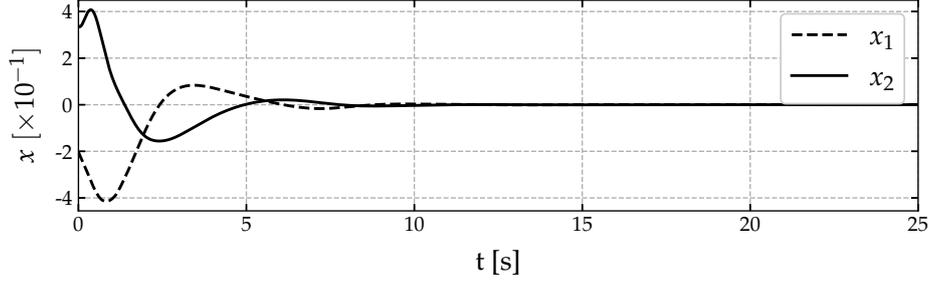
As Figuras 5.6 e 5.7 apresentam o comportamento do sistema descrito em (4.111), sujeito à saturação e perturbação, operando em malha fechada sob os esquemas SETM* e AETM, respectivamente, considerando o fenômeno assíncrono. São mostrados o desempenho dos estados dinâmicos da planta, do sinal de controle, do parâmetro $\sigma(t)$ e dos intervalos de tempo entre eventos.

No caso assíncrono, observa-se que, para o esquema AETM, o parâmetro $\sigma(t)$ apresentou variação por um período ligeiramente superior ao registrado na sua versão síncrona. Entretanto, rapidamente convergiu para um valor constante, resultando em um comportamento equivalente a uma versão estática, porém com valor final de σ maior. Em ambos os esquemas, o tempo necessário para a convergência dos estados foi superior ao observado nas versões sem o fenômeno assíncrono. Além disso, diferentemente do caso síncrono, o sinal de controle não atingiu a saturação, mantendo-se dentro dos limites estabelecidos durante toda a simulação.

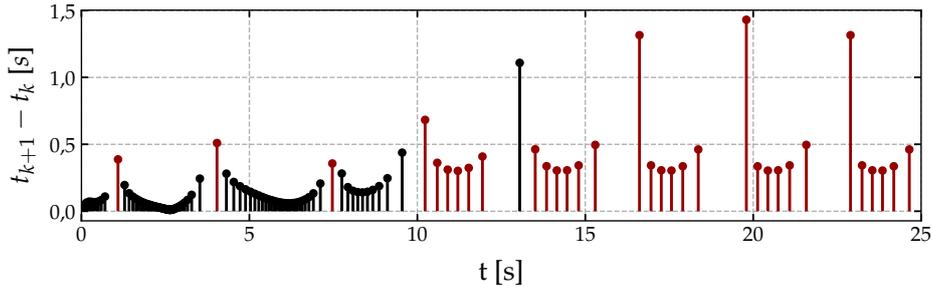
No esquema SETM* assíncrono, os intervalos de tempo entre eventos varia-



(a) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.



(b) Estados da planta $x(t)$.

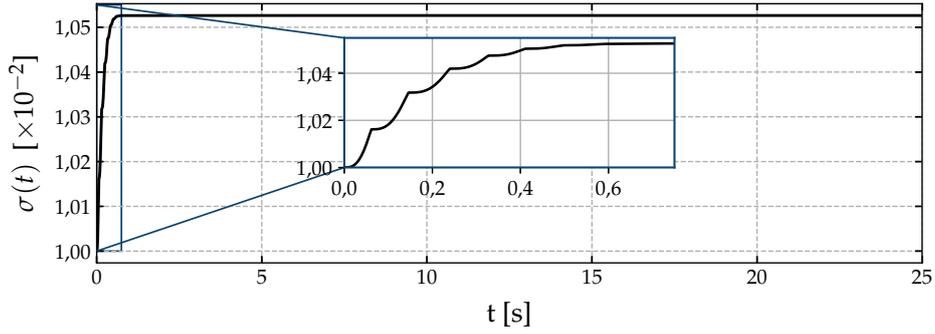


(c) Intervalo de tempo entre eventos.

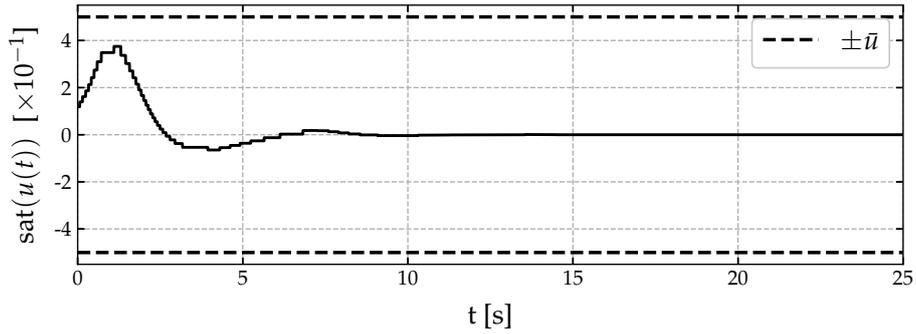
Figura 5.6: Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema SETM*, incluindo o sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos. Em (c), as marcações em vermelho indicam eventos acionados pela condição $\diamond 2$, enquanto as em preto correspondem a eventos acionados pela condição $\diamond 1$.

ram de aproximadamente 11 ms a 1,431 s, com média de 173 ms, totalizando 142 eventos de transmissão. Já no esquema AETM assíncrono, os valores mínimo, máximo e médio dos IETs foram, respectivamente, cerca de 61 ms, 1,514 s e 337 ms, com um total de 73 eventos registrados. Esses resultados mostram que o esquema AETM assíncrono reduziu significativamente o número de transmissões em comparação ao SETM* assíncrono, preservando o desempenho do sistema.

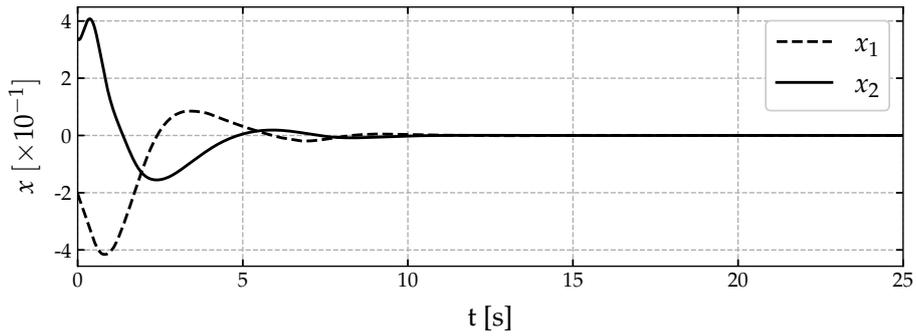
Por fim, de forma análoga ao verificado nos resultados assíncronos para os esquemas DETM e SETM, mesmo após a convergência dos estados para a origem, continuaram a ocorrer eventos de transmissão, devido à natureza da segunda condi-



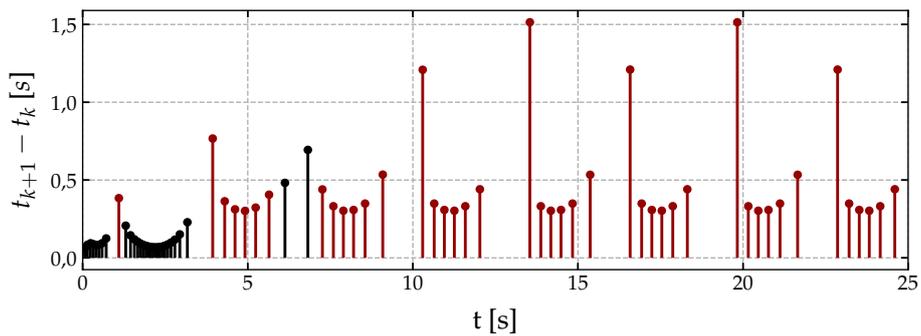
(a) Parâmetro do AETM.



(b) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.



(c) Estados da planta $x(t)$.



(d) Intervalo de tempo entre eventos.

Figura 5.7: Comportamento dos estados do sistema em malha fechada sob o esquema AETM, incluindo o sinal de controle, o parâmetro σ e os intervalos de tempo entre eventos. Em (d), as marcações em vermelho indicam eventos acionados pela condição $\diamond 2$, enquanto as em preto correspondem a eventos acionados pela condição $\diamond 1$.

ção de acionamento associada ao parâmetro variante no tempo.

5.6 Controle de uma Microrrede CC

Neste exemplo, os quatro esquemas de PETC – DETM, SETM, SETM* e AETM – foram aplicados a uma microrrede CC modelada na forma quase-LPV. A microrrede é composta por unidades geradoras, linhas resistivo-indutivas e que alimentam cargas de potência constante (CPLs, do inglês *Constant Power Loads*) e cargas de resistência constante (CRLs, do inglês *Constant Resistance Loads*). As simulações do sistema em malha fechada avaliam regulação, número e distribuição de eventos, atendimento às restrições de estado sob perturbações e saturação, além da influência do assincronismo nos parâmetros variantes.

5.6.1 Modelo quase-LPV de uma Microrrede CC

Considere uma microrrede CC composta por n unidades de geração distribuída (DG, do inglês *Distributed Generation*), interconectadas por m linhas resistivo-indutivas e alimentando CPLs e CRLs. A topologia da rede é representada por um grafo, conforme ilustrado na Figura 5.8, onde se apresenta um exemplo com 6 unidades DG e 8 linhas de interconexão.

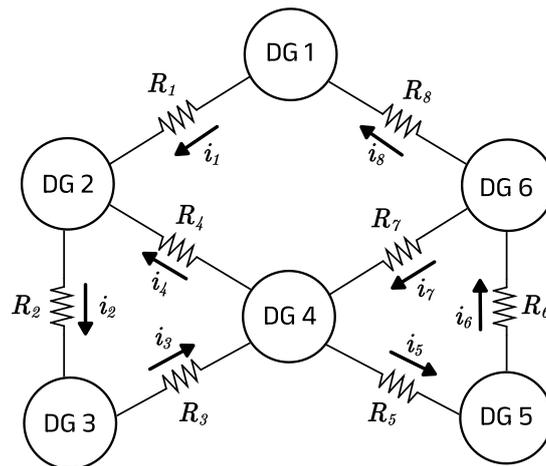


Figura 5.8: Topologia de uma microrrede CC com 6 unidades DG e 8 linhas.

Cada unidade DG é conectada ao barramento CC por meio de um conversor de potência do tipo *buck*, responsável por regular a potência fornecida tanto às cargas locais quanto às linhas de interconexão. A Figura 5.9 apresenta o diagrama elétrico

de uma unidade DG, no qual o conversor inclui um filtro LC de saída cuja indutância incorpora a resistência da linha. A saída do filtro alimenta simultaneamente uma CPL e uma carga resistiva constante (CRL), que em conjunto representam a demanda agregada atendida por essa unidade.

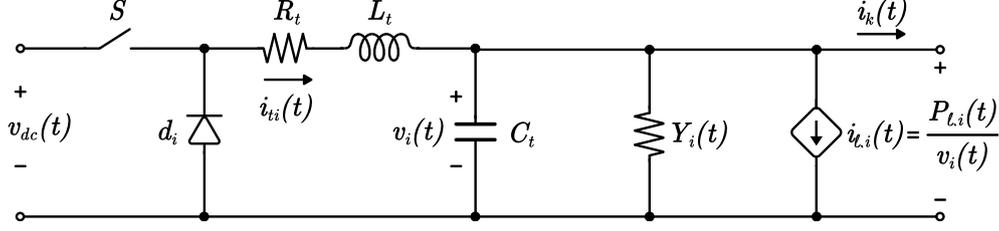


Figura 5.9: Circuito elétrico de uma unidade DG com conversor do tipo *buck*.

A dinâmica da i -ésima unidade DG é descrita por:

$$\dot{v}_i = \frac{1}{C_{t_i}} i_{t_i} - \frac{Y_i}{C_{t_i}} v_i - \frac{P_{\ell,i}}{C_{t_i} v_i} - \frac{1}{C_{t_i}} \sum_{k=1}^m \mathcal{B}_{e,ik} i_k, \quad (5.25)$$

$$\dot{i}_{t_i} = -\frac{1}{L_{t_i}} v_i - \frac{R_{t_i}}{L_{t_i}} i_{t_i} + \frac{v_{dc}}{L_{t_i}} d_i, \quad (5.26)$$

em que v_i e i_{t_i} correspondem, respectivamente, à tensão no ponto de acoplamento comum (PCC) e à corrente do filtro; C_{t_i} , L_{t_i} e R_{t_i} são parâmetros passivos; Y_i é a condutância; $P_{\ell,i}$ é a potência da CPL; e d_i é o sinal de controle. A corrente na linha k é modelada por:

$$\dot{i}_k = -\frac{R_k}{L_k} i_k + \frac{1}{L_k} \sum_{j=1}^n \mathcal{B}_{e,jk} v_j, \quad (5.27)$$

em que R_k , L_k e $\mathcal{B}_{e,jk}$ estão definidos de acordo com a topologia da rede.

Em torno de um ponto de operação $(v_i^o, i_{t_i}^o, i_k^o, d_i^o, P_{\ell,i}^o)$, tem-se:

$$d_i^o = \frac{v_i^o}{v_{dc}} + \frac{R_{t_i}}{v_{dc}} i_{t_i}^o, \quad i_{t_i}^o = Y_i v_i^o + \frac{P_{\ell,i}^o}{v_i^o} + \sum_{k=1}^m \mathcal{B}_{e,ik} i_k^o, \quad i_k^o = \frac{1}{R_k} \sum_{j=1}^n \mathcal{B}_{e,jk} v_j^o. \quad (5.28)$$

Definindo $\delta q = [\delta q_1, \dots, \delta q_n]^\top$ para $q \in \{v, i_t, d, P_\ell\}$, o sistema transladado em torno do ponto de operação pode ser escrito como:

$$\delta \dot{i}_t = -L_t^{-1} \delta v - L_t^{-1} R_t \delta i_t + L_t^{-1} v_{dc} \delta d, \quad (5.29a)$$

$$\delta \dot{i} = -L^{-1} R \delta i + L^{-1} \mathcal{B}_e^\top \delta v, \quad (5.29b)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{v} = & C_t^{-1} \delta i_t - C_t^{-1} \mathcal{B}_e \delta i - C_t^{-1} Y \delta v \\ & + C_t^{-1} (v^o)^{-1} [v^o + \delta v]^{-1} P_\ell^o \delta v - C_t^{-1} [v^o + \delta v]^{-1} P_\ell, \end{aligned} \quad (5.29c)$$

onde as matrizes que descrevem os parâmetros físicos do sistema são:

$$\mathcal{Q} = \text{diag}(\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n), \quad \forall \mathcal{Q} \in \{C_t, L_t, R_t, Y, v_{dc}\}, \quad (5.30a)$$

$$L = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_m), \quad (5.30b)$$

$$R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_m). \quad (5.30c)$$

Assim, o modelo pode ser expresso no seguinte modelo quase-LPV:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_{11} & C_t^{-1} & -C_t^{-1} \mathcal{B}_e \\ -L_t^{-1} & -L_t^{-1} R_t & 0 \\ L^{-1} \mathcal{B}_e^\top & 0 & -L^{-1} R \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ L_t^{-1} v_{dc} \\ 0 \end{bmatrix} \delta d(t) + \begin{bmatrix} -C_t^{-1} \rho(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta P_\ell, \quad (5.31)$$

em que $x = [\delta v^\top, \delta i_t^\top, \delta i^\top]^\top$, $\rho(t) = [v^o + \delta v]^{-1}$ e $A_{11} = -C_t^{-1} Y + C_t^{-1} (v^o)^{-1} \rho(t)$.

Note que o sinal de controle $\delta d(t)$ está sujeito a saturação, pois o ciclo de trabalho do conversor *buck* é naturalmente limitado no intervalo $[0, 1]$. Portanto, considera-se que

$$\delta d(t) = \text{sat}(u(t)), \quad (5.32)$$

onde $u(t)$ é o sinal de controle livre. Os limites de saturação podem ser definidos como

$$\bar{u}_{(\ell)} = \min(d_\ell^o, 1 - d_\ell^o), \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_{\leq n}, \quad (5.33)$$

garantindo que o ciclo de trabalho permaneça dentro dos valores fisicamente admissíveis.

5.6.2 Resultados Numéricos

Esta seção apresenta os resultados de simulação para a microrrede CC formada por duas unidades DGs, cuja topologia é ilustrada na Figura 5.10. Considerando que as DGs estão conectadas por uma única linha, o sistema possui cinco estados dinâmicos, correspondentes às tensões nos capacitores dos filtros e

às correntes nos indutores, denotados por $x = [v_1, v_2, i_{t1}, i_{t2}, i_1]^\top$, dois sinais de controle representados pelos ciclos de trabalho $d = [d_1, d_2]^\top$ e duas potências das CPLs $P_\ell = [P_{\ell1}, P_{\ell2}]^\top$. Além disso, o modelo considera dois parâmetros variáveis

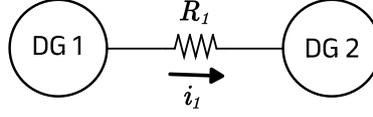


Figura 5.10: Topologia da microrrede CC utilizada nas simulações.

$\rho = [\rho_1, \rho_2]^\top$, relacionados às características dinâmicas da microrrede, conforme descrito pelo modelo quase-LPV em (5.31). As demais variáveis e parâmetros elétricos relevantes, incluindo resistências e indutâncias das linhas e filtros, bem como capacitâncias e condutâncias, estão resumidos na Tabela 5.1. O cenário analisado parte de um ponto de operação instável em malha aberta.

Tabela 5.1: Parâmetros da microrrede CC.

Parâmetro	Valor	Unidade
Resistência da linha R_1	0,50	Ω
Indutância da linha L_1	1,00	mH
Resistência dos filtros $R_{t,1}, R_{t,2}$	0,10	Ω
Indutâncias dos filtros $L_{t,1}, L_{t,2}$	1,00	mH
Capacitâncias dos filtros $C_{t,1}, C_{t,2}$	2,20	mF
Condutâncias Y_1, Y_2	0,20	S
Tensões de entrada $v_{dc,1}, v_{dc,2}$	15,00; 19,00	V
Matriz de incidência \mathcal{B}_e	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	–
Potências das CPLs $P_{\ell,1}, P_{\ell,2}$	15,00; 24,00	W
Tensões no PCC (PO) v_1^o, v_2^o	5,00; 9,00	V
Corrente na linha (PO) i_1^o	-8,00	A
Correntes nos filtros (PO) $i_{t,1}^o, i_{t,2}^o$	-4,00; 12,47	A
Ciclo de trabalho (PO) d_1^o, d_2^o	0,307; 0,539	–

As simulações foram realizadas em malha fechada considerando quatro esquemas de acionamento periódico baseado em eventos, SETM, DETM, SETM* e AETM, bem como controladores, cujos projetos seguem os resultados estabelecidos nos problemas de otimização 5.23 e 5.24, incluindo as condições de restrição de estados descritas no Teorema 4.7. Para o projeto dos controladores e ETMs, adotaram-se os parâmetros de período de amostragem $h = 1$ ms, $\nu = 10^{-3}$, $\gamma = 3 \times 10^{-5}$ (valor máximo admissível) e $\delta^{-1} = 10^{-4}$ (valor máximo admissível). Especificamente para

o DETM, considerou-se $\lambda = 10^2$, $\theta = 1$ e condição inicial $\eta(0) = 0$; para o SETM*, adotou-se $\sigma = 10^{-2}$; e para o AETM, os parâmetros foram $\tilde{\sigma} = 3210$ e condição inicial $\sigma(0) = 10^{-2}$, valor máximo de σ obtido no SETM*.

Para as simulações, optou-se por modelar a variação da potência das cargas CPL como um distúrbio de energia limitada, refletindo um pequeno desvio antes da estabilização no ponto de operação definido. Essa escolha fundamenta-se no limite máximo admissível para a energia do distúrbio, que foi determinado a partir das condições de factibilidade dos problemas de otimização utilizados no projeto dos ETMs e controladores. Para garantir a viabilidade do projeto, a energia máxima do distúrbio admissível é de 10^{-4} . Assim, definiu-se $\delta = 10^4$ e adotou-se o seguinte comportamento para o distúrbio aplicado às cargas:

$$P_{\ell,i}(t) = \exp(-8 \times 10^2 t) \sin(10^2 \pi t) \in \mathbb{W}_2(10^4), \quad i = 1, 2. \quad (5.34)$$

O modelo depende dinamicamente das tensões nos capacitores dos filtros, sendo necessário impor restrições aos estados para garantir que as trajetórias permaneçam dentro de limites apropriados. Para este estudo, adotou-se o conjunto limitado

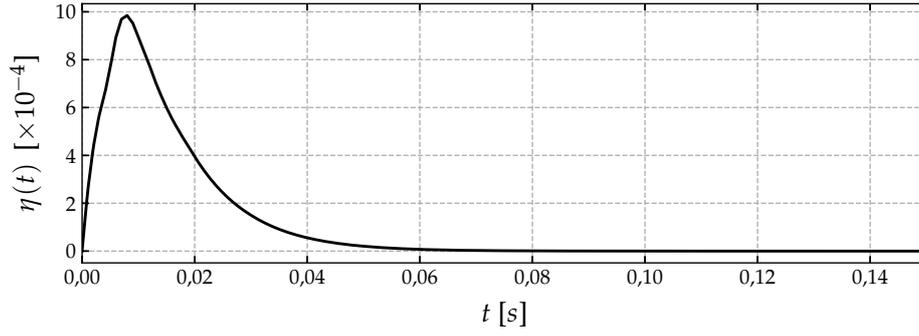
$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^5 : |v_1| \leq 3.5, \quad |v_2| \leq 3.5, \quad |i_{t1}| \leq 4, \quad |i_{t2}| \leq 4, \quad |i_1| \leq 3\}, \quad (5.35)$$

como uma escolha de projeto para garantir o comportamento esperado do sistema. Em decorrência dessa restrição nos estados, os parâmetros variantes $\rho_1(t)$ e $\rho_2(t)$ foram delimitados conforme

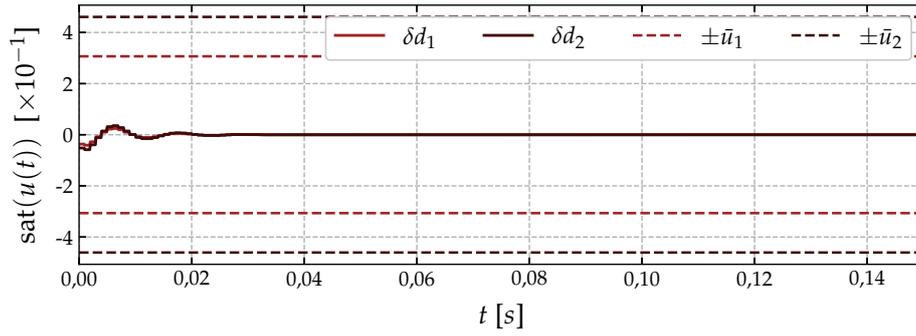
$$0,1176 \leq \rho_1(t) \leq 0,6667, \quad 0,0800 \leq \rho_2(t) \leq 0,1818. \quad (5.36)$$

O limite máximo admissível para a variação do erro de transmissão desses parâmetros, que assegura a viabilidade do projeto, foi fixado em $\bar{\rho} = [0,15, 0,15]$ para todos os esquemas avaliados. Ademais, as derivadas dos parâmetros foram restringidas ao intervalo $[-1, 1]$ e os estados iniciais $x(0) = [2,6 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^\top$. As entradas de controle também estão sujeitas a saturação, com limites dados por $\bar{u} = [0,3067, 0,5393]$.

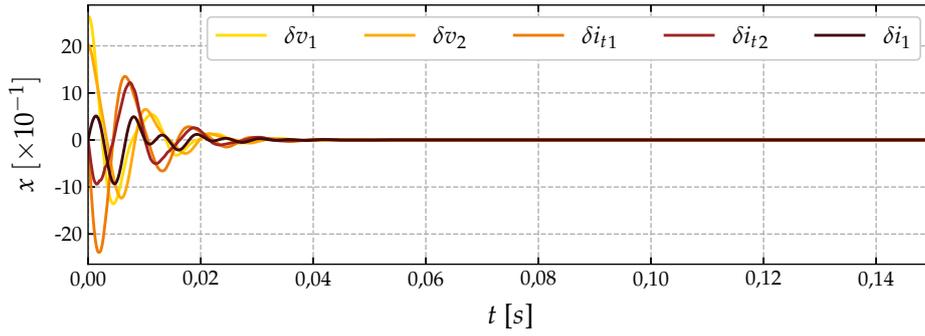
Note que todos os parâmetros ρ do sistema dependem dos estados internos



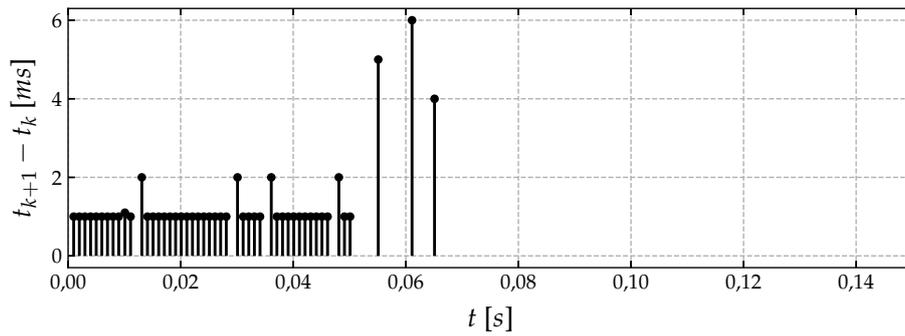
(a) Variável dinâmica do DETM.



(b) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.



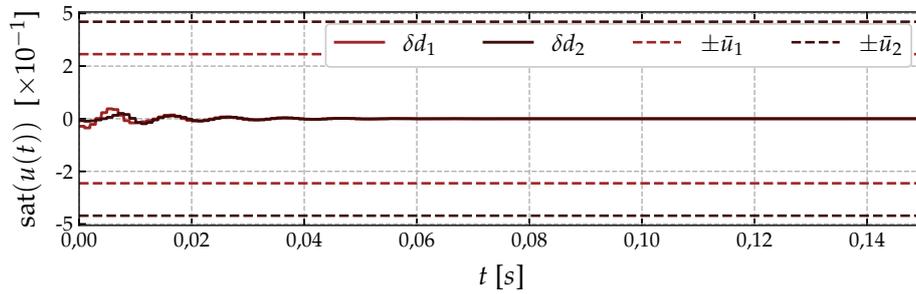
(c) Estados da planta $x(t)$.



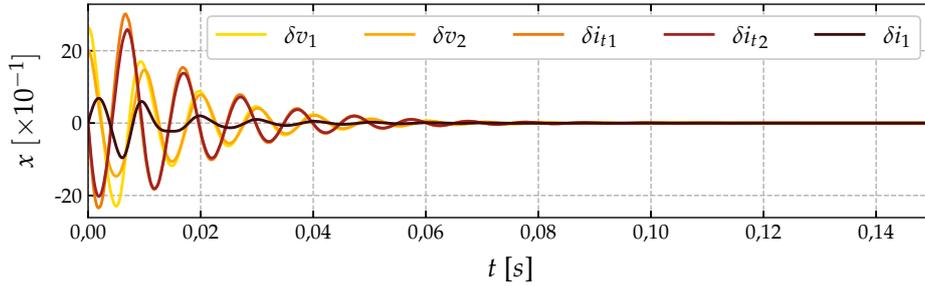
(d) Intervalo de tempo entre eventos.

Figura 5.11: Comportamento dos estados da microrrede CC sob o esquema DETM, incluindo o sinal de controle, a variável dinâmica η e os intervalos de tempo entre eventos. Não ocorreram eventos acionados pela condição $\diamond 2$.

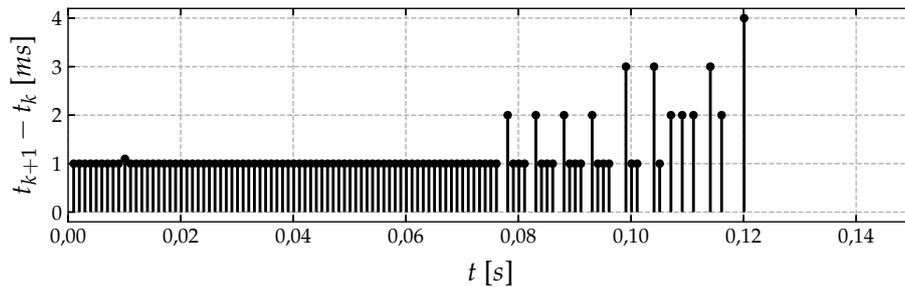
sob controle, o que implica que os parâmetros variantes da microrrede CC convergem para valores constantes no ponto de operação definido. Conseqüentemente, não ocorrem eventos de transmissão após a estabilização do sistema. O valor máximo admissível para a variação do erro de transmissão dos parâmetros, obtido no projeto dos ETMs e controlador, foi suficiente para evitar eventos provocados pelo fenômeno assíncrono. Observa-se que, em todos os resultados, os eventos de transmissão ocorreram exclusivamente devido à Condição 1, mesmo com a presença do fenômeno assíncrono.



(a) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.



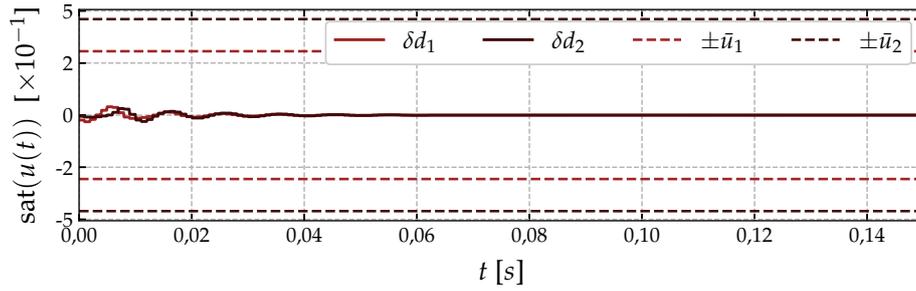
(b) Estados da planta $x(t)$.



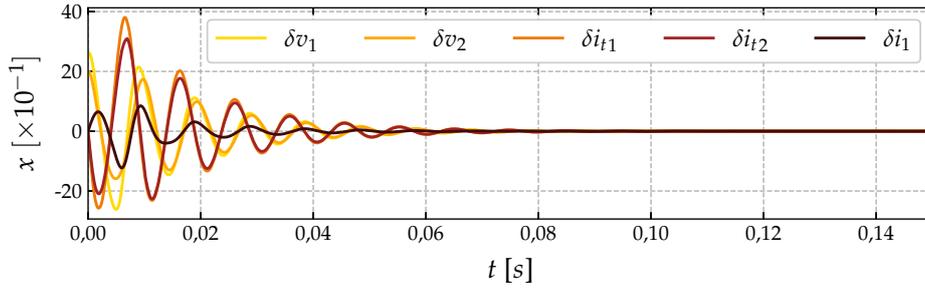
(c) Intervalo de tempo entre eventos.

Figura 5.12: Comportamento dos estados da microrrede CC sob o esquema SETM, incluindo o sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos. Não ocorreram eventos acionados pela condição $\diamond 2$.

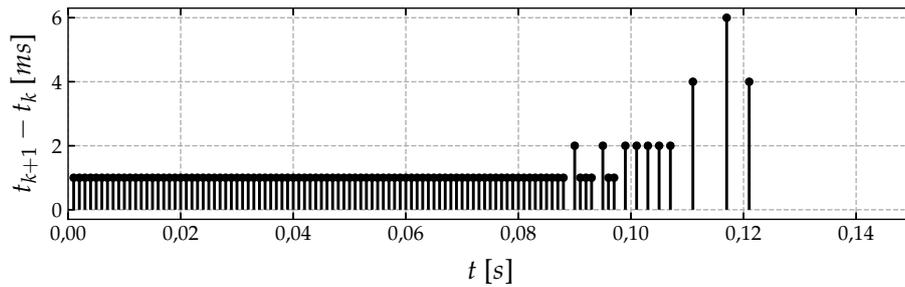
Quanto à convergência, todas as variáveis de estado da microrrede, assim como a variável dinâmica do DETM e os sinais de controle, convergiram. Não



(a) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.



(b) Estados da planta $x(t)$.

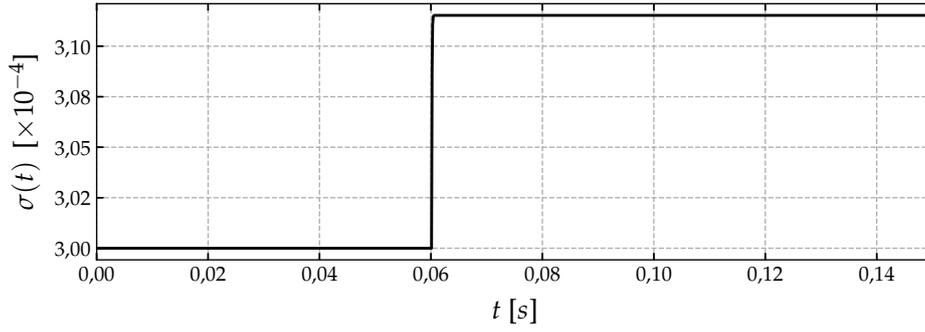


(c) Intervalo de tempo entre eventos.

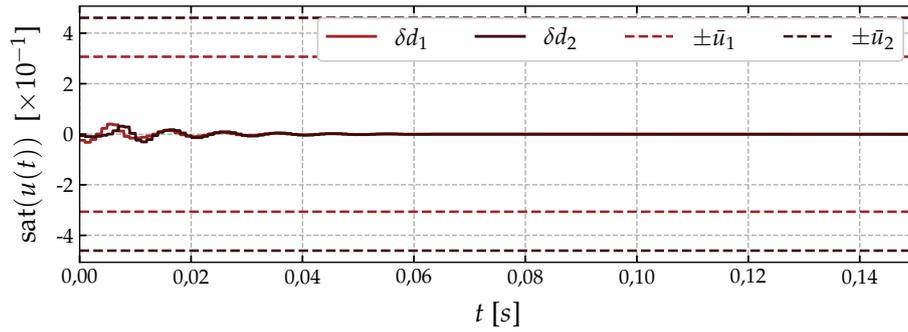
Figura 5.13: Comportamento dos estados da microrrede CC sob o esquema SETM*, incluindo o sinal de controle e os intervalos de tempo entre eventos. Não ocorreram eventos acionados pela condição $\diamond 2$.

houve saturação nos sinais de controle, os quais permaneceram dentro dos limites estabelecidos para os ciclos de trabalho conforme o ponto de operação. Sob os quatro esquemas, o comportamento do intervalo de tempo entre eventos assemelhou-se, em grande parte do tempo, ao de um controlador acionado por tempo, tornando-se aperiódicamente somente quando o sistema se aproximava do ponto de operação.

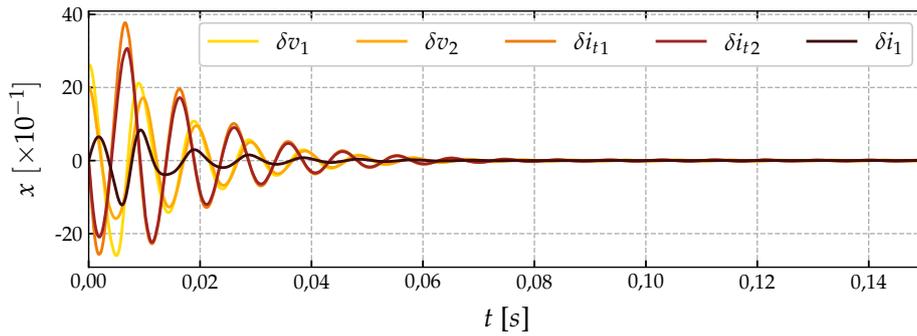
As trajetórias dos estados obedeceram às restrições impostas, com os estados sob os esquemas SETM* e AETM apresentando maiores amplitudes e um tempo de estabilização mais longo em comparação com o SETM e DETM. O DETM destacou-se por apresentar o menor número de eventos acionados e por cessar a ocorrência destes antes dos demais esquemas.



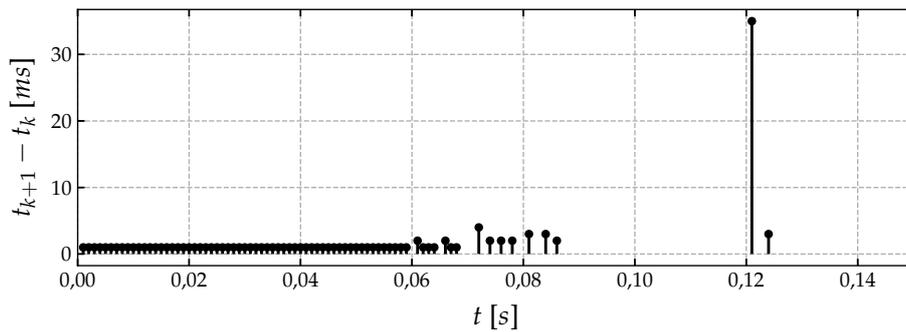
(a) Parâmetro do AETM.



(b) Sinal de controle saturado $\text{sat}(u(t))$.



(c) Estados da planta $x(t)$.



(d) Intervalo de tempo entre eventos.

Figura 5.14: Comportamento dos estados da microrrede CC sob o esquema AETM, incluindo o sinal de controle, o parâmetro σ e os intervalos de tempo entre eventos. Não ocorreram eventos acionados pela condição $\langle 2 \rangle$.

Tabela 5.2: Resumo dos resultados de simulação para os quatro esquemas de acionamento periódico baseado em eventos.

Parâmetro	DETM	SETM	SETM*	AETM
Número de eventos acionados	49	103	103	75
Menor intervalo entre eventos (ms)	1,0	1,0	1,0	1,0
Maior intervalo entre eventos (ms)	6,0	4,0	6,0	35,0
Média do intervalo entre eventos (ms)	1,3	1,2	1,2	1,7

Os resultados resumidos na Tabela 5.2 detalham as características do comportamento dos quatro esquemas de acionamento periódico baseado em eventos. Observa-se claramente as diferenças no número de eventos acionados, bem como nos intervalos mínimos, máximos e médios entre eventos, evidenciando as particularidades e eficiências de cada esquema ao longo da simulação.

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Considerações Finais

Esta dissertação apresentou um estudo sobre PETC aplicado a sistemas modelados por sistemas LPVs, no contexto de NCSs, com o objetivo de otimizar o uso da banda da rede de comunicação. A abordagem considerou explicitamente os efeitos de distúrbios de energia limitada e saturação dos atuadores, além da implementação de esquemas ETMs periódicos que evitam o fenômeno de Zenão, garantindo um intervalo mínimo de tempo entre os eventos de transmissão pela rede de comunicação.

Foram formulados e analisados quatro esquemas distintos de ETM, a saber: SETM, SETM*, AETM e DETM. Esses esquemas contemplam abordagens estáticas, adaptativas e dinâmicas. O trabalho focou na formulação de condições de co-projeto para controlador por ganhos escalonados e ETM, baseadas em problemas de otimização sujeitos a restrições LMIs, com o objetivo de garantir estabilidade em malha fechada, redução do número de eventos de transmissão e melhoria no desempenho do sistema segundo as estratégias propostas.

Como resultado principal, estabeleceram-se condições de estabilização para sistemas representados por modelos LPV politópicos sujeitos a atuadores saturantes e distúrbios com energia limitada. Essas condições, expressas em forma de LMIs, asseguram a estabilidade das trajetórias do sistema em malha fechada, garantindo que os estados permaneçam limitados na presença dos distúrbios e convirjam à origem quando estes cessam. Tal estabilidade é mantida mesmo sob controle saturante e em cenários com ou sem o fenômeno assíncrono dos parâmetros de escalonamento.

Além disso, foram definidos quatro esquemas periódicos de ETM que contemplam variações estáticas, adaptativas e dinâmicas. As condições de co-projeto desses esquemas foram formuladas para assegurar estabilidade e aprimoramento do desempenho. A formulação considerou detalhadamente os funcionais em *loop* para lidar com a amostragem dos estados e parâmetros, bem como a análise de cenários com e sem fenômeno assíncrono, culminando na formalização do problema de otimização associado.

Os resultados obtidos por meio de simulações numéricas demonstraram a eficácia dos esquemas DETM, SETM, SETM* e AETM na estabilização de sistemas com saturação e perturbações externas. Observou-se que a maximização do parâmetro γ , relacionado à redução do ganho induzido \mathcal{L}_2 , ampliou a região admissível dos estados iniciais, embora tenha ocasionado um aumento no número de eventos de transmissão pela rede de comunicação. Entre os esquemas avaliados, o SETM apresentou desempenho ligeiramente superior ao DETM, especialmente no que se refere aos valores ótimos do parâmetro β , enquanto os esquemas SETM* e AETM proporcionaram regiões admissíveis maiores, destacando-se o AETM por reduzir o número de transmissões em comparação ao SETM*.

As simulações confirmaram a validade das condições teóricas propostas, com as trajetórias do sistema permanecendo dentro das regiões de estabilidade estimadas e convergindo para a origem após a ação dos distúrbios cessar. Importante destacar que, apesar da presença de saturação em parte das regiões analisadas, o controle manteve a estabilidade \mathcal{L}_2 e respeitou os limites de saturação durante toda a operação. No contexto do DETM, a análise dos intervalos entre eventos evidenciou que os parâmetros do ETM influenciam diretamente no número de transmissões, ressaltando a necessidade de um ajuste cuidadoso para balancear desempenho e uso eficiente da rede de comunicação.

No cenário assíncrono, observou-se que, de forma semelhante ao caso síncrono, os esquemas DETM e SETM apresentaram resultados praticamente coincidentes para todo o intervalo de γ analisado, não sendo verificadas diferenças significativas nem no valor do traço das matrizes de acionamento nem nos valores ótimos de β . De modo análogo, os esquemas SETM* e AETM mantiveram comportamentos praticamente idênticos, ambos resultando em valores ótimos de β superiores aos

obtidos com DETM e SETM, preservando regiões de estados iniciais admissíveis consideravelmente maiores ao longo de toda a variação de γ . Além disso, as regiões admissíveis estimadas para o SETM* e AETM mostraram-se superiores às estimadas para o SETM e DETM.

As regiões estimadas de estados iniciais admissíveis no cenário assíncrono foram significativamente maiores do que no cenário síncrono, sendo a região do DETM superior à do SETM. As trajetórias simuladas confirmaram a estabilidade e convergência dos estados, com a maior parte das regiões fora da zona de saturação, indicando menor ocorrência de saturação no controle. A introdução da condição adicional de acionamento, dependente dos parâmetros variantes no tempo e relacionado ao assincronismo dos parâmetros, alterou fundamentalmente o comportamento dos intervalos entre eventos. Diferentemente do cenário síncrono, onde as transmissões sempre terminam com a convergência dos estados e da variável dinâmica (no caso do DETM), no cenário assíncrono os eventos persistem ao longo da simulação quando os parâmetros variam continuamente, mesmo após a estabilização dos estados, devido à ativação contínua da condição $\diamond 2$.

A análise quantitativa mostrou que, sob assincronismo dos parâmetros, o DETM gerou um número menor de eventos do que o SETM, mantendo o comportamento observado no cenário síncrono. O controle permaneceu dentro dos limites de saturação, sem períodos de saturação observados ao longo da simulação. Os esquemas SETM* e AETM destacaram-se por oferecerem regiões admissíveis maiores e desempenho comparável. No cenário assíncrono, o parâmetro $\sigma(t)$ do AETM convergiu para um valor constante superior ao do caso síncrono e, em ambos os cenários, apresentaram um comportamento equivalente a uma versão estática em grande parte do tempo. Os intervalos entre eventos indicaram que o AETM reduziu significativamente o número de transmissões em comparação ao SETM*, preservando a estabilidade e a convergência do sistema.

Nas simulações da microrrede CC, cujo modelo é quase-LPV, ou seja, com parâmetros dependentes dos estados internos do sistema, tornou-se necessário considerar o fenômeno assíncrono. Observou-se que os parâmetros do sistema convergiram para valores constantes no ponto de operação, o que resultou no término dos acionamentos dos eventos de transmissão após alguns instantes. Essa convergência

decorre do fato de que todos os parâmetros variam com os estados, que por sua vez tendem a estabilizar. Além disso, o valor máximo admissível para o erro de transmissão dos parâmetros que tornasse possível o projeto dos ETMs e dos controladores, foi suficiente para evitar acionamentos causados pelo fenômeno assíncrono. Dessa forma, as transmissões ocorreram exclusivamente em função da condição principal de acionamento. As variáveis de estado, a variável dinâmica do DETM e os sinais de controle apresentaram convergência dentro dos limites estabelecidos, sem ocorrência de saturação. Os intervalos entre eventos comportaram-se de forma semelhante a um controlador acionado por tempo durante a maior parte da simulação, tornando-se aperiódicos apenas ao se aproximar do ponto de operação. Os esquemas SETM* e AETM exibiram maiores amplitudes e tempos de estabilização mais longos em comparação ao SETM e DETM, sendo este último responsável pelo menor número de eventos e pelo encerramento antecipado das transmissões.

Em síntese, os resultados obtidos indicam que os quatro esquemas periódicos de controle acionado por eventos estudados apresentam comportamentos distintos nos cenários síncrono e assíncrono, exigindo adaptações na modelagem e no projeto para garantir eficiência e estabilidade diante da saturação e das perturbações. Apesar dessas diferenças, todos os esquemas demonstraram capacidade consistente de reduzir significativamente a demanda na rede em comparação a controladores acionados por tempo fixo, mantendo desempenho adequado do sistema. Vale ressaltar que a literatura não apresenta estudos que abordem simultaneamente controladores com ganho escalonado assíncrono, saturação, atenuação de distúrbios e estratégias de PETC. Essa lacuna justifica a ausência de comparações diretas com outras abordagens e reforça a relevância das condições de projeto propostas nesta dissertação, que integram ETMs para sistemas LPV politópicos sujeitos a restrições reais de atuadores e distúrbios.

6.2 Perspectivas Futuras

Como desdobramento natural das contribuições obtidas, identificam-se diversas possibilidades de aprofundamento e extensão desta pesquisa. Uma primeira possibilidade refere-se à proposição de novas leis adaptativas para o parâmetro do

ETM adaptativo, ampliando a capacidade de variação e controle do seu comportamento. Essa abordagem permitiria que o mecanismo respondesse de maneira mais sensível às condições operacionais, ajustando-se dinamicamente e otimizando o equilíbrio entre desempenho e economia de recursos de comunicação.

Vislumbra-se também a concepção de um esquema híbrido, denominado ETM dinâmico-adaptativo, que combine as características dos ETMs dinâmico e adaptativo em uma única formulação. Essa integração é viável, pois o ETM dinâmico introduz uma nova variável dinâmica na condição de acionamento, enquanto o ETM adaptativo ajusta parâmetros já existentes conforme o comportamento do sistema. Espera-se que essa combinação alcance desempenho superior ao obtido pelas versões individuais, aproveitando simultaneamente a flexibilidade do ajuste adaptativo e a riqueza de dinâmica adicional fornecida pelo esquema dinâmico.

Outra direção possível consiste em estender as condições de projeto apresentadas, originalmente formuladas para controladores por ganhos escalonados estáticos, para incluir controladores dinâmicos. Nesse contexto, pode-se investigar o uso de controladores com observadores, visando aprimorar a rejeição a distúrbios e a estimação de estados não mensuráveis, assim como formulações orientadas ao rastreamento de trajetória, ampliando o escopo de aplicação das estratégias.

Em paralelo, vislumbra-se o tratamento explícito de outros desafios característicos de NCSs não abordados neste trabalho, em particular os atrasos na comunicação e aspectos de segurança cibernética. No primeiro caso, as condições de co-projeto e os esquemas de acionamento podem ser adaptados para acomodar atrasos de sensoriamento, atuação e rede, preservando estabilidade e desempenho sob restrições realistas de comunicação. No segundo caso, podem ser explorados esquemas de PETC resilientes e critérios de acionamento que incorporem modelos de ataque e detecção de anomalias, garantindo integridade e continuidade da operação mesmo diante de falhas intencionais na comunicação ou tentativas de manipulação de dados.

Com a incorporação de condições mais realistas ao modelo e às estratégias propostas, um passo natural consiste na realização de experimentos práticos para avaliar seu desempenho em cenários próximos aos de aplicação real. Nesse contexto, uma possibilidade é implementar as estratégias desenvolvidas em plataformas em-

barcadas, integrando sensores e atuadores reais e conduzindo testes unitários dos módulos de controle e comunicação. Essa etapa permitiria a validação em bancada com dados obtidos de aplicações reais, fornecendo subsídios para ajustes finos e refinamentos das técnicas. Complementarmente, estudos comparativos com outras abordagens de controle disponíveis na literatura poderiam oferecer uma avaliação quantitativa do impacto das estratégias no desempenho, estabilidade e eficiência de comunicação, consolidando e ampliando a relevância científica das soluções investigadas.

Por fim, cabe ainda destacar que as condições de co-projeto apresentadas neste trabalho são formuladas como problemas de otimização convexa sujeitos a restrições na forma de LMIs. A complexidade computacional dessas formulações cresce significativamente com o número de parâmetros do modelo LPV, uma vez que a quantidade de LMIs aumenta exponencialmente com a dimensão do politopo. De forma análoga, a ordem das matrizes envolvidas nas restrições também se eleva com o número de estados dinâmicos, impactando diretamente o custo computacional. Além disso, tais problemas de otimização dependem não apenas das variáveis de decisão, mas também de parâmetros que devem ser previamente especificados, exigindo buscas iterativas para identificar combinações viáveis que satisfaçam todas as restrições. Esse processo pode introduzir instabilidades numéricas, aumento do tempo de cálculo, dificuldades de convergência e, em casos extremos, inviabilidade na obtenção de solução. Esses fatores tornam-se particularmente relevantes em aplicações de larga escala, nas quais a quantidade de parâmetros e estados é elevada, exigindo estratégias adicionais de redução de complexidade, pré-processamento ou decomposição do problema para viabilizar sua implementação prática.

Referências Bibliográficas

- [1] LI, C., ZHAO, X., WU, C., et al., “Periodic event-triggered dynamic output feedback control for networked control systems subject to packet dropouts”, *ISA Transactions*, v. 140, pp. 97–108, 2023.
- [2] QIU, L., XIANG, C., WEN, Y., et al., “Predictive output feedback control of networked control system with Markov DoS attack and time delay”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 33, n. 5, pp. 3376–3395, 2023.
- [3] YU, S., LI, J., TANG, Y., “Dynamic Output Feedback Control for Nonlinear Networked Control Systems with Random Packet Dropout and Random Delay”, *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2013, n. 1, pp. 820280, 2013.
- [4] COUTINHO, P. H., MOREIRA, L. G., PALHARES, R. M., “Event-triggered control of quasi-LPV systems with communication delays”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 32, n. 15, pp. 8689–8710, 2022.
- [5] MENG, C., WANG, T., CHOU, W., et al., “Remote surgery case: robot-assisted teleneurosurgery”. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004*, v. 1, pp. 819–823 Vol.1, 2004.
- [6] ZHAO, G., IMRAN, M. A., PANG, Z., et al., “Toward Real-Time Control in Future Wireless Networks: Communication-Control Co-Design”, *IEEE Communications Magazine*, v. 57, n. 2, pp. 138–144, 2019.

- [7] LI, W., XIE, Z., ZHAO, J., et al., “Velocity-based robust fault tolerant automatic steering control of autonomous ground vehicles via adaptive event triggered network communication”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 143, pp. 106798, 2020.
- [8] CHEN, C., LYU, L., ZHU, S., et al., “On-Demand Transmission for Edge-Assisted Remote Control in Industrial Network Systems”, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, v. 16, n. 7, pp. 4842–4854, 2020.
- [9] ZHANG, J., ZHANG, B., ZHANG, N., et al., “A novel robust event-triggered fault tolerant automatic steering control approach of autonomous land vehicles under in-vehicle network delay”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 31, n. 7, pp. 2436–2464, 2021.
- [10] MONTESTRUQUE, L., ANTSAKLIS, P., “Stability of model-based networked control systems with time-varying transmission times”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 49, n. 9, pp. 1562–1572, 2004.
- [11] LI, H., WU, C., YIN, S., et al., “Observer-Based Fuzzy Control for Nonlinear Networked Systems Under Unmeasurable Premise Variables”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 24, n. 5, pp. 1233–1245, 2016.
- [12] ISHII, H., FRANCIS, B. A., *Limited Data Rate in Control Systems with Networks*. 1st ed., v. 1. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer Berlin, Heidelberg: Berlin, Heidelberg, 2002, Published: 01 March 2002, eBook ISBN Published: 01 July 2003.
- [13] HESPANHA, J. P., NAGHSHTABRIZI, P., XU, Y., “A Survey of Recent Results in Networked Control Systems”, *Proceedings of the IEEE*, v. 95, n. 1, pp. 138–162, 2007.
- [14] ZHANG, X.-M., HAN, Q.-L., GE, X., et al., “Networked control systems: a survey of trends and techniques”, *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, v. 7, n. 1, pp. 1–17, 2020.
- [15] SUN, J., YANG, J., LI, S., et al., “Sampled-Data-Based Event-Triggered Active Disturbance Rejection Control for Disturbed Systems in Networked

- Environment”, *IEEE Transactions on Cybernetics*, v. PP, pp. 1–11, 12 2017.
- [16] DU, Z., KAO, Y., ZHAO, X., “An Input Delay Approach to Interval Type-2 Fuzzy Exponential Stabilization for Nonlinear Unreliable Networked Sampled-Data Control Systems”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, v. 51, n. 6, pp. 3488–3497, 2021.
- [17] DING, D., WANG, Z., HO, D. W., et al., “Distributed recursive filtering for stochastic systems under uniform quantizations and deception attacks through sensor networks”, *Automatica*, v. 78, pp. 231–240, 2017.
- [18] ROUAMEL, M., OLIVEIRA, L. A. L., BOURAHALA, F., et al., “Network Control Systems Design Under Deception Attacks With Dynamic Event-Triggering Mechanism”, *IEEE Control Systems Letters*, v. 7, pp. 3265–3270, 2023.
- [19] COUTINHO, P. H. S., BESSA, I., PESSIM, P. S., et al., “A switching approach to event-triggered control systems under denial-of-service attacks”, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, v. 50, pp. 101383, 2023.
- [20] HETEL, L., DAAFOUZ, J., IUNG, C., “Analysis and control of LTI and switched systems in digital loops via an event-based modelling”, *International Journal of Control*, v. 81, n. 7, pp. 1125–1138, 2008.
- [21] XU, Y., SEURET, A., LIU, K., et al., “Aperiodic dynamic event-triggered control for linear systems: A looped-functional approach”, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, v. 52, pp. 101444, 2024.
- [22] COUTINHO, P. H. S., *Dynamic event-triggered control of nonlinear systems: a quasi-LPV approach*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2021.
- [23] DOLK, V., HEEMELS, W., “Dynamic event-triggered control under packet losses: The case with acknowledgements”. In: *2015 International Conference on Event-based Control, Communication, and Signal Processing (EBCCSP)*, pp. 1–7, 2015.

- [24] HUANG, J., WANG, W., WEN, C., et al., “Adaptive Event-Triggered Control of Nonlinear Systems With Controller and Parameter Estimator Triggering”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 65, n. 1, pp. 318–324, 2020.
- [25] CHEN, Z., NIU, B., ZHAO, X., et al., “Model-Based adaptive event-Triggered control of nonlinear continuous-Time systems”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 408, pp. 126330, 2021.
- [26] QIAN, W., WU, Y., SHEN, B., “Novel Adaptive Memory Event-Triggered-Based Fuzzy Robust Control for Nonlinear Networked Systems via the Differential Evolution Algorithm”, *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, v. 11, n. 8, pp. 1836–1848, 2024.
- [27] GIRARD, A., “Dynamic Triggering Mechanisms for Event-Triggered Control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 60, n. 7, pp. 1992–1997, 2015.
- [28] ZHANG, Z., LIU, J., ZHANG, S., et al., “Dynamic Event-triggered Scheme and Output Feedback Control for CPS under Multiple Cyber Attacks”. In: *2021 IEEE 10th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS)*, pp. 299–303, 2021.
- [29] ABDELRAHIM, M., POSTOYAN, R., DAAFOUZ, J., et al., “Co-design of output feedback laws and event-triggering conditions for the L₂-stabilization of linear systems”, *Automatica*, v. 87, pp. 337–344, 2018.
- [30] MOREIRA, J. F. D., DA SILVA, J. G., PEIXOTO, M. L., et al., “Event-Based Control for Discrete-Time Linear Parameter-Varying Systems: An Emulation-Based Design”. In: *2024 UKACC 14th International Conference on Control (CONTROL)*, pp. 49–54, 2024.
- [31] NOORBAKHSI, S. M., GHASARI, J., “Event-based consensus in directed network topologies with linear dynamic agents”. In: *2015 International Conference on Event-based Control, Communication, and Signal Processing (ECCSP)*, pp. 1–8, 2015.

- [32] COUTINHO, P. H. S., PALHARES, R. M., “Codesign of Dynamic Event-Triggered Gain-Scheduling Control for a Class of Nonlinear Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 67, n. 8, pp. 4186–4193, 2022.
- [33] OGATA, K., *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Universidades, 2010.
- [34] SADEGHZADEH, A., SHARIF, B., TÓTH, R., “Affine linear parameter-varying embedding of non-linear models with improved accuracy and minimal overbounding”, *IET Control Theory & Applications*, v. 14, n. 20, pp. 3363–3373, 2020.
- [35] PING, X., WU, Z., ZHANG, Q., et al., “Sampled-data static output feedback robust MPC for LPV systems with bounded disturbances”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 361, n. 16, pp. 107171, 2024.
- [36] MEHENDALE, C., GRIGORIADIS, K., “Performance of LPV gain-scheduled systems”. In: *2006 American Control Conference*, pp. 6 pp.–, 2006.
- [37] WANG, R., TÓTH, R., MANCHESTER, I. R., “A Comparison of LPV Gain Scheduling and Control Contraction Metrics for Nonlinear Control”, *IFAC-PapersOnLine*, v. 52, n. 28, pp. 44–49, 2019.
- [38] LI, H., SUN, Z., CHOW, M.-Y., et al., “Gain-Scheduling-Based State Feedback Integral Control for Networked Control Systems”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 58, n. 6, pp. 2465–2472, 2011.
- [39] MASUBUCHI, I., KURATA, I., “Gain-scheduled control via filtered scheduling parameters”, *Automatica*, v. 47, n. 8, pp. 1821–1826, 2011.
- [40] DENG, J. Q., LI, H. B., HAO, C., et al., “Research on gain scheduling controller of the networked control system with long delay”, *International Journal of Control, Automation and Systems*, v. 13, n. 1, pp. 33–38, 2015.
- [41] BOYD, S., EL GHAOU, L., FERON, E., et al., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

- [42] YAN, S., SHEN, M., CHE, W.-W., et al., “Event-triggered non-fragile filtering of linear systems with a structure separated approach”, *IET Control Theory & Applications*, v. 11, n. 17, pp. 2977–2984, 2017.
- [43] PARK, I. S., EUN PARK, C., KWON, N. K., et al., “Dynamic output-feedback control for singular interval-valued fuzzy systems: Linear matrix inequality approach”, *Information Sciences*, v. 576, pp. 393–406, 2021.
- [44] KARAMI, H., MOBAYEN, S., LASHKARI, M., et al., “LMI-Observer-Based Stabilizer for Chaotic Systems in the Existence of a Nonlinear Function and Perturbation”, *Mathematics*, v. 9, n. 10, 2021.
- [45] TARBOURIECH, S., GARCIA, G., GOMES DA SILVA, J., et al., *Stability and Stabilization of Linear Systems With Saturating Actuators*. Springer, 2011.
- [46] BARTOSZEWICZ, A., *Robust Control*. IntechOpen: Rijeka, Apr 2011.
- [47] ÅSTRÖM, K. J., *Adaptive Control*. Springer Berlin Heidelberg: Berlin, Heidelberg, 1991.
- [48] XUE, W., HUANG, Y., “Performance analysis of active disturbance rejection tracking control for a class of uncertain LTI systems”, *ISA Transactions*, v. 58, pp. 133–154, 2015.
- [49] WU, G., SUN, L., LEE, K. Y., “Disturbance rejection control of a fuel cell power plant in a grid-connected system”, *Control Engineering Practice*, v. 60, pp. 183–192, 2017.
- [50] ZHU, Y., GUO, L., QIAO, J., et al., “An enhanced anti-disturbance attitude control law for flexible spacecrafts subject to multiple disturbances”, *Control Engineering Practice*, v. 84, pp. 274–283, 2019.
- [51] GUO, X.-G., ZHANG, D.-Y., WANG, J.-L., et al., “Observer-Based Event-Triggered Composite Anti-Disturbance Control for Multi-Agent Systems Under Multiple Disturbances and Stochastic FDIAs”, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, v. 20, n. 1, pp. 528–540, 2023.

- [52] PENG, C., LI, F., “A survey on recent advances in event-triggered communication and control”, *Information Sciences*, v. 457-458, pp. 113–125, 2018.
- [53] LISBÔA, C., FLORES, J., MOREIRA, L., et al., “Periodic Event-Triggered Control for Stabilization of Lur’e Systems Under Saturating Actuators”. In: *2024 European Control Conference (ECC)*, pp. 974–979, 2024.
- [54] HEEMELS, W. P. M. H., DONKERS, M. C. F., TEEL, A. R., “Periodic Event-Triggered Control for Linear Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 58, n. 4, pp. 847–861, 2013.
- [55] JIANG, B., LU, J., LIU, Y., et al., “Periodic Event-Triggered Adaptive Control for Attitude Stabilization under Input Saturation”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 67, n. 1, pp. 249 – 258, 2020, Cited by: 63.
- [56] PEIXOTO, M. L. C., PESSIM, P. S. P., COUTINHO, P. H. S., et al., “Event-Triggered Control for LPV Systems Under Hybrid Cyberattacks”, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 35, n. 2, pp. 252–265, 2024.
- [57] PEIXOTO, M. L. C., COUTINHO, P. H. S., BESSA, I., et al., “Event-triggered control of Takagi-Sugeno fuzzy systems under deception attacks”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 33, n. 13, pp. 7471–7487, 2023.
- [58] PANG, N., ZHANG, D., ZHU, S., “Asynchronous gain-scheduled control of deepwater drilling riser system with hybrid event-triggered sampling and unreliable communication”, *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, v. 25, n. 2, pp. 272–285, Feb 2024.
- [59] QI, Y., TANG, Y., ZHAO, X., et al., “Dual Event-Triggered Control for Asynchronous Scheduling Parameter Varying Networked Switched Systems Under DoS Attacks”, *IEEE Systems Journal*, v. 17, n. 4, pp. 5854–5865, 2023.

- [60] WU, C., ZHAO, X., ZHAO, N., et al., “Periodic and Dynamic Periodic Event-Triggered Control for Nonlinear Cyber-Physical Systems Under DoS Attacks via a Hybrid System Approach”, *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL OF NETWORK SYSTEMS*, v. 11, n. 1, pp. 221–232, MAR 2024.
- [61] VINOD, D., ZHOU, J., “Event-Triggered and Self-Triggered Control for Discrete Polytopic Linear Parameter-Varying Systems with Exogenous Inputs”. In: *2024 IEEE 33rd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, pp. 1–6, 2024.
- [62] DENG, C., CHE, W.-W., WU, Z.-G., “A Dynamic Periodic Event-Triggered Approach to Consensus of Heterogeneous Linear Multiagent Systems with Time-Varying Communication Delays”, *IEEE Transactions on Cybernetics*, v. 51, n. 4, pp. 1812 – 1821, 2021, Cited by: 170.
- [63] SUN, J., YANG, J., ZHENG, W. X., et al., “Periodic Event-Triggered Control for a Class of Nonminimum-Phase Nonlinear Systems Using Dynamic Triggering Mechanism”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 69, n. 3, pp. 1302–1311, 2022.
- [64] WANG, J., SUN, J., YANG, J., et al., “Periodic Event-Triggered Model Predictive Control for Networked Nonlinear Uncertain Systems With Disturbances”, *IEEE Transactions on Cybernetics*, v. 54, n. 12, pp. 7501–7513, 2024.
- [65] SUN, J., ZENG, Z., “Periodic Event-Triggered Control for Networked Control Systems With External Disturbance and Input and Output Delays”, *IEEE Transactions on Cybernetics*, v. 53, n. 10, pp. 6386–6394, 2023.
- [66] QI, W.-L., WANG, R., YANG, M.-S., et al., “Data-driven dynamic periodic event-triggered control for unknown linear systems: A hybrid system approach”, *Systems & Control Letters*, v. 199, pp. 106067, 2025.
- [67] WANG, C., FU, Y., FAN, X., “Adaptive periodic event-triggered control for switched p-normal nonlinear systems via output feedback”, *International Journal of Systems Science*, pp. 1–13, 2025.

- [68] DEMIR, C., DIAGNE, M., KRSTIC, M., “Periodic Event-Triggered Boundary Control of Neuron Growth with Actuation at Soma”. In: *2024 IEEE 63rd Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 434–439, 2024.
- [69] ABDELRAHIM, M., ALMAKHLES, D., “Output-Based Dynamic Periodic Event-Triggered Control with Application to the Tunnel Diode System”, *Journal of Sensor and Actuator Networks*, v. 12, n. 5, 2023.
- [70] FU, A., QIAO, J., “Periodic decentralized event-triggered control for nonlinear systems with asynchronous update and dynamic quantization”, *Nonlinear Dynamics*, v. 109, pp. 877–890, 2022.
- [71] STRIJBOSCH, N., DULLERUD, G. E., TEEL, A. R., et al., “ \mathcal{L}_2 -Gain Analysis of Periodic Event-Triggered Control and Self-Triggered Control Using Lifting”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 66, n. 8, pp. 3749–3756, 2021.
- [72] ZHANG, E., WANG, J., WANG, X., et al., “Periodic event-triggered robust trajectory tracking control for underactuated unmanned surface vehicle without velocity measurement”, *ISA Transactions*, 2025.
- [73] ZHANG, X., WEI, J., ZHU, X.-L., et al., “Periodic event-triggered control for networked T-S fuzzy systems with packet losses and delays”, *Fuzzy Sets and Systems*, v. 518, pp. 109503, 2025.
- [74] XU, Z., ZHAO, J., QIAN, J., et al., “Nonlinear MPC using an identified LPV model”, *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 48, n. 6, pp. 3043 – 3051, 2009, Cited by: 79.
- [75] QIU, W., VITTAL, V., KHAMMASH, M., “Decentralized power system stabilizer design using linear parameter varying approach”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 19, n. 4, pp. 1951 – 1960, 2004, Cited by: 79.
- [76] ROTONDO, D., NEJJARI, F., PUIG, V., “Robust quasi-LPV model reference FTC of a quadrotor UAV subject to actuator faults”, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, v. 25, n. 1, pp. 7 –

22, 2015, Cited by: 75; All Open Access, Gold Open Access, Green Open Access.

- [77] WANG, R., ZHANG, H., WANG, J., et al., “Robust lateral motion control of four-wheel independently actuated electric vehicles with tire force saturation consideration”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 352, n. 2, pp. 645 – 668, 2015, Cited by: 81.
- [78] JIANG, J., YANG, J., WANG, X., et al., “Stability and Robustness Analysis and Optimization for Gain-Scheduled Control of Aero-Engines”, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, v. 146, n. 12, 2024, Cited by: 0.
- [79] FLEISCHMANN, S., THEODOULIS, S., LAROCHE, E., et al., “Controller design point selection for linearized gain scheduling”. In: *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1574–1579, 2017, Cited by: 3.
- [80] BERNAL, M., SALA, A., LENDEK, Z., et al., *Analysis and Synthesis of Non-linear Control Systems: A Convex Optimisation Approach*. Springer International Publishing, 2022.
- [81] TABUADA, P., “Event-Triggered Real-Time Scheduling of Stabilizing Control Tasks”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 9, pp. 1680–1685, 2007.
- [82] ABDULLAH, A., ZRIBI, M., “Model reference control of LPV systems”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 346, pp. 854–871, 11 2009.
- [83] LYAPUNOV, A. M., *The General Problem of the Stability of Motion*. Kharkov Mathematical Society: Russia, 1892.
- [84] KHALIL, H. K., *Nonlinear systems*. 3rd ed. Prentice Hall: New Jersey, 2002.
- [85] GAHINET, P., APKARIAN, P., “A linear matrix inequality approach to Hinf control”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 4, n. 4, pp. 421–448, 1994.

- [86] WANG, H. O., TANAKA, K., GRIFFIN, M. F., “An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 4, n. 1, pp. 14 – 23, 1996, Cited by: 2444.
- [87] SCHERER, C., GAHINET, P., CHILALI, M., “Multiobjective output-feedback control via LMI optimization”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 7, pp. 896 – 911, 1997, Cited by: 2190; All Open Access, Green Open Access.
- [88] YUE, D., HAN, Q.-L., PENG, C., “State Feedback Controller Design of Networked Control Systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, v. 51, n. 11, pp. 640 – 644, 2004, Cited by: 835; All Open Access, Green Open Access.
- [89] HOFFMANN, C., WERNER, H., “A Survey of Linear Parameter-Varying Control Applications Validated by Experiments or High-Fidelity Simulations”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 23, n. 2, pp. 416–433, 2015.
- [90] CHEN, J., PARK, J. H., XU, S., et al., “A survey of inequality techniques for stability analysis of time-delay systems”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 32, n. 11, pp. 6412–6440, 2022.
- [91] GILL, P. E., MURRAY, W., SAUNDERS, M. A., “SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization”, *SIAM Review*, v. 47, n. 1, pp. 99 – 131, 2005, Cited by: 2076.
- [92] HENRION, D., “LMIS for Linear Systems Control by Polynomial Methods¹”, *IFAC Proceedings Volumes*, v. 33, n. 14, pp. 733–738, 2000, 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2000), Prague, Czech Republic, 21-23 June 2000.
- [93] SCHUR, I., “Potenzreihen in innern des Einheitskreises”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 147, pp. 205–232, 1917.

- [94] HE, W., LV, S., PENG, C., et al., “Improved leaderless consensus criteria of networked multi-agent systems based on the sampled data”, *International Journal of Systems Science*, v. 49, n. 13, pp. 2737–2752, 2018.
- [95] CHEN, Y., ZHENG, W. X., XUE, A., “A new result on stability analysis for stochastic neutral systems”, *Automatica*, v. 46, n. 12, pp. 2100–2104, 2010.
- [96] FINSLER, P., “Über das Vorkommen definitiver und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, v. 9, n. 1, pp. 188–192, 1936.

Apêndice A

Teoremas e Lemas Úteis

A.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

A estabilidade de sistemas dinâmicos é um conceito fundamental, cuja análise pode ser conduzida por diferentes abordagens. A estabilidade entrada-saída e a estabilidade Entrada-Limitada Saída-Limitada (BIBO, do inglês *Bounded-Input Bounded-Output*) avaliam a relação entre as entradas e saídas do sistema, enquanto a estabilidade entrada-estado considera a evolução dos estados internos. Essas abordagens são amplamente utilizadas em sistemas lineares invariantes no tempo. Por outro lado, a estabilidade no sentido de Lyapunov se destaca por sua aplicabilidade a sistemas não lineares, sejam eles autônomos ou não autônomos. Os métodos de Lyapunov [83], desenvolvidos em 1892, fornecem uma estrutura teórica rigorosa para a caracterização da estabilidade de pontos de equilíbrio, permitindo classificá-los como estáveis, instáveis ou assintoticamente estáveis.

Seja a dinâmica de um sistema representada pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t)), \quad (\text{A.1})$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa o vetor de estados dinâmicos, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entradas controláveis, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ corresponde ao vetor de distúrbios, e $f : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}^{n_x}$ é um mapeamento Lipschitz local definido no domínio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x+n_u+n_w}$, ou seja, de $x(t)$, $u(t)$ e $w(t)$ para $\dot{x}(t)$.

A estabilidade de um sistema dinâmico, no sentido de Lyapunov, é analisada

em relação aos seus pontos de equilíbrio x_{eq} . Considerando que o ponto de equilíbrio do sistema esteja na origem, isto é, $x_{\text{eq}} = 0$, a estabilidade pode ser definida da seguinte forma:

Como qualquer ponto de equilíbrio pode ser trasladado para a origem por meio de uma mudança de variáveis, essa definição não implica perda de generalidade. Assim, para demonstrar a estabilidade do ponto de equilíbrio, deve-se determinar um valor δ , possivelmente dependente de ϵ , de modo que qualquer trajetória iniciada dentro da vizinhança δ da origem permaneça dentro da vizinhança ϵ ao longo do tempo.

Definição A.1 ([84]) *O ponto de equilíbrio $x_o = 0$ é classificado como:*

(i) *Estável, se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que:*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) *Instável, caso não satisfaça a condição de estabilidade.*

(iii) *Assintoticamente estável, se for estável e δ puder ser escolhido de forma que:*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Em 1892, Lyapunov [83] demonstrou que certas funções continuamente diferenciáveis $\mathcal{V} : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}$, definidas no domínio \mathbb{D} que contém a origem, podem ser utilizadas para determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio. A derivada de \mathcal{V} ao longo da trajetória do sistema dinâmico f é dada por:

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(x, u, w). \quad (\text{A.2})$$

Se $\varphi(t; x)$ representa a solução do sistema com condição inicial x_0 no instante $t = 0$, então:

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{V}(\varphi(t; x)) \right|_{t=0}. \quad (\text{A.3})$$

Assim, se $\dot{\mathcal{V}}(x)$ for negativa, a função $\mathcal{V}(x)$ decresce ao longo das trajetórias do sistema, indicando uma tendência de estabilidade. Com base nesse princípio, o teorema de estabilidade de Lyapunov pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema A.1 ([84]) *Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio de $f(x)$ e considere um domínio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x+n_u+n_w}$ contendo a origem. Suponha que exista uma função continuamente diferenciável $\mathcal{V} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$\mathcal{V}(0) = 0, \quad \mathcal{V}(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{D} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.5})$$

Então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ é estável. Além disso, se:

$$\dot{\mathcal{V}}(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.6})$$

então $x = 0$ é assintoticamente estável. Caso essas condições não sejam satisfeitas, não é possível concluir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio.

Definição A.2 *Uma função $\mathcal{V} : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}$ é denominada função de Lyapunov se satisfizer as condições do Teorema A.1. Além disso, a superfície de nível definida por $\mathcal{V}(x) = c$, para qualquer $c \in \mathbb{R}_{>0}$, é chamada de curva de nível de Lyapunov.*

Devido à sua eficácia, o conceito de função de Lyapunov, apresentado na Definição A.2, tornou-se uma ferramenta fundamental para a análise da estabilidade de sistemas dinâmicos, permitindo estabelecer condições matemáticas para a classificação de pontos de equilíbrio.

Uma classe de funções escalares cuja determinação de sinal pode ser realizada de forma simples é a das funções quadráticas, representadas por:

$$\mathcal{V}(x) = x^\top P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j, \quad (\text{A.7})$$

onde P é uma matriz real simétrica.

Com base nisso, a função \mathcal{V} e a matriz simétrica P podem ser classificadas de acordo com seus sinais, conforme a seguinte definição:

Definição A.3 *A classificação de $\mathcal{V}(x)$ e das matrizes que compõem funções de Lyapunov quadráticas é dada por:*

(i) *Definida positiva / Matriz positiva definida:*

- $\mathcal{V}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.
- Uma matriz simétrica real $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é positiva definida, denotada por $P \succ 0$, se todos os seus autovalores forem positivos. Equivalentemente, isso ocorre se todos os menores principais de P forem positivos.

(ii) *Semidefinida positiva / Matriz positiva semidefinida:*

- $\mathcal{V}(x) \geq 0$ para todo $x \neq 0$.
- A matriz P é positiva semidefinida, denotada por $P \succeq 0$, se todos os seus autovalores forem não negativos ou, de forma equivalente, se todos os menores principais forem não negativos.

(iii) *Definida negativa / Matriz negativa definida:*

- $-\mathcal{V}(x)$ é definida positiva, ou seja, $\mathcal{V}(0) = 0$ e $\mathcal{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$.
- A matriz P é negativa definida, denotada por $P \prec 0$, se $-P$ for positiva definida.

(iv) *Semidefinida negativa / Matriz negativa semidefinida:*

- $-\mathcal{V}(x)$ é semidefinida positiva, isto é, $\mathcal{V}(x) \leq 0$ para todo $x \neq 0$.
- A matriz P é negativa semidefinida, denotada por $P \preceq 0$, se $-P$ for positiva semidefinida.

(v) *Indefinida:*

- $\mathcal{V}(x)$ não se enquadra em nenhuma das classificações anteriores.
- A matriz P possui autovalores positivos e negativos.

No contexto das funções quadráticas da forma $\mathcal{V}(x) = x^\top P x$, a definição do sinal da matriz P determina a positividade ou negatividade da função $\mathcal{V}(x)$, sendo essencial para a aplicação do método de Lyapunov na análise de estabilidade. Dessa forma, a origem do sistema é estável se existir uma função de Lyapunov definida positiva e continuamente diferenciável, tal que $\dot{\mathcal{V}}(x)$ seja semidefinida negativa. Além disso, a estabilidade assintótica é garantida quando $\dot{\mathcal{V}}(x)$ é definida negativa.

A.2 Desigualdades Matriciais Lineares

As LMIs são essenciais na teoria de controle, permitindo a modelagem e solução eficiente de uma ampla gama de problemas, como estabilidade, desempenho e síntese de controladores [85–90]. Elas representam restrições complexas em termos de desigualdades entre matrizes, sendo aplicáveis a sistemas lineares e não lineares, com incertezas e em análise de desempenho. Além disso, as LMIs podem ser resolvidas de maneira eficiente por métodos de otimização convexa, oferecendo soluções rápidas para problemas que, de outra forma, exigiriam abordagens analíticas mais complexas [91, 92]. Essas características fazem das LMIs uma ferramenta poderosa para garantir robustez e desempenho em sistemas de controle.

Os métodos de Lyapunov, amplamente utilizados na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos, foram expandidos para possibilitar a formulação de LMIs, fornecendo uma base teórica robusta para a resolução de problemas de otimização e controle. Essa extensão facilita tanto a análise quanto a síntese de sistemas complexos, oferecendo uma estrutura matemática eficiente e sistemática. A condição de estabilidade de Lyapunov, $A^\top P + PA < 0$, representa uma forma específica de LMI e foi a primeira a ser aplicada na análise da estabilidade de sistemas dinâmicos descritos por $\dot{x}(t) = Ax(t)$ e a função de Lyapunov $\mathcal{V}(x(t)) = x^\top(t)Px(t)$ [83]. Na década de 1940, pesquisadores como Lur'e e Postnikov empregaram esses métodos para sistemas com não-linearidades, e nos anos 1960, o desenvolvimento de métodos gráficos tornou a resolução das LMIs mais acessível, ampliando seu alcance para sistemas mais complexos e inaugurando a computação das LMIs [41].

O conceito formal de uma LMI, definido por Boyd *et al.* [41], é apresentado a seguir.

Definição A.4 ([41]) *Uma LMI é expressa pela equação*

$$\mathcal{F}(x) \triangleq \mathcal{F}_0 + \sum_{i=1}^m (x_i \mathcal{F}_i) \succ 0, \quad (\text{A.8})$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$ é a variável e as matrizes simétricas $\mathcal{F}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$, são constantes. O símbolo de desigualdade indica que $\mathcal{F}(x)$ é definida positiva e $\mathcal{F}(x)$ é afim em relação às variáveis x_i . Além disso, existem LMIs não estritas, represen-

tadas pela forma

$$\mathcal{F}(x) \succeq 0. \quad (\text{A.9})$$

As LMIs permitem transformar problemas complexos, como alocação robusta de polos e estabilização por realimentação de saída, em restrições convexas. Essa conversão é crucial, pois problemas de controle frequentemente envolvem condições de estabilidade não convexas, que são difíceis de resolver diretamente. As LMIs oferecem uma abordagem sistemática para contornar essa dificuldade, possibilitando a modelagem de uma ampla gama de restrições convexas, incluindo desigualdades lineares, quadráticas e de norma de matriz. Além disso, elas são especialmente úteis para lidar com condições encontradas na teoria de controle, como desigualdades matriciais quadráticas convexas e condições de Lyapunov, que são fundamentais para garantir a estabilidade de sistemas dinâmicos.

A.3 Desigualdades Integrais

A desigualdade de Wirtinger é uma ferramenta integral que permite estabelecer limites para integrais quadráticas de derivadas de funções, podendo o conservadorismo em análises envolvendo atrasos e sistemas dinâmicos.

Lema A.1 (Desigualdade de Wirtinger [22]) *Seja $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica definida positiva. Para toda função diferenciável contínua $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$(b - a) \int_a^b \dot{\omega}^\top(s) R \dot{\omega}(s) ds \succeq (\omega(b) - \omega(a))^\top R (\omega(b) - \omega(a)) + 3\tilde{\Omega}^\top R \tilde{\Omega}, \quad (\text{A.10})$$

onde $\tilde{\Omega} = \omega(b) + \omega(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \omega(s) ds$.

O Lema A.2 ilustra como desigualdades integrais podem ser utilizadas na análise de funcionais de Lyapunov do tipo integral. Nesse contexto, tais desigualdades permitem substituir integrais por expressões mais simples de manipular, possibilitando a formulação de condições matriciais adequadas para estudo de estabilidade e desempenho.

Lema A.2 *Sejam $h \in \mathbb{R}_{>0}$, $R \in \mathbb{S}_{>0}^{n_x}$, $S_1, Q_1 \in \mathbb{S}^{n_x}$, $S_2, S_4, Q_2, Q_4, X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $S_3, Q_3 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $M \in \mathbb{S}^{2n_x + n_u}$, $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ e a função $\mathcal{V} : [0, h) \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por*

$$\mathcal{V}(\tau, x_s(\tau)) = (\tau - h) [\mathcal{V}_1(x_s(\tau)) + \mathcal{V}_2(\tau, x_s(\tau)) + \mathcal{V}_3(\tau, x_s(\tau))], \quad (\text{A.11})$$

onde:

$$\mathcal{V}_1(x_s(\tau)) = \xi_s^\top(\tau) [S_1 \xi_s(\tau) + 2S_2 x_s(0) + 2S_3 \psi_s(0) + 2S_4 \varepsilon_s(0)], \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{V}_2(\tau, x_s(\tau)) = \tau \chi_s^\top(\tau) [Q_1 \chi_s(\tau) + 2Q_2 x_s(0) + 2Q_3 \psi_s(0) + 2Q_4 \varepsilon_s(0)], \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{V}_3(\tau, x_s(\tau)) = \tau \varpi_s^\top(0) M \varpi_s(0) + \int_0^\tau \dot{x}_s^\top(v) R \dot{x}_s(v) dv, \quad (\text{A.14})$$

com $\xi_s(\tau) = x_s(\tau) - x_s(0)$, $\chi_s(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x_s(v) dv$, $\varpi_s(0) = [x_s^\top(0) \quad \psi_s^\top(0) \quad \varepsilon_s^\top(0)]^\top$, $\Omega = \xi_s(\tau) - 2\chi_s(\tau)$, $\Pi = [\xi_s^\top(\tau) \quad \Omega^\top]^\top$, $\mathcal{R} = \text{diag}(R, 3R)$. Então, a derivada total de $\mathcal{V}(\tau, x_s(\tau))$ em relação a τ satisfaz:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(\tau, x_s(\tau)) &\leq -\xi_s^\top(\tau) [S_1 \xi_s(\tau) + 2S_2 x_s(0) + 2S_3 \psi_s(0) + 2S_4 \varepsilon_s(0)] - \tau \chi_s^\top(\tau) [2Q_2 x_s(0) \\ &\quad + 2Q_3 \psi_s(0) + 2Q_4 \varepsilon_s(0)] - h \chi_s^\top(\tau) Q_1 \chi_s(\tau) + (h - \tau) x_s^\top(\tau) [2Q_1 \chi_s(\tau) + 2Q_2 x_s(0) \\ &\quad + 2Q_3 \psi_s(0) + 2Q_4 \varepsilon_s(0)] + (h - 2\tau) \varpi_s^\top(0) M \varpi_s(0) + (h - \tau) \dot{x}_s^\top(\tau) R \dot{x}_s(\tau) - \mathcal{Y}^\top \Pi \\ &\quad - \Pi^\top \mathcal{Y} + \tau \mathcal{Y}^\top \mathcal{R}^{-1} \mathcal{Y} + (h - \tau) [\dot{x}_s(\tau) [S_1 \xi_s(\tau) + 2S_2 x_s(0) + 2S_3 \psi_s(0) + 2S_4 \varepsilon_s(0)] \\ &\quad + \xi_s^\top(\tau) S_1 \dot{x}_s(\tau)] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Demonstração. Aplicando a regra do produto na função $\mathcal{V}(\tau, x_s(\tau))$ definida em (A.11), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(\tau, x_s(\tau)) &= (\mathcal{V}_1(x_s(\tau)) + \mathcal{V}_2(\tau, x_s(\tau)) + \mathcal{V}_3(\tau, x_s(\tau))) \\ &\quad + (\tau - h) \left(\dot{\mathcal{V}}_1(x_s(\tau)) + \dot{\mathcal{V}}_2(\tau, x_s(\tau)) + \dot{\mathcal{V}}_3(\tau, x_s(\tau)) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

As expressões das derivadas parciais são:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}_3(\tau, x_s(\tau)) &= \varpi_s^\top(0)M\varpi_s(0) + \tau\dot{x}_s^\top(\tau)R\dot{x}_s(\tau) + \int_0^\tau \dot{x}_s^\top(v)R\dot{x}_s(v) dv, \\ \dot{\mathcal{V}}_2(\tau, x_s(\tau)) &= x_s^\top(\tau)\Theta + \chi_s^\top(\tau)Q_1x_s(\tau) - \chi_s^\top(\tau)Q_1\chi_s(\tau), \\ \dot{\mathcal{V}}_1(x_s(\tau)) &= \dot{x}_s^\top(\tau) [S_1\xi_s(\tau) + 2S_2x_s(0) + 2S_3\psi_s(0) + 2S_4\varepsilon_s(0)] + \xi_s^\top(\tau)S_1\dot{x}_s(\tau),\end{aligned}$$

com $\Theta = Q_1\chi_s(\tau) + 2Q_2x_s(0) + 2Q_3\psi_s(0) + 2Q_4\varepsilon_s(0)$. A substituição dessas expressões em $\dot{\mathcal{V}}$ resulta:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}(\tau, x_s(\tau)) &= -\xi_s^\top(\tau) [S_1\xi_s(\tau) + 2S_2x_s(0) + 2S_3\psi_s(0) + 2S_4\varepsilon_s(0)] - \tau\chi_s^\top(\tau)[Q_1\chi_s(\tau) \\ &\quad + 2Q_2x_s(0) + 2Q_3\psi_s(0) + 2Q_4\varepsilon_s(0)] - \tau\varpi_s^\top(0)M\varpi_s(0) + (h - \tau)[\dot{x}_s^\top(\tau)(S_1\xi_s(\tau) \\ &\quad + 2S_2x_s(0) + 2S_3\psi_s(0) + 2S_4\varepsilon_s(0)) + \xi_s^\top(\tau)S_1\dot{x}_s(\tau)] + (h - \tau)[x_s^\top(\tau)\Theta + \chi_s^\top(\tau)Q_1 \\ &\quad \times x_s(\tau) - \chi_s^\top(\tau)Q_1\chi_s(\tau)] + (h - \tau) [\varpi_s^\top(0)M\varpi_s(0) + \tau\dot{x}_s^\top(\tau)R\dot{x}_s(\tau)] \\ &\quad - \int_0^\tau \dot{x}_s^\top(v)R\dot{x}_s(v) dv.\end{aligned}\tag{A.17}$$

Aplicando a desigualdade integral de Wirtinger (Lema A.1), tem-se:

$$\int_0^\tau \dot{x}_s^\top(v)R\dot{x}_s(v) dv \geq \frac{1}{\tau}\xi_s^\top(\tau)R\xi_s(\tau) + \frac{3}{\tau}\Omega^\top R\Omega = \frac{1}{\tau}\Pi^\top \mathcal{R}\Pi,\tag{A.18}$$

onde $\Omega = x_s(\tau) + x_s(0) - 2\chi_s(\tau)$, $\Pi = \begin{bmatrix} \xi_s^\top(\tau) & \Omega^\top \end{bmatrix}^\top$ e $\mathcal{R} = \text{diag}(R, 3R)$. Dessa forma, pela substituição da desigualdade (A.18) em (A.17) e mediante reorganização algébrica, deduz-se, com base no Lema A.3, a desigualdade (A.15). Isso conclui a demonstração. \square

A.4 Desigualdade Matricial para Termos Cruzados

Esta desigualdade matricial pode ser útil para limitar termos cruzados envolvendo produtos de vetores e matrizes, facilitando a formulação de condições convexas em problemas de otimização e controle.

Lema A.3 *Seja $W \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{R} \in \mathbb{S}_{>0}^n$ uma matriz simétrica definida positiva, $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz arbitrária e $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$. Então, a seguinte desigualdade matricial é*

satisfeita:

$$-\frac{1}{\tau}W^\top \mathcal{R}W \leq -\mathcal{Y}^\top W - W^\top \mathcal{Y} + \tau \mathcal{Y}^\top \mathcal{R}^{-1} \mathcal{Y}. \quad (\text{A.19})$$

Demonstração. Como $\mathcal{R}^{-1} \succ 0$, a expressão

$$\frac{1}{\tau}(\mathcal{R}W - \tau \mathcal{Y})^\top \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}W - \tau \mathcal{Y}) \geq 0$$

é não negativa para todo $W \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Expandindo e reorganizando os termos, obtém-se a desigualdade desejada. \square

A.5 Complemento de Schur e Lema de Finsler

Esta seção apresenta dois lemas fundamentais para a formulação de condições de estabilidade e controle em sistemas dinâmicos. O complemento de Schur, apresentado por Schur em 1917 [93], possui aplicações relevantes em teoria de matrizes, estatística, análise numérica, matemática aplicada e na solução de equações lineares, sendo amplamente utilizado na conversão de restrições convexas não lineares em LMIs.

Lema A.4 (Complemento de Schur [93]) *Sejam $Q = Q^\top$, $R = R^\top$ e S matrizes com dimensões apropriadas. Então, a LMI*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ \star & R \end{bmatrix} \succ 0 \quad (\text{A.20})$$

é equivalente a

$$R \succ 0, \quad Q - SR^{-1}S^\top \succ 0. \quad (\text{A.21})$$

Ou seja, as desigualdades (A.21), que apresentam não linearidades, podem ser expressas como uma LMI (A.20).

O Lema de Finsler é amplamente utilizado na análise de estabilidade, incorporando restrições dinâmicas nas condições de estabilidade. Sua principal vantagem está na manipulação de variáveis linearmente dependentes, permitindo transformações equivalentes e reduzindo o conservadorismo [94, 95].

Lema A.5 (Lema de Finsler [95, 96]) *Sejam o vetor $\xi \in \mathbb{R}^n$, a matriz $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e a matriz simétrica $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$ e \mathcal{B}^\perp uma base para o espaço nulo de \mathcal{B} , isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\xi^\top \mathcal{F} \xi < 0, \quad \forall \xi \neq 0 \text{ tal que } \mathcal{B}\xi = 0;$

(ii) $B^\perp \mathcal{F} B^\perp < 0;$

(iii) *Existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{F} - \mu B^\top B < 0;$*

(iv) *Existe $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $\mathcal{F} + \mathcal{W}\mathcal{B} + \mathcal{B}^\top \mathcal{W}^\top < 0.$*

A.6 Lema de Barbalat

No desenvolvimento das condições de estabilidade e análise assintótica adotadas neste trabalho, torna-se necessário recorrer a resultados clássicos da teoria de sistemas dinâmicos que estabelecem propriedades de convergência e continuidade. Em particular, dois resultados amplamente utilizados, o Lema de Barbalat e um critério de continuidade uniforme, permitem formalizar a passagem de informações sobre integrabilidade e limitabilidade de funções para conclusões sobre o seu comportamento no infinito. Esses resultados, frequentemente utilizados em provas de estabilidade via funções de Lyapunov, são apresentados a seguir para referência e aplicação nas demonstrações subsequentes.

Lema A.6 (Lema de Barbalat [84]) *Seja uma função $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínua em $[0, \infty)$. Se ϕ tiver um limite inferior e for finito, isto é:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau = L, \quad |L| < \infty, \quad (\text{A.22})$$

então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0. \quad (\text{A.23})$$

Lema A.7 (Continuidade Uniforme [84]) *Seja uma função diferenciável $\gamma(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$. Se $|\frac{d\gamma}{dt}| < L_\gamma < \infty$, então $\gamma(t)$ é uniformemente contínua.*

Apêndice B

Artigos Aceitos e Submetidos

Esta seção apresenta as publicações do autor relacionadas às pesquisas desenvolvidas durante o programa de pós-graduação. Os artigos estão organizados em duas categorias: aqueles que foram aceitos em congressos ou simpósios, e aqueles que estão atualmente submetidos para avaliação em periódicos internacionais.

Artigos Aceitos

- [B1] A. E. Vitório, P. H. S. Coutinho, R. L. P. Medeiros, and I. Bessa, “Controle Baseado em Eventos de Conversores CC-CC com Cargas de Potência Constante,” *Proc. XXV Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*, 2024.
- [B2] A. E. Vitório, P. H. S. Coutinho, F. A. C. Ayres Jr., M. Otani, J. N. L. Medeiros, R. C. Nunes, K. Azevedo, J. A. Varela, K. V. Santos, J. B. Costa, R. Mendonça, R. L. P. Medeiros, and I. Bessa, “Controle Baseado em Eventos de Sistemas LPV Sujeitos a Saturações nos Atuadores,” *Proc. XVII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI) and XI Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos (SBSE)*, Manaus, Brasil, 2025.
- [B3] A. E. Vitório, P. H. S. Coutinho, C. D. Silva Filho, F. A. C. Ayres Jr., M. Otani, J. N. L. Medeiros, R. C. Nunes, K. Azevedo, J. A. Varela, R. Silva, K. V. Santos, J. B. Costa, and I. Bessa, “Periodic Event-Triggered Control of HVAC Systems,” *Proc. IFAC Joint Conference on Computers, Cognition and Communication (J3C)*, 2025.

- [B4] A. E. Vitório, P. H. S. Coutinho, C. D. Silva Filho, F. A. C. Ayres Jr., W. Silva Jr., C. Carvalho, M. Otani, J. N. Medeiros, R. Nunes, R. Silva, J. A. Varela, D. R. C. Moura, K. V. Santos, J. B. Costa, and I. Bessa, “Resilient Event-Based Control of DC-DC Converters Subject to Deception Cyberattacks,” *Proc. 6th International Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, Ayia Napa, Cyprus, 6–8 October 2025.