UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PARA A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO PLANO

IÊDA MARIA DE ARAÚJO CÂMARA COSTA

MANAUS
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

IÊDA MARIA DE ARAÚJO CÂMARA COSTA

DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PARA A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO PLANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Cicero Mota

MANAUS
2009

IÊDA MARIA DE ARAÚJO CÂMARA COSTA

DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PARA A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO PLANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 27 de fevereiro de 2009.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cicero Mota, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof. Dr. José kenedy Martins
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso
Universidade Federal do Ceará

....

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é uma vitória, para mim e para todos os que me

ajudaram. Cada amigo ajudou de sua forma. Obrigada!

Agradeço de forma particular a algumas pessoas:

Ao meu pai e minha mãe pela minha existência e eterno apoio.

Ao meu esposo e filhas pelo amor, pela paciência e compreensão.

Aos parentes pelas orações.

Agradeço aos amigos Ponciano, Laurimar, Ceci, Ursula, Juliana, Andréa e Odete que fizeram a revisão desse trabalho.

Agradeço a todos os professores do mestrado.

Agradeço de forma particular ao Professor Dr. Cicero Mota a quem dedico esse trabalho.

E, é claro, a Deus, a quem recorri em todos os momentos difíceis nessa longa jornada.

RESUMO

DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PARA A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DO PLANO

Orientador: Cicero Mota
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Este trabalho apresenta a *Álgebra Geométrica do Plano*, de acordo com a proposta de Grassmann, a partir dos axiomas da geometria euclidiana plana.

ABSTRACT

FROM EUCLIDIAN GEOMETRY TO PLANE GEOMETRIC ALGEBRA

This work will present the **Plane Geometric Algebra**, according Grassmann postulate, starting the axioms of plane euclidean geometry.

Sumário

Lista de Figuras

1 *Introdução*

A idéia do desenvolvimento desse trabalho surgiu quando participava de um curso de álgebra ministrado pelo professor Dr. Cicero Mota aos alunos do curso de licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Amazonas no ano de 2007. Através das anotações das aula do referido curso tornou-se possível a realização desse trabalho sobre o tema "Da geometria euclidiana para a álgebra geométrica do plano". O objetivo principal desse trabalho é apresentar a *estrutura algébrica* da álgebra geométrica de Grassmann.

2 Contexto Histórico

Nesse capítulo faremos uma abordagem histórica da *álgebra geométrica*, e das vantagens dessa nova estrutura matemática.

2.1 O que é a álgebra geométrica?

A *álgebra geométrica* é uma *estrutura matemática* na qual é possível, através de suas propriedades específicas, representar elementos geométricos por elementos algébricos e operações geométricas por operações algébricas.

O estudo da *geometria* através da *álgebra geométrica* apresenta algumas vantagens em relação as apresentações tradicionais da geometria analítica. Entre essas vantagens, podemos citar as equações dos conjuntos lineares; o corpo dos compelexos, os quatérnions, e os octónions; algumas transformações geométricas, notadamente as rotações, as transformações conformes, o cálculo do complemento ortogonal e das intersecções se escrevem como simples produto na álgebra.

Na *álgebra geométrica* o *produto geométrico* de vetores apresenta algumas vantagens em relação ao *produto vetorial* usual. É associativo e admite a existência de um elemento inverso (propriedade não satisfeita pelo *produto vetorial* usual), contém mais informações que o *produto vetorial* usual e pode ser definida em espaços de qualquer dimensão, enquanto o *produto vetorial* usual se limita a alguns espaços vetoriais em especial $\mathbb{R}^3$.

2.2 Contextualização Histórica

A idéia de representar elementos algébricos por elementos geométricos e operações algébricas por operações geométricas era um dos problemas que intrigava os gregos. Na Grécia antiga, Euclides estruturou a *geometria* que recebeu o seu nome e ainda hoje

Figura 1: Grassmann

utilizamos, mas ela não foi suficiente para resolver alguns problemas.

Para os gregos, nem todo *segmento de reta* podia ser representado por números. O problema estava relacionado com a idéia de congruência que eles tinham. Para eles bastava que dois segmentos de reta tivessem o mesmo comprimento que eles o consideravam equivalentes. Alguns matemáticos se empenharam em solucionar este problema. Dentre eles podemos destacar René Descartes, ele reestruturou a *geometria euclidiana* usando um formalismo específico, de modo que cada ponto do plano fosse representado por um par de números, e que cada elemento desse par estivesse relacionado a um eixo de coordenadas, denominado atualmente *plano cartesiano*. Mas a idéia de Descartes também não resolveu o problema, pois a noção de congruência de Descartes era a mesma de Euclides. A solução só foi encontrada em meados do século XIX, pelo matemático (alemão) Hermann Grassmann [figura 1].

2.2.1 Hermann Gunther Grassmann

Grassmann publicou seu livro *Ausdehnungslehre* em 1844 na Alemanha. Esse livro contém as regras para relacionar segmentos de retas com números que são diferentes das regras adotadas por *Descartes*. Para *Descartes*, *segmentos de reta* que pudessem ser obtidos por meio de *translações* seguida de *rotações* eram representados por um mesmo símbolo "*escalar*". Grassmann só representava pelo mesmo *escalar segmentos de reta* que fossem obtidos a partir de outro através de uma *translação*, e mais, para que *segmentos de reta* fossem considerados *equivalentes* eles deveriam possuir muito mais que *mesmo comprimento*, eles deveriam ter por exemplo *mesmo sentido* e *mesma direção*.

Por convenção ficou estabelecido que *segmentos de reta* com essas características seriam representados por um símbolo. Esses *segmentos* foram denominados *vetores*

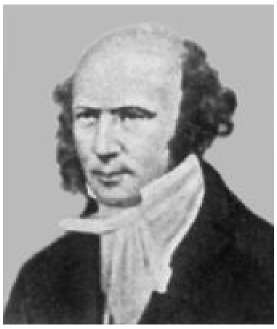

Figura 2: Hamilton

Figura 3: Clifford

Grassmann definiu o *produto de vetores*, criando assim uma *estrutura algébrica* atualmente conhecida como *álgebra exterior* ou *álgebra da extensão de Grassmann*.

2.2.2 Willian Rowan Hamilton

Argand e Gauss utilizaram o sistema de *coordenadas cartesianas* para representar geometricamente os *números complexos*. Devido a semelhança existente na forma estrutural com a *geometria analítica* de *Descartes*. Bastava para isso convencionar que um dos *eixos do sistema* representasse os *números reais* e o outro os *números imaginários*. Aparentemente os *números complexos* não estabeleciam relação com a *álgebra geométrica*, mas o fato de poder representar, em um *sistema de coodenadas*, uma estrutura com elementos independentes foi importante para novas pesquisas. Nesse caso podemos citar Hamilton [figura 2], que publicou em 1844 um artigo sobre os *números quaternários*, que são uma generalização da *álgebra dos números complexos*. Os *quatérnios*, são compostos por quatro componentes, uma *real* e três *imaginárias*.

2.2.3 Willian Kingdon Clifford

Clifford [figura 3] pertenceu a um grupo de matemáticos que leu o trabalho de Grassmann e o compreendeu. Em 1878 ele introduziu em sua *álgebra geométrica* o *produto interno* e o *produto exterior* em um único *produto geométrico*. Esse novo produto teve a característica de ser *associativo*, igual ao produto de Grassmann e *invertível* como o produto de Hamilton.

3 *Geometria Euclidiana Plana*

Neste capítulo, abordaremos alguns tópicos da *geometria plana* que servirão de suporte a esse trabalho. As definições, axiomas e teoremas aqui apresentados foram retirados do livro de *Geometria Euclidiana Plana* do Professor João Lucas Marques Barbosa.

3.1 Alguns axiomas e definições da geometria plana

O *ponto*, a *reta* e o *plano* são considerados conceitos primitivos da *geometria plana*, isto é, são aceitos sem definição. As retas e os planos são constituídos de pontos. Usaremos letras maiúsculas do nosso alfabeto A,B,C,...para designar pontos, as minúsculas a,b,c,... para as retas, e as letras grega α, β, γ... para planos.

A *geometria plana* é constituída de *axiomas* e *teoremas*. Os *axiomas* são proposições aceitas sem demonstrações, enquanto os *teoremas* devem ser demonstrados para serem aceitos como verdadeiros. Ao longo deste capítulo, apresentaremos algumas definições e faremos as demonstrações dos principais *teoremas*.

3.1.1 Axiomas da incidência e de ordem

Os axiomas da incidência estão relacionados aos conceitos primitivos da geometria, que são:

Axioma 3.1. *Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.*

Axioma 3.2. *Por dois pontos distintos passa uma única reta que contém estes pontos.*

Os axiomas de ordem estão relacionados à localização, entre pontos em uma mesma reta, eles fornecem as condições necessárias para a ordenação dos números na reta real.

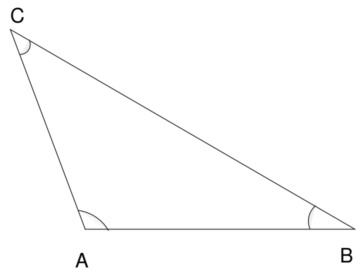

Figura 4: Triângulo

Axioma 3.3. *Dados três pontos de uma mesma reta, um e apenas um deles, localiza-se entre os outros dois.*

Definição 3.4. *[Segmentos] O conjunto constítuido por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado segmento AB e indica-se por* $\overline{AB}$*. Os pontos A e B são os extremos ou extremidades do segmento.*

Algumas *figuras geométricas planas* são construídas usando-se *segmento*. Dentre elas podemos citar:

Definição 3.5. *[Triângulo] O triângulo é uma figura geométrica plana que é formada por três pontos A,B e C, [figura 4] não colineares denominados vértices e por três lados que são os segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *e* $\overline{BC}$*.*

Definição 3.6. *[Semi-reta] Dado dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto de pontos X tais que B está entre A e X é a semi-reta AB que é chamada semi-reta AB com origem em A contendo o ponto B e é indicada por* S_{AB}*.*

Dois pontos A e B determinam duas semi-retas S_{AB} (com origem em A) e S_{BA}(com origem em B). As semi-retas contém o segmento AB.

Axioma 3.7. *Dado dois pontos A e B sempre existe um ponto X entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.*

Definição 3.8. *[Semi-planos] Seja r uma reta e A um ponto que não pertence a r. O conjunto constítuido pelos pontos de r e por todos os pontos B tais que A e B estão em um mesmo lado da reta r, é chamado de semi-plano, determinado por r contendo A, e será indicado por* P_rA*.*

Axioma 3.9. *Uma reta r determina exatamente dois semi-planos distintos cuja interseção é a reta r.*

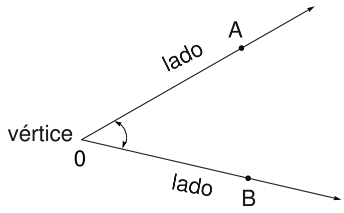

Figura 5: Ângulo

3.1.2 Axiomas métricos

Axioma 3.10. *A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se os pontos são coincidentes.*

Definição 3.11. *[Distância ou comprimento] O número a que se refere o axioma [3.10] é chamado de distância entre AB ou comprimento do segmento* $\overline{AB}$*.*

Se A e B coincidem, dizemos que a *distância* entre A e B é *nula* e o *comprimento do segmento* $\overline{AB}$ é igual a zero.

Axioma 3.12. *Os pontos de uma reta podem sempre ser colocadas em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.*

Esse axioma garante a possibilidade da correspondência um a um, existente entre os números reais e os pontos da reta. O número correspondente a um ponto da reta é denominado *coordenada* daquele ponto. Assim, se a e b são as coordenadas das extremidades do segmento $\overline{AB}$, o comprimento desse segmento será fornecido em valor absoluto pela diferença entre a e b, ou seja.

$$\overline{AB} = |b - a| \tag{3.1}$$

Axioma 3.13. *Se um ponto X encontra-se entre A e B então:*

$$\overline{AB} = \overline{AX} + \overline{XB} \tag{3.2}$$

Definição 3.14. *[Ângulo] Chama-se ângulo à região entre duas semi-retas de mesma origem. As semi-retas determinam os lados do ângulo e a origem comum determina o vértice. [figura 5].*

Axioma 3.15. *Todo ângulo tem medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero, se e somente se ele é constituído por duas semi-retas coincidentes. Caso as semi-retas sejam opostas, o ângulo formado chama-se ângulo raso.*

Definição 3.16. *[Semi-reta divide semi-plano] Uma semi-reta divide um semi-plano se ela estiver contida no semi-plano e sua origem for um ponto da reta que o determina.*

Axioma 3.17. *É possível colocar em correspondência biunívoca os números reais entre zero e 180 e as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que o modulo da diferença entre esses números seja a medida em graus do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.*

A possibilidade de podermos colocar em correspondência biunívoca os números reais e as semi-retas de mesma origem, garante chamarmos o número que corresponde a uma dada semi-reta de *coordenada da semi-reta*. As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ serão indicadas por S_{OA} e S_{OB} respectivamente. Supondo que S_{OA} tem coordenada 60 isto equivale dizer pelo axioma[3.17] que este ângulo mede 60^0 e S_{OB} que mede 110, equivale a 110^0. Estamos interessados em descobrir quanto mede o ângulo AÔB. Nesse caso, devemos calcular em módulo a diferença entre suas coordenadas.

$$\mid 110 - 60 \mid = 50 \Rightarrow 50^0 \tag{3.3}$$

Portanto, concluímos que a medida de um ângulo é determinada pela medida de suas coordenadas em valor absoluto.

$$A\widehat{O}B = |b - a| \tag{3.4}$$

Definição 3.18. *[Divisão de ângulo] Sejam S_{OA}, S_{OB} e S_{OC} semi-retas de mesma origem. Se o segmento $\overline{AB}$ interceptar S_{OC} diremos que S_{OC} divide o ângulo $A\widehat{O}B$.*

Axioma 3.19. *Se uma semi-reta S_{OC} divide um ângulo $A\widehat{O}B$, então*

$$A\widehat{O}B = A\widehat{O}C + C\widehat{O}B \tag{3.5}$$

Definição 3.20. *[Ângulo reto] Um ângulo cuja medida é 90^0 é chamado ângulo reto.*

Definição 3.21. *[Retas perpendiculares] Duas retas que se interseptam são denominadas retas perpendiculares, se os quatro ângulos formados por elas forem retos.*

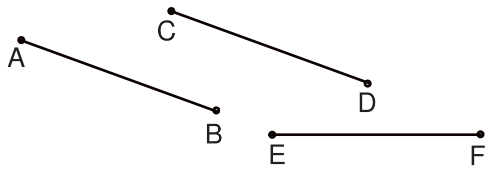

Figura 6: Segmentos Congruentes

Teorema 3.22. *Por um ponto P de uma reta r, passa uma única reta s perpendicular a reta r.*

Demonstração:

Existência: Suponha que existam duas retas s_1 e s_2 passando por P e que sejam *perpendiculares* à reta r. Considere um dos *semi-planos* formados por r, contendo as *semi-retas* s_1 e s_2, com origem comum P.

Tomemos um dos semi-planos formado por r. Sabe-se pelo axioma [3.17] que entre todas as *semi-retas* com origem P, que divide os *semi-planos* tomados, existe uma cuja coordenada será o número 90. Esta *semi-reta* forma com as duas *semi-retas* formadas pelo ponto P sobre a reta r, *ângulos* de 90^0, logo ela é *perpendicular* a *reta* r.

Unicidade: Afirmamos que existem duas retas n e n′ perpendiculares à reta r passando por P.

Fixe um dos semi-planos formados por r. Observe que interseções das retas n e n′ com este semi-plano são semi-retas que determinam um ângulo α e determinam outros dois ângulos β e γ com as semi-retas formadas pelo ponto P na reta r.
Como n e n′ são perpendiculares à reta r por hipótese, então $\beta = \gamma = 90^0$. Assim, como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Concluímos que $\alpha = 0^0$. Daí segue que as retas n e n′ são coincidentes.

As propriedades da igualdade de números são válidas tanto para medidas de segmentos quanto para medidas entre ângulos. Adotaremos o símbolo ≡ para a congruência quando estivermos relacionando segmentos de mesma medida e também para medida entre ângulos iguais apenas para facilitar a notação e a linguagem.

Definição 3.23. *[Segmentos congruentes] Dois segmentos AB e CD são congruentes se possuem as mesmas medidas. Indica-se* $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. *[figura 6]*

A congruência de segmentos goza das propriedades: *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*.

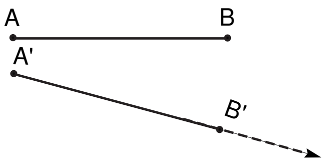

Figura 7: Transporte de segmentos

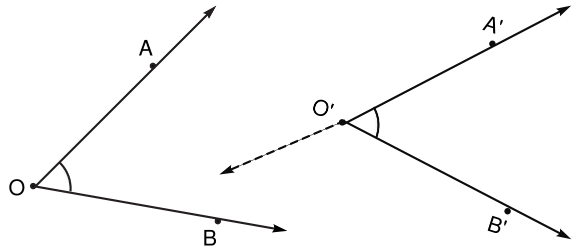

Figura 8: Transporte de ângulos

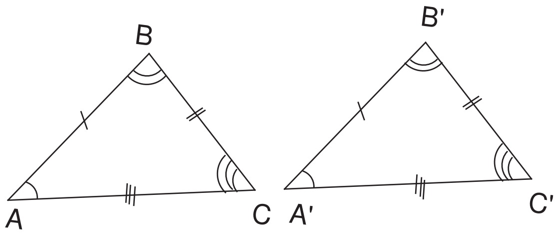

Figura 9: Triângulos congruentes

Definição 3.24. *[Transporte de segmentos] Dado um segmento $\overline{AB}$ e uma semi-reta r de origem A', existe sobre esta semi-reta um único ponto B' tal que $\overline{A'B'}$ seja congruente a $\overline{AB}$.Chamaremos $\overline{A'B'}$ de transporte de $\overline{AB}$ a semi-reta r com origem A'. [figura 7]*

Definição 3.25. *[Congruência de ângulos] Dois ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ são congruentes, se eles têm a mesma medida, isto é $A\widehat{O}B \equiv C\widehat{O}D$.*

A congruência de ângulos goza das propriedades *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*.

Definição 3.26. *[Transporte de ângulo] Dado um ângulo $A\widehat{O}B$ e uma semi-reta $\overline{O'A'}$ de um plano, existe sobre este plano e num dos semi-planos que $\overline{O'A'}$ permite determinar, uma única semi-reta $\overline{O'B'}$ que forma com $\overline{O'A'}$ um ângulo $A'\widehat{O'}B'$ congruente $A\widehat{O}B$. [figura 8]*

Definição 3.27. *[Triângulos congruentes] Dois triângulos são congruentes se existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. [figura 9]*

$$\triangle ABC \quad \equiv \quad \triangle A'B'C' \qquad \Leftrightarrow$$

$$(i) \qquad \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}; \quad \widehat{A} \equiv \widehat{A'}$$

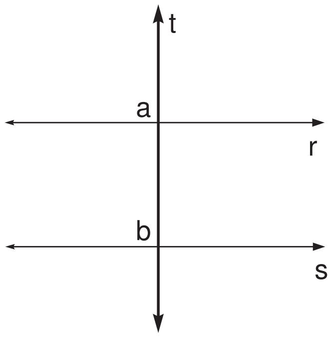

Figura 10: Retas paralelas

$$(ii) \qquad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}; \quad \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$$

$$(iii) \qquad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}; \quad \widehat{B} \equiv \widehat{B'}$$

Triângulos congruentes gozam das propriedades *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*.

A definição de *congruência de triângulos* nos fornece seis condições para que dois triângulos sejam congruentes, sendo que três estão relacionadas a *lados* e três a *ângulos*, conhecidos como *critérios ou casos de congruência de triângulos*. Estes critérios são importantes na *geometria dedutiva*, pois conhecidas as igualdades de três desses elementos poderemos concluir a igualdade dos três elementos restantes.

Axioma 3.28. *[Critério L.A.L] Dado dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$. Então $\triangle ABC$ e o $\triangle A'B'C'$ são congruentes.*

3.2 Axioma das paralelas

A solução para o problema relacionado com as retas paralelas só aconteceu no século XIX, com a descoberta da *geometria não-euclidiana*, sendo sua principal característica, negar o axioma das paralelas. Apresentaremos nesta seção o axioma V de Euclides, que diz respeito às retas paralelas.

Teorema 3.29. *Se uma transversal forma com duas retas situadas no mesmo plano dois ângulos alternos internos iguais, as duas retas são paralelas. [figura 10]*

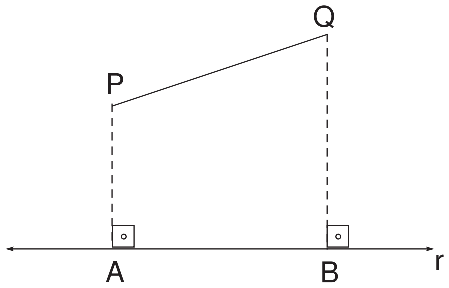

Figura 11: Projeção de segmento

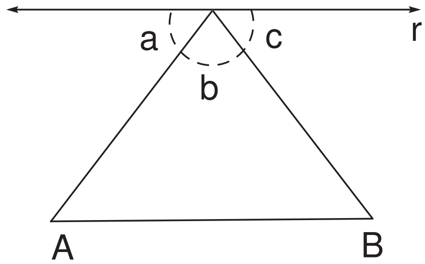

Figura 12: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Demonstração:

Se as duas retas r e s não fossem paralelas, elas se encontrariam em um ponto P. Teríamos, então, formado o triângulo ABP, no qual o ângulo externo $\widehat{a}$ desse triângulo seria maior que cada ângulo interno não adjacente, isto é $\widehat{a} > \widehat{b}$ que é um absurdo pois contraria a hipótese. Portanto, as retas r e s não tendo nenhum ponto em comum, são paralelas.

Axioma 3.30. *[V Postulado de Euclides] Dados uma reta r e um ponto fora dela, pode-se traçar uma única reta paralela reta r.*

Definição 3.31. *[Paralelogramo] Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.*

Definição 3.32. *[Projeção do segmento] Dado um segmento $\overline{PQ}$ e uma reta r do teorema [3.22] dois únicos pontos A e B tais que as retas que passam, respectivamente por A, P e B, Q, das perpendiculares a reta r. Esse segmento $\overline{AB}$ é chamado de Projeção do segmento $\overline{PQ}$ sobre a reta r. [figura 11]*

Proposição 3.33. *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são iguais.*

Teorema 3.34. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é* 180^0

Demonstração:

Seja ABC um triângulo. Pelo vértice C trace uma reta paralela ao lado AB. Consudere os ângulos formados com o vértice C, como indicado na [figura 12].

Temos que $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = 180^0$. Como AC é transversal às duas paralelas, é uma consequência direta da proposição que relaciona duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são iguais. Por essa afirmação podemos concluir que $\widehat{A} = \widehat{a}$. Como BC é tambem a transversal às duas paralelas, então $\widehat{B} = \widehat{c}$. Portanto

$$\widehat{A} + \widehat{B} + A\widehat{C}B = \widehat{a} + \widehat{c} + \widehat{b} = 180^0.$$

3.3 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Sejam ABC e EFG dois triângulos semelhantes, se $A \to E$, $B \to F$, $C \to G$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes igualdades:

$$\widehat{A} = \widehat{E}, \quad \widehat{B} = \widehat{F}, \quad \widehat{C} = \widehat{G} \quad e$$
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de *razão de proporcionalidade* entre os dois triângulos.

Teorema 3.35. *Dados dois triângulos ABC e EFG, se $A = E$ e $B = F$ então os triângulos são semelhantes.*

Demonstração:
Considerando o teorema [3.34], então e a igualdade dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{E}$ e dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{F}$ induz a igualdade dos ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{G}$. Provaremos que os lados dos triângulos são proporcionais. Para isso tomemos na semi-reta S_{EF} o ponto H de modo que $EH = AB$. Pelo ponto H trace uma reta paralela a FG. esta corta a semi-reta S_{EG} num ponto J, formando um triângulo EHJ que é congruente ao triângulo ABC em que ($\widehat{A} \equiv \widehat{E},\ AB \equiv EH$ *e* $\widehat{B} \equiv \widehat{F} \equiv E\widehat{H}J$ (*paralelismo de JH e GF*)). Segue-se que

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} \equiv \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}}$$

.

Como $EH \equiv AB$ e $EJ \equiv AC$ então, da equivalência acima temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} \equiv \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$$

.

De maneira análoga demonstra-se que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} \equiv \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}}$$

.

Fica assim demonstrado o teorema.

3.4 Área

Axioma 3.36. *A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.*

O número a que se refere esse axioma é chamado de área da região.

Axioma 3.37. *Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.*

Axioma 3.38. *Regiões triângulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.*

Axioma 3.39. *Se ABCD é um retângulo então sua área é dada pelo produto:* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$*.*

Notação: Dado um paralelogramo ABCD designamos por b o comprimento do lado AB e por h o comprimento de um segmento ligando AB a CD que seja perpendicular a ambos. Um tal segmento é chamado de altura do paralelogramo relativo ao lado AB.

Proposição 3.40. *A área do paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.*

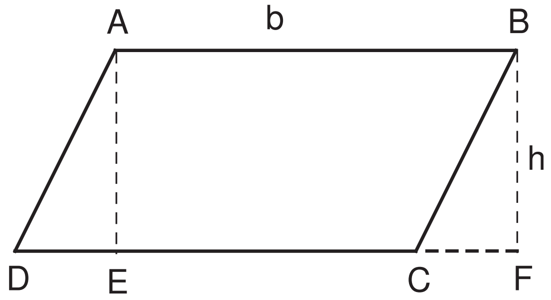

Figura 13: Área do paralelogramo

Demonstração:

Com a notação do axioma[3.39]devemos provar que a área do paralelogramo ABCD é b.h. Para isso tracemos, a partir dos pontos A e B, dois segmentos, AE e BF, perpendiculares à reta CD. O quadrilátero ABFE é um retângulo cuja área é $\overline{AB}$. $\overline{BF}$ que corresponde exatamente o produto do comprimento da base b pelo comprimento da altura h. Para concluir a demonstração basta observarmos na [figura 13] que os triângulos ADE e CBF são congruentes e que

Área (ABCD) = Área (ABCE) + Área (ADE) = Área (ABCE) + Área (CBF)
= Área (ABFE) = b.h.

4 A Álgebra Geométrica do Plano

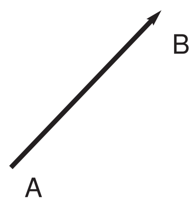

Figura 14: Segmento orientado

Figura 15: Paralelogramo

Neste capítulo apresentaremos a *álgebra geométrica* do plano segundo o formalismo de *Grassmann* e *Clifford*.

4.1 Vetores no Plano

Definição 4.1. *[Segmento orientado] Dado um segmento $\overline{AB}$ podemos orientá-lo considerando o ponto A como origem e o ponto B como extremidade ou vice-versa. Representaremos o segmento orientado de origem A e extremidade B por $\overrightarrow{AB}$. [figura 14]*

Dado um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e um ponto A′ existe um único ponto B′ tal que AA′BB′é um paralelogramo, [figura 15] isso é uma consequência do axioma [3.30].

Definição 4.2. *[Transporteparalelo de segmentos orientados] Com a notação acima, diremosque $\overrightarrow{A'B'}$ é o transporte paralelo do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.*

Definição 4.3. *[Segmentos orientados congruentes] Diremos que dois segmentos orientados são congruentes se um pode ser obtido a partir do outro, através do transporte paralelo.*

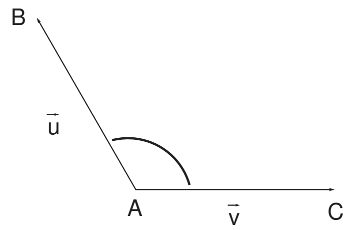

Figura 16: Ângulo entre vetores

A congruência de segmentos orientados é uma relação que goza das propriedades *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*.

4.1.1 Vetores

Definição 4.4. *[Vetor] Dado um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, o conjunto $[\overrightarrow{AB}]$ de todos os segmentos orientados congruentes a $\overrightarrow{AB}$ é o vetor determinado por $\overrightarrow{AB}$.*

Como não há risco de confusão escreveremos vetor $\overrightarrow{AB}$ para indicar $[\overrightarrow{AB}]$.

Definição 4.5. *[Vetor nulo] O conjunto dos segmentos nos quais a origem e a extremidade coincidem, é chamado vetor nulo e será indicado por 0.* [1].

Notação: Para todo vetor não-nulo $\overrightarrow{AB}$, indicaremos o vetor $\overrightarrow{BA}$ por $(-\overrightarrow{AB})$.

Definição 4.6. *[Norma de um vetor] A norma do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ é o comprimento do segmento $\overrightarrow{AB}$ e é indicada por $\|\overrightarrow{u}\|$.*

A norma de um vetor goza das seguintes propriedades:

1. $\|\overrightarrow{u}\| \geq 0$ e $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ se e somente se $\overrightarrow{u} = 0$;

2. $\|x\overrightarrow{u}\| = |x|\ \|\overrightarrow{u}\|$

4.1.2 Ângulo entre vetores

Definição 4.7. *[Ângulo entre vetores] Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores com representantes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ respectivamente. Definimos o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ indicado por $\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ como sendo o ângulo entre seus representantes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.[figura 16]*

[1]Observe que usaremos o mesmo símbolo para o número zero e o vetor nulo, a razão para isso será esclarecida posteriormente

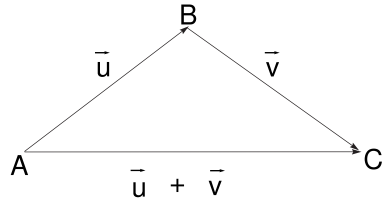

Figura 17: Adição de vetores

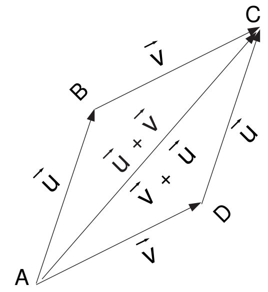

Figura 18: Comutatividade da adição

Segmentos de reta orientados podem ser facilmente transladados sem que haja perda de generalidade, basta para isso que suas características sejam preservadas. Esse fato viabiliza a elaboração das regras para operar com vetores. Duas operações algébricas para vetores estão definidas, *a adição* e *o produto*.

Definição 4.8. *[Adição de vetores] Dado dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ definimos o vetor soma desses vetores e indicaremos por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Escolhemos um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ que represente o vetor $\overrightarrow{u}$. Existe um único segmento orientado com origem em B representando o vetor $\overrightarrow{v}$. Seja $\overrightarrow{BC}$ esse segmento. Definimos o vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ como vetor representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AC}$. [figura 17]*

A adição de vetores goza das seguintes propriedades:

1. *Comutatividade* : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$;

2. *Associatividade* : $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$;

3. *Elemento neutro* : $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0}) = (\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$;

4. *Inverso aditivo* : $(-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

Utilizaremos a representação geométrica de vetores para comentar as propriedades da adição de vetores.

1. Observando a [figura 18] temos que o vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; somando-se os vetores $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, portanto

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$$

comprova a comutatividade da adição.

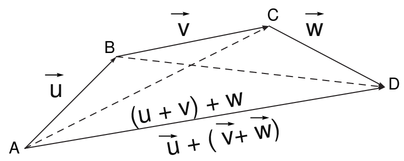

Figura 19: Associatividade da adição

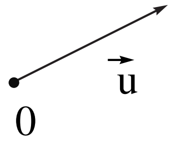

Figura 20: Adição com um vetor nulo

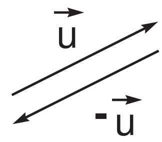

Figura 21: Vetor nulo

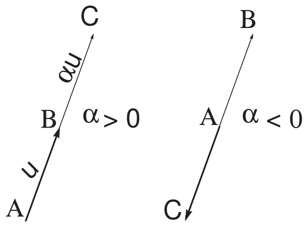

Figura 22: Produto por escalar

2. Na [figura 19] usamos a representação gráfica dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, para verificar a associatividade da adição de vetores.

3. Pode-se observar na [figura 20] que a adição de um vetor com o vetor nulo resulta no próprio vetor.

4. Conforme a notação feita para vetor nulo, considerando que para cada vetor $\overrightarrow{u}$ associaremos o vetor -$\overrightarrow{u}$ denominado simétrico de $\overrightarrow{u}$, considerando que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, então, (-$\overrightarrow{u}$)= $\overrightarrow{BA}$. Como $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$(vetor em que a origem coincide com a extremidade), temos que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = 0$. Esse fato pode ser observado na [figura 21] .

Definição 4.9. *[Produto por escalar] Dado um vetor não nulo $\overrightarrow{u}$ e um número real α qualquer, então para definir o vetor $\alpha\overrightarrow{u}$, produto do vetor $\overrightarrow{u}$ pelo escalar α. Tomemos um representante $\overrightarrow{AB}$ para o vetor $\overrightarrow{u}$. Então podemos considerar. [figura 22]*

1. Se $\alpha = \overrightarrow{u} = 0$ então $\alpha.\overrightarrow{u} = 0$;

2. Se $\alpha \neq 0$ e $\overrightarrow{u} \neq 0$ então $\alpha\overrightarrow{u}$ é definido como o vetor representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AC}$, cujo comprimento é $|\alpha|$ vezes o comprimento do segmento $\overrightarrow{AB}$

3. Se $\alpha > 0$ e $\alpha\overrightarrow{u}$ tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{u}$.

4. Se $\alpha < 0$ e $\alpha\overrightarrow{u}$ tem o sentido contrário de $\overrightarrow{u}$.

A palavra *escalar*, usada quando se trabalha com vetores, apresenta o mesmo significado de número quando se trabalha com segmentos. É oportuno lembrar que o produto de um vetor por um escalar pode mudar o comprimento ou o sentido do vetor mas não sua direção.

As propriedades referentes ao produto de vetores por escalar são válidas qualquer que sejam os escalares α , β e os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

1. *Associatividade* : $(\alpha\beta)\overrightarrow{u} = \alpha(\beta\overrightarrow{u})$;
2. *Distributividade* : $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$;
3. *Distributividade* : $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$;
4. *Elemento neutro* : $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

4.2 Bases

Decorre imediatamente da definição por meio de produto por escalar que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ possuem, como representantes, segmentos colineares se e somente se $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ para algum número real λ.

Definição 4.10. *[Vetores linearmente dependentes] Diremos que um conjunto de vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ no plano são linearmente dependentes se existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ não todos nulos tais que*

$$\alpha_1\overrightarrow{v}_1 + \alpha_2\overrightarrow{v}_2 + ... + \alpha_n\overrightarrow{v}_n = 0. \tag{4.1}$$

Um conjunto de vetores que não é linearmente dependente é chamado linearmente independente.

Segue da discussão acima que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ no plano são linearmente dependentes se, e somente se, eles podem ser representados por segmentos orientados colineares.

Proposição 4.11. *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, vetores no plano linearmente independentes, então para qualquer vetor $\overrightarrow{w}$, no plano, existem números reais $\alpha = \alpha(\overrightarrow{w})$ e $\beta = \beta(\overrightarrow{w})$ tais que*

$$\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \tag{4.2}$$

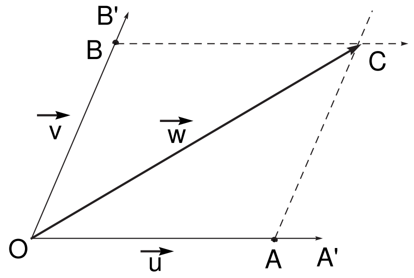

Figura 23: Vetores com mesma origem

Demonstração:

Podemos escolher representantes $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ respectivamente com a mesma origem 0. Seja A′ a intersecção da paralela a $\overline{OB}$ que passa por C com a reta que passa por O e A, e seja B′obtida similarmente [figura 23] .

Sejam ainda $\overrightarrow{u'}$ o vetor de representante $\overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{v'}$ o vetor de representante $\overrightarrow{OB'}$. Como $\overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{OB'}$ colineares, existem números reais α e β tais que $\overrightarrow{u'} = \alpha\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v'} = \beta\overrightarrow{v}$ e como $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u'} + \overrightarrow{v'}$, segue que

$$\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}.$$

Definição 4.12. *[Base ordenada] Um conjunto ordenado de vetores $B = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é chamado base do plano se e somente se*

1) B é linearmente independente;

2) Para todo vetor $\overrightarrow{w}$, existem números α e β tal que

$$\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}.$$

Com essa definição, a proposição [4.11] pode ser reescrita como:

Proposição 4.13. *Seja $B = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ uma base do plano. Então para qualquer vetor $\overrightarrow{w}$, existem α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}.$$

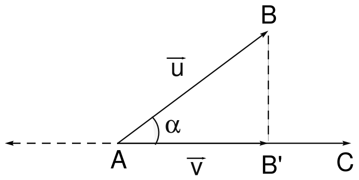

Figura 24: Produto interno de vetores com mesma orientação

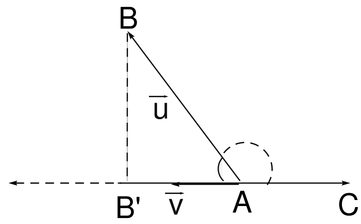

Figura 25: Produto interno de vetores com orientação oposta

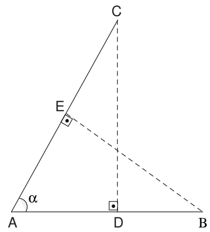

Figura 26: Simetria

Definição 4.14. *[Produto interno de vetores] Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores com representantes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ respectivamente. Seja $\overrightarrow{AB'}$ a projeção de $\overrightarrow{AB}$ sobre a reta que contém $\overrightarrow{AC}$. Definimos o produto interno entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, indicado por $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, conforme a definição e as figuras [24 e 25].*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} 0 \text{ se } \overrightarrow{AB'} \text{ ou } \overrightarrow{AC} = 0; \\ \|\overrightarrow{AB'}\|.\ \|\overrightarrow{AC}\| \text{ se } \overrightarrow{AB'} \text{ e } \overrightarrow{AC} \text{ possuem a mesma orientação ;} \\ -\|\overrightarrow{AB'}\|.\ \|\overrightarrow{AC}\| \text{ se } \overrightarrow{AB'} \text{ e } \overrightarrow{AC} \text{ possuem a orientações opostas.} \end{cases}$$

Valem para o produto interno as seguintes propriedades

1. *Simetria* : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$;
2. *Homogeneidade* : $x(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = (x\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(x\overrightarrow{v})$;
3. *Distributividade* : $\overrightarrow{w}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}\overrightarrow{v}$;

Demonstração simetria:

Para provar a simetria, basta mostrar que na [figura 26] têm-se

$$||\overrightarrow{AB}||\ ||\overrightarrow{AD}|| \ = \ ||\overrightarrow{AE}||\ ||\overrightarrow{AC}||.$$

1) $C\widehat{A}B$ é comum aos triângulos $\triangle CAD \ e \ \triangle ABE$;

2) $A\widehat{D}C \ = \ A\widehat{E}B \ = \ 90^0$;

3) Em consequência do teorema [3.34], tem-se $A\widehat{B}E \ = \ A\widehat{C}D$.

Portanto os triângulos $\triangle CAD \ e \ \triangle ABE$ são semelhantes, logo

$$\frac{||\overrightarrow{AD}||}{||\overrightarrow{AE}||} = \frac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}.$$

Demonstração homogeneidade:

Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. A reta que contém $\overrightarrow{CD}$ também contém um representante de $x\overrightarrow{u}$. Seja $\overrightarrow{PQ}$ a projeção de $\overrightarrow{AB}$ sobre essa reta. Então

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.\,(x\overrightarrow{v}) \ &= \ ||\overrightarrow{PQ}||\ ||x\ \overrightarrow{CD}|| \ = \ |x|\ ||\overrightarrow{PQ}||\ ||\overrightarrow{CD}|| \ = \ x\ (\overrightarrow{u}.\ \overrightarrow{v}) \therefore \\
\overrightarrow{u}.\,(x\overrightarrow{v}) \ &= \ x\ (\overrightarrow{u}.\ \overrightarrow{v}) \ = \ \overrightarrow{v}.(x\overrightarrow{u}) \ = \ (x\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}.
\end{aligned}$$

Consideremos os casos em que

1. $x = 0$ ou $\overrightarrow{u} \ = \ 0$ ou $\overrightarrow{v} \ = \ 0$, nesse caso a identidade é óbvia;

2. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \ > \ 0$ Considerando o caso em que $x \ > \ 0$ foi demonstrado acima, para o caso em que $x \ < \ 0$, utiliza-se o argumento da definição em que os vetores possuem orientações opostas.

3. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \ < \ 0$ Considerando o caso em que $x \ > \ 0$ é $x \ < \ 0$, utiliza-se o mesmo argumento feito no segundo caso, basta mudarmos o sinal dos vetores.

Demonstração distributividade:

Para mostrar a distributividade, podemos considerar os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$, representantes de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \ + \ \overrightarrow{v}$ respectivamente e $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ as

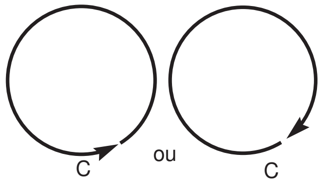

Figura 27: Possíveis orientações de um círculo

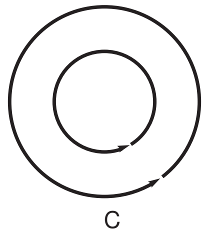

Figura 28: Orientação induzida

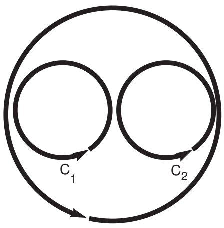

Figura 29: Orientações coerentes

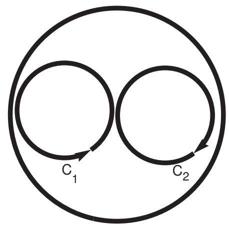

Figura 30: Orientações incoerentes

projeções de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$ sobre a reta que contém um representante de $\overrightarrow{w}$ então

$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$ e todos colineares com $\overrightarrow{w}$ logo

$$\overrightarrow{w}.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{w}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{w}.\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{w}.\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{w}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}.\overrightarrow{v}.$$

Definição 4.15. *[Base ortogonal e base ortonormal] Uma base $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ chama-se ortogonal se os seus vetores são mutuamente ortogonais, isto é, se $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = 0$.Se além disso, os vetores são unitários, a base $\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{v}$ chama-se ortonormal.*

4.3 Bivetor

Introduziremos uma noção de equivalência entre paralelogramos orientados de maneira similar a equivalência de segmentos orientados. Dado um paralelogramo ABCD podemos orientá-lo de duas maneiras: $\overrightarrow{ABCD}$ ou $\overrightarrow{ADCB}$.

Gostaríamos agora de definir equivalência de paralelogramos orientados. Intuitivamente, podemos começar pensando em orientação de círculos. Dado um círculo C podemos orientá-lo de duas maneiras figura 26. Observe que definida uma orientação

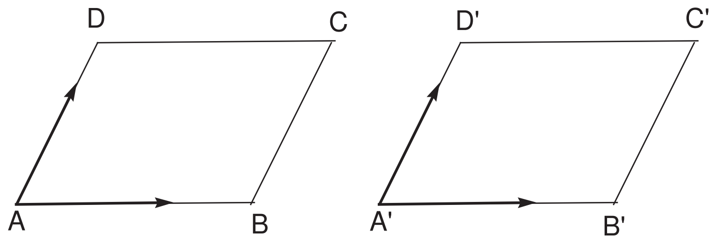

Figura 31: Segmentos orientados

de C, ela induz, naturalmente uma orientação em qualquer círculo que contenha C figura 27. Poderíamos então dizer que dois círculos C_1 *e* C_2, no plano, têm a mesma orientação se eles induzem a mesma orientação em um círculo que contém ambos figuras [28 e 29].

Podemos tornar esse conceito rigoroso a partir da noção de base ordenada.

Antes de definir o conceito de equivalência de paralelogramos orientados, começamos recordando a noção de equivalência de segmentos orientados. Dois segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ orientados são equivalentes se podemos fazer o transporte paralelo de $\overrightarrow{AB}$ para C de tal modo que:

1) D e o transporte de B pertence a mesma semi-reta de origem C;

2) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ possuem o mesmo comprimento.

A condição 1) equivale dizer que os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ possuem a mesma direção e orientação enquanto, a condição 2) diz que eles possuem a mesma norma.

Sejam ABCD, A'B'C'D' paralelogramos, $\overrightarrow{u}$,$\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u'}$ e $\overrightarrow{v'}$ os vetores correspondentes aos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{A'D'}$ respectivamente, conforme a [figura 31]

Pelo axioma [3.12] existem números reais (a_{ij}) tais que

$$\overrightarrow{u'} = a_{11}\overrightarrow{u} + a_{21}\overrightarrow{v};$$
$$\overrightarrow{v'} = a_{12}\overrightarrow{u} + a_{22}\overrightarrow{v}.$$

Dizemos que os paralelogramos orientados possuem a mesma orientação se o número

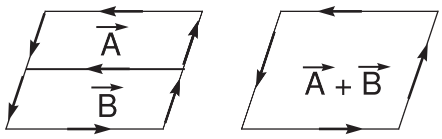

Figura 32: Adição de bivetor com mesma orientação

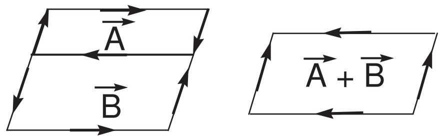

Figura 33: Adição de bivetor com diferentes orientações

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}\ >\ 0$$

Com a definição acima estamos prontos para definir a equivalência de paralelogramos.

Definição 4.16. *[Equivalência de paralelogramos orientados] Dizemos que dois paralelogramos orientados são equivalentes se*

1) ambos forem degenerados ou;

2) ambos tiverem a mesma área e a mesma orientação.

A equivâlencia de paralelogramos é uma relação *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*.

Definição 4.17. *[Bivetor] Dado um paralelogramo orientado $\overrightarrow{ABCD}$, o conjunto de todos os paralelogramos equivalentes a ele é chamado de bivetor determinado por $\overrightarrow{ABCD}$.*

Fica claro da definição de equivalência de paralelogramos que um bivetor é determinado pela área e pela orientação de qualquer um dos paralelogramos orientados que o definem.

Definição 4.18. *[Norma de um bivetor] Chamamos de norma de um bivetor $\overrightarrow{A}$, e indicamos por $\|\overrightarrow{A}\|$, a área de qualquer dos paralelogramos orientados que definem $\overrightarrow{A}$.*

Sejam $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$ dois bivetores, gostariamos de definir $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$.Temos quatro possibilidades.

1) Um deles é nulo, digamos $\overrightarrow{A} = 0$, nesse caso definimos $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}$ ou;

2) $\overrightarrow{A}$ *e* $\overrightarrow{B}$ são ambos não-nulos e têm a mesma orientação, nesse caso definimos $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ como sendo o bivetor de norma $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\| = \|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\|$ e mesma orientação que $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ [figura 32] ou;

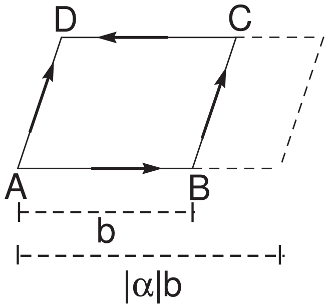

Figura 34: Produto de escalar por bivetor

3) $\overrightarrow{A}$ *e* $\overrightarrow{B}$ têm mesma norma e orientações diferentes, nesse caso definimos $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = 0$ [figura 33] ou;

4) $\overrightarrow{A}$ *e* $\overrightarrow{B}$ têm normas e orientações diferentes, nesse caso definimos $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ como sendo o bivetor de norma $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\| = \left| \|\overrightarrow{A}\| - \|\overrightarrow{B}\| \right|$ e orientações igual à orientação daquele de maior norma.

Para obter uma interpretação geométrica de $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$, escolhemos para representá-los paralelogramos orientados de lados paralelos, sendo um dos lados de um paralelogramo de comprimento igual ao comprimento do lado correspondente do outro paralelogramo, conforme representam as figuras [32 e 33].

A adição de bivetores gozam das mesmas propriedades algébricas que a adição de vetores, a saber, se $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ *e* $\overrightarrow{C}$ são bivetores, α *e* β escalares e 0 indica o bivetor nulo e Considerando que para cada bivetor $\overrightarrow{A}$ associaremos o Bivetor -$\overrightarrow{A}$ denominado simétrico de $\overrightarrow{A}$, então temos

A adição de bivetores goza das seguintes propriedades

1.*Comutatividade* : $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}$;

2.*Associatividade* : $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$;

3.*Elementoneutro* : $(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{0}) = (\overrightarrow{0} + \overrightarrow{A}) = \overrightarrow{u}$;

4.*Inversoaditivo* : $(-\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{0}$.

Dado um bivetor $\overrightarrow{A}$ e um número real α sempre podemos construir um paralelogramo orientado cuja área é indicada por $|\alpha|\ \|\overrightarrow{A}\|$, observe a [figura 34].

Definição 4.19. *[Produto de escalar por bivetor]*

Dado um bivetor $\overrightarrow{A}$, e um número real α, definimos $\alpha\overrightarrow{A}$ como sendo o bivetor de norma

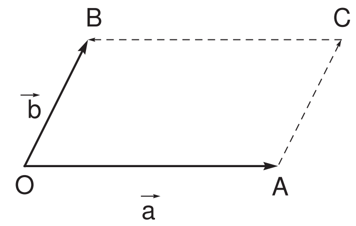

Figura 35: Vetores de mesma origem

$|\alpha|\ \|\overrightarrow{A}\|$ e mesma orientação de $\overrightarrow{A}$, se $\alpha > 0$, ou orientação oposta de $\overrightarrow{A}$, se $\alpha < 0$. Se $\alpha = 0$, definimos $\alpha\overrightarrow{A} = 0$. [figura 34].

Segue imediato da definição acima que

$$\|\alpha\overrightarrow{A}\| = |\overrightarrow{\alpha}|\,\|\overrightarrow{A}\|. \tag{4.3}$$

Dado um bivetor $\overrightarrow{A}$ então para qualquer bivetor $\overrightarrow{U}$ de norma 1 tem-se

$$\|\overrightarrow{A}\| = \begin{cases} \|\overrightarrow{A}\|\ |\overrightarrow{U}| \text{ se } \overrightarrow{A} \text{ e } \overrightarrow{U} \text{têm a mesma orientação;} \\ -\|\overrightarrow{A}\|\ |\overrightarrow{U}| \text{ caso contrário .} \end{cases}$$

Isso significa, o que é intuitivamente óbvio, que qualquer bivetor não-nulo do plano gera todos os outros.

O produto de escalar por bivetor goza das seguintes propriedades

1.*Associatividade* : $(\alpha\beta)\overrightarrow{A} = \alpha(\beta\overrightarrow{A})$;

2.*Distributividade* : $\alpha(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = \alpha\overrightarrow{A} + \alpha\overrightarrow{B}$;

3.*Distributividade* : $(\alpha + \beta)\overrightarrow{A} = \alpha\overrightarrow{A} + \beta\overrightarrow{A}$;

4.*Elemento neutro* : $1\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}$.

4.4 Produto externos de vetores

A seguir associaremos a cada par de vetores $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ um bivetor, indicado por $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, chamado de produto exterior de $\overrightarrow{u}$ por $\overrightarrow{v}$. Essa associação, do ponto de vista geométrico, é bastante natural. De fato, dado dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ podemos escolher para eles representantes $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ com mesma origem 0.[figura 35]

Seja C um ponto tal que $\overrightarrow{OACB}$ seja um paralelogramo orientado.

Definição 4.20. *[Produto externo de vetores]*

Com a notação acima, definimos o produto externo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicamos por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, como o bivetor correspondente ao paralelogramo orientado $\overrightarrow{OACB}$.

É imediato que todo bivetor no plano corresponde a um produto externo de vetores, a saber, àqueles definidos pelos lados de um paralelogramo orientado correspondente ao bivetor.

Proposição 4.21. *A proposição a seguir relaciona a norma do produto externo $\vec{u} \wedge \vec{v}$, com as normas do vetor $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

$$(\vec{u}.\vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2. \tag{4.4}$$

Demonstração:
Seja x um escalar tal que $\vec{v} = x\vec{u} + \vec{h}$, onde $\vec{h}$ corresponde à altura do paralelogramo com base $\vec{u}$ (conforme figura). Então $x = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ e, portanto

$$\|\vec{u}\| \wedge \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2. \tag{4.5}$$

Proposição 4.22. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores então*

1. *Anti – comutativa :* $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$;
2. *Associativa :* $\alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \alpha\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \alpha\vec{v}$;
3. *Distributividade :* $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Demonstração(1)e (2): Segue da proposição [4.21] que os paralelogramos determinados por $\alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$, $((\alpha\vec{u}) \wedge \alpha\vec{v})$ e $(\vec{u} \wedge \alpha\vec{v})$ têm a mesma área. Além disso temos da definição que $\alpha > 0$, todos tem a mesma orientação de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Se $\alpha < 0$ todos tem a orientação de $\vec{v} \wedge \vec{u}$. Se $\alpha = 0$, a igualdade vale trivialmente.

Demonstração(3): A igualdade é imediata da definição se $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ são colineares. Escolha $\vec{z}$ tal que $\vec{v}$ *e* $\vec{z}$ sejam colineares, e $(\vec{u} \wedge \vec{w})$ e $(\vec{u} \wedge \vec{z})$. Então

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{z}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{z}) \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}).\end{aligned}$$

Antes de prosseguir faremos duas pequenas aplicações da teoria desenvolvida até aqui.

4.5 Aplicações

4.5.1 Funções trigonométricas

Se $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$ são vetores não-nulos, os ângulos $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$ são congruentes.

Definição 4.23. *Com a notação acima, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores não-nulos, definimos o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, indicamos por $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ como a medida do ângulo $A\widehat{O}B$.*

Observe que um ângulo no plano é uma figura geométrica, enquanto o ângulo entre os vetores é um número ente 0 e 180. A seguir definimos as funções trigonométricas.

Definição 4.24. *Dado um número θ entre 0 e 180, sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores tais que $\theta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Definimos as funções $\cos\theta$ e $\sin\theta$ pelas equações*

1) $\vec{a} \,.\, \vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$;

2) $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sin\theta$;

3) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \theta \neq 90.$

Precisamos mostrar que as funções $\cos\theta$ e $\sin\theta$ estão bem definidas.

Proposição 4.25. *Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ vetores não-nulos tais que $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{c}, \vec{d})$ então*

1) $\dfrac{\vec{a} \,.\, \vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} = \dfrac{\vec{c} \,.\, \vec{d}}{\|\vec{c}\|\,\|\vec{d}\|}$;

2) $\dfrac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} = \dfrac{\vec{c} \wedge \vec{d}}{\|\vec{c}\|\,\|\vec{d}\|}$.

Demonstração:

Como os quocientes envolvidos nas equações acima não mudam por reescalonamento dos vetores, podemos supor sem perda de generalidade que $\|\vec{a}\| = \|\vec{c}\|$ e

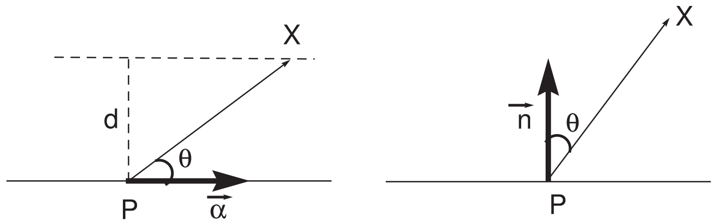

Figura 36: Distância de ponto a reta

$\|\overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{d}\|$. Nesse caso a proposição decorre do axioma de congruência de triângulos L.A.L e das identidades

$$\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 \, \|\overrightarrow{b}\|^2 - 2\,\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} \qquad e \qquad \|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\| + (\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b})^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 \, \|\overrightarrow{b}\|^2.$$

Observe a [figura 36], juntas implicam $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}\,.\,\overrightarrow{d}$ e $\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}\|$.

Proposição 4.26. *Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ vetores, e $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, então*

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \tag{4.6}$$

É imediata da definição e da identidade mais geral

$$\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\|^2 + (\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b})^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 \, \|\overrightarrow{b}\|^2. \tag{4.7}$$

4.5.2 Pontos e retas - posições relativas

Uma reta é geralmente caracterizada pelo

1) conhecimento de dois de seus pontos: P e Q;

2) conhecimento de um ponto e um vetor com representante em r (vetor direção) P e $\overrightarrow{d}$;

3) conhecimento de um ponto e um vetor com representante ortogonal a r: P e $\overrightarrow{n}$.

A seguir, escrevemos as respectivas equações para os casos 2) e 3). O caso 1) é redutível ao caso 2) tomando-se $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AB}$:

4.5.2.1 Posição relativa de ponto e reta (equação da reta)

Caso $X \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} \wedge \overrightarrow{d} = 0;$

Caso $X \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} \,.\, \overrightarrow{n} = 0;$

4.5.2.2 Distância de ponto a reta

1) $Seja\ \theta = \sphericalangle(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{d})$, então

$$d(X,r) = ||\overrightarrow{PX}|| \sin\theta = \frac{||\overrightarrow{PX} \wedge \overrightarrow{d}||}{||\overrightarrow{d}||}.$$

2) $Seja\,\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{n})$, então

$$d(X,r) = ||\overrightarrow{PX}||\,|\cos\theta| = \frac{||\overrightarrow{PX} \,.\, \overrightarrow{n}||}{||\overrightarrow{n}||}.$$

4.5.2.3 Posição relativa de duas retas

Conhecidas as direções $\overrightarrow{d_1}$ e $\overrightarrow{d_2}$ ou as direções normais $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_1}$ podemos afirmar que

1) $\overrightarrow{d_1} \,.\, \overrightarrow{d_2} = 0\ ou\ \overrightarrow{n_1}.\ \overrightarrow{n_2} = 0$ então as retas são perpendiculares;

2) $\overrightarrow{d_1} \wedge \overrightarrow{d_2} = 0\ ou\ \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = 0$ então as retas são paralelas;

Caso contrário (ambos produtos não-nulos) então as retas são oblíquas.

Conhecidas a direção $\overrightarrow{d}$ de uma reta e a direção normal $\overrightarrow{n}$ da outra temos

1) $\overrightarrow{d} \,.\, \overrightarrow{n} = 0$ então as retas são paralelas;

2) $\overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{n} = 0$ então as retas são perpendiculares;

Ambos não-nulos então as retas são oblíquas.

4.6 A álgebra geométrica do plano

A seguir consideremos o conjunto G de todos os termos $(\alpha, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{A})$, onde α é um número real, $\overrightarrow{u}$ é um vetor e $\overrightarrow{A}$ é um bivetor. Para facilitar nossa intuição, representamos esse termo pela soma livre.

$$\alpha + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{A} \tag{4.8}$$

Sejam f e g elementos de G e λ um número real, digamos

$$f = \alpha + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{A} \qquad e \qquad g = \beta + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{B}. \tag{4.9}$$

Definimos a adição $f + g$ e o produto λf por

$$f + g = (\alpha + \beta) + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}). \tag{4.10}$$

$$\lambda f = \lambda \alpha + \lambda \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{A}. \tag{4.11}$$

Onde os parênteses foram colocados apenas para enfatizar as parcelas da soma livre. A adição de elementos de G gozam das mesmas propriedades dos vetores (1 a 8)

4.6.1 Produto geométrico

Definiremos agora o produto geométrico de vetores de acordo com Grassmann. Dados vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, definimos

$$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}. \tag{4.12}$$

Segue imediatamente da definição que se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares (linearmente dependente), então

$$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} \tag{4.13}$$

Em particular se $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}$, então

$$\vec{u}\,\vec{v} = 1 \tag{4.14}$$

Isto é, os vetores possuem elementos inversos. Além disso se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, então

$$\vec{u}\,\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}. \tag{4.15}$$

Proposição 4.27. *O produto geométrico de vetores goza das seguintes propriedades (Bilinearidade)*

1. $(\alpha\vec{u})\vec{v} = \vec{u}(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\,\vec{v})$;
2. $(\vec{u} + \vec{v})\,\vec{w} = \vec{u}\,\vec{w} + \vec{v}\,\vec{w}$;
3. $\vec{u}\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,\vec{v} + \vec{u}\,\vec{w}$

Seja $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$uma base do plano. Coloquemos

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= \vec{u} \\ f_3 &= \vec{v} \\ f_4 &= \vec{u} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

Decorre da definição de G que para cada um de seus elementos g, existem números reais x_1, x_2, x_3, x_4 tais que $g = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4$.

Sejam g como acima e $h = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 + y_4 f_4$.

Se $B : G \to G$ é bilinear, é imediato que

$$B(g, h) = \sum_{i,j=1}^{4} x_i\, y_j\, B(f_i, f_j). \tag{4.16}$$

Definição 4.28. *[Aplicação bilinear associativa] Uma aplicação bilinear $B : G \to G$ é associativa se*

$$B(B(u, v), w) = B(u, B(v, w)). \tag{4.17}$$

B	1	e_1	e_2	$e_1\wedge e_2$
1	1	e_1	e_2	$e_1\wedge e_2$
e_1	e_1	**1**	$\mathbf{e_1\wedge e_2}$	$\mathbf{e_2}$
e_2	e_2	$\mathbf{-\,e_1\wedge e_2}$	**1**	$\mathbf{-\,e_1}$
$e_1\wedge e_2$	$e_1\wedge e_2$	$\mathbf{-\,e_2}$	$\mathbf{e_1}$	**-1**

Figura 37: Elementos da álgebra

Pela bilinearidade, é imediato verificar que B é associativa se e somente se

$$B(B(f_i, f_j), f_n) \;=\; B(f_i, B(f_j, f_n)). \tag{4.18}$$

Agora estamos prontos para comunicar o principal resultado dessa seção.

Teorema 4.29. *Existe uma única aplicação bilinear, associativa, $B : G \to G$ (produto) tal que*

1) $B(\alpha, A) \;=\; \alpha A \;=\; A\,\alpha \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ e\ A \in G.$

2) B estende o produto geométrico de vetores.

Demonstração:

Seja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ uma base ortonormal do plano. Vamos construir a tabela de multiplicação dos elementos 1, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$.[figura 37]

A condição 1) define a primeira linha e a primeira coluna da tabela.

A condição 2) define os elementos listados restantes.

Resta calcular

1. $e_1(e_1 \wedge e_2) = e_1(e_1\, e_2) = (e_1 e_1)\, e_2 = e_2$

2. $e_2(e_1 \wedge e_2) = -e_2(e_2 \wedge e_1) = -e_2(e_2 e_1) - (e_2 e_2) e_1 = -e_1$

3. $(e_1 \wedge e_2)e_1 = -(e_2 \wedge e_1)e_1 = -(e_2 e_1)\, e_1 = -e_2(e_1 e_1) = -e_2$

4. $(e_1 \wedge e_2)e_2 = (e_1\, e_2)e_2 = e_1(e_2 e_2) = e_1$

5. $(e_1 \wedge e_2)\,(e_1 \wedge e_2) = -(e_2 \wedge e_1)\,(e_1 \wedge e_2) = -e_2\,(e_1\,e_1)e_2 = -e_2\,e_2 = -1.$

que definem o restante da tabela.

Aqui aparece um fato notável: O elemento $I = (e_1 \wedge e_2)$ goza da propriedade

$$I^2 = -1 \tag{4.19}$$

Para completar a demonstração resta mostrar que a aplicação bilinear definida pela tabela assim completada é de fato associativa. Deixaremos essa tarefa para um leitor mais entusiasmado.

Com a notação $I = (e_1 \wedge e_2)$, podemos escrever os elementos de G na forma

$$\alpha + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\beta} I. \tag{4.20}$$

Onde $\overrightarrow{u}$ é um vetor do plano e α e β são números reais.

Concluiremos com mais duas aplicações da teoria.

4.7 Aplicações

4.7.1 Números Complexos e Rotações do plano

.

A proposição a seguir mostra que a *Álgebra Geométrica* inclui de maneira muito natural os números complexos.

Proposição 4.30. *Sejam $f = \alpha + \beta I$ e $g = \gamma + \delta I$. Então*

1. $I^2 = -1$;
2. $f\,g = g\,f$;
3. Se $f \neq 0 \neq$ então f possui inverso dado por $f^{-1} = \dfrac{\alpha - \beta I}{\alpha^2 + \beta^2}$;

Com a identificação óbvia, chamamos os elementos de G da forma $\alpha+\beta\,I$ de números complexos e I de unidade imaginária.

A unidade imaginária possui algumas propriedades úteis, que apresentaremos a seguir.

Proposição 4.31. *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano, então*

1. $I\overrightarrow{u}$ é um vetor ;
2. $I\overrightarrow{u}$ é ortogonal a $\overrightarrow{u}$;
3. $I\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}I$;
4. $\|I\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u}\,I\|$;
5. $(I\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v})\,I$;
6. $(I\overrightarrow{u})\,.\,\overrightarrow{v} = I(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$.

Demonstração:

1) Como todos os bivetores do plano são colinearesa, podemos escolher um vetor $\overrightarrow{w}$ ortogonal a $\overrightarrow{u}$ tal que

$$\begin{aligned} I &= \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}\,\overrightarrow{u} \\ I\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{w}\,\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2\,\overrightarrow{w}. \end{aligned}$$

2) $(I\,\|\overrightarrow{u}\|^2) = I\,\overrightarrow{u}^2 = (I\overrightarrow{u})\,\overrightarrow{u} = (I\overrightarrow{u}).\,\overrightarrow{u} + (I\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{u}$;

Como o primeiro membro da equação é bivetorial, concluimos que a parte real do segundo membro é nula, isto é

$$(I\overrightarrow{u}).\,\overrightarrow{u} = 0.$$

3) $(I\overrightarrow{u}).\,(I\overrightarrow{u}) = I\,\overrightarrow{u}^2\,I = \|\overrightarrow{u}\|^2 I^2 = -\|\overrightarrow{u}\|^2$. Logo $I\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{u}\,I$são colineares de direções opostas. Digamos $I\overrightarrow{u}$ *e* $-\ \alpha\,\overrightarrow{u}\,I$ para algum número real $\alpha > 0$. Então

$$-(I^2\,\overrightarrow{u}) = \alpha\,I\,\overrightarrow{u}\,I = -\,\alpha^2\,\overrightarrow{u}\,I^2 = \alpha^2\overrightarrow{u} \Rightarrow \alpha^2 =,1 \Rightarrow \alpha = 1.$$

4) $\|I\overrightarrow{u}\|^2 = (I\overrightarrow{u})^2 = (I\overrightarrow{u}).(I\overrightarrow{u}) = (I\overrightarrow{u}).(\overrightarrow{u}\,I) = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

5) e 6) $(I\overrightarrow{u})\,\overrightarrow{v}$, desenvolvendo temos $(I\overrightarrow{u}).\,\overrightarrow{v} + (I\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = I(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v})$.

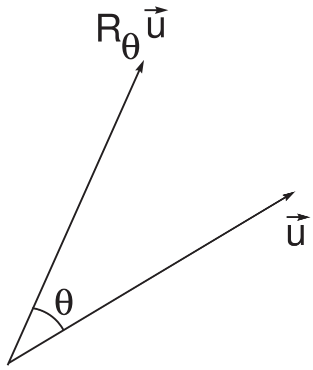

Figura 38: Rotação

Comparando as componentes númericas e as componentes bivetoriais, obtemos

$$(I\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = I(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \tag{4.21}$$

$$(I\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = I(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) \tag{4.22}$$

Para concluir, seja $R_\theta = \cos\theta + I\ \sin\theta$, então

$$R_\theta\overrightarrow{u} = \cos\theta\overrightarrow{u} + I\ \sin\theta\overrightarrow{u}. \tag{4.23}$$

Como $\overrightarrow{u}$ e $I\overrightarrow{u}$ são vetores ortogonais de mesma norma, concluimos que R_θ executa uma rotação de $\overrightarrow{u}$ por um ângulo θ. [figura 38]

5 Conclusão

Apresentamos neste trabalho a álgebra geométrica do plano segundo o formalismo introduzido por Grassmann. Esse formalismo se estende naturalmente ao espaço. De fato, como não usamos coordenadas nas definições, quase todas as demonstrações são válidas para esse ambiente. O estudo da geometria através da álgebra geométrica apresenta diversas vantagens sobre as apresentações tradicionais da geometria analítica. Entre essas vantagens, observamos que as equações dos conjuntos lineares são mais naturais e uniformes; as álgebras ”complexas”, o corpo dos compelexos, os quatérnions, e os octónions aparecem de forma natural e desmistificados; algumas transformações geométricas, notadamente as rotações, as transformações conformes, o cálculo do complemento ortogonal e das intersecções se escrevem como simples produto na álgebra. Mas, sobretudo a intuição geométrica é recuperada, pela ausência de uso de coordenadas.

Referências

[1] Barbosa, João Lucas Marques.Curso de Geométria Euclidiana Plana. Coleção Professor de Matemática-CPM, Rio de Janeiro, 1995.

[2] BOYER, Carl B. História da Matemática, Edtora:Edgard Blucher LTDA, 1999.

[3] DORAN, Chris J.L. Geometric Algebra and aplication to Mathematical Physics, 1994.

[4] EVES, Howard.Introdução à História da Matemática, Campinas-SP: Editora:Unicamp, 2004.

[5] HESTENES, David. New foundations for Classical mechanics, Edtora: D.Reidel Publishing Company, 1933.

[6] Moreira, Nathan - Vetores e Matrizes: Uma introdução à Álgebra Linear 4ªEdição,Ed:Thomson Learning, São Paulo, 2007.

[7] Mota, Cicero. Notas de aula de um curso de álgebra linear ministrado na Universidade Federal do Amazonas no ano de 2007.