UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RIGIDEZ E CONVEXIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES NA ESFERA

EDSON LOPES DE SOUZA

MANAUS
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDSON LOPES DE SOUZA

RIGIDEZ E CONVEXIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES NA ESFERA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. José Kenedy Martins

MANAUS
2007

EDSON LOPES DE SOUZA

RIGIDEZ E CONVEXIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES NA ESFERA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 19 de novembro de 2007.

BANCA EXAMINADORA

....
Prof. Dr. José Kenedy Martins, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy,
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof. Dr. Cleon da Silva Barroso,
Universidade Federal do Ceará.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela ajuda inestimável e pelas bençãos que foram graciosamente concedidas durante esses anos de estudo.

A Jesus Cristo seu Filho em quem todos os tesouros da sabedoria e do conhecimento estão ocultos.

A minha esposa de modo muito especial pelo amor e incentivos.

Ao amigo Dário Augusto que nos ajudou a traduzir o texto original do inglês para o português.

A José Kenedy Martins pela paciente orientação, Aos professores do mestrado pela experiência transmitida durante o curso, e em particular ao professor Ivan de Azevedo Tribuzy .

A SEDUC e a SEMED pelo suporte financeiro.

Aos amigos de estudo pelo apoio e excelente convivência.

É impossível expressar adequadamente toda a minha grátidão às inúmeras pessoas de onde obtive estímulo e assistência. A excelência do poder pertence a Deus, e não a nós. Exclusivamente a Ele seja todo louvor e glória.

RESUMO

RIGIDEZ E CONVEXIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES NA ESFERA

Considere uma imersão isométrica $x : M^n \to N^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana M^n, n-dimensional ($n \geq 2$), C^∞, compacta, conexa, orientável em uma variedade Riemanniana simplesmente conexa N^{n+1} de curvatura seccional constante.

Quando N^{n+1} é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e M^n tem curvaturas seccionais não-negativas, os seguintes resultados normalmente associados com os nomes de Hadamard e Conh-Vossen, já são conhecidos:

(a) A imagem $x(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é o bordo de um corpo convexo do $\mathbb{R}^{n+1}$, x é um mergulho e M^n é difeomorfa à esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Se $y : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é outra imersão isométrica, cumprindo as hipóteses acima, então existe uma isometria $\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $y = \alpha \circ x$.

O objetivo central desse trabalho é dar uma prova detalhada de uma versão do Teorema de Hadamard e Conh-Vossen, devido aos autores M. P. do Carmo e F. W. Warner, para o caso em que N^{n+1} é a esfera unitária $S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ munida com a métrica canônica induzida por $\mathbb{R}^{n+2}$, considerando a hipótese de que as curvaturas seccionais de M^n variedade Riemanniana compacta, conexa, orientável sejam maiores ou iguais que a curvatura da variedade ambiente S^{n+1}.

ABSTRACT

RIGIDITY AND CONVEXITY OF HYPERSURFACES IN SPHERE

Consider an isometric immersion $x : M^n \to N^{n+1}$ of a compact, connected, orientable, n-dimensional ($n \geq 2$), C^∞ Riemannian manifold M^n in a simply connected Riemannian manifold N^{n+1} of constant sectional curvature.

When N^{n+1} is the Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$ and M^n has non-negative sectional curvatures, the following results, usually associated with the names of Hadamard and Conh-Vossen, are already known:

(a) The image $x(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is the boundary of a convex body of $\mathbb{R}^{n+1}$, the map x is an embedding and M^n is diffeomorphic the unit sphere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) If $y : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ is another isometric immersion, fulfilling the hypotheses above, then exists an isometry $\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ such that $y = \alpha \circ x$.

The main goal of this work is to give a detailed proof of a version of the Theorem of Hadamard and Conh-Vossen due to the authors M. P. do Carmo and F. W. Warner, for the case where N^{n+1} is the unit sphere $S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ endowed with the Euclidean metric induced from $\mathbb{R}^{n+2}$, considering the hypothesis of that sectional curvatures of M^n compact, connected, orientable Riemannian manifold are bigger or equal to the curvature of the ambient manifold S^{n+1}.

Sumário

Introdução

O objetivo desse trabalho é expor em detalhes a demonstração de um teorema concernente à rigidez e a convexidade de hipersuperfícies na esfera devido aos autores M.P. do Carmo e F.W. Warner [12].

O teorema abaixo normalmente associado com os nomes de Hadamard e Cohn-Vossen, é conhecido.

Teorema: Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n, C^∞, compacta, conexa, orientável de dimensão $n(n \geq 2)$ no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Suponhamos ainda que todas as curvaturas seccionais de M^n são não-negativas, então:

(a) A imagem $x(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é o bordo de um corpo convexo do $\mathbb{R}^{n+1}$, x é um mergulho e M^n é difeomorfa à esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Se $y : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é outra imersão isométrica, cumprindo as hipóteses acima, então existe uma isometria $\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $y = \alpha \circ x$.

A parte (a) do resultado acima, para $n = 2$ e curvatura positiva foi provada primeiramente por J. Hadamard [5]. O caso $n = 2$ com curvatura não-negativa foi considerado por Chern-Lashof [19], e o resultado para n arbitrário segue de J. van Heijenoort [6] e R. Sacksteder [15]. Uma prova direta pode ser encontrada em do Carmo-Lima [13].

A parte (b) para $n = 2$ e curvatura positiva é o famoso teorema de Cohn-Vossen. Uma prova simples devida a Herglotz pode ser encontrada em [18]. O caso $n = 2$ com curvatura não-negativa foi considerado por K. Voss [7] e, independentemente, por Pogorelov [2]. A prova para o caso geral segue de R. Sacksteder [16], teorema V.

Assim, para obtermos um resultado análogo ao teorema de Hadamard e Conh-Vossen no caso de hipersuperfícies na esfera unitária $S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ com a métrica canônica de curvatura seccional constante igual a um, a idéia natural é considerar M^n com curvaturas seccionais maiores ou iguais que a curvatura da variedade ambiente S^{n+1}. Mais precisamente, provaremos o seguinte teorema (ver Teorema 3.2.3 adiante):

Teorema: Seja $x : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana C^∞, compacta, conexa, orientável, de dimensão n ($n \geq 2$), na esfera de dimensão $(n+1)$ e curvatura seccional constante igual a um. Suponhamos ainda que todas as curvaturas seccionais de M^n são maiores ou iguais a um. Então são válidos os seguintes resultados:

(a) x é um mergulho, M^n é difeomorfa à S^n e $x(M^n)$ é totalmente geodésica ou está contido num hemisfério aberto e neste caso $x(M^n)$ é o bordo de um corpo convexo em S^{n+1};

(b) x é rígida, isto é, dada outra imersão isométrica $y : M^n \to S^{n+1}$ nas mesmas condições acima, então existe uma isometria $\alpha : S^{n+1} \to S^{n+1}$ tal que $y = \alpha \circ x$.

Para demonstrar o teorema acima, o trabalho foi organizado em três capítulos. No capítulo 1, apresentaremos os conceitos fundamentais da geometria Riemanniana. No capítulo 2 veremos as transformações de Beltrami β_v que aplicam hipersuperfícies da esfera S^{n+1} em hipersuperfícies do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$. Entre outros, demonstraremos o lema 2.1.3 e a proposição 2.1.2 que aliados às transformações de Beltrami serão de suma importância na prova do Teorema 3.2.3.

Finalmente, no capítulo 3, apresentaremos alguns resultados sobre imersões isométricas que preservam operadores de curvatura. Usaremos também o teorema de R.Sacksteder [15] para demonstrar o principal teorema desse trabalho, Teorema 3.2.3.

Capítulo 1

Preliminares e Generalidades

Apresentaremos neste capítulo os conceitos fundamentais da geometria Riemanniana, (que serão necessários) para o desenvolvimento desse trabalho. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [9] e [17].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Uma variedade diferenciável de dimensão n é um par $(M, \mathcal{F})$ onde M é um conjunto e $\mathcal{F}$ é uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:

i) $M = \bigcup\limits_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha)$;

ii) Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ aí definidas são diferenciáveis.

iii) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições i) e ii), isto é, qualquer outra família está contida nesta.

Dados quaisquer par (U_α, x_α) e $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ dizemos que (U_α, x_α) é uma parametrização ou sistema de coordenadas de M em p e $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma vizinhança coordenada em p. Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo i) e ii) é chamada uma estrutura diferenciável em M.

Quando indicarmos uma variedade por M^n, o índice superior n indicará a dimensão de M.

Exemplo 1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável.

A estrutura diferenciável em variedades n-dimensionais permite resgatar o cálculo diferencial usual de $\mathbb{R}^n$ segundo as definições abaixo.

Definição 1.1.1. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável num aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.

Definição 1.1.2. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \tfrac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 1.1.3. O espaço tangente a uma variedade M^n em um ponto p, representado por T_pM, é o conjunto de todos os vetores tangentes às curvas diferenciáveis pertencentes a M passando por p. Mostra-se que o conjunto T_pM é um espaço vetorial de dimensão n e que a escolha de uma parametrização $x : U \to M$ em p determina uma base associada $\left\{(\tfrac{\partial}{\partial x_1})_0, ..., (\tfrac{\partial}{\partial x_n})_0\right\}$ em T_pM, e que a estrutura linear nesse espaço, assim definida, não depende da parametrização x.

Definição 1.1.4. (O Fibrado Tangente). O conjunto $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$, onde M é uma variedade diferenciável, munido com a estrutura diferenciável $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha)\}$ sendo $\gamma_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ definida por:

$$\gamma_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, u_1, ..., u_n) = (x_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}),$$

$(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, é chamado fibrado tangente de M. Não é difícil de provar que TM munido com a estrutura diferenciável acima é uma variedade diferenciável (de dimensão $2n$).

Proposição 1.1.1. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1^n$ e cada $v \in T_pM_1^n$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1^n$ tal que $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.

A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela Proposição 1.1.1 é chamada diferencial de φ em p.

Definição 1.1.5. sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma Aplicação $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, bijetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um difeomorfismo local em p se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo.

A seguir recordaremos alguns conceitos relacionados a topologia das variedades.

Definição 1.1.6. Um caminho em uma variedade M é uma aplicação contínua $f : [0, 1] \to M$. Se $f(0) = f(1) = p$, f é chamado caminho fechado em $p \in M$. Em particular o caminho constante $c_p : [0, 1] \to M$ definido por $c_p(s) = p$ é um caminho fechado.

Definição 1.1.7. Uma variedade M é chamada conexa quando, dados dois pontos quaisquer $p, q \in M$, existe sempre um caminho $f : [0, 1] \to M$, com $f(0) = p$ e $f(1) = q$.

Definição 1.1.8. Sejam $f : [0, 1] \to M$ e $g : [0, 1] \to M$ dois caminhos com o mesmo ponto inicial $p \in M$ e o mesmo ponto final $q \in M$. Diz-se que f é homotópico a g se existe uma função contínua $H : [0, 1] \times [0, 1] \to M$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) = f(s) \text{ e } H(0, t) = p, \\ H(s, 1) = g(s) \text{ e } H(1, t) = q. \end{aligned}$$

Definição 1.1.9. Um caminho $f : [0, 1] \longrightarrow M$ é contrátil a um ponto se ele é homotópico ao caminho constante.

Definição 1.1.10. Uma variedade M é chamada simplesmente conexa se M é conexa e se todo caminho fechado em M é contrátil a um ponto.

Intuitivamente, uma variedade M conexa por caminho é simplesmente conexa se todo caminho fechado em M pode ser deformado continuamente em um ponto sem abandonar M.

1.2 Imersões e Mergulhos

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ é dita uma imersão se $d\varphi_p : T_pM^m \longrightarrow T_{\varphi(p)}N^n$ é injetiva para todo $p \in M^m$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \subset N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N.

Observemos que se $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$, neste caso a diferença $n - m$ é chamada a codimensão da imersão φ.

A Proposição 1.2.1 nos diz que toda imersão é localmente um mergulho.

Proposição 1.2.1. Seja $\varphi : M_1^n \longrightarrow M_2^m$ uma imersão da variedade M_1 na variedade M_2. Para todo $p \in M_1$, existe uma vizinhança $V \subset M_1$ de p tal que a restrição $\varphi|V \to M_2$ é um mergulho.

Finalizaremos esta seção recordando a noção de variedades orientáveis.

Definição 1.2.1. Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, o jacobiano da diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo. Caso contrário, diz-se que M é não orientável.

Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição da definição acima é chamada uma orientação de M e M é dita orientada.

Exemplo 2. A esfera $S^n = \left\{ (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é orientável. Uma simples demonstração deste fato decorre de Elon Lima pag. 317, curso de análise vol.2, sexta edição.

1.3 Campos de Vetores

Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é a base associada a x, $i = 1, ..., n$. É claro que X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, para qualquer) parametrização.

As vezes é conveniente utilizar a idéia acima e pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ do conjunto $\mathcal{D}$ das funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathcal{F}$ das funções em M, definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde f indica, por um abuso de notação, a expressão de f na parametrição x.

Lema 1.3.1. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $\quad Zf = (XY - YX)f$.

O campo vetorial Z dado pelo Lema 1.3.1 é chamado o colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y; Z é evidentemente diferenciável.

A operação colchete possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.3.1. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M, a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:

i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade)

ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade)

iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi)

iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

O colchete [X,Y] pode também ser interpretado como uma derivação de Y ao longo das "trajetórias"de X.

Definição 1.3.1. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Diz-se que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M, a função $t \to V(t)f$ é uma função diferenciável em I.

1.4 Métricas Riemannianas

Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle , \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com

$$x(x_1, ..., x_n) = p \in x(U) \;\; e \;\; \frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, ..., 1, ..., 0),$$

então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$$

é uma função diferenciável em U.

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M, a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V. As funções $g_{ij} = g_{ji}$ são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$.

Definição 1.4.1. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana, chama-se variedade Riemanniana.

Finalizamos esta seção recordando a noção de isometria entre variedades.

Definição 1.4.2. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é chamado uma isometria se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \; para\ todo\ p \in M, \; u, v \in T_pM.$$

Se existe uma isometria entre M e N, diz-se que tais variedades são isométricas.

Seja $U \subset M$ aberto um difeomorfismo $f : U \to f(U) \subset N$, satisfazendo a condição da definição acima, chama-se uma isometria local.

1.5 Conexões Afins e Riemannianas

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ definidos em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.5.1. Seja M uma variedade diferenciável. Uma conexão afim ∇ em M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, e que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$, onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

O próximo resultado estabelece uma importante relação entre campos vetoriais e conexões afins em variedades.

Proposição 1.5.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado *derivada covariante* de V ao longo de c, tal que:

i) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c.

ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde f é uma função diferenciável em I.

iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Doravante, M indicará uma variedade diferenciável munida com uma conexão ∇.

Definição 1.5.2. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

O resultado a seguir estabelece a existência de campos paralelos ao longo de curvas diferenciáveis em M.

Proposição 1.5.2. Sejam $c : I \to M$ uma curva diferenciável e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e. $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$; $V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c.

Definição 1.5.3. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão ∇ é dita compatível com a métrica $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável c em M e qualquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $\langle P, P' \rangle =$ constante.

Proposição 1.5.3. Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão afim ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo todo par V e W de campos de vetores ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle V,W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle, \; t \in I.$$

Corolário 1.5.1. Uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \; \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M).$$

Definição 1.5.4. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \text{ para todo } X,Y \in \mathcal{X}(M).$$

Escolhendo um sistema de cordenadas $(x_1,...,x_n)$ em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i \text{ e } Y = \sum_j y_j Y_j,$$

o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i,j = 1,...,n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Teorema 1.5.1. (Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

i) ∇ é simétrica.

ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

A conexão dada pelo teorema acima é denominada *conexão de Levi-Cevita* ou conexão (*Riemanniana*) de M.

1.6 Geodésicas

Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ no ponto t_0; se γ é geodésica em t, para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica. Se $[a,b] \subset I$ e $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a,b]$ é chamada (segmento de) geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Proposição 1.6.1. Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M, p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ e uma aplicação C^∞

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M,\ \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM, |v| < \varepsilon_1\},$$

tais que a curva $t \to \gamma(t, q, v), t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $q \in V$ e cada $v \in T_qM$ com $|v| < \epsilon_1$.

A seguir apresentaremos uma propriedade das geodésicas.

Lema 1.6.1. (Homogeneidade de uma geodésica). Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av), a \in \mathbb{R}, a > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Demonstração: Seja $h : (-\delta, \delta) \to M$ uma curva dada por $h(t) = \gamma(at, q, v)$. Então $\gamma(0) = q$ e $\frac{dh}{dt}(0) = av$. Além disso, como $h'(t) = a\gamma'(at, q, v)$,

$$\frac{D}{dt}(\frac{dh}{dt}) = \nabla_{h'(t)}h'(t) = a^2\nabla_{\gamma'(at,q,v)}\gamma'(at, q, v) = 0,$$

onde na primeira igualdade, estendemos $h'(t)$ a uma vizinhança de $h(t)$ em M. Portanto, h é uma geodésica que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade av. Por unicidade,

$$h(t) = \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av). \qquad \blacksquare$$

Proposição 1.6.2. Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M, um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação C^∞, $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \to M, \mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_qM, |w| < \epsilon\}$ tal que $t \to \gamma(t, q, v), t \in (-2, 2)$, é uma geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w, para cada $q \in V$ e cada $w \in T_qM$, com $|w| < \epsilon$.

Definição 1.6.1. Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ o aberto dado pela Proposição 1.6.2. Então a aplicação $exp : \mathcal{U} \to M$ dada por

$$exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}),\ (q, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada a aplicação exponencial em $\mathcal{U}$, que é evidentemente diferenciável.

Na maior parte das aplicações, a $exp_q(tv) = exp(q, tv) = \gamma(1, q, tv)$ tem como seu domínio um aberto do espaço tangente T_qM, isto é,

$$exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \to M$$

onde $B_\epsilon(0)$ é a bola aberta de centro na origem 0 de T_qM e de raio ϵ. E observe que $exp_q(0) = q$.

Geometricamente, $exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual $|v|$, a partir de q, sobre a geodésica que passa por q com velocidade igual $\frac{v}{|v|}$.

A proposição abaixo mostra que exp_q é um difeomorfismo local numa vizinhança da origem 0 de T_qM.

Proposição 1.6.3. Dado $q \in M$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \to M$ é um difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ sobre um aberto de M.

Demonstração: Calculemos $d(exp_q)_\circ$

$$\begin{aligned} d(exp_q)_\circ(v) &= \frac{d}{dt}(exp_q(tv)) \mid_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv)) \mid_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v)) \mid_{t=0} = v. \end{aligned}$$

Logo $d(exp_q)_\circ$ é a identidade de T_qM, donde pelo teorema da função inversa, exp_q é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0. ■

Exemplo 3. Seja $M = \mathbb{R}^n$. Como a derivação covariante coincide com a usual, as geodésicas são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco. A exponencial é evidentemente a identidade com $(T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n)$.

Exemplo 4. Seja $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária de dimensão n. Todas as geodésicas de S^n são seus círculos máximos parametrizados proporcionalmente ao comprimento de arco.

1.7 Curvatura

Seja M uma variedade Riemanniana. A curvatura R de M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$, dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Exemplo 5. Seja $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, seja $Z = (z_1, ..., z_n)$, então $\nabla_X Z = (Xz_1, ..., Xz_n)$ *e* $\nabla_Y Z = (Yz_1, ..., Yz_n)$. Logo

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, ..., YXz_n), \ \nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, ..., XYz_n)$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]z_1, ..., [X,Y]z_n).$$

Portanto

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

Podemos, portanto, pensar em R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser euclidiana.

Proposição 1.7.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M goza das seguintes propriedades:

i) R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

ii) Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W, \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{D}(M), Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

iii) (Identidade de Bianchi) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$.

Observação 1.7.1. Escreveremos por conveniência, $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = = (X,Y,Z,T)$.

Proposição 1.7.2. Para todo $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$ são válidas as seguintes relações:

i) $(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$,

ii) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$,

iii) $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$,

iv) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$.

Definição 1.7.1. Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$, $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e $\{x,y\}$ uma base qualquer de σ. A curvatura seccional de σ em p, $K(\sigma) = K(x,y)$, é por definição

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x \wedge y|^2}, \tag{1.1}$$

onde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$, representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $x, y \in \sigma$.

Esta definição não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$. De fato, observemos inicialmente que podemos passar da base $\{x,y\}$ de σ para qualquer outra base $\{x', y'\}$ por iteração das seguintes transformações elementares:
a) $\{x,y\} \longrightarrow \{y,x\}$,
b) $\{x,y\} \longrightarrow \{\lambda x, y\}$,
c) $\{x,y\} \longrightarrow \{x + \lambda y, y\}$.

Agora veremos que $K(x,y)$ é invariante por tais transformações, com efeito

$a)K(y,x) = \frac{(y,x,y,x)}{|y\wedge x|^2} = \frac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2} = K(x,y)$

$b)K(\lambda x,y) = \frac{(\lambda x,y,\lambda x,y)}{|\lambda x\wedge y|^2} = \frac{\lambda^2(x,y,x,y)}{\lambda^2|x\wedge y|^2} = K(x,y)$

$$\begin{aligned} c)K(x+\lambda y,y) &= \tfrac{(x+\lambda y,y,x+\lambda y,y)}{|(x+\lambda y)\wedge y|^2} \\ &= \tfrac{(x,y,x,y)+(x,y,\lambda y,y)+(\lambda y,y,x,y)+(\lambda y,y,\lambda y,y)}{|x\wedge y+\lambda y\wedge y|^2} \\ &= \tfrac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2} \\ &= K(x,y). \end{aligned}$$

A importância da curvatura seccional é que o conhecimento de $K(\sigma)$, para todo σ, determina completamente a curvatura R.

Observação 1.7.2. Sejam $p \in M^n$ e $\{e_i, e_j\}$ uma base ortonormal qualquer de $\sigma \subset T_pM$. Então por (1.1),

$$K(e_i,e_j) = \langle R(e_i,e_j)e_i,e_j\rangle.$$

As vezes é comum usar a notação $K(e_i,e_j) = K_{ij}$ para a curvatura seccional de σ em p, segundo a base $\{e_i,e_j\}$ de σ.

1.8 Imersões Isométricas

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ com métrica $\langle , \rangle_{\overline{M}}$. Podemos induzir uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle_M$ em M pela seguinte fórmula

$$\langle v_1, v_2 \rangle_M = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle_{\overline{M}}.$$

Se M e $\overline{M}$ são variedades Riemannianas com métricas $\langle , \rangle_M$ e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$, respectivamente, então diz-se que $f : M \to \overline{M}$ é uma *imersão isométrica* se

$$\langle v_1, v_2 \rangle_M = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle_{\overline{M}} \tag{1.2}$$

Para todo $p \in M$, e para todo $v_1, v_2 \in T_pM$.

Ser isométrica implica ser uma imersão. Dizer que f é uma imersão isométrica é equivalente a dizer que $\langle , \rangle_M$ é a métrica induzida por f.

Observação 1.8.1. Como toda imersão $f : M \to \overline{M}$ é localmente um mergulho, vide Proposição 1.2.1, existe para cada $p \in M$ uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de M. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM, (q \in U)$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Usaremos tais identificaçõs para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\overline{U}$) de vetores de $\overline{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Se $v \in T_p\overline{M}, p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, v^T \in T_pM, v^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$.

Definição 1.8.1. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

Definição 1.8.2. Se X, Y são campos locais em M, então

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

define um campo local em $\overline{M}$ normal a M que não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$.

Proposição 1.8.1. Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear simétrica.

Definição 1.8.3. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, x, y \in T_pM,$$

é, pela Proposição 1.8.1, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.8.4. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a *segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor η.

Observação 1.8.2. Às vezes se utiliza também a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação B que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_pM)^{\perp}$. À aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$ por

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

A aplicação A_η é chamada de Operador de Weingarten.

Definição 1.8.5. Sejam $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão, $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. O *posto* da segunda forma fundamental II_η em p é o posto da matriz associada ao operador de Weingarten A_η.

Definição 1.8.6. (Hipersuperfície). Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão. Nesse caso particular em que a codimensão da imersão é 1, $f(M) \subset \overline{M}$ é denominada uma *hipersuperfície.*

Observe que uma hipersuperfície pode ter auto-intersecções.

Proposição 1.8.2. Sejam $p \in M, x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Suponha que N seja uma extensão local de η normal a M. Então

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Teorema 1.8.1. (Gauss). Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2, \tag{1.3}$$

onde $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ são as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente,no plano gerado por x, y de $T_pM \subset T_p\overline{M}$.

Observação 1.8.3. No caso de uma hipersuperfície $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, a fórmula de Gauss (1.3) admite uma expressão mais simples. Com efeito, sejam $p \in M$, $\eta \in (T_pM)^\perp$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para a qual $A_\eta = A$ é diagonal, ou seja, $A(e_i) = \lambda_i e_i, i = 1, ..., n$, onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os valores próprios de A. Então $H(e_i, e_i) = \lambda_i$ e $H(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$. Portanto (1.3) se escreve

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

Definição 1.8.7. Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é dita *geodésica* em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão f é *totalmente geodésica* se ela é geodésica para todo $p \in M$.

Proposição 1.8.3. Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e somente se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.

1.9 Variedades Completas

Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial exp_p está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Intuitivamente, isto significa que as variedades completas não possuem "furos"ou fronteiras.

Teorema 1.9.1. (Hopf e Rinow). Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) exp_p está definida em todo o T_pM.

b) Os limitados e fechados de M são compactos.

c) M é completa como espaço métrico.

d) M é geodesicamente completa.

e) Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M, K_n \subset K_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \to \infty$. Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

f) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = d(p,q)$.

Corolário 1.9.1. Se M é compacta então M é completa.

Definição 1.9.1. Seja N^{n+1} uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa. Um subconjunto K de N^{n+1} é dito fortemente convexo se dados p e q de K existe uma única geodésica minimizante de N^{n+1} ligando p a q, e esta geodésica está contida em K.

Definição 1.9.2. Um subconjunto conexo K de N^{n+1} é convexo se para todo ponto p do fecho $\overline{K}$ de K existe um número $\epsilon = \epsilon(p) > 0$ tal que $K \cap B_\epsilon(p)$ é fortemente convexo, onde $B_\epsilon(p)$ é a bola aberta de centro em p e raio ϵ.

Definição 1.9.3. Se K é convexo (fortemente convexo) e o interior $intK$ de K em N^{n+1} é não-vazio, dizemos que K é um corpo convexo (fortemente convexo) de N^{n+1}.

Definição 1.9.4. Dizemos que uma subvariedade M^n de N^{n+1} é convexa (fortemente convexa) se M^n é o bordo de um corpo convexo (corpo fortemente convexo) de N^{n+1}.

1.10 Hessiano e Função Altura

Mais adiante, faremos uso de uma relação clássica (Proposição 1.10.1) entre a segunda forma fundamental e o Hessiano da função altura definida a seguir, a qual será decisiva na demonstração dos lemas 2.1.2 e 2.1.3.

Definição 1.10.1. Seja M uma variedade diferenciável e $u : M \to \mathbb{R}$ uma função C^∞. Um ponto $p \in M$ é ponto crítico de u, se $du_p(w) = 0, \forall w \in T_pM$.

Se p é um ponto crítico de u, então o Hessiano de u em p, Hess u, é uma forma bilinear em T_pM, definida da seguinte forma:

Definição 1.10.2. Sejam $x, y \in T_pM$ e X um campo vetorial C^∞ definido numa vizinhança de p em M tal que $X(p) = x$. Então,

$$(\text{Hess } u)(x,y) = y(Xu).$$

Como $du_p = 0$, temos que (Hess $u)(x,y)$ não depende da escolha do campo X e além disso Hess u é simétrica [17].

Sejam $I : M^n \to \overline{M}^m$ uma imersão, V uma vizinhança de coordenadas normais em $\overline{M}$ em torno do ponto p e $v_1, ..., v_m$ coordenadas normais em V, tais que $V_1(p) = \frac{\partial}{\partial v_1}(p), ..., V_m(p) = \frac{\partial}{\partial v_m}(p)$ é uma base ortonormal de $T_p\overline{M}$, onde $V_1(p), ..., V_n(p)$ são tangentes à M e $V_{n+1}(p), ..., V_m(p)$ são normais à M.

Suponhamos agora que $p \in M$ seja um ponto crítico de u, isto é, $du_p(w) = 0, \forall w \in T_pM$, como $du_p(w) = \sum_{i=i}^{m} a_i(dv_i)_p(w) = \left\langle \sum_{i=1}^{m} a_i V_i(p), w \right\rangle$, concluímos que

$$du_p(w) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i V_i(p) \in (T_pM)^{\perp}.$$

Definição 1.10.3. Sejam $I : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão, e $p \in M^n$ um ponto crítico de $u = v_1\Big|_M$. Então $\frac{\partial}{\partial v_1}(p) \in (T_pM)^{\perp}$. A função u é chamada de função altura da hipersuperfície relativamente ao plano tangente T_pM.

A seguir calcularemos o hessiano da função altura, $(\text{Hess } u)(x, x), x \in T_pM$.

Seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x$. Seja X extensão local de $\gamma'(t)$ a $\overline{M}$, tangente à M, e suponhamos X em coordenadas, dado por $X = \sum_{i=1}^{n+1} g_i V_i$, temos

$$\begin{aligned} Xu &= Xv_1 = dv_1(X) = g_1, \text{ portanto} \\ (\text{Hess } u)(x, x) &= x(Xu) = xg_1. \end{aligned}$$

Proposição 1.10.1. Seja $I : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão, V uma vizinhança de coordenadas normais em $\overline{M}$ no ponto p, $u = \sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i$, onde v_i são coordenadas normais em V. Suponha que $\sum_{i=1}^{n+1} a_i V_i(p) \in (T_pM)^{\perp}$. Então u tem um ponto crítico em p, e o Hessiano, Hess u em p, é o negativo da segunda forma fundamental em p, isto é, $(\text{Hess } u)(x, x) = -II_p(x), \forall x \in T_pM$.

Demonstração: Para todo $w \in T_pM$, vem que $du_p(w) = \sum_{i=i}^{n+1} a_i(dv_i)_p(w) = \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} a_i V_i(p), w \right\rangle = 0$, pois $\sum_{i=1}^{n+1} a_i V_i(p) \in (T_pM)^{\perp}$, assim p é um ponto crítico de u.

Para simplificar, suponhamos que $u = v_1\Big|_M$ tem um ponto crítico em p, assim $\frac{\partial}{\partial v_1}(p) \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N extensão local de $\frac{\partial}{\partial v_1}(p)$ normal à M, como $II_p(x) = \langle \overline{\nabla}_x N, X \rangle_p$, onde X é tangente a M e $X(p) = x$. Vem,

$$X\langle X, N \rangle = \langle \overline{\nabla}_X X, N \rangle + \langle X, \overline{\nabla}_X N \rangle,$$

aplicando no ponto p, temos

$$0 = x\langle X, N\rangle_p = \langle \overline{\nabla}_x X, N\rangle_p + \langle X, \overline{\nabla}_x N\rangle_p \ ,$$

donde $II_p(x) = -\langle \overline{\nabla}_x X, N\rangle_p$. por outro lado, $X = \sum\limits_{i=1}^{n+1} g_i V_i$ é a extensão local de $\gamma'(t)$ a $\overline{M}$, tangente a M, onde $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma geodésica com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x = X(p)$, assim calculando $\overline{\nabla}_x X$ teremos,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_x X &= \overline{\nabla}_x \left(\sum_{i=1}^{n+1} g_i V_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (\overline{\nabla}_x V_i) g_i(p) + \sum_{i=1}^{n+1} (x g_i) V_i(p) \\
&= \overline{\nabla}_x \left(\sum_{i=1}^{n+1} g_i(p) V_i \right) + \sum_{i=1}^{n+1} (x g_i) V_i(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (x g_i) V_i(p), \text{ pois } \ v_1, ..., v_{n+1} \ \text{ são coordenadas normais em } \overline{M}
\end{aligned}$$

portanto, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} g_i(p) V_i$ é um campo tangente a geodésica na direção de x, assim

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_x X, N\rangle_p &= \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} (x g_i) V_i(p), V_1(p) \right\rangle \\
&= x g_1 \text{ , isto é,}
\end{aligned}$$

$$II_p(x) = -x g_1 = - \text{ (Hess } u)(x, x).$$

$\blacksquare$

Capítulo 2

Resultados Parciais

2.1 Transformações de Beltrami

O principal resultado deste trabalho é uma versão análoga do teorema de R. Sacksteder para para a esfera euclidiana unitária. O objetivo desta secção é apresentar uma técnica que permita transferir o problema posto na esfera para o espaço euclidiano para então usarmos o teorema de Sacksteder de forma decisiva na solução do mesmo. Tal técnica consiste em usar as conhecidas transformações de Beltrami que definiremos a seguir.

Sejam S^{n+1} a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+2}$, $v \in S^{n+1}$, H_v o hemisfério aberto de S^{n+1} centrado em v e $S_v \subset \mathbb{R}^{n+2}$ o hiperplano tangente a S^{n+1} em v.

Definição 2.1.1. Seja $\beta_v : H_v \to S_v$ a aplicação que leva um ponto $p \in H_v$ na intersecção de S_v com a reta que liga p a origem de S^{n+1}, esta aplicação é chamada de Transformação de Beltrami.

No caso particular em que v é o pólo norte, $e = (0, 0, ..., 0, 1) \in S^{n+1}$, denotaremos a aplicação de Beltrami correspondente por β_e , o hemisfério norte aberto por H_e e o hiperplano tangente ao pólo norte por S_e. Se os pontos de H_e são denotados por $(n+2)-$ulplas $(x_1, x_2, ..., x_{n+1}, x_{n+2})$ de números reais com

$$\sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 = 1,$$

então a transformação de Beltrami β_e é dada explicitamente por:

$$\beta_e(x) = \left(\frac{x_1}{x_{n+2}}, \frac{x_2}{x_{n+2}}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}, 1 \right)$$

Proposição 2.1.1. A transformação de Beltrami β_e possui as seguintes propriedades:

i) β_e é um difeomorfismo

ii) β_e é uma aplicação geodésica, isto é, leva geodésicas da esfera em geodésicas (retas) do hiperplano tangente S_e , considerado com a estrutura Riemanniana usual do $\mathbb{R}^{n+2}$.

Demonstração: i) Mostraremos que β_e admite inversa, com efeito, sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+2}) \in H_e$, $\beta_e(x) = y = (y_1, y_2, ..., y_{n+1}, 1) \in S_e$, pela definição de β_e, temos que $y_i = \frac{x_i}{x_{n+2}}$, $1 \leq i \leq n+1$.

Assim $x_i = y_i x_{n+2}$, como $\sum\limits_{k=1}^{n+2} x_k^2 = 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k^2 + x_{n+2}^2 = 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k^2 x_{n+2}^2 + x_{n+2}^2 = 1 \Rightarrow x_{n+2}^2 \left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k^2 + 1 \right) = 1 \Rightarrow x_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k^2}}$, e, $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{1+\sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k^2}}$.

Portanto,

$$\beta_e^{-1} = \begin{cases} x_i = \dfrac{y_i}{\sqrt{1+\sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k^2}} & ,1 \leq i \leq n+1 \\ \\ x_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k^2}}. & \end{cases}$$

Como β_e e β_e^{-1} são diferenciáveis, o que é óbvio a partir das expressões de β_e e β_e^{-1}, conclui-se que β_e é um difeomorfismo.

ii) Uma geodésica em S^{n+1} é uma esfera de dimensão n totalmente geodésica, isto é, esfera obtida pela intersecção de S^{n+1} com um plano P de dimensão 2, que passa pela origem de $\mathbb{R}^{n+2}$. O plano P tem equações,

$$\sum_{i=1}^{n+2} a_{1i} x_i = 0, \ \sum_{i=1}^{n+2} a_{2i} x_i = 0 \ , ..., \ \sum_{i=1}^{n+2} a_{ni} x_i = 0, \text{ isto é,}$$

$P = \bigcap\limits_{j=1}^{n} P_j$, onde cada P_j é um hiperplano de dimensão $(n+1)$, de $\mathbb{R}^{n+2}$, e os vetores $v_j = (a_{j1}, ..., a_{jn+2})$ são linearmente independentes.

Sendo $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+2}) \in H_e$, e $\beta_e(x) = y = (y_1, y_2, ..., y_{n+1}, 1) \in S_e$, Pelo item i), temos que

$$x_i = \frac{y_i}{\sqrt{1 + \sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k^2}}, \quad 1 \leq i \leq n+1$$

$$x_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k^2}}$$

Se $x \in (P \cap S^{n+1})$, isto é, x pertence a uma geodésica de S^{n+1}, e sabendo que $\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_{ji}x_i + a_{jn+2}x_{n+2} = 0,\ 1 \leq j \leq n$,
Obtemos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ji}y_i + a_{jn+2} = 0 \tag{2.1}$$

Como os vetores $v_j = (a_{j1}, a_{j2}..., a_{jn+2})$, são linearmente independentes, o sistema (2.1) de n equações com $(n+1)$ variáveis, tem solução com $(n+1-n) = 1$ variável livre, fazendo por exemplo $y_{n+1} = s$, vem que

$$y_i = b_i s + c_i, \quad \text{com } b_i, c_i \in \mathbb{R}, \text{ para todo } \ 1 \leq i \leq n.$$

Desta forma, a imagem por β_e de uma geodésica em H_e é uma reta em S_e, isto é, β_e é geodésica

■

De maneira análoga, as transformações de Beltrami β_v, $\forall v \in S^{n+1}$, são difeomorfismos e geodésicas, pois para cada $v \in S^{n+1}$, existe uma rotação $\delta : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ com $\delta(v) = e$ tal que $\beta_v = \beta_e \circ \delta$.

Lema 2.1.1. Seja m um ponto de uma hipersuperfície orientada M em $\mathbb{R}^{n+1}$, e suponha que numa vizinhança de m na hipersuperfície, os autovalores das segundas formas fundamentais não tem sinais diferentes. Então existe uma vizinhança de m na hipersuperfície que está do mesmo lado do hiperplano tangente em m.

Demonstração: Para simplificar, podemos supor sem perda de generalidade que m é a origem 0 de $\mathbb{R}^{n+1}$ e, que a hipersuperfíce M seja o gráfico da equação $z = f(x)$, numa vizinhança U da origem, onde f é uma função real definida no disco aberto unitário D de centro na origem, contigo em $\mathbb{R}^n$, com $f(0) = 0$ e que todas as derivadas parciais de primeira ordem de f são nulas na origem.

Podemos supor também que a hipersuperfície é orientada de modo que o unitário normal na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, esteja na direção positiva do eixo z e que todos os autovalores das segundas formas fundamentais em U são negativos ou nulos. Pela Proposição 1.10.1, os autovalores do hessiano da função altura são todos positivos ou nulos. Provaremos que U está de um mesmo lado de seu hiperplano tangente a M na origem, isto é, provaremos que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in D$.

Suponhamos que exista um ponto $p \in D$, onde $f(p) < 0$. Como $\|p\| < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{\|p\|} \Rightarrow [0,1] \subset J$, onde $J = \left(\frac{-1}{\|p\|}, \frac{1}{\|p\|}\right)$.

Seja $h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(t) = f(tp)$. Então, $h(0) = 0$ e $h(1) = f(p) < 0$, assim, pelo Teorema do valor médio, existe $t_1 \in (0,1)$ com $h'(t_1) = f(p) < 0$.

Como $h'(0) = f'(0).p = 0$, aplicando novamente o Teorema do valor médio a $h'(t)$, encontraremos um $t_0 \in (0, t_1)$ tal que

$$h''(t_0) = \frac{h'(t_1) - h'(0)}{t_1 - 0} = \frac{h'(t_1)}{t_1} < 0.$$

Consideremos a curva $P(t)$ na hipersuperfície, dada por $P(t) = (tp, f(tp))$ e seja h_0 a função altura da hipersuperfície, relativamente ao hiperplano tangente $T_0 = T_{P(t_0)}M$ em $P(t_0)$ e X um campo de vetores paralelos em T_0 determinado por $P'(t_0)$. Provaremos que a segunda derivada $X^2(h_0)$ no ponto $q = P(t_0)$, origem de T_0, é negativa, isto contradirá o fato de que o hessiano de h_0 na origem de T_0 é semi-definido positivo.

A altura de $P(t)$ acima do plano tangente T_0 é dada por

$$h_0(t) = \langle P(t) - P(t_0), n \rangle,$$

onde n é o vetor unitário normal à M em $P(t_0)$ e $\langle\ ,\rangle$ denota o produto interno Euclidiano usual em $\mathbb{R}^{n+1}$. Como,

$$h_0(t) = h_0(P(t)), \text{ e } X = P'(t_0), \text{ temos,}$$

$$\begin{aligned} h_0'(t) &= dh_0\Big|_{P(t)}.P'(t), \text{ em } t = t_0, \text{teremos,} \\ h_0'(t_0) &= dh_0\Big|_{P(t_0)}.X = (X(h_0)).(P(t_0)) \\ &= (X(P(t_0))).h_0\Big|_{P(t_0)} \\ &= X(h_0).(P(t_0)) = X(h_0) \end{aligned}$$

Usando o fato que $h_0'(t) = h_0'(P(t))$, vem que

$$
\begin{aligned}
h_0''(t) &= dh_0'\Big|_{P(t)}.P'(t), \text{em } t = t_0, \text{ obtemos} \\
h_0''(t_0) &= dh_0'\Big|_{P(t)}.X = (X(h_0')).(P(t_0)) \\
&= (X(P(t_0))).h_0'\Big|_{P(t_0)} = X(h_0').(P(t_0)) = X(h_0') \\
&= X(X(h_0)) = X^2(h_0).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$h_0''(t_0) = \langle P''(t_0), n\rangle = \langle (0, h''(t_0)), n\rangle$$

Como n é o vetor unitário normal à M em $P(t_0)$, n está na direção do gradiente de F, onde $F(x) = (x, f(x)),\ x \in D$. Mas,

$$\nabla F(t_0p) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(t_0p), ..., -\frac{\partial f}{\partial x_n}(t_0p), 1\right), \text{ segue que,}$$

$$n = \frac{(-\nabla f(t_0p), 1)}{\|(-\nabla f(t_0p), 1)\|}, \text{ resulta então que,}$$

$$h_0''(t_0) = \frac{h''(t_0)}{\|(-\nabla f(t_0p), 1)\|} < 0, \text{ pois } h''(t_0) < 0,$$

Assim (Hess $h_0)(q, q) < 0$, o que é absurdo

■

O lema que demonstraremos agora, é uma versão do lema acima para hipersuperfície na esfera, o qual é de suma importância para a demonstração da Proposição 2.1.2.

Lema 2.1.2. Seja m um ponto de uma hipersuperfície orientada M em S^{n+1}, e suponha que numa vizinhança de m na hipersuperfície, os autovalores das segundas formas fundamentais não tem sinais diferentes. Então existe uma vizinhança de m na hipersuperfície que está do mesmo lado da hiperesfera tangente em m.

Demonstração: Argumentaremos por contradição: Suponhamos que a hipersuperfície corte sua hiperesfera tangente em m, isto é, que toda vizinhança de m, em M, tem pontos de ambos os lados da hiperesfera tangente à M em m. Consideremos uma vizinhança U de m na hipersuperfície, onde os autovalores das segundas formas fundamentais são negativas ou nulos, a vizinhaça U pode ser obtida mudando a orientação de M se necessário. Pela Proposição 1.10.1, os autovalores dos hessianos das funções alturas em U são positivos ou nulos. Transferiremos esta hipersuperfície, mantendo sua orientação, para o espaço Euclidiano S_m via aplicação de Beltrami β_m.

Como β_m é um difeomorfismo, implica que $\beta_m(U)$ tem pontos de ambos os lados de seu hiperplano tangente em $\beta_m(m)$, dessa forma pelo Lema 2.1.1, existe um ponto $\beta_m(p) \in \beta_p(U)$ onde o hessiano da função altura h, em $\beta_m(U)$ tem um autovalor negativo, portanto na direção do autovetor correspondente, a hipersuperfície $\beta_m(U)$ encontra-se do mesmo lado do seu hiperplano tangente em $\beta_m(p)$, oposto à direção normal orientada. Afirmamos que o hesssiano da função altura para U em p, tem também um autovalor negativo, o que nos fornecerá uma contradição.

Seja $V \subset \beta_m(U)$, uma vizinhança de $q = \beta_m(p)$, tal que $exp_q : T_qV \to V$ seja um difeomorfismo.

$TqV \approx \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \oplus (T_qV)^{\perp}$, com $T_pS^{n+1} \approx \mathbb{R}^{n+1}$ e $(T_qV)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_qV em T_pS^{n+1}.

Sejam $\theta : \mathbb{R}^n \to T_qV \subset \mathbb{R}^{n+1}$ parametrização de T_qV, dada por $\theta(x) = (x, 0)$ e $\lambda : \mathbb{R}^n \to V$ parametrização de V dada por $\lambda(x) = (x, h(exp_q x))$. Assim, temos que,

$$\theta'(0) = (I, 0) \text{ e } \lambda'(0) = (I, h'(q)) = (I, 0),$$

onde $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade e $h'(q) = 0$, pois q é ponto crítico da função altura h.

Por outro lado, $\theta''(0) = (0, 0)$ e $\lambda''(0) = (0, h''(q)(I, I))$, e como algum autovalor do hessiano de h em $q = \beta_m(p)$ é negativo, temos que $\theta''(0) \neq \lambda''(0)$.

Assim, concluimos que $V \subset \beta_m(U)$ e T_qV tem contato de ordem exatamente um na direção do autovetor correspondente. Isto é, existe um par de curvas, uma na superfície $\beta_m(U)$ e outra em seu plano tangente em $\beta_m(p)$ ambas passando por $q = \beta_m(p)$, tangentes à esta auto-direção e tendo contato de ordem exatamente um em $\beta_m(p)$, e além disso, nenhum par de curvas nas mesmas condições acima, terá contato de ordem maior.

Como o contato é preservado por difeomorfismo [4, p.80], a hipersuperfície U e sua hiperesfera tangente em p tem contato de ordem exatamente um na direção correspondente.

Portanto, nessa direção, a função altura em p, tem derivada segunda não-nula que é necessariamente negativa, pois nessa direção a hipersuperfície U está localmente no lado da sua hiperesfera tangente em p, oposta a direção normal orientada. Portanto, o hessiano da função altura em p não é semí-definido positivo, que é uma contradição. ■

Lema 2.1.3. Seja $x : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa M na esfera S^{n+1}, e sejam $v \in S^{n+1}$, $N = x^{-1}(H_v)$ e $\tilde{x} = \beta_v \circ x\Big|_N$. Então a estrutura Riemanniana em N induzida pela imersão $\tilde{x} : N \to S_v$ é também completa.

Demonstração: Seja $\{p_i\}$ uma seqüência de Cauchy em N com respeito a métrica induzida por $\tilde{x}$, e seja $q_i = x(p_i) \in H_v \subset \overline{H}_v$. Como $\overline{H}_v$ é compacto, a seqüência $\{q_i\}$, ou passando a uma subseqüência se necessário, converge para um ponto $q \in \overline{H}_v$. Como x é uma imersão isométrica da variedade Riemanniana completa M em S^{n+1}, $q = x(p)$ para algum $p \in M$. Mas $q \in H_v$, pois se $q \in \overline{H}_v \backslash H_v$, então seqüência $\{\beta_v(q_i)\}$ divergiria para ∞ em S_v, que é impossível tendo em vista que $\{p_i\}$ é uma seqüência de Cauchy em N com respeito a métrica induzida por $\tilde{x} = \beta \circ x$. Assim $q \in H_v$, donde $p \in N$. Assim a seqüência $\{\beta_v(q_i)\}$ converge para $\beta_v(q)$, segue que a seqüência de Cauchy $\{p_i\}$ converge para p na métrica induzida por $\tilde{x}$.

∎

Utilizando as Transformações de Beltrami, iremos demonstrar agora, uma Proposição que relaciona as curvaturas seccionais de uma hipersuperfície na esfera, com as curvaturas seccionais da hipersuperfície obtida pela pela transformação de Beltrami.

Se X é uma variedade Riemanniana, K denotará a função que associa a cada 2-plano tangente a X, sua curvatura seccional segundo esse plano.

Proposição 2.1.2. Sejam $v \in S^{n+1}$, $X \subset H_v$ uma hipersuperfície e $\widetilde{X}$ a hipersuperfície $\beta_v(X)$ em S_v. Então, são válidos os seguintes resultados:

a) $K \geq 1$ em todo $p \in X$, se e somente se, $\widetilde{K} \geq 0$ em todo ponto de $\widetilde{X}$, onde $\widetilde{K}$ denota a curvatura seccional de $\widetilde{X}$. Além disso,

b) Se $K \geq 1$, e se o posto da segunda forma fundamental para X em $p \in X$ for r, $0 \leq r \leq n$, então o posto da segunda forma fundamental para $\widetilde{X}$ em $\beta_v(p)$ é também r.

Demonstração: a) Seja $p \in X$ e suponha que $K \geq 1$. Se $\sigma \subset T_pM$ é um subespaço bidimensional, então pela fórmula de Gauss (1.3), sabemos que a curvatura seccional $K(\sigma)$ é dada por

$$K(x, y) = 1 + B_p(x, x).B_p(y, y) - [B_p(x, y)]^2,$$

Onde B_p é a segunda forma fundamental para a hipersuperfície X em p, e $\{x, y\}$ é uma base ortonormal de σ. O sinal de B_p depende da escolha de um dos dois normais unitários em p, vamos supor então a escolha contínua de um dos dois normais em uma vizinhança de p.

Suponhamos primeiro que nem todos dos autovalores de B_p são nulos. Como $K \geq 1$, segue que todos os autovalores não-nulos de B_p terão o mesmo sinal, e numa vizinhança de p, todos os autovalores não-nulos das segundas formas fundamentais para X terão este mesmo sinal fixo. Pelo Lema 2.1.2, a hipersuperfície X está do mesmo lado da hiperesfera tangente em p. Como a transformação de Beltrami β_v transporta esta hiperesfera para o hiperplano S_v, $\widetilde{X}$ deve estar localmente do mesmo lado de seu hiperplano tangente em $\beta_v(p)$.

Assim todas as curvaturas seccionais de $\widetilde{X}$ em $\beta_v(p)$ são maiores ou iguais a zero, pois se houvesse uma curvatura seccional negativa em $\beta_v(p)$, $\widetilde{X}$ estaria em ambos os lados de seu hiperplano tangente em $\beta_v(p)$.

Suponhamos agora, que todos os autovalores de B_p são nulos. Assim, os autovalores de B_p são identicamentes nulos numa vizinhança de p, ou cada vizinhança de p contem pontos nos quais existem autovalores não-nulos da segunda forma fundamental para X. No primeiro caso, teríamos X totalmente geodésica nessa vizinhança, e como β_v é geodésica, $\widetilde{X}$ é totalmente geodésica numa vizinhança de $\beta_v(p)$, logo $\widetilde{K} = 0$, isto é, $\widetilde{X}$ é localmente plana na vizinhança de $\beta_v(p)$.

No segundo caso, isto é, se cada vizinhança de p contem pontos nos quais existem autovalores não-nulos da segunda forma fundamental para X, então existe uma seqüência $\{p_i\}$ em X convergindo para p, tal que as curvaturas seccionais em $\beta_v(p_i)$ são todas maiores ou iguais a zero, por continuidade, as curvaturas seccionais são todas maiores ou iguais a zero, dessa forma $\widetilde{K} \geq 0$.

Um argumento análogo na direção contrária mostra a recíproca, a saber, se $\widetilde{K} \geq 0$ em todo $q \in \widetilde{X}$, então $K \geq 1$ em todo $p = \beta_v^{-1}(q) \in X$.

b) Suponhamos agora que o posto de B_p seja r. Assim, o hessiano da função altura para X em p tem posto r. Se além disso $K \geq 1$, ou seja, os autovalores da segunda forma fundamental tem o mesmo sinal, existe um subespaço de dimensão r, A de T_pX, onde o hessiano é positivo definido ou negativo definido. Segue-se que em cada direção em A, a hipersuperfície X tem contato de ordem exatamente um com a hiperesfera tangente em p. Como o contato é preservado pelo difeomorfismo β_v, existe um subespaço de $\widetilde{X}_{\beta_v(p)}$ de dimensão r, em que $\widetilde{X}$ tem contato de ordem exatamente um com o seu hiperplano tangente em $\beta_v(p)$. Consequentemente, o posto do hessiano da função altura para $\widetilde{X}$ em $\beta_v(p)$ deve ser no mínimo r, assim,

$$\text{posto de } B_p \leq \text{posto de } \widetilde{B}_{\beta_v(p)}, \text{ onde}$$

$\widetilde{B}_{\beta_v(p)}$ é a segunda forma fundamental para $\widetilde{X}$ em $\beta_v(p)$.

De maneira análoga, se o posto de $\widetilde{B}_{\beta_v(p)}$ é r, então o hessiano da função altura para $\widetilde{X}$ em $\beta_v(p)$ tem posto r. Se além disso $K \geq 1$, segue do item a) que $\widetilde{K} \geq 0$, assim existe um subespaço de dimensão r, $\widetilde{A}$ de $T_{\beta_v(p)}\widetilde{X}$, onde o hessiano é positivo definido ou negativo definido. Segue-se que em cada direção em $\widetilde{A}$, a hipersuperfície $\widetilde{X}$ tem contato de ordem examente um com a hiperesfera tangente em $\beta_v(p)$. Como o contato é preservado pelo difeomorfismo β_v^{-1}, existe um subespaço de T_pX de dimensão r, em que X tem contato de ordem exatamente um com sua hiperesfera tangente em p. Consequentemente, o posto do hessiano da função altura para X em p deve ser no mínimo r, isto é,

$$\text{posto de } B_p \geq \text{posto de } \widetilde{B}_{\beta_v(p)},$$

Portanto,

$$\text{posto de } B_p = \text{posto de } \widetilde{B}_{\beta_v(p)}$$

■

Observação 2.1.1.

a) Segue da Proposição 2.1.2 que um ponto em X no qual todas as curvaturas seccionais são estritamente maiores que um, é aplicado por $\beta_v(p)$ num ponto de $\widetilde{X}$ onde todas as curvaturas seccionais são estritamente maiores que zero, e vice-versa.

b) Teria sido mais fácil na Proposição 2.1.2, se a hipótese $K \geq 1$ fosse suficiente para garantir que X é localmente convexo na esfera. Pois se assim fosse, como a transformação de Beltrami β_v é geodésica, segueria imediatamente que $\widetilde{X} = \beta_v(X)$ seria localmente convexo no espaço Euclidiano S_v, implicando que todas as curvaturas seccionais para $\widetilde{X}$ são não-negativas. No entanto, deve-se observar que sem alguma condição global, o fato de $K \geq 1$ não é suficiente para assegurar a convexidade local de X em S^{n+1}, como veremos no exemplo abaixo adaptado de [15].

Seja $z = x^3(1 + y^2)$ a superfície Σ em $\mathbb{R}^3$, definida em uma pequena vizinhança da origem, com $|y| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, e seja $\alpha : \mathbb{R}^3 \to S_v$ uma isometria preservando as origens, e consideremos a superfície $\beta_v^{-1}(\alpha(\Sigma))$ em S^3.

Por um cálculo simples, vê-se que a curvatura de Σ é dada por,

$$K = \frac{12x^4(1 - 2y^2)}{[1 + 9x^4.(1 + y^2)^2 + (2x^3.y)^2]^2},$$

Como $|y| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos que $K \geq 0$. Portanto, pela Proposição 2.1.2, a curvatura de $\beta_v^{-1}(\alpha(\Sigma))$ é maior ou igual a um. Mas Σ "atravessa"seu plano tangente na origem, logo Σ não é localmente convexa em 0. Como a transformação de Beltrami β_v é geodésica, segue que $\beta_v^{-1}(\alpha(\Sigma))$ não é localmente convexa em $\beta_v^{-1}(0)$.

O Teorema principal desse trabalho, mostrará que essa parte da superfície não pode ser estendida para uma superfície compacta em S^3 com curvaturas seccionais maiores ou iguais a um.

2.2 Formas Diferenciais

Esta seção tem como principal objetivo apresentar os conceitos fundamentais de Formas Diferenciais em $\mathbb{R}^n$, a partir daí obteremos alguns resultados que serão utilizados posteriormente. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [10] e [11].

A fim de fixar as idéias, vamos inicialmente introduzir as definições em $\mathbb{R}^3$.

Seja p um ponto de $\mathbb{R}^3$. O conjunto de vetores aplicados em p, chamado *espaço tangente* de $\mathbb{R}^3$ em p, será denotado por $\mathbb{R}^3_p$. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ da base canônica do $\mathbb{R}^3$ serão identificados com os seus translados $(e_1)_p\ , (e_2)_p\ , (e_3)_p$ ao ponto p.

Definição 2.2.1. Um campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação v que a cada ponto $p \in \mathbb{R}^3$ associa $v(p) \in \mathbb{R}^3_p$; v pode ser escrito na forma

$$v(p) = a_1(p)e_1 + a_2(p)e_2 + a_3(p)e_3.$$

O campo de vetores v diz-se *diferenciável* quando as funções $a_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ são diferenciáveis.

Para cada espaço tangente $\mathbb{R}^3_p$, consideremos o espaço dual $(\mathbb{R}^3_p)^*$, que é o conjunto das funções lineares $\varphi : \mathbb{R}^3_p \to \mathbb{R}$. Uma base para $(\mathbb{R}^3_p)^*$ é obtida tomando $(dx_i)_p\ , i = 1, 2, 3$, onde $x_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a projeção na i-ésima coordenada. De fato, o conjunto $\{(dx_i)_p\ , 1 \leq i \leq 3\}$ forma uma base, pois $(dx_i)_p \in (\mathbb{R}^3_p)^*$, e

$$(dx_i)_p(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j; \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

isto é, $\{(dx_i)_p\}$ é a base dual de $\{(e_i)_p\}$.

Definição 2.2.2. Um campo de formas lineares ou formas exteriores de grau 1 em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação ω que a cada $p \in \mathbb{R}^3$ associa $\omega(p) \in \mathbb{R}^3_p)^*$;

ω pode ser escrito na forma

$$\omega(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p$$

ou

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} a_i dx_i \ ,$$

onde a_i são funções definidas em $\mathbb{R}^3$ e tomando valores em $\mathbb{R}$; ω chama-se uma forma exterior contínua quando as funções a_i são contínuas. Se as funções a_i forem diferenciáveis ω chama-se uma forma diferenciável de grau 1.

Seja $\Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$ o conjunto das aplicações $\varphi : \mathbb{R}^3_p \times \mathbb{R}^3_p \to \mathbb{R}$ (isto é, lineares em cada variável) e alternada (isto é $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$). Com as operações usuais de funções, o conjunto $\Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$ se torna um espaço vetorial.

Se φ_1 e φ_2 são formas lineares podemos obter um elemento $\varphi_1 \times \varphi_2$ em $\Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$ definido por

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) = det(\varphi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix}$$

O elemento $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$ será indicado por $(dx_i \wedge dx_j)_p$. O conjunto $\{(dx_i \wedge dx_j)_p, i < j\}$ forma uma base para o espaço $\Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$. Além disso,

$$(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p$$

e

$$(dx_i \wedge dx_i)_p = 0$$

Definição 2.2.3. Um campo de formas bilineares alternadas ou forma exterior de grau 2 em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação ω que a cada p associa $\omega(p) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3_p)^*$; ω pode ser escrito na forma

$$\omega(p) = a_{12}(p)(dx_1 \wedge dx_2)_p + a_{13}(p)(dx_1 \wedge dx_3)_p + a_{23}(p)(dx_2 \wedge dx_3)_p$$

ou

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \ i, j = 1, 2, 3$$

onde a_{ij} são aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$.

Se as funções a_{ij} forem diferenciáveis, ω é chamada uma forma diferenciável de grau 2.

Passaremos agora a generalizar a noção de formas diferenciais a $\mathbb{R}^n$. Sejam $p \in \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_p$ o espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em p e $(\mathbb{R}^n_p)^*$ seu espaço dual. Seja $\wedge^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ o conjunto das funções k-lineares alternadas:

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n_p \times ... \times \mathbb{R}^n_p}_{k \text{ vezes}} \to \mathbb{R} \; .$$

Com as operações usuais $\wedge^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ é um espaço vetorial. Se $\varphi_1, ..., \varphi_k$ são formas lineares, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k$ de $\wedge^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ definido por

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k)(v_1, v_2, ..., v_k) = det(\varphi_i(v_j)).$$

Decorre das propriedade de determinante que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_k$ é de fato k-linear e alternada. Em particular, $(dx_{i_1})_p \wedge ... \wedge (dx_{i_k})_p \in \wedge^k(\mathbb{R}^n_p)^*$; indicaremos este elemento por $(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p$.

Proposição 2.2.1. O conjunto $\{(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p\}$, $i_1 < i_2 < ... < i_k$, onde $i_j \in 1, 2, ..., n$, forma uma base para $\wedge^k(\mathbb{R}^n_p)^*$

Definição 2.2.4. Uma k-forma exterior em $\mathbb{R}^n$ $(k \geq 1)$ é uma alicação ω que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ associa $\omega(p) \in \wedge^k(\mathbb{R}^n_p)^*$; pela Proposição 2.2.1, ω pode ser escrito na forma

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1 ... i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p \; , i_j \in \{1, 2, ..., n\}$$

onde $a_{i_1 ... i_k}$ são aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Se as funções $a_{i_1 ... i_k}$ forem diferenciáveis, ω é chamada uma k-forma diferenciável.

Indicaremos por I a k-ulpla $(i_1, ..., i_k)$, $i_1 < ... < i_k$, $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$, e usaremos a seguinte notação para ω:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I.$$

Convenciona-se que uma *0-forma diferencial* em $\mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Se ω e φ são duas k-formas:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I \; , \varphi = \sum_I b_I dx_I, I = (i_1, ..., i_k) \; , i_1 < ... < i_k$$

podemos definir a soma

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dx_I$$

Se ω é uma k-forma e φ uma s-forma é possível definir uma operação, chamada *produto exterior* $\omega \wedge \varphi$, obtendo uma $(k+s)$-forma da seguinte maneira:

Definição 2.2.5. Seja $\omega = \sum\limits_I a_I dx_I, I = (i_1, ..., i_k)$ $, i_1 < ... < i_k$, $\varphi = \sum\limits_I b_J dx_J, J = (j_1, ..., j_s)$ $, j_1 < ... < j_s$. Por definição

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{I,J} a_I b_J \, dx_I \wedge dx_J \, .$$

A operação de produto exterior goza das seguintes propriedades:

Proposição 2.2.2. Se ω é uma k-forma, φ uma s-forma e θ uma r-forma tem-se:

a) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$;

b) $\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega$;

c) $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$, quando $r = s$.

Definição 2.2.6. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável. A aplicação linear $df_p : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)}$ induz uma transformação linear

$$f_p^* : \wedge^k (\mathbb{R}^m_{f(p)})^* \to \wedge^k (\mathbb{R}^n_p)^*$$

que para cada $\varphi \in \wedge^k (\mathbb{R}^m_{f(p)})^*$ associa $f_p^*(\varphi)$, definida da seguinte maneira:

$$(f_p^*(\varphi))(v_1, ..., v_k) = \varphi_{_{f(p)}}(df_p(v_1), ..., df_p(v_k)), \; v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n_p.$$

Fazendo o ponto p variar em $\mathbb{R}^n$, obteremos uma aplicação f^* que leva k-formas de $\mathbb{R}^m$ em k-formas de $\mathbb{R}^n$. Convenciona-se que

$$f^*(g) = g \circ f, \text{ se } g \text{ é uma } 0 - \text{forma}.$$

Definição 2.2.7. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma 0-forma (função diferenciável), então sua diferencial

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i$$

é uma 1-forma. Mais precisamente, temos a seguinte

Definição 2.2.8. Se $\omega = \sum_I a_I dx_I$ é uma k-forma, definimos a diferencial exterior de ω como sendo a $(k+1)$-forma

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Proposição 2.2.3.

a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$, onde ω_1 e ω_2 são k-formas;

b) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$, onde ω_1 é uma k-forma e ω_2 uma s-forma;

c) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$

d) $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$, onde ω é 1-forma em $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma 0-forma, isto é, função diferenciável.

O conceito de formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$ será agora estendido para variedades diferenciáveis.

Definição 2.2.9. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Uma k-forma diferencial ω em M é a escolha, para cada sistema de coordenadas $f_\alpha : U_\alpha \to M$, de uma k-forma ω_{U_α} em $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ de tal forma que se ω_{U_α} e ω_{U_β} são duas tais escolhas e $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, então,

$$\omega_{U_\alpha} = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_{U_\beta}.$$

Cada ω_{U_A} é dita uma representação local de ω.

É um fato importante que todas as operações definidas para formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$ se estendem às variedades diferenciáveis através de suas representações locais.

A definição 2.2.9 de formas diferenciais em uma variedade é equivalente à seguinte

Definição 2.2.10. Uma k-forma diferencial ω em uma variedade diferenciável M é a escolha, para cada $p \in M$, de um elemento $\omega(p)$ do espaço das formas k-lineares e alternadas, $\Lambda^k(T_pM)^*$, do espaço tangente T_pM, de modo que a "expressão" ω_α de ω em qualquer parametrização seja diferenciável.

A Proposição que enunciaremos abaixo é uma relação interessante entre a derivação exterior de formas de grau um e o colchete de campo de vetores.

Proposição 2.2.4. Se ω é uma 1-forma diferencial em uma variedade diferenciável M e X, Y são campos de vetores diferenciáveis em M, tem-se

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]).$$

2.3 O Método do Referencial Móvel

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e sejam $e_1, ..., e_n$, n campos diferenciáveis de vetores em U de tal modo que, para todo $p \in U$, se tenha

$$\langle e_i, e_j \rangle_p = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j; \\ 1 & \text{se } i = j \ , i, j = 1, ..., n \end{cases}$$

Um tal conjunto de campos de vetores é chamado um referencial ortonormal móvel em U. Omitiremos os adjetivos ortonormal e móvel.

A partir do referencial e_i podemos definir formas diferenciais lineares $\omega_1, ..., \omega_n$ pela condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, em outras palavras, em cada ponto $p \in U$, a base $\{(\omega_i)_p\}$ é a base dual da base $\{(e_i)_p\}$. O conjunto das formas diferenciais $\{\omega_i\}$ é chamado o *coreferencial* associado ao referencial $\{e_i\}$.

Cada campo $\{e_i\}$ pode ser pensado como uma aplicação diferenciável $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. A diferencial $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, em $p \in U$, é uma aplicação linear, com $T_pU \approx \mathbb{R}^n$.

Portanto, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$(de_i)_p(v) = \sum_{j=1}^{n} (\omega_{ij})_p(v) e_j \ .$$

É imediato verificar que as expressões $(\omega_{ij})_p(v)$, acima definidas, dependem linearmente de v. Portanto $(\omega_{ij})_p$ é uma forma linear em $\mathbb{R}^n$. Como e_i é um campo diferenciável, ω_{ij} é uma forma diferencial linear. Com este significados em mente, escreveremos

$$de_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \ e_j \ , \tag{2.2}$$

como definição das formas ω_{ij}, que são chamada *formas de conexão* do $\mathbb{R}^n$ no referencial $\{e_i\}$.

Derivando a expressão $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, obteremos

$$0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji} \ ,$$

isto é, as formas de conexão $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ são antisimétricas nos índices i, j e $\omega_{ii} = 0$.

Teorema 2.3.1. (Equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$) - Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal móvel em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\{\omega_i\}$ o coreferencial associado a $\{e_i\}$, e ω_{ij} as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}$. Então:

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} \tag{2.3}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \ , k = 1, ..., n. \tag{2.4}$$

Definição 2.3.1. seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M^n em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+q}$. É uma conseqüência do Teorema da função inversa que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição $x\Big|_U$ é injetiva. Seja $V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ uma vizinhança de $x(p)$ em $\mathbb{R}^{n+q}$ de tal modo que $x(U) \subset V$. Admitamos V suficientemente pequeno para que exista um referencial móvel $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{n+q}\}$ em V com a propriedade que, quando restritos a $x(U)$, os vetores $e_1, ..., e_n$ sejam tangentes a $x(U)$ e os vetores $e_{n+1}, ..., e_{n+q}$ sejam normais a $x(U)$. Uma tal referencial é dito *referencial adaptado a* x.

Sejam M^n uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança de p em M, onde seja possível definir campos diferenciáveis de vetores $e_1, ..., e_n$ tais que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Seja $\{\omega_i\}$ o coreferencial Associado ao referencial $\{e_i\}$, associado ao referencial $\{e_i\}$ existe um único conjunto de formas diferenciáveis $\{\omega_{ij}\}$, anti-simétricas tais que $d\omega_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_j \wedge \omega_{ji}$, ω_{ij} são as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}$. Definimos $\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$ uma 2-formas em U. Tais formas são chamadas formas de curvaturas de M no referencial $\{e_i\}$.

Para cada ponto $p \in M$ e cada par de vetores $x, y \in T_pM$ a matriz $\{(\Omega_{ij})_p(x, y)\}$ é a matriz de uma aplicação linear $(R_{xy})_p : T_pM \to T_pM$. R_{xy} é chamado o operador de curvatura de M.

Proposição 2.3.1. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em M e seja $\{e_i\}$ um referencial em um aberto $U \subset M$. Suponhamos que $Y = \sum_i y_i e_i$ e façamos

$$\nabla_X Y = \sum_j \left\{ dy_j(X) + \sum_i \omega_{ij}(X) y_i \right\} e_j. \tag{2.5}$$

Então $\nabla_X Y$ é independente do referencial $\{e_i\}$ e, portanto, globalmente definido em M.

Para $Y = e_2$, da equação (2.5) decorre que,

$$\nabla_X e_2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_{2j}(X) e_j. \tag{2.6}$$

Em particular, $\nabla_{e_1} e_2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_{2j}(e_1) e_j$.

Capítulo 3

Resultados Principais

3.1 Imersões Isométricas que Preservam Operadores de Curvatura

Seja $j : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se j é totalmente geodésica, então j preserva operadores de curvatura, a recíproca é geralmente falsa.

Nesta seção consideraremos imersões isométricas $j : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ que possuem a propriedade de preservar operadores de curvatura, um exemplo simples é o de uma imersão isométrica arbitrária de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Em particular mostraremos que se o domínio M^n de j é completo e tem curvatura positiva, então a recíproca acima é verdadeira, isto é, se j preserva operadores de curvatura, então j é totalmente geodésica. O Estudo desta seção é baseado em [3].

Definição 3.1.1. Seja $j : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica, j preserva operador de curavatura se, e somente se

i) j preserva curvatura seccional, isto é, $\overline{K}(dj(\sigma)) = K(\sigma)$, $\forall p \in M$ e $\forall$ 2-plano $\sigma \subset T_pM$, onde $K(\sigma)$ é a curvatura seccional de M segundo σ e $\overline{K}(dj(\sigma))$ é a curvatura seccional de $\overline{M}$ segundo $dj(\sigma)$.

ii) Seja $T_{j(p)}\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$, com $T_pM \approx dj_p(T_pM)$ e $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_{j(p)}\overline{M}$. Se $z \in (T_pM)^{\perp}$ então $\overline{R}_{dj(x),dj(y)}z = 0$, para todo $x, y \in T_pM$.

Teorema 3.1.1. Seja $j : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica que preserva operador de curvatura, e seja M completa. Então o conjunto aberto N de pontos não-geodésicos de M relativamente à j, é folheado por subvariedades completas de dimensão $n-1$ que são totalmente geodésicas relativamente à j.

Demonstraçao: O Teorema é válido para o caso trivial em que $N = \emptyset$, pois neste caso $II_p \equiv 0$, $\forall p \in M$, donde M é totalmente geodésica.

Seja $N \neq \emptyset$, onde $N = \{p \in M; II_p \neq 0\}$. Como j preserva operador de curvatura temos que $K(\sigma) = \overline{K}(dj(\sigma))$ para todo $p \in M$ e todo 2-plano $\sigma \subset T_pM$, assim em cada ponto $p \in M$, existe no máximo uma direção com curvatura principal não-nula.

Desse modo no conjunto N dos pontos não-geodésicos, as direções de curvatura normal nula constituem um campo diferenciável X de planos $(n-1)$ dimensionais. Integraremos X para obtermos a folheação procurada.

Cada ponto $p \in N$ tem uma vizinhança U onde existe um campo vetorial unitário normal e_{n+1} relativamente à j e um referencial $E = (e_1, e_2, ..., e_n)$ cujo primeiro vetor está na direção de curvatura $k_1 \neq 0$ [10].

A partir do referencial E obtemos em U, a base dual $\{(\omega_i)_p\}$ (ou coreferencial asociado ao referencial E), as formas de conexões $\{\omega_{ij}\}$ e as formas de curvaturas $\{\Omega_{ij}\}$ de M, onde $i, j = 1, 2, ..., n$.

Unindo e_{n+1} ao ao conjunto E temos as formas de Codazzi $\{\omega_{i,n+1}\}$ com $i = 1, 2, ..., n$ e as formas de curvatura $\{\overline{\Omega}_{rs}\}$ de $\overline{M}$, $1 \leq r, s \leq n+1$.

Simplificaremos a notação identificando $dj(e_i) \approx e_i$, podemos escrever

$$\overline{R}_{e_i,e_j}(e_{n+1}) = -\sum_{k=1}^{n} \overline{\Omega}_{k,n+1}(e_i, e_j)e_k.$$

Pelo item (ii) acima, temos que $\overline{\Omega}_{k,n+1} = 0$ em U, além disso, $\omega_{1,n+1} = k_1\omega_1 \neq 0$ e $\omega_{a,n+1} = 0$ para $a > 1$. Utilizando as equações de Codazzi, temos para $a > 1$,

$$\begin{aligned} 0 = d\omega_{a,n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \omega_{ak} \wedge \omega_{k,n+1} + \overline{\Omega}_{a,n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \omega_{ak} \wedge \omega_{k,n+1} = \omega_{a1} \wedge \omega_{1,n+1} \\ &= \omega_{a1} \wedge k_1\omega_1 \ , \end{aligned}$$

como $\omega_{a1} \wedge k_1\omega_1 = 0$, segue que $\omega_{a1} = A_{a_1}\omega_1$, mas a forma ω_1 que anula os planos de X satisfaz à

$$d\omega_1 = \sum_{a=2}^{n} \omega_a \wedge \omega_{a1} = \sum_{a=2}^{n} \omega_a \wedge A_{a_1}\omega_1 \ ,$$

assim, $d\omega_1$ pertence ao ideal gerado por ω_1. Pelo Teorema de Frobenius, a distribuição definida por ω_1 é integrável, isto é, em cada ponto passa uma subvariedade $\mathcal{L}$, de dimensão $n-1$. Restrita a essas subvariedades, $\omega_1 = 0$, assim $\omega_{a1} = A_{a1}\omega_1 = 0$ e portanto, as segundas formas desta subvariedade na direção normal e_1, se anulam. Então $\mathcal{L}$ é totalmente geodésica em M e consequentemente em $\overline{M}$, isto é, relativamente à j, pois se ω_1 anula os planos de X, então $\omega_{1,n+1} = k_1\omega_1$ anula os planos de X.

Agora mostraremos que as folhas $\mathcal{L}$ são completas, mostrando que geodésicas de $\mathcal{L}$ são infinitamente extendíveis. Suponha o contrário, isto é, que existe uma geodésica maximal α da folha $\mathcal{L}$ que é definida somente num intervalo aberto limitado (a, b). Como M é completa, existe extensão infinita de α, $\widetilde{\alpha}$, que é geodésica de M. Desde que $\mathcal{L}$ é totalmente geodésica, enquanto essa extensão $\widetilde{\alpha}$ estiver em N, ela é geodésica de $\mathcal{L}$. Então, pela nossa hipótese os pontos limites $\widetilde{\alpha}(a)$ e $\widetilde{\alpha}(b)$ não estão em N, isto é, $k_1(\widetilde{\alpha}(a)) = k_1(\widetilde{\alpha}(b)) = 0$.

Contradiremos isto mostrando que $k_1 \neq 0$ em ambos os pontos. Podemos supor que o segmento de geodésica α (mas não os pontos limites) esteja no domínio dos campos E e e_{n+1}, e ainda que α seja uma curva integral de e_2, com E paralelo em α. Como E está bem definido em α, consideremos primeiro uma extensão de E a uma vizinhança de α na folha $\mathcal{L}$, mantendo e_1 perpendicular à $\mathcal{L}$ e depois estendendo E a uma vizinhança inteira, mantendo e_1 sempre na direção de curvatura k_1. Temos então que

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{e_2}e_1 \\
&= \nabla_{e_1}e_2, \text{devido } e_2 \text{ ser tangente à } \alpha \ \text{ e E paralelo ao longo de } \alpha. \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega_{2j}(e_1)\ e_j, \ \text{por (2.6)} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \omega_{j2}(e_1) e_j.
\end{aligned}$$

Como $\omega_{1,n+1} = k_1\omega_1$ e $d\omega_{1,n+1} = 0$, temos que

$$0 = d\omega_{1,n+1} = dk_1 \wedge \omega_1 + k_1 d\omega_1,$$

assim,

$$\begin{aligned}
0 = d\omega_{1,n+1}(e_1,e_2) &= dk_1(e_1).\omega_1(e_2) - dk_1(e_2).\omega_1(e_1) + k_1 d\omega_1(e_1,e_2)\\
&= -dk_1(e_2) + k_1.\sum_{j=1}^{n+1}(\omega_j \wedge \omega_{j1})(e_1,e_2)\\
&= -dk_1(e_2) + k_1.\Big[\sum_{j=1}^{n}(\omega_j \wedge \omega_{j1})(e_1,e_2) +\\
&\quad (\omega_{n+1} \wedge \omega_{n+1,1})(e_1,e_2)\Big]\\
&= -dk_1(e_2) + k_1.\left[\sum_{j=1}^{n}(\omega_j \wedge \omega_{j1})(e_1,e_2)\right]\\
&= -dk_1(e_2) + k_1\left[\sum_{j=1}^{n}\omega_j(e_1)\omega_{j1}(e_2) - \omega_j(e_2)\omega_{j1}(e_1)\right]\\
&= -dk_1(e_2) + k_1.[-\omega_{21}(e_1)]\text{ , isto é,}
\end{aligned}$$

$-k_1\omega_{21}(e_1) = dk_1(e_2)$, de onde obtemos, $e_2(k_1) = -k_1\omega_{21}(e_1) = k_1\omega_{12}(e_1)$ implicando que $e_2(k_1)\circ\alpha = k_1\omega_{12}(e_1)\circ\alpha$.

Sejam $k = k_1\circ\alpha, f = -\omega_{12}\circ\alpha$, temos então que $dk = dk_1(\alpha).\alpha' = dk_1(\alpha).e_2 = e_2(k_1)\alpha$ e $kf = (k_1\circ\alpha).(-\omega_{12}(e_1))\circ\alpha = -k_1\omega_{12}(e_1)\alpha = -e_2(k_1)\alpha$

O que nos fornece,

$$dk = k' = -kf \tag{3.1}$$

como, $\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^{n}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}$, vem que

$$\begin{aligned}
d\omega_{12}(e_1,e_2) &= \left(\sum_{i=1}^{n}\omega_{1i}\wedge\omega_{i2} + \Omega_{12}\right)(e_1,e_2)\\
&= \sum_{i=1}^{n}[\omega_{1i}(e_1)\omega_{i2}(e_2) - \omega_{1i}(e_2)\omega_{i2}(e_1)] + \Omega_{12}(e_1,e_2),
\end{aligned}$$

de $\omega_{i2}(e_2) = \omega_{1i}(e_2) = 0$, pois e_2 é tangente à α e E é paralelo ao longo de α, vem que

$$d\omega_{12}(e_1,e_2) = \Omega_{12}(e_1,e_2)$$

Usando a Proposição 2.2.4, vem,

$$\begin{aligned} d\omega_{12}(e_1, e_2) &= e_1\omega_{12}(e_2) - e_2\omega_{12}(e_1) - \omega_{12}[e_1, e_2] \\ &= -e_2\omega_{12}(e_1) - \omega_{12}.\left[-\sum_{i=1}^{n}\omega_{i2}(e_1)e_i\right] \\ &= -e_2\omega_{12}(e_1) + \sum_{i=1}^{n}[\omega_{i2}(e_1).\omega_{12}(e_i)] \\ &= -e_2\omega_{12}(e_1) + [\omega_{12}(e_1)]^2, \end{aligned}$$

pois, para $i \neq 1$, e_i é obtido pelo transporte paralelo.

Dessa forma obtemos,

$$e_2.\omega_{12}(e_1) = [\omega_{12}(e_1)]^2 - \Omega_{12}(e_1, e_2) \tag{3.2}$$

Seja $F = -\Omega_{12}(e_1, e_2) \circ \alpha$, como $f = -\omega_{12}(e_1) \circ \alpha$, vem que

$$f' = -d\omega_{12}(e_1)(\alpha).(\alpha') = -d\omega_{12}(e_1)(\alpha).e_2 = -e_2\omega_{12}(e_1)\alpha,$$

substituindo em (3.2) resulta $-f' = f^2 + F$, isto é,

$$f' = -f^2 - F \tag{3.3}$$

Nossa hipótese de que $\mathcal{L}$ não é completa leva a conclusão que $k(t) \to 0$, quando $t \to a^+$ ou quando $t \to b^-$.

As equações diferenciais (3.1) e (3.3) contradizem isto. De fato, resolvendo (3.1) explicitamente, temos que $k(t) = c.e^{-\int f dt}$.

Deduzimos que, lim sup $f = +\infty$, quando $t \to b^-$ e lim inf $f = -\infty$ quando $t \to a^+$. Isto contradiz (3.3), desde que F é limitada em (a, b), quando f é suficientemente grande, a inclinação de f é negativa, isto é, f decresce, o que é absurdo.

Assim, $k_1 \nrightarrow 0$ quando $t \to a^+$ ou quando $t \to b^-$, o que significa que $\widetilde{\alpha}(a)$ e $\widetilde{\alpha}(b)$ estão em N. Logo existe extensão de α em $\mathcal{L}$, definida na reta toda, portanto, $\mathcal{L}$ é completa.

■

Teorema 3.1.2. Seja M^n $(n \geqslant 2)$ uma variedade Riemanniana completa com todas as curvaturas seccionais $K > 0$. Então toda imersão isométrica $j : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ que preserva operador de curvatura é totalmente geodésica.

Demonstração: Suponhamos que exista em M^n pontos não-geodésicos, isto é, N é não-vazio. Então uma geodésica α como na prova do Teorema 3.1.1, tem domínio em toda reta $\mathbb{R}$. Deste modo, podemos definir para a função $f = -\omega_{12}(e_1) \circ \alpha$, o domínio dos números reais todo, e f satisfaz a equação diferencial (3.3), com $F > 0$, pois $F = -\Omega_{12}(e_1, e_2) = K(\sigma)$, que é a curvatura segundo o 2-plano σ determinado por $\{e_1, e_2\}$.

Resolvendo (3.3), obtemos $f(t) = -\sqrt{F}.tg(\sqrt{F}.t)$, concluímos que f não é definida para $t = \frac{\pi}{2\sqrt{F}}$. Logo f não tem domínio $\mathbb{R}$, donde α não tem domínio $\mathbb{R}$, o que é absurdo. Portanto $N = \emptyset$ e j é totalmente geodésica.

■

Observação 3.1.1.

Se $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura constante K, segue que para todo $p \in M$, $\overline{\Omega}_{i,n+1}(x, y) = -K(\omega_i \wedge \omega_{n+1})(x, y) = 0$, $\forall x, y \in T_pM$, $1 \leq i \leq n$.

Assim, $\overline{R}_{xy}(z) = 0$, para todo $z \in (T_pM)^{\perp} \subset T_p\overline{M}$. Dessa forma, se M^n e $\overline{M}^{n+1}$ tem curvaturas seccionais constantes e iguais, toda imersão isométrica preserva operador de curvatura.

Em particular, seja $j : M^n \rightarrow S^{n+1}$ uma imersão isométrica de M^n, variedade Riemanniana completa, n-dimensional, com curvatura seccional constante igual a um, em S^{n+1}, esfera $(n+1)$-dimensional de curvatura seccional constante igual a um, pelo Teorema 3.1.2, j é totalmente geodésica, donde j é mergulho sobre a esfera n-dimensional em S^{n+1}.

3.2 Rigidez e Convexidade de Hipersuperfícies na Esfera

A demonstração do Teorema 3.2.1 pode ser encontrada em R. Sacksteder [15]

Teorema 3.2.1. (Sacksteder). Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, n-dimensional ($n \geq 2$) e $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica C^{n+1}, de M^n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Suponhamos que todas as curvaturas seccionais de M^n são não-negativas e que ao menos uma é positiva. Então, a imagem $x(M^n)$ é o bordo de um corpo convexo em $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso,

i) Se r é o posto máximo da segunda forma fundamental de x, $\mathbb{R}^{n+1}$ pode ser decomposto como um produto $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{r+1} \times \mathbb{R}^{n-r}$, de forma que $x(M^n) = P_1x(M^n) \times P_2x(M^n)$, onde P_1 e P_2 são respectivamente, as projeções ortogonais sobre $\mathbb{R}^{r+1}$ e $\mathbb{R}^{n-r}$. Então $P_2x(M^n) = \mathbb{R}^{n-r}$ e $P_1x(M^n)$ é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{r+1}$ que é o bordo de um corpo convexo o qual não contém curvas completas (retas). O inteiro r é determinado intrisicamente e satisfaz $2 \leq r \leq n$.

ii) Todo ponto p de M^n está contido num subconjunto $\mathcal{L}_p$ de M^n tal que a normal em $\mathcal{L}_p$ é constante e todos os conjuntos $x(\mathcal{L}_p)$ são planos paralelos $(n-r)$-dimensionais.

Precisaremos também do Teorema da invariância do domínio visto em [14].

Teorema 3.2.2. (Invariância do Domínio). Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é injetiva e contínua, então $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. (Segue que f(V) é aberto para todo aberto $V \subset U$, então f^{-1} é contínua, e f é um homeomorfismo).

Pelo Teorema 3.2.2, a propriedade de ser um domínio (um conjunto aberto conexo) é invariante por uma aplicação injetiva contínua em $\mathbb{R}^n$.

Passaremos agora a enunciar e demonstrar o principal teorema desse trabalho (Teorema 3.2.3), que é devido a M. P. do Carmo & F. W. Warner [12].

Teorema 3.2.3. Seja $x : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana C^∞, compacta, conexa, orientável, de dimensão n $(n \geq 2)$, na esfera de dimensão $(n+1)$ e curvatura seccional constante igual a um. Suponhamos ainda que todas as curvaturas seccionais de M^n são maiores ou iguais a um. Então são válidos os seguintes resultados,

(a) x é um mergulho, M^n é difeomorfa à S^n e $x(M^n)$ é totalmente geodésica ou está contido num hemisfério aberto e neste caso $x(M^n)$ é o bordo de um corpo convexo em S^{n+1}.

(b) x é rígida, isto é, dada outra imersão isométrica $y : M^n \to S^{n+1}$ nas mesmas condições acima, então existe uma isometria $\alpha : S^{n+1} \to S^{n+1}$ tal que $y = \alpha \circ x$.

Demonstração do Teorema 3.2.3 (a)

Caso 1: "Todas as curvaturas seccionais de M^n são iguais a um."

Nesse caso M^n e S^{n+1} tem a mesma curvatura seccional constante um, então pelo Teorema 3.1.2, observação 3.1.1, $x(M^n)$ é totalmente geodésica, donde x é um mergulho isométrico de M^n sobre uma esfera máxima n-dimensional $S^n \subset S^{n+1}$, do qual o Teorema segue para este caso particular.

Caso 2: "Existem pontos de M^n onde alguma curvatura seccional é maior que um."

Momentaneamente, interrompemos a demonstração do Teorema 3.2.3(a) para verificarmos a seguinte:

Afirmação: "Existe pelo menos um ponto $p \in M^n$, onde todas as curvaturas seccionais são maiores que um."

Prova: Suponhamos que tal ponto não existe, isto é, estamos admitindo que existem pontos com curvaturas seccionais maiores que um, mas em nenhum desses pontos as curvaturas seccionais são todas maiores que um, obteremos uma contradição. Seja entre estes pontos o ponto p de M^n, em que a segunda forma fundamental para a imersão x tem posto máximo r. Como as curvaturas seccionais de M^n são maiores ou iguais a um e junto com o fato de $K_{ij} = 1 + \lambda_i\lambda_j$, temos que $1 < r < n$, ou $2 \leq r \leq n-1$.

Usaremos as seguintes notações: $v = x(p)$, H_v o hemisfério aberto de S^{n+1} centrado em v, S_v o hiperplano tangente a S^{n+1} em v, e β_v a correspondente tranformação de Beltrami.

Sejam $N_v = x^{-1}(H_v)$, $x_v = x\Big|_{N_v}$ e $\widetilde{x}_v = \beta_v \circ x_v$. Agora, consideramos em N_v as métricas Riemannianas induzidas pelas imersões x_v e $\tilde{x}_v$. Afim de distingui-las, denotaremos por $\tilde{N}_v$, a subvariedade N_v munida com a métrica induzida por $\tilde{x}_v$.

Considerando que $\tilde{x}_v : \tilde{N}_v \to S_v$ é uma imersão isométrica, segue da Proposição 2.1.2 e do Lema 2.1.3 que $\tilde{N}_v$ é uma variedade Riemanniana completa com curvaturas seccionais maiores ou iguais a zero e que a segunda forma fundamental para $\tilde{N}_v$ tem posto máximo r. Como em M^n existe alguma curvatura seccional maior que um, segue que em $\tilde{N}_v$ existe alguma curvatura seccional positiva.

Pelo Teorema 3.2.1 (Sacksteder), por cada ponto da subvariedade $\tilde{x}_v(\tilde{N}_v)$ passa um plano $(n-r)$-dimensional P, inteiramente contido em $\tilde{x}_v(\tilde{N}_v)$; e ao longo de P, os hiperplanos tangentes a $\tilde{x}_v(\tilde{N}_v)$ são paralelos. Além disso, os planos $(n-r)$-dimensionais desta coleção também são paralelos.

A imagem, por β_v^{-1} desses planos $(n-r)$-dimensionais são esferas de centro na origem de S^{n+1} e dimensão $(n-r)$, contidas em $x_v(N_v)$. Seja U vizinhança de $x(p)$ onde o posto da segunda forma fundamental é r, isto é, o autovalor nulo tem multiplicidade $(n-r)$ para as segundas formas em U. Portanto, nos pontos da vizinhança acima, os subespaços $(n-r)$-dimensionais, determinados pelos autovetores correspondentes ao autovalor nulo, formam uma distribuição integrável e as subvariedades integrais são totalmente geodésicas [8].

Essas subvariedades integráveis, $(n-r)$-dimensionais coincidem em U com as $(n-r)$-esferas, caso contrário, o posto máximo da segunda forma fundamental para N_v seria menor que r. Agora, usando novamente o Teorema 3.2.1(Sacksteder) tem-se que para todo $v' \in U$, a imagem dessas esferas $(n-r)$-dimensionais por $\beta_{v'}$ serão planos paralelos $(n-r)$-dimensionais em $S_{v'}$. Dessa forma temos uma contradição pois, dada uma coleção de $(n-r)$-esferas, as quais são levadas em planos paralelos pela aplicação de Beltrami, pode-se sempre encontrar uma aplicação de Beltrami próxima para a qual as imagens não mais sejam paralelas.

Desde modo, se existem curvaturas seccionais de M^n maiores que um, então existe pelo menos um ponto $p \in M^n$ onde todas as curvaturas seccionais são maiores que um.

Prosseguimos agora a demonstração do Teorema 3.2.3(a).

Seja $p \in M^n$ um ponto em que todas as curvaturas seccionais são maiores do que um. Então é possível escolher um $v \in S^{n+1}$ de tal modo que o equador $\overline{H}_v - H_v$ satisfaça:

i) $x(p) \in \overline{H}_v - H_v$;

ii) Existe uma vizinhança V de p em M cumprindo $x(\overline{V} - \{p\}) \subset H_v$.

Provaremos em seguida que $x(M^n - \{p\}) \subset H_v$. Seja N_v a componente conexa de $x^{-1}(H_v)$ contendo $V - \{p\}$. Como antes, seja $x_v = x\Big|_{N_v}$, e $\widetilde{x}_v = \beta_v \circ x_v$, e considere $\widetilde{N}_v$ denotando N_v com a métrica Riemanniana induzida por $\widetilde{x}_v$. Pela Proposição 2.1.2 e Lema 2.1.3, $\widetilde{N}_v$ é uma variedade Riemanniana completa com curvaturas seccionais maiores ou iguais a zero, e em algum ponto $q \neq p$ em V, todas as curvaturas seccionais de $\widetilde{N}_v$ são positivas. Assim pelo Teorema 3.2.1(Sacksteder), segue que $\widetilde{x}_v(\widetilde{N}_v) \subset S_v$ é o bordo de um corpo convexo o qual não contém curvas completas, e como $\widetilde{N}_v$ não é compacto, $\widetilde{N}_v$ é difeomorfo ao espaço Euclidiano. Assim, podemos escolher a vizinhança V de p para ser homeomorfa à um disco, segue que a imagem $\widetilde{x}_v(\partial V)$ do bordo de V separa $\widetilde{x}_v(\widetilde{N}_v)$ em duas componentes conexas, uma da qual, digamos W, é limitada em S_v. Seja $m \in N_v - V$. Afirmamos que $\widetilde{x}_v(m) \in W$. Assuma o contrário, e escolha uma curva em $N_v \cup \{p\}$ unindo m e p, que passe por ∂V apenas uma vez. A imagem desta curva via $\widetilde{x}_v$ começa na componente ilimitada, passa por $\widetilde{x}_v(\partial V)$ apenas uma vez e torna-se ilimitada. Consequentemente a curva imagem deveria sair de W passando novamente por $\widetilde{x}_v(\partial V)$, e isso contradiz a construção da curva. Assim, $\widetilde{x}_v(m) \in W$. Desse modo, nenhum ponto de $\overline{H}_v - H_v$ pode ser de acumulação do conjunto $x_v(N_v - V)$, e consequentemente nenhum ponto do equador $\overline{H}_v - H_v$, exceto o próprio $x(p)$ é um ponto de acumulação de $x_v(N_v)$. Como $x(p)$ é o único ponto no equador que é de acumulação para $x_v(N_v)$ então:

$$M^n = x^{-1}(H_v) \cup \{p\} \cup x^{-1}(S^{n+1} - \overline{H}_v) \qquad (*)$$

Por outro lado usando que, $x(\overline{V} - \{p\}) \subset H_v$, tem-se

$$x^{-1}(H_v) \cup \{p\} = V \cup x^{-1}(H_v)$$

E por (*), M^n fica escrita como reunião dos abertos,

$$M^n = (V \cup x^{-1}(H_v)) \cup x^{-1}(S^{n+1} - \overline{H}_v).$$

Usando a conexidade de M^n e que $V \neq \emptyset$, tem-se

$$M^n = V \cup x^{-1}(H_v) = x^{-1}(H_v) \cup \{p\}$$

Assim $x(M^n - \{p\}) \subset H_v$ conforme afirmamos.

Podemos escolher agora v' próximo a v usado acima tal que $x(M^n)$ esteja completamente no hemisfério aberto $H_{v'}$. Então $\beta_{v'} \circ x : M^n \to S_{v'}$ é uma imersão isométrica de uma variedade compacta com curvaturas seccionais não-negativas na métrica induzida. De acordo com o Teorema 3.2.1(Sacksteder), $\beta_{v'} \circ x(M^n)$ é o bordo de um corpo convexo em $S_{v'}$. Aplicando o difeomorfismo $\beta_{v'}^{-1}$ obteremos que $x(M^n)$ é o bordo de um corpo convexo em S^{n+1}, obtendo assim a conclusão da parte (a) do Teorema 3.2.3.

■

Observação 3.2.1.
Se todas as curvaturas seccionais de M^n são constante e iguais a um, pelo Teorema 3.2.3(a), x é um mergulho isométrico sobre uma esfera máxima n-dimensional $S^n \subset S^{n+1}$. Suponhamos que $y : M^n \to S^{n+1}$ é outra imersão isométrica nas mesmas condições do Teorema 3.2.3(a). Assim $x(M^n) = S^{n+1} \cap P_1$ e $y(M^n) = S^{n+1} \cap P_2$, onde P_1 e P_2 são hiperplanos em $\mathbb{R}^{n+2}$ passando pela origem de S^{n+1}. Seja $\alpha : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+2}$ uma rotação tal que $\alpha(P_1) = P_2$, donde obtemos $\alpha(x(M^n)) = y(M^n)$. Compondo α com uma rotação de $x(M^n) = S^n \subset \mathbb{R}^{n+2}$, se necessário, temos $y = \alpha \circ x$, isto é, $\alpha\Big|_{S^{n+1}} : S^{n+1} \to S^{n+1}$ é uma isométria.

Demonstração do Teorema 3.2.3 (b)

Se todas as curvaturas seccionais de M^n são iguais a um, ambas x e y são mergulhos isométricos de M^n sobre esferas máximas n-dimensionais $S^n \subset S^{n+1}$, pela observação 3.2.1, segue que existe uma isometria $\alpha : S^{n+1} \to S^{n+1}$ tal que $y = \alpha \circ x$.

Se as curvaturas seccionais de M^n não são iguais a um em todos os pontos, pelo Teorema 3.2.3(a), ambas x e y são mergulhos, e ambas $x(M^n)$ e $y(M^n)$ estão nos hemisférios abertos e são bordos de corpos convexos. E sem perda de generalidade, podemos supor que ambas $x(M^n)$ e $y(M^n)$ estão no mesmo hemisfério norte aberto H_e, e que são "Visíveis do lado de dentro" do pólo norte $e = (0, 0, ..., 0, 1)$, (isto é, cada geodésica de S^{n+1} que parte de e cruza $x(M^n)$ e $y(M^n)$ em no máximo um ponto). Vamos admitir $x(M^n)$ e $y(M^n)$ orientadas de modo a induzir orientações congruentes em S^{n+1}.

Defina $\tilde{x} : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\tilde{x}(p) = \frac{x(p) - \langle x(p), e\rangle e}{\langle e, x(p) + y(p)\rangle} \tag{3.4}$$

e analogamente $\tilde{y} : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\tilde{y}(p) = \frac{y(p) - \langle y(p), e\rangle e}{\langle e, x(p) + y(p)\rangle} \tag{3.5}$$

onde $\langle \ , \ \rangle$ denota o produto interno Euclidiano usual em $\mathbb{R}^{n+2}$ e, $e = (0, 0, ..., 0, 1) \in S^{n+1}$. Ambas $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ são mergulhos C^∞ de M^n em $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ e, além disso, $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ induzem a mesma métrica em M^n, com efeito, como $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle = 1$ e $\langle x, dx\rangle = \langle y, dy\rangle = 0$, temos,

$$\begin{aligned}
\langle d\tilde{x}, d\tilde{x}\rangle.\langle e, x + y\rangle^4 &= \langle e, x + y\rangle^2.(\langle dx, dx\rangle - \langle e, dx\rangle^2) + \\
&\quad +2\langle e, x + y\rangle.\langle e, dx + dy\rangle.\langle e, dx\rangle.\langle e, x\rangle + \\
&\quad +\langle e, dx + dy\rangle^2.(1 - \langle e, x\rangle^2) \\
&= \langle e, x + y\rangle^2.\langle dx, dx\rangle + \langle e, dx + dy\rangle^2 - \\
&\quad [\langle e, x + y\rangle.\langle e, dx\rangle - \langle e, dx + dy\rangle.\langle e, x\rangle]^2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

analogamente,

$$\begin{aligned}
\langle d\tilde{y}, d\tilde{y}\rangle.\langle e, x + y\rangle^4 &= \langle e, x + y\rangle^2.(\langle dy, dy\rangle - \langle e, dy\rangle^2) + \\
&\quad +2\langle e, x + y\rangle.\langle e, dx + dy\rangle.\langle e, dy\rangle.\langle e, y\rangle + \\
&\quad +\langle e, dx + dy\rangle^2.(1 - \langle e, y\rangle^2) \\
&= \langle e, x + y\rangle^2.\langle dy, dy\rangle + \langle e, dx + dy\rangle^2 - \\
&\quad [\langle e, x + y\rangle.\langle e, dy\rangle - \langle e, dx + dy\rangle.\langle e, y\rangle]^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

observando que,

$$\begin{aligned}
\langle e, x + y\rangle.\langle e, dx\rangle - \langle e, dx + dy\rangle.\langle e, x\rangle &= \langle e, y\rangle.\langle e, dx\rangle - \langle e, x\rangle.\langle e, dy\rangle \\
&= -[\langle e, x + y\rangle.\langle e, dy\rangle - \\
&\quad \langle e, dx + dy\rangle.\langle e, y\rangle]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

e como

$$\langle dx, dx\rangle = \langle dy, dy\rangle \tag{3.9}$$

substituindo então (3.8) e (3.9) em (3.6), temos

$$\begin{aligned}\langle d\tilde{x}, d\tilde{x}\rangle.\langle e, x+y\rangle^4 &= \langle e, x+y\rangle^2.\langle dy, dy\rangle + \langle e, dx+dy\rangle^2 - \\ &\quad [\langle e, y\rangle.\langle e, dx\rangle - \langle e, x\rangle.\langle e, dy\rangle]^2 \\ &= \langle e, x+y\rangle^2.\langle dy, dy\rangle + \langle e, dx+dy\rangle^2 - \\ &\quad [\langle e, x+y\rangle.\langle e, dy\rangle - \langle e, dx+dy\rangle.\langle e, y\rangle]^2 \\ &= \langle d\tilde{y}, d\tilde{y}\rangle.\langle e, x+y\rangle^4\end{aligned}$$

donde concluímos que $\langle d\tilde{x}, d\tilde{x}\rangle = \langle d\tilde{y}, d\tilde{y}\rangle$.

Denontando M^n por $\tilde{M}^n$ com a métrica induzida de $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, temos que $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ são mergulhos isométricos de $\tilde{M}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Segue do Teorema 3 de Pogorelov [1,p.63] que ambas $\tilde{x}(\tilde{M}^n)$ e $\tilde{y}(\tilde{M}^n)$ são hipersuperfície localmente convexas em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim as curvaturas seccionais de $\tilde{x}(\tilde{M}^n)$ e $\tilde{y}(\tilde{M}^n)$ são todas maiores ou iguais a zero, e como $\tilde{x}(\tilde{M}^n)$ é uma hipersuperfície compacta de $\mathbb{R}^{n+1}$, existe pelo menos um ponto de $\tilde{M}^n$ em que todas as curvaturas seccionais são estritamente positivas, pelo Teorema 3.2.1 (Sacksteder) , $\tilde{x}(\tilde{M}^n)$ e $\tilde{y}(\tilde{M}^n)$ são bordos de corpos convexos em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, segue do Teorema v de [16], que existe uma isometria $\tilde{\alpha} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\tilde{\alpha} \circ \tilde{x} = \tilde{y}$.

Definimos as aplicações ρ_1 e ρ_2, C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$ em S^{n+1} por,

$$\rho_1(p) = \frac{2p + e.(1 + \langle\tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle - \langle p, p\rangle)}{\|2p + e.(1 + \langle\tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle - \langle p, p\rangle)\|}\ , \tag{3.10}$$

$$\rho_2(p) = \frac{2p + e.(1 + \langle\tilde{\alpha}^{-1}(p), \tilde{\alpha}^{-1}(p)\rangle - \langle p, p\rangle)}{\|2p + e.(1 + \langle\tilde{\alpha}^{-1}(p), \tilde{\alpha}^{-1}(p)\rangle - \langle p, p\rangle)\|}. \tag{3.11}$$

Aplicando ρ_1 a $\tilde{x}$, temos que,

$$\rho_1(\tilde{x}) = \frac{2\tilde{x} + e.(1 + \langle\tilde{\alpha}(\tilde{x}), \tilde{\alpha}(\tilde{x})\rangle - \langle\tilde{x}, \tilde{x}\rangle)}{\|2\tilde{x} + e.(1 + \langle\tilde{\alpha}(\tilde{x}), \tilde{\alpha}(\tilde{x})\rangle - \langle\tilde{x}, \tilde{x}\rangle)\|} \tag{3.12}$$

por outro lado, usando o fato de que $\tilde{\alpha}(\tilde{x}) = \tilde{y}$, vem que

$$2\tilde{x} + e(1 + \langle\tilde{\alpha}(\tilde{x}), \tilde{\alpha}(\tilde{x})\rangle - \langle\tilde{x}, \tilde{x}\rangle) = 2\tilde{x} + e(1 + \langle\tilde{y}, \tilde{y}\rangle - \langle\tilde{x}, \tilde{x}\rangle)\ ,$$

e um cálculo simples mostra que,

$$2\tilde{x} + e(1 + \langle\tilde{y}, \tilde{y}\rangle - \langle\tilde{x}, \tilde{x}\rangle) = \frac{2x}{\langle e, x+y\rangle}\ , \tag{3.13}$$

como $\langle e, x+y\rangle$ é positivo, pois estamos supondo $x(M^n)$ e $y(M^n)$ no mesmo hemisfério norte aberto H_e, substituindo então (3.13) em (3.12) resulta que

$$\rho_1(\tilde{x}(p)) \quad = \quad x(p). \tag{3.14}$$

de maneira análoga

$$\rho_2(\tilde{y}(p)) \quad = \quad y(p) \tag{3.15}$$

para todo $p \in M^n$.

Provaremos agora que ρ_1 e ρ_2 são 1:1, com efeito, suponhamos que $p \neq q \in \mathbb{R}^{n+1}$ mas $\rho_1(p) = \rho_1(q)$. Como $\langle p, e\rangle = \langle q, e\rangle = 0$, $\langle \rho_1(p), p\rangle = \langle \rho_1(q), p\rangle$ e $\langle \rho_1(p), q\rangle = \langle \rho_1(q), q\rangle$, Segue da expressão da aplicação ρ_1 que p e q são paralelos. Então existe um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $p = \lambda v$ e $q = \mu v$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$.

Substituindo $p = \lambda v$ e $q = \mu v$ na expressão da aplicação ρ_1, temos

$$\rho_1(p) = \frac{2\lambda v + e(1 + \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle - \lambda^2)}{\|2\lambda v + e(1 + \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle - \lambda^2)\|} \ ,$$

$$\rho_1(q) = \frac{2\mu v + e(1 + \langle \tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle - \mu^2)}{\|2\mu v + e(1 + \langle \tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle - \mu^2)\|}.$$

Como $\rho_1(p) = \rho_1(q)$ segue que $\langle \rho_1(p), \rho_1(q)\rangle = 1$, e junto com $\langle e, v\rangle = 0$, obtemos

$$\begin{gathered}\langle 2\lambda v + e.(1 + \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle - \lambda^2), 2\mu v + e.(1 + \langle \tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle - \mu^2)\rangle = \\ [4\lambda^2 + (1 + \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle - \lambda^2)^2]^{\frac{1}{2}}.[4\mu^2 + (1 + \langle \tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle - \mu^2)^2\rangle]^{\frac{1}{2}}\end{gathered}$$

Elevando ambos os membros dessa última igualdade ao quadrado, e simplificando o resultado, vem

$$\begin{gathered}(1 + \langle \tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle - \mu^2)^2.\lambda^2 - 2\mu.(1 + \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle - \lambda^2). \\ .(1 + \langle \tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle - \mu^2).\lambda + \mu^2.(1 + \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle - \lambda^2)^2 = 0\end{gathered}$$

Resolvendo essa equação em λ, resulta em,

$$\lambda = \frac{\mu.(1 + \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p) \rangle - \lambda^2)}{1 + \langle \tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q) \rangle - \mu^2}, \text{ isto é,}$$

$$\frac{1 + \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p) \rangle - \lambda^2}{\lambda} = \frac{1 + \langle \tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q) \rangle - \mu^2}{\mu} \tag{3.16}$$

Como $\tilde{\alpha} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma isometria, $\tilde{\alpha}$ é uma rotação $\tilde{\alpha}^*$ seguida por uma translação pelo vetor $c \in \mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $\tilde{\alpha}(p) = \tilde{\alpha}^*(p) + c$, e como $p = \lambda v, q = \mu v$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p) \rangle &= \lambda^2 + 2\lambda.\langle \tilde{\alpha}^*(v), c \rangle + \langle c, c \rangle, \\ \langle \tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q) \rangle &= \mu^2 + 2\mu.\langle \tilde{\alpha}^*(v), c \rangle + \langle c, c \rangle \end{aligned}$$

e usando estas equações, a equação (3.16), transforma-se

$$\frac{1 + \langle c, c \rangle}{\lambda} + 2.\langle \tilde{\alpha}^*(v), c \rangle = \frac{1 + \langle c, c \rangle}{\mu} + 2.\langle \tilde{\alpha}^*(v), c \rangle.$$

Deste modo $\lambda = \mu$ e $p = q$, que é uma contradição. Assim ρ_1 é 1:1, e analogamente ρ_2 é 1:1.

Como ρ_1 e ρ_2 são aplicações 1:1 e contínuas, de $\mathbb{R}^{n+1}$ em S^{n+1}, segue do Teorema 3.2.2 da invariância do Domínio que ρ_1 e ρ_2 são ambas aplicações abertas.

Assim podemos definir uma aplicação α, 1:1 por $\alpha = \rho_2 \circ \tilde{\alpha} \circ \rho_1^{-1}$ numa vizinhança aberta conexa U de $x(M^n)$ em S^{n+1}, de onde obtemos que

$$y = \rho_2 \circ \tilde{y} = \rho_2 \circ \tilde{\alpha} \circ \tilde{x} = \overbrace{\rho_2 \circ \tilde{\alpha} \circ \rho_1^{-1}}^{\alpha} \circ \underbrace{\rho_1 \circ \tilde{x}}_{x} = \alpha \circ x.$$

Provaremos que α preserva distância, isto é,

$$\begin{aligned} \langle \alpha(\rho_1(p)) - \alpha(\rho_1(q)), \alpha(\rho_1(p)) - \alpha(\rho_1(q)) \rangle &= \\ \langle \rho_1(p) - \rho_1(q), \rho_1(p) - \rho_1(q) \rangle &= \end{aligned} \tag{3.17}$$

Tendo em vista que, a distância Euclidiana entre um par de pontos na esfera S^{n+1} determina unicamente sua distância esférica. Como,

$$
\begin{aligned}
(\alpha \circ \rho_1)(p) &= (\rho_2 \circ \tilde{\alpha} \circ \rho_1^{-1} \circ \rho_1)(p) = (\rho_2 \circ \tilde{\alpha})(p) \\
(\alpha \circ \rho_1)(q) &= (\rho_2 \circ \tilde{\alpha} \circ \rho_1^{-1} \circ \rho_1)(q) = (\rho_2 \circ \tilde{\alpha})(q)
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

substituindo então (3.18) em (3.17), resulta que

$$
\begin{aligned}
\langle \rho_1(p) - \rho_1(q), \rho_1(p) - \rho_1(q) \rangle &= \\
\langle \rho_2(\tilde{\alpha}(p)) - \rho_2(\tilde{\alpha}(q)), \rho_2(\tilde{\alpha}(p)) - \rho_2(\tilde{\alpha}(q)) \rangle &=
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Assim, para provar que α preserva distância, basta provar (3.19). Mas a equação (3.19) se escreve como,

$$
\begin{aligned}
\langle \rho_1(p), \rho_1(p) \rangle - 2\langle \rho_1(p), \rho_1(q) \rangle + \langle \rho_1(q), \rho_1(q) \rangle &= \\
\langle \rho_2(\tilde{\alpha}(p)), \rho_2(\tilde{\alpha}(p)) \rangle - 2\langle \rho_2(\tilde{\alpha}(p)), \rho_2(\tilde{\alpha}(q)) \rangle + \langle \rho_2(\tilde{\alpha}(q)), \rho_2(\tilde{\alpha}(q)) \rangle &=
\end{aligned}
$$

então, para provar (3.19), basta provar que

$$
\langle \rho_1(p), \rho_1(q) \rangle = \langle \rho_2(\tilde{\alpha}(p)), \rho_2(\tilde{\alpha}(q)) \rangle \tag{3.20}
$$

Seja,

$$
\begin{aligned}
a(p) &= 2p + e.(1 + \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p) \rangle - \langle p, p \rangle) \\
b(p) &= 2\tilde{\alpha}(p) + e.(1 + \langle p, p \rangle - \langle \tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p) \rangle)
\end{aligned}
$$

assim,

$$
\rho_1(p) = \frac{a(p)}{\sqrt{\langle a(p), a(p) \rangle}}, \quad \rho_2(\tilde{\alpha}(p)) = \frac{b(p)}{\sqrt{\langle b(p), b(p) \rangle}}
$$

Então, para provar (3.20) basta provar que para um par de pontos arbitrários $p, q \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$
\langle a(p), a(q) \rangle = \langle b(p), b(q) \rangle \tag{3.21}
$$

mas,

$$
\begin{aligned}
\langle a(p), a(q)\rangle &= \langle 2p + e.(1 + \langle\tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle - \langle p, p\rangle),\\
&\quad 2q + e.(1 + \langle\tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle - \langle q, q\rangle)\rangle\\
&= 4\langle p, q\rangle + (1 + \langle\tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle - \langle p, p\rangle).\\
&\quad .(1 + \langle\tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle - \langle q, q\rangle),
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
\langle b(p), b(q)\rangle &= \langle 2.\tilde{\alpha}(p) + e.(1 + \langle p, p\rangle - \langle\tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle),\\
&\quad \langle 2.\tilde{\alpha}(q) + e.(1 + \langle q, q\rangle - \langle\tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle)\rangle\\
&= 4\langle\tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(q)\rangle + (1 + \langle p, p\rangle - \langle\tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle).\\
&\quad .(1 + \langle q, q\rangle - \langle\tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle)
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Escrevendo $\tilde{\alpha}$ como uma rotação $\tilde{\alpha}^*$ seguida por uma translação pelo vetor c, isto é,

$$\tilde{\alpha}(p) = \tilde{\alpha}^*(p) + c,$$

então

$$\langle\tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(p)\rangle = \langle\tilde{\alpha}^*(p) + c, \tilde{\alpha}^*(p) + c\rangle = \langle p, p\rangle + 2\langle c, \tilde{\alpha}^*(p)\rangle + \langle c, c\rangle,$$

$$\langle\tilde{\alpha}(q), \tilde{\alpha}(q)\rangle = \langle\tilde{\alpha}^*(q) + c, \tilde{\alpha}^*(q) + c\rangle = \langle q, q\rangle + 2\langle c, \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + \langle c, c\rangle,$$

e,

$$\langle\tilde{\alpha}(p), \tilde{\alpha}(q)\rangle = \langle\tilde{\alpha}^*(p) + c, \tilde{\alpha}^*(q) + c\rangle = \langle p, q\rangle + \langle c, \tilde{\alpha}^*(p) + \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + \langle c, c\rangle.$$

assim, substituindo essas três últimas expressões em (3.22) e (3.23), obteremos, respectivamente

$$
\begin{aligned}
\langle a(p), a(q)\rangle &= 4\langle p, q\rangle + (1 + \langle p, p\rangle + 2.\langle c, \tilde{\alpha}^*(p)\rangle + \langle c, c\rangle - \langle p, p\rangle).\\
&\quad .(1 + \langle q, q\rangle + 2.\langle c, \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + \langle c, c\rangle - \langle q, q\rangle)\\
&= 4\langle p, q\rangle + (1 + \langle c, c\rangle + 2.\langle c, \tilde{\alpha}^*(p)\rangle).(1 + \langle c, c\rangle + 2.\langle c, \tilde{\alpha}^*(q)\rangle)
\end{aligned}
$$

e,

$$\begin{aligned}
\langle b(p), b(q)\rangle &= 4\langle p,q\rangle + 4\langle c, \tilde{\alpha}^*(p) + \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + 4\langle c,c\rangle + \\
&\quad +(1 + \langle p,p\rangle - \langle p,p\rangle - 2.\langle c, \tilde{\alpha}^*(p)\rangle - \langle c,c\rangle). \\
&\quad .(1 + \langle q,q\rangle - \langle q,q\rangle - 2.\langle c, \tilde{\alpha}^*(q)\rangle - \langle c,c\rangle) \\
&= 4\langle p,q\rangle + 4\langle c, \tilde{\alpha}^*(p) + \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + 4\langle c,c\rangle + 1 - 2\langle c, \tilde{\alpha}^*(q)\rangle - \langle c,c\rangle + \\
&\quad -2\langle c, \tilde{\alpha}^*(p)\rangle + 4\langle c, \tilde{\alpha}^*(p)\rangle.\langle c, \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + 2\langle c,c\rangle.\langle c, \tilde{\alpha}^*(p)\rangle + \\
&\quad -\langle c,c\rangle + 2.\langle c,c\rangle.\langle c, \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + \langle c,c\rangle^2 \\
&= 4\langle p,q\rangle + 4\langle c, \tilde{\alpha}^*(p) + \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + (\langle c,c\rangle^2 + 2\langle c,c\rangle + 1) + \\
&\quad -2\langle c, \tilde{\alpha}^*(p) + \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + 2\langle c,c\rangle.\langle c, \tilde{\alpha}^*(p) + \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + \\
&\quad +4\langle c, \tilde{\alpha}^*(p)\rangle.\langle c, \tilde{\alpha}^*(q)\rangle \\
&= 4\langle p,q\rangle + (\langle c,c\rangle + 1)^2 + 2.(1 + \langle c,c\rangle).\langle c, \tilde{\alpha}^*(p) + \tilde{\alpha}^*(q)\rangle + \\
&\quad +4.\langle c, \tilde{\alpha}^*(p)\rangle.\langle c, \tilde{\alpha}^*(q)\rangle \\
&= 4\langle p,q\rangle + (1 + \langle c,c\rangle + 2.\langle c, \tilde{\alpha}^*(p)\rangle).(1 + \langle c,c\rangle + 2.\langle c, \tilde{\alpha}^*(q)\rangle),
\end{aligned}$$

logo,

$$\langle a(p), a(q)\rangle = \langle b(p), b(q)\rangle$$

donde obtemos imediatamente (3.20) , assim concluímos que α preserva distância, e portanto α é uma isometria.

Afirmamos que α estende-se para uma isometria $A : S^{n+1} \to S^{n+1}$, o que completará a prova do Teorema 3.2.3(b).

Com efeito, $|\alpha(p) - \alpha(q)| = |p - q|$, $\forall p, q \in U \subset S^{n+1}$, pois α é uma isometria, e como $\alpha : U \subset x(M^n) \to S^{n+1}$, temos que $|\alpha(p)| = |p|, \forall p \in U$. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(p), \alpha(q)\rangle &= \frac{1}{2}.(|\alpha(p)|^2 + |\alpha(q)|^2 - |\alpha(p) - \alpha(q)|^2) \\
&= \frac{1}{2}.(|p|^2 + |q|^2 - |p - q|^2) \\
&= \langle p, q\rangle,
\end{aligned}$$

isto é, α preserva produto interno.

Seja $\{p_1, p_2, ..., p_{n+2}\} \subset U$, um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^{n+2}$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $T(p_i) = \alpha(p_i)$, $1 \leq i \leq n+2$.

Dados $u, v \in \mathbb{R}^{n+2}$, então $u = \sum\limits_i a_i p_i$, $v = \sum\limits_j b_j p_j$, assim, temos

$$\begin{aligned}\langle Tu, Tv\rangle &= \Big\langle \sum_i a_i T(p_i), \sum_j b_j T(p_j)\Big\rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \langle \alpha(p_i), \alpha(p_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \langle p_i, p_j\rangle = \Big\langle \sum_i a_i p_i, \sum_j b_j p_j\Big\rangle = \langle u, v\rangle\end{aligned}$$

assim, T é uma isometria de $\mathbb{R}^{n+2}$, e $A = T\Big|_{S^{n+1}}$.

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] A. V. Pogorelov, *Topics in the Theory of Surfaces in Elliptic Space*, Kharkov University Press, 1960, in Russian. English Translation, Gordon and Breach, New York, 1961.

[2] _____, *On the rigidity of general closed surfaces*, Kiev, 1952, in Russian. German translation, Akademic, Berlim, 1957.

[3] B. O' Neill, *Isometric immersions preserve curvature operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962) 759-763.

[4] J. Lelong-Ferrand, *Géometrie differentielle*, Masson, Paris, 1963.

[5] J. Hadamard, *Sur certaines proprietes des trajectories en dynamique*, J. Math. Pures Appl., 3(1897)331-387.

[6] J. van Heijenoort, *On locally convex manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. 5(1952)223-242.

[7] K. Voss, *Differentialgeometrie geschlossener Flächen in Euklidischen Raum. I*, Jber. Deutsch. Math. Verein. 63(1960) 117-136.

[8] Lúcio Rodriguez, *"Geometria das subvariedades"*, IMPA-Rio de Janeiro, 1988.

[9] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - segunda edição (Projeto Euclides).

[10] _____, *"O Método do Referencial Móvel"*, I Escola Latino Americana de Mátemática, IMPA, Rio de Janeiro - 1976.

[11] _____, *Formas Diferenciais e Aplicações* - 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro - 1971.

[12] M. P. do Carmo & F. W. Warner, *"Rigidity and Convexity of Hypersurfaces in Spheres"*, J. Diferential Geometry - v.4, nº2 - June 1970 (133-144).

[13] M.P. do Carmo & E. Lima, *Isometric immersions with semi-definite second quadratic forms*, to appear in Archiv der Mathematik.

[14] Michael Spivak, *"Differential Geometry"*, Publish or Perish, Inc - 1979, Boston.

[15] R. Sacksteder, *On Hypersurfaces with no Negative Sectional Curvatures*, Amer. J. Math. 82 (1960) 609 - 630.

[16] _____, *The Rigidity of Hypersurfaces*, J. Math. Mech. 11 (1962) 929 - 940.

[17] R. Bishop & R. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.

[18] S.S. Chern, *Curves and surfaces in euclidean space*, Studies in Global Geometry and Analysis, Math. Assoc. Amer., 1967, 16-56.

[19] S.S. Chern & R.K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds II.*, Mich. Math. J.5 (1958) 5-12.