

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*A GEOMETRIA ESFÉRICA E OS SÓLIDOS PLATÔNICOS.*

CÉLIA MARIA NOGUEIRA BATISTA

MANAUS

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CÉLIA MARIA NOGUEIRA BATISTA

*A GEOMETRIA ESFÉRICA E OS SÓLIDOS PLATÔNICOS*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr. José Kenedy Martins

MANAUS

2007

CÉLIA MARIA NOGUEIRA BATISTA

A GEOMETRIA ESFÉRICA E OS SÓLIDOS PLATÔNICOS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 26 outubro de 2007.

BANCA EXAMINADORA

.....  
Prof<sup>o</sup> Dr. José Kennedy Martins, Presidente

Universidade Federal do Amazonas

.....  
Prof<sup>o</sup> Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy,

Universidade Federal do Amazonas

.....  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Sissy Souza

Universidade Federal do Amazonas

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pois tu, Ó Deus Eterno, estás comigo, me protejes e me diriges.

A minha Família, pois, com coragem toma posição pelo outro em situações de perigo, com compaixão toma posição com o outro e com amizade está ao lado do outro, trazendo consolo e apoio na tristeza e na aflição.

A amiga Vanise, pois amizade genuína requer tempo, esforço, e trabalho para ser mantida. A amizade é uma forma de amor.

Aos professores: Dr. Ivan Azevedo Tribuzy, Dr. Renato Azevedo Tribuzy e Dr. José Kenedy Martins, pois ser responsável é responder pelos próprios atos, é corresponder, porque temos vergonha de recuar quando os outros dizem "Vamos".

Ao colaborador técnico: Aurelino Bentes.

## RESUMO

# A GEOMETRIA ESFÉRICA E OS SÓLIDOS PLATÔNICOS

Orientador: José Kenedy Martins

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Esta dissertação apresenta uma nova demonstração do resultado obtido por Platão no século IV a.C, na Grécia antiga, de que existe apenas um número finito de classes de Poliedros regulares congruentes, usando a teoria básica da Geometria Esférica, de acordo com o trabalho "Os Sólidos Platônicos", do Dr. João Lucas Marques Barbosa da Universidade Federal do Ceará, apresentado em Manaus.

# ABSTRACT

## SPHERICAL GEOMETRY AND THE PLATONIC SOLIDS .

Advisor: José Kenedy Martins

Graduate Program in Mathematics

This dissertation presents a new proof of the result obtained by Plato in the fourth century B.C., in the ancient Greece, which states that there exists only one finite number of regular congruent polyhedron classes - the Plato polyhedrons, using the basic theory of spherical geometry in according with Dr. João Lucas Marques Barbosa's work on "Platonic Solids", which was presented on a Differential Geometry Seminar in the year 2005 held at the Universidade Federal do Amazonas .

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>História das Geometrias</b>	<b>1</b>
1.1	Comparando as Geometrias não-Euclidianas . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Premilinares e Generalidades</b>	<b>8</b>
2.1	Geometria diferencial de curvas e superfícies. . . . .	8
<b>3</b>	<b>Poliedros de Platão</b>	<b>22</b>
3.1	Abordagem da Geometria Clássica Euclidiana. . . . .	22
3.2	Abordagem da Geometria Esférica. . . . .	28

# INTRODUÇÃO

Os sólidos platônicos são poliedros satisfazendo as condições da Definição (3.1.20), foram classificados, já na época de ouro da matemática grega, usando os princípios e propriedades da Geometria Euclideana. Recentemente, em 2005, o Dr. João Lucas Marques Barbosa, da Universidade Federal do Ceará, apresentou em siminário na Universidade Federal do Amazonas o trabalho "Os Sólidos Platônicos", cujo objetivo era mostrar que estes sólidos possuem classe finita, usando a geometria na esfera e elementos simples da geometria diferencial.

Assim apresento no primeiro capítulo desta dissertação um roteiro histórico, que comprova que o avanço da ciência é o resultado teórico da produção material, lentamente adquirido, incorporado e superado por novas elaborações e acumulado no curso da história.

A elaboração e sistematização das geometrias não-Euclidianas no século XIX é um exemplo da renovação e aprimoramento do conhecimento humano.

Historicamente a geometria de Euclides foi constituída por um sistema lógico dedutivo, sistema baseado em postulados e axiomas, o "método euclidiano". O quinto potulado de Euclides foi o que causou questionamento por não ser tão evidente quanto os outros. Esse impasse, ou seja a impossibilidade de deduzir o postulado das paralelas a partir dos quatro primeiros postulados permitiram a construção e o desenvolvimento do pensamento geométrico e realçar a importância do estudo dos



geométricos não euclidianos, Bolyai (1832), Lobachevsky (1829), Gauss (1800), Legendre (1794), Lambert (1770), Saccheri (1733) e Riemann (1851), na edificação das outras geometrias. No segundo capítulo apresento um embasamento preliminar teórico da Geometria Esférica e Geometria Diferencial e finalmente no terceiro capítulo obtenho classificação dos sólidos platônicos usando duas abordagens, uma usando a Geometria Euclidiana e outra usando a Geometria Esférica, tendo como base o trabalho "Os Sólidos Platônicos".

# Capítulo 1

## História das Geometrias

Platão, por volta do século *IV* a.C., estudou certa classe de poliedros, para classifica-los pelo tipo de face que podem apresentar, e concluiu que existe apenas um número finito de tais classes.

Nesta dissertação mostra-se o mesmo resultado, obtido pelos antigos gregos, usando alguns conceitos básicos da geometria esférica.

A história da geometria esférica começa com Euclides de Alexandria, que para alguns historiadores, viveu por volta 330 a.C - 275 a.C., cujo o maior mérito foi coletar e organizar, em 300 a.C, proposições existentes sobre a geometria numa obra que se chamou "*Os elementos*", "*Stoicheia*", composta por treze livros. Essa obra foi ao longo dos tempos enriquecida por célebres matemáticos, que contribuíram para torná-la mais acessível e interessante, dos quais destacam-se Heron, Pappus, Proclus, Simplicius, Teão de Alexandria, Hipsicles de Alexandria, Isidoro de Mileto, dentre outros.

Os treze livros da autoria de Euclides, estão assim divididos:

Os livros I - IV tratam da geometria plana elementar.

O livro V apresenta a teoria das proporções de Eudoxo, na forma puramente geométrica.

O livro VI apresenta a semelhança de figuras planas. Neste livro encontra-se o teorema de Pitágoras e a secção de ouro. Contém o primeiro problema de máximo que chegou até nós com a prova de que o quadrado é, de todos os retângulos de um dado perímetro, o que tem área máxima.

Os livros VII - IX são dedicados à teoria dos números tais como a divisibilidade de inteiros, a adição de series geométricas, algumas propriedades dos números primos e a prova da irracionalidade do número  $\sqrt{2}$ .

O livro X contém a classificação geométrica de irracionais quadráticos e as suas raízes quadráticas.

Os livros XI - XIII ocupam-se com a geometria sólida e conduzem, pelas via dos ângulos sólidos, aos volumes do prisma, do paralelepípedo, da pirâmide e da esfera; a discussão dos cinco poliedros regulares ( platônicos ) e a prova de que existem somente estes cinco poliedros regulares.

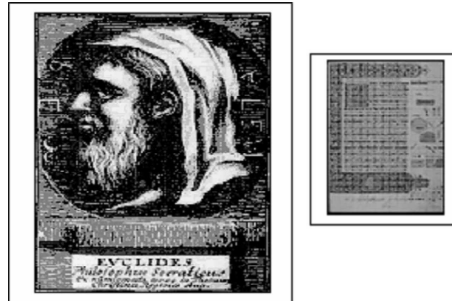


Figura 1.1: Euclides e os elementos

A continuidade dessa história está relacionada com as tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides, *"Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos."*; inserido no volume I de sua obra, o qual acreditava-se poder ser demonstrado usando os outros axiomas da geometria.

A primeira tentativa é de Ptolomeu de Alexandria (a.C. 90 -168 a.C.). O Padre Jesuita G. Saccheri (1667-1733), em seu livro "*Euclides ob omni naevo vindicatus*", foi o primeiro a tentar uma nova abordagem, utilizando a técnica de redução ao absurdo, admitindo a negação do postuldo do paralelismo de Euclides com vista a obter alguma contradição. Sem saber Saccheri tinha descoberto a geometria não - euclidiana.

Essa inquietação persistiu até o início do século XIX, atingindo diferentes culturas em épocas diversas aprimorando assim o estudo e pensamento geométrico.

No início dos anos de 1800, o grande matemático, Gauss começou a se interessar pela questão da possível existência de geometrias não - Euclidianas. Escreveu no seu caderno de notas: "Estou convencido de que prescindir do postuldo das paralelas não leva a nenhuma contradição, embora se obtenham ( conclusões) que se apresentam paradoxais". Sabe-se também que Gauss desenvolveu partes de um nova geometria, não Euclidiana. No entanto não se atreveu a publicar, talvez por temor de criar complicações com a inteligência alemã, na época dominada pelas idéias de Immanuel Kant(1724-1804) que em sua obra "*Critica da razão pura*" investiga a possibilidade da existência de juízos sintéticos a priori, isto é, de conhecimentos que não provém da prática, mas que são inerentes ao próprio espírito humano e considera a Geometria Euclidiana como o exemplo de perfeição teórica que não devia ser mexido.

Foi o jovem matemático russo Nikolai Lobachevsky, em 1826, o primeiro a negar a verdade evidente do postuldo de Euclides. Tomou como certa a proposição "Por um ponto fora de uma linha reta, pode- se traçar não uma mais ao menos duas linhas paralelas a ela". Entretanto ninguém tomou conhecimento, por ser Lobachevsky, um desconhecido e escreveu seu trabalho em russo, uma língua de pouca penetração na Europa do início do século XIX.

János Bolyai, filho do matemático Farkas Bolyai, em 1832, após cinco anos de estudos, publica os resultados de sua pesquisa sobre geometria não - Euclidiana como um apêndice a um trabalho de seu pai, onde, assim como Lobachesvky , percebia

não haver contradição, nem absurdo em negar o tradicional postulado das paralelas, substituindo-o pelo das geometrias hiperbólicas.

Restava um problema fundamental: não existia um modelo dessa nova geometria, única maneira de garantir haver ou não contradição nas construções de Lobachevsk e Bolyai.

A etapa seguinte no desenvolvimento das geometrias não - Euclidianas foi feita pelo matemático alemão George Friedrich Bernhard Riemann, em 1854, em sua célebre dissertação "*Sobre as hipóteses em que se funda a Geometria*".

O sucesso de Riemann se deve ao fato dele ter incorporado em seu estudo duas idéias extremamente férteis: O aparato matemático de Gauss, que havia provado que a curvatura de uma superfície dependia apenas de medidas feitas sobre ela, e seu próprio conceito de variedade multidimensional ( um objeto que generaliza a noção de superfície para qualquer dimensão e sem menção a um espaço ambiente) e postulou que uma geometria era um modo de medir comprimentos em uma tal variedade. A partir daí, são definidas as curvas "mais curtas entre pontos mais próximos", chamadas de geodésicas, que vão desempenhar o papel de retas nessa geometria.

Desse modo, a geometria Euclidiana (as geodésicas são retas e a curvatura é identicamente zero) é apenas uma entre as geometrias de Riemann, e é possível provar, que as variedades de curvatura negativa constante fornecem modelos para geometrias que não satisfazem o quinto postulado de Euclides.

A aceitação da geometria de Riemann só aconteceu após 1870, quando a geração posterior a ele começou a entender o seu significado.

A geometria Riemanniana é uma geometria não-Euclideana de espaços de curvatura constante positiva. A propriedade essencial desse espaço tridimensional é que seu volume é finito de modo que se um ponto se move sobre ele na mesma direção, pode certamente retornar ao ponto de partida . Observa-se na ilustração bi-dimensional da geometria sobre a esfera na figura 1.2, que em vez de retas da

geometria euclideana, na geometria de Riemann temos geodésicas ou seja arcos de grande círculo que podem ser traçados na esfera. A noção de linhas paralelas como dada no quinto postulado de Euclides, neste caso não tem sentido porque qualquer arco de um grande círculo que passa através de um ponto  $C$  não situado sobre  $AB$ , necessariamente irá se interceptar. Também mostra que a soma dos ângulos de um triângulo formado por três arcos que se interceptam de três grandes círculos é sempre maior que  $180^\circ$ .

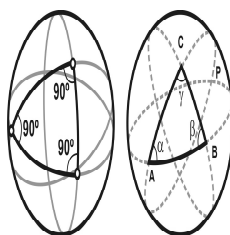


Figura 1.2: Ângulos esféricos

Felix Klein ( 1849 - 1925), estudou novas concepções sobre a classificação das geometrias por exemplo denominou a Geometria Riemanniana de Geometria Esférica.

O conhecimento das geometrias não-euclidianas demonstrou que o quinto postulado é independente dos demais e, portanto não pode ser demonstrado, e é o que distingue a Geometria não Euclidiana da Geometria Euclidiana.

## 1.1 Comparando as Geometrias não-Euclidianas

### Geometria Euclidiana

- Através de um ponto dado podemos traçar somente uma paralela a uma linha reta;
- A soma dos ângulos interiores de um triângulo é igual a dois retos;
- A circunferência de um círculo é igual a  $\pi$  vezes o seu diâmetro.

### Geometria esférica

- Atráves de um ponto dado não podemos traçar nenhuma paralela à um ponto dado;
- A soma dos ângulos interiores de um triângulo é maior do que dois ângulos retos;
- A circunferência de um círculo é menor do que  $\pi$  vezes o seu diâmetro.

### Geometria hiperbólica

- Através de um ponto dado podemos traçar mais de uma paralela a uma linha reta.

- A soma dos ângulos interiores de um triângulo é menor do que dois ângulos retos.
- A circunferência de um círculo é maior do que  $\pi$  vezes o seu diâmetro.

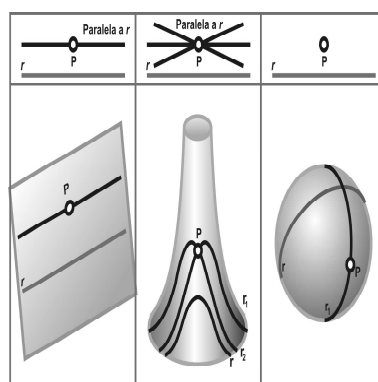


Figura 1.3: Comparando as Geometrias



# Capítulo 2

## Premilinares e Generalidades

Neste capítulo relacionei alguns conceitos da geometria esférica e geometria diferencial necessários para a compreensão do resultado principal.

Os detalhes de todas as afirmações feitas neste capítulo podem ser obtidos em [2]. Historicamente, a geometria Riemanniana foi um desenvolvimento natural da geometria diferencial em superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.1 Geometria diferencial de curvas e superfícies.

**Definição 2.1.1** *Uma curva diferenciável parametrizada, é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^3$  de um aberto  $I = (a,b)$  da reta  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ .*

**Definição 2.1.2** *Uma curva diferenciável  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^3$  é regular se  $\alpha' \neq 0$  para todo  $t \in I$ , onde  $t \in I$  é o parâmetro da curva e  $\alpha' = ((x'(t), y'(t), z'(t))) \in \mathbb{R}^3$  é o vetor velocidade ( ou vetor tangente) de  $\alpha$  em  $t$ .*

**Definição 2.1.3** *O comprimento de arco de uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^3$ , dado por  $t \in I$  a partir do ponto  $t_0$ , é definido por  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$  onde  $|\alpha'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(x)^2 + z'(x)^2}$  é comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ . Sendo  $\alpha'(t) \neq 0$ , o comprimento de arco  $s$  é uma função diferenciável de  $s$  e  $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$ .*

**Definição 2.1.4** (*Superfície Regular*). Um subconjunto  $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in \mathbf{S}$ , existe uma vizinhança  $V$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap \mathbf{S}$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap \mathbf{S}$  tal que:

1.  $\mathbf{x}$  é diferenciável. Ou seja, se escrevermos:

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

com  $(u, v) \in U$  as funções  $x(u, v), y(u, v)$  e  $z(u, v)$ , terão derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .

2.  $\mathbf{x}$  é um homeomorfismo. Como  $\mathbf{x}$  é contínua, pela condição 1, isto significa que  $\mathbf{x}$  tem uma inversa  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap \mathbf{S} \rightarrow U$  que é contínua; isto é,  $\mathbf{x}^{-1}$  é a restrição de uma aplicação contínua  $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida em um aberto  $W$  contendo  $V \cap \mathbf{S}$ .

3. (A condição de regularidade) Para cada  $q \in U$ , a diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

A aplicação  $\mathbf{x}$  é chamada uma parametrização local ou um sistema de coordenadas local em  $p$ .

A vizinhança  $V \cap \mathbf{S}$  de  $p$  é chamada vizinhança coordenada.

**Definição 2.1.5** (*Plano Tangente*). Seja  $\mathbf{S}$  uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  e  $p \in \mathbf{S}$  um ponto arbitrário. O vetor tangente a  $\mathbf{S}$  em  $p$ , é o vetor  $\alpha'(0)$  de uma curva parametrizada diferencial  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{S}$  com  $\alpha(0) = p$ . O conjunto de vetores tangentes a  $\mathbf{S}$  em  $p$  é chamado de Plano Tangente a  $\mathbf{S}$  em  $p$  denotado por  $T_p\mathbf{S}$ .

Observe que  $T_p\mathbf{S}$  é o plano  $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$  que passa por  $\mathbf{x}(q) = p$ , em consequência da proposição enunciada abaixo cuja demonstração encontra-se [2] página 98.

**Proposição 2.1.1** Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}$  uma parametrização de uma superfície

regular  $\mathbf{S}$  e seja  $q \in U$ . O subespaço vetorial de dimensão 2,

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $\mathbf{S}$  em  $\mathbf{x}(q)$ .

Uma parametrização local  $\mathbf{x}$  determina uma base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $\mathbf{T}_p\mathbf{S}$  chamada uma base associada a  $\mathbf{x}$ .

**Definição 2.1.6** (*Primeira Forma Fundamental*). No plano tangente temos a métrica induzida do "espaço ambiente"  $\mathbb{R}^3$  com a forma quadrática  $\mathbf{I}_p: \mathbf{T}_p\mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada a primeira forma fundamental de  $\mathbf{S}$  em  $p \in \mathbf{S}$ . Dada uma parametrização local  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{S}$  e uma curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  com  $\mathbf{p} = \alpha(0)$ , então :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_p(\alpha'(0)) &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ \mathbf{I}_p(\alpha'(0)) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u'v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\ \mathbf{I}_p(\alpha'(0)) &= E(u')^2 + 2F(u')(v') + G(v')^2 \end{aligned}$$

onde os valores de  $\mathbf{E}, \mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  são calculados em  $t = 0$ , e

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(u_0, v_0) &= \langle x_u, x_u \rangle_p \\ \mathbf{F}(u_0, v_0) &= \langle x_u, x_v \rangle_p \\ \mathbf{G}(u_0, v_0) &= \langle x_v, x_v \rangle_p \end{aligned}$$

são coeficientes da primeira forma fundamental  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $\mathbf{T}_p\mathbf{S}$

A importância da primeira forma fundamental, vem do fato que conhecendo-a pode-se tratar questões métricas sobre uma superfície regular sem fazer menção do espaço ambiente  $\mathbf{R}^3$ . Tais como:

- Comprimento de uma curva;

**Definição 2.1.7** (*Comprimento de curva*). O comprimento de um  $s$  de uma curva parametrizada é dada por  $s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt$ . Em particular, se  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , está contida em uma vizinhança coordenada correspondente à parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$ , podemos calcular o comprimento de arco de  $\alpha$  entre 0 e  $t$  por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\mathbf{E}(u')^2 + 2\mathbf{F}u'v' + \mathbf{G}(v')^2} dt$$

- Ângulo entre duas curvas

**Definição 2.1.8** (*Ângulo entre duas curvas*). O ângulo  $\theta$  entre duas curvas parametrizadas regulares  $\alpha: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{S}, \beta: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{S}$ , que se intersectam em  $t = t_0$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}$$

em particular, o ângulo  $\gamma$  das curvas coordenadas de uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  é

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{|\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|} \\ \cos \gamma &= \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{\mathbf{E}\mathbf{G}}} \end{aligned}$$

Nesse trabalho consideram-se apenas as parametrizações ortogonais, ou seja as parametrizações em que  $\mathbf{F}(u, v) = 0$ , para todo  $(u, v)$ .

- Área de uma região limitada de uma superfície regular

Em [2] página 135, justifica-se que a área de uma região compacta  $\mathbf{R}$ , contida na imagem  $\mathbf{x}(U)$  da parametrização de uma superfície  $\mathbf{S}$  é dada por

$$\mathbf{A}(R) = \int \int_{\mathbf{M}} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| du dv,$$

onde :

$$\mathbf{M} = \mathbf{x}^{-1}(R)$$

$$|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|^2 + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 = |\mathbf{x}_u|^2 |\mathbf{x}_v|^2$$

$$|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \sqrt{\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}$$

$$\mathbf{A}(R) = \int \int_M \sqrt{\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2} du dv$$

Usando as parametrizações de  $\mathbf{S}$  podemos estender a definição de área para regiões não contidas na imagem de uma única parametrização.

Pela condição 3., da definição 2.1.4, dada uma parametrização local  $\mathbf{x}$  de uma superfície  $\mathbf{S}$  em  $\mathbb{R}^3$  em um ponto  $p \in \mathbf{S}$ , a aplicação  $\mathbf{N} : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , conhecida como aplicação de Gauss em  $\mathbf{S}$ , definida por

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(p)$$

está bem definida.

**Definição 2.1.9** (*Segunda forma fundamental*). A forma quadrática  $\mathbf{II}_p$ , definida em  $\mathbf{T}_p\mathbf{S}$  por :

$$\mathbf{II}_p(v) = -\langle d\mathbf{N}_p(v), v \rangle$$

é chamada a segunda forma fundamental de  $\mathbf{S}$  em  $p$ .

Dada uma parametrização local  $x$  em  $\mathbf{S}$  em um ponto  $p \in \mathbf{S}$  e, considerando uma curva parametrizada  $\alpha$  tal que  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  com  $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u(0), v(0))$ , temos

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_p(\alpha') &= \mathbf{N}'(u(t), v(t)) \\ &= \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v' \end{aligned}$$

como  $\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle = 1$  temos que  $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \in \mathbf{T}_p\mathbf{S}$  e portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\ \mathbf{N}_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \end{aligned}$$

para algumas funções  $a_{ij}$ . Por outro lado, a expressão da *segunda forma fundamental* na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_p(\alpha') &= -\langle d\mathbf{N}(\alpha'), \alpha' \rangle \\ \mathbf{II}_p(\alpha') &= -\langle \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ \mathbf{II}_p(\alpha') &= \mathbf{e}(u')^2 + 2\mathbf{f}u'v' + \mathbf{g}(v')^2 \end{aligned}$$

onde, já que  $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uu} \rangle \\ \mathbf{f} &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ \mathbf{g} &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vv} \rangle \end{aligned}$$

Obtém-se os valores de  $a_{ij}$  em termos dos coeficientes  $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ . A partir das equações  $\mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v$  e  $\mathbf{N}_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v$ .

$$-\mathbf{f} = \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \mathbf{a}_{11}\mathbf{F} + \mathbf{a}_{21}\mathbf{G}$$

$$-\mathbf{f} = \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \mathbf{a}_{12}\mathbf{E} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{F}$$

$$-\mathbf{e} = \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}\mathbf{E} + a_{21}\mathbf{F}$$

$$-\mathbf{g} = \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}\mathbf{F} + a_{22}\mathbf{G}$$

chegamos portanto as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ \mathbf{a}_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ \mathbf{a}_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ \mathbf{a}_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

As equações  $\mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v$  e  $\mathbf{N}_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v$  com os valores acima são conhecidos como equações de Weingarten.

Como  $\mathbf{N}$  é ortogonal aos vetores da base  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  de  $\mathbf{T}_p\mathbf{S}$ , então  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ . Escrevendo as derivadas dos vetores  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  e  $\mathbf{N}$  com relação a esta base, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \tau_{11}^1\mathbf{x}_u + \tau_{11}^2\mathbf{x}_v + \mathbf{L}_1\mathbf{N}, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \tau_{12}^1\mathbf{x}_u + \tau_{12}^2\mathbf{x}_v + \mathbf{L}_2\mathbf{N}, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \tau_{22}^1\mathbf{x}_u + \tau_{22}^2\mathbf{x}_v + \mathbf{L}_3\mathbf{N}, \\ \mathbf{N}_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ \mathbf{N}_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \end{aligned}$$

Os coeficientes  $\tau_{ij}^k, i, j, k = 1, 2$  são chamados *os símbolos de Christoffel* de  $\mathbf{S}$  na parametrização  $\mathbf{x}$ . Um fato importante é que todos os conceitos geométricos e as propriedades expressas em termos dos *símbolos de Christoffel* de  $\mathbf{S}$  são invariantes por isometrias (isto é, podem ser calculados a partir da primeira forma fundamental).

Usando o fato que

$$(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0,$$

$$(\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{uv})_v = 0,$$

$$\mathbf{N}_{uv} - \mathbf{N}_{vu} = 0,$$

pode-se mostrar que

$$\mathbf{e}_v - \mathbf{f}_u = \mathbf{e}\tau_{12}^1 + \mathbf{f}(\tau_{12}^2 - \tau_{11}^1) - \mathbf{g}\tau_{11}^2$$

$$\mathbf{f}_v - \mathbf{g}_u = \mathbf{e}\tau_{22}^1 + \mathbf{f}(\tau_{22}^2 - \tau_{12}^1) - \mathbf{g}\tau_{12}^2$$

são as equações de Mainardi-Codazzi.

**Definição 2.1.10** (*Curvatura Gaussiana e Curvatura Média*). Seja  $\mathbf{S}$  uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  e  $p \in \mathbf{S}$  um ponto arbitrário. Seja  $d\mathbf{N}_p: \mathbf{T}_p\mathbf{S}$  a aplicação diferencial de Gauss. Então o determinante de  $d\mathbf{N}_p$  é chamado a Curvatura Gaussiana  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{S}$  em  $p$ . O simétrico da metade do traço de  $d\mathbf{N}_p$  é chamado a curvatura média  $\mathbf{H}$  de  $\mathbf{S}$  em  $p$ .

Em respeito da primeira e segunda forma fundamentais  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{H}$  são dadas por

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{e}\mathbf{g} - \mathbf{f}^2}{\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{e}\mathbf{G} - 2\mathbf{f}\mathbf{F} + \mathbf{g}\mathbf{E}}{2(\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2)}$$

**Definição 2.1.11** (*Curvatura Normal*). Seja  $\mathbf{C}$  uma curva regular em  $\mathbf{S}$  passando por  $p \in \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{k}$  a curvatura de  $\mathbf{C}$  em  $p$ , e  $\cos\theta = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal a  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{N}$  é o vetor normal a  $\mathbf{S}$  em  $p$ . O número  $\mathbf{k}_n = \mathbf{k}\cos\theta$  é chamado a curvatura normal de  $\mathbf{C} \subset \mathbf{S}$  em  $p$ .



Verifica-se que valor da segunda forma fundamental  $II_p$  para um vetor unitário  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_p\mathbf{S}$  é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por  $p$  e tangente a  $\mathbf{v}$ . E para cada  $p \in \mathbf{S}$  existe uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  de  $\mathbf{T}_p\mathbf{S}$  tal que

$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{k}_1\mathbf{e}_1$$

$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{k}_2\mathbf{e}_2$$

Além disso,  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  são valores extremos da curvatura normal em  $p$ .

**Definição 2.1.12** (*Curvatura Normal Máxima e Curvatura Normal Mínima*). *Curvatura Normal Máxima  $\mathbf{k}_1$  e Curvatura Normal Mínima  $\mathbf{k}_2$ , são chamadas curvaturas principais em  $p$ ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores em  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  são chamadas direções principais em  $p$ .*

**Definição 2.1.13** (*Linha de Curvatura*). *Se uma curva regular conexa  $\mathbf{C}$  em  $\mathbf{S}$  é tal que para todo  $p \in \mathbf{C}$  a reta tangente a  $\mathbf{C}$  é uma direção principal em  $p$ , então dizemos que  $\mathbf{C}$  é uma linha de curvatura de  $\mathbf{S}$ .*

Em termos das curvaturas principais  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \end{aligned}$$

**Definição 2.1.14** (*Aplicação Conforme*). *Um difeomorfismo  $\varphi : \mathbf{S} \rightarrow \bar{\mathbf{S}}$  é uma aplicação conforme se para todo  $p \in \mathbf{S}$  e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{T}_p\mathbf{S}$  tem-se*

$$\langle d\varphi_p(\mathbf{v}), d\varphi_p(\mathbf{w}) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p) \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_p$$

onde  $\lambda$  é uma aplicação diferenciável em  $\mathbf{S}$ , diferente de zero em todos os pontos. Neste caso, as superfícies  $\mathbf{S}$  e  $\bar{\mathbf{S}}$  são ditas conformes.

**Definição 2.1.15** (*Imersão*). Uma aplicação diferenciável  $\varphi : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}^3$  é uma imersão se a diferencial  $d\varphi_p : \mathbf{T}_p\mathbf{S}$  é injetiva.

Se além disso,  $\mathbf{S}$  tem uma métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e

$$d\varphi_p(\mathbf{v}, d\varphi_p(\mathbf{w})_{\varphi(p)}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p,$$

sendo  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{T}_p\mathbf{S}$ ,  $\varphi$  é uma imersão isométrica.

**Definição 2.1.16** (*Derivada Covariante*). Seja  $\mathbf{w}$  um campo vetorial diferenciável em um conjunto aberto  $\mathbf{U} \subset \mathbf{S}$  e  $p \in \mathbf{U}$ . Considere a curva parametrizada

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{U}$$

com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{y}$ . Seja  $\mathbf{w}(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , a restrição do campo vetorial  $\mathbf{w}$  à curva  $\alpha$ . O vetor obtido pela projeção normal de  $(\frac{d\mathbf{w}}{dt})(0)$  no plano  $\mathbf{T}_p\mathbf{S}$  é chamada a derivada covariante em  $p$  do campo vetorial  $\mathbf{w}$  relativo ao vetor  $\mathbf{y}$ . Esta derivada covariante é denotada por  $(\frac{D\mathbf{w}}{dt})(0)$ .

Um campo vetorial  $\mathbf{w}$  ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{S}$  é dito paralelo se  $(\frac{D\mathbf{w}}{dt}) = 0$  para todo  $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$ .

**Definição 2.1.17** (*Geodésica*). Uma curva parametrizada (não constante),  $\gamma : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{S}$  é uma geodésica em  $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$  se o campo de seus vetores tangentes  $\gamma'(t)$  é paralelo ao longo de  $\gamma$  em  $\mathbf{t}$ ; isto é;

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0$$

$\gamma$  é uma geodésica parametrizada se ela é geodésica para todo  $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$ .

Cito como exemplos; as geodésicas de uma superfície  $\mathbf{S}$  plana, são linhas retas, enquanto que na superfície esférica as geodésicas são circunferências de círculos máximos.

As geodésicas representam as "retas" das superfícies no sentido de que uma geodésica é a curva que minimiza distância entre pontos (próximos).

O teorema de existência e unicidade de *Equações Diferenciais* garante que dado um ponto  $\mathbf{p}$  de  $\mathbf{S}$  e um vetor  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_p\mathbf{S}$  existe uma única geodésica  $\gamma(t)$  tal que  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  e  $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ .

Muitos resultados importantes da Geometria Diferencial foram obtidos usando a noção de geodésicas.

**Definição 2.1.18** (*Curvatura Geodésica*). *Seja  $\mathbf{C}$  uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada  $\mathbf{S}$ , e seja  $\alpha(\mathbf{s})$  uma parametrização de  $\mathbf{C}$ , em uma vizinhança de  $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$ , pelo comprimento de arco  $\mathbf{s}$ . O valor algébrico*

$\frac{D\alpha'(\mathbf{s})}{ds} = \mathbf{k}_g$  *da derivada covariante de  $\alpha'(\mathbf{s})$  é chamado curvatura geodésica de  $\mathbf{C}$  em  $p$ .*

As geodésicas que são curvas regulares são assim caracterizadas como curvas cuja curvatura geodésica é nula.

Um dos resultados mais importantes da geometria diferencial de superfície é o teorema de Gauss-Bonnet. O mesmo estabelece uma relação entre resultados puramente topológicos e geométricos.

**Teorema 2.1.1** (*de Gauss-Bonnet*) *Seja  $\mathbf{R} \subset \mathbf{S}$ , uma região regular de uma superfície orientada e sejam  $c_1, \dots, c_n$  as curvas fechadas regulares por parte, e que constituem a fronteira  $\partial\mathbf{R}$  de  $\mathbf{R}$ . Suponhamos que  $c_i$  está orientada positivamente e sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  o conjunto de todos os ângulos externos das curvas  $c_1, \dots, c_n$  então:*

$$\sum_{i=1}^n \int_{c_i} \mathbf{k}_g(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int \int_{\mathbf{R}} \mathbf{K} d\sigma + \sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell = 2\pi \mathcal{X}(\mathbf{R})$$

onde  $s$  indica o comprimento de arco de  $c_i$  e a integral estendida a  $c_i$  significa a soma das integrais em cada arco regular de  $c_i$  e  $s$  indica o comprimento de arco de  $c_i$ .

Veremos agora uma aplicação do Teorema de Gauss-Bonnet. Para isto, usaremos um fato básico da topologia do plano, o teorema da curva de Jordan, o qual diz que toda curva plana, fechada e regular por partes é fronteira de uma região simples.

**Definição 2.1.19** (*Triângulos em uma superfície*). Diz-se que uma região simples que tem apenas três vértices com ângulos externos  $\theta_i \neq 0, i = 1, 2, 3$  é um triângulo.

Os triângulos de uma superfície  $\mathbf{S}$  que generalizam os triângulos retilíneos do plano, são os triângulos cujos os lados são segmentos geodésicos de  $\mathbf{S}$ .

A aplicação trata de triângulos geodésicos em superfícies. Gauss afirma que o excesso sobre  $\pi$ , da soma dos ângulos internos  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$  de um triângulo geodésico  $T$  é igual à integral da curvatura Gaussiana  $K$  sobre  $T$  isto é:

$$\int \int_{\mathbf{T}} \mathbf{K} d\sigma + \sum_{i=1}^3 \varphi_i = 2\pi.$$

Seja  $T$  um triângulo geodésico em uma superfície orientada  $S$ . Sejam  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$  os ângulos externos de  $T$  e  $\varphi_1 = \pi - \theta_1, \varphi_2 = \pi - \theta_2$  e  $\varphi_3 = \pi - \theta_3$  os ângulos internos. Pelo teorema de Gauss- Bonnet tem-se;

$$\sum_{i=1}^n \int_{c_i} \mathbf{k}_g(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int \int_{\mathbf{R}} \mathbf{K} d\sigma + \sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell = 2\pi \mathcal{X}(\mathbf{R}).$$

Sendo  $k_g = 0$ , pois os lados dos triângulos são geodésicas, além disso a característica de Euler-Poincaré de uma região simples é igual a 1, obtém-se:

$$\int \int_{\mathbf{T}} \mathbf{K} d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi.$$

$$\int \int_{\mathbf{T}} \mathbf{K} d\sigma + 3\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = 2\pi.$$

De onde se conclui que:

$$\int \int_{\mathbf{T}} \mathbf{K} d\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi.$$

A diferença  $\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi$  "o excesso de  $\mathbf{T}$ " é dada precisamente por  $\int \int_{\mathbf{T}} \mathbf{K} d\sigma$ . Se  $\mathbf{K} \neq 0$  em  $\mathbf{T}$ , e a restrição de  $\mathbf{N}$  a  $\mathbf{T}$  é injetiva, esta integral é a área da imagem  $\mathbf{N}(\mathbf{T})$  de  $\mathbf{T}$  pela aplicação de Gauss  $\mathbf{N} : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}^2$  pela equação  $\mathbf{A} = \int \int_{\mathbf{T}} \mathbf{K} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| du dv$ .

Isto é o excesso de um triângulo geodésico  $\mathbf{T}$  é igual a a área de sua imagem esférica  $\mathbf{N}(\mathbf{T})$ .

Além disso, a soma dos ângulos internos  $\sum_{i=1}^3 \varphi_i$  de um triângulo geodésico em:

$$\int \int_{\mathbf{T}} \mathbf{K} d\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi.$$

é:

- Igual a  $\pi$  se  $K = 0$
- Maior do que  $\pi$  se  $K > 0$
- Menor do que  $\pi$  se  $K < 0$

**Teorema 2.1.2** A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e de mesmo raio.

### ***Demonstração***

*Seja  $S$ , uma superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$ , e um plano  $E$  que passa por  $O$ . A interseção  $E \cap S$  é o conjunto de todos os pontos de  $E$ , cuja distância a  $O$  é igual a  $r$ . Esta é a definição de uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ .*

*Conclusão a interseção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é chamada uma circunferência máxima da superfície esférica.*

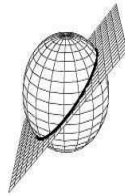


Figura 2.1: Circunferência máxima

***Teorema 2.1.3*** Sejam  $A$  e  $B$  pontos de uma superfície esférica  $S$ , existe um círculo máximo  $m$  de  $S$  que contém estes dois pontos.

### ***Demonstração***

*Seja  $O$  centro da esfera  $S$ , se  $P$  e  $Q$  não forem antípodas (não são extremos de um diâmetro de  $S$ ). Então  $O$ ,  $P$  e  $Q$  determinam um único plano. A interseção deste plano com a esfera  $S$  é um círculo máximo, de  $S$ , contendo  $P$  e  $Q$ .*

*Por outro lado se  $P$  e  $Q$  são antípoda então todo círculo máximo passando por  $P$  conterá o ponto  $Q$ . E portanto existirão infinitos círculos máximos de  $S$  contendo estes dois pontos.*

# Capítulo 3

## Poliedros de Platão

### 3.1 Abordagem da Geometria Clássica Euclidiana.

*Do grego-poly (muitas)+edro (faces) os poliedros fazem parte do pensamento grego, foram estudados por Platão por volta do século IV a.C. e tomaram parte nas teorias sobre o Universo. Diz-se poliedro todo sólido limitado por polígonos planos. Os polígonos, chamados faces do poliedros, são colocados lado a lado, não pertencem ao mesmo plano, definindo um trecho fechado do espaço. O ângulo entre duas faces é chamado ângulo diedro. Os lados são chamados arestas do poliedro. Os vértices dos polígonos coincidem com os vértices do poliedro. As arestas que saem de um mesmo vértice formam um ângulo sólido do poliedro. Os sólidos geométricos ou poliedros podem ter qualquer configuração desde que fechem um espaço.*

**Definição 3.1.20** (Poliedro de Platão)

*Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições.*

*1 todas as faces têm o mesmo número ( $n$ ) de arestas,*

*2 todos os ângulos poliédricos têm o mesmo ( $m$ ) de arestas,*

3 vale a relação de Euler:  $(V - A + F = 2)$ .

**Proposição 3.1.2** *Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.*

### **Demonstração**

Usando as condições que devem ser verificadas por um poliedro de Platão, temos:

1. Cada uma das faces ( $F$ ) tem  $n$  arestas, como cada aresta, pertence a duas faces tem-se que:

$$n.F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n}, \text{ com } n \geq 3 \text{ (1)}$$

2. Cada um dos  $V$  ângulos poliédricos de  $m$  aresta, e como cada aresta contém dois vértices, tem-se que:

$$mV = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m}, \text{ com } m \geq 3. \text{ (2)}$$

3. Relação de Euler  $V - A + F = 2$  .(3)

Substituindo-se (1) e (2) em (3) e depois divide-se por  $2A$ , obtém-se:

$$V - A + F = 2 \rightarrow \frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

$$\frac{\frac{2A}{m}}{2A} - \frac{A}{2A} + \frac{\frac{2A}{n}}{2A} = \frac{2}{2A}$$

concluindo-se

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \text{ (1)}$$

Sabe-se que:  $n \geq 3$  e  $m \geq 3$ ,

faz-se  $m$  e  $n$  simultaneamente maiores que 3, obtém-se:



$$m > 3 \Rightarrow m \geq 4$$

$$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{4}$$

$$n > 3 \Rightarrow n \geq 4$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{4},$$

*substitui-se em:*

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A},$$

*e obtém-se:*

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0.$$

*O que contraria a igualdade 1 porque A é um número positivo.*

*Conclui-se que, nos poliedros de Platão,  $m = 3$  ou  $n = 3$ , significa que um poliedros de Platão, possui obrigatoriamente, triedro ou triângulos.*

*Caso 1:*

*Para  $m = 3$  ( supondo que possui triedro) em 1 obtém-se:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{A} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{A} \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{A} \\ \frac{1}{n} &> \frac{1}{6} \\ n &< 6, \end{aligned}$$

donde se conclui que:

$3 \leq n < 6$  portanto  $n = 3$  ou  $n = 4$  ou  $n = 5$

$m$	$n$	faces
3	3	triangulares
3	4	quadrangulares
3	5	pentagonais

Caso 2:

Para  $n = 3$  (supondo que tem triângulo) em 1, obtém-se:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{6}$$

$$m < 6$$

donde se conclui que:

$$3 \leq m < 6 \quad m = 3 \quad \text{ou} \quad m = 4 \quad \text{ou} \quad m = 5$$

$m$	$n$	ângulos
3	3	triédricos
4	3	tetraédricos
5	3	pentaédricos

Dos resultados encontrados no primeiro caso e no segundo caso, conclui-se que os poliedros de Platão são determinados pelos pares  $(m, n)$  da tabela, sendo portanto, cinco e somente cinco, as classes de poliedros de Platão.

$m$	$n$
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

**Conclusão:**

Para saber o número de arestas  $A$ , o número de faces  $F$  e o número de vértices  $V$  de cada poliedro de Platão, basta substituir em 1 os valores de  $m$  e  $n$  encontrados e depois trabalhar com o caso 1 e o caso 2.

*Exemplo: Uma das possibilidades encontradas para  $m = 3$  e  $n = 4$ , com esses valores em 1, temos:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{A} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{1}{A} \\ \frac{4A}{12A} - \frac{6A}{12A} + \frac{3A}{12A} &= \frac{12}{12A} \\ A &= 12.\end{aligned}$$

*No caso 1 :*

$$\begin{aligned}F &= \frac{2A}{n} \\ F &= \frac{2 \cdot 12}{4} \\ F &= 6\end{aligned}$$

*No caso 2:*

$$\begin{aligned}V &= \frac{2A}{m} \\ V &= \frac{2 \cdot 12}{3} \\ V &= 8\end{aligned}$$

*Como é o número das faces que determina nome, o poliedro é hexaedro.*

Substituindo, em 1 e em 2, todas as possibilidades para  $m$  e  $n$  tem-se:

$m$	$n$	$A$	$V$	$F$	NOME
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
3	3	30	12	20	Icosaedro

Figura 3.1: Tabela dos resultados

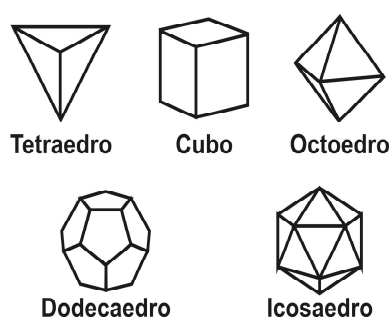


Figura 3.2: Poliedros Euclidianos de Platão

## 3.2 Abordagem da Geometria Esférica.

*Para a finalidade deste trabalho, usam-se somente poliedros de Platão que apresentem as faces formadas por polígonos regulares. Estes recebem o nome de Poliedros Regulares.*

*Neste trabalho, pretende-se demonstrar o resultado obtido na Grécia antiga, usando-se o que se conhece da Geometria Esférica.*

*Introduziremos a notação que será utilizada nas demonstrações e recordaremos alguns conceitos da Geometria Esférica, estudados no capítulo anterior.*

*Quando do ponto central dos poliedros projetamos seus vértices e arestas sobre a esfera circunscrita, as linhas projetantes definem ângulos sólidos que têm por vértices o centro do poliedro. Há inter-relação entre os poliedros regulares, seja por secção de planos, seja interligando pontos definidos das arestas ou das faces. De cada um é sempre possível obter-se os demais. O que mais caracteriza os poliedros regulares, é a igualdade de todas as faces, porém suas principais propriedades morfológicas são :*

- 1 *Todo poliedro regular é inscritível e circunscritível em uma esfera;*
- 2 *Todo poliedro regular pode ser decomposto em um número de cones regulares*

igual ao seu número de faces;

3 Os ângulos polédricos que têm como vértices comum o centro das esferas inscritas e circunscrita a um poliedro regular, e por arestas os raios das esfera circunscritas que vão aos vértices, dividem as superfícies esféricas em polígonos esféricos regulares e iguais.

Seja  $P$ , um poliedro regular, cujos vértices estão sobre uma mesma esfera  $S$ , e  $F$  uma face fixada do poliedro  $P$  e  $C_F$ , o cone constituído pelos segmentos de reta que se originam no centro da esfera e que passam por pontos de  $F$  sendo  $C_F$  um poliedro, pelo fato das faces de  $P$  serem congruentes acarreta imediatamente que todos os cones assim gerados são congruentes.

Exemplo: Octaedro

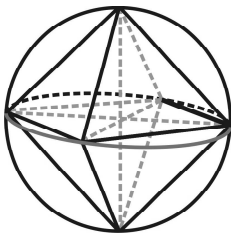


Figura 3.3: Inscrição do Octaedro

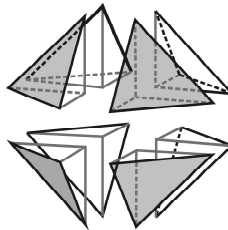


Figura 3.4: Decomposição do octaedro

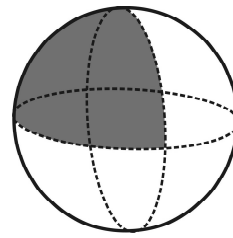


Figura 3.5: Octaedro esférico

Sabemos que a interseção  $C_F \cap S$  é um polígono  $F_S$  da esfera  $S$ , isto é uma consequência da proposição 1, pois cada uma das faces de  $C_F$  que contém a origem é parte do plano passando pela origem, cuja interseção com  $S$  é uma "reta" em  $S$ . Esse polígono esférico  $F_S$  tem o mesmo número de arestas e vértices que o polígono Euclidiano  $F$ , além disso  $F_S$  é regular, pois  $F$  é regular.

A repetição deste procedimento para cada face de  $P$ , resulta na decomposição da esfera  $S$  em polígonos esféricos regulares congruentes. A existência ou não dessa decomposição determina ou não a existência dos sólidos esféricos platônicos.

Considere a existência da decomposição de uma esfera  $S$  em  $n$  polígonos esféricos congruentes:

$n$  é o número de faces do polígono esférico;

$v$  é o número de vértices de cada face do polígono esférico;

$\mu$  é o número de arestas comuns a um vértice  $v$ ;

$\theta = \frac{2\pi}{\mu}$  é o ângulo formado pelas arestas comuns a um vértice;

$F_i_S$  é cada uma das faces do poliedro esférico, com  $1 \leq i \leq n$ .

**Procedimento:**

Tome o centro de uma das faces  $F_i_S$ . Ligue-o por segmentos aos seus vértices obtendo a decomposição desta face em  $v$  triângulos  $T_{ij}$ , com  $1 \leq j \leq v$ .

Repetindo o procedimento em cada face decompomos a esfera  $S$  em  $n.v$  triângulos. Obtendo com esse procedimento o seguinte:

Cada vértice da decomposição original é vértice comum de  $2.\mu$  arestas, que formam ângulos iguais a  $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{\mu}$ .

Sendo a área da superfície esférica finita com valor igual a  $4\pi$ , quando a esfera é unitária, então a soma das áreas dos triângulos  $T_{ij}$  resultantes dessa decomposição é a Área da esfera  $S = \sum_{ij} \text{Área } T_{ij}$ .

Pelo Teorema (2.1.1) de Gauss-Bonnet, os  $T_{ij}$  sendo geodésico na esfera  $S$ , considerando-se  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$  os ângulos externos e  $a_1 = \pi - \theta_1, a_2 = \pi - \theta_2$  e  $a_3 = \pi - \theta_3$  os ângulos internos, tem - se:

$$\int \int_T K d\partial + 3\pi - (a_1 + a_2 + a_3) = 2\pi$$

$$\int \int_T K d\partial = a_1 + a_2 + a_3 - \pi$$

A diferença  $a_1 + a_2 + a_3 - \pi$  (O excesso de  $T$ ) é dada precisamente por  $\int \int_T K d\partial$ .

Se  $K \neq 0$ , e a restrição de  $N$  a  $T$  é injetiva, esta integral é a área da imagem  $N(T)$  de  $T$ .

Analisando todos os elementos descritos, temos:

Cada um destes triângulos  $T_{ij}$  possui um vértice que fica em um ponto interior de cada polígono esférico da decomposição original, tais ângulos medem  $\frac{2\pi}{nv}$ .

Os outros dois ângulos medem cada um  $\frac{\pi}{\mu}$ . Portanto a área de cada triângulo é igual a:

$$\begin{aligned} \int \int_T K d\partial &= a_1 + a_2 + a_3 - \pi \\ \int \int_T K d\partial &= \frac{2\pi}{v} + \frac{\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu} - \pi \\ \int \int_T K d\partial &= \pi \left( \frac{2}{v} + \frac{2}{\mu} - 1 \right). \end{aligned}$$

Como temos no total  $n.v$  triângulos que cobrem a esfera, então:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{ij} \text{Área}(T_{ij}) \\ 4\pi &= nv\pi \left( \frac{2}{v} + \frac{2}{\mu} - 1 \right) \\ \frac{2}{v} + \frac{2}{\mu} &= 1 + \frac{4}{nv} \\ \frac{2}{v} + \frac{2}{\mu} - 1 &= \frac{4}{nv} \end{aligned}$$

Sendo  $\frac{4}{nv}$  positivo pois,  $n$  é o número das faces e  $v$  o número de vértices do polígono esférico.

Então, por termos  $\nu > 2$  e  $\mu > 2$ , a expressão  $\frac{2}{v} + \frac{2}{\mu} - 1$  fica menor que 1 quando os valores de  $\nu$  e  $\mu$  crescem. Conclue-se portanto que o número de soluções será finito.

Na expressão  $\frac{2}{v} + \frac{2}{\mu} - 1 > 0$ , fazendo  $\nu = 3$ , teremos:



$\frac{2}{3} + \frac{2}{\mu} - 1 > 0 \rightarrow \frac{-\mu+6}{3\mu} > 0$  então tem-se  $\mu < 6$  e  $\mu > 2$ , portanto  $2 < \mu < 6$ .

Na expressão  $\frac{2}{\nu} + \frac{2}{\mu} - 1 > 0$ , fazendo  $\mu = 3$ , teremos:

$$\frac{2}{\nu} + \frac{2}{3} - 1 > 0 \rightarrow \frac{-\nu+6}{3\nu} > 0$$

tem-se  $\nu < 6$  e  $\nu > 2$

então  $2 < \nu < 6$ .

A tabela da figura 3.6 exibe todos os possíveis resultados:

$\nu$	$\mu$	$n$	NOME
3	3	4	Tetraedro
3	4	8	Octaedro
3	5	20	Icosaedro
4	3	6	Hexaedro
5	3	12	Dodecaedro

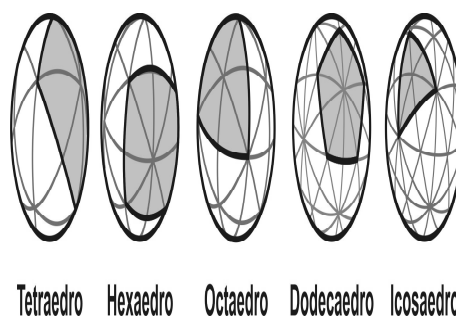


Figura 3.7: poliedros esféricos de Platão

Figura 3.6: Tabela dos resultados

Os sólidos Platônicos são formados com as mesmas faces dos polígonos esféricos que decompõe a esfera, de tal modo que os seus vértices, na esfera possam ser planificados, ou seja, a soma das medidas dos ângulos que compõem o vértice seja  $360^\circ$ .

# Bibliografia

- [1] CARMO, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro:Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - segunda edição.(Projeto Euclides)
- [2] CARMO, M.P., *Geometria Diferencialde Curvas e Superfícies*, Rio de Janeiro:Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005 - primeira edição.(Projeto Euclides)
- [3] Araújo,P.V., *Geometria Diferencial*,Rio de Janeiro:Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004 - primeira edição.(Projeto Euclides)
- [4] Barbosa, J.L.M., (*Os Sólidos Platônicos*), Seminário apresentado na Universidade Federal do Amazonas. 2005. A ser publicado.
- [5] Karlson, P., *A Magia dos Números*, Rio Grande do Sul:Editora Globo, 1961-primeira edição.  
*Geometria Diferencial*,Rio de Janeiro:Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004 - primeira edição.(Projeto Euclides)
- [6] Boyer.C.B.,*História da Matemática*,São Paulo:Edgar Blücher,2001
- [7] Gouvea,F.R., (*Uma abordagem de Ensino-Aprendizagem da Geometria Esférica através do computador*), Centro Universitário Paulistano-São Paulo.
- [8] Marqueze,J.P.,(*As faces do sólidos Platônicos na Superfície Esférica: Uma proposta para o ensino-aprendizagem de noções básicas de geometria esférica*), Mestrado em educação Matemática Pontífice Universidade Católica-São Paulo.

- [9] Euclides e Elementos I.1 <http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/af18/tl/tl.htm>
- [10] O postulado de Lobatchevski e aplicações da Geometria Hiperbólica. <http://www.geometriahiperbólica.hpg.ig.com.br>
- [11] Cosmologia dos Espaços Curvos <http://www.on.br/site/6-geometria-espaço-curvo.htm>
- [12] Geometria Elíptica <http://www.dmm.im.ufrj.br/projetos/diversos/eliptica.htm>