

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA -
PPGM

RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES CONVEXAS EM ESPAÇOS
HOMOGÊNEOS 3-DIMENSIONAIS

Marcos Aurélio de Alcântara

MANAUS - 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGM

Marcos Aurélio de Alcântara

RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES CONVEXAS EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS
3-DIMENSIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Renato de Azevedo Tribuzy

MANAUS - 2013

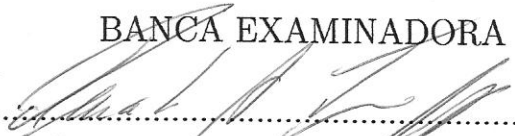
Marcos Aurélio de Alcântara

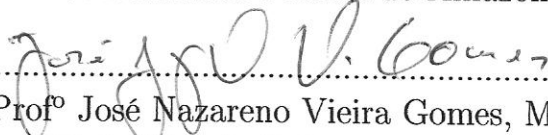
RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES CONVEXAS EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS
3-DIMENSIONAIS


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 03 de Abril de 2013.

BANCA EXAMINADORA


.....
Prof. Renato de Azevedo Tribuzy, Presidente
Universidade Federal do Amazonas


.....
Prof^o José Nazareno Vieira Gomes, Membro
Universidade Federal do Amazonas


.....
Prof^o José Miguel Martins Veloso, Membro
Universidade Federal do Pará

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu Senhor Deus, por toda força, sabedoria, paz, saúde. Enfim, por tudo de bom que tanto faz em minha vida.

À minha querida família, em especial minha amada mãe, meus irmãos e sobrinhos.

Ao meu grande amigo, colega, professor e conselheiro, José Ivan da Silva Ramos. Sua contribuição em minha vida sempre foi e será de grande importância, tanto do lado pessoal como acadêmico. Agradeço por todos os bons conselhos.

Aos meus colegas de mestrado, em especial: Jefferson Castro Silva, um grande amigo que encontrei desde o nivelamento para o mestrado. Tivemos grandes discussões, e apesar de gênios fortes que temos, somos ótimos amigos. Agradeço muito pelas suas ajudas, desde o início, nos momentos difíceis. Lauriano de Souza, "grande Lano", sempre com um jeito simples e muito dedicado, um grande parceiro de estudos e de bons momentos de risadas, sempre com muita fé e de grande tranquilidade. Agradeço pela ajuda, principalmente durante minha dissertação. Clebes Brandão, você foi um de meus melhores alunos, depois tornou-se colega de mestrado, em seguida um ótimo amigo, sempre na fé e na paz. Adrian Vinicius, um exímio estudante de geometria, seu auxílio em muitos momentos foram muito importantes, além disso, um bom amigo, sempre se dispondo a discutir matemática, os problemas do cotidiano e da luta por uma qualificação de excelência, uma pessoa de grande futuro. Raphael Costa, mostrou garra e perseverança, foi um companheiro de estudos, ficamos vários fins de semana estudando, revelou-se um excelente amigo e sempre aparecendo em momentos ruins para ajudar. Gustavo Neto, quando entrei no mestrado já tinha quase terminado, mesmo assim, mostrou-se um bom amigo, dispondo-se a ajudar quando preciso, de grande experiência, nunca deixou de frequentar o ambiente do mestrado para auxiliar a todos. Carina Figueiredo, sua simplicidade e vontade de acertar é inspiração, jovem e muito esforçada, amiga para todas as ocasiões, mostrando-se muito atenciosa. Camila Pinheiro, tivemos bons momentos no mestrado, companheira e muito amiga, agradeço pelos ótimos conselhos. Silvia Viviane, uma grande amiga, muito prestativa, sempre na batalha para vencer na vida, serve de inspiração para muitas pessoas. Francisco Almino, com toda sua tranquilidade e certeza de que no final tudo se resolve. Dayana Viana, mãe, amiga, colega de estudos e de uma boa conversa, sua batalha é dura, mas tenho fé em sua vitória, sua luta serve de esperança para muitos. Aos colegas Nelson, Diego, Valdenildo, Geziel, Renan, Carla e Guilherme. A convivência com todos vocês sempre foi harmoniosa. Agradeço a amizade!

Aos meus professores e à Coordenação do PPGM/UFAM, representada pelo Prof. Dr. Celso Rômulo, a quem agradeço por toda atenção e eficiência prestadas durante o mestrado. Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, pela grande fonte de inspiração, pelos ensinamentos, paciência, serenidade, e de uma extraordinária visão matemática. Tive a honra de ser orientado por alguém tão especial e simples.

Ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Acre, em especial a área de Matemática.

Por fim, ao CNPQ pelo auxílio financeiro.

RESUMO

RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES CONVEXAS EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS 3-DIMENSIONAIS

Este trabalho apresenta como principal resultado um teorema de rigidez de superfícies convexas em espaços homogêneos tridimensionais, que foi provado por Hosenberg e Tribuzy em 2011. Mais precisamente, provaremos que dada uma família suave de imersões isométricas estritamente convexa $f(t) : M \rightarrow N$, com $f(0) = f$, $K_e(f_t(x)) = K_e(f(x))$ para $x \in M$ e todo t , e $H(f_t(x)) = H(f(x))$ em três pontos distintos x de M . Então existem isometrias $h(t) : N \rightarrow N$ tal que $h(t)f(t) = f$.

Palavras-chave: Rigidez. Superfícies Convexas. Variedades Homogêneas Tridimensionais. Imersões Isométricas.

ABSTRACT

RIGIDITY OF CONVEX SURFACES IN THE HOMOGENEOUS SPACES 3-DIMENSIONAL

This paper presents main result of a theorem in rigidity of convex three dimensional homogeneous spaces, which was proved by Hosenberg and Tribuzy in 2011. More precisely, we prove that given smooth family of isometric immersions strictly convex $f(t) : M \rightarrow N$, with $f(0) = f$, $K_e(f_t(x)) = K_e(f(x))$ for $x \in M$ and for all t , and $H(f_t(x)) = H(f(x))$ in three distinct points x of M . Then there are isometries $h(t) : N \rightarrow N$ such that $h(t)f(t) = f$.

Keywords: Rigidity. Convex Surfaces. Homogeneous Manifolds Three dimensional. Isometric Immersion.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	3
1.1 Considerações sobre os Fundamentos de Geometria Riemanniana	3
1.2 Imersões Isométricas em Variedades Homogêneas 3-dimensionais	22
1.2.1 Equações de Compatibilidade e Imersões Isométricas para Superfícies em variedades homogêneas 3-dimensionais	24
2 Resultado Principal	30
Referências Bibliográficas	43

Introdução

Neste trabalho apresentaremos um belo resultado sobre Rigidez de Superfícies Convexas em Espaços Homogêneos tridimensionais que foi provado por Hosenberg e Tribuzy em [12]. Uma de suas fundamentações foi dada por Conh-Vossen no artigo [4], que trata sobre rigidez de superfícies compactas em \mathbb{R}^3 . Ele provou que superfícies compactas estritamente convexas em \mathbb{R}^3 são rígidas. Contudo, Olovishnishi-Koff provou em [13] que existem superfícies completas estritamente convexas em \mathbb{R}^3 que não são rígidas. Uma imersão isométrica $f : M \rightarrow N$ é rígida se dada outra imersão isométrica $g : M \rightarrow N$, existe uma isometria $h : N \rightarrow N$ tal que $h \circ f = g$, ou seja, $f = g$ a menos de isometria.

Sendo assim, vamos considerar rigidez local de superfícies convexas em 3-variedades $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ homogêneas simplesmente conexas, com $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é uma submersão Riemanniana sobre os espaços formas bidimensionais $\mathbb{M}^2(\kappa)$, de curvatura seccional constante κ , isto é, $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{S}^2(\kappa)$ se $\kappa > 0$, \mathbb{R}^2 se $\kappa = 0$, $\mathbb{H}^2(\kappa)$ se $\kappa < 0$.

A convexidade em $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ pode ser definida em termos da segunda forma fundamental. Para tanto será necessário que a curvatura extrínseca K_e (o produto das curvaturas principais) seja positiva. No entanto, quando $\tau \neq 0$, é preciso que as curvaturas principais sejam pelo menos $|\tau|$ para obtermos teoremas globais. Assumindo $K_e > 0$, tem-se o teorema de Hadamard-Stoker em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a saber: se $f : \mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é uma imersão (completa), com $K_e > 0$, então f é uma inclusão e $\mathbb{M}^2 = \mathbb{S}^2$ ou \mathbb{R}^2 . Também é possível descrever tal inclusão, de acordo com Espinar, Galvez e Hosenberg em [7]. Esse teorema também é verdade em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ desde que as curvaturas principais sejam maiores do que $|\tau|$, para maiores detalhes ver pré-print [8].

Em [11], os autores estudaram a rigidez das superfícies em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ tendo as mesmas curvaturas principais (O problema de Bonnet).

O principal resultado que provaremos neste trabalho é o seguinte.

Teorema 2.1. Seja $f(t) : M \rightarrow N$ uma família suave de imersões isométricas com $f(0) = f$. Suponha que f é estritamente convexa, $K_e(f_t(x)) = K_e(f(x))$ para $x \in M$ e todo t , e $H(f_t(x)) = H(f(x))$ em três pontos distintos x de M . Então existem isometrias $h(t) : N \rightarrow N$ tal que $h(t)f(t) = f$.

Este trabalho encontra-se dividido em dois capítulos. O primeiro capítulo foi elaborado com o objetivo de dar condições necessárias para demonstrarmos o resultado principal, das quais foram focadas: curvaturas em variedades riemannianas, as imersões isométricas de codimensão 1 e as suas equações de compatibilidade, alguns grupos de isometrias em

variedades homogêneas 3-dimensionais e por último um breve comentário sobre imersões isométricas de superfícies em variedades homogêneas 3-dimensionais. Em seguida, dedicamos o segundo capítulo à demonstração do **Teorema 2.1**.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados necessários para introduzirmos as noções básicas sobre Rigidez de Superfícies Convexas em Espaços Homogêneos de dimensão 3 com grupos de isometrias 4-dimensionais.

1.1 Considerações sobre os Fundamentos de Geometria Riemanniana

Nesta seção apresentaremos as definições e resultados da Geometria Riemanniana, em especial imersões isométricas de hipersuperfícies. A maioria das definições e exemplos abaixo foram extraídas de [2], [5], [6], [12], [9], [15], [16], [17], [1] e [19].

Para o que segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathfrak{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.1. *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, um forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Definição 1.2. *Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.*

Definição 1.3. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

$$\text{ii) } \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$\text{iii) } \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Definição 1.4. Dizemos que uma conexão Riemanniana M é compatível com a métrica se, e só se

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 1.5. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Teorema 1.1 (Levi-civita). Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

a) ∇ é simétrica.

b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Observação 1.1. A conexão descrita acima é denominada **conexão de Levi-Civita** (ou **Riemanniana**) de M .

Definição 1.6. Seja M uma variedade Riemanniana. M é dita **superfície Riemanniana** quando a dimensão de M é 2.

Daqui em diante denotamos por M^m e N^n variedades Riemannianas de dimensão m e n respectivamente, caso contrário, será explicitado.

Definição 1.7. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Proposição 1.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:

i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

$$f, g \in \mathfrak{D}(M), \quad X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

ii) Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\ R(X, Y)(fZ) &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

$$f \in \mathfrak{D}(M), Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Agora, iremos utilizar a seguinte notação: dado um espaço vetorial V , indicaremos por $|x \wedge y|^2$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$

Proposição 1.2. *Seja $\sigma \subset T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. A demonstração das Proposições 1.1 e 1.2 podem ser encontradas em [2]. ■

Definição 1.8. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado de curvatura seccional de σ em p .*

Este conceito generaliza o conceito de curvatura Gaussiana das superfícies.

Proposição 1.3. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação trilinear $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \longrightarrow T_p M$ por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se e só se $R = K_0 R'$, onde R é a curvatura de M .

Demonstração. Admita que $K(p, \sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset T_p M$, e faça

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, Y, W, Z \rangle'.$$

Observe que R' satisfaz as propriedades (a), (b), (c) e (d) da **Proposição 2.5**, [2], pg. 102. Como

$$\begin{aligned} \langle R'(X, Y, X), Y \rangle &= \langle X, Y, X, Y \rangle' \\ &= \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle Y, X \rangle \langle X, Y \rangle \\ &= \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\forall X, Y \in T_p M$, temos

$$\begin{aligned} K(p, \sigma) &= \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X \wedge Y|^2} \\ &= \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= K_0 \\ \implies R(X, Y, X, Y) &= K_0(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) \\ \implies R(X, Y, X, Y) &= K_0 R'(X, Y, X, Y) \end{aligned}$$

Pelo **Lema 3.3**, [2], pg.105, isto implica que, para todo X, Y, W, Z ,

$$R(X, Y, W, Z) = K_0 R'(X, Y, W, Z) \implies R = K_0 R'.$$

A recíproca é imediata basta tomar $W = X$ e $Z = Y$. ■

Para melhor entendimento do que foi feito acima, vamos fazer alguns comentários sobre as curvaturas seccional e gaussiana de algumas variedades Riemannianas. Isso será feito através dos seguintes exemplos.

Exemplo 1.1. Considere $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Com efeito, se indicarmos por $Z = (z_1, \dots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do \mathbb{R}^n , obtemos que

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n),$$

onde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n),$$

o que implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = 0,$$

como havíamos afirmado. Podemos, portanto, pensar em R como maneira de medir o quanto M deixa de ser euclidiana.

Exemplo 1.2 (Superfícies do \mathbb{R}^3). Considere uma superfícies no \mathbb{R}^3 que pode ser obtida através de imersão isométrica de uma Variedade Riemanniana 2-dimensional em \mathbb{R}^3 . Através da equação de Gauss, será visto nas **Observações 1.9 e 1.10** que as superfícies do \mathbb{R}^3 possuem curvatura seccional igual a curvatura Gaussiana a qual é definida como o produto das curvaturas principais, isso acontece pelo fato da curvatura do espaço ambiente, \mathbb{R}^3 , que é identicamente nula.

Exemplo 1.3 (Esfera \mathbb{S}^n). a esfera \mathbb{S}^n com a métrica natural induzida do \mathbb{R}^{n+1} , tem curvatura seccional constante 1. Isso é facilmente provado pela equação de Gauss que é apresentada nas **Observações 1.9 e 1.10**. Para ficar claro, veja a **Definição 1.13** de métrica induzida.

Exemplo 1.4 (Espaço Hiperbólico). *Consideremos o semi-espaço do \mathbb{R}^n dado por*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

e vamos introduzir a métrica

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2} \quad (1)$$

Sabemos que \mathbb{H}^n é simplesmente conexo. Dadas duas métricas \langle, \rangle e $\langle\langle, \rangle\rangle$ em uma variedade diferenciável M são conformes se existe uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, positiva, tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_p M$ se tenha

$$\langle u, v \rangle_p = f(p) \langle\langle u, v \rangle\rangle_p.$$

Com isso, podemos considerar em \mathbb{H}^n a métrica

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2},$$

onde F é uma função positiva diferenciável em \mathbb{H}^n ; tal métrica é conforme à métrica usual de \mathbb{R}^n . Escreveremos $g^{ij} = F^2 \delta_{ij}$ para indicar a matriz inversa de g_{ij} , e faremos $\log F = f$. Nestas condições, indicando $\frac{\partial}{\partial x_j} f = f_j$, temos

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} f = -\delta_{ik} \frac{2^3}{F} F_j = -2 \frac{\delta_{ik}}{F^2} f_j.$$

Fazendo as substituições adequadas, os símbolos de Christofel são : $\Gamma_{ij}^k = 0$, se os três índices forem distintos, caso contrário, temos

$$\Gamma_{ij}^i = -f_j, \Gamma_{ii}^j = f_j, \Gamma_{ij}^j = -f_i \text{ e } \Gamma_{ii}^i = -f_i$$

Sendo o tensor curvatura dado por $R_{ijij} = \sum_l R_{ijil}^l g_{ij}$, então a curvatura seccional será

$$K_{ij} = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijij} F^4 = - \left(-\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj} \right) F^2.$$

No caso particular em que $F^2 = x_n^2$, o que implica $f = \log x_n$. Neste caso, se $i \neq j$ e $j \neq n$, teremos

$$K_{ij} = \left(-\frac{1}{x_n^2} \right) x_n^2 = -1;$$

se $i = n, j \neq n$, teremos

$$K_{nj} = (-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn}) F^2 = -\frac{1}{x_n^2} x_n^2 = -1;$$

*e por último, se $i \neq j, j = n$, teremos ainda $K_{in} = -1$. Ao fazer a determinação de $R_{ijk}^i, R_{ijk}^j, R_{ijk}^k$ e utilizando o **Corolário 3.5** do Capítulo IV, [2], pg. 107, concluímos que a curvatura seccional de \mathbb{H}^n é constante e igual a -1 .*

A partir de agora, descreveremos como é definido o produto de variedades Riemannianas. Para isso, tome M e N duas variedades Riemannianas quaisquer, e sejam $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ e $\{(V_\beta, y_\beta)\}$ estruturas diferenciáveis de M e N respectivamente. Considere o produto cartesiano $M \times N$ e as aplicações $z_{\alpha\beta}(p, q) = (x_\alpha(p), y_\beta(q))$, $p \in U_\alpha$, $q \in V_\beta$.

Mostraremos que $\{(U_\alpha \times V_\beta, z_{\alpha\beta})\}$ é uma estrutura diferenciável em $M \times N$, na qual as projeções $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ e $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ são diferenciáveis. Com esta estrutura diferenciável $M \times N$ é chamada a variedade produto de M por N .

De fato, basta mostrarmos que:

- i) $\bigcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \times V_\beta) = M \times N$;
- ii) Para $\forall(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$, com $z_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) \cap z_{\gamma\delta}(U_\gamma \times V_\delta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $z_{\alpha\beta}^{-1}(W)$ e $z_{\gamma\delta}^{-1}(W)$ são abertos de \mathbb{R}^{m+n} e as aplicações são diferenciáveis.

Verifiquemos tais afirmações. Vejamos:

- i) É óbvio que $\bigcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \times V_\beta) \subset M \times N$. Daí, tomemos $(p, q) \in M \times N \implies \exists(\alpha, \beta)$ tal que $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ e $q \in y_\beta(V_\beta) \implies (p, q) \in (x_\alpha(U), y_\beta(V))$, $U \in U_\alpha$ e $V \in V_\beta \implies (p, q) \in z_{\alpha\beta}(U, V) \in z_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) \implies M \times N \subset \bigcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \times V_\beta)$.

Portanto, $\bigcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \times V_\beta) = M \times N$.

- ii) Vamos supor que $z_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) \cap z_{\gamma\delta}(U_\gamma \times V_\delta) = W \neq \emptyset$.

Daí,

$$\begin{aligned} z_{\alpha\beta}^{-1}(W) &= z_{\alpha\beta}^{-1}(z_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta)) \cap z_{\alpha\beta}^{-1}(z_{\gamma\delta}(U_\gamma \times V_\delta)) \\ &= (U_\alpha \times V_\beta) \cap ((z_{\alpha\beta}^{-1} \circ z_{\gamma\delta})(U_\gamma \times V_\delta)). \end{aligned}$$

Também,

$$y \in z_{\alpha\beta}^{-1} \circ z_{\gamma\delta}(U_\gamma \times V_\delta) \iff y \in (x_\alpha^{-1} \circ x_\gamma(U_\gamma)) \times (y_\beta^{-1} \circ y_\delta(V_\delta)). \quad (1)$$

Logo,

$$z_{\alpha\beta}^{-1}(W) = (U_\alpha \times V_\beta) \cap (x_\alpha^{-1} \circ x_\gamma(U_\gamma)) \times (y_\beta^{-1} \circ y_\delta(V_\delta)) \subset \mathbb{R}^{m+n}$$

Com isso, podemos afirmar que $z_{\alpha\beta}^{-1}(W)$ é aberto de \mathbb{R}^{m+n} .

De maneira análoga, pode-se mostrar que

$$z_{\gamma\delta}^{-1}(W) = ((x_\gamma^{-1} \circ x_\alpha(U_\alpha)) \times (y_\delta^{-1} \circ y_\beta(V_\beta))) \cap (U_\gamma \times V_\delta) \subset \mathbb{R}^{m+n},$$

ou seja, $z_{\gamma\delta}^{-1}(W)$ é aberto.

De (1), tem-se que

$$z_{\alpha\beta}^{-1} \circ z_{\gamma\delta}(p, q) = (x_\alpha^{-1} \circ x_\gamma(p), y_\beta^{-1} \circ y_\delta(q))$$

e pelo fato de $x_\alpha^{-1} \circ x_\gamma$ e $y_\beta^{-1} \circ y_\delta$ serem diferenciáveis, então $z_{\alpha\beta}^{-1} \circ z_{\gamma\delta}$ é diferenciável. Consequentemente, $M \times N$ é uma variedade diferenciável, onde $\{(U_\alpha \times V_\beta, z_{\alpha\beta})\}$ é uma estrutura diferenciável.

A aplicação $\pi_1 : M \times N \longrightarrow M$, dada por $\pi_1(m, n) = m$ é diferenciável. Para mostrarmos isso, basta verificar que $x_\alpha^{-1} \circ \pi_1 \circ z_{\alpha\beta}$ é diferenciável. Isso é consequência do fato de que

$$x_\alpha^{-1} \circ \pi_1 \circ z_{\alpha\beta}(p, q) = x_\alpha^{-1} \circ \pi_1(x_\alpha(p), y_\beta(q)) = x_\alpha^{-1} \circ (x_\alpha(p)) = (x_\alpha^{-1} \circ x_\alpha)(p) = p.$$

Da mesma forma pode-se mostrar que $\pi_2 : M \times N \longrightarrow N$, tal que $\pi_2(m, n) = n$ é diferenciável.

Portanto, $M \times N$ é variedade diferenciável.

Agora, tomando M, N variedades Riemannianas e consideremos o produto cartesiano $M \times N$ com a estrutura diferenciável produto. Sejam $\pi_1 : M \times N \longrightarrow M$ e $\pi_2 : M \times N \longrightarrow N$ as projeções naturais. Tal variedade produto possui métrica Riemanniana. Para isso, vamos introduzir uma métrica Riemanniana da seguinte maneira:

$$g_{(p,q)} : M \times N \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$\begin{aligned} g_{(p,q)}(u, v) &= \langle u, v \rangle_{(p,q)} = (g_1)_p(d\pi_1(u), d\pi_1(v)) + (g_2)_q(d\pi_2(u), d\pi_2(v)) \\ &= \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v) \rangle_q, \end{aligned}$$

para todo $(p, q) \in M \times N$, $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$.

Portanto, se M e N são variedades Riemannianas, então $M \times N$ é uma variedade Riemanniana.

Exemplo 1.5. *Como alguns exemplos de variedades Riemannianas produto, podemos citar: $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$*

Definição 1.9. *Uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ é uma imersão se $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, f é um homomorfismo sobre $f(M) \subset N$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que f é um mergulho.*

Exemplo 1.6. *É claro que uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ possui uma estrutura diferenciável dada por suas parametrizações $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow S$. Com tal estrutura, as aplicações x_α são diferenciáveis e, em verdade, são mergulhos de U_α em S ; isto é uma consequência imediata das condições da definição de variedades diferenciais. Vamos mostrar que a inclusão $i : S \subset \mathbb{R}^3$ é um mergulho, isto é, S é uma subvariedade de \mathbb{R}^3 . Com efeito, i é diferenciável, pois para todo $p \in S$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ de S em p , tais que $i \circ x = x$ é*

diferenciável. Além disto, pela condição de que $(dx)_q$ é biunívoca para todo $q \in U$ aberto, i é uma imersão e, pela condição de que a parametrização é um homeomorfismo diferenciável, i é um homeomorfismo sobre sua imagem, o que prova o afirmado.

Definição 1.10. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N .

Definição 1.11. Se $f : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$, e a diferença $n - m$ é chamada a codimensão da imersão.

Observação 1.2. Uma variedade Riemanniana M é (geodésicamente) **completa** se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, \exp_p , está definida para todo $v \in T_p M$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Observação 1.3. Pelo Teorema de Hopf e Rinov, são equivalentes:

1. Os limitados e fechados de M são compactos.
2. M é geodesicamente completa.

Vale lembrar que M é considerada sem bordo.

Definição 1.12. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma **isometria** se:

1. $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, para todo $p \in M$, $u, v \in T_p M$

Definição 1.13. Seja $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, $u, v \in T_p M$. A métrica de M é chamada então a métrica induzida por f , e f é uma **imersão isométrica**.

Neste trabalho as imersões tomarão valores em Variedades Homogêneas.

Antes disso, é crucial definirmos variedades homogêneas. Para isso, temos

Definição 1.14. Uma variedade Riemanniana é **homogênea** se dados $p, q \in M$ existe uma isometria de M que leva p em q .

Exemplo 1.7. Como exemplos de variedades homogêneas podemos citar: \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , \mathbb{H}^n , $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Para apresentarmos os próximos exemplos precisamos da definição de grupos de Lie.

Definição 1.15. Um **grupo de Lie** é um grupo G com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação $G \times G \rightarrow G$ dada por $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$, $x, y \in G$, é diferenciável. Decorre daí que as translações à esquerda L_x e à direita R_x dadas por: $L_x : G \rightarrow G$, $L_x(y) = xy$; $R_x : G \rightarrow G$, $R_x(y) = yx$ são difeomorfismos.

Definição 1.16. Dizemos que uma métrica Riemanniana em G é invariante à esquerda se $\langle x, y \rangle_y = \langle d(L_x)_y u, d(L_x)_y v \rangle_{L_x(y)}$ para todo $x, r \in G$, $u, v \in T_y G$, isto é, se L_x é uma isometria. Analogamente, definimos métrica Riemanniana invariante à direita.

Os grupos de Lie munidos de métricas invariantes são variedades Homogêneas.

Seguem-se alguns exemplos muito utilizados de grupos de Lie. Esses grupos são grupos de matrizes identificados com os espaços euclidianos e vamos tomar as métricas induzidas.

Definição 1.17. Se V é um espaço vetorial m -dimensional sobre um corpo $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , então o grupo linear especial $SL(V)$ (ou $SL(m, K)$) é o subgrupo de $GL(V)$ (ou $GL(n, K)$) consistindo de todas as transformações (ou matrizes) unimodulares.

Definição 1.18. Vamos definir os seguintes conjuntos básicos:

1. $Gl(n; K) = \{A \in \mathbb{M}_n / \det(A) \neq 0\}$ o grupo linear das matrizes inversíveis. Pode ser representado também por $Gl_n(K)$.
2. $O(n, K) = \{A \in \mathbb{M}_n / \det(A) = \pm 1\}$ o grupo linear das matrizes ortogonais. Pode ser representado também por O_n ou $O(n)$.
3. $SO(n, K) = \{A \in \mathbb{M}_n / \det(A) = 1\}$ o grupo linear ortogonal especial. Pode ser representado também por SO_n ou $SO(n)$.
4. O grupo unitário $U(n)$ é dado por: $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) / A \cdot \bar{A}^t = I\}$, onde \bar{A}^t é a transposta da conjugada ou $\text{adj}A$ e ainda, se A é (2×2) , então

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} .$$

Definição 1.19. O grupo projetivo unimodular $PSL(m, K)$ é o grupo $SL(m, K) / Z_1(m, K)$.

Definição 1.20. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é simplesmente conexo, quando toda curva fechada em X é homotópica a um ponto.

Definição 1.21. Sejam \tilde{X} e X superfícies. Diremos que \tilde{X} é recobrimento universal de X se ocorrerem as seguintes condições:

1. \tilde{X} é simplesmente conexo;
2. existe uma aplicação contínua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que é um homeomorfismo local.

Se apenas a condição (2) acima for verificada dizemos que \tilde{X} é um recobrimento de X .

Denotaremos o grupo de isometrias de uma variedade M por $Isom(M)$.

Agora falaremos um pouco sobre a geometria de alguns Espaços Homogêneos. Utilizaremos como referência um belo artigo de autoria de P. Sott, veja [17]. Seguem-se os seguintes comentários

- **A Geometria de \mathbb{E}^3 :** Seja \mathbb{E}^3 o espaço euclidiano 3-dimensional. Qualquer isometria α de \mathbb{E}^3 pode ser expressa como $\alpha(x) = Ax + b$, onde A é uma matriz ortogonal 3×3 real e b é um vetor em \mathbb{E}^3 . Como no caso 2-dimensional, a aplicação $\alpha \mapsto A$ define um homomorfismo sobrejetor $Isom(\mathbb{E}^3) \rightarrow O(3)$ com o núcleo igual ao grupo de translações de \mathbb{E}^3 . Portanto, $dim Isom(\mathbb{E}^3) = 6$.
- **A Geometria de \mathbb{H}^3 :** Para definir \mathbb{H}^3 , tomamos o semi-3-espaço superior $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ e a expressão $ds^2 = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. O grupo de isometrias preservando as orientações de \mathbb{H}^3 pode ser identificado com o grupo das transformações de Moebius de $\mathbb{C} \cup \infty$. Lembre-se que uma transformação de Moebius de $\mathbb{C} \cup \infty$ é uma aplicação da forma $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$. O grupo dessas transformações é naturalmente isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$. Identificamos o ponto (x, y, z) e \mathbb{R}_+^3 com o quaternio $x + yi + zj$. A matriz complexa

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

age em \mathbb{R}_+^3 , estendendo a uma ação natural em $\mathbb{C} \cup \infty$, pela regra $w \mapsto (aw + b)(cw + d)^{-1}$, onde w é um quaternio da forma $x + yi + zj, z > 0$. Observamos que $dim Isom(\mathbb{H}^3) = 6$.

- **A Geometria de \mathbb{S}^3 :** Pensaremos em \mathbb{S}^3 como sendo a esfera unitária de \mathbb{R}^4 , como o grupo dos quaternios unitários com $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, usando qualquer ponto de vista parece conveniente. O par (z_1, z_2) é identificado com os quaternios $z_1 + z_2j$. Com a métrica induzida da métrica euclidiana padrão em \mathbb{R}^4 , o grupo de isometrias é o grupo $O(4)$ e também tem dimensão 6.
- **A Geometria de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$:** Inicialmente o grupo de isometria de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ pode ser identificado com $Isom(\mathbb{S}^2) \times Isom(\mathbb{R})$. Portanto, $Isom(\mathbb{S}^2) \times Isom(\mathbb{R})$ tem dimensão 4.
- **A Geometria de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$:** O grupo de isometria de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é naturalmente isomorfo à $Isom(\mathbb{H}^2) \times Isom(\mathbb{R})$, tem dimensão 4
- **A Geometria de $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$:** O grupo de Lie 3-dimensional de todas as matrizes reais com determinante 1 é denotado $SL_2\mathbb{R}$, e $\widetilde{SL}_2\mathbb{R}$ indica a cobertura universal. Para abreviar, vamos escrever SL_2 ou \widetilde{SL}_2 . O grupo de isometria de \widetilde{SL}_2 é 4-dimensional como em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.
- **A Geometria de Nil :** Nil é o grupo de Lie 3-dimensional que consiste de todas as

matrizes 3×3 reais triangulares superiores da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sob multiplicação. É também chamado grupo de Heisenberg. Este grupo é nilpotente.

O grupo de isometrias de Nil tem uma certa estrutura semelhante a $Isom(\widetilde{SL}_2)$.

Em particular, $Isom(Nil)$ tem exatamente 2 componentes.

No artigo intitulado **Rotationally invariant constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds** em [19], podemos fazer a seguinte observação

Observação 1.4 (As esferas de Berger). *Uma esfera de Berger é uma 3-esfera usual $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ dotada com a métrica*

$$g(X, Y) = \frac{4}{\kappa} \left[\langle X, Y \rangle + \left(\frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle X, V \rangle \langle Y, V \rangle \right]$$

onde \langle, \rangle representa a métrica usual na esfera, $V_{(z,w)} = (iz, iw)$, para cada $(z, w) \in \mathbb{S}^3$ e κ, τ são números reais com $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$. Notamos que $\mathbb{S}_b^3(4, 1)$ é a esfera redonda.

O grupo de isometrias de $\mathbb{S}^3(\kappa, \tau)$ é $U(2)$.

Note que $U(2)$ pode ser $\left\{ \begin{pmatrix} ia & xe^{iy} \\ -xe^{-iy} & ib \end{pmatrix} : a, b, x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

Para darmos uma descrição das Variedades Homogêneas de dimensão 3, precisamos definir os espaços fibrados.

Sejam E e M variedades diferenciáveis, e seja $\pi : E \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Recordamos que $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial, quando pra cada ponto $x \in M$,

- (i) $\pi^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão k .
- (ii) Existe uma vizinhança aberta U de p em M , e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição para $\pi^{-1}(y)$ é um isomorfismo em $\{y\} \times \mathbb{R}^k$ para cada $y \in U$.

Definição 1.22. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial. Para cada $p \in M$, chamamos o espaço $E_p = \pi^{-1}(p)$ a fibra de π sobre p .*

Definição 1.23. *Fixando $\bar{p} \in d\pi^{-1}(p)$. V denota o espaço tangente à fibra $\pi^{-1}(p)$ em \bar{p} . Assuma que M e N têm métrica Riemanniana, e um conjunto $H = V^\perp$.*

Definição 1.24. *Chamamos H e V os subespaços horizontais e verticais, respectivamente, e usamos H e V em subscrito para denotar campo horizontal e vertical.*

Definição 1.25. *Definimos **Variedades Homogêneas Simplesmente Conexas Tridimensionais** $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, espaço fibrado sobre uma superfície de curvatura K constante com $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$, onde κ é a curvatura do espaço base e τ é tal que $\nabla_X \xi = \tau(X \times \xi)$. $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é uma submersão Riemanniana sobre as formas espaciais bidimensionais.*

Como exemplos de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ temos: Quando $\tau = 0$, $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, se $\kappa > 0$ e $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, se $\kappa < 0$. Para $\tau \neq 0$ e $\kappa > 0$, $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é a esfera de Berger. Para $\tau \neq 0$ e $\kappa = 0$, isto será $Nil(3)$, ou seja, o espaço de Heisenberg. Quando $\tau \neq 0$ e $\kappa < 0$, $\mathbb{E}(\kappa, \tau) = PSL(2, \mathbb{R})$.

Definição 1.26. *Seja $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão isométrica. Quando a codimensão de f for igual a 1, ou seja, $k = 1$, então f é uma **Hipersuperfície**.*

Hipersuperfícies em espaços Euclidianos \mathbb{R}^n constituem uma generalização natural das superfícies em \mathbb{R}^3 e, conseqüentemente, várias de suas propriedades estendem-se às hipersuperfícies.

Como exemplo de hipersuperfícies, podemos citar todas as superfícies imersas em \mathbb{R}^3 .

Definição 1.27. *Uma imersão isométrica $f : M \rightarrow N$ é rígida se dado qualquer outra imersão isométrica $g : M \rightarrow N$, existe uma isometria $h : N \rightarrow N$ tal que $h \circ f = g$.*

Exemplo 1.8. *A esfera imersa em \mathbb{R}^3 é uma superfície rígida. De fato, considere o seguinte teorema, que cuja demonstração encontra-se em S.S. Chern, [18], que diz: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e conexa com curvatura Gaussiana constante K . Então S é uma esfera.*

É imediato deduzir a rigidez da esfera através da afirmação acima. Para isso, basta tomarmos uma aplicação $h : \Sigma \rightarrow S$, onde h é uma isometria de uma esfera Σ sobre uma superfície regular S . Então, pela continuidade de h , $h(\Sigma) = S$ é compacta e conexa. Além disso, podemos afirmar que S tem curvatura constante igual a da esfera Σ , pois pelo Teorema Egreguim de Gauss, a curvatura Gaussiana é invariante por isometria, isto é, $K_S(h(p)) = K_\Sigma(p)$ para todo $p \in \Sigma$, onde K_S e K_Σ são as curvaturas Gaussianas de S e Σ respectivamente.

O exemplo acima fala sobre a rigidez da esfera imersa em \mathbb{R}^3 . Na realidade tal rigidez segue-se de um resultado mais geral devido a Con-Vossen em [4]: "Dois ovalóides isométricos diferem por um movimento rígido de \mathbb{R}^3 ". As superfícies ovais ou ovalóides são as superfícies compactas conexas em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos.

Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [3].

Definição 1.28. *Uma imersão isométrica $f : M \rightarrow N$ é localmente rígida quando, se $f(t) : M \rightarrow N$ é uma família suave de imersões isométricas com $f(0) = f$, então existem isometrias $h(t) : N \rightarrow N$ tais que $h(t)f(t) = f$.*

Definição 1.29. *A aplicação π é chamada uma submersão Riemanniana se $d\pi|_H$ é uma isometria.*

Definição 1.30. *Uma seção local sobre o conjunto aberto $U \subset M$ é uma aplicação diferenciável $\xi : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \xi = id_U$; se $U = M$, dizemos que $\xi : M \rightarrow E$ é uma seção global, ou simplesmente, uma seção de π .*

Observação 1.5. *Pode-se mostrar que para cada $e \in E$ existe uma seção ξ tal que $\xi(\pi(e)) = e$; em particular isto mostra que o conjunto $\Gamma(\pi)$ das seções de π é não vazio.*

Definição 1.31. *Uma métrica Riemanniana g em uma fibra vetorial $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação*

$$g : \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \rightarrow C^\infty(M)$$

bilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ de funções diferenciáveis em M , que é simétrica e positivo definida.

Definição 1.32. *Um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ juntamente com uma métrica Riemanniana fixada é chamada um fibrado vetorial Riemanniano.*

Observação 1.6. *De outra forma, se M e N têm métricas Riemannianas, a submersão f diz-se Riemanniana se, para todo $p \in M$, $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ preserva comprimentos de vetores horizontais em p .*

Exemplo 1.9. *Seja a aplicação diferenciável $\pi : M \rightarrow N$ cuja diferencial denotamos por $d\pi$. Segue-se do Teorema da Função Implícita que $\pi^{-1}(p)$ é uma subvariedade suave k -dimensional de M , para todo $p \in N$.*

Definição 1.33. *Uma submersão Riemanniana $\pi : M^{n+k} \rightarrow N^n$ tal que:*

1. *Cada fibra é uma geodésica completa.*
2. *As fibras do fibrado são curvas integrais de π de um campo vetorial unitário em M .*

Será chamada de submersão de Killing.

Definição 1.34. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial, e seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em M . Uma conexão linear é uma aplicação R -linear*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) &\rightarrow \Gamma(\pi) \\ (X, \xi) &\mapsto \nabla_X \xi \end{aligned}$$

satisfazendo, para cada $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(\pi)$, as propriedades

- i) $\nabla_{fX} \xi = f \nabla_X \xi$,
- ii) $\nabla_X (f\xi) = X(f)\xi + f \nabla_X \xi$.

Observação 1.7. *Seja $f : M^m \rightarrow N^{m+k=n}$ uma imersão isométrica. Em torno de cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que a restrição de f em U é uma inclusão de $f(U)$. Portanto, podemos identificar U com sua imagem por f , isto é, f é localmente a aplicação inclusão. Além disso, podemos considerar o espaço tangente de M em p como um subespaço do espaço tangente a N em p de dimensão n . Assim, se considerarmos o espaço k -dimensional $T_pM^\perp = \{v \in T_pN : \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in T_pM\}$, podemos escrever*

$$T_p N = T_p M \oplus T_p M^\perp$$

onde $T_p M^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p N$. O espaço $T_p M^\perp$ é chamado o espaço normal à M em p . Desta composição obtemos o fibrado $TM^\perp = \{(p, \xi); p \in T_p M, \xi \in T_p M^\perp\} = \bigcup_{p \in M} T_p M^\perp$, chamado de fibrado normal a M . Deste modo, o fibrado vetorial

$$TN|_{f(M)} = \{X \in TN : \pi(x) \in f(M)\}, \text{ onde } \pi : TN \longrightarrow TN \text{ é a projeção,}$$

é a soma de Whitney do fibrado tangente TM com TM^\perp , que é,

$$TN|_{f(M)} = TM \oplus_W TM^\perp.$$

Com relação a esta decomposição temos as projeções

$$()^T : TN|_{f(M)} \longrightarrow TM \text{ (projeção tangencial)}$$

$$()^\perp : TN|_{f(M)} \longrightarrow TM^\perp \text{ (projeção normal)}$$

Definição 1.35. As variedades completas com curvatura seccional constante são chamadas formas espaciais.

Exemplo 1.10. Como exemplos de variedades completas com curvaturas seccionais constantes podemos citar: Esfera Euclideana (\mathbb{S}^n), Espaço Euclidiano (\mathbb{R}^n) ou o Espaço Hiperbólico (\mathbb{H}^n). Pelo Teorema de Cartan, em [3], estas são as únicas variedades completas simplesmente conexas, com curvatura Gaussiana constante.

É importante lembrar que um campo de vetores normal ξ é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor em $T_p M^\perp$. Dizemos que $\xi \in TM^\perp$ é diferenciável em N . Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ os campos de vetores diferenciais normais a M .

Observamos que os campos $T_p M$ e $T_p M^\perp$ são seções dos fibrados tangente e normal respectivamente.

Seja N uma variedade Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\bar{\nabla}$, e seja $f : M \longrightarrow N$ uma imersão isométrica. Consideremos os campos vetoriais $X, Y \in TM$. Tomemos os campos locais \bar{X} e \bar{Y} de X e Y , respectivamente, numa vizinhança de U em N .

Assim, se $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de N , faz sentido calcularmos $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ ou até mesmo $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$.

Pode-se mostrar que $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$ não depende da extensão \bar{Y} de Y que tomamos, e portanto, por simplicidade de notação, denotaremos $\bar{\nabla}_X \bar{Y}$ por $\bar{\nabla}_X Y$, lembrando que isso significa tomar uma extensão de Y para calcular a derivada covariante. Temos então:

$$\bar{\nabla}_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp.$$

No entanto, é possível verificar que $(\bar{\nabla})^T$ é a própria conexão de Levi-Civita de M (que denotamos por ∇), isto é, $(\bar{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y$.

Assim, obtemos a

Definição 1.36. *Fórmula de Gauss*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \quad (1)$$

ou

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

que define uma aplicação $\alpha : TM \times TM \longrightarrow TM^\perp$ chamada a **segunda forma fundamental** de f .

Segue-se imediatamente das propriedades das conexões de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ e ∇ que α é simétrico e bilinear. Em particular, para todo ponto $p \in M$ e campos vetoriais $X, Y \in TM$, a aplicação $\alpha_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow T_p M^\perp$, dada por $\alpha_p(X, Y) = \alpha(X, Y)(p)$, depende somente dos valores de X e Y em p .

Observação 1.8. *Considere os campos de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, podemos escrever*

$$\bar{\nabla}_X \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^T + (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp,$$

e em relação à componente normal, definimos

$$\nabla_X^\perp \xi := (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp.$$

Veja que para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathfrak{D}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, temos que $\nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ é por definição: $\nabla_{fX+gY}^\perp \xi = \bar{\nabla}_{fX+gY} \xi - (\bar{\nabla}_{fX+gY} \xi)^T$.

Com isso, podemos concluir que ∇^\perp é $\mathfrak{D}(M)$ -linear em X e \mathbb{R} -linear em ξ , pois $\bar{\nabla}$ e $\bar{\nabla}^T$ são conexões afins.

Além disso, $\forall f \in \mathfrak{D}(M)$ temos $\nabla_X^\perp f(\xi) = f \nabla_X^\perp \xi + X(f)\xi$.

Assim, ∇^\perp é uma conexão afim em TM^\perp chamada conexão normal.

Se $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, então $X\langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle$, ou seja, ∇^\perp é compatível com a métrica.

Logo, denotamos $A_\xi X$ a componente tangencial de $-\bar{\nabla}_X \xi$, ou ainda,

$$A_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^T$$

Uma vez que temos

$$0 = X\langle \xi, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \xi, \bar{\nabla}_X Y \rangle,$$

a fórmula de Gauss nos dá

$$\begin{aligned} \langle A_\xi X, Y \rangle &= \langle -(\bar{\nabla}_X \xi)^T, Y \rangle = \langle -\bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle \\ &= \langle \xi, \bar{\nabla}_X Y \rangle = \langle \xi, \alpha(X, Y) + \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle + \langle \xi, \nabla_X Y \rangle = \langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle \\ &= \langle \xi, \alpha(Y, X) \rangle = \langle \xi, \alpha(Y, X) + \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle \xi, \bar{\nabla}_Y X \rangle = \langle -\nabla_Y \xi, X \rangle \\ &= \langle -(\bar{\nabla}_X \xi)^T, X \rangle = \langle A_\xi Y, X \rangle. \end{aligned}$$

Do que foi mostrado acima, podemos afirmar que $A_{\xi_p} : T_pM \longrightarrow T_pM$ é um operador linear auto-adjunto.

Em particular, podemos afirmar que

$$\langle A_{\xi}X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.$$

Logo, $A : TM \times TM^{\perp} \longrightarrow TM$ dada por $A(X, \xi) = A_{\xi}X$ é bilinear sobre $C^{\infty}(M)$. Assim, $A_{\xi} : TM \longrightarrow TM$ é linear sobre $C^{\infty}(M)$ e também é simétrica, ou seja,

$$\langle A_{\xi}X, Y \rangle = \langle X, A_{\xi}Y \rangle \text{ para todo } X, Y \in TM.$$

A aplicação A_{ξ} (Operador de Weingarten) é também a segunda forma fundamental na direção ξ .

Note que da igualdade $\bar{\nabla}_X \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^T + (\bar{\nabla}_X \xi)^{\perp}$ e de $A_{\xi} := -(\bar{\nabla}_X \xi)^T$ afirmamos que

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_{\xi}X + \nabla_X^{\perp} \xi.$$

Dizemos que ∇^{\perp} é a conexão normal de f , e como foi mostrado acima, obtemos a **fórmula de Weingarten**

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_{\xi}X + \nabla_X^{\perp} \xi \quad (2)$$

Agora usando as fórmulas de Gauss e Weingarten podemos obter as equações básicas para uma imersão isométrica, isto é, as equações de Gauss, Codazzi e Ricc.

Lembrando que a curvatura \bar{R} de N é definida por

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(N).$$

Segue que, R e \bar{R} serão consideradas as curvaturas de M e N , respectivamente, e sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(N)$, teremos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)) = \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z + \bar{\nabla}_X \alpha(Y, Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Y Z - A_{\alpha(Y, Z)} X + \nabla_X^{\perp} \alpha(Y, Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y, Z)} X + \nabla_X^{\perp} \alpha(Y, Z). \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X, Y)} Y + \nabla_Y^{\perp} \alpha(X, Z).$$

Utilizando a fórmula de Gauss, teremos também que

$$\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z = \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha(Z, [X, Y]).$$

Com isso, teremos

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y) &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y, Z)} X + \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \nabla_Y \nabla_X Z - \\ &- \alpha(Y, \nabla_X Z) + A_{\alpha(X, Z)} Y + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) - \nabla_{[X, Y]} Z - \alpha([X, Y], Z).\end{aligned}$$

Tomando a parte tangencial de $\bar{R}(X, Y)Z$, tem-se

$$\begin{aligned}(\bar{R}(X, Y)Z)^T &= \nabla_X \nabla_Y Z - A_{\alpha(Y, Z)} X - \nabla_Y \nabla_X Z + A_{\alpha(X, Z)} Y - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z + A_{\alpha(X, Y)} Y - A_{\alpha(Y, Z)} X \\ &= R(X, Y)Z + A_{\alpha(X, Z)} Y - A_{\alpha(Y, Z)} X.\end{aligned}$$

Daí, tomando $W \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(Y, W), \alpha(X, Z) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle.$$

Feitas essas considerações, obtemos as

Equação de Gauss:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle,$$

onde R e \bar{R} são os tensores curvatura de M em N , respectivamente. Em particular, se $K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle$ e $\bar{K}(X, Y) = \langle \bar{R}(X, Y)Y, X \rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e N do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_p M$, a equação de Gauss se torna

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \|\alpha(X, Y)\|^2.$$

Agora, considerando a componente normal de $\bar{R}(X, Y)Z$, temos a

Equação de Codazzi:

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z),$$

onde por definição,

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Denotamos R^\perp o tensor curvatura do fibrado normal TM^\perp , que é,

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$.

Segue-se das fórmulas de Gauss e Weingarten que a componente normal de $\bar{R}(X, Y)\xi$ satisfaz a

Equação de Ricci:

$$(\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y).$$

Ao fazermos o produto interno por $\eta \in TM^\perp$, na expressão acima, a equação de Ricci também pode ser escrita como

$$\langle \bar{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle,$$

onde $X, Y \in TM$, $\xi, \eta \in TM^\perp$, e $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$.

De forma similar, a equação de Codazzi pode ser escrita como

$$(\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp = (\nabla_Y A)(X, \xi) - (\nabla_X A)(Y, \xi),$$

onde por definição

$$(\nabla_Y A)(X, \xi) = \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^\perp \xi} X.$$

Um de nossos objetivos neste capítulo é descrever as equações de compatibilidade em hipersuperfícies. Para isso, consideremos uma imersão $f : M^m \rightarrow N_c^{n=m+k}$, onde N_c^n denota uma variedade com curvatura seccional constante.

Lembrando que da **Proposição 1.3**, tem-se $\bar{R} = c \cdot R'$. Dessa forma, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci ficam da seguinte maneira

Equação de Gauss:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = c \langle R'(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle.$$

Equação de Codazzi:

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z),$$

de forma equivalente,

$$\nabla_X A(Y, \xi) = (\nabla_Y A)(X, \xi).$$

Equação de Ricci:

$$R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y),$$

de outra maneira,

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle.$$

Da última equação, decorre que $R^\perp = 0$ se, e somente se, $[A_\xi, A_\eta] = 0$, $\forall \xi, \eta$, isto é, se, e somente se, $\forall p \in M$ existe uma base de $T_p M$ que diagonaliza de forma simultânea todos os operadores A_ξ .

Ao tomarmos $f : M^m \rightarrow N^{n=m+k}$ uma imersão isométrica tal que a codimensão k de f é igual a 1, então f é uma hipersuperfície. É imediato que dado $p \in M$, teremos $\dim(T_p M^\perp) = 1$, e neste caso, $[A_\xi, A_\eta] = 0$, pois $A_\eta = c \cdot A_\xi$, e assim

$$[A_\xi, A_\eta] = \nabla_{A_\xi} A_\eta - \nabla_{A_\eta} A_\xi = \nabla_{A_\xi} c \cdot A_\xi - \nabla_{c \cdot A_\xi} A_\xi = c \cdot \nabla_{A_\xi} A_\xi - c \cdot \nabla_{A_\xi} A_\xi = 0.$$

Da fórmula de Weingarten, temos $\bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X^\perp \xi - A_\xi X = \nabla_X^\perp \xi + (\bar{\nabla}_X \xi)^T$, e além disso, $0 = X \langle \xi, \xi \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_X \xi, \xi \rangle \implies \bar{\nabla}_X \xi = 0$ e sendo $R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y) \implies R^\perp(X, Y)\xi = 0 \implies \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = 0$, daí a equação de Ricci é naturalmente satisfeita, pois teremos uma equação do tipo $0 = 0$. Isto nos diz que no caso das hipersuperfícies, temos somente duas equações fundamentais.

Agora, vamos definir a curvatura média e curvatura de Gauss-Kronecker.

Dada uma imersão isométrica $f : M \longrightarrow N$, $p \in M$ e $\xi \in T_p M^\perp$ sabemos que o operador A_ξ é auto-adjunto, e assim, existe uma base ortonormal de autovetores $e_1(p), \dots, e_n(p)$ de $T_p M$ associados aos autovalores reais $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$.

Conseqüentemente, podemos chamar $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$ de curvaturas principais de f em p , de forma análoga, dizemos que os $e_i(p)$'s são as direções principais.

Definição 1.37. Dada uma imersão isométrica $f : M \longrightarrow N$, definimos o vetor curvatura média $H(x)$ de f em $x \in M$ como

$$H(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha(X_j, X_j),$$

onde α é a segunda forma fundamental de f , e $X_1, \dots, X_n \in T_p M$ é um referencial ortonormal.

Observando que $H(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\text{traço } A_{\xi_j}) \xi_j$ para qualquer conjunto de vetores $\xi_1, \dots, \xi_n \in T_p M^\perp$, conclui-se que $H(x)$ não depende do referencial tangente.

Definição 1.38. Seja A_ξ a segunda forma fundamental relativa à imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}$ e $p \in M$. Então, para todo $1 \leq r \leq n \in \mathbb{N}$, definimos a r -ésima curvatura média H_r de f em p por

$$H_r(p) = \sum_{j=1}^n \lambda_{i_1}(p) \lambda_{i_2}(p) \dots \lambda_{i_r}(p).$$

A curvatura de Gauss-Kronecker será dada através da

Definição 1.39. Seja a imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}$ com a segunda forma fundamental A_ξ , podemos definir a curvatura média de f em $x \in M$ por

$$H(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = \frac{1}{n} (\text{tr } A_\xi) = \frac{1}{n} H_1(x).$$

Quando $r = n$, chamaremos $H_n(x) = \lambda_{i_1}(p) \lambda_{i_2}(p) \dots \lambda_{i_r}(p) = \det(A_\xi)$ de curvatura de Gauss-Kronecker de f em x .

Tal curvatura, no caso $r = n = 2$, em nosso trabalho, será chamada de curvatura extrínseca, e é denotada por K_e .

Observação 1.9. Seja $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}$ uma hipersuperfície. Sejam $p \in M$ e $\xi \in T_p M^\perp$, $|\xi| = 1$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ para a qual $A_\xi = A$ é diagonal, isto é, $A(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A .

Então,

$$\alpha(e_i, e_i) = \langle A_\xi(e_i), e_i \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_i \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle = \lambda_i$$

e

$$\alpha(e_i, e_j) = \langle A_\xi(e_i), e_j \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = 0, \text{ se } i \neq j$$

Portanto a equação de Gauss admite uma expressão mais simples, e podemos descrevê-la como segue

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \bar{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \|\alpha(X, Y)\|^2 \\ \implies K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) &= \langle \alpha(e_i, e_i), \alpha(e_j, e_j) \rangle - \|\alpha(e_i, e_j)\|^2 \\ \implies K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) &= \langle A_\xi(e_i), e_i \rangle \cdot \langle A_\xi(e_j), e_j \rangle - (\langle A_\xi(e_i), e_j \rangle)^2 \\ \implies K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) &= \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle \lambda_j \langle e_j, e_j \rangle - (\lambda_i \langle e_i, e_j \rangle)^2 \\ \implies K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) &= \lambda_i \cdot \lambda_j. \end{aligned}$$

Observação 1.10. No caso em que M é uma superfície Riemanniana, ou seja, $M = M^2 \subset N = \mathbb{R}^3$, o produto $\lambda_1 \lambda_2$ das curvaturas principais é conhecido como a curvatura Gaussiana da superfície. Isso acontece pelo fato de que \bar{K} é a curvatura de \mathbb{R}^3 , onde $\bar{K} = 0$. Neste caso, a observação acima mostra que a curvatura Gaussiana coincide com a curvatura seccional em uma superfície.

Definição 1.40. Dizemos que a imersão isométrica f é minimal em $p \in M$ quando $H(x) = 0$, e que f é uma imersão minimal quando for minimal em todo ponto de M . Um caso especial ocorre quando a segunda forma fundamental é identicamente nula em $p \in M$. Então f é dito ser totalmente geodésica em $p \in M$. Dizemos que f é uma imersão totalmente geodésica quando é totalmente geodésica em todo ponto de M .

Definição 1.41. Dada uma imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que f é localmente convexa em um ponto $p \in M^n$ quando existe uma vizinhança U de p em M , tal que $f(U)$ encontra-se em um dos lados do hiperplano de M em p em \mathbb{R}^{n+1} . Dizemos que a imersão é estritamente localmente convexa em p quando $f(p)$ é o único ponto em $f(U) \cap df(T_p M)$.

Exemplo 1.11. O cilindro sobre um círculo e a esfera são, respectivamente, exemplos de hipersuperfícies convexa e estritamente convexa em qualquer ponto.

1.2 Imersões Isométricas em Variedades Homogêneas 3-dimensionais

Esta seção foi extraída de [1], que trata de imersões isométricas em variedades homogêneas tridimensionais. Segundo o autor, um problema clássico em geometria é determinar se uma variedade Riemanniana M pode ser isometricamente imersa em outra variedade

Riemanniana N . Iremos nos restringir ao caso das imersões de codimensão 1, i.e., M tem dimensão n e N tem dimensão $n + 1$.

Faremos uma breve análise sobre imersões isométricas, as equações de compatibilidade de imersões isométricas em variedades homogêneas 3-dimensionais, e inclusive as com grupo de isometria de dimensão 4. Será apresentado um grande resultado que determina a imersão isométrica de uma variedade Riemanniana em uma variedade homogênea tridimensional com grupo de isometrias 4-dimensional.

Observamos que as equações de Gauss e Codazzi podem ser descritas como segue.

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle A_\xi X, Z \rangle \langle A_\xi Y, W \rangle - \langle A_\xi Y, Z \rangle \langle A_\xi X, W \rangle$$

e

$$\nabla_X A_\xi Y - \nabla_Y A_\xi X - A_\xi[X, Y] = \bar{R}(X, Y)\eta,$$

onde:

- \bar{R} é o tensor curvatura Riemanniana de N .
- R é o tensor curvatura Riemanniana de M .
- A_ξ é o operador de Weingarten de M , onde ξ é o vetor normal dado pela orientação.
- ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Além disso, no caso que N é um espaço forma, i.e., a esfera \mathbb{S}^{n+1} , o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} ou o espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} , as equações de Gauss e Codazzi são também uma condição suficiente para M ser localmente isometricamente imerso em N com A_ξ como operador de Weingarten. Neste caso as equações de Gauss e Codazzi envolvem somente a métrica e o operador de Weingarten de M .

Lembramos que $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é uma variedade homogênea tridimensional com um grupo de isometria de dimensão 4, de curvatura fibrado τ e de curvatura base κ .

Por simplicidade, denotaremos $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ por \mathbb{E} .

1. **Sobre o referencial canônico:** Sendo \mathbb{E} uma variedade homogênea simplesmente conexa 3-dimensional com grupo de isometria de dimensão 4. Tal variedade é uma fibração Riemanniana sobre uma 2-variedade simplesmente conexa de curvatura constante κ . As fibras são geodésicas. Iremos denotar ξ um campo vetorial unitário em \mathbb{E} tangente às fibras, ele será chamado de campo vetorial vertical.

Denotaremos por $\bar{\nabla}$ e \bar{R} a conexão Riemanniana e o tensor curvatura de \mathbb{E} respectivamente.

Assumimos que \mathbb{E} não é uma variedade produto $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$.

A variedade \mathbb{E} tem um referencial ortonormal direto (E_1, E_2, E_3) com

$$E_3 = \xi.$$

Chamaremos (E_1, E_2, E_3) o referencial canônico de \mathbb{E} . Para todo campo vetorial X

$$\bar{\nabla}_X E_3 = \tau X \times E_3$$

É importante comentar que τ mede o quanto a variedade deixa de ser produto, assim, quando $\tau = 0$ sempre teremos que \mathbb{E} é uma variedade produto.

Proposição 1.4. *Para todos campos vetoriais X, Y, Z, W em \mathbb{E} temos*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^2)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(\xi; X, Y)Z, W \rangle$$

com

$$R_0(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X,$$

$$R_1(V; X, Y)Z = \langle Y, V \rangle \langle Z, V \rangle X + \langle Y, Z \rangle \langle X, V \rangle V - \langle X, Z \rangle \langle Y, V \rangle V - \langle X, V \rangle \langle Z, V \rangle Y.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1]. ■

1.2.1 Equações de Compatibilidade e Imersões Isométricas para Superfícies em variedades homogêneas 3-dimensionais

Faremos uma abordagem breve sobre as equações de compatibilidade em variedades homogêneas 3-dimensionais, dais quais não se faz sentido falarmos sobre a equação de Ricci, motivo já explicado anteriormente.

Seja \bar{R} o tensor curvatura Riemanniana de \mathbb{E} . Sejam M uma superfície orientada em \mathbb{E} , ∇ a conexão Riemanniana de M , J a rotação do ângulo $\frac{\pi}{2}$ em TM , η o normal unitário de M e A_ξ o operador de weingarten de M .

Proposição 1.5. *Para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = (\kappa - 3\tau^3)\langle R_0(X, Y)Z, W \rangle + (\kappa - 4\tau^2)\langle R_1(T; X, Y)Z, W \rangle,$$

$$\bar{R}(X, Y)\eta = (\kappa - 4\tau^2)\theta(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y)$$

onde

$$\theta = \langle \eta, \xi \rangle,$$

T é a projeção de ξ em TM , i.e.,

$$T = \xi - \theta\eta,$$

e R_0 e R_1 são como na **Proposição 1.4**.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1]. ■

Observação 1.11. Sendo $\theta = \langle \eta, \xi \rangle$ e $T = \xi - \theta\eta$, isto é, θ é a componente normal do campo vertical ξ , chamada a função ângulo, e T é a componente tangente do campo vertical.

Agora trataremos das equações de compatibilidade para superfícies em variedades homogêneas 3-dimensionais com grupos de isometrias de dimensão 4 $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Proposição 1.6. Seja $\Sigma \subset \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma superfície imersa com campo vetorial normal unitário η e operador de Weingarten A_ξ . Sejam T e θ o componente tangente do campo vertical e a função ângulo respectivamente, e $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Seja κ a curvatura base e τ a curvatura fibrado. Então as seguintes equações são satisfeitas para $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

$$\begin{aligned} \text{Gauss} \quad K &= K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\theta^2 \\ \text{Codazzi} \quad T_{A_\xi}(X, Y) &= (\kappa - 4\tau^2)\theta(\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y) \\ \nabla_X T &= \theta(A_\xi X - \tau JX) \\ d\theta(X) &= \langle \tau JX - A_\xi X, T \rangle \\ \|T\|^2 + \theta^2 &= 1 \end{aligned}$$

onde K denota a curvatura de Gauss de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, K_e a curvatura extrínseca, e T_{A_ξ} é dado por

$$T_{A_\xi}(X, Y) := \nabla_X A_\xi Y - \nabla_Y A_\xi X - A_\xi[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Primeiro, decomponemos o campo vetorial vertical ξ em suas partes tangentes e vertical, i. e.,

$$\xi = T + \theta\eta$$

onde $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Desde que ξ seja um campo vetorial unitário, temos

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \xi, \xi \rangle = \langle T + \theta\eta, T + \theta\eta \rangle \\ &= \langle T, T \rangle + \langle T, \theta\eta \rangle + \langle \theta\eta, T \rangle + \langle \theta\eta, \theta\eta \rangle \\ &= \langle T, T \rangle + \theta\langle T, \eta \rangle + \theta\langle \eta, T \rangle + \theta^2\langle \eta, \eta \rangle \\ &= \langle T, T \rangle + \theta^2. \end{aligned}$$

Da relação entre conexão de Levi-Civita do espaço ambiente e a superfície

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle A_\xi X, Y \rangle \eta \iff \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_\xi X, Y \rangle \eta, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

e da equação, $\bar{\nabla}_X \xi = \tau(X \wedge \xi)$ e $A_\xi X = -\bar{\nabla}_X \eta$, temos

$$\begin{aligned}
 \tau X \wedge \xi &= \bar{\nabla}_X \xi = \bar{\nabla}_X (T + \theta \eta) \\
 &= \bar{\nabla}_X T + d\theta(X)\eta + \theta \bar{\nabla}_X \eta \\
 &= \nabla_X T + \langle A_\xi X, T \rangle \eta + d\theta(X)\eta + \theta \bar{\nabla}_X \eta \\
 &= \nabla_X T + \langle A_\xi X, T \rangle \eta + d\theta(X)\eta - \theta A_\xi X \\
 &= (\nabla_X T - \theta A_\xi X) + (\langle A_\xi X, T \rangle + d\theta(X)\eta)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \tau X \wedge \xi &= \tau X \wedge (T + \theta \eta) \\
 &= \tau X \wedge T + \tau \theta X \wedge \eta \\
 &= \tau(X \wedge T + \theta X \wedge \eta) \\
 &= \tau(\langle JX, T \rangle \eta - \theta JX)
 \end{aligned}$$

Assim, tomando as partes tangencial e normal na expressão

$$\tau X \wedge \xi = \tau X \wedge \xi \implies (\nabla_X T - \theta A_\xi X) + (\langle A_\xi X, T \rangle + d\theta(X))\eta = \tau(\langle JX, T \rangle \eta - \theta JX),$$

temos que

$$(\nabla_X T - \theta A_\xi X) + \langle A_\xi X, T \rangle + d\theta(X) = -\tau \theta JX \quad e \quad \langle A_\xi X, T \rangle + d\theta(X) = \tau \langle JX, T \rangle$$

ou seja,

$$\nabla_X T = \theta(A_\xi X - \theta JX) \quad e \quad d\theta(X) = \langle \tau JX - A_\xi X, T \rangle$$

Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, as equações de Gauss e Codazzi de uma superfície em uma variedade 3-dimensional são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}
 \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle R'(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle \\
 &= \langle \langle A_\xi Y, Z \rangle \eta, \langle A_\xi X, W \rangle \eta \rangle - \langle \langle A_\xi X, Z \rangle \eta, \langle A_\xi Y, W \rangle \eta \rangle \\
 &= \langle A_\xi Y, Z \rangle \cdot \langle A_\xi X, W \rangle - \langle A_\xi X, Z \rangle \cdot \langle A_\xi Y, W \rangle \\
 \implies R(X, Y)Z - R'(X, Y)Z &= \langle A_\xi Y, Z \rangle A_\xi X - \langle A_\xi X, Z \rangle A_\xi Y
 \end{aligned}$$

(Na afirmação acima foi usada a identificação: $\alpha(X, Z) = \langle A_\xi X, Z \rangle \eta$)

e também, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, \xi \rangle &= \bar{\nabla}_Y \alpha(X, Z, \xi) - \bar{\nabla}_X \alpha(Y, Z, \xi) \\
&= Y(\alpha(X, Z, \xi)) - \alpha(\nabla_Y X, Z, \xi) - \alpha(X, \nabla_Y Z, \xi) - \\
&\quad - [X(\alpha(Y, Z, \xi)) - \alpha(\nabla_X Y, Z, \xi) - \alpha(Y, \nabla_X Z, \xi)] \\
&= Y\langle A_\xi X, Z \rangle - \langle A_\xi \nabla_Y X, Z \rangle - \langle A_\xi X, \nabla_Y Z \rangle - \\
&\quad - (X\langle A_\xi Y, Z \rangle - \langle A_\xi \nabla_X Y, Z \rangle - \langle A_\xi Y, \nabla_X Z \rangle) \\
&= \langle \nabla_Y (A_\xi X), Z \rangle + \langle A_\xi X, \nabla_Y Z \rangle - \langle A_\xi \nabla_Y X, Z \rangle - \langle A_\xi X, \nabla_Y Z \rangle - \\
&\quad - \langle \nabla_X A_\xi Y, Z \rangle - \langle A_\xi Y, \nabla_X Z \rangle + \langle A_\xi \nabla_X Y, Z \rangle + \langle A_\xi Y, \nabla_X Z \rangle \\
&= \langle \nabla_Y A_\xi X, Z \rangle - \langle A_\xi \nabla_Y X, Z \rangle - \langle \nabla_X A_\xi Y, Z \rangle + \langle A_\xi \nabla_X Y, Z \rangle \\
&= \langle (A_\xi \nabla_X Y - A_\xi \nabla_Y X) + (\nabla_Y A_\xi X - \nabla_X A_\xi Y), Z \rangle \\
&= \langle A_\xi [X, Y] + \nabla_Y A_\xi X - \nabla_X A_\xi Y, Z \rangle \\
\implies \langle \bar{R}(X, Y)\xi, Z \rangle &= -\langle A_\xi [X, Y] + \nabla_Y A_\xi X - \nabla_X A_\xi Y, Z \rangle \\
\implies \langle R(X, Y)\xi, Z \rangle &= \langle \nabla_X A_\xi Y - \nabla_Y A_\xi X - A_\xi [X, Y], Z \rangle \\
\implies \bar{R}(X, Y)\xi &= \nabla_X A_\xi Y - \nabla_Y A_\xi X - A_\xi [X, Y] = T_{A_\xi}(X, Y).
\end{aligned}$$

Obs.: Foram consideradas as igualdades:

$$\begin{aligned}
\alpha(X, Y, \xi) &= \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle \\
\bar{\nabla}_X \alpha(X, Y, \xi) &= X(\alpha(Y, Z, \xi)) - \alpha(\nabla_X Y, Z, \xi) - \alpha(Y, \nabla_X Z, \xi).
\end{aligned}$$

Então, tomando $Z = \xi$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ na **Proposição 1.2**, obtem-se

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\eta &= (\kappa - 3\tau^2) \cdot R_0(X, Y)\eta + (\kappa - 4\tau^2) \cdot R_1(\xi; X, Y)\eta \\
&= (\kappa - 3\tau^2) \cdot (\langle X, \eta \rangle Y - \langle Y, \eta \rangle X) + (\kappa - 4\tau^2) \cdot (\langle Y, \xi \rangle \langle \eta, \xi \rangle X + \\
&\quad + \langle Y, \eta \rangle \langle X, \xi \rangle \xi - \langle X, \eta \rangle \langle Y, \xi \rangle \xi - \langle X, \xi \rangle \langle \eta, \xi \rangle Y) \\
&= (\kappa - 4\tau^2) \cdot \theta \langle Y, \xi \rangle X - \theta \langle X, \xi \rangle Y \\
&= (\kappa - 4\tau^2) \cdot \theta (\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y)
\end{aligned}$$

isto é, a equação de Codazzi está satisfeita.

Para a equação de Gauss, tomando $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ uma base ortonormal do campo vetorial e $Z = X, W = Y$ na **Proposição 1.2**, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle &= (\kappa - 3\tau^2) \cdot \langle R_0(X, Y)X, Y \rangle + (\kappa - 4\tau^2) \cdot \langle R_1(\xi; X, Y)X, Y \rangle \\
&= (\kappa - 3\tau^2) \langle \langle X, X \rangle Y - \langle Y, X \rangle X, Y \rangle + \\
&+ (\kappa - 4\tau^2) \langle \langle Y, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle X + \langle Y, X \rangle \langle X, \xi \rangle \xi - \langle X, X \rangle \langle Y, \xi \rangle \xi - \langle X, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle Y, Y \rangle \\
&= (\kappa - 3\tau^2) + (\kappa - 4\tau^2) \langle \langle Y, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle X - \langle Y, \xi \rangle \xi - \langle X, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle Y, Y \rangle \\
&= (\kappa - 3\tau^2) + (\kappa - 4\tau^2) (\langle Y, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle \langle X, Y \rangle - \langle Y, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle - \\
&- \langle X, \xi \rangle \langle X, \xi \rangle \langle Y, Y \rangle) \\
&= (\kappa - 3\tau^2) - (\kappa - 4\tau^2) (\langle Y, \xi \rangle^2 + \langle X, \xi \rangle^2) \\
&= (\kappa - 3\tau^2) - (\kappa - 4\tau^2) \|T\|^2 \\
&= (\kappa - 3\tau^2) - (\kappa - 4\tau^2) (1 - \theta^2) \\
&= \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2) \theta^2.
\end{aligned}$$

Assim, levando em conta que

$$\langle R(X, Y)X, Y \rangle = K$$

e

$$K_e = \det A_\xi = \langle A_\xi X, X \rangle \langle A_\xi Y, Y \rangle - \langle A_\xi Y, X \rangle \langle A_\xi X, Y \rangle,$$

então, obtemos a equação de Gauss

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z - \bar{R}(X, Y)Z &= \langle A_\xi X, Z \rangle A_\xi Y - \langle A_\xi Y, Z \rangle A_\xi X \\
\implies \langle R(X, Y)X, Y \rangle - \langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle &= \langle \langle A_\xi X, X \rangle A_\xi Y - \langle A_\xi Y, X \rangle A_\xi X, Y \rangle \\
\implies \langle R(X, Y)X, Y \rangle - \langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle &= \langle A_\xi X, X \rangle \langle A_\xi Y, Y \rangle - \langle A_\xi Y, X \rangle \langle A_\xi X, Y \rangle \\
\implies K - [\tau^2 + (\kappa - 4\tau^2) \theta^2] &= K_e \\
\implies K &= K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2) \theta^2.
\end{aligned}$$

■

O teorema abaixo corresponde ao **Teorema 4.3** em [1], de grande importância, estabelece as condições de existência e unicidade de imersões isométricas de M em \mathbb{E} . A unicidade da imersão será de grande utilidade para demonstração do resultado principal deste trabalho.

Teorema 1.2. *Seja M uma variedade Riemanniana orientada simplesmente conexa de dimensão 2, ds^2 é a métrica e ∇ é a conexão Riemanniana. Seja A_ξ o campo de operadores simétricos $A_{\xi_y} : T_y M \rightarrow T_y M$, T um campo vetorial em M e θ uma função suave em M tal que $\|T\|^2 + \theta^2 = 1$.*

Seja \mathbb{E} uma variedade homogênea 3-dimensional com um grupo de isometria 4-dimensional e ξ é o campo vetorial vertical. Seja κ a curvatura base de τ é o fibrado curvatura. Então

existe uma imersão isométrica $f : M \rightarrow \mathbb{E}$ tal que o operador de Weingarten com respeito ao normal η associado à f é

$$df \circ A_\xi \circ df^{-1}$$

e tal que

$$\xi = df(T) + \eta$$

se, e somente se, (ds^2, A_ξ, T, θ) satisfaz as equações de compatibilidade para \mathbb{E} . Neste caso, a imersão é única a menos de uma isometria global de \mathbb{E} preservando as orientações de ambas as fibras e a base da fibração.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [1]. ■

Capítulo 2

Resultado Principal

Neste capítulo apresentaremos um belo resultado sobre Rigidez de Superfícies Convexas em Espaços Homogêneos 3-dimensionais. Tal resultado deve-se a Hosenberg, H. e Tribuzy, R., em [12], publicado em 2011. Onde foram consideradas as variedades homogêneas $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, conforme descrição apresentada no **Capítulo 1**, com $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$ e seus grupos de isometria de dimensão 4.

Vamos considerar rigidez local de superfícies convexas em variedades $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ homogêneas simplesmente conexas de dimensão 3, $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ apresentadas no **Capítulo 1**, são submersões Riemannianas sobre os espaços formas bidimensionais $\mathbb{M}^2(\kappa)$, de curvatura $\kappa : \mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{S}^2(\kappa)$ se $\kappa > 0$, \mathbb{R}^2 se $\kappa = 0$, $\mathbb{H}^2(\kappa)$ se $\kappa < 0$. O campo tangente unitário à fibra ξ é um campo de Killing.

A convexidade em $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ pode ser definida em termos da segunda forma fundamental. O mínimo necessário é que a curvatura extrínseca K_e (o produto das curvaturas principais) deverá ser positiva.

Provaremos a rigidez local de superfícies completas em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com a mesma curvatura extrínseca positiva, que satisfaça uma condição em três pontos.

O resultado principal desse capítulo é dado pelo seguinte

Teorema 2.1. *Seja $f(t) : M \rightarrow N$ uma família suave de imersões isométricas com $f(0) = f$. Suponha que f é estritamente convexa, $K_e(f_t(x)) = K_e(f(x))$ para $x \in M$ e todo t , e $H(f_t(x)) = H(f(x))$ em três pontos distintos x de M . Então existem isometrias $h(t) : N \rightarrow N$ tal que $h(t)f(t) = f$.*

Nosso objetivo é provar este Teorema. A prova será feita em várias etapas. Iniciaremos com a escolha de um referencial ortonormal.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma imersão isométrica estritamente convexa. Definiremos um referencial móvel fora dos pontos horizontais ($\xi \perp TM$) dados por $\varepsilon_1 = \frac{P(\xi)}{|P(\xi)|}$, onde P denota a projeção no plano tangente, J é a rotação positiva e $\varepsilon_2 = J\varepsilon_1$, com isso $\varepsilon_2 \perp \xi$. Desta forma, podemos escrever

$$\xi = \cos(\theta)\varepsilon_1 + \sin(\theta)N$$

onde θ é a função de medição do ângulo entre os vetores ξ e TM .

Além disso, a função θ e sua derivada estão definidas, pelo menos localmente.

Para calcular a segunda forma fundamental, note que

$$\langle \varepsilon_1, \xi \rangle = \langle \varepsilon_1, \cos(\theta)\varepsilon_1 + \sin(\theta)N \rangle = \cos(\theta)\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle + \sin(\theta)\langle \varepsilon_1, N \rangle = \cos(\theta) \quad (1)$$

e, sabendo que, para $f : M \rightarrow N$, $T_p N = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$ e $\nabla_X \xi = \tau(X \times \xi)$, diferenciando (1) na direção de $X \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$\begin{aligned} X\langle \varepsilon_1, \xi \rangle &= \langle \nabla_X \varepsilon_1 + \alpha(\varepsilon_1, X)N, \xi \rangle + \langle \varepsilon_1, \tau(X \times \xi) \rangle \\ &= \langle \nabla_X \varepsilon_1, \xi \rangle + \langle \alpha(\varepsilon_1, X)N, \xi \rangle + \tau\langle \varepsilon_1, X \times \xi \rangle = -\sin(\theta)d\theta X. \end{aligned}$$

Como $\langle \nabla_X \varepsilon_1, \xi \rangle = 0$, pois $\nabla_X \varepsilon_1$ é múltiplo de ε_2 e $\varepsilon_2 \perp \xi$, podemos afirmar que

$$\alpha(\varepsilon_1, X)\langle N, \xi \rangle + \tau\langle \varepsilon_1, X \times \xi \rangle = -\sin(\theta)d\theta X$$

tomando $\varepsilon_2 = J\varepsilon_1$ tem-se

$$\alpha(\varepsilon_1, X)\langle N, \xi \rangle + \tau\langle J^{-1}\varepsilon_2, X \times \xi \rangle = -\sin(\theta)d\theta X$$

note que $J^{-1}\varepsilon_2 = -N \times \varepsilon_2$, e assim

$$\alpha(\varepsilon_1, X)\langle N, \xi \rangle - \tau\langle N \times \varepsilon_2, X \times \xi \rangle = -\sin(\theta)d\theta X.$$

Lembrando que $\langle N, \xi \rangle = \sin(\theta)$ e $\langle \varepsilon_2, \xi \rangle = 0$ teremos o seguinte

$$\begin{aligned} \alpha(\varepsilon_1, X)\langle N, \xi \rangle - \tau(\langle \varepsilon_2, X \rangle \langle N, \xi \rangle - \langle N, X \rangle \langle \varepsilon_2, \xi \rangle) &= -\sin(\theta)d\theta X \\ \implies \alpha(\varepsilon_1, X)\sin(\theta) - \tau\langle X, \varepsilon_2 \rangle \sin(\theta) &= -\sin(\theta)d\theta X. \end{aligned}$$

Consequentemente temos para esses pontos onde $\sin(\theta) \neq 0$

$$(2) \quad \alpha(\varepsilon_1, X) = -d\theta X + \tau\langle X, \varepsilon_2 \rangle.$$

Agora, para os pontos onde $\sin(\theta) = 0$, sabemos que eles estão em um subconjunto fechado de M com interior vazio. Por continuidade, esta equação é válida para todos os pontos quando o referencial móvel especial é definido, então isso vale para todos os pontos não horizontais.

Do que foi dito acima e de (2) obtemos

$$\begin{aligned} \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) &= -d\theta\varepsilon_1 + \tau\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = -d\theta\varepsilon_1 \\ \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= -d\theta\varepsilon_2 + \tau\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle = -d\theta\varepsilon_2 + \tau. \end{aligned}$$

Como f é convexa e por hipótese temos que a curvatura extrínseca é positiva, e sendo $K_e = \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) - \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2$, então $\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \neq 0$ e assim $d\theta \neq 0$ em cada ponto não horizontal.

Antes de continuarmos a demonstração do **Teorema 2.1**, devemos conhecer um resultado muito importante que será de grande utilidade neste trabalho. Sendo assim, temos o

Lema 2.1. *Todo ponto horizontal de uma imersão convexa é isolado. Os pontos horizontais são os zeros do campo $\xi \times N$, e eles são de índice um.*

Demonstração. Seja $p \in M$ um ponto de modo que $(\xi \times N)_p = 0$ e seja $\{v_1, v_2\}$ uma base ortonormal orientada positivamente que diagonaliza o operador de Weingarten, teremos então que

$$A_\xi(v_1) = \lambda_1 v_1 \text{ e } A_\xi(v_2) = \lambda_2 v_2$$

Observação 2.1. *Podemos ainda lembrar que*

- (I) $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$
- (II) $\xi \times v_1 = v_2$
- (III) *sendo* $\xi \times v_1 = v_2 \implies \xi \times (\xi \times v_1) = \xi \times v_2 \implies -(\xi \times v_1) \times \xi = \xi \times v_2 \implies -(\langle \xi, \xi \rangle v_1 - \langle v_1, \xi \rangle \xi) = \xi \times v_2 \implies \xi \times v_2 = -v_1$

Dada $\bar{\nabla}$ a conexão de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, usando (I), (II) e (III) obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{v_1}(\xi \times N)_p &= (\bar{\nabla}_{v_1} \xi \times N)_p + (\xi \times \bar{\nabla}_{v_1} N)_p \\ &= \tau(v_1 \times \xi)_p \times N_p + \xi \times (-A_\xi(v_1))_p \\ &= \tau(\langle v_1, N \rangle \xi - \langle \xi, N \rangle v_1)_p + (\xi \times (-\lambda_1 v_1))_p \\ &= -\tau v_1 - \lambda_1 (\xi \times v_1)_p \\ &= -\tau v_1 - \lambda_1 v_2. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{v_2}(\xi \times N)_p &= (\bar{\nabla}_{v_2} \xi \times N)_p + (\xi \times \bar{\nabla}_{v_2} N)_p \\ &= \tau(v_2 \times \xi)_p \times N_p + \xi \times (-A_\xi(v_2))_p \\ &= \tau(\langle v_2, N \rangle \xi - \langle \xi, N \rangle v_2)_p + (\xi \times (-\lambda_2 v_2))_p \\ &= -\tau v_2 - \lambda_2 (\xi \times v_2)_p \\ &= -\tau v_2 + \lambda_2 v_1. \end{aligned}$$

Seja $\{V_1, V_2\}$ uma extensão paralela de $\{v_1, v_2\}$ ao longo da geodésica que começa em p .

Vamos considerar a aplicação suave F definida em uma vizinhança de p em M tomando valores em \mathbb{R}^n dados por

$$F(q) = (\langle V_1, \xi \times N \rangle_q, \langle V_2, \xi \times N \rangle_q)$$

Considerando que

$$\begin{aligned}
F'(q)v_1 &= (\bar{\nabla}_{v_1}\langle V_1, \xi \times N \rangle_p, \bar{\nabla}_{v_1}\langle V_2, \xi \times N \rangle_p) = \\
&(\langle \bar{\nabla}_{v_1}V_1, \xi \times N \rangle_p + \langle V_1, \bar{\nabla}_{v_1}(\xi \times N) \rangle_p, \langle \bar{\nabla}_{v_1}V_2, \xi \times N \rangle_p + \langle V_2, \bar{\nabla}_{v_1}(\xi \times N) \rangle_p) = \\
&(\langle V_1, -\tau V_1 - \lambda_1 V_2 \rangle, \langle V_2, -\tau V_1 - \lambda_1 V_2 \rangle) = \\
&(-\tau \langle V_1, V_1 \rangle - \lambda_1 \langle V_1, V_2 \rangle, -\tau \langle V_2, V_1 \rangle - \lambda_1 \langle V_2, V_2 \rangle) = (-\tau, -\lambda_1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F'(p)v_2 &= (\bar{\nabla}_{v_2}\langle V_1, \xi \times N \rangle_p, \bar{\nabla}_{v_2}\langle V_2, \xi \times N \rangle_p) = \\
&(\langle \bar{\nabla}_{v_2}V_1, \xi \times N \rangle_p + \langle V_1, \bar{\nabla}_{v_2}(\xi \times N) \rangle_p, \langle \bar{\nabla}_{v_2}V_2, \xi \times N \rangle_p + \langle V_2, \bar{\nabla}_{v_2}(\xi \times N) \rangle_p) = \\
&(\langle V_1, -\tau V_2 + \lambda_2 V_1 \rangle, \langle V_2, -\tau V_2 + \lambda_2 V_1 \rangle) = \\
&(-\tau \langle V_1, V_2 \rangle + \lambda_2 \langle V_1, V_1 \rangle, -\tau \langle V_2, V_2 \rangle + \lambda_2 \langle V_2, V_1 \rangle) = (\lambda_2, -\tau)
\end{aligned}$$

podemos afirmar que $dF(p) \neq 0$, pois $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, isso se justifica pela hipótese do teorema, onde f é estritamente convexa, ou seja, $K_e > 0$, e ainda, $dF(p)$ é isomorfismo.

Portanto, F é um difeomorfismo quando restrito a uma vizinhança de p pelo Teorema da Função Inversa. Assim, p é o único zero da função F e conseqüentemente o único zero de $\xi \times N$.

Para ver que o índice de p zero é 1, toma-se um pequeno círculo no espaço tangente a M em p , e calcula-se o número de voltas (espiral ou helicoidal) de $F'(p)$ aplicada ao vetor tangente ao círculo, quando o círculo é percorrido.

Este índice varia continuamente com τ , como foi descrito nas expressões de $F'(p)v_1$ e $F'(p)v_2$.

Assim, podemos calcular o índice para τ igual a zero. Então a imagem do vetor tangente $(-y, x)$ no ponto (x, y) é $(\lambda_2 x, \lambda_1 y)$. Esta gira uma vez, no sentido positivo, em torno do círculo. ■

Observação 2.2. *Em cada ponto horizontal temos $\cos(\theta) = 0$ e assim, ou $\cos(\theta) \geq 0$ ou $\cos(\theta) \leq 0$. Conseqüentemente podemos escolher um intervalo específico para a função θ ou $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ou $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.*

Vamos prosseguir com o cálculo da segunda forma fundamental.

Sabemos que $\langle \varepsilon_2, \xi \rangle = 0$, por construção como observado acima.

Diferenciando a equação $\langle \varepsilon_2, \xi \rangle = 0$, na direção de $X \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos

$$0 = X\langle \varepsilon_2, \xi \rangle = \langle \nabla_X \varepsilon_2, \xi \rangle + \langle \varepsilon_2, \nabla_X \xi \rangle.$$

Como $T_p N = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$ e $\nabla_X \xi = \tau(X \times \xi)$ e $\nabla_X \varepsilon_2 = \nabla_X \varepsilon_2 + \alpha(\varepsilon_2, X)N$, então

devemos ter

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \nabla_X \varepsilon_2 + \alpha(\varepsilon_2, X)N, \xi \rangle + \langle \varepsilon_2, \tau(X \times \xi) \rangle = \\
&\langle \nabla_X \varepsilon_2, \xi \rangle + \langle \alpha(\varepsilon_2, X)N, \xi \rangle + \tau \langle \varepsilon_2, X \times \xi \rangle = \\
&\langle \nabla_X \varepsilon_2, \cos(\theta)\varepsilon_1 + \sin(\theta)N \rangle + \alpha(\varepsilon_2, X)\langle N, \xi \rangle + \tau \langle J\varepsilon_1, X \times \xi \rangle = \\
&\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle \cos(\theta) + \langle \nabla_X \varepsilon_2, N \rangle \sin(\theta) + \alpha(\varepsilon_2, X)\langle N, \xi \rangle + \tau \langle N \times \varepsilon_1, X \times \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Sendo $\langle N, \xi \rangle = \sin(\theta)$ teremos

$$0 = \langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle \cos(\theta) + \alpha(\varepsilon_2, X) \sin(\theta) + \tau \langle \varepsilon_1, X \rangle \sin(\theta).$$

Portanto, deve-se obter

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle \cos(\theta) + \alpha(\varepsilon_2, X) \sin(\theta) + \tau \langle \varepsilon_1, X \rangle \sin(\theta) &= 0 \\
\implies \alpha(X, \varepsilon_2) \sin(\theta) &= \\
-\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle \cos(\theta) - \tau \langle \varepsilon_1, X \rangle \sin(\theta) & \\
\implies \alpha(X, \varepsilon_2) &= \\
-\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \tau \langle \varepsilon_1, X \rangle &= \\
-\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle \cotg(\theta) - \tau \langle \varepsilon_1, X \rangle & \\
\implies \alpha(X, \varepsilon_2) &= \\
-\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle \cotg(\theta) - \tau \langle \varepsilon_1, X \rangle. &
\end{aligned}$$

Definindo $\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$, então teremos

$$\alpha(\varepsilon_2, X) = -\omega_{21} \cotg(\theta) - \tau \langle \varepsilon_1, X \rangle.$$

Lembrando que $\omega_{12}(X) = -\omega_{21}(X)$, fica o seguinte

$$\alpha(X, \varepsilon_2) = \cotg(\theta) \omega_{12}(X) - \tau \langle \varepsilon_1, X \rangle$$

e segue-se que

$$\begin{aligned}
\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \cotg(\theta) \omega_{12}(\varepsilon_1) - \tau \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle \\
&= \cotg(\theta) \omega_{12}(\varepsilon_1) - \tau \\
\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) &= \cotg(\theta) \omega_{12}(\varepsilon_2) - \tau \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle \\
&= \cotg(\theta) \omega_{12}(\varepsilon_2)
\end{aligned}$$

Observação 2.3 (Equações Diferenciais Ordinárias). *Agora, iremos determinar as equações diferenciais ordinárias satisfeitas pela função ângulo entre a direção do vetor ε_1 e uma direção intrínseca de M . Seja $v \in \mathfrak{X}(M)$ um vetor unitário tal que $d\theta v = 0$ e escolhido de tal forma que $Jv = \frac{\text{grad}\theta(v)}{|\text{grad}\theta(v)|}$.*

Seja ϕ o ângulo entre os vetores ε_1 e v . Consequentemente,

$$\begin{aligned} v &= \cos(\phi)\varepsilon_1 + \sin(\phi)\varepsilon_2 \\ \implies Jv &= -\sin(\phi)\varepsilon_1 + \cos(\phi)\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Como $\alpha(v, \varepsilon_1) = -d\theta v + \tau\langle v, \varepsilon_2 \rangle$ e $d\theta v = 0$, então temos que

$$\begin{aligned} \alpha(v, \varepsilon_1) &= -d\theta v + \tau\langle \cos(\phi)\varepsilon_1 + \sin(\phi)\varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle \\ &= \tau(\langle \cos(\phi)\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle + \langle \sin(\phi)\varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle) \\ &= \tau(\cos(\phi)\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle + \sin(\phi)\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle) \\ &= \tau\sin(\phi). \end{aligned}$$

Como $\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = -d\theta\varepsilon_1$ e $\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -d\theta\varepsilon_2 + \tau$ logo,

$$\begin{aligned} \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \cos(\phi)(-d\theta\varepsilon_1) + \sin(\phi)(-d\theta\varepsilon_2 + \tau) \\ &= -\cos(\phi)d\theta\varepsilon_1 - \sin(\phi)d\theta\varepsilon_2 + \tau\sin(\phi) \\ &= \tau\sin(\phi). \quad (3) \end{aligned}$$

De um modo semelhante, usando que $d\theta(\text{grad}\theta) = |\text{grad}\theta|^2$, devemos ter

$$\begin{aligned} \alpha(Jv, \varepsilon_1) &= -d\theta(Jv) + \tau\langle Jv, \varepsilon_2 \rangle \\ &= -d\theta\left(\frac{\text{grad}\theta}{|\text{grad}\theta|}\right) + \tau\langle -\sin(\phi)\varepsilon_1 + \cos(\phi)\varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle \\ &= -|\text{grad}\theta| + \tau\cos(\phi). \end{aligned}$$

e portanto de

$$\begin{aligned} Jv &= -\sin(\phi)\varepsilon_1 + \cos(\phi)\varepsilon_2 \\ \implies \alpha(Jv, \varepsilon_1) &= -\sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \\ \implies -\sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= -|\text{grad}\theta| + \tau\cos(\phi). \quad (4) \end{aligned}$$

Das equações (3) e (4), temos

$$\begin{cases} \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \tau\sin(\phi) \\ -\sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -|\text{grad}\theta| + \tau\cos(\phi). \end{cases}$$

Supondo $\sin(\phi) \neq 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \tau\sin(\phi) - \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \\ \implies \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \frac{\tau\sin(\phi) - \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)}{\sin(\phi)} \end{aligned}$$

e então obteremos

$$\begin{aligned}
-\sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \cos(\phi)\left(\frac{\tau\sin(\phi) - \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)}{\sin(\phi)}\right) &= -|\text{grad}\theta| + \tau\cos(\phi) \\
\implies -\sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \tau\cos(\phi) - \frac{\cos^2(\phi)}{\sin(\phi)}\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) &= -|\text{grad}\theta| + \tau\cos(\phi) \\
\implies -\sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) - \frac{\cos^2(\phi)}{\sin(\phi)}\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) &= -|\text{grad}\theta| \\
\implies -\frac{(\sin^2(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \cos^2(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1))}{\sin(\phi)} &= -|\text{grad}\theta| \\
\implies \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) &= |\text{grad}\theta|\sin(\phi).
\end{aligned}$$

Pelo da última equação acima, lembrando que $K_e > 0$, $\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \neq 0$, então podemos afirmar que $|\text{grad}(\theta)| \neq 0$.

Também temos que

$$\begin{aligned}
\cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \tau\sin(\phi) \\
\implies \cos(\phi)|\text{grad}\theta|\sin(\phi) + \sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \tau\sin(\phi) \\
\implies \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= -|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau.
\end{aligned}$$

Para se obter a primeira equação diferencial satisfeita por ϕ , iremos calcular $\alpha(\varepsilon_2, v)$ usando duas abordagens diferentes.

Por um lado, temos:

$$v = \cos(\phi)\varepsilon_1 + \sin(\phi)\varepsilon_2 \implies \alpha(\varepsilon_2, v) = \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \sin(\phi)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2).$$

Denotando K_e como a curvatura extrínseca de M , temos que

$$\begin{aligned}
K_e = \det \begin{bmatrix} \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) & \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & \alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) \end{bmatrix} &= \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) - \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \\
&= \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) - \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{K_e + \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2}{\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)} &= \frac{\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) - \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2 + \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2}{\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)} \\
&= \frac{\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2)}{\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)} \\
&= \alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2).
\end{aligned}$$

Note que, do fato de que $\sin(\phi) \neq 0$ e que $\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \neq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha(\varepsilon_2, v) &= \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \sin(\phi)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) \\ \implies \alpha(\varepsilon_2, v) &= \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \sin(\phi)\frac{K_e + \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2}{\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)} \\ \implies \alpha(\varepsilon_2, v) &= \cos(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) + \sin(\phi)\frac{K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}\theta|\sin(\phi)} \\ \implies \alpha(\varepsilon_2, v) &= \cos(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) + \sin(\phi)\frac{K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}\theta|\sin(\phi)}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\alpha(\varepsilon_2, v) = \cos(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) + \frac{K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}\theta|} \quad (5)$$

Antes de continuarmos, vamos mostrar que dada conexão ω já mencionada, a equação abaixo é satisfeita

$$\omega_{12}(X) = \tilde{\omega}_{12}(X) - d\phi(X), \quad \text{onde } \tilde{\omega}_{12}(X) = \langle \nabla_X v, Jv \rangle.$$

De fato isso ocorre, pois

$$v = \cos(\phi)\varepsilon_1 + \sin(\phi)\varepsilon_2 \implies Jv = -\sin(\phi)\varepsilon_1 + \cos(\phi)\varepsilon_2.$$

Por um lado,

$$\omega_{12}(X) = \langle \nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = -\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle = -\omega_{21}(X)$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{12}(X) &= \langle \nabla_X(\cos(\phi)\varepsilon_1 + \sin(\phi)\varepsilon_2), -\sin(\phi)\varepsilon_1 + \cos(\phi)\varepsilon_2 \rangle \\ &= \langle -\sin(\phi)d\phi(X)\varepsilon_1 + \cos(\phi)\nabla_X \varepsilon_1 + \cos(\phi)d\phi(X)\varepsilon_2 + \sin(\phi)\nabla_X \varepsilon_2, -\sin(\phi)\varepsilon_1 \\ &\quad + \cos(\phi)\varepsilon_2 \rangle \\ &= \langle \sin(\phi)d\phi(X)\varepsilon_1, \sin(\phi)\varepsilon_1 \rangle - \langle \cos(\phi)\nabla_X \varepsilon_1, \sin(\phi)\varepsilon_1 \rangle - \langle \cos(\phi)d\phi(X)\varepsilon_2, \sin(\phi)\varepsilon_1 \rangle \\ &\quad - \langle \sin(\phi)\nabla_X \varepsilon_2, \sin(\phi)\varepsilon_1 \rangle - \langle \sin(\phi)d\phi(X)\varepsilon_1, \cos(\phi)\varepsilon_2 \rangle \\ &\quad + \langle \cos(\phi)\nabla_X \varepsilon_1, \cos(\phi)\varepsilon_2 \rangle + \langle \cos(\phi)d\phi(X)\varepsilon_2, \cos(\phi)\varepsilon_2 \rangle + \langle \sin(\phi)\nabla_X \varepsilon_2, \cos(\phi)\varepsilon_2 \rangle \\ &= \sin^2(\phi)d\phi(X)\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle - \cos(\phi)\sin(\phi)\langle \nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle - \cos(\phi)\sin(\phi)d\phi(X)\langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle \\ &\quad - \sin^2(\phi)\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle - \sin(\phi)\cos(\phi)d\phi(X)\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle + \cos^2(\phi)\langle \nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle \\ &\quad + \cos^2(\phi)d\phi(X)\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle + \sin(\phi)\cos(\phi)\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle \\ &= d\theta(X)(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) + \sin^2(\phi)\langle \nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle + \cos^2(\phi)\langle \nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle \\ &\quad - \cos(\phi)\sin(\phi)\langle \nabla_X \varepsilon_1 + \alpha(\varepsilon_1, X)N, \varepsilon_1 \rangle + \sin(\phi)\cos(\phi)\langle \nabla_X \varepsilon_2 + \alpha(\varepsilon_2, X)N, \varepsilon_2 \rangle \\ &= d\phi(X) + \langle \nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) - \cos(\phi)\sin(\phi)(\langle \nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle \\ &\quad + \langle \alpha(\varepsilon_1, X)N, \varepsilon_1 \rangle) + \sin(\phi)\cos(\phi)(\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle + \langle \alpha(\varepsilon_2, X)N, \varepsilon_2 \rangle) \\ &= d\phi(X) + \langle \nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle - \cos(\phi)\sin(\phi)\langle \nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle + \sin(\phi)\cos(\phi)\langle \nabla_X \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle. \end{aligned}$$

Lembrando que $\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$, então $\omega_{ii}(X) = \langle \nabla_X \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle$. Daí, sendo

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = 1 \implies 0 = X \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = 2 \langle \nabla_X \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle \implies \langle \nabla_X \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = 0,$$

ou seja, podemos afirmar que

$$\tilde{\omega}_{12}(X) = d\phi(X) + \omega_{12}(X) - \cos(\phi)\sin(\phi)\omega_{11}(X) + \sin(\phi)\cos(\phi)\omega_{22}(X) = d\phi(X) + \omega_{12}(X).$$

Considerando que $\omega_{12}(X) = \langle \nabla_X \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$ e ainda que

$$\alpha(X, \varepsilon_2) = \cotg(\theta)\omega_{12}(X) - \tau \langle \varepsilon_1, X \rangle \text{ tem-se que } \alpha(v, \varepsilon_2) = \cotg(\theta)\omega_{12}(v) - \tau \langle \varepsilon_1, v \rangle,$$

com isso tem-se,

$$\begin{aligned} \alpha(v, \varepsilon_2) &= \cotg(\theta)(\tilde{\omega}_{12}(v) - d\phi v) - \tau \langle \varepsilon_1, \cos(\phi)\varepsilon_1 + \sin(\phi)\varepsilon_2 \rangle \\ \implies \alpha(v, \varepsilon_2) &= \cotg(\theta)(\tilde{\omega}_{12}(v) - d\phi v) - \tau \cos(\phi) \end{aligned} \quad (6)$$

Igualando as equações (5) e (6), obtemos a equação diferencial satisfeita por ϕ ao longo das trajetórias de v . A saber:

$$\cos(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) + \frac{K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}\theta|} = \cotg(\theta)(\tilde{\omega}_{12}(v) - d\phi v) - \tau \cos(\phi)$$

o que nos dá

$$\cotg(\phi)\tilde{\omega}_{12}(v) - \cotg(\theta)d\phi v = \tau \cos(\phi) - \cos(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) + \frac{K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}\theta|}$$

o que implica em

$$-\cotg(\theta)d\phi v = -\cotg(\theta)\tilde{\omega}_{12}(v) + \tau \cos(\phi) - \cos(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) + \frac{K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}\theta|}$$

obtendo a igualdade

$$\begin{aligned} \cotg(\theta)d\phi v &= \cotg(\theta)\tilde{\omega}_{12}(v) - \tau \cos(\phi) + \cos(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) \\ &\quad - \frac{1}{|\text{grad}\theta|} [K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2] \\ \implies d\phi v &= \tilde{\omega}_{12}(v) - \tau \cos(\phi) \text{tg}(\theta) + \cos(\phi) \text{tg}(\theta)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) \\ &\quad - \frac{1}{|\text{grad}\theta|} \cdot \text{tg}(\theta) \cdot [K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2] \\ \implies d\phi v &= \tilde{\omega}_{12}(v) + \text{tg}(\theta) \cdot \{-\tau \cos(\phi) + \cos(\phi)[-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau] \\ &\quad - \frac{1}{|\text{grad}\theta|} [K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2]\}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo temos

$$\alpha(Jv, \varepsilon_2) = \alpha(-\sin(\phi)\varepsilon_1 + \cos(\phi)\varepsilon_2, \varepsilon_2) = -\sin(\phi)\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \cos(\phi)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2)$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\alpha(Jv, \varepsilon_2) &= -\sin(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) + \cos(\phi) \cdot \frac{K_e + \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2}{\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)} \\
&= -\sin(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) + \cos(\phi) \cdot \frac{K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}\theta|\sin(\phi)} \\
&= -\sin(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) + \cotg(\phi) \cdot \frac{K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}\theta|}. \quad (7)
\end{aligned}$$

A seguinte equação também tem que:

como

$$\alpha(X, \varepsilon_2) = \cotg(\theta)\omega_{12}(X) - \tau\langle \varepsilon_1, X \rangle, \text{ e como } \omega_{12}(X) = \tilde{\omega}_{12}(X) - d\phi(X), \quad \tilde{\omega}_{12}(X) = \langle \nabla_X v, Jv \rangle.$$

Teremos

$$\begin{aligned}
\alpha(Jv, \varepsilon_2) &= \cotg(\theta)\omega_{12}(Jv) - \tau\langle \varepsilon_1, Jv \rangle \\
&= \cotg(\theta)(\tilde{\omega}_{12}(Jv) - d\phi(Jv)) - \tau\langle \varepsilon_1, -\sin(\phi)\varepsilon_1 + \cos(\phi)\varepsilon_2 \rangle \\
&= \cotg(\theta)(\tilde{\omega}_{12}(Jv) - d\phi(Jv)) + \tau\sin(\phi). \quad (8)
\end{aligned}$$

Agora, podemos igualar as equações (7) e (8) para obtermos uma equação diferencial satisfeita por ϕ ao longo da trajetória de Jv .

Assim, teremos

$$\begin{aligned}
-\sin(\phi)(-|\text{grad}(\theta)|\cos(\phi) + \tau) + \cotg(\phi) \cdot \frac{K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}\theta|} &= \cotg(\theta)(\tilde{\omega}_{12}(Jv) \\
&\quad - d\phi(Jv)) + \tau\sin(\phi)
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
-\cotg(\theta)d\phi(Jv) &= -\cotg(\theta)\tilde{\omega}_{12}(Jv) - \tau\sin(\phi) - \sin(\phi)(-|\text{grad}(\theta)|\cos(\phi) + \tau) \\
&\quad + \cotg(\phi) \cdot \frac{K_e + (-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}\theta|}
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
d\phi(Jv) &= \tilde{\omega}_{12}(Jv) + \text{tg}(\theta)\{ \sin(\phi)(-|\text{grad}\theta|\cos(\phi) + \tau) + \tau\sin(\phi) \\
&\quad - \cotg(\phi) \cdot \frac{K_e + (-|\text{grad}(\theta)|\cos(\phi) + \tau)^2}{|\text{grad}(\theta)|} \}.
\end{aligned}$$

Portanto, se duas imersões isométricas convexas têm a mesma curvatura extrínseca, a mesma função θ e a mesma função ϕ num ponto, pelo Teorema da Unicidade de EDO's, então elas têm a mesma função ϕ em uma vizinhança desse ponto.

Para completar a prova do Teorema 2.1 faremos as seguintes

Observação 2.4. Da equação de Gauss $K = K_e + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\sin^2(\theta)$, o conjunto de possibilidades de θ é discreto e, portanto, θ é constante ao longo da deformação.

Observação 2.5. Como o conjunto dos pontos críticos da função θ consiste de dois pontos, existe um ponto $p \in M$ quando $d\theta \neq 0$ e a curvatura média é preservada ao longo da deformação. Em uma vizinhança desse ponto o referencial móvel especial $\{\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)\}$ é definido por cada valor de t da deformação, bem como as funções ϕ_t .

Observação 2.6. Nesta observação serão descritas algumas relações que há entre a curvatura H a função ϕ e a segunda forma fundamental.

Daí, sendo

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha(\varepsilon_j, \varepsilon_j)$$

quando $n = 1, 2$, teremos

$$H(p) = \frac{1}{2}[\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2)] \iff 2H = \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) \implies \alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = 2H - \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \quad (*)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = \frac{K_e + \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2}{\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)} \implies K_e = \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)\alpha(\varepsilon_2, \varepsilon_2) - \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2 \quad (**)$$

De (*) e (**) vem que

$$\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)\{2H - \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1)\} - \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^2 = K_e.$$

Desde que

$$\alpha(\varepsilon_1(t), \varepsilon_1(t)) = |\text{grad}(\theta)|\sin(\phi_t)$$

e

$$\alpha(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) = -|\text{grad}(\theta)|\cos(\phi_t) + \tau,$$

obtemos

$$|\text{grad}(\theta)|\sin(\phi_t)\{2H - |\text{grad}(\theta)|\sin(\phi_t)\} - (-|\text{grad}(\theta)|\cos(\phi_t) + \tau)^2 - K_e = 0$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} |\text{grad}(\theta)|\sin(\phi_t)\{2H - |\text{grad}(\theta)|\sin(\phi_t)\} - (|\text{grad}(\theta)|^2\cos^2(\phi_t) - \\ - 2\tau|\text{grad}(\theta)|\cos(\phi_t) + \tau^2) - K_e = 0 \end{aligned}$$

e assim

$$2H|\text{grad}(\theta)|\sin(\phi_t) - |\text{grad}(\theta)|^2\sin^2(\phi_t) - |\text{grad}(\theta)|^2\cos^2(\phi_t) + \\ + 2\tau|\text{grad}(\theta)|\cos(\phi_t) - \tau^2 - K_e = 0$$

o que implica em

$$2H|\text{grad}(\theta)|\sin(\phi_t) + 2\tau|\text{grad}(\theta)|\cos(\phi_t) - |\text{grad}(\theta)|^2(\sin^2(\phi_t) + \cos^2(\phi_t)) - \tau^2 - K_e = 0 \\ 2H|\text{grad}(\theta)|\sin(\phi_t) + 2\tau|\text{grad}(\theta)|\cos(\phi_t) - |\text{grad}(\theta)|^2 - \tau^2 - K_e = 0.$$

Tomando $A = 2H|\text{grad}(\theta)|$; $B = +2\tau|\text{grad}(\theta)|$ e $C = -(|\text{grad}(\theta)|^2 + \tau^2 + K_e)$ obteremos

$$A\sin(\phi_t) + B\cos(\phi_t) + C = 0$$

que gera uma equação polinomial quadrática. Assim, temos

$$A\sin(\phi_t) + B\cos(\phi_t) = 0 \\ A\sin(\phi_t) = -B\cos(\phi_t) - C \\ \sin(\phi_t) = \frac{-B\cos(\phi_t) - C}{A} \quad (I)$$

Por outro lado

$$\sin^2(\phi_t) + \cos^2(\phi_t) = 1 \\ \sin^2(\phi_t) = 1 - \cos^2(\phi_t) \\ \sin(\phi_t) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\phi_t)} \quad (II)$$

De (I) e (II) podemos afirmar que

$$\frac{-B\cos(\phi_t) - C}{A} = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\phi_t)} \\ \frac{B^2\cos^2(\phi_t) + 2BC\cos(\phi_t) + C^2}{A^2} = 1 - \cos^2(\phi_t) \\ B^2\cos^2(\phi_t) + 2BC\cos(\phi_t) + C^2 = A^2 - A^2\cos^2(\phi_t) \\ B^2\cos^2(\phi_t) + A^2\cos^2(\phi_t) + 2BC\cos(\phi_t) + C^2 - A^2 = 0 \\ \cos^2(\phi_t)(A^2 + B^2) + 2BC\cos(\phi_t) + C^2 - A^2 = 0 \quad (III)$$

Portanto a equação polinomial quadrática (III), possui no máximo duas raízes, a menos que todos os coeficientes sejam zero, neste caso, $A = B = C = 0$.

Portanto ϕ é constante ao longo da deformação no ponto p .

Consequentemente ϕ é constante ao longo da deformação numa vizinhança de p . Desde que ϕ seja preservado, temos que a segunda forma fundamental é preservada e em particular H é preservada.

Sejam p_1 e p_2 pontos de M onde $d\theta = 0$ e seja $U = M - \{p_1, p_2\}$.

Como M é um conjunto conexo, então U também é um conjunto conexo.

Seja $X = \{p \in U : H_t(p) = H_0(p) \text{ e } \phi_t(p) = \phi_0(p)\}$, onde H_0 é a curvatura de f e ϕ_0 é a função ϕ correspondente à f .

Como foi observado acima, X é um conjunto aberto de U . Por outro lado, o conjunto X é fechado já que é interseção de conjuntos fechados de U . A partir da hipótese do Teorema 2.1 e a observação acima, $p \in X$ e, assim, $X = U$. Consequentemente, todas as imersões f_t da deformação, tem a mesma função θ , e a mesma segunda forma fundamental e a mesma direção horizontal em X . Assim, elas são iguais a f até a alguma isometria de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Esta conclusão pode ser estendida claramente a M . ■

Referências Bibliográficas

- [1] BENOIT, D.. *Isometric Immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*. Comment. Math. Helv. 82 (2007), 87-131. 3, 22, 24, 28, 29
- [2] CARMO, M. P.. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 3, 5, 6, 7
- [3] CARMO, M. P.. *O Método do Referencial Móvel*. Rio de Janeiro: IMPA, 1978. 14, 16
- [4] COHN-VOSSEN, E.. *Zwei Sattelform der Eiflachen*. Nachr. Ges. Will. Gottingen (1927), 125-134. 1, 14
- [5] DAJCZER, M.. *Submanifolds and Isometric Immersions*. Houston: Publish or Perish, 1990. 3
- [6] DORIA, C. M.. *Estruturas Geométricas em dimensão 2*. Disponível em: [http://www.mtm.ufsc.br/~cmdoria/Pesquisa/Universal – 2010/Artigos – livros/Livros/Geometria – 2D.pdf](http://www.mtm.ufsc.br/~cmdoria/Pesquisa/Universal%20-%202010/Artigos%20-%20livros/Livros/Geometria%20-%202D.pdf), 2010. 3
- [7] ESPINAR, J., GALVEZ, J. AND ROSENBERG, H.. *Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces*. arXiv:0705.0585v2 [math. DG], 2007. 1
- [8] ESPINAR, J., ROSENBERG, H.. *When strictly locally convex hypersurfaces are embedded*. arXiv:1003.010v1 [math. DG], 2010. 1
- [9] ESPINOZA PEÑAFIEL, C. D.. *Surfaces of constant Mean Curvature in Homogeneous Three Manifolds with Emphasis in $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R}, \tau)$* . Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2010. 3
- [10] FERNADEZ, I., MIRA, P.. *A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds*. Diff. Geom. Appl., 25 (2007), 281-289.
- [11] GAVEZ, J., MARTINEZ, A., AND MIRA, P.. *The Bonnet problem for Surfaces in homogeneous 3-manifolds*. Communications in Analysis and Geometry, vol. 16, 5, (2008), 907-935. 1
- [12] HOSENBERG, H., TRIBUZY, R. A.. *Rigidity of Convex Surfaces in the Homogeneous Spaces*. arXiv: 1102.5455v1 [math. DG], 2011. 1, 3, 30

-
- [13] OLOVISNISHNI-KOFF, S.. *On the bending of infinite convex surfaces*. N. S. 18 (60) (1946),429-440. [1](#)
- [14] POGORELOV. *On the rigidity of general infinite convex surfaces with integral curvature 2π* . Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 106 (1956), 19-20.
- [15] ROBINSON, D., J., S.. *A Course in the Theory of Groups*. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1996. [3](#)
- [16] ROTMAN, J., J.. *An Introduction to the Theory of Groups*. Fourth Edition. New York: Spronger-Verlag, 1995. [3](#)
- [17] SCOTT, P.. *The geometries of 3-manifolds*. Bull. London Math. Soc., 15 (5):401-487, 1983. [3](#), [11](#)
- [18] CHERN, S.S.. *Some New Characterizations of the Euclidian Sphere*. Duke Math. J. 12:270-290,1945. [14](#)
- [19] TORRALBO, F.. *Rotationally invariant constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds*. Diff. Geom. Appl., 28 (2010), 593-607. [3](#), [13](#)