

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MÉTODO DE PONTO PROXIMAL PARA PROBLEMAS DE  
EQUILÍBRIO EM ESPAÇOS DE HILBERT

*Daiana dos Santos Viana*

MANAUS - 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Daiana dos Santos Viana

MÉTODO DE PONTO PROXIMAL PARA PROBLEMAS DE  
EQUILÍBRIO EM ESPAÇOS DE HILBERT

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Otimização.

Orientador(a): Profa. Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

Coorientador(a): Prof<sup>o</sup> Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva

MANAUS - 2013

Daiana dos Santos Viana

MÉTODO DE PONTO PROXIMAL PARA PROBLEMAS DE  
EQUILÍBRIO EM ESPAÇOS DE HILBERT

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Otimização.

Manaus, 23 de Setembro de 2013.

BANCA EXAMINADORA

.....  
Prof<sup>o</sup> Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva, Presidente  
Universidade Federal do Amazonas

.....  
Prof<sup>o</sup> Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, Membro  
Universidade Federal do Amazonas

.....  
Prof<sup>a</sup> Dra. Sissy da Silva Souza, Membro  
Universidade Federal do Piauí

# AGRADECIMENTOS

- À Deus por todas as graças concebidas em minha vida.
- À minha família pelo apoio e compreensão em especial ao meu filho Fágner e marido Marcelo.
- Aos membros da banca examinadora pelas sugestões dadas à melhoria desta dissertação.
- À professora Flávia pela orientação e pelo estímulo constante.
- Ao professor Roberto Cristóvão pelo constante estímulo durante a graduação e a pós-graduação, obrigada.
- Ao professor Nilomar muito obrigada por toda a atenção.
- Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGM) que contribuíram para minha formação acadêmica.
- Aos colegas do Mestrado pelo apoio constante.
- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM pelo apoio financeiro.

# RESUMO

## MÉTODO DE PONTO PROXIMAL PARA PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO EM ESPAÇOS DE HILBERT

Nesta dissertação, apresentamos um método de ponto proximal para resolução de problemas de equilíbrio em espaços de Hilbert proposto por Alfredo Iusem e Wilfredo Sosa em [1]. Analisamos a convergência deste método para soluções de problemas de equilíbrio. Verificamos que a sequência gerada pelo método de ponto proximal clássico e a sequência gerada pelo método de ponto proximal para problemas de equilíbrio coincidem. Esses resultados foram obtidos usando variações de monotonicidade sobre a função que define o problema de equilíbrio. Uma análise final é feita sobre o enfraquecimento das hipóteses assumidas pela função.

**Palavras-chave:** problema de equilíbrio, método de ponto proximal, reformulação de problemas de equilíbrio.

# ABSTRACT

## PROXIMAL POINT METHOD FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN HILBERT SPACES

In this dissertation, we present a proximal point method for solving problems balance in Hilbert spaces proposed by Alfredo Iusem and Wilfredo Sosa in [1]. We analyzed the convergence of this mehtod for troubleshooting balance. We verified the sequence generated by the method of classical proximal point and generated sequence the proximal point method to balance problems are the same. These results were obtained using variations of monotonicity of the function that defines the balance problem. In the final analysis is made on the weakening of the hypothesis assumed by function.

**Keywords:** equilibrium problem, proximal point method, reformulation of equilibrium problems.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Elementos de Topologia . . . . .	1
1.2 Elementos de análise funcional . . . . .	3
1.3 Conjuntos e funções convexas . . . . .	7
1.4 Subdiferencial de uma função convexa . . . . .	13
1.5 Operador monótono maximal . . . . .	16
1.6 Método de ponto proximal para operador monótono maximal . . . . .	18
<b>2 Problema de Equilíbrio</b>	<b>23</b>
2.1 O problema de equilíbrio clássico . . . . .	23
2.2 Existência de solução para $PE(f, K)$ . . . . .	27
2.3 Regularização para o problema de equilíbrio. . . . .	35
<b>3 Método de ponto proximal para problemas de equilíbrio</b>	<b>39</b>
3.1 Método de ponto proximal para $PE(f, K)$ . . . . .	39
3.2 Uma reformulação para o problema de equilíbrio . . . . .	42
<b>Considerações Finais</b>	<b>48</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>50</b>

# Notações

$H$	Espaço de Hilbert.
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não-negativos.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno de $H$ .
$\  \cdot \ $	Norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$ .
$\partial f(x)$	Subdiferencial da função $f$ no ponto $x$ .
$\mathcal{N}_D(x)$	Cone das direções normais no ponto $x$ .
$\mathcal{P}(H)$	Conjunto das partes de $H$ .
$D_g$	Distância de Bregman com respeito a função $g$ .
$\text{PDV}(F, K)$	Problema de Desigualdade Variacional definido por um operador $F$ sobre um subconjunto $K$ de $H$ .
$S(F, K)$	Conjunto de soluções do problema $\text{PDV}(F, K)$ .
$\tilde{f}$	Regularização da bifunção $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ .
$\text{PE}(f, K)$	Problema de equilíbrio definido sobre a função $f$ em $K$ .
$\text{PE}(\tilde{f}, K)$	Problema de equilíbrio definido sobre a função $\tilde{f}$ em $K$ .
$S(f, K)$	Conjunto de soluções do problema $\text{PE}(f, K)$ .
$S^d(f, K)$	Conjunto de soluções do dual do problema $\text{PE}(f, K)$ .
(MPP)	Método de Ponto Proximal.
(MPPOMM)	Método de Ponto Proximal para Operador Monótono Maximal.
(MPPPE)	Método de Ponto Proximal para Problema de Equilíbrio.

# Introdução

O problema de equilíbrio clássico tem sido muito estudado nos últimos anos por conter como exemplos particulares, alguns problemas de grande interesse na otimização. Nesta dissertação apresentamos o problema de equilíbrio proposto por Bluem e Oettli em [10] e comentamos de forma superficial alguns de seus exemplos como, o problema de minimização convexa, o problema de complementariedade e o problema de desigualdade variacional.

Nosso objetivo é analisar um método de ponto proximal para resolver problemas de equilíbrio proposto por Alfredo Iusem e Wilfredo Sosa. Durante a análise deste método, vamos trabalhar com uma regularização para a bifunção  $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ . Com essa regularização vamos obter um novo problema de equilíbrio ao qual denotamos por  $PE(\tilde{f}, K)$  e explorar alguns resultados que garantam solução para  $PE(\tilde{f}, K)$ . No decorrer desta dissertação, serão necessárias algumas variações da monotonicidade da  $f$ , tratamos também de forma superficial o problema de viabilidade convexa que é usado quando definimos o dual de um problema de equilíbrio. A definição do problema dual de um problema de equilíbrio é muito explorada durante o trabalho pois, sobre algumas hipóteses, o conjunto solução de  $PE(\tilde{f}, K)$  é igual ao conjunto solução do problema de equilíbrio.

No capítulo 1, começamos com a apresentação dos elementos necessários a construção desta dissertação. Apresentamos alguns conceitos de espaços vetoriais arbitrários, fazemos um estudo sobre alguns resultados referentes a espaços de Hilbert, discutimos conceitos e alguns resultados sobre conjuntos convexos e funções convexas, definimos operador monótono maximal e por fim definimos o subdiferencial de uma função convexa.

No capítulo 2, definimos o problema de equilíbrio e apresentamos como exemplos o problema de minimização convexa, problema de desigualdade variacional e o problema de complementariedade. Verificamos resultados de existência de solução e definimos uma regularização para o problema de equilíbrio

No capítulo 3, iniciamos apresentando o método de ponto proximal, método de ponto proximal para um operador monótono maximal. Verificamos um resultado que garante convergência fraca deste método para um zero do operador monótono maximal tratado. Também é definido um método de ponto proximal para problemas de equilíbrio e garantido a convergência fraca deste método. Concluimos o capítulo 3 apresentando uma reformulação para o problema de equilíbrio em termos de um operador obtido a partir do subdiferencial da função e discutimos os benefícios em definir o problema de equilíbrio como um operador.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos conceitos essenciais para o desenvolvimento desta dissertação. No decorrer das seções destacamos resultados relacionados a existência de soluções, conjuntos convexos, funções convexas e uma breve teoria de análise funcional em particular, os espaços de Hilbert, definimos alguns conceitos sobre função ponto-conjunto e tratamos o método de ponto proximal para operador monótono maximal.

### 1.1 Elementos de Topologia

Inicialmente, destacamos alguns conceitos topológicos fundamentais ao desenvolvimento deste trabalho, algumas demonstrações porém, não são feitas detalhadamente pois fogem do nosso objetivo central.

Seja  $X$  um conjunto não vazio, denotamos por  $\mathcal{P}(X)$  o conjunto das partes de  $X$ .

**Definição 1.1** ([11],p.63). *Uma topologia sobre  $X$  é uma família,  $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ , de subconjuntos de  $X$ , tal que:*

1.  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\sigma$ ;

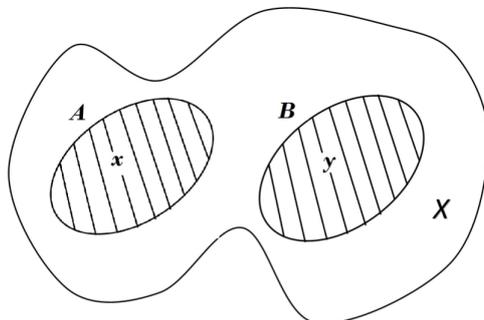
2. Se  $A_1, \dots, A_n$  pertencem a  $\sigma$  então  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \sigma$ ;

3. Dada uma família  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ , com  $A_\lambda \in \sigma$  para cada  $\lambda \in L$  tem-se

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda \in \sigma.$$

O conjunto  $X$  munido de uma topologia  $\sigma$  passa a ser um espaço topológico e é denotado pelo par  $(X, \sigma)$  onde cada elemento de  $\sigma$  é dito um aberto da topologia. Outra definição que é de suma importância para garantir solução para o problema de equilíbrio é a definição de espaço topológico de Hausdorff.

**Definição 1.2** ([11],p.65). Um espaço topológico  $(X, \sigma)$  chama-se um espaço de Hausdorff quando, dados dois pontos arbitrários distintos  $x, y$  em  $X$ , existem abertos  $A, B \subset X$  da topologia  $\sigma$  tais que  $x \in A$ ,  $y \in B$  e  $A \cap B = \emptyset$ .



**Figura 1.1:** Espaço de Hausdorff  $X$ .

**Exemplo 1.1.** Cada espaço topológico discreto é um espaço de Hausdorff. Lembrando que espaços topológicos discretos são aqueles em que todos os seus pontos são isolados, o que faz com que esses espaços sejam de Hausdorff.

**Exemplo 1.2.** Qualquer espaço métrico é um espaço de Hausdorff. A verificação de que todo espaço métrico é Hausdorff é feita por absurdo. Tome  $X$  um espaço métrico com métrica  $d$ . Para  $x, y \in X$  distintos, tomando  $r = d(x, y) > 0$  e considerando os abertos  $A_x = B_d(x, r/3)$  onde

$$B_d(x, r/3) = \{z \in X; d(x, z) < r/3\}$$

e  $A_y = B_d(y, r/3)$ . Vamos supor por absurdo que exista  $z \in A_x \cap A_y$ , então  $d(z, x) < r/3$  e  $d(z, y) < r/3$ . Pela desigualdade triangular

$$r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r/3$$

Absurdo, logo  $A_x \cap A_y = \emptyset$ .

**Exemplo 1.3.** Seja  $\mathbb{F}$  um corpo de escalares. Os espaços vetoriais  $(X, +, \cdot)$  com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar sobre  $\mathbb{F}$  são exemplos de espaço de Hausdorff considerando a topologia mais fina onde todo elemento é um aberto da topologia.

**Definição 1.3** ([15],p.2). Seja  $\mathbb{F}$  um corpo de escalares. Uma norma num espaço vetorial  $(X, +, \cdot)$  é uma aplicação  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\|\xi\| \geq 0$  para todo  $\xi \in X$ , e  $\|\xi\| = 0 \iff \xi = 0$ .
- (ii)  $\|\alpha\xi\| = |\alpha|\|\xi\|$ , para todo  $\xi \in X$  e qualquer  $\alpha \in \mathbb{F}$ .
- (iii)  $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$ , para todos  $\xi, \eta \in X$

**Definição 1.4** ([15],p.2). Um espaço normado é um par  $(X, \|\cdot\|)$  onde  $X$  é um espaço vetorial e  $\|\cdot\|$  uma norma em  $X$ .

**Definição 1.5.** Dado  $n \in \mathbb{N}$  o conjunto de todas as  $n$ -uplas de números reais com as operações usuais é um espaço vetorial denotado por  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R} \ i = 1, \dots, n\}$ .

**Exemplo 1.4.** São exemplos de espaços normados o conjunto  $\mathbb{R}^n$  munido da norma euclidiana

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

e o conjunto das funções reais  $g$  contínuas definidas em  $[0, 1]$  munido da norma do supremo.

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$$

.

**Definição 1.6** ([15],p.3). Um espaço normado que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado de espaço de Banach.

**Exemplo 1.5.** Os espaços  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^n$ , ambos munidos de suas operações soma e produto por escalar usuais, o espaço  $B(X, \mathbb{R})$  das funções reais limitadas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  definidas num conjunto qualquer  $X$  munido de duas operações: a soma e o produto por escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  usuais.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

são exemplos de espaços de Banach.

## 1.2 Elementos de análise funcional

Nesta seção apresentamos alguns conceitos de análise funcional, dentre eles o conceito de espaço de Hilbert. No decorrer do trabalho assumimos que todo espaço de Hilbert é denotado por  $H$  salvo menção contrária, os espaços de Hilbert formam a classe mais importante de espaços de Banach. A seguir definimos o conceito de produto interno.

**Definição 1.7** ([15],p.122). Seja  $X$  um espaço vetorial sobre um corpo de escalares  $\mathbb{F}$ . Um produto interno no espaço vetorial  $X$  é um funcional  $(\xi, \eta) \rightarrow \langle \xi, \eta \rangle$ , de  $X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ , de maneira que para quaisquer  $\xi, \eta, \zeta \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{F}$  tem-se:

$$(i) \langle \alpha\xi + \eta, \zeta \rangle = \alpha \langle \xi, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta \rangle;$$

$$(ii) \langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle};$$

$$(iii) \langle \xi, \xi \rangle \geq 0 \text{ e } \langle \xi, \xi \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } \xi = 0.$$

Onde  $\bar{\alpha}$  denota o complexo conjugado do escalar  $\alpha$ .

**Definição 1.8** ([15],p.125). Um espaço de Hilbert munido de um produto interno é um espaço de Banach cuja norma é induzida pelo produto interno.

**Exemplo 1.6.** São exemplos de espaços de Hilbert: O  $\mathbb{R}^n$  munido da norma Euclidiana e o espaço das funções contínuas reais definidas no intervalo  $[0, 1]$  com a norma do supremo.

**Proposição 1.1** ([15],p.124). Se  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é um espaço vetorial com produto interno. Então para todos  $\xi, \eta \in X$  valem:

(i) A desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \|\eta\|$$

a igualdade ocorre se, e somente se,  $\{\xi, \eta\}$  é linearmente dependente;

(ii) A desigualdade triangular:  $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$ .

*Demonstração.* (i) Se  $\langle \xi, \eta \rangle = 0$  é imediato. Se  $\langle \xi, \eta \rangle \neq 0$ , então  $\eta \neq 0$  e para  $t \in \mathbb{F}$  tem-se

$$0 \leq \langle \xi - t\eta, \xi - t\eta \rangle = \|\xi\|^2 - t \langle \xi, \eta \rangle - \bar{t} \langle \xi, \eta \rangle + |t|^2 \|\eta\|^2$$

Escolhendo  $t = \frac{\langle \eta, \xi \rangle}{\|\eta\|^2}$  vem que  $0 \leq \|\xi\|^2 - |\langle \xi, \eta \rangle|^2 / \|\eta\|^2$  e, portanto,  $\|\xi\|^2 \|\eta\|^2 \geq |\langle \xi, \eta \rangle|^2$ , com a igualdade ocorrendo se, e somente se, existir  $t \in \mathbb{F}$  com  $\xi - t\eta = 0$ , ou seja,  $\xi = t\eta$ .

(ii) Usando o item (i) obtemos:

$$\begin{aligned} \|\xi + \eta\|^2 &= \|\xi\|^2 + \langle \xi, \eta \rangle + \langle \eta, \xi \rangle + \|\eta\|^2 \\ &\leq \|\xi\|^2 + 2|\langle \xi, \eta \rangle| + \|\eta\|^2 \leq \|\xi\|^2 + 2\|\xi\| \|\eta\| + \|\eta\|^2 \\ &= (\|\xi\| + \|\eta\|)^2, \end{aligned}$$

e a desigualdade triangular está demonstrada. ■

**Definição 1.9** ([6],p.10). A sequência  $\{x^k\} \subset H$  converge fracamente para  $x \in H$  ( $x^k \rightharpoonup x$ ) quando  $k \rightarrow \infty$  se:

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^k - x, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

**Definição 1.10** ([6],p.10). A sequência  $\{x^k\} \subset H$  converge fortemente para  $x \in H$  ( $x^k \rightarrow x$ ) quando  $k \rightarrow \infty$  se:

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^k - x, x^k - x \rangle.$$

**Observação 1.1.** *Convergência forte implica em convergência fraca. De fato, dado  $\epsilon > 0$ , seja  $k \geq n_0$  com  $n_0 \in \mathbb{N}$  e  $y \in K$  tal que  $\|x^k - x\| < \frac{\epsilon}{\|y\|}$ . Então, por Cauchy-Schwartz temos que*

$$|\langle x^k - x, y \rangle| \leq \|x^k - x\| \|y\| \leq \epsilon \quad \forall k \geq n_0$$

*Assim, convergência forte implica em convergência fraca.*

A recíproca desse resultado não é verdade como vemos no exemplo a seguir.

Vamos tomar o conjunto  $l_2 = \left\{ \{x_n\}; \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$  com  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ . Tome  $\{e^k\} \subset l_2$  com  $e_n^k = \delta_{kn}$  onde  $\delta_{kn}$  é o Delta de Kronecker. Então  $e^k \rightarrow 0$  pois

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle e^k - 0, y \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle e^k, y \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = 0$$

Usando que  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$ . Note que  $\|e^k\| = 1$  para todo  $k$  e  $\langle e^k, e^j \rangle = 0$ ,  $\|e^k - e^j\| = \sqrt{2}$  para todo  $j \neq k$ . Dessa forma, convergência fraca não implica em convergência forte.

Com base na definição de convergência fraca, diremos que um conjunto é fracamente fechado se todas as suas sequências fracamente convergentes, convergem fracamente para um ponto desse conjunto.

**Teorema 1.1.** (Bourbaki-Alaoglu). *Se  $\{x^k\} \subset H$  é uma sequência limitada, então  $\{x^k\}$  possui uma subsequência que converge fracamente.*

*Demonstração.* Ver: [3] ■

A seguir enunciamos os Teoremas de Hahn-Banach, primeira e segunda versão geométrica, esses teoremas são de grande importância para a análise funcional e tratam de condições suficientes para separar conjuntos convexos, eles serão utilizados em demonstrações de outros resultados necessários para o desenvolvimento dessa dissertação. Suas demonstrações não serão realizadas pois fogem do nosso objetivo central porém, são referenciadas.

**Teorema 1.2.** (Hahn-Banach, primeira versão geométrica) *Sejam  $E$  um espaço vetorial normado  $A, B \subset E$  subconjuntos não vazios, convexos tais que  $A \cap B = \emptyset$ . Assuma que um deles é aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa  $A$  e  $B$  no sentido amplo.*

*Demonstração.* Ver: [3] ■

O próximo teorema é conhecido como segunda versão geométrica do Teorema de Hahn-Banach e é muito útil na demonstração de alguns resultados.

**Teorema 1.3.** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado e sejam  $A, B \subset E$  dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Suponha que  $A$  seja fechado e que  $B$  seja compacto. Então existe um hiperplano que separa estritamente  $A$  e  $B$ .*

*Demonstração.* Ver:[3] ■

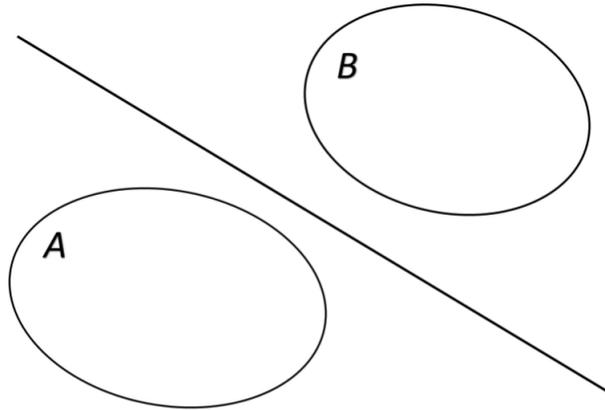


Figura 1.2: Teorema de Hahn - Banach.

**Proposição 1.2** ([3]). *Um espaço vetorial normado  $X$  sob a topologia fraca é um espaço de Hausdorff.*

*Demonstração.* Se  $x, y \in X$  com  $x \neq y$  temos pelo Teorema de Hahn - Banach que existe  $f \in X^*$  tal que  $f(x - y) = \|x - y\|$ . Em particular,  $f(x) \neq f(y)$  e se  $\alpha \in \mathbb{R}$  é tal que  $f(x) < \alpha < f(y)$ , então os abertos  $f^{-1}((-\infty, \alpha))$  e  $f^{-1}((\alpha, \infty))$  separam  $x$  e  $y$ . ■

**Definição 1.11** ([3]). *Diremos que um espaço de Banach  $E$  é reflexivo se  $E^{**} = E$ .*

**Teorema 1.4.** *Todo espaço de Hilbert é Reflexivo.*

*Demonstração.* Ver: [15] ■

A seguir apresentamos o conceito de função ponto a conjunto.

**Definição 1.12** ([1]). *Uma função ponto a conjunto é uma função  $T$  que tem como domínio um conjunto não vazio  $X$ , como contradomínio o conjunto de partes de um conjunto não vazio  $Y$ , que representamos por  $\mathcal{P}(Y)$ , que associa a cada  $x \in X$  o subconjunto  $T(x)$  em  $\mathcal{P}(Y)$ .*

As funções ponto - conjunto também são chamadas de multifunções, funções de múltiplos valores, funções valor-conjunto, funções multívocas e correspondências.

**Definição 1.13** ([1]). *Definimos o domínio, a imagem e o gráfico de uma função ponto a conjunto  $T : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  por:*

- a)  $Dom(T) = \{x \in X; T(x) \neq \emptyset\};$
- b)  $Im(T) = \bigcup_{x \in X} T(x);$
- c)  $Gr(T) = \{(x, y) \in X \times Y; y \in T(x)\}.$

**Definição 1.14** ([1]). *Seja  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$ . Definimos a inversa de  $T$  como*

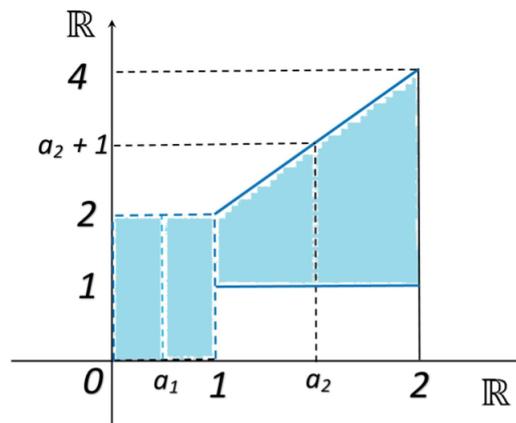
$$\begin{aligned} T^{-1} : \mathcal{P}(H) &\rightarrow H \\ x &\rightarrow T^{-1}(x) \end{aligned}$$

**Definição 1.15** ([1]). *Seja  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$ .*

- (i) *Diremos que  $T$  é sobrejetora se, para todo  $y \in H$  existir  $x \in H$  tal que  $y \in T(x)$ .*
- (ii) *Diremos que  $T$  é injetora se, para todo  $x, y \in H$  com  $x \neq y$  tem-se  $T(x) \cap T(y) = \emptyset$ .*

**Exemplo 1.7.** *Sejam  $X = \mathbb{R}$ ,  $A = (0, 3]$  e  $G : A \rightarrow \mathcal{P}(H)$  dada por*

$$G(x) = \begin{cases} [1, a + 1] & \text{se } 1 \leq a \leq 3 \\ (0, 2] & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$



**Figura 1.3:** Gráfico da função  $G$ .

## 1.3 Conjuntos e funções convexas

Nessa seção estudamos conjuntos e funções com uma propriedade de grande interesse a convexidade. A hipótese de convexidade é muito forte e ocasiona grandes propriedades tanto sobre o conjunto quanto sobre a função que a possuem.

**Definição 1.16** ([12], p.101). *Um conjunto  $K \subset H$  é dito convexo se, para quaisquer  $(x, y) \in K \times K$  e  $\alpha \in (0, 1)$ , tem-se que  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in K$ .*

**Exemplo 1.8** ([12], p.101). *Toda bola  $B \subset \mathbb{R}^n$  é convexa. De fato, seja  $B = B(a; r)$  a bola de centro  $a$  e raio  $r > 0$ . Se  $x, y \in B$  então  $|x - a| < r$  e  $|y - a| < r$ . Para qualquer  $t \in (0, 1)$ ,*

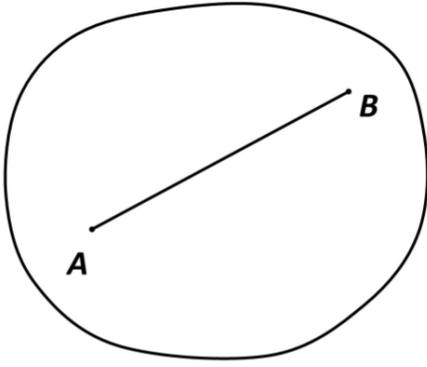


Figura 1.4: Conjunto convexo

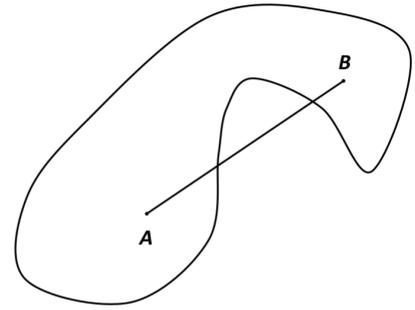


Figura 1.5: Conjunto não convexo

temos:

$$\begin{aligned} |(1-t)x + ty - a| &= |(1-t)(-a) + t(y-a)| \\ &\leq (1-t)|x-a| + t|y-a| < r. \end{aligned}$$

Um exemplo de conjunto não convexo é  $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Tem-se  $e_1 \in X$ ,  $-e_1 \in X$  mas  $0 \in [-e_1, e_1]$ .

**Teorema 1.5.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $K \subset H$  convexo e fechado. Para  $x \in K$ , se para algum  $y_x \in K$  tem-se  $|y_x - x| \leq |y - x|$  para todo  $y \in K$ , então*

$$\langle x - y_x, y - y_x \rangle \leq 0$$

para todo  $y \in K$ .

*Demonstração.* Tome  $y$  arbitrário em  $K$  de modo que  $y_x + \alpha(y - y_x) \in K$ , para todo  $\alpha \in (0, 1)$ . Então podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 \leq \|y_x - x\|^2 &\leq \|y_x + \alpha(y - y_x) - x\|^2 \\ &= \|(y_x - x) + \alpha(y - y_x)\|^2 \\ &= \|y_x - x\|^2 + 2\alpha \langle y_x - x, y - y_x \rangle + \alpha^2 \|y - y_x\|^2 \end{aligned}$$

Então,

$$0 \leq \alpha \langle y_x - x, y - y_x \rangle + \frac{1}{2}\alpha^2 \|y - y_x\|^2$$

Dividindo a desigualdade acima por  $\alpha > 0$  e tomando o limite quando  $\alpha \rightarrow 0$  obtemos,

$$\langle x - y_x, y - y_x \rangle \leq 0$$

■

**Teorema 1.6.** *Existe um único ponto  $y_x \in K$  tal que  $\|y_x - x\| \leq \|y - x\|$ , para todo  $y \in K$ .*

*Demonstração.* Suponha que existam  $y_x \in K$  e  $\bar{y}_x \in K$  tais que

$$\|y_x - x\| \leq \|y - x\| \text{ e } \|\bar{y}_x - x\| \leq \|y - x\|$$

para todo  $y \in K$ . Em particular vale que

$$\langle x - y_x, \bar{y}_x - y_x \rangle \leq 0 \text{ e } \langle x - \bar{y}_x, y_x - \bar{y}_x \rangle \leq 0$$

Somando as duas desigualdades acima obtemos

$$\langle \bar{y}_x - y_x, \bar{y}_x - y_x \rangle \leq 0$$

Logo,  $y_x = \bar{y}_x$ . ■

Denotamos por  $P_K(x)$  o único ponto dado pelo teorema anterior que é chamado projeção de  $x$  sobre o convexo  $K$ .

**Definição 1.17** ([17],p.73). *Sejam  $K \subset H$  um conjunto convexo e  $\bar{x} \in K$ . O cone normal no ponto  $\bar{x}$  em relação ao conjunto  $K$  é dado por*

$$N_K(\bar{x}) = \{v \in H; \langle v, y - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall y \in K\}.$$

**Teorema 1.7** ([3],p.60). *Seja  $K$  um subconjunto convexo de  $H$ . Então  $K$  é fracamente fechado se, e somente se, é fortemente fechado.*

*Demonstração.* Suponha  $K$  fracamente fechado, logo  $K^c$  é fracamente aberto. Como os abertos da topologia fraca são abertos da topologia forte,  $K^c$  é fortemente aberto, logo  $K$  é fortemente fechado. Por outro lado, se  $K$  é fortemente fechado o seu complementar é fracamente aberto. Para isso, seja  $x_0 \notin K$  pelo Teorema de Hahn - Banach versão geométrica existe um hiperplano fechado que separa  $x_0$  estritamente de  $K$ . Assim, seja  $f = \alpha$  esse hiperplano.

$$f(x_0) < \alpha < f(x)$$

para todo  $x \in K$ . Seja  $U = f^{-1}((-\infty, \alpha)) = \phi_f^{-1}((-\infty, \alpha))$  onde  $\phi_f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $\phi_f(x) = f(x)$  e a topologia fraca em  $X$  é a menos fina que torna todas as aplicações  $\{\phi_f\}$  contínuas. Como na topologia fraca  $\phi_f$  é contínua e  $(-\infty, \alpha)$  é aberto em  $\mathbb{R}$  temos que  $\phi_f^{-1}((-\infty, \alpha))$  é um aberto na topologia fraca e  $x_0 \in U \subset K^c$ . Logo,  $x_0$  é um ponto interior a  $K^c$  o que implica em  $K^c$  ser fracamente aberto.

Portanto,  $K$  é fracamente fechado. ■

**Teorema 1.8** ([3],p.71). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Seja  $K \subset H$  limitado, fechado e convexo em  $H$ . Então  $K$  é compacto na topologia fraca.*

*Demonstração.*  $K$  é fechado na topologia fraca pelo teorema anterior. Por outro lado existe uma constante  $m$  tal que  $K \subset mB_E$  observe que  $mB_E$  é compacto na topologia fraca. Um subconjunto fechado de um compacto é compacto, segue que  $K$  é compacto na topologia fraca. ■

**Definição 1.18** ([1], p.38). *Seja  $K$  um subconjunto de um espaço vetorial  $H$ , a envoltória convexa de  $K$ , denotada por  $\text{conv}K$ , é a interseção de todos os subconjuntos convexos que contém  $K$ .*

**Teorema 1.9.** *A envoltória convexa do subconjunto  $K$  de um espaço vetorial  $H$  consiste de todos os vetores da forma  $\alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_n$  onde  $x_i \in K$   $\alpha_i \geq 0$  com  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$*

*Demonstração.* Seja  $A$  o conjunto de todos os vetores da forma dada na afirmação do teorema. Logo  $A$  é convexo e isto segue da própria definição de conjunto convexo. Além disso,  $A \subset K$  pois para todo  $x_i \in A$ ,  $x_i \in K$ . Segue então que  $\text{conv}A \subset K$ .

Por outro lado, qualquer conjunto convexo que contém  $A$  contém  $K$ . Em particular,  $\text{conv}A \supset K$ . Portanto,  $\text{conv}A = K$ . ■

**Definição 1.19** ([17], p.74). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $K \subset H$  convexo. Diremos que a função  $f : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  é convexa se, para todo  $x, y \in K$  e  $t \in [0, 1]$  tivermos*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y). \tag{1.1}$$

O Domínio efetivo da  $f$  é o conjunto  $D(f) = \{x \in H; f(x) < \infty\}$ .

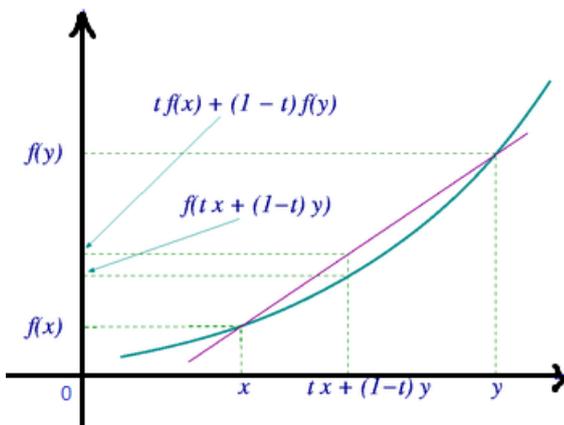


Figura 1.6: Função convexa.

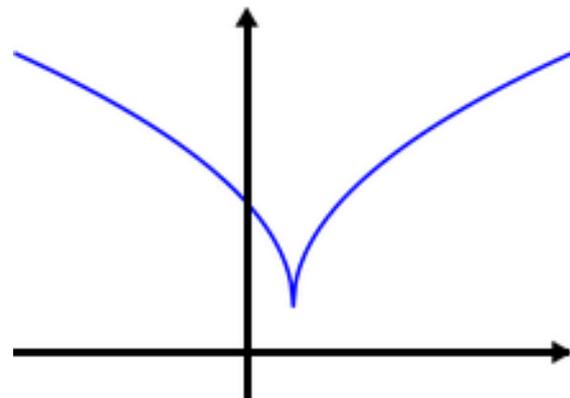


Figura 1.7: Função não convexa.

**Exemplo 1.9.** *Qualquer semi-espaço em  $\mathbb{R}^n$ , i.e., um conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq c\}$ , onde  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $c \in \mathbb{R}$  é convexo em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Exemplo 1.10.** A função  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = |x|$  é convexa. Com efeito, para todo  $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , tem-se

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) = |\alpha x + (1 - \alpha)y| \leq |\alpha||x| + |1 - \alpha||y| = \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y).$$

A definição a seguir será útil para os resultados apresentados no capítulo 3.

**Definição 1.20** ([17], p.28). Seja  $K \subset H$  convexo a função  $\delta_K : K \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\delta_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in K \\ +\infty & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

é chamada função indicadora de  $K$ .

Um resultado interessante a respeito da função indicadora é o fato de seu subdiferencial ser o cone normal definido anteriormente nesta seção. De fato, seja  $v \in \partial\delta_K(x)$  então

(i) Se  $x \notin K$  então  $\delta_K(x) = +\infty$  daí  $\delta_K(y) \geq +\infty \forall y \in K$  absurdo. Logo,  $\partial\delta_K(x) = \emptyset$ .

(ii) Se  $x \in K$  então  $\delta_K(x) = 0$  assim,

$$\delta_K(y) \geq \langle v, y - x \rangle \quad \forall y \in H.$$

Do caso (ii) ainda podemos obter duas situações:

1) Se  $y \notin K$  então  $\langle v, y - x \rangle \leq +\infty$ .

2) Se  $y \in K$  então  $\delta_K(y) = 0$  logo,  $\langle v, y - x \rangle \leq 0$ .

Assim, podemos definir o subdiferencial da função indicadora como sendo

$$\partial\delta_K(x) = \begin{cases} v \in H; \langle v, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K & \text{se } x \in K \\ \emptyset & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

**Teorema 1.10** (Desigualdade de Jensen). Sejam  $K \subset H$  convexo,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. Para qualquer coleção  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de pontos em  $K$  e qualquer coleção de números  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  com  $\alpha_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n$  e  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ , tem-se

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

*Demonstração.* A prova será feita por indução sobre  $n$ . Para  $n = 2$  o resultado é trivial e segue da definição de função convexa. Suponha que seja verdade para  $n = k$ , então

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) \text{ onde } \sum_{i=1}^k \alpha_i \in (0, 1). \text{ Verificamos agora, para } n = k+1, \text{ se } \alpha_{k+1} = 1$$

então  $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_k = 0$  e segue o resultado. Caso contrário, tome  $t = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i}{1 - \alpha_{k+1}} = \sum_{i=1}^k s_i x_i$  onde  $s_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}}$ .

Temos que  $s_i \in (0, 1)$  e  $\sum_{i=1}^k s_i = 1$ . Logo  $y \in K$ , assim

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i\right) \leq f\left((1 - \alpha_{k+1})t + \alpha_{k+1}x_{k+1}\right) \leq (1 - \alpha_{k+1})f(t) + \alpha_{k+1}f(x_{k+1})$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(t) = f(s_1 x_1 + \dots + s_k x_k) &\leq s_1 f(x_1) + \dots + s_k f(x_k) \\ &\leq \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_{k+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} f(x_k). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i\right) &\leq (1 - \alpha_{k+1})s_1 f(x_1) + \dots + (1 - \alpha_{k+1})s_k f(x_k) + \alpha_{k+1}f(x_{k+1}) \\ &\leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1}f(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i f(x_i). \end{aligned}$$

■

A seguir apresentamos uma definição que enfraquece a definição de continuidade mas, ainda sim, garante bons resultados quanto a existência de minimizador para uma função convexa.

**Definição 1.21** ([3], p.13). *Uma função  $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  é dita semicontínua inferiormente no ponto  $\bar{x} \in H$ , quando para qualquer sequência  $\{x^k\} \subset H$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$ , tem-se*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \geq f(\bar{x}).$$

*Nas mesmas condições,  $f$  é dita semicontínua superiormente em  $\bar{x} \in H$  quando*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \leq f(\bar{x}).$$

*A função  $f$  é semicontínua inferiormente (superiormente) no conjunto  $H$ , quando ela é semicontínua inferiormente (superiormente) em todos os pontos de  $H$ .*

Convém observar que se  $f$  é uma função contínua em  $H$ , então  $f$  é semicontínua superiormente e inferiormente em  $H$ . Apenas a condição de ser semicontínua inferior ou superior não garante que  $f$  seja contínua, de fato, isto ocorre no seguinte exemplo.

**Exemplo 1.11.** Considere a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vemos que  $g$  é semicontínua superiormente em  $x = 0$ , porém  $g$  não é contínua neste ponto.

Agora enfraquecemos ainda mais a noção de continuidade através da seguinte definição:

**Definição 1.22** ([17]). Uma função  $f: H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  é dita fracamente semicontínua inferiormente no ponto  $\bar{x} \in H$ , quando para qualquer sequência  $\{x^k\} \subset H$  tal que  $x^k \rightarrow x$ , tem-se

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \geq f(\bar{x}).$$

Uma função  $f: H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  é dita fracamente semicontínua superiormente no ponto  $\bar{x} \in H$ , quando para qualquer sequência  $\{x^k\} \subset H$  tal que  $x^k \rightarrow x$ , tem-se

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \leq f(\bar{x}).$$

**Teorema 1.11.** Assuma que  $f: H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  é convexa e semicontínua inferiormente. Então  $f$  é fracamente semicontínua inferiormente.

*Demonstração.* Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  o conjunto  $A = \{x \in H; f(x) \leq \lambda\}$  é convexo e fechado na topologia forte. Pelo Teorema 1.7  $A$  é fechado na topologia fraca e portanto,  $f$  é fracamente semicontínua inferiormente. ■

**Teorema 1.12.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $K \subset H$  não vazio, fechado e convexo. Seja  $f: K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  uma função convexa e semicontínua inferiormente tal que  $f \neq +\infty$  e  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  para  $x \in K$ . Então  $f$  atinge o mínimo em  $K$ , isto é, existe algum  $x_0 \in K$  tal que  $f(x_0) = \min_K f$ .

*Demonstração.* Fixe  $a \in K$  tal que  $f(a) < +\infty$  e considere  $\tilde{K} = \{x \in K; f(x) \leq f(a)\}$ ,  $\tilde{K}$  é fechado, convexo e limitado, pelo Teorema 1.8  $\tilde{K}$  é compacto na topologia fraca. Por outro lado  $f$  é fracamente semicontínua inferiormente. Então  $f$  atinge mínimo em  $\tilde{K}$ , isto é, existe  $x_0 \in \tilde{K}$  tal que:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \tilde{K}$$

. Se  $x$  não pertence a  $\tilde{K}$  temos

$$f(x) > f(a)$$

Então,  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x \in K$ . ■

## 1.4 Subdiferencial de uma função convexa

A seguir apresentamos um conceito muito importante que estende a noção de diferenciabilidade, o subdiferencial de uma função. Em nosso trabalho estamos interessados no

subdiferencial de funções convexas, também é possível defini-lo para funções quaisquer porém as propriedades fortes são obtidas partindo da hipótese de a função ser convexa.

**Definição 1.23** ([17]). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert, diremos que uma função  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  é subdiferenciável em  $u$  se existir  $u^* \in H^*$  tal que*

$$f(v) \geq f(u) + \langle u^*, v - u \rangle \forall u \in H$$

$u^*$  é dito subgradiente de  $f$  em  $u$  e o conjunto dos subgradientes de  $f$  em  $u$  é chamado subdiferencial de  $f$  em  $u$ , sendo denotado por  $\partial f(u)$ .

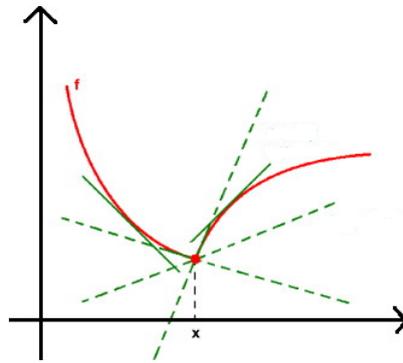


Figura 1.8: Subgradientes de uma função  $f$ .

**Exemplo 1.12.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = |x|$ , vamos verificar quem é o subdiferencial de  $f$  em  $x = 0$ . A função  $f$  é naturalmente convexa, para  $x \neq 0$  e  $f$  é diferenciável em  $x$  com derivadas 1 para  $x > 0$  e  $-1$  para  $x < 0$ . Para  $x = 0$  a função  $f$  não é diferenciável, entretanto deve haver subgradientes uma vez que 0 pertence ao domínio da  $f$ . De fato,*

$$\partial|x| = \begin{cases} \{1\} & \text{se } x > 0 \\ \{-1\} & \text{se } x < 0 \\ [-1, 1] & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

**Teorema 1.13.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções convexas, semicontínuas inferiormente e próprias em  $H$  tais que  $\text{int}(D(f) \cap D(g)) \neq \emptyset$ . Então*

$$\partial(f + g) = \partial f + \partial g$$

*Demonstração.* A inclusão  $\partial f + \partial g \subset \partial(f + g)$  é imediata, então basta provar que  $\partial(f + g) \subset \partial f + \partial g$ . Seja  $x_0 \in D(\partial f) \cap D(\partial g)$  e  $w \in \partial(f + g)(x_0)$  um ponto arbitrário porém fixo. Vamos mostrar que  $w = w_1 + w_2$ , onde  $w_1 \in \partial f(x_0)$  e  $w_2 \in \partial g(x_0)$ . Sem perda de generalidade podemos assumir que  $x_0 = 0$ ,  $w = 0$ ,  $f(0) = g(0) = 0$ . Podemos conseguir isso substituindo

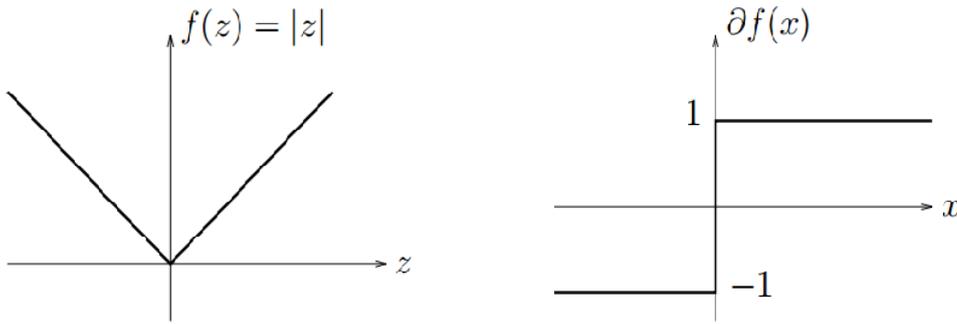


Figura 1.9: Gráfico e subgradientes da função modular.

$f$  e  $g$  por  $x \rightarrow f(x + x_0) - f(x_0) - \langle z_1, x \rangle$  e  $x \rightarrow g(x + x_0) - g(x_0) - \langle z_2, x \rangle$ , respectivamente. Para provarmos que  $0 \in \partial f(0) + \partial g(0)$  consideremos os conjuntos

$$E_1 = \{(x, \lambda) \in H \times \mathbb{R}; f(x) \leq \lambda\}$$

$$E_2 = \{(x, \lambda) \in H \times \mathbb{R}; g(x) \leq -\lambda\}$$

Como  $0 \in \partial(f + g)(0)$  segue que

$$0 = (f + g)(0) = \inf\{f(x) + g(x); x \in H\}$$

e assim  $E_1 \cap \text{int}(E_2) = \emptyset$ . Pelo Teorema de Hahn - Banach existe um hiperplano fechado em  $H \times \mathbb{R}$  que separa  $E_1$  e  $E_2$ . Em outras palavras, existe  $\langle w, \alpha \rangle \in H \times \mathbb{R}$  tal que

$$\langle x, w \rangle + \alpha \lambda \leq 0 \quad \forall (x, \lambda) \in E_1$$

$$\langle x, w \rangle + \alpha \lambda \geq 0 \quad \forall (x, \lambda) \in E_2$$

O hiperplano é não vertical, isto é,  $\alpha \neq 0$  pois, segue das últimas desigualdades que o hiperplano  $\{x \in H; \langle x, w \rangle = 0\}$  separa  $D(f)$  e  $D(g)$ . Para sermos mais específicos suponha que  $\alpha = 1$ . Então temos

$$\langle x, w \rangle \leq -\lambda \leq -f(x) \quad \forall x \in D(f)$$

$$\langle x, w \rangle \geq -\lambda \leq g(x) \quad \forall x \in D(g)$$

Assim,  $-w \in \partial f(0)$ ,  $w \in \partial g(0)$  como queríamos. ■

Em termos de caracterização de pontos de mínimo absoluto de uma função, a subdiferenciabilidade é até melhor que a diferenciabilidade.

**Teorema 1.14** (Condição necessária e suficiente para minimizar funções convexas.). *Um ponto  $x^* \in \text{dom } f$  é o minimizador de  $f$  se, e somente se,  $0 \in \partial f(x^*)$*

*Demonstração.* Suponha que  $0 \in \partial f(x^*)$ , temos pela definição de subgradiente que:

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle 0, x - x^* \rangle = f(x^*)$$

para todo  $x \in \text{dom } f$ . Por outro lado, se  $f(x) \geq f(x^*)$  para todo  $x \in \text{dom } f$ , temos pela definição de subgradiente que  $0 \in \partial f(x^*)$  ■

**Teorema 1.15.** *Sejam  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa e  $K \subset H$  um conjunto convexo. Então  $\bar{x} \in H$  é um minimizador de  $f$  em  $K$  se, e somente se,*

$$\exists v \in \partial f(\bar{x}) \text{ tal que } \langle v, y - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$$

ou, equivalentemente,

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + N_K(\bar{x})$$

*Demonstração.* Ver [17]. ■

Subgradientes de funções convexas têm um papel importante na teoria e métodos numéricos para programação convexa, são substitutos bastante razoáveis para os gradientes. As principais propriedades dos subgradientes estão resumidas na seguinte proposição:

**Proposição 1.3.** *Seja  $f$  uma função convexa e  $x \in \text{dom } f$ . Então:*

(i)  $\partial f(x)$  é não vazio, convexo, fechado e limitado.

(ii) Se  $f$  é diferenciável em  $x$ , então o subdiferencial é simplesmente o gradiente de  $f$  em  $x$ .

*Demonstração.* Ver: [17]. ■

## 1.5 Operador monótono maximal

Nesta seção definimos o que é um operador monótono maximal, damos exemplos e verificamos as principais propriedades a ele relacionadas. Vamos iniciar nosso trabalho definindo o que é um operador monótono.

**Definição 1.24.** *Seja  $T : H \rightarrow H$  um operador, diremos que  $T$  é um operador monótono se*

$$\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in H.$$

**Exemplo 1.13.** *Tomando  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo uma transformação linear semidefinida positiva, isto é,  $\langle x, T(x) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , temos*

$$\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle = \langle x - y, T(x - y) \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in H.$$

**Definição 1.25** ([6],p.6). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . O operador  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$  é dito operador monótono se:*

$$\langle z - z', w - w' \rangle \geq 0 \quad w \in T(z), w' \in T(z')$$

*Dizemos que  $T$  é um operador monótono maximal se adicionarmos a seguinte hipótese: o gráfico*

$$G(T) = \{(z, w) \in H \times H; w \in T(z)\}$$

*não está propriamente contido no gráfico de nenhum operador monótono  $T' : H \rightarrow H$*

**Definição 1.26** ([6],p.6). *Diremos que  $z$  é um zero de um operador  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$  se  $0 \in T(z)$*

**Exemplo 1.14.** *Considere a bifunção  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = y^2 - x^2$ , observe que o subdiferencial da função  $f(x, \cdot)$  para  $x \in \mathbb{R}$  é um operador monótono. De fato, definindo a função  $g_x = f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  temos que  $z \in \mathbb{R}$  é o subgradiente da função  $g_x(x)$  implica em*

$$g_x(y) \geq g_x(x) + \langle z, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

*Pela definição da  $f$  obtemos,  $y^2 - x^2 \geq z(y - x) \quad \forall y \in \mathbb{R}$ . Daí, temos três casos a avaliar:*

*(i) Se  $y = x$ , então a desigualdade é satisfeita para qualquer valor  $y \in \mathbb{R}$ ;*

*(ii) Se  $y \leq x$ , então  $y - x \leq 0$  o que implica em  $y + x \leq z$  daí,  $2x \leq z$ .*

*(iii) Se  $y \geq x$ , então  $y - x \geq 0$  o que implica em  $y + x \geq z$  daí,  $2x \geq z$ .*

*Dos itens (ii) e (iii) concluímos que*

$$\partial g_x(x) = \{z \in \mathbb{R}; z = 2x, x \in \mathbb{R}\}$$

*Agora vamos verificar a monotonicidade do operador subdiferencial. Tomando  $v \in \partial g_x(x)$  e  $u \in \partial g_x(y)$  obtemos que*

$$\langle 2x - 2y, x - y \rangle = 2 \langle x - y, x - y \rangle = 2(x - y)^2 \geq 0$$

Observe que nesse exemplo o subdiferencial da função  $f$  coincidiu com a derivada da função, através desse exemplo conseguimos a motivação para o próximo teorema.

**Teorema 1.16** ([17]). *Uma função convexa  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $x \in K$  se, e somente se, o conjunto  $\partial f(x)$  contém um único elemento. Neste caso,*

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

A seguir apresentamos um teorema em que verificamos que o subdiferencial de uma função convexa, semicontínua inferior é um operador monótono, destacamos esse operador pois será de suma importância no decorrer de nosso trabalho.

**Teorema 1.17.** *Seja  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  convexa, então  $\partial f$  é um operador monótono.*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in K$  tais que  $u \in \partial f(x)$  e  $v \in \partial f(y)$ . Temos pela definição de subdiferencial que:

$$f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle \quad (1.2)$$

para todo  $y \in H$ , de forma análoga

$$f(x) \geq f(y) + \langle v, x - y \rangle \quad (1.3)$$

para todo  $x \in H$ , somando (1.2) de (1.3) obtemos:

$$0 \leq \langle u - v, x - y \rangle \quad (1.4)$$

■

## 1.6 Método de ponto proximal para operador monótono maximal

Sendo um algoritmo conceitual para minimização de funções convexas, não necessariamente diferenciáveis, o método de ponto proximal foi estudado inicialmente para determinar zeros de um operador monótono maximal arbitrário. Atualmente esse método tem sido intensamente estudado e já possui algumas variações onde a hipótese de convexidade da função tem sido enfraquecida.

**Método de Ponto Proximal (MPP)** Para  $g : H \rightarrow \mathbb{R}$  tome uma sequência de parâmetros de regularização  $0 < \gamma^k \leq \tilde{\gamma}$  com  $\tilde{\gamma} > 0$ .

**Passo 1.** Escolha  $x^0 \in H$ .

**Passo 2.** Dado  $x^k$  o iterando  $x^{k+1}$  é obtido seguindo a igualdade abaixo:

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{x \in K} \{g(x) + \gamma^k D(x, x^k)\} \quad (1.5)$$

onde  $D(x, x^k)$  é a distância de  $x$  a  $x^k$ . Conforme variamos a forma de calcular essa distância obtemos variações do MPP.

Se usamos  $D_h(x, x^k)$ , onde  $h$  é a função de Bregman estamos no método de ponto proximal com distância de Bregman. Como estamos trabalhando em espaços de Hilbert, cuja norma é induzida pelo produto interno, podemos assumir  $D(x, x^k) = \|x - x^k\|^2$ . Ao tomarmos

$D(x, x^k) = \|x - x^k\|^2$  e  $K = \mathbb{R}^n$  estamos no método de ponto proximal para otimização em  $\mathbb{R}^n$ .

**Método de Ponto Proximal para Operador Monótono Maximal (MPPOMM)**

Tomando o operador  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$  monótono maximal,  $\bar{x} \in H$  tal que  $0 \in T(\bar{x})$  tome uma sequência de parâmetros de regularização  $0 < \gamma^k \leq \tilde{\gamma}$  com  $\tilde{\gamma} > 0$ .

**Passo 1.** Escolha  $x^0 \in H$ .

**Passo 2.** Dado  $x^k$  o iterando  $x^{k+1}$  é obtido da seguinte forma:

$$x^{k+1} \in (I + \frac{1}{\gamma^k}T)^{-1}(x^k) \quad (1.6)$$

Para que a iteração que define o método de ponto proximal para um operador monótono maximal faça sentido, vamos definir alguns conceitos.

**Definição 1.27** ([6],p.8). Diremos que  $T : H \rightarrow H$  é firmemente não-expansivo se

$$\|T(x) - T(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(x - y) - (T(x) - T(y))\|^2$$

para todo  $x, y \in H$ .

Da forma como definimos a iteração do método de ponto proximal temos que, dado  $x^k$  o iterando  $x^{k+1}$  é obtido da seguinte forma  $x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{x \in K} \{g(x) + \gamma^k D(x, x^k)\}$  o que implica em

$$0 \in \partial g(x^{k+1}) + \{2\gamma^k(x^k - x^{k+1})\} \iff 2\gamma^k(x^{k+1} - x^k) \in \partial g(x^{k+1})$$

segue que

$$x^{k+1} \in (I + \frac{1}{\gamma^k}\partial g)^{-1}(x^k)$$

**Teorema 1.18** (Teorema de Minty). Se  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$  é um operador monótono maximal e  $\mu > 0$  então  $I + \mu T$  é injetivo, sobrejetivo e  $(I + \mu T)^{-1}$  é firmemente não-expansivo.

*Demonstração.* Ver: [13] ■

O teorema de Minty garante que, se  $T$  é um operador monótono maximal então a sentença  $y \in T(x)$  tem solução para todo  $x$ .

**Lema 1.1** ([6], p.11). Se  $y^k \rightarrow \bar{y}$ ,  $z^k \rightarrow \bar{z}$ ,  $T$  é um operador monótono maximal e  $y^k \in T(z^k)$  então  $\bar{y} \in T(\bar{z})$ .

*Demonstração.* É suficiente provar que:

$$\langle y - \bar{y}, z - \bar{z} \rangle \geq 0 \quad \forall z, \forall y \in T(z) \quad (1.7)$$

Sabemos que

$$\langle y - y^k, z - z^k \rangle \geq 0 \quad \forall z, \forall y \in T(z) \quad (1.8)$$

Pelo Teorema de Banach-Steinhaus a sequência  $\{z^k\}$  é limitada. Seja  $u^k = y - y^k, v^k = z - z^k$ ,  $u = y - \bar{y}, v = z - \bar{z}$ , então  $\{v^k\}$  é limitada,  $u^k \rightarrow u$ , quando  $k \rightarrow \infty$  e  $v^k \rightarrow v$ . Temos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle u^k, v^k \rangle = \langle u, v \rangle$ :

$$|\langle u^k, v^k \rangle - \langle u, v \rangle| = |\langle u^k - u, v^k \rangle + \langle u, v^k - v \rangle| \quad (1.9)$$

$$\leq \|u^k - u\| \|v^k\| + |\langle u, v^k - v \rangle|. \quad (1.10)$$

O lado direito da desigualdade (1.10) converge para 0, o lado esquerdo de (1.8) converge para o lado esquerdo de (1.7). Então (1.7) segue de (1.8). ■

**Teorema 1.19** ([6], p.12). *Seja  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$  um operador monótono maximal e  $\bar{x} \in H$  tal que  $0 \in T(\bar{x})$  então a sequência*

$$x^0 \in H \quad (1.11)$$

$$x^{k+1} \in (I + \frac{1}{\gamma^k} T)^{-1}(x^k) \quad (1.12)$$

com  $0 < \gamma^k < \bar{\gamma}$ , converge fracamente para um único ponto  $x^* \in H$  tal que  $0 \in T(x^*)$ .

*Demonstração.* A prova do teorema será dividida em 4 passos.

**PASSO 1.** A sequência  $\{x^k\}$  está bem definida.

Segue pelo Teorema de Minty que a sequência  $\{x^k\}$  está bem definida.

**PASSO 2.**  $\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - \|x^{k+1} - x^k\|^2$  para todo  $k$  e todo  $\bar{x}$  tal que  $0 \in T(\bar{x})$ .

Seja  $\bar{x} \in H$  tal que  $0 \in T(\bar{x})$ . Temos

$$\begin{aligned} \|x^k - \bar{x}\|^2 &= \langle x^k - x^{k+1} + x^{k+1} - \bar{x}, x^k - x^{k+1} + x^{k+1} - \bar{x} \rangle \\ &= \|x^k - x^{k+1}\|^2 + 2\langle x^k - x^{k+1}, x^{k+1} - \bar{x} \rangle + \|x^{k+1} - \bar{x}\|^2, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\|x^k - x^{k+1}\|^2 = \|x^k - \bar{x}\|^2 - \frac{1}{\gamma^k} \langle 2\gamma^k(x^k - x^{k+1}), x^{k+1} - \bar{x} \rangle - \|x^{k+1} - \bar{x}\|^2$$

Por hipótese  $0 \in T(\bar{x})$  e  $2\gamma^k(x^k - x^{k+1}) \in T(x^{k+1})$ . Sendo  $T$  monótono temos que

$$\langle 2\gamma^k(x^k - x^{k+1}), x^{k+1} - \bar{x} \rangle \geq 0$$

donde obtemos

$$0 \leq \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}\|^2$$

**PASSO 3.**  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x^{k+1} - x^k) = 0$ .

Do passo 2

$$0 \leq \|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}\|^2. \quad (1.13)$$

Como  $\{\|x^k - \bar{x}\|\}$  é decrescente e não negativa, é convergente. Logo, o lado direito de (1.13) acima converge para 0. Segue o resultado.

**PASSO 4.** Todo ponto de acumulação fraco da sequência  $\{x^k\}$  é um zero de  $T$ .

Temos pelo Teorema de Bourbaki- Alaoglu, que existe um ponto de acumulação fraco de  $\{x^k\}$  e por:

$$\gamma_{j_k}(x^{j_k} - x^{j_{k+1}}) \in T(x^{j_{k+1}}) \quad (1.14)$$

onde  $x^{j_k}$  é uma subsequência de  $\{x^k\}$  tal que  $x^{j_k} \rightharpoonup \hat{x}$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Pelo passo 3, temos  $x^{j_{k+1}} \rightharpoonup \hat{x}$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Tomando o limite em (1.14) e aplicando o Lema 1.1 em (1.17), observando que  $\gamma_{j_k}(x^{j_k} - x^{j_{k+1}}) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , pelo passo 3 temos que  $0 \in T(\hat{x})$ , o que completa a prova do passo 4.

Verificamos agora a unicidade desse ponto de acumulação fraco de  $\{x^k\}$ . Suponha que existam  $\hat{x}$  e  $\tilde{x}$  dois pontos de acumulação fraca de  $\{x^k\}$ . Pelo passo 4,  $0 \in T(\hat{x})$  e  $0 \in T(\tilde{x})$ , pelo passo 2,  $\{\|x^k - \hat{x}\|\}$  e  $\{\|x^k - \tilde{x}\|\}$  converge, para  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente. Então

$$\|x^k - \tilde{x}\|^2 = \|x^k - \hat{x}\|^2 + \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 + 2\langle x^k - \hat{x}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle.$$

Tomando o limite na igualdade acima quando  $k \rightarrow \infty$  temos

$$2\langle x^k - \hat{x}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle \rightarrow \alpha^2 - \beta^2 - \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2.$$

Como  $x^{l_k} \rightharpoonup \hat{x}$  quando  $k \rightarrow \infty$  para alguma subsequência  $\{x^{l_k}\}$  temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^{l_k} - \hat{x}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle = 0$$

e então

$$\|\hat{x} - \tilde{x}\| = \alpha^2 - \beta^2. \quad (1.15)$$

De forma similar

$$\|x^k - \hat{x}\|^2 = \|x^k - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 + 2\langle x^k - \tilde{x}, \tilde{x} - \hat{x} \rangle$$

então

$$2\langle x^k - \tilde{x}, \tilde{x} - \hat{x} \rangle \rightarrow \beta^2 - \alpha^2 - \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2$$

o que implica em

$$\|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 = \beta^2 - \alpha^2 \quad (1.16)$$

De (1.15) e (1.16) segue que  $\|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 = 0$ , isto é, existe um único ponto de acumulação fraco. ■

Pelo teorema anterior garantimos que para o operador monótono maximal  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$ , o algoritmo de ponto proximal gera uma sequência  $\{x^k\} \subset H$ , iniciando em algum

$x^0 \in H$  e definindo  $x^{k+1}$  como o único zero do operador  $T^k$  definido por:

$$T^k(x) = T(x) + \gamma_k(x - x^k), \quad (1.17)$$

onde  $\{\gamma_k\}$  é uma sequência de números reais positivos e limitada, chamada regularização de coeficientes.

# Capítulo 2

## Problema de Equilíbrio

Neste capítulo apresentamos o problema de equilíbrio clássico, alguns exemplos, propriedades referente a monotonicidade de função, uma regularização para  $f$  e algumas condições que garantem existência de solução para  $\text{PE}(f, K)$ .

### 2.1 O problema de equilíbrio clássico

Inicialmente abordado em 1994 em [2] por Eugen Blum e Von Werner Oettli, o problema de equilíbrio surgiu pela necessidade de minimizar problemas que aparecem em equilíbrio econômico. O formato adotado em [2] para o problema de equilíbrio é de suma importância pois possui como casos particulares o problema de minimização convexa, problema de ponto fixo, problema de complementariedade, problema de desigualdade variacional e o problema de equilíbrio de Nash em jogos não cooperativos. Lembramos que salvo menção contrária  $H$  denota um espaço de Hilbert.

**Problema de Equilíbrio (PE) :** O problema de equilíbrio denotado por  $\text{PE}(f, K)$  consiste em:

$$\text{Encontrar } \bar{x} \in K \text{ tal que } f(\bar{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Onde  $K \subset H$  é convexo, fechado e  $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$P_1 : f(x, x) = 0 \quad \forall x \in K.$$

$$P_2 : f(\cdot, y) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ é semicontínua superiormente } \forall y \in K.$$

$$P_3 : f(x, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ é convexa e semicontínua inferiormente } \forall x \in K.$$

Denotamos por  $S(f, K)$  o conjunto solução de  $\text{PE}(f, K)$ . Com o objetivo de garantir existência de solução para  $\text{PE}(f, K)$  foi introduzida a seguinte propriedade:

$$P_5 : \text{Para qualquer sequência } \{x^n\} \subset K \text{ satisfazendo } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\| = +\infty \text{ existe } u \in K \text{ e } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f(x^n, u) \leq 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

A importância de se estudar problemas de equilíbrio está justamente na quantidade de problemas importantes na literatura que podem ser reformulados em termos desse problema.

Abaixo temos alguns exemplos de problemas de grande interesse para a otimização, que podem ser reescritos no formato de um problema de equilíbrio.

**Exemplo 2.1.** *O Problema de Minimização Convexa (PMC): O PMC consiste em:*

$$\text{Encontrar } \bar{x} \in K \text{ tal que } h(\bar{x}) \leq h(x) \quad \forall x \in K.$$

Onde  $h : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente. Colocamos PMC na formulação de equilíbrio tomando  $f(x, y) = h(y) - h(x)$ .

A verificação de que  $f$  satisfaz  $P_1, P_2$  e  $P_3$  decorre das hipóteses satisfeitas pela  $h$ . De fato,

$$P_1 : \text{ Por definição } f(x, x) = h(x) - h(x) = 0 \quad \forall x \in K.$$

$P_2$  : Devemos mostrar que  $f(\cdot, y) : K \rightarrow \mathbb{R}$  é semicontínua superiormente para todo  $y \in K$ . Para tanto, sejam  $y_0$  qualquer e fixo em  $K$ ,  $\{x^k\} \subset K$  tal que  $x^k \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Como  $h$  é semicontínua inferiormente, segue que  $-h$  é semicontínua superiormente, ou seja,

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k, y_0) &= h(y_0) - \limsup_{k \rightarrow \infty} h(x^k) \\ &\leq h(y_0) - h(x) = f(x, y_0). \end{aligned}$$

Logo,  $f$  satisfaz  $P_2$ .

$P_3$  : Devemos provar que  $f(x, \cdot)$  é semicontínua inferiormente para todo  $x \in K$  e convexa. Verificamos primeiro a convexidade da  $f$ , sejam  $x_0 \in K$  qualquer e fixo,  $y, \bar{y} \in K$  e  $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} f(x_0, ty + (1-t)\bar{y}) &= h(ty + (1-t)\bar{y}) - h(x_0) \\ &\leq th(y) + (1-t)h(\bar{y}) - th(x_0) - (1-t)h(x_0) \\ &= t(h(y) - h(x_0)) + (1-t)(h(\bar{y}) - h(x_0)) = tf(x_0, y) + (1-t)f(x_0, \bar{y}) \end{aligned}$$

Para verificar a semicontinuidade inferior da  $f$  usaremos a hipótese da  $h$  ser semicontínua inferiormente. Sejam  $x_0 \in K$  fixo e  $\{y^k\} \subset K$  tal que  $y^k \rightarrow y$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_0, y^k) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} h(y^k) - h(x_0) \\ &\geq h(y) - h(x_0) = f(x_0, y). \end{aligned}$$

Observamos ainda que, o ponto  $\bar{x}$  resolve PMC se, e somente se,  $h(\bar{x}) \leq h(y)$  para todo  $y \in K$ . Como  $f(\bar{x}, y) = h(y) - h(\bar{x})$  isso equivale a  $f(\bar{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in K$ . Isto é,  $\bar{x}$  resolve  $PE(f, K)$ .

**Exemplo 2.2.** *O Problema de Desigualdade Variacional (PDV): O PDV consiste em:*

$$\text{Encontrar } \bar{x} \in K \text{ tal que } \langle F(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Onde  $F : K \rightarrow K$  um operador contínuo e  $\emptyset \neq K \subset H$  um conjunto fechado e convexo. Seja  $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle \quad \forall (x, y) \in K \times K$ . Afirmamos que se  $F$  é monótono e contínuo, então a  $f$  satisfaz  $P_1, P_2, P_3$  como segue:

$$P_1 : \text{ Por definição } f(x, x) = \langle F(x), x - x \rangle = 0 \quad \forall x \in K.$$

$P_2$  : Observe que  $F$  é contínuo o que implica  $f$  contínua, logo semicontínua superiormente para todo  $y \in K$ .

$P_3$  : Note que para cada  $x^0 \in K$  fixo, temos que  $f(x^0, y) = \langle F(x^0), y - x^0 \rangle$  é afim na variável  $y$ . Portanto,  $f$  é convexa e semicontínua inferiormente para cada  $x^0 \in K$  assim, satisfaz  $P_3$ .

O ponto  $\bar{x}$  resolve o problema  $PE(f, K)$  se, e somente se,  $f(\bar{x}, y) = \langle F(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0$  para todo  $y \in K$ . O que é equivalente a ,  $\bar{x}$  resolver o problema  $PE(f, K)$ .

**Exemplo 2.3.** *O Problema de Complementariedade (PC): O PC é definido como:*

$$\text{Encontrar } \bar{x} \in K \text{ tal que } T(\bar{x}) \in K_+ \text{ e } \langle T(\bar{x}), \bar{x} \rangle = 0 \text{ para todo } x \in K.$$

Onde  $K$  é um cone convexo, fechado e  $K_+ = \{x \in H^*; \langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K\}$  é o seu cone polar,  $H^*$  é o dual de  $H$  e  $T : K \rightarrow H^*$  um operador contínuo. Seja  $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = \langle T(x), y - x \rangle \quad \forall (x, y) \in K \times K$ . Da forma como foi definida a  $f$  satisfaz  $P_1, P_2, P_3$  como segue:

$$P_1 : \text{ Por definição } f(x, x) = \langle T(x), x - x \rangle = 0 \quad \forall x \in K.$$

$P_2$  : Sejam  $y_0 \in K$  fixo e  $\{x^k\} \subset K$  tal que  $x^k \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k, y_0) &= \left\langle \limsup_{k \rightarrow \infty} T(x^k), y_0 - \limsup_{k \rightarrow \infty} x^k \right\rangle \\ &\leq \langle T(x), y_0 - x \rangle = f(x, y_0). \end{aligned}$$

$P_3$  : Sejam  $x_0 \in K$  fixo e  $\{y^k\} \subset K$  tal que  $y^k \rightarrow y$  quando  $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_0, y^k) &= \left\langle T(x_0), \liminf_{k \rightarrow \infty} y^k - x_0 \right\rangle \\ &\leq \langle T(x_0), y - x_0 \rangle = f(x_0, y). \end{aligned}$$

Para a convexidade, sejam  $y, \bar{y} \in K$  e  $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} f(x_0, ty + (1-t)\bar{y}) &= \langle T(x_0), tx + (1-t)x - ty - (1-t)\bar{y} \rangle \\ &= t \langle T(x_0), x - y \rangle + (1-t) \langle T(x_0), x - \bar{y} \rangle = tf(x_0, y) + (1-t)f(x_0, \bar{y}). \end{aligned}$$

O ponto  $\bar{x}$  resolve o problema PC se, e somente se,  $T(\bar{x}) \in K_+$  e  $\langle T(\bar{x}), \bar{x} \rangle = 0$ . O que equivale a,

$$f(\bar{x}, y) = \langle T(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle = \langle T(\bar{x}), y \rangle - \langle T(\bar{x}), \bar{x} \rangle = \langle T(\bar{x}), y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$$

pois,  $T(\bar{x}) \in K_+$ . O que por sua vez equivale a dizer que  $\bar{x}$  resolve o problema PE( $f, K$ ).

Também é possível formular no contexto de equilíbrio os problemas de ponto fixo e o de equilíbrio de Nash em jogos não corporativos. Para maiores detalhes ver [2].

Abaixo temos dois problemas muito importantes para o estudo de problemas de equilíbrio.

**Problema de Viabilidade Convexa (PVC):** Consiste em:

$$\text{Encontrar } \bar{x} \in \bigcap_{y \in K} L_f(y) \text{ onde } L_f(y) = \{x \in K; f(y, x) \leq 0\}.$$

Note que para cada  $y \in K$ ,  $L_f(y)$  é não vazio, convexo e fechado pois  $f(y, y) = 0 \quad \forall y \in K$ , a função  $f$  é semicontínua inferiormente e convexa na segunda variável, e  $K$  é fechado e convexo.

O PVC é um problema auxiliar para PE( $f, K$ ), basta observar que o conjunto solução de PVC é um subconjunto do conjunto solução de PE( $f, K$ ). De fato, seja  $\bar{x}$  uma solução do PVC e  $y \in K$ , defina  $w_t = ty + (1-t)\bar{x}$  para  $t \in (0, 1)$ . Então

$$0 = f(w_t, w_t) = tf(w_t, y) + (1-t)f(w_t, \bar{x}).$$

Mas,  $f(w_t, \bar{x}) \leq 0$  pois  $\bar{x} \in \bigcap_{y \in K} L_f(y)$  e  $w_t \in K$ . Então  $0 \leq tf(w_t, y)$  para todo  $t \in (0, 1)$  o que implica em  $0 \leq f(w_t, y)$ , tomando o limite quando  $t \rightarrow \infty$  temos  $f(\bar{x}, y) \geq 0$ . Assim,  $\bar{x}$  pertence ao conjunto solução de PE( $f, K$ ).

Para o desenvolvimento desse trabalho vamos assumir o dual do problema de equilíbrio como sendo o conjunto definido abaixo.

**Problema dual de PE( $f, K$ ):** Consiste em:

$$\text{Encontrar } \bar{y} \in K \text{ tal que } f(x, \bar{y}) \leq 0 \text{ para todo } x \in K,$$

denotamos seu conjunto solução por  $S^d(f, K)$ .

## 2.2 Existência de solução para $PE(f, K)$

Nesta seção definimos uma regularização para  $f$  e obtemos resultados que garantem existência de solução para  $PE(f, K)$  utilizando de algumas propriedades referentes a monotonicidade da  $f$ . Abaixo listamos as propriedades referentes a monotonicidade que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

$P_4$  (Monotonicidade):  $f(x, y) + f(y, x) \leq 0 \quad \forall x, y \in K$ .

$P_4^*$  (Pseudomonotonicidade): Se  $f(x, y) \geq 0$  com  $x, y \in K$ , então  $f(y, x) \leq 0$ .

$P_4^\bullet$  (Submonotonicidade): Existe  $\theta \geq 0$  tal que  $f(x, y) + f(y, x) \leq \theta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in K$ .

$P_4^\sharp$  (Propriamente quasemonotonicidade): Para todo subconjunto finito  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K$  e todo subconjunto finito  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$  tais que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  tem-se:

$$\min_{1 \leq i \leq n} f(x_i, \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j) < 0$$

$P_4''$  : Para todo subconjunto finito  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K$  e todo subconjunto finito  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$  tais que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  tem-se:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i, \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j) \leq 0$$

Antes de demonstrarmos algumas implicações entre as propriedades acima, vamos considerar os seguintes exemplos de funções definidas sobre  $K = [0, 1]$ .

**Exemplo 2.4.** Defina  $f_1 : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$  como:

$$f_1(x, y) = 0$$

Trivialmente  $f_1$  satisfaz  $P_1, P_2, P_3, P_4^*$  e  $P_4''$  mas,  $f_1$  não satisfaz  $P_4^\sharp$ .

**Exemplo 2.5.** Defina  $f_2 : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$  como:

$$f_2(x, y) = \begin{cases} (y + 1 - x)(y - x), & \text{se } y \leq x, \\ y(y - x), & \text{se } x \leq y. \end{cases}$$

Note que para  $x \leq y$  e  $f_2(x, y) \geq 0$  pois,  $y - x \geq 0$  e  $y \in [0, 1]$ . Para  $y \leq x$  temos  $y - x \leq 0$  e  $f_2(x, y) = (y + 1 - x)(y - x) = y^2 - 2xy + x^2 + y - x = (y - x)^2 + (y - x) \leq 0$  pois  $x, y \in [0, 1]$ , segue que  $f_2(x, y) \leq 0$  para  $y \leq x$ .

**Exemplo 2.6.** Defina  $f_3 : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$  como:

$$f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y - x), & \text{se } y \leq x, \\ (y - x), & \text{se } x \leq y. \end{cases}$$

Esses exemplos são essenciais para entendermos as implicações entre as propriedades de monotonicidade e obter contra-exemplos, compactamos a análise do exemplo 2.5 e do exemplo 2.6 nas seguintes proposições.

**Proposição 2.1.** A função  $f_2$  satisfaz  $P_1, P_2, P_3, P_4^\sharp, P_4''$  mas não  $P_4^*$ .

*Demonstração.* A função  $f_2$  satisfaz  $P_1$  trivialmente pela própria definição da  $f_2$ . Para  $P_2$  e  $P_3$  usamos o fato da  $f_2$  ser contínua implicar em semicontinuidade superior e inferior, e observamos que ela é convexa.

A função  $f_2$  satisfaz  $P_4^\sharp$ . De fato, tome  $t_1, \dots, t_m \in (0, 1)$  e  $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m \leq 1$  e seja  $\bar{x} = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ . Segue que  $0 \leq \bar{x} \leq x_m$  então:

$$f_2(x_m, \bar{x}) = (\bar{x} + 1 - x_m)(\bar{x} - x_m) < 0.$$

Pois,  $1 - x_m \geq 0$  o que implica em  $\min_{1 \leq i \leq m} f_2(x_i, \bar{x}) < 0$ .

Para  $P_4''$  tome  $k$  tal que  $x_k \leq \bar{x} \leq x_{k+1}$ ,  $x_i \leq \bar{x}$  para  $1 \leq i \leq k$ , e  $\bar{x} \leq x_i$  para  $k + 1 \leq i \leq m$ . Segue da definição da  $f_2$  que :

$$f_2(x_i, \bar{x}) = \begin{cases} \bar{x}(\bar{x} - x_i), & \text{se } 1 \leq i \leq k, \\ (\bar{x} + 1 - x_i)(\bar{x} - x_i), & \text{se } k + 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Então:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m t_i f_i(x_i, \bar{x}) &= \sum_{i=1}^k t_i f_i(x_i, \bar{x}) + \sum_{i=k+1}^m t_i f_i(x_i, \bar{x}) \\ &= \bar{x} \sum_{i=1}^k t_i (\bar{x} - x_i) + \sum_{i=k+1}^m t_i (\bar{x} + 1 - x_i)(\bar{x} - x_i) \\ &\leq \bar{x} \sum_{i=1}^k t_i (\bar{x} - x_i) + (\bar{x} + 1 - x_m) \sum_{i=k+1}^m t_i (\bar{x} - x_i) \\ &= \bar{x} \sum_{i=1}^k t_i (\bar{x} - x_i) - (\bar{x} + 1 - x_m) \sum_{i=k+1}^m t_i (x_i - \bar{x}) \end{aligned}$$

Usando o fato de  $x_i \leq x_m$  para todo  $i$ , e que  $\bar{x} - x_i \leq 0$  para  $k + 1 \leq i \leq m$ . Temos que

$$\sum_{i=1}^k t_i (\bar{x} - x_i) = \sum_{i=k+1}^m t_i (x_i - \bar{x})$$

Assim, equivale a

$$\sum_{i=1}^k t_i \bar{x} = \sum_{i=k+1}^m t_i x_i.$$

O que é verdade porque ambos os lados são iguais a  $\bar{x}$ . Substituindo em temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m t_i f_i(x_i, \bar{x}) &\leq \left[ \sum_{i=1}^k t_i (\bar{x} - x_i) \right] [\bar{x} - \bar{x} - (1 - x_m)] \\ &= - \left[ \sum_{i=1}^k t_i (\bar{x} - x_i) \right] (1 - x_m) \leq 0 \end{aligned}$$

O que é verdade porque  $\bar{x} - x_i \geq 0$ ,  $t_i \geq 0$  ( $1 \leq i \leq k$ ) e  $1 - x_m \geq 0$ . Segue de que  $P_4''$  é verdade.

Resta verificar que  $f_2$  não satisfaz  $P_4^*$ . De fato,  $f_2(1, 0) = 0$  e  $f_2(0, 1) = 1 \not\leq 0$ . ■

**Proposição 2.2.** *A função  $f_3$  satisfaz  $P_1, P_2, P_3, P_4^*, P_4^\sharp$  mas não  $P_4''$ .*

*Demonstração.* A função  $f_3$  é contínua em  $K \times K$  e  $f_3(x, \cdot)$  é convexa, porque é o máximo de duas funções afim. Então  $f_3$  satisfaz  $P_2$  e  $P_3$ . Ela satisfaz  $P_4^*$ , porque  $f_3(x, y) \geq 0$  se, e somente, se  $x \leq y$  nesse caso  $f_3(y, x) \leq 0$ . Verificamos agora que  $f_3$  satisfaz  $P_4^\sharp$  mas não  $P_4''$ . Tome  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = \frac{2}{3}$ ,  $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$ . Então  $\bar{x} = t_1 x_1 + t_2 x_2 = \frac{1}{2}$  e

$$t_1 f_3(x_1, \bar{x}) + t_2 f_3(x_2, \bar{x}) = \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24} > 0. \quad \blacksquare$$

A seguir apresentamos uma proposição onde são verificadas implicações entre as propriedades de monotonicidade e relacionam o conjunto solução do problema de equilíbrio com o conjunto solução de seu dual.

**Proposição 2.3.** *Assuma  $P_1 - P_3$ ,*

- (i)  $P_4$  implica em qualquer uma dentre  $P_4^\bullet, P_4^*, P_4^\sharp$  e  $P_4''$ .
- (ii) Ambos  $P_4^*$  e  $P_4''$  implicam em  $P_4^\sharp$  mas, nenhuma implicação adicional entre essas três propriedades permanece.
- (iii)  $S^d(f, K) \subset S(f, K)$ .
- (iv) Assuma qualquer uma dentre  $P_4, P_4^*, P_4''$  ou  $P_4^\sharp$ , é verdade que  $S(f, K) = S^d(f, K)$ .

*Demonstração.* (i)  $P_4$  implica em  $P_4^*$ :

Seja  $f$  satisfazendo  $P_1 - P_3$  e  $P_4$  então,  $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$  a qual supondo  $f(x, y) \geq 0$  implica em

$$f(y, x) \leq -f(x, y) \leq 0.$$

$P_4$  implica em  $P_4^\bullet$ :

Temos por  $P_4$  que  $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$  para todo  $x, y \in K$  daí para  $\theta \geq 0$  e  $\|x - y\|^2 \geq 0$  temos:

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0 \leq \theta \|x - y\|^2$$

$P_4$  implica em  $P_4''$ :

Para todo conjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset K$  e todo  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \in \mathbb{R}_+$ ,  $f$  convexa em relação a segunda variável implica em:

$$f(x_0, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_0, x_j). \quad (2.1)$$

Onde  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ . Façamos  $\bar{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ . Então:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i, \bar{x}) = \lambda_1 f(x_1, \bar{x}) + \lambda_2 f(x_2, \bar{x}) + \dots + \lambda_n f(x_n, \bar{x}). \quad (2.2)$$

Substituindo  $\bar{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$  e usando a propriedade (2.1) em (2.2) obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) = \lambda_1 \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_1, x_j) + \lambda_2 \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_2, x_j) + \dots + \lambda_n \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_n, x_j). \quad (2.3)$$

Calculando isoladamente cada

$\lambda_i \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_i, x_j)$  obtemos:

$$\lambda_1 \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_1, x_j) = \lambda_1 [\lambda_1 f(x_1, x_1) + \lambda_2 f(x_1, x_2) + \lambda_3 f(x_1, x_3) + \dots + \lambda_n f(x_1, x_n)]$$

$$\lambda_2 \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_2, x_j) = \lambda_2 [\lambda_1 f(x_2, x_1) + \lambda_2 f(x_2, x_2) + \lambda_3 f(x_2, x_3) + \dots + \lambda_n f(x_2, x_n)]$$

$$\lambda_3 \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_3, x_j) = \lambda_3 [\lambda_1 f(x_3, x_1) + \lambda_2 f(x_3, x_2) + \lambda_3 f(x_3, x_3) + \dots + \lambda_n f(x_3, x_n)]$$

⋮

$$\lambda_n \sum_{j=i}^n \lambda_j f(x_n, x_j) = \lambda_n [\lambda_1 f(x_n, x_1) + \lambda_2 f(x_n, x_2) + \lambda_3 f(x_n, x_3) + \dots + \lambda_n f(x_n, x_n)]$$

Usando  $P_1$  nas igualdades acima e fazendo a distributividade:

$$\lambda_1 \sum_{j=i}^n \lambda_j f(x_1, x_j) = \lambda_1 \lambda_2 f(x_1, x_2) + \lambda_1 \lambda_3 f(x_1, x_3) + \dots + \lambda_1 \lambda_n f(x_1, x_n)$$

$$\lambda_2 \sum_{j=i}^n \lambda_j f(x_2, x_j) = \lambda_2 \lambda_1 f(x_2, x_1) + \lambda_2 \lambda_3 f(x_2, x_3) + \dots + \lambda_2 \lambda_n f(x_2, x_n)$$

$$\lambda_3 \sum_{j=i}^n \lambda_j f(x_3, x_j) = \lambda_3 \lambda_1 f(x_3, x_1) + \lambda_3 \lambda_2 f(x_3, x_2) + \dots + \lambda_3 \lambda_n f(x_3, x_n)$$

⋮

$$\lambda_n \sum_{j=i}^n \lambda_j f(x_n, x_j) = \lambda_n \lambda_1 f(x_n, x_1) + \lambda_n \lambda_2 f(x_n, x_2) + \dots + \lambda_n \lambda_{n-1} f(x_n, x_{n-1})$$

Somando as  $n$  igualdades acima temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i, \sum_{j=i}^n \lambda_j x_j) &= \lambda_1 [\lambda_2 (f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1)) + \dots + \lambda_n (f(x_1, x_n) + f(x_n, x_1))] \\ &+ \lambda_2 [\lambda_3 (f(x_2, x_3) + f(x_3, x_2)) + \dots + \lambda_n (f(x_2, x_n) + f(x_n, x_2))] \\ &+ \dots \\ &+ \lambda_{n-1} [\lambda_n (f(x_{n-1}, x_n) + f(x_n, x_{n-1}))] \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda_{i+1} (f(x_i, x_{i+1}) + f(x_{i+1}, x_i)) \end{aligned}$$

Como  $P_4$  é válida  $f(x_i, x_{i+1}) + f(x_{i+1}, x_i) \leq 0$  o que implica em  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i, \sum_{j=i}^n \lambda_j x_j) \leq 0$ .

$P_4$  implica em  $P_4^\sharp$ :

Suponha que o mínimo seja atingido em  $l \in \{1, \dots, n\}$ , então

$$f(x_l, \sum_{j=i}^n \lambda_j x_j) \leq f(x_l, \sum_{j=i}^n \lambda_j x_j) \leq \sum_{j=i}^n \lambda_j f(x_l, x_j) \quad \forall l \neq i$$

Como  $P_4$  implica em  $P_4''$  tem-se  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i, \sum_{j=i}^n \lambda_j x_j) \leq 0$ . o que implica em  $\sum_{j=i}^n \lambda_j f(x_i, x_j) \leq 0$ .

0. (ii)  $P_4^*$  e  $P_4''$  implica em  $P_4^\sharp$ , mas nenhuma propriedade adicional é verificada entre essas

três propriedades, basta observar as funções  $f_1, f_2$  e  $f_3$  definidas nos exemplos anteriores.

$P_4^*$  implica em  $P_4^\sharp$ : Assumindo  $P_4^*$  como verdade, temos que  $f(x_j, x_i) \geq 0$  implica em  $f(x_i, x_j) \leq 0$ .

Suponha que o mínimo de  $f(x_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j)$  seja atingido em um  $l \in \{1, \dots, n\}$ . Então:

$$f(x_l, \sum_{j=i}^n \lambda_j x_j) \leq f(x_i, \sum_{j=i}^n \lambda_j x_j) \leq \sum_{j=i}^n \lambda_j f(x_i, x_j) \leq 0 \quad \forall l \neq i$$

$P_4''$  implica em  $P_4^\sharp$ :

Supondo válida  $P_4''$  temos  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i, \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j) \leq 0$ . Suponha que o mínimo de  $f(x_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j)$  seja atingido em um  $l \in \{1, \dots, n\}$ . Então:

$$f(x_l, \sum_{j=i}^n \lambda_j x_j) \leq f(x_i, \sum_{j=i}^n \lambda_j x_j) \leq \sum_{j=i}^n \lambda_j f(x_i, x_j) \leq 0 \quad \forall l \neq i$$

(iii) Seja  $\bar{x} \in S^d(f, K)$ , como  $K$  é um conjunto convexo para todo  $t \in (0, 1)$  temos que  $w_t := ty + (1-t)\bar{x} \in K$  com  $y \in K$ .

Então, usando  $P_1$  e o fato de  $\bar{x} \in S^d(f, K)$  temos  $f(w_t, \bar{x}) \leq 0 = f(w_t, w_t)$ . Usando novamente  $P_1$  e o fato de  $f$  ser convexa em relação a segunda variável temos que

$$f(w_t, \bar{x}) \leq 0 = f(w_t, w_t) \leq tf(w_t, y) + (1-t)f(w_t, \bar{x})$$

então,

$$0 \leq tf(w_t, y) - tf(w_t, \bar{x}) = t(f(w_t, y) - f(w_t, \bar{x}))$$

Assim,

$$0 \leq f(w_t, y) - f(w_t, \bar{x})$$

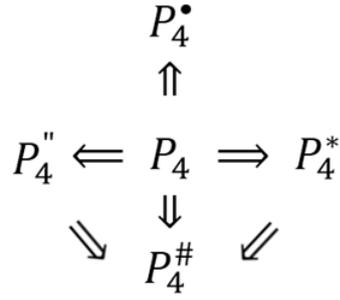
para todo  $t \in (0, 1)$ . Tomando o limite quando  $t \rightarrow 0$  obtemos  $0 \leq f(\bar{x}, y)$ .

(iv) Por (i), (ii) e (iii) só precisamos verificar que  $P_4^\sharp$  implica em  $S(f, K) \subset S^d(f, K)$ :

Seja  $\bar{x} \in S(f, K)$  e  $w_t := ty + (1-t)\bar{x}$ . Por  $P_4^\sharp$  segue que  $\min\{f(\bar{x}, w_t), f(y, w_t)\} \leq 0$  obtendo assim  $f(y, w_t) \leq 0$ . Tomando o limite quando  $t \rightarrow \infty$  em  $f(y, w_t) \leq 0$  obtemos  $f(y, \bar{x}) \leq 0$ . Portanto,  $\bar{x} \in S^d(f, K)$ . ■

No decorrer deste trabalho vamos trabalhar constantemente com essas implicações obtidas na Proposição anterior, para tanto organizamos essas implicações em um esquema representado abaixo.

Após esse esquema apresentamos um exemplo onde as implicações apresentadas na proposição acima são verificadas.



**Figura 2.1:** Esquema de implicações entre as  $P$ 's.

**Exemplo 2.7.** Seja  $[\frac{1}{2}, 1] \subset \mathbb{R}$  e defina  $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$f(x, y) = x(x - y) \quad (2.4)$$

Note que  $f(1, y) = 1 - y \geq 0$  para todo  $y \in [\frac{1}{2}, 1]$ , então  $\bar{x} = 1$  resolve PE( $f, K$ ). Vamos verificar que  $f$  não satisfaz  $P_4$  mas satisfaz  $P_4^\bullet$  e  $P_4^*$ . De fato,

$$f(x, y) + f(y, x) = (x - y)^2 > 0 \quad \forall x \neq y$$

Assim,  $f$  não satisfaz  $P_4$  porém, satisfaz  $P_4^\bullet$  com  $\theta = 1$ .

$$f(x, y) + f(y, x) = (x - y)^2 \leq \|x - y\|^2$$

Para  $P_4^*$  note que  $f(x, y) \geq 0$  com  $x, y \in K$  implica, como  $x \geq \frac{1}{2}$  que  $x - y \geq 0$  e nesse caso, usando agora que  $y \geq \frac{1}{2}$  temos  $f(y, x) = y(y - x) \leq 0$ . Então  $f$  satisfaz  $P_4^*$ .

**Lema 2.1.** Seja  $Y$  um subconjunto não vazio de um espaço de Hausdorff  $X$ . Para cada  $y \in Y$ , considere o subconjunto fechado  $C(y)$  de  $X$ . Se as seguintes condições são verdadeiras:

$C_1$  : A envoltória convexa para um subconjunto finito  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de  $Y$ , denotado por  $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ , está contida em  $\bigcup_{i=1}^n C(x_i)$ ,

$C_2$  :  $C(x)$  é compacto, pelo menos para algum  $x \in Y$ .

Então,  $\bigcap_{y \in Y} C(y) \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* Ver Lema 1 em [4]. ■

Para os próximos resultados usamos fortemente o fato de  $H$  ser Hilbert implicar em  $H$  ser reflexivo e necessitamos das definições de alguns conjuntos. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  seja  $K_n := \{x \in H; \|x\| \leq n\}$  e  $K_n^0 := \{x \in H; \|x\| < n\}$ . Como  $K_n$  é não vazio para  $n$  suficientemente grande, supomos sem perda de generalidade que  $K_n$  é não vazio  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Defina,  $\forall y \in K$  o conjunto  $L_f(n, y) := \{x \in K_n; f(y, x) \leq 0\}$ .

**Lema 2.2.** *Supondo que  $P_1 - P_3$  sejam satisfeitas. Se para algum  $n \in \mathbb{N}$  e para algum  $\bar{x} \in \bigcap_{y \in K_n} L_f(n, y)$  existe  $\bar{y} \in K_n^0$  tal que  $f(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0$  então  $f(\bar{x}, y) \geq 0 \forall y \in K$ , isto é,  $\bar{x} \in S(f, K)$ .*

*Demonstração.* Se  $\bar{x}$  pertence a  $\bigcap_{y \in K_n} L_f(n, y)$ , então  $f(w, \bar{x}) \leq 0 \forall w \in K_n$  o que implica em  $\bar{x} \in S^d(f, K_n)$ . Pelo item (iii) da Proposição 2.3 temos  $\bar{x} \in S(f, K_n)$  então  $f(\bar{x}, w) \geq 0 \forall w \in K_n$ . Assim, resta mostrar que  $f(\bar{x}, w) \geq 0 \forall w \in K \setminus K_n$ . Tome  $w \in K \setminus K_n$ . Como  $\bar{y} \in K_n^0$ , existe  $t \in (0, 1)$  tal que  $z := tw + (1 - t)\bar{y} \in K_n$ . Segue que  $f(\bar{x}, z) \geq 0$ . Como  $f(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0$  por hipótese concluimos que

$$\begin{aligned} 0 \leq f(\bar{x}, z) = f(\bar{x}, tw + (1 - t)\bar{y}) &\leq tf(\bar{x}, w) + (1 - t)f(\bar{x}, \bar{y}) \\ &\leq tf(\bar{x}, w) \\ &\leq f(\bar{x}, w) \end{aligned}$$

Portanto,  $0 \leq f(\bar{x}, w)$  para todo  $w \in K$ . ■

$PE(f, K)$  tem sido amplamente estudado nos últimos anos, com ênfase nos resultados de existência. A proposição  $P_5$  apresentada na seção anterior será utilizada no próximo teorema para garantir existência de solução para  $PE(f, K)$ .

**Teorema 2.1.** *Assuma que  $f$  satisfaz  $P_1, P_2, P_3, P_4^\sharp$  e  $P_5$ . Então  $PE(f, K)$  tem solução.*

*Demonstração.* Seja  $n \in \mathbb{N}$  arbitrário. Para auxiliar na prova do Teorema usamos o Lema 2.1. Para tanto é necessário verificar suas hipóteses. Observe que o espaço de Hilbert  $H$  com a topologia fraca é certamente um espaço vetorial topológico de Hausdorff. Tomando  $Y = K_n$ ,  $C(y) = L_f(n, y)$  verificamos a seguir as hipóteses do Lema 2.1. Iniciamos verificando  $C_1$ .

Tome  $x_1, \dots, x_k \in K_n$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$  tal que  $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ , devemos verificar que  $\bar{x} = x_1\lambda_1 + \dots + x_k\lambda_k \in \bigcup_{i=1}^k L_f(n, x_i)$ , isto é,  $\bar{x} \in K_n$  e  $f(x_i, \bar{x}) \leq 0$  para algum  $i$ . O primeiro desses fatos resulta da convexidade de  $K_n$ , e o segundo de  $P_4^\sharp$  que garante que  $\min_{1 \leq j \leq k} f(x_j, \bar{x}) \leq 0$ .

$C_2$ : Como  $C(y) = L_f(n, y) = \{x \in K_n; f(y, x) \leq 0\}$ ,  $C(y)$  é fechado na topologia forte, convexo porque é um conjunto de subnível de uma função convexa e limitado porque está contido em  $K_n$  que é limitado, segue que  $C(y)$  é compacto na topologia fraca  $\forall y \in K_n$ . Então  $C_2$  é válida.

Pelas hipóteses do Lema 2.1 concluimos que  $\bigcap_{y \in K_n} L_f(n, y) \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ . Nesse caso podemos escolher  $x^n \in \bigcap_{y \in K_n} L_f(n, y)$ . Vamos distinguir dois casos:

- (i) Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x^n\| < n$ . Nesse caso  $x^n \in K_n^0$  e pelo Lema 2.2 resolve PE.

(ii)  $\|x^n\| = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Nesse caso assumindo  $P_5$  obtemos a existência de  $u \in K$  e  $n_0$  tal que  $f(x^n, u) \leq 0 \forall n \geq n_0$ . Tome  $\bar{n} \geq n_0$  tal que  $\|u\| < \bar{n}$ . Então  $f(x^{\bar{n}}, u) \leq 0$  e  $u \in K_{\bar{n}}^0$ . Novamente pelo Lema 2.2  $x^{\bar{n}}$  resolve  $PE(f, K)$ . ■

## 2.3 Regularização para o problema de equilíbrio.

Nesta seção apresentamos uma regularização para a função na qual o problema de equilíbrio é gerado e verificamos um resultado que garante existência de solução para o problema de equilíbrio obtido através desta regularização.

Definindo uma regularização para o problema de equilíbrio: Fixe  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  e  $\bar{x} \in H$ . Para  $f$  satisfazendo  $P_1 - P_3$  vamos associar a bifunção  $\tilde{f} : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  a qual será a regularização da  $f$  definida por:

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) + \gamma \langle x - \bar{x}, y - x \rangle$$

Existem alguns trabalhos que exploram a resolução de problemas de equilíbrio, onde ao invés de resolver os subproblemas gerados pelo método para  $f$  usam a regularização. Em [14] a regularização definida para  $f$  é obtida da seguinte forma:

$$\bar{f}(x, y) = f(\bar{x}, y) + \gamma \langle x - \bar{x}, y - x \rangle$$

É claro que  $\tilde{f} \neq \bar{f}$ , e diferente de  $\tilde{f}$ ,  $\bar{f}$  não satisfaz  $P_1$  e para  $\gamma = 0$   $\bar{f} \neq f$ . Em [5] a regularização da  $f$  é da forma:

$$\bar{f}(x, y) = f(x, y) + \gamma D(y, x)$$

onde  $D$  é a distância de Bregman, o problema regularizado consiste em minimizar  $\bar{f}(\bar{x}, y)$  sobre  $y \in K$ . Novamente a regularização é bastante diferente da assumida por nós.

A seguir mostramos que  $\tilde{f}$  satisfaz  $P_1 - P_3$ , o que faz com que se torne interessante o método estudado pois ainda estamos com um problema de equilíbrio.

$$P_1 : \tilde{f}(x, x) = f(x, x) + \gamma \langle x - \bar{x}, x - x \rangle = 0.$$

$P_2 : \tilde{f}(\cdot, y) : K \rightarrow \mathbb{R}$  é semicontínua superiormente  $\forall y \in K$ . Sejam  $y$  fixo e  $\{x^k\} \subset K$  tal que  $x^k \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Então,

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}(x^k, y) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k, y) + \gamma \langle \limsup_{k \rightarrow \infty} x^k - \bar{x}, y - \limsup_{k \rightarrow \infty} x^k \rangle \\ &\leq f(x, y) + \gamma \langle x - \bar{x}, y - x \rangle = \tilde{f}(x, y) \end{aligned}$$

$P_3 : \tilde{f}(x, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa e semicontínua inferiormente  $\forall x \in K$ . Sejam  $x$  fixo e  $\{y^k\} \subset K$  tal que  $y^k \rightarrow y$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Então,

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}(x, y^k) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x, y^k) + \gamma \langle x - \bar{x}, \liminf_{k \rightarrow \infty} y^k - x \rangle \\ &\geq f(x, y) + \gamma \langle x - \bar{x}, y - x \rangle = \tilde{f}(x, y) \end{aligned}$$

Para a convexidade sejam  $x_0$  fixo,  $x, y \in K$  e  $t \in (0, 1)$ . Então:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_0, tx + (1-t)y) &= f(x_0, tx + (1-t)y) + \gamma \langle x_0 - \bar{x}, tx + (1-t)y - tx_0 - (1-t)x_0 \rangle \\ &\leq tf(x_0, x) + (1-t)f(x_0, y) + \gamma \langle x_0 - \bar{x}, tx + (1-t)y - tx_0 - (1-t)x_0 \rangle \\ &= t\tilde{f}(x_0, x) + (1-t)\tilde{f}(x_0, y). \end{aligned}$$

A seguinte proposição é de suma importância para o nosso trabalho pois ela garante a existência de solução para o problema de equilíbrio obtido a partir da regularização da  $f$

**Proposição 2.4.** *Tome  $f$  satisfazendo  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4^\bullet$ . Assuma que  $\gamma > \theta$ . Então  $PE(\tilde{f}, K)$  tem uma única solução.*

*Demonstração.* Provamos primeiro a existência de solução. Vamos utilizar para a prova o Teorema 2.1, já verificamos que  $\tilde{f}$  dentro das hipóteses satisfaz  $P_1, P_2$  e  $P_3$  agora vamos verificar que  $\tilde{f}$  satisfaz  $P_4$  o que implica em  $P_4^\bullet$ .

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y) + \tilde{f}(y, x) &= f(x, y) + f(y, x) - \gamma \|x - y\|^2 \\ &\leq \theta \|x - y\|^2 - \gamma \|x - y\|^2 \\ &= (\theta - \gamma) \|x - y\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Resta verificar que  $\tilde{f}$  satisfaz  $P_5$ . Tome  $\{x^n\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\| = \infty$ , e seja  $u = P_K(\bar{x})$ , onde  $P_K : H \rightarrow K$  denota a projeção ortogonal sobre  $K$ .

Note que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x^n, u) &= f(x^n, u) + \gamma \langle x^n - \bar{x}, u - x^n \rangle \\ &= f(x^n, u) + \gamma \langle x^n - \bar{x} + u - u, u - x^n \rangle \\ &= f(x^n, u) + \gamma \langle x^n - u, u - x^n \rangle + \gamma \langle u - \bar{x}, u - x^n \rangle \\ &\leq f(x^n, u) - \gamma \|u - x^n\|^2 \\ &\leq -f(u, x^n) - (\gamma - \theta) \|u - x^n\|^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, vamos assumir a seguinte notação, para cada  $x \in K$ , defina  $g_x : K \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$g_x(y) = f(x, y)$$

Tome  $\hat{x} \in ri(K)$  então  $\hat{x}$  pertence ao interior relativo do domínio efetivo da  $g_x$ . Como  $g_x$  é

convexa por  $P_3$  temos que o subdiferencial em  $\hat{x}$ ,  $\partial g_x(\hat{x})$ , é não vazio. Tome  $\hat{v} \in \partial g_x(\hat{x})$ . Pela definição de subdiferencial:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{v}, x^n - \hat{x} \rangle &\leq g_u(x^n) - g_u(\hat{x}) = f(u, x^n) - f(u, \hat{x}) \\
-\langle \hat{v}, \hat{x} - x^n \rangle &\leq f(u, x^n) - f(u, \hat{x}) \\
-f(u, x^n) &\leq \langle \hat{v}, \hat{x} - x^n \rangle - f(u, \hat{x}) \\
&\leq \|\hat{v}\| \|\hat{x} - x^n\| - f(u, \hat{x}) \\
&\leq \|\hat{v}\| \|\hat{x} - u\| + \|\hat{v}\| \|u - x^n\| - f(u, \hat{x})
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Substituindo (2.6) em (2.5) temos

$$\tilde{f}(x^n, u) \leq \|x^n - u\| [\|\hat{v}\| - (\gamma - \theta)\|x^n - u\|] + \|\hat{v}\| \|\hat{x} - u\| - f(u, \hat{x}) \tag{2.7}$$

Como  $\gamma - \theta > 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\| = \infty$  temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - u\| = \infty$  o que implica em  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x^n, u) = -\infty$ , então  $\tilde{f}(x^n, u) \leq 0$  para  $n$  suficientemente grande. Verificamos todas as hipóteses do Teorema 2.1 segue que  $\text{PE}(\tilde{f}, K)$  tem solução. Agora vamos provar a unicidade da solução. Assuma que  $\tilde{x}, x' \in S(\tilde{f}, K)$ . Então,

$$0 \leq \tilde{f}(\tilde{x}, x') = f(\tilde{x}, x') + \gamma \langle \tilde{x} - \bar{x}, x' - \tilde{x} \rangle, \tag{2.8}$$

$$0 \leq \tilde{f}(x', \tilde{x}) = f(x', \tilde{x}) + \gamma \langle x' - \bar{x}, \tilde{x} - x' \rangle, \tag{2.9}$$

Somando (2.8) e (2.9) obtemos:

$$0 \leq f(\tilde{x}, x') + f(x', \tilde{x}) - \gamma \|\tilde{x} - x'\| \leq (\theta - \gamma) \|\tilde{x} - x'\| \leq 0, \tag{2.10}$$

Segue de (2.10) que  $(\theta - \gamma) \|\tilde{x} - x'\| = 0$  como  $\gamma \neq \theta$  segue que  $\tilde{x} = x'$ . ■

**Proposição 2.5.** *Tome  $f$  satisfazendo  $P_1, P_2, P_3$ . Se  $\tilde{x} \in S(\tilde{f}, K)$  e  $x^* \in S^d(f, K)$ . Então*

$$\|\tilde{x} - x^*\|^2 + \|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 \leq \|\bar{x} - x^*\|^2$$

.

*Demonstração.* Seja  $\tilde{x} \in S(\tilde{f}, K)$  e  $x^* \in S^d(f, K)$  temos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \tilde{f}(\tilde{x}, x^*) = f(\tilde{x}, x^*) + \gamma \langle \tilde{x} - \bar{x}, x^* - \tilde{x} \rangle \\
0 &\leq f(\tilde{x}, x^*) + \gamma \langle \tilde{x} - \bar{x}, x^* - \tilde{x} \rangle \\
-f(\tilde{x}, x^*) &\leq \gamma \langle \tilde{x} - \bar{x}, x^* - \tilde{x} \rangle
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Como  $x^* \in S^d(f, K)$  temos que  $f(y, x^*) \leq 0 \forall y \in K$  em particular

$$f(\tilde{x}, x^*) \leq 0 \quad (2.12)$$

Combinando (2.11) e (2.12) temos:

$$0 \leq \gamma \langle \tilde{x} - \bar{x}, x^* - \tilde{x} \rangle$$

Somando e subtraindo  $\frac{\|x^*\|^2}{2}$  e  $\frac{\|\bar{x}\|^2}{2}$  no lado direito da desigualdade acima obtemos:

$$0 \leq \frac{\gamma}{2} [\|x^* - \bar{x}\|^2 - \|x^* - \tilde{x}\|^2 - \|\tilde{x} - \bar{x}\|^2] \quad (2.13)$$

# Capítulo 3

## Método de ponto proximal para problemas de equilíbrio

Neste capítulo apresentamos o método de ponto proximal, a ser denotado por MPPPE, para resolver  $PE(f, K)$  e a reformulação para o problema de equilíbrio propostos por Alfredo Iusem e Wifredo Sosa em [1].

### 3.1 Método de ponto proximal para $PE(f, K)$

Tal como o método de ponto proximal tradicional, o método de ponto proximal para solucionar problemas de equilíbrio resolve um problema através de subproblemas. No contexto de equilíbrio, estamos resolvendo problemas de equilíbrio através de subproblemas de equilíbrio. Para tanto recordamos nossa regularização da  $f$ .

Fixe um parâmetro de regularização  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  e considere um  $\bar{x} \in H$ . Para qualquer  $f$  satisfazendo  $P_1 - P_3$ , vamos associar uma bifunção  $\tilde{f} : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  a qual chamamos função regularizadora da  $f$ ,  $\tilde{f}$  é definida por:

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) + \gamma \langle x - \bar{x}, y - x \rangle.$$

O novo problema de equilíbrio obtido através da  $\tilde{f}$  possui uma única solução como demonstrado no capítulo 2. A seguir apresentamos o método de ponto proximal para problemas de equilíbrio:

**Método de Ponto Proximal para  $PE(f, K)$ .** *Assuma que  $f$  satisfaz  $P_4^\bullet$  e tome uma sequência de parâmetros de regularização  $\{\gamma_k\} \subset (\theta, \bar{\gamma}]$ , para algum  $\bar{\gamma} > \theta$ .*

**Passo 1.** Escolha  $x^0 \in K$ .

**Passo 2.** Dado  $x^k$  o iterando  $x^{k+1}$  é a única solução do problema  $PE(f_k, K)$ , em que temos  $f_k : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f_k(x, y) = f(x, y) + \gamma_k \langle x - x^k, y - x \rangle. \quad (3.1)$$

A seguir apresentamos um resultado de convergência de MPPPE, mas antes, precisamos da definição de quando uma sequência  $\{z^k\} \subset K$  resolve assintoticamente  $PE(f, K)$ .

**Definição 3.1** ([9],p.8). Dizemos que  $\{z^k\} \subset K$  é uma sequência que resolve assintoticamente  $PE(f, K)$  se  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f(z^k, y) \geq 0$  para todo  $y \in K$ .

**Teorema 3.1** ([9],p.8). Considere  $PE(f, K)$  onde  $f$  satisfaz  $P_1, P_2$  e  $P_3$ . Para todo  $x^0 \in K$ ,

- (i) Se  $f$  satisfaz  $P_4^\bullet$ , então a sequência  $\{x^k\}$  gerada por MPPPE está bem definida.
- (ii) Se  $S^d(f, K) \neq \emptyset$ , então a sequência  $\{x^k\}$  é limitada e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$ .
- (iii) Assumindo os itens anteriores a sequência  $\{x^k\}$  resolve assintoticamente  $PE(f, K)$ .
- (iv) Se adicionarmos  $f(\cdot, y)$  é fracamente semicontínua superiormente  $\forall y \in K$  então todo ponto de acumulação fraco de  $\{x^k\}$  resolve  $PE(f, K)$ .
- (v) Se adicionarmos  $S(f, K) = S^d(f, K)$ , então a sequência  $\{x^k\}$  converge fracamente para uma solução  $\hat{x}$  de  $PE(f, K)$ .

*Demonstração.* (i) Como  $f_k$ , definida por (3.1), é a regularização da  $f$ , obtemos usando o fato de  $f$  satisfazer  $P_4^\bullet$  e usando recursivamente a Proposição 2.4 com  $\gamma = \gamma_k > \theta$ ,  $\bar{x} = x^k$  e  $\tilde{x} = x^{k+1}$  que a sequência  $\{x^k\}$  está bem definida.

(ii) Tome  $x^* \in S^d(f, K)$  e  $x^{k+1} \in S(f_k, K)$ , pela Proposição 2.5 concluímos que

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 + \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2. \quad (3.2)$$

Segue que  $\{\|x^k - x^*\|\}$  é não negativa e não crescente, então convergente para  $\sigma \geq 0$ . Por (3.2),

$$0 \leq \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2. \quad (3.3)$$

Uma vez que a expressão mais a direita em (3.3) converge para  $\sigma - \sigma = 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x^k - x^{k+1}) = 0 \quad (3.4)$$

Devido a (3.2) temos que

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 + \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + \|x^{k-1} - x^k\|^2 \leq \dots \leq \|x^0 - x^*\|^2$$

Então  $\|x^k - x^*\| \leq \|x^0 - x^*\|$ , obtemos  $\{x^k\} \subset B(x^*, \|x^0 - x^*\|)$ , isto é,  $\{x^k\}$  é limitada.

(iii) Fixe um  $y \in K$ . A sequência  $\{x^k\}$  está bem definida por (i). Como  $x^{k+1}$  resolve  $PE(f_k, K)$  temos:

$$0 \leq f(x^{k+1}, y) + \gamma_k \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \quad (3.5)$$

$$\leq f(x^{k+1}, y) + \gamma_k \|x^{k+1} - x^k\| \|y - x^{k+1}\|, \quad (3.6)$$

pela desigualdade de Cauchy - Schwartz. Vamos tomar o limite quando  $k \rightarrow \infty$  em (3.6). Note que  $\{\gamma^k\}$  é limitada por  $\bar{\gamma}$ ,  $\|y - x^{k+1}\|$  é limitada por (ii) e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$ , por (ii), então:

$$0 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k, y) \quad \forall y \in K. \quad (3.7)$$

Então a sequência  $\{x^k\}$  resolve assintoticamente  $PE(f, K)$ .

(iv) Em vista de (ii),  $\{x^k\}$  possui pontos de acumulação, todos os quais pertencem a  $K$ , que, sendo convexo e fechado é fracamente fechado. Seja  $\{x^{kj}\}$  uma subsequência de  $\{x^k\}$  fracamente convergente para  $\tilde{x}$ . Sob a hipótese de  $f(\cdot, y)$  ser fracamente semicontínua superior temos:

$$f(\tilde{x}, y) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^{kj}, y) \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Então,  $\tilde{x} \in S(f, K)$ .

(v) É suficiente verificar que existe somente um ponto de acumulação fraco de  $\{x^k\}$ . Sejam  $\hat{x}$  e  $\tilde{x}$  dois pontos de acumulação de  $\{x^k\}$ , então existem subsequências  $\{x^{jk}\}$  e  $\{x^{ik}\}$  em que  $\hat{x}$  e  $\tilde{x}$  são seus pontos de acumulação respectivos. Assumindo (iv) temos que ambos  $\hat{x}$  e  $\tilde{x}$  pertencem a  $S(f, K) = S^d(f, K)$  e segue que  $\{\|\hat{x} - x^k\|\}$  e  $\{\|\tilde{x} - x^k\|\}$  convergem para  $\sigma \geq 0$  e  $v \geq 0$  respectivamente. Então:

$$\begin{aligned} 2 \langle x^{ik} - x^{jk}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle &= \langle x^{ik} - x^{jk}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle + \langle x^{ik} - x^{jk}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle \\ &= \langle x^{ik}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle + \langle -x^{jk}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle + \langle \hat{x}, x^{ik} - x^{jk} \rangle + \langle \tilde{x}, x^{ik} - x^{jk} \rangle \\ &= \langle x^{ik}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle + \langle x^{jk}, \tilde{x} - \hat{x} \rangle + \langle \hat{x}, x^{ik} - x^{jk} \rangle + \langle \tilde{x}, x^{jk} - x^{ik} \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2 \langle x^{ik} - x^{jk}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle &= \langle x^{ik}, \hat{x} - x^{ik} + x^{ik} - \tilde{x} \rangle + \langle x^{jk}, \tilde{x} - x^{jk} + x^{jk} - \hat{x} \rangle \\ &+ \langle \hat{x}, x^{ik} - \hat{x} + \hat{x} - x^{jk} \rangle + \langle \tilde{x}, x^{jk} - \tilde{x} + \tilde{x} - x^{ik} \rangle \\ &= \langle x^{ik}, \hat{x} - x^{ik} \rangle + \langle x^{ik}, x^{ik} - \tilde{x} \rangle + \langle x^{jk}, \tilde{x} - x^{jk} \rangle + \langle x^{jk}, x^{jk} - \hat{x} \rangle \\ &+ \langle \hat{x}, x^{ik} - \hat{x} \rangle + \langle \hat{x}, \hat{x} - x^{jk} \rangle + \langle \tilde{x}, x^{jk} - \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, \tilde{x} - x^{ik} \rangle \\ &= \langle x^{ik}, \hat{x} - x^{ik} \rangle + \langle -x^{ik}, \tilde{x} - x^{ik} \rangle + \langle x^{jk}, \tilde{x} - x^{jk} \rangle + \langle -x^{jk}, \hat{x} - x^{jk} \rangle \\ &+ \langle -\hat{x}, \hat{x} - x^{ik} \rangle + \langle \hat{x}, \hat{x} - x^{jk} \rangle + \langle -\tilde{x}, \tilde{x} - x^{jk} \rangle + \langle \tilde{x}, \tilde{x} - x^{ik} \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$2 \langle x^{ik} - x^{jk}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle = [\|\tilde{x} - x^{ik}\|^2 - \|\tilde{x} - x^{jk}\|^2] - [\|\hat{x} - x^{ik}\|^2 - \|\hat{x} - x^{jk}\|^2].$$

Tomando o limite quando  $k \rightarrow \infty$  na igualdade acima obtemos:

$$2\|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 = (v - v) + (\sigma - \sigma) = 0,$$

e temos  $\hat{x} = \tilde{x}$ , o que estabelece a unicidade do ponto de acumulação fraco de  $\{x^k\}$ . ■

Podemos fazer as seguintes observações quanto ao teorema anterior. Em primeiro lugar, a hipótese de  $S^d(f, K) \neq \emptyset$  é difícil de se verificar. Por outro lado, pedir que  $S(f, K)$  seja não vazio também possa a priori ser difícil garantir, é um pressuposto natural, já que não esperamos que o algoritmo venha a convergir quando o problema não possua solução.

**Corolário 3.1** ([9],p.9). *Assuma que  $f$  satisfaz  $P_1, P_2, P_3, P_4^\bullet$  e qualquer uma dentre  $P_4^*, P_4^\sharp$  e  $P_4''$ . Se  $PE(f, K)$  tem solução e  $f(\cdot, y)$  é fracamente semicontínua superior  $\forall y \in K$  então a sequência  $\{x^k\}$  gerada pelo MPPPE converge para uma solução de  $PE(f, K)$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.3, qualquer uma entre  $P_4^*, P_4^\sharp$  e  $P_4''$  implica em  $S^d(f, K) = S(f, K)$ . Como  $S(f, K) \neq \emptyset$ , por hipótese, temos pelos itens (ii) e (v) no Teorema 3.1 segue o resultado. ■

Além disso, a semicontinuidade superior fraca da  $f(\cdot, y)$ , conforme solicitado no Teorema 3.1 (iv), é bastante restritiva, mas que se verifica no caso de  $H$  possuir dimensão finita. De fato, assumindo as hipóteses do Corolário 3.1 com  $H$  um espaço vetorial de dimensão finita, a fraca semicontinuidade superior de  $f(\cdot, y)$  é apenas a continuidade superior, que tem por  $P_2$ . Logo, segue que o resultado do Teorema 3.1

Na seção seguinte, vamos conseguir remover a suposição de  $f$  ser fracamente semicontínua superior, substituindo-a por uma suposição bastante fraca, mas apenas para o caso (em vez de submonotonicidade) em que  $f$  é monótona.

## 3.2 Uma reformulação para o problema de equilíbrio

Na seção anterior verificamos que MPPPE converge para uma solução de  $PE(f, K)$ . Nessa seção vamos reformular o problema de equilíbrio em termos de um operador monótono maximal e provar que a sequência gerada pelo método de ponto proximal coincide com a sequência gerada pelo MPPPE.

Retornamos com nossa notação definida na demonstração da Proposição 2.4 onde adotamos  $g_x : K \rightarrow \mathbb{R}$  definida, para cada  $x \in K$ , por  $g_x(y) = f(x, y)$ .

Durante essa seção assumimos que  $\partial g_x \neq \emptyset$  para todo  $x, y \in K$ . Esse é o caso por exemplo em que  $f$  pode ser estendida, preservando  $P_3$  para algum subconjunto aberto  $V$  de  $H \times H$ , contendo  $K \times K$ . Vamos associar  $f$  com o operador  $T^f : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$  definido por:

$$T^f(y) = \partial g_x(y) + N_K(y), \quad (3.8)$$

onde  $N_K$  é o operador normal de  $K$ , isto é, o subdiferencial da função indicadora  $I_K$  que desaparece em pontos de  $K$  e toma o valor  $+\infty$  para pontos fora de  $K$ . O fato de  $\partial g_x(x)$  ser definido somente para  $x \in K$  é irrelevante pois, para  $x$  que não pertence a  $K$  temos  $N_K(x) = \emptyset$  e portanto, o mesmo vale para  $T^f$ .

A seguir vemos como relacionar  $PE(f, K)$  com  $T^f$ .

**Proposição 3.1** ([9],p.10). (i)  $S(f, K)$  é o conjunto de zeros do operador  $T^f$ .

(ii) Iniciando em um  $x^0$ , a sequência gerada por MPPPE, usando  $f_k$  definida como em (3.1) e a sequência gerada pelo método de ponto proximal para encontrar zeros de  $T^f$ , coincide (sendo esta última a sequência  $\{x^k\}$ , onde  $x^{k+1}$  é o único zero do operador  $T_k^f$ , definido por  $T_k^f(x) = T^f(x) + \gamma_k(x - x^k)$ ).

*Demonstração.* (i)  $x^* \in S(f, K)$  se, e somente, se  $g_{x^*}(x^*) = f(x^*, x^*) = 0 \leq f(x^*, y) = g_{x^*}(y)$ , para todo  $y \in K$ , isto é,  $x^*$  resolve o problema de minimização da  $g_{x^*}(y)$  sujeito a  $y \in K$ . Sabemos que pela condição necessária e suficiente de primeira ordem para minimização de funções convexas,  $x^*$  é minimizador de  $g_{x^*}$  em  $K$  se existir  $v^* \in \partial g_{x^*}(x^*)$  tal que  $\langle v^*, y - x^* \rangle \geq 0$  para todo  $y \in K$ . Tendo em vista a definição de  $N_K$ , este é precisamente equivalente a dizer que  $0 \in \partial g_{x^*}(x^*) + N_K(x^*)$ , isto é,  $0 \in T^f(x^*)$ .

(ii) Seja  $\{x^k\}$  a sequência gerada pelo método de ponto proximal para encontrar zeros de  $T^f$ . Assuma indutivamente que  $x^k$  é igual a  $k$ -ésima interação do MPPPE aplicado a  $PE(f, K)$ . Vamos provar que  $x^{k+1}$  é a próxima iterada da sequência gerada pelo MPPPE. Temos que:

$$0 \in T^f(x^{k+1}) + \gamma_k(x^{k+1} - x^k) = \partial g_{x^{k+1}}(x^{k+1}) + \gamma_k(x^{k+1} - x^k) + N_K(x^{k+1}). \quad (3.9)$$

Para cada  $x \in K$  defina  $g_x^k : K \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g_x^k(y) = g_x(y) + \gamma_k \langle x - x^k, y - x \rangle$$

É imediato que  $\partial g_x^k(y) = \partial g_x(y) + \gamma_k(x - x^k)$ . Defina  $\tilde{U}^f(y) = \partial g_x^k(y)$ . Segue que  $x^{k+1}$  é um zero de  $\tilde{U}^f + N_K$ , o que implica, usando a convexidade da  $g_y^k$  e a de  $K$ , que  $x^{k+1}$

minimiza  $g_{x^{k+1}}^k$  sobre  $K$ , para todo  $y \in K$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= g_{x^{k+1}}^k(x^{k+1}) \leq g_{x^{k+1}}^k(y) \\ &= g_{x^{k+1}}(y) + \gamma_k \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \\ &= f(x^{k+1}, y) + \gamma_k \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle = f_k(x^{k+1}, y). \end{aligned}$$

Como  $0 \leq f_k(x^{k+1}, y)$  para todo  $y \in K$ ,  $x^{k+1}$  resolve  $PE(f_k, K)$  e como essa é a  $k+1$ -ésima iterada da sequência gerada pelo MPPPE, completamos o passo de indução. ■

Pelo resultado anteriormente obtido, vimos que cada problema de equilíbrio pode ser reformulado em termos de um operador. Além disso, vimos que o método de ponto proximal para o problema de equilíbrio coincide com o método de ponto proximal clássico, aplicado a sua reformulação como um problema de desigualdade variacional. A princípio, esse fato não parece relevante já que os métodos de ponto proximal para operador monótono maximal, têm sido extensivamente analisados. Afirmamos, porém, que tal impressão é enganosa.

Em primeiro lugar, os resultados de convergência para o método de ponto proximal clássico exigem monotonicidade do operador e, que nesse caso é de  $T^f$ . Como  $N_K$  é sempre monótono maximal, temos nesse caso, que a monotonicidade de  $T^f$  ocorrerá se o operador  $U^f(x) = \partial g_x(x)$  for monótono. Nesse caso é essencial notar que  $U^f$  não é o subdiferencial de uma função convexa, isto é,  $g_x$  muda de função com o argumento do operador. Assim, a monotonicidade de  $U$  não é concedida "a priori" mas, temos o seguinte resultado fundamental.

**Proposição 3.2** ([9], p.11-12). (i) Se  $f$  é  $\theta$ -submonótona (satisfaz  $P_4^\bullet$ ) então  $U^f + \theta I$  é monótono.

(ii) Se  $f$  é monótona (satisfaz  $P_4$ ) então  $U^f$  é monótono.

*Demonstração.* (i) Tome  $x, y \in K$ ,  $v \in (U^f + \theta I)(x)$ ,  $w \in (U^f + \theta I)(y)$ , de modo que  $v - \theta x \in U^f(x)$  e  $w - \theta y \in U^f(y)$ . Então, usando a definição de  $g_x$ ,  $P_1$  e  $P_4^\bullet$  temos:

$$\begin{aligned} v - \theta x \in U^f(x) = \partial g_x(x) &\Rightarrow g_x(y) \geq g_x(x) + \langle v - \theta x, y - x \rangle \\ w - \theta y \in U^f(y) = \partial g_y(y) &\Rightarrow g_y(x) \geq g_y(y) + \langle w - \theta y, x - y \rangle \end{aligned}$$

Somando as duas desigualdades acima membro a membro obtemos:

$$\begin{aligned} - \langle v - \theta x, x - y \rangle + \langle w - \theta y, x - y \rangle &\leq g_x(y) - g_x(x) + g_y(x) - g_y(y) \\ &= f(x, y) - f(x, x) + f(y, x) - f(y, y) \\ &= f(x, y) + f(y, x) \leq \theta \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Segue que

$$- \langle v - w + \theta(x - y), x - y \rangle \leq \theta \|x - y\|^2$$

$$\begin{aligned}\langle v - w + \theta(x - y), x - y \rangle &\geq -\theta\|x - y\|^2 \\ \langle v - w, x - y \rangle - \theta\|x - y\|^2 &\geq -\theta\|x - y\|^2\end{aligned}$$

Então

$$\langle v - w, x - y \rangle \geq 0$$

Portanto, está estabelecida a monotonicidade de  $U^f + \theta I$ .

(ii) Segue de (i), basta fazer  $\theta = 0$  e teremos que  $U^f$  é monótono. ■

Ressaltamos que nossa análise de convergência para o MPPPE não exige monotonicidade da função, como por exemplo, a função tomada no Exemplo 2.7, e assim, a reformulação não está dentro do formato adotado pelos métodos de ponto proximal clássicos. O método de ponto proximal já vem sendo explorado para operadores não monótonos em [10] mas ainda não abrangem os resultados aqui obtidos. Os resultados mais próximos parecem ser aqueles que lidam com operadores hypomonotonos. Um operador  $T$  é dito hypomonotono quando  $T^{-1} + \rho I$  é monótono ( $I$  é o operador identidade). Verificamos anteriormente que  $f$  ser  $\theta$ -submonótona implica no operador  $U^f + \theta I$  ser monótono, mas é diferente para  $\theta$ -hypomonotonicidade significar que  $(U^f)^{-1} + \theta I$ .

**Proposição 3.3** ([9],p.14). *Seja  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$  um operador monótono. Se  $T + \lambda I$  é sobrejetor para algum  $\lambda > 0$  então  $T$  é monótono maximal.*

*Demonstração.* Tome o operador monótono  $\bar{T}$  tal que  $T \subset \bar{T}$  e o par  $(v, z)$  de forma que  $v \in \bar{T}(z)$ . Vamos provar que  $v \in T(z)$ . Defina  $b = v + \lambda z$ , como  $T + \lambda I$  é sobrejetor existe um  $x \in H$  tal que

$$b \in T(x) + \lambda x \subset \bar{T}(x) + \lambda x \quad (3.10)$$

Como  $v \in \bar{T}(z)$  temos que

$$b = v + \lambda z \in \bar{T}(z) + \lambda z \quad (3.11)$$

De (3.10) e (3.11) segue que

$$b \in \bar{T}(x) + \lambda x \quad \Rightarrow \quad b - \lambda x \in \bar{T}(x)$$

$$b \in \bar{T}(z) + \lambda z \quad \Rightarrow \quad b - \lambda z \in \bar{T}(z)$$

Pela monotonicidade de  $\bar{T}$  temos

$$\langle b - \lambda x - b + \lambda z, x - z \rangle \geq 0$$

Assim,

$$-\lambda\|x - z\|^2 = -\lambda \langle x - z, x - z \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\|x - z\|^2 \leq 0$$

Concluimos que  $x = z$ , e daí, substituindo  $x = z$  na primeira inclusão de (3.10) temos  $v + \lambda z \in T(z) + \lambda z$  o que implica em  $v \in T(z)$ . Segue que  $\bar{T} \subset T$ , isto é,  $\bar{T} = T$ ,  $T$  é maximal. ■

Agora usamos as Proposições 3.2 e 3.3 para garantir resultados de monotonicidade maximal para o operador  $T^f$ .

**Proposição 3.4** ([9],p.14-15). *Se  $f$  satisfaz  $P_1 - P_4$ , então o operador  $T^f$  é monótono maximal.*

*Demonstração.* Vamos utilizar a Proposição 3.3 para provar que  $T^f$  é monótono e  $T^f + \lambda I$  é sobrejetor para algum  $\lambda > 0$  assim, garantir que  $T^f$  é maximal monótono. Note que  $\tilde{U}^f(y) = \partial g_y^k(y)$  é monótono pela Proposição 3.2 com  $\theta = 0$ . Como  $N_K$  certamente é monótono pois é o subdiferencial da função indicadora  $I_K$  que é convexa, segue que o operador  $T^f = U^f + N_K$  é monótono. Agora abordamos a questão da sobrejetividade. Tome  $\lambda > 0$  e  $b \in H$ . Queremos mostrar que existe  $x \in K$  tal que  $b \in (T^f + \lambda I)x$ . Considere nossa regularização  $\tilde{f}$  com  $\bar{x} = \lambda^{-1}b$ ,  $\gamma = \lambda$ . Pela Proposição 2.4,  $PE(f, K)$  tem uma solução, digamos  $x$ . Defina

$$\tilde{g}_x(y) = \tilde{f}(x, y) = f(x, y) + \lambda \langle x - \lambda^{-1}b, y - x \rangle \quad (3.12)$$

Note que, como  $x$  resolve  $PE(\tilde{f}, K)$ ,

$$\tilde{g}_x(x) = \tilde{f}(x, x) = 0 \leq \tilde{f}(x, y) = \tilde{g}_x(y)$$

para todo  $y \in K$ . Assim,  $x$  minimiza  $\tilde{g}_x$  em  $K$ , o que equivale a dizer que  $x$  é um minimizador de  $g_x + I_K$  irrestrito, onde  $I_K$  é a função indicadora de  $K$ . Por suposição, temos que  $\partial g_x(z)$ , o que implica em  $\partial \tilde{g}_x(z)$ , são não vazios para todo  $z \in K$ . Por (27) e assumindo o fato de  $\partial I_K = N_K$ , temos

$$0 \in \partial(\tilde{g}_x + I_K)(x) = \partial g_x(x) + \lambda(x - \lambda^{-1}b) + N_K(x) = \partial g_x(x) + \lambda x - b + N_K(x)$$

Reescrevendo a igualdade anterior obtemos que

$$b \in \partial g_x(x) + \lambda x + N_K(x) = (U^f + N_K)(x) + \lambda x = (T^f + \lambda I)(x)$$

o que completa a verificação da sobrejetividade de  $T^f + \lambda I$ . Usando a Proposição 3.3 para concluir que  $T^f$  é maximal monótono. ■

No caso em que  $K = H$ , e  $f(x, y) = h(y) - h(x)$ , onde  $h : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é uma função convexa, temos  $\partial g_x = \partial h$  e  $N_K(x) = 0$  para todo  $x \in H$ , então temos  $T^f = U^f = \partial h$ . Como  $f$  satisfaz  $P_1 - P_4$ , pela proposição anterior provamos que o subdiferencial de uma função convexa é maximal.

Lembramos a seguir uma conhecida propriedade referente a um operador monótono maximal.

**Definição 3.2** ([9],p.15). *Dado  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$ , o gráfico de  $T$  é dito semifechado, se a seguinte propriedade for válida: Se  $\{x^k\} \subset H$  converge fracamente para  $x \in H$ ,  $\{y^k\} \subset H$  converge fortemente para  $y \in H$  e  $y^k \in T(x^k)$  para todo  $k$ , então  $y \in T(x)$ .*

**Proposição 3.5** ([16],p.105). *Se  $T : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$  é monótono maximal, então seu gráfico é semifechado.*

Agora podemos remover a hipótese de semicontinuidade superior fraca assumida no Teorema 3.1.

**Teorema 3.2** ([9],p.15). *Se  $f$  satisfaz  $P_1 - P_4$ ,  $PE(f, K)$  tem solução e  $f(x, \cdot)$  pode ser estendida, para todo  $x \in K$ , em um aberto  $W \supset K$ , preservando a convexidade, então a sequência  $\{x^k\}$  gerada pelo MPPPE converge fracamente para uma solução de  $PE(f, K)$  para todo  $x_0 \in K$ .*

*Demonstração.* Observe que estamos dentro das hipóteses do Teorema 3.1 itens (i) – (iii). Lembrando que  $P_4$  implica em  $P_4^\bullet$  e  $P_4^\sharp$  pela Proposição 2.3 item (i) e, também temos que  $S^d(f, K) = S(f, K)$  pela Proposição 2.3 item (iv). Defina  $g_x^k(y) = f_k(x, y)$  com  $f_k$  definida como em (3.14). Assim,  $x^{k+1}$  é solução do problema  $\min g_{x^{k+1}}^k(y)$  sujeito a  $y \in K$  e portanto deve satisfazer as condições de otimalidade de 1ª ordem, ou seja

$$0 \in \partial g_{x^{k+1}}^k(x^{k+1}) + N_K(x^{k+1}) = \partial g_{x^{k+1}}(x^{k+1}) + \gamma_k(x^{k+1} - x^k) + N_K(x^{k+1})$$

que pode ser reescrito como

$$v^{k+1} := \gamma_k(x^k - x^{k+1}) \in \partial g_{x^{k+1}}(x^{k+1}) + N_K(x^{k+1}) = T^f(x^{k+1}) \quad (3.13)$$

Note que  $T^f$  é monótona maximal pela Proposição 3.4, de modo que seu gráfico é semifechado pela Proposição 3.5. Além disso,  $\{x^k\}$  é limitada pelo Teorema 3.1 item (ii). Observe também que  $v^k$  é fortemente convergente a 0 pelo Teorema 3.1 item (ii) e  $\gamma_k$  limitada. Seja  $\bar{x}$  um ponto de acumulação fraco para  $\{x^k\}$ . Tomando limites ao longo da subsequência correspondente estamos exatamente na situação da Definição 3.2, de modo que  $0 \in T^f(\bar{x})$ . Pela Proposição 3.1,  $\bar{x}$  resolve  $PE(f, K)$ . A unicidade deste ponto de acumulação é consequência da sequência  $\{x^k\}$  para um ponto em  $S(f, K)$  e segue com o argumento usado na prova do Teorema 3.1 item (v). ■

As diferenças entre os Teoremas 3.1 e 3.2, além do fato da prova do último exigir a reformulação do problema de equilíbrio como um operador monótono maximal, está nas hipóteses exigidas em  $f$  onde conseguimos removendo a hipótese de semicontinuidade superior fraca de  $f(\cdot, y)$  e ainda sim conseguimos estabelecer uma solução fraca de  $PE(f, K)$ . Por outro

lado, a extensão de  $f(x, \cdot)$  para um  $W \supset K$  parece bastante inofensiva uma vez que  $f$  e  $K$  são independentes um do outro.

# Considerações Finais

Apresentamos nesta dissertação um método de ponto proximal para problemas de equilíbrio em espaços de Hilbert, verificamos que a sequência gerada por esse método e a sequência gerada pelo método de ponto proximal clássico coincidem. Analisamos e verificamos que a sequência gerada por MPPPE converge fracamente para uma solução de  $PE(f, K)$ . Diferente do método de ponto proximal clássico conseguimos garantir convergência fraca sem admitir a hipótese de monotonicidade maximal do operador.

Embora na demonstração da convergência desse método não tenhamos admitido o operador como sendo monótono maximal verificamos posteriormente que o operador satisfaz a hipótese de monotonicidade a partir do fato da  $f$  ser  $\theta$  – *submontona*.

Destacamos um caso particular onde o problema de minimização convexa ao ser colocado no formato da reformulação para  $PE(f, K)$ , se restringe ao subdiferencial de uma função convexa e fazendo uso dos resultados obtidos para operador monótono maximal obtemos que o subdiferencial de uma função convexa é maximal monótono.

Concluimos o trabalho apresentando dois teoremas. O primeiro teorema exige que  $f(\cdot, y)$  seja semicontínua superiormente fraca para seja possível estabelecer convergência fraca para uma solução de  $PE(f, K)$ . O segundo teorema exige que  $f(x, \cdot)$  possa ser estendida para todo  $x \in K$ , em um aberto,  $W \supset K$ , preservando a convexidade da função. Observamos que embora tenha-se chegado no mesmo resultado com o dois teoremas principais, as hipóteses do primeiro teorema são voltadas para as variações de monotonicidade apresentadas no capítulo 2. Com o Teorema 3.2 conseguimos garantir convergência fraca do método porém, trabalhamos somente com a reformulação para operador monótono maximal proposta por Iusem e Sosa.

# Referências Bibliográficas

- [1] AUBIN, J. P.; FRANKOWSKA, H., *Set Valueud Analysis*. Birkhauser, 1990. [6](#), [7](#), [10](#)
- [2] BLUM, E.; OETTLI, W., *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student, 123-145, 1994. [23](#), [26](#)
- [3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010. [5](#), [6](#), [9](#), [12](#)
- [4] FAN, K., *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann. 142. 305-310, 1961. [33](#)
- [5] FLAM, S. D., ANTIPIN, A. S. , *Equilibrium Programming Using Proximal-Like Algorithms*, Math. Program. 78, 29-41, 1997. [35](#)
- [6] IUSEM, A. N., *Proximal Point Methods in Optimization*, 20º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1995. [4](#), [17](#), [19](#), [20](#)
- [7] IUSEM, A. N.; KASSAY, G; SOSA, W., *On Certain Conditions For the Existence of Solutions of Equilibrium Problems*, Math. Program. Ser., 259-273, 2009.
- [8] IUSEM, A. N.; NASRI, M., *Inexact Proximal Point Methods for Equilibrium Problems in Banach Spaces*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **28**(11-12), 1279-1308, 2007.
- [9] IUSEM, A. N.; SOSA, W., *On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces*, Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 59:8, 1259-1274, 2010. [40](#), [42](#), [43](#), [44](#), [45](#), [46](#), [47](#)
- [10] KAPLAN, A.; TICHATSCHKE, R., *Proximal Point Methods and Nonconvex Optimization*, J. Global Optim., 389-406, 1998. [45](#)
- [11] LIMA, E. L., *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: SBM, 2009. [1](#), [2](#)
- [12] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*. Publicações matemáticas, IMPA, 2009. [7](#)
- [13] MINTY, G. J., *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*, Duke Math. J., 341-346, 1962. [19](#)

- 
- [14] NOOR, M. A.; RASSIAS, T. M. , *On Nonconvex Equilibrium Problems*, J. Math. Anal. Appl. **212**, 289-299, 2005. 35
- [15] OLIVEIRA, C. R., *Introdução à análise funcional.*, Publicações matemáticas, IMPA, 2010. 2, 3, 4, 6
- [16] PASCALI, D.; SBURLAN, S., *Nonlinear Mappings of Monotone Type*, Editura Academiei, Bucarest, 1978. 47
- [17] VAN TIEL, J.; WILEY, J., *Convex Analysis, an Introductory Text*, New York, 1989. 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17