

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE  
INVARIANTES EM TEMPO UNIFORME.*

ELZIMAR DE OLIVEIRA RUFINO

MANAUS

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ELZIMAR DE OLIVEIRA RUFINO

*CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE  
INVARIANTES EM TEMPO UNIFORME.*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial com ênfase em Teoria do Controle.

Orientador: Prof. Dr. Victor Ayala B.

MANAUS  
2009

ELZIMAR DE OLIVEIRA RUFINO

CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE  
INVARIANTES EM TEMPO UNIFORME.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial com ênfase em Teoria do Controle.

Manaus, 20 de fevereiro de 2009.

BANCA EXAMINADORA

.....  
Prof. Dr. Victor Ayala B., Presidente  
Universid Católica del Norte, Antofagasta, Chile

.....  
Prof. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy,  
Universidade Federal do Amazonas

.....  
Prof. Dr. José Kenedy Martins,  
Universidade Federal do Amazonas

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado forças para vencer as adversidades.

À minha família que, mesmo distante, sempre torceu por mim, aos professores do mestrado, aos colegas do mestrado pela ajuda e companheirismo. Agradeço, em especial, a meu orientador professor Victor Ayala pela paciência, compreensão e oportunidade de conhecer, pelo menos um pouco, da teoria do controle.

Também sou grato à FAPEAM - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - pelo apoio financeiro através do programa RH - Amazônia. Agradeço ainda aos meus amigos Fernando Veras e Júlio, orientandos de doutorado do professor Ayala, pelas dicas que me foram dadas, as quais foram importantes para a compreensão do assunto estudado, e pela amizade.

Agradeço enfim, a todos os que de uma forma ou outra contribuíram para que os objetivos traçados nessa caminhada fossem alcançados.

## RESUMO

### CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE INVARIANTES EM TEMPO UNIFORME.

Este trabalho tem como objetivo principal dar uma demonstração da controlabilidade em tempo uniforme de um sistema de controle invariante  $\Sigma$  em  $G$ , satisfazendo a condição *LARC*, onde  $G$  é um grupo de Lie conexo, compacto e semisimples. Esse resultado é provado primeiramente por Jurdjevic e Sussmann. Porém a prova que será dada aqui (tenha como referência o tutor dessa dissertação) usa outro argumento que provém diretamente da definição de grupo de Lie semisimples.

# ABSTRACT

## CONTROLLABILITY OF INVARIANT CONTROL SYSTEMS AT UNIFORM TIME

This work mainly aims to demonstrate of the controllability at uniform time of a invariant system  $\Sigma$  in  $G$ , under the LARC condition, where  $G$  is a connected, compact and semisimple Lie group. This result was firstly proved by Jurdjevic and Sussmann. But the proof is given here with professor Ayala use another argument coming directly from the semisimple Lie group definition.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Sistemas de Controle Lineares</b>	<b>3</b>
1.1 Controlabilidade sem restrições no controle . . . . .	3
1.2 Sistemas Lineares com Controles Limitados . . . . .	10
<b>2 Tópicos de Grupos e Álgebras de Lie</b>	<b>16</b>
2.1 Generalidades sobre variedades diferenciáveis . . . . .	16
2.2 Grupos de Lie . . . . .	20
2.3 Vizinhança da identidade . . . . .	20
2.4 Grupos de Lie Lineares . . . . .	22
2.5 A álgebra de Lie de um grupo de Lie . . . . .	27
2.6 Campos invariantes . . . . .	29
<b>3 Sistemas Invariantes em Grupos de Lie Lineares</b>	<b>34</b>
3.1 A matriz exponencial . . . . .	34
3.2 Campos de vetores invariantes à esquerda . . . . .	37
3.3 Sistemas de controle esquerda-invariantes . . . . .	41
3.4 Sistemas de controle direita-invariantes . . . . .	43
3.5 Propriedades básicas das órbitas e dos conjuntos acessíveis . .	45
3.6 Acessibilidade normal . . . . .	48
3.7 Condições gerais de controlabilidade . . . . .	49
3.8 Sistemas induzidos no espaço homogêneo . . . . .	51
<b>4 Controlabilidade em grupos de Lie compactos</b>	<b>58</b>
4.1 Técnicas de extensão para sistemas esquerda-invariantes . . .	58
4.1.1 O saturado de um sistema direita-invariante . . . . .	58
4.2 O saturado de Lie de um sistema invariante . . . . .	60
<b>5 Controlabilidade em tempo Uniforme</b>	<b>65</b>
5.1 Existência de um tempo uniforme para $\Sigma$ . . . . .	67

5.2 Aplicações . . . . .	71
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>



# Introdução

A teoria do controle até o começo dos anos 70 foi estudada considerando-se apenas o espaço de estado  $\mathbb{R}^n$ . A partir daí o problema de controle passou a ser estudado em grupos de Lie. Em 1972, Brockett em [4] considerou problemas aplicados a sistemas de controle em grupos de matrizes e seus espaços homogêneos. No mesmo ano Jurdjevic e Sussmann publicaram em [11] uma generalização das idéias de Brockett ao considerar o espaço de estado um grupo de Lie. Eles estabeleceram as propriedades básicas dos conjuntos acessíveis e das órbitas e resolveram os casos Lie compacto e sistemas homogêneos. Em 1981, Kupka e Jurdjevic em [10] estudaram o caso semisimples. Trabalhando no contexto mais geral de semigrupos, San Martin e Tonelli em [17] estabeleceram que a controlabilidade de sistemas bilineares pode ser reduzida a controlabilidade de sistemas invariantes em grupos semisimples. Victor Ayala resolveu o caso da controlabilidade em grupos de Lie nilpotentes em [1] (1995). Yu Sachkov, em [15] generalizou as idéias de Ayala no sentido de espaço de estado para o caso completamente solúvel no ano 1996.

Sem querer desmerecer os outros trabalhos não citados aqui, as referências citadas acima foram essenciais para o desenvolvimento da teoria de controle em grupos de Lie.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. No capítulo 1 será apresentada a teoria básica dos sistemas de controles lineares em  $\mathbb{R}^n$ , considerando-se controles irrestritos e depois controles restritos. O capítulo 2 consiste de alguns tópicos de grupos e álgebras de Lie, essenciais para o desenvolvimento desse trabalho. Serão apresentados os exemplos clássicos de grupos de Lie lineares bem como suas respectivas álgebras de Lie. Consta ainda a teoria básica dos campos vetoriais invariantes à esquerda (à direita) e sua relação com o espaço  $T_{Id}G$ , tangente ao grupo  $G$  no elemento identidade. Essa relação é essencial na teoria do controle em grupos de Lie. No capítulo seguinte trataremos de sistemas invariantes em grupos de Lie lineares. Serão apresentadas as propriedades básicas das órbitas, dos conjuntos acessíveis e as condições gerais de controlabilidades. Veremos também como sistemas invariantes em um grupo de Lie induzem sistemas em uma variedade ( $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$ , etc), chamadas

de espaços homogêneos. A idéia básica é estudar a controlabilidade no espaço homogêneo via controlabilidade no grupo de Lie.

No capítulo 4 será tratada a questão da controlabilidade em grupos de Lie compactos. Veremos o conceito de saturado de Lie de um sistema invariante e a partir daí uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade de um grupo de Lie conexo e compacto.

No capítulo 5 consideraremos um sistema de controle invariante em um grupo de Lie linear conexo, compacto e semisimples. Sob essas hipóteses será demonstrado o resultado principal desse trabalho: sob a condição *LARC* (controlável), o sistema é controlável em tempo uniforme. Esse resultado é demonstrado por Ayala-Tribuzzy-José em [2], utilizando-se o fato de que uma álgebra de Lie semisimples não possui ideais de codimensão 1.

# Capítulo 1

## Sistemas de Controle Lineares

Neste capítulo descrevemos as propriedades da classe mais simples dos sistemas de controle, os sistemas de controles lineares. Primeiro consideraremos sistemas sem restrições no controle. Isto nos conduz essencialmente a problemas de Álgebra Linear. Ao impormos restrições no controle somos levados a problemas com postura completamente diferente. Veja, por exemplo, [3], [6], [7].

Deve ser notado que, em despeito à sua aparente simplicidade, sistemas de controles lineares, em particular os de alta dimensão, estão presentes na vasta maioria das aplicações da teoria do controle e também conduz a muitos problemas matemáticos interessantes que não poderão ser discutidos aqui. O leitor poderá [12], [18], [19]

### 1.1 Controlabilidade sem restrições no controle

Os sistemas de controles lineares possuem a forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1)$$

com matrizes  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{d \times m}$ ; as funções  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  são chamadas controles e estão em um conjunto  $\mathcal{U}$  de controles admissíveis. Uma das questões que se costuma analisar inicialmente é o comportamento do sistema considerando-se todos os controles em  $\mathcal{U}$ .

Naturalmente, podemos considerar  $A$  e  $B$  também como aplicações lineares em  $\mathbb{R}^d$  e de  $\mathbb{R}^m$  para  $\mathbb{R}^d$ , respectivamente. As soluções  $\varphi(t, t_0, x_0, u)$  de (1.1) com condição inicial  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$  são, pela fórmula da variação das constantes, dadas por

$$\varphi(t, t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Segue imediatamente desta fórmula que, pondo  $u(t_0 + \cdot)(s) := u(t_0 + s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , temos

$$\varphi(t, t_0, x_0, u) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_0-s)}Bu(t_0+s)ds = \varphi(t-t_0, 0, x_0, u(t_0+\cdot)). \quad (1.3)$$

Se  $t_0 = 0$ , a solução (ou trajetória) denotaremos por  $\varphi(t, x_0, u)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Claramente, a integral em (1.2) não é bem definida para cada função  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Aparentemente, isto é suficiente para requerer que elas sejam localmente integráveis, isto é, integrabilidade de Lebesgue em cada intervalo limitado. Então também o produto com as funções  $s \mapsto e^{A(t-s)}B$  é localmente integrável. Às vezes requeriremos mais regularidade, assim o conjunto  $\mathcal{U}$  de controles admissível pode, por exemplo, ser um dos seguintes espaços de funções:

- a)  $L_{1,loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{localmente integrável}\}$
- b)  $L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{essencialmente limitado}\}$ ,
- c)  $C_{pc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{constante por partes}\}$

Por todo este capítulo, nós consideraremos  $\mathcal{U} = C_{pc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ . Observe que as soluções do sistema (1.1) para  $u$  em qualquer dos espaços dados em a) ou b) diferem das soluções em c) apenas pelo fecho (topológico).

Uma questão básica dos sistemas de controle é a controlabilidade: dados dois pontos  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^d$  existe um controle admissível  $u \in \mathcal{U}$  e um tempo  $T > 0$  com  $\varphi(T, x_0, u) = x_1$ ? Então, caso exista, dizemos que  $x_1$  é alcançado desde  $x_0$  ou que  $x_0$  pode ser conduzido para  $x_1$ .

tratada na forma mais geral. Definimos o conjunto dos pontos alcançados a partir de  $x_0$  no tempo  $T > 0$  como

$$\mathcal{O}_T^+(x_0) = \{x_1 \in \mathbb{R}^d; \text{ existe } u \in \mathcal{U} \text{ com } x_1 = \varphi(T, x_0, u)\},$$

e o conjunto dos pontos que podem ser conduzidos no tempo  $T > 0$  para  $x_1$  como

$$\mathcal{O}_T^-(x_1) = \{x_0 \in \mathbb{R}^d; \text{ existe } u \in \mathcal{U} \text{ com } x_1 = \varphi(T, x_0, u)\}.$$

Consideraremos, às vezes, a notação

$$\mathcal{R}(T) = \mathcal{O}_T^+(0) \text{ e } \mathcal{R} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{R}(T); \quad \mathcal{C}(T) = \mathcal{O}_T^-(0) \text{ e } \mathcal{C} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{C}(T).$$

São de interesse especial os sistemas onde cada ponto pode ser alcançado a partir de um ponto inicial dado. Veja o seguinte lema.

**Lema 1.1.1.** *Sejam  $S > T > 0$ . Então (i)  $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}(S)$ ; (ii)  $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T) \Rightarrow (\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(t) \text{ para todo } t \geq S)$  (iii)  $\mathcal{R}(T)$  e  $\mathcal{R}$  são subespaços de  $\mathbb{R}^d$ .*

*Demonstração.* (i) Para  $y \in \mathcal{R}(T)$  existe  $u \in \mathcal{U}$  com  $y = \varphi(T, 0, u)$ . Defina  $v \in \mathcal{U}$  por

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \in [0, S - T) \\ u(t - S + T) & \text{para } t \in [S - T, S] \end{cases}$$

Então  $y = \varphi(S, 0, v) \in \mathcal{R}(S)$  (*espera na origem o tempo necessário*).

(iii) Sejam  $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ . Então existem controles  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$  com

$$y_i = \varphi(T, 0, u_i) = \int_0^T e^{A(T-s)} B u_i(s) ds \text{ para } i = 1, 2$$

e daí, pela linearidade em  $u$ ,

$$y_1 + y_2 = \int_0^T e^{A(T-s)} B [u_1(s) + u_2(s)] ds = \varphi(T, 0, u_1 + u_2).$$

Novamente pela linearidade, temos para  $\lambda \in \mathbb{R}$  que  $\lambda y_1 = \varphi(T, y_1, \lambda u) \in \mathcal{R}(T)$ . Daí  $\mathcal{R}(T)$  é um subespaço. Para  $\lambda \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in \mathcal{R}$ , a afirmação (i) mostra que podemos assumir  $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$  para algum  $T > 0$ , daí  $\lambda y_1 + y_2 \in \mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}$ .

(ii) Seja  $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$ . Para  $x \in \mathcal{R}(2S - T)$  existe  $u \in \mathcal{U}$  com

$$x = \varphi(2S - T, 0, u) = \int_0^{2S-T} e^{A(2S-T-s)} B u(s) ds.$$

Uma vez que  $\varphi(S, 0, u) \in \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$  existe  $v \in \mathcal{U}$  com

$$\varphi(S, 0, u) = \varphi(T, 0, v) = \int_0^T e^{A(T-s)} B v(s) ds.$$

(*exceto o tempo  $S - T$* ). Defina  $w \in \mathcal{U}$  por

$$w(t) = \begin{cases} v(t) & \text{para } t \in [0, T) \\ u(t - T + S) & \text{para } t \in [T, S]. \end{cases}$$

Pela invariância do tempo obtem-se

$$\begin{aligned} \varphi(S, 0, w) &= \int_0^T e^{A(S-s)} Bw(s) ds + \int_T^S e^{A(S-s)} Bw(s) ds \\ &= e^{A(S-T)} \int_0^T e^{A(T-s)} Bv(s) ds + \int_T^S e^{A(S-s)} Bu(s - T + S) ds \\ &= e^{A(S-T)} \int_0^S e^{A(S-s)} Bu(s) ds + \int_S^{2S-T} e^{A(2S-T-s)} Bu(s) ds \\ &= \int_0^T e^{A(2S-T-s)} Bu(s) ds + \int_S^{2S-T} e^{A(2S-T-s)} Bu(s) ds \\ &= \varphi(2S - T, 0, u) = x; \end{aligned}$$

aqui nós usamos  $\varphi(S, 0, u) = \varphi(T, 0, v)$  e a transformação  $s' = s - T + S$ . Daí  $x \in \mathcal{R}(S)$  e  $\mathcal{R}(2S - T) = \mathcal{R}(S)$ . Usando o procedimento de indução mostramos que  $\mathcal{R}(nS - T) = \mathcal{R}(S)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Agora dado  $t \geq T$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0S - T \leq t < (n_0 + 1)S - T$ . Pelo item *i*) resulta que

$$\mathcal{R}(n_0S - T \leq t) \subset \mathcal{R}(t) \subset \mathcal{R}(n_0 + 1)S - T), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $\mathcal{R}(nS - T) = \mathcal{R}(S)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , segue que

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(nS - T) = \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T), \quad \forall t \geq T. \blacksquare$$

Uma consequência é o seguinte teorema

**Teorema 1.1.1.**  $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}$ ,  $\forall t > 0$ .

*Demonstração.* Considere  $\epsilon > 0$ . O item *iii*) do lema 1.1.1 garante que  $\mathcal{R}(t)$  é subespaço de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\forall t > 0$ . Em particular  $\mathcal{R}(\frac{i\epsilon}{d+1})$ ,  $1 = 1, 2, \dots, d$ , são subespaços de  $\mathbb{R}^d$ . Como  $\epsilon > \frac{d\epsilon}{d+1} > \dots > \frac{2\epsilon}{d+1} > \frac{\epsilon}{d+1}$ , o item *i*) do mesmo lema nos dá a inclusão de subespaços

$$\mathcal{R}\left(\frac{\epsilon}{d+1}\right) \subset \mathcal{R}\left(\frac{2\epsilon}{d+1}\right) \subset \dots \subset \mathcal{R}\left(\frac{d\epsilon}{d+1}\right) \subset \mathcal{R}(\epsilon).$$

Agora veja que  $\dim \mathcal{R}\left(\frac{\epsilon}{d+1}\right) \geq 1$  e se todos esses subespaços fossem de dimensões diferentes então  $\dim \mathcal{R}(\epsilon) \geq d + 1 > \dim \mathbb{R}^d = d$ . Mas isso é uma contradição. Logo existem ao menos  $i_1, i_2$  com  $i_1 < i_2$  tais que  $\mathcal{R}\left(\frac{i_1\epsilon}{d+1}\right) = \mathcal{R}\left(\frac{i_2\epsilon}{d+1}\right)$ . Novamente pelo item *ii*) do lema 1.1.1 temos  $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}\left(\frac{i_1\epsilon}{d+1}\right)$  para todo

$t \geq \frac{\epsilon}{d+1}$ . Em particular  $\mathcal{R}(\epsilon) = \mathcal{R}(t)$ ,  $\forall t \geq \epsilon$ . Sendo  $\epsilon$  arbitrário segue o resultado desejado, ou seja,

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(s), \quad \forall t, s > 0.$$

Além disso,  $\mathcal{R} = \mathcal{O}^+(0) = \mathbb{R}^d$  se e somente se  $\mathcal{O}_t^+(x_0) = \mathbb{R}^d$  para algum (e então para todo)  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  e  $t > 0$ . De fato, suponha que  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t) = \mathbb{R}^d$  e considere para  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^d$  a diferença  $x_1 - \varphi(t, x_0, 0) \in \mathcal{R}(t)$ . Então, existe  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $x_1 - \varphi(t, x_0, 0) = \varphi(t, 0, u)$ ,

então

$$x_1 = \varphi(t, x_0, 0) + \varphi(t, 0, u) = \varphi(t, x_0, u),$$

e segue então que  $\mathcal{O}_t^+(x_0) = \mathbb{R}^d$ . Para o inverso, observe que

$$\mathcal{O}_t^+(x_0) = \left\{ e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, u \in \mathcal{U} \right\} = e^{At}x_0 + \mathcal{R}(t).$$

Resultados análogos são válidos para  $\mathcal{C}(t)$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{O}_t^-(x_0)$ .

Nosso procedimento seguinte caminha para uma caracterização dos conjuntos alcançáveis (atingíveis) em termos do par de matrizes  $(A, B)$ .

**Lema 1.1.2.** *Sejam  $V \subset \mathbb{R}^d$  um subespaço e  $A$  uma aplicação linear em  $\mathbb{R}^d$ . Então o menor subespaço linear  $A$ -invariante  $\langle A|V \rangle$  contendo  $V$  é dado por*

$$\langle A|V \rangle = V + AV + \dots + A^{d-1}V$$

*Demonstração.* : Uma vez que  $\mathbb{R}^d$  é um subespaço linear  $A$ -invariante contendo  $V$  e a interseção de tais subespaços possuem as mesmas propriedades, existe um menor subespaço linear  $A$ -invariante contendo  $V$ . Agora, a  $A$ -invariância implica  $A^kV \subset \langle A|V \rangle$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e daí a inclusão  $\supset$  é confirmada. Para a inclusão inversa, basta mostrarmos que  $V + AV + \dots + A^{d-1}V$  é  $A$ -invariante. O polinômio característico  $\chi_A$  é

$$\chi_A(z) = \det(zI - A) = z^d + a_{n-1}z^{d-1} + \dots + a_1z + a_0$$

com coeficientes  $a_i \in \mathbb{R}$ . O teorema de Cayley-Hamilton implica

$$\chi_A(A) = A^d + a_{d-1}A^{d-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0,$$

e daí

$$A^d = -a_{d-1}A^{d-1} - \dots - a_1A - a_0I.$$

Isto mostra a  $A$ -invariância de  $V + AV + \dots + A^{d-1}$ . ■

Defina para  $t > 0$  a matriz em  $\mathbb{R}^{d \times d}$  por

$$W_t := \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

(aqui  $^T$  denota transposição). Esta matriz (e a correspondente aplicação linear) é simétrica positiva semi-definida, visto que para  $x \in \mathbb{R}^d$

$$x^T W_t x = \int_0^t x^T e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} x d\tau = \int_0^t |B^T e^{A^T \tau} x|^2 d\tau,$$

aqui  $|\cdot|$  denota a norma Euclideana.

**Lema 1.1.3.** Para todo  $t > 0$  tem-se  $\langle A | \text{Im} B \rangle = \text{Im} W_t$ .

*Demonstração.* É suficiente mostrar para o correspondente complemento ortogonal que  $\langle A | \text{Im} B \rangle^\perp = [\text{Im} W_t]^\perp$ .

Dado  $x \in \langle A | \text{Im} B \rangle^\perp$  segue que  $x^T A^k B = 0$  para todo  $k = 0, 1, \dots$  e daí

$$x^T e^{At} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^T A^k B = 0 \text{ para todo } t \geq 0.$$

Assim  $x^T W_t = 0$ , ou seja,  $x \in [\text{Im} W_t]^\perp$ . Com isso mostramos que  $\langle A | \text{Im} B \rangle^\perp \subset [\text{Im} W_t]^\perp$ .

Seja agora  $x \in [\text{Im} W_t]$  para algum  $t > 0$ . Então

$$0 = x^T W_t x = \int_0^t |B^T e^{A^T \tau} x|^2 d\tau \text{ e daí } x^T e^{A\tau} B = 0 \text{ para todo } 0 \leq \tau \leq t, \forall t > 0.$$

Em particular, para  $\tau = 0$ ,  $x^T B = 0$ . Sucessivas diferenciações em  $x^T e^{A\tau} B = 0$  e avaliando em  $\tau = 0$  nos dá

$$x^T A B = 0, x^T A^2 B = 0, \dots, x^T A^{d-1} B = 0.$$

Daí, vemos que  $x$  é ortogonal à  $\text{Im} B + A \text{Im} B + \dots + A^{d-1} \text{Im} B = \langle A | \text{Im} B \rangle$ . Assim,  $\langle A | \text{Im} B \rangle^\perp \supset \text{Im} W_t$ . ■

O próximo teorema caracteriza os conjuntos alcançáveis a partir da origem.

**Teorema 1.1.2.** O sistema (2.1) satisfaz

$$\mathcal{R} = \mathcal{C} = \text{Im}[B A B \dots A^{d-1} B] = \langle A | \text{Im} B \rangle,$$



*Demonstração.* A última equação segue do lema 2. Vamos mostrar somente que  $\mathcal{R}(t) = \langle A | \text{Im} B \rangle$ . A afirmação para  $\mathcal{C}$  segue analogamente.

„ Para  $x \in \mathcal{R}$  existe  $u \in \mathcal{U}$  e  $t > 0$  com  $x = \varphi(t, 0, u)$ . Para todo  $\tau \in [0, t]$

$$e^{A(t-\tau)} B u(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A(t-\tau)^k B u(\tau) \in \langle A | \text{Im} B \rangle.$$

A pertinência mencionada acima justifica-se pelo fato de que  $\langle A | \text{Im} B \rangle$  é um subespaço vetorial de dimensão finita e portanto fechado. Daí ( usando a definição de integral de Riemann)

$$x = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \in \langle A | \text{Im} B \rangle,$$

Para a inclusão oposta, dado  $x \in \langle A | \text{Im} B \rangle$  o Lema 3 mostra que existe  $z \in \mathbb{R}^d$  com

$$x = W_t z = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T \tau} z d\tau.$$

Para um controle  $u \in \mathcal{U}$  com  $u(\tau) = B^T e^{A^T \tau} z$  para  $\tau \in [0, t]$  segue que

$$\varphi(t, 0, u) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T \tau} z d\tau = x, \text{ daí } x \in \mathcal{R}(t). \blacksquare$$

A seguinte consequência imediata caracteriza controlabilidade completa diretamente em termos do par de matrizes  $(A, B)$ .

**Teorema 1.1.3.** *Para o sistema (2.1) o conjunto  $\mathcal{R}$  dos pontos alcançáveis (atingíveis) desde a origem satisfaz  $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$  se e somente se a matriz  $[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B]$  possui posto  $d$ . Então o sistema ( e também o par de matrizes  $(A, B)$ ) é chamado completamente controlável.*

**Exemplo 1.** O problema da linearização do pêndulo ( $k \geq 0$ ) é descrito por

$$\ddot{\varphi}(t) - k\dot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}.$$

Fazendo  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}$ , obtemos o seguinte sistema de controle linear

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

A matriz de acessibilidade do sistema é

$$[B \ AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

a qual possui posto 2. Pelo teorema 1.1.3 o sistema é completamente controlável.

## 1.2 Sistemas Lineares com Controles Limitados

Consideraremos sistemas de controles lineares com restrições nos controles da seguinte forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu(t) \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in \mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U, u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)\}, \quad (1.4)$$

onde  $U \subset \mathbb{R}^m$  é convexo e compacto com  $0 \in \text{int}U$  e  $A$  e  $B$  como em (1.1). Usaremos a mesma notação para conjuntos alcançáveis, etc como na seção anterior. Por toda essa seção assumiremos que  $(A, B)$  é controlável, isto é, é satisfeita a condição de Kalman, ou seja, o posto da matriz  $[B \ AB \ \dots \ A^{d-1}B]$  é  $d$ .

**Exemplo 2. (O problema de deter o trêm na estação em tempo mínimo)** Considere um trêm movendo-se em uma linha reta com velocidade  $y_0$  no momento em que está a uma distância  $x_0$  de uma dada estação. Sejam  $x(t)$  a distância à estação no instante  $t$ ,  $y(t)$  sua velocidade e  $u(t)$  o controle determinado pela aceleração,  $|u(t)| \leq 1$ . O princípio do máximo de Pontriagin (veja [18]) determina que o controle ótimo é do tipo constante por partes, com valores na fronteira e ocorre com não mais de uma troca. Então devemos considerar somente  $u = 1$  e  $u = -1$ . A equação de Newton  $F = m.a$  (considerando  $m=1$ ) nos dá a família  $\dot{x} = y$  e  $\dot{y} = u$  de equações diferenciais que definem o sistema linear

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad u \in [-1, 1].$$

Note que  $[B \ AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  possui posto 2. A condição de Kalman não garante que o sistema é completamente controlável. Porém, como a matriz  $A$  tem todos os seus autovalores com parte real zero, então o sistema é completamente controlável (veja [6], pp.62). Pode-se observar também que cada estado de  $\mathbb{R}^2$  pode ser conduzido à origem apenas com parábolas. Veja na figura (1.1), a solução qualitativa do problema, ou seja, como conduzir o ponto  $(x_0, y_0)$  à origem no tempo mínimo através dos controles  $u = 1$  e  $u = -1$ . Projetando-se ortogonalmente o ponto  $P$  no eixo  $x$  obtém-se o ponto  $M$ ; deve-se acelerar o máximo ( $u = 1$ ) até o ponto  $M$  e depois usar o freio ( $u = -1$ ) até a sua parada que é a origem.

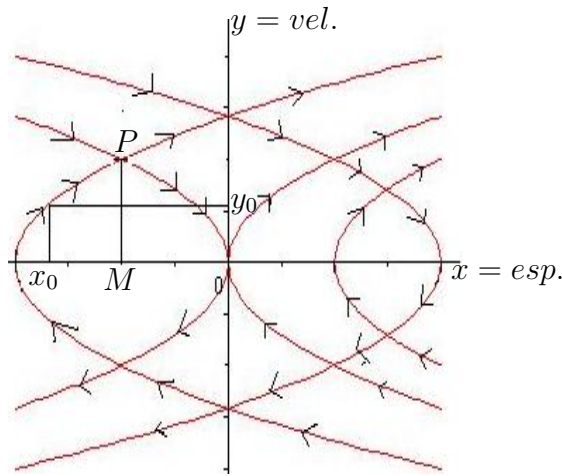


Figura 1.1: Descrição geométrica do problema do trêm.

**Definição 1.2.1.** Um subconjunto não vazio  $D$  do espaço de estado  $\mathbb{R}^d$  é um conjunto de controle se:

- i) para todo  $x \in D$  existe  $u \in \mathcal{U}$  com  $\varphi(t, x, u) \in D$  para todo  $t \geq 0$ ;
- ii) para todo  $x \in D$ , tem-se  $D \subset \mathcal{O}^+(x)$ ;
- iii)  $D$  é maximal com estas propriedades.

A condição de maximalidade significa que cada  $D' \supset D$  satisfazendo as propriedades i) e ii) coincide com  $D$ . A propriedade i) é também chamada de invariância controlada ou viabilidade.

Discutiremos agora uma propriedade importante dos conjuntos alcançáveis.

**Definição 1.2.2.** O sistema (1.4) é localmente acessível em  $x \in \mathbb{R}^d$ , se para todo  $T > 0$ :

$$\text{int } \mathcal{O}_{\leq T}^+(x) \text{ e } \text{int } \mathcal{O}_{\leq T}^-(x) \neq \emptyset$$

A seguinte proposição mostra que a acessibilidade local é determinada pelas matrizes  $A$  e  $B$ .

**Proposição 1.2.1.** O sistema (1.4) possui  $\text{int } \mathcal{O}_T^+(x) \neq \emptyset$  para algum  $T > 0$  e algum  $x \in \mathbb{R}^d$  ( e então para todo)  $\Leftrightarrow$  o critério de Kalman é satisfeito  $\Leftrightarrow$  ocorre a acessibilidade local.

*Demonstração.* Suponha que o critério de Kalman é satisfeito. Considere para  $T > 0$  a aplicação contínua linear entre espaços de Banach

$$L : L_\infty([0, T], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^d : u \mapsto \varphi(T, 0, u).$$

A linearidade é clara e a continuidade (isto é, a limitação) segue de

$$|\varphi(T, 0, u)| = \left| \int_0^T e^{A(T-s)} B u(s) ds \right| \leq \int_0^T |e^{A(T-s)} B u(s)| ds \leq \sup_{t \in [0, T]} |e^{At}| |B| T |u|_\infty.$$

Como a condição de Kalman é satisfeita, pelo Teorema (1.1.2) essa aplicação é sobrejetiva. Então  $L$  é uma aplicação linear limitada, sobrejetiva entre espaços de Banach e pelo teorema da aplicação aberta leva conjuntos abertos em conjuntos abertos. Como  $\text{int}U \neq \emptyset$ , pois  $0 \in \text{int}U$ , o conjunto  $\mathcal{U}_{[0, T]} = \{u \in L_\infty([0, T], \mathbb{R}^m), u(t) \in U \text{ para quase todo } t \in [0, T]\}$  possui interior não vazio (por ser imagem inversa de uma vizinhança aberta de zero pela aplicação  $L$ ). Pela linearidade

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_T^+(x) &= \{y \in \mathbb{R}^n, y = \varphi(T, x, u) \text{ para algum } u \in \mathcal{U}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n, y = \varphi(T, x, 0) + \varphi(T, 0, u) \text{ para algum } u \in \mathcal{U}\} \\ &= \varphi(T, x, 0) + \{L(u), u \in \mathcal{U}\}. \end{aligned}$$

Isto mostra que  $\mathcal{O}_T^+(x)$  é uma translação do conjunto  $\{L(u), u \in \mathcal{U}\}$  o qual possui interior não vazio por ser imagem do conjunto com interior não vazio  $\mathcal{U}$  pela aplicação aberta  $L$ . Assim  $\mathcal{O}_T^+(x)$  possui interior não vazio; com argumento análogo mostra-se que  $\mathcal{O}_T^-(x)$  possui interior não vazio. Reciprocamente, se ocorre a acessibilidade local então, em particular, o conjunto dos pontos alcançáveis a partir da origem  $\mathcal{O}_T^+(0)$  possui interior não vazio. Daí resulta a condição de Kalman, uma vez que de outro modo  $\mathcal{O}_{\leq T}^+(0)$  estaria contido em um subespaço próprio.

O próximo teorema caracteriza conjuntos de controle para um sistema de controle linear com controles limitados. Damos apenas uma idéia da prova, para mais detalhes veja referência [6].

**Teorema 1.2.1.** *Para o sistema (1.4) seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  convexo e compacto com  $0 \in \text{int} U$ , e  $(A, B)$  controlável, isto é, a condição do posto de Kalman,  $[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = d$  é satisfeita. Então existe um único conjunto controle  $D$  com interior não vazio; contendo a origem em seu interior e  $D = \text{cl } \mathcal{O}^+(0) \cap \mathcal{O}^-(0)$ .*

*Demonstração.* A controlabilidade garante que no tempo  $T = 1$  as órbitas positiva e negativa do sistema com restrições no controle coincidem com  $\mathbb{R}^d$ . Daí, usando o fato de que  $0 \in \text{int}U$ , e o teorema da aplicação aberta na função

$$L_\infty([0, 1], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^d : u \mapsto \varphi(1, 0, u)$$

resulta que  $0 \in \text{int}\mathcal{O}_1^- \cap \text{int}\mathcal{O}_1^+$ . Daí a origem está contida no interior de um conjunto controle. Para provar a unicidade, considere  $D$  um conjunto controle com interior não vazio. Então, pela controlabilidade exata no interior de um conjunto controle encontra-se um ponto  $x \in \text{int}D$ , um número  $\mu > 1$ , tempos  $T_2 > T_1 > 0$ , e um controle  $T_2$ -periódico  $u \in \mathcal{U}$  com  $\varphi(T_1, x, u) = \mu x$  e  $\varphi(T_2, x, u) = x$ . A linearidade implica que para todo  $\alpha \in [0, 1]$

$$\varphi(T_1, \alpha x, \alpha u) = \alpha \mu x \text{ e } \varphi(T_2, \alpha x, \alpha u) = \alpha x.$$

Assim, todos os pontos  $\alpha x, \alpha \in (0, 1)$ , estão no conjunto controle  $D$ . Pelo fato de que a origem está no interior de um conjunto controle, segue a unicidade.

**Exemplo 3.** Considere o sistema bi-dimensional (veja [6])

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad u(t) \in U = [-1, 1].$$

Pode-se ver que existe um único conjunto de controle  $D$  com interior não-vazio (veja a figura 1.2) e este conjunto é dado por  $D = (-1, 1) \times [-1, 1]$ .

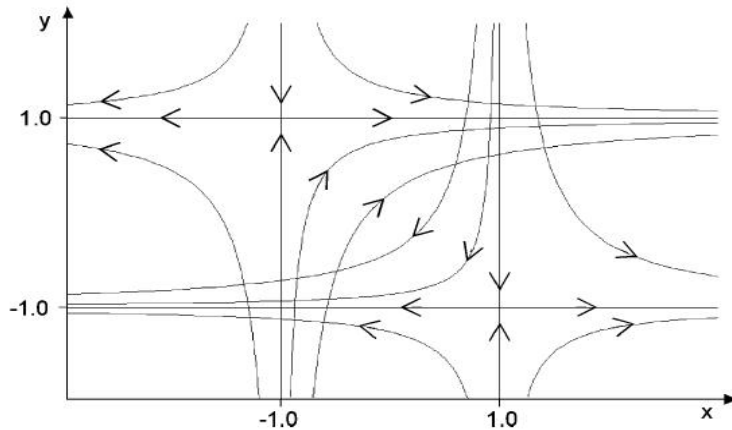


Figura 1.2: Retrato de fase para  $u = 1$  e  $u = -1$

Observe que quaisquer dois pontos em  $D = (-1, 1) \times [-1, 1]$  podem ser conectados usando concatenações de trajetórias do sistema, se necessário. Se um ponto  $y$  não está em  $D$  então existem pontos de  $D$  que não podem ser conectados a  $y$ .

Para encerrar este capítulo faremos alguns comentários que relacionam este capítulo com o capítulo 5. Tais comentários se referem ao que chamamos de controlabilidade em tempo uniforme.

**Definição 1.2.3.** A álgebra de Lie gerada por um sistema de controle linear  $\Sigma = (\mathbb{R}^n, \mathcal{D})$  com  $\mathcal{D} = \{X^u = Ax(t) + Bu(t)\}$ , é definida como a menor álgebra de Lie (veja [3]) que contém a família de campos de vetores  $\{Ax + Bu; u \in \mathcal{U}\}$ .

Denotaremos essa álgebra por  $Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D})(x)$ . Aqui  $Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D})$  considera o espaço vetorial gerado pelos campos de vetores  $X^u$  com  $u \in U_m$  e todos os possíveis colchetes de Lie (veja [3]).

Vamos ver a seguir que  $Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D})(0) = \langle A|B \rangle$ .

Sejam  $b_1, \dots, b_m$  as colunas da matriz  $B$ . Se  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D})(x)$  inclui os vetores

$$Ax \pm b_j, \pm Ab_j, A(b_j \pm b_i) \text{ e } A^{k+1}b_j \text{ para } i, j = 1, \dots, m \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

De fato, para cada  $j = 1, \dots, m$ , considere o controle  $u_j$  como sendo o  $j$ -ésimo vetor canônico de  $\mathbb{R}^m$ . Então,  $Bu_j = b_j$  e então,

$$Ax \pm Bu_j = Ax \pm b_j \in Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D})(x)$$

$$[Ax, b_j] = Ab_j \text{ e } [b_j, Ax] = -Ab_j \Rightarrow \pm Ab_j \in Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D})(x)$$

$$[Ax \pm b_i, Ax \pm b_j] = \pm A(b_j \pm b_i) \in Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D})(x)$$

$$[Ax \pm b_i, Ab_j] = A^2b_j \in Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D})(x),$$

e assim sucessivamente. O teorema de Cayley-Hamilton afirma que não é necessário continuar indefinidamente o cálculo dos colchetes de Lie. Mais precisamente, este resultado afirma que o processo termina no passo  $n - 1$ . Como consequência,

$$\begin{aligned} Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D}(x)) &= Span\{Ax \pm b_j, Ab_j, A^2b_j, \dots, A^{n-1}b_j | j = 1, \dots, m\} \text{ e} \\ Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D}(0)) &= Span\{b_j, Ab_j, A^2b_j, \dots, A^{n-1}b_j | j = 1, \dots, m\} \\ &= Span_{col}(B \ AB \dots A^{n-1}B). \end{aligned}$$

É claro que  $Bu_j = b_j \in \langle A|B \rangle$  e  $A^k b_j \in \langle A|B \rangle$  para todo  $j = 1, \dots, m$  e  $k = 1, \dots, n - 1$ . Isto implica em particular que  $Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D}(0)) \subset \langle A|B \rangle$ . Como a outra inclusão também é verdadeira, segue que  $\langle A|B \rangle = Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D}(0))$ .

Um sistema de controle numa variedade  $M$  cumpre a condição *LARC* se a álgebra de Lie gerada pelos campos do sistema avaliada num ponto  $x \in M$  é igual ao espaço  $T_x M$ ,  $\forall x \in M$ . Assim a condição *LARC* num sistema de controle linear em  $\mathbb{R}^n$  é dada por

$$Span_{\mathcal{L}.A}(\mathcal{D}(x)) = T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Porém, pelo que vimos acima isto é equivalente a  $\langle BAB\dots A^{d-1}B \rangle = \mathbb{R}^n$ , quando temos controles irrestritos, que é a condição de Kalman . Pelos teoremas 1.1.1 e 1.1.2 a condição *LARC* é equivalente a ter controlabilidade em tempo uniforme  $t$  para todo  $t > 0$ . Como veremos no capítulo 5, em geral isto não acontece nos sistemas invariantes em grupos de Lie. Especificamente, quando o grupo de Lie  $G$  é compacto semisimples temos controlabilidade uniforme.

## Capítulo 2

# Tópicos de Grupos e Álgebras de Lie

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados relativos a variedades diferenciáveis e teoria de grupos e álgebras de Lie, indispensáveis para a compreensão deste trabalho. Veja [12], [16], [22].

### 2.1 Generalidades sobre variedades diferenciáveis

Suponha que  $\mathbb{R}^n$  está munido com a topologia induzida pela métrica Euclidiana e seja  $M$  um espaço topológico. Se para cada ponto  $p \in M$  existir uma vizinhança aberta  $U$ , que é homeomorfa a um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n$  fixo, para todos os pontos  $p \in M$ ), diz-se que  $M$  é localmente Euclidiano de dimensão  $n$ .

**Definição 2.1.1.** *Uma variedade topológica de dimensão  $n$  é um espaço topológico  $M$  com as seguintes propriedades:*

- (i)  $M$  é de Hausdorff, isto é, dados  $x \neq y \in M$  existem abertos  $U \ni x$ ,  $V \ni y$  tais que  $U \cap V = \emptyset$ .
- (ii)  $M$  tem uma base contável (finita, ou enumerável) de conjuntos abertos ;
- (iii)  $M$  é localmente Euclidiano de dimensão  $n$ .

Dada uma variedade topológica  $M$  de dimensão  $n$ , sabemos que para cada  $p \in M$ , existe um aberto  $U$  contendo  $p$  e um homeomorfismo  $\varphi$  de  $U$  num aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ , dado por

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset M &\longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto \varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \end{aligned}$$



Ao par  $(U, \varphi)$  chamamos de *sistemas de coordenadas locais* em  $p$  ou carta aberta em  $p$ . Aos números  $x_i(p)$  chamamos *coordenadas de  $p \in M$*  relativamente ao par  $(U, \varphi)$ , e às funções  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  *funções coordenadas*.

As propriedades (i) e (ii) da definição anterior são ainda verificadas por qualquer subespaço topológico de uma variedade topológica  $M$ . Desta forma, sendo  $N$  um subconjunto de  $M$ , podemos considerar em  $N$  a topologia relativa (os subconjuntos abertos de  $N$  são da forma  $U \cap N$ , onde  $U$  é um aberto de  $M$ ) e para provar que este subespaço topológico é ainda uma variedade topológica, basta mostrar que é localmente euclideo.

Uma família de cartas abertas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ , onde  $\Lambda$  representa um conjunto de índices, de uma variedade topológica  $M$  diz-se uma *estrutura diferenciável* para  $M$  (ou atlas  $\mathcal{C}^\infty$  para  $M$ ) se satisfizer:

(i) para cada  $p \in M$  existe uma carta aberta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$  com  $p \in U_\alpha$ , isto é,  $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ ;

(ii) quaisquer duas cartas abertas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  e  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  de  $\mathcal{A}$  são  $\mathcal{C}^\infty$ -compatíveis, isto é, ou  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  ou as aplicações

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

e

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

são  $\mathcal{C}^\infty$ . Veja a figura abaixo.

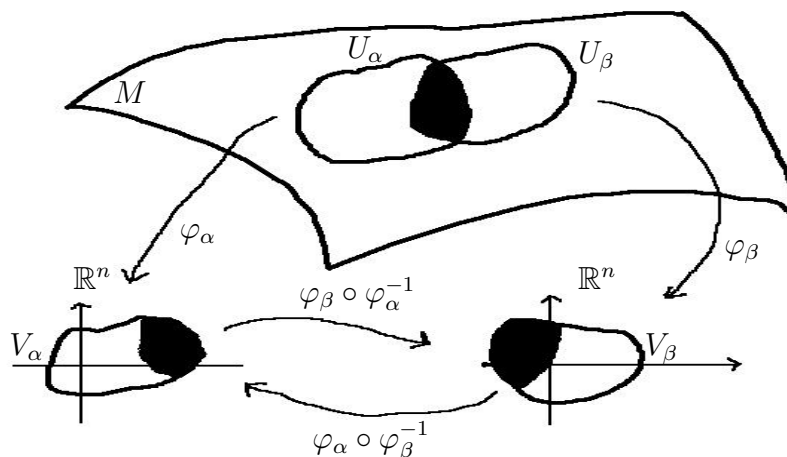


Figura 2.1:

Uma estrutura diferenciável  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  em  $M$  diz-se completa se não está contida em nenhuma estrutura diferenciável. Em outras palavras, se

dadas  $(U, \varphi)$  uma carta qualquer e  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}\}$  ocorrer que as aplicações  $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$  e  $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$  são  $C^\infty$ , então  $(U, \varphi) \in \mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}\}$ .

**Definição 2.1.2.** *Uma variedade diferenciável com dimensão  $n$  é uma variedade topológica de dimensão  $n$  munida de uma estrutura diferenciável completa.*

Uma variedade topológica na condição da definição anterior, também pode ser designada por  $C^\infty$ .

A exigência, na definição acima, de que a estrutura diferenciável seja completa, não é relevante devido ao resultado seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [6]:

**Teorema 2.1.1.** *Cada estrutura diferenciável  $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  definida numa variedade topológica, está contida numa única estrutura diferenciável completa.*

Devido ao teorema acima e ao lema de Zorn, basta construir uma estrutura diferenciável numa variedade topológica para concluir que esta é uma variedade diferenciável. A seguir são dados alguns exemplos de variedades diferenciáveis .

**Exemplo 4.**  $\mathbb{R}^n$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ , visto tratar-se de uma variedade topológica de dimensão  $n$ , onde podemos considerar uma estrutura diferenciável constituída por uma única carta aberta  $(\mathbb{R}^n, I_d)$ . Em geral, qualquer, qualquer subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade  $C^\infty$  de dimensão  $n$ , já que  $(U, I_d|_U)$  é uma sua estrutura diferenciável.

**Exemplo 5.** Todo espaço vetorial real  $E$  de dimensão  $n$  é uma variedade  $C^\infty$  de dimensão  $n$ . Na verdade, sendo  $\{e_i; i = 1, \dots, n\}$  uma base de  $E$ , podemos munir  $E$  da topologia induzida pela métrica Euclideana, da seguinte forma:

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \text{ e } \forall y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E, \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Desta forma,  $E$  é um espaço topológico, de Hausdorff, com uma base contável de conjuntos abertos, e a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \quad U \subset E &\longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n \\ p = \sum p_i e_i &\longmapsto (p_1, \dots, p_n) \end{aligned}$$

de um aberto  $U$  de  $E$  contendo  $p$  num aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  é um homeomorfismo, donde  $E$  é uma variedade topológica e  $(E, \varphi)$  vai ser uma sua estrutura diferenciável.

**Exemplo 6.** Se  $M$  é uma variedade  $\mathcal{C}^\infty$  de dimensão  $n$  e  $N$  um subconjunto aberto de  $M$ , então  $N$  é uma variedade  $\mathcal{C}^\infty$  de dimensão  $n$ . Considerando em  $N$  a topologia relativa (a topologia relativa está contida na topologia original),  $N$  é uma variedade topológica de dimensão  $n$  e através de  $M$  podemos definir uma estrutura diferenciável em  $N$ . Se  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  é uma estrutura  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M$ , então  $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  com  $V_\alpha = U_\alpha \cap N$  e  $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N}$ , é uma estrutura  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Exemplo 7.** A esfera unitária  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Claramente é de Hausdorff e tem uma base contável por ser subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Para mostrar que é localmente Euclideano, considere para cada  $i = 1, \dots, n+1$ , os subconjuntos de  $S^n$

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x^{n+1}) \in S^n : x_i > 0\}$$

e

$$U_i^- = \{(x_1, \dots, x^{n+1}) \in S^n : x_i < 0\}.$$

Para cada  $i$  defina a aplicação  $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\varphi_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1})$ , onde o chapéu sobre  $x_i$  indica que  $x_i$  foi omitido. Cada  $\varphi_i^\pm$  é uma aplicação contínua, por ser restrição a  $S^n$  de uma aplicação linear em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Esta é um homeomorfismo sobre sua imagem, a bola unitária  $B \subset \mathbb{R}^n$ , visto que possui uma inversa contínua dada por

$$(\varphi_i^{-1})(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_{i-1}, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, u^i, \dots, u^n).$$

Uma vez que cada ponto em  $S^n$  está no domínio de uma dessas  $2n+2$  cartas,  $S^n$  é um domínio Euclideano de dimensão  $n$ , e portanto uma variedade topológica de dimensão  $n$ .

**Exemplo 8.** (Superfície regular de dimensão  $k$ .) Um subconjunto  $M^k \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície regular de dimensão  $k$  se para cada  $p \in M^k$  existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$  e uma aplicação  $x : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M^k \cap V$  de um aberto  $U \subset \mathbb{R}^k$  sobre  $M^k \cap V$  tais que :

- a)  $x$  é um homeomorfismo diferenciável;
- b)  $(dx)_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetiva para todo  $q \in U$ .

Nestas condições  $M^k$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $k$ . Para mais detalhes o leitor poderá consultar [5].

**Exemplo 9.** O espaço projetivo real  $P^n(\mathbb{R})$  é o conjunto de todas as retas de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que passam pela origem  $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , isto é, o conjunto das direções de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Veja [5].

## 2.2 Grupos de Lie

**Definição 2.2.1.** Um grupo de Lie de dimensão  $n$  é uma variedade diferenciável  $C^\infty$ , de dimensão  $n$ , que tem uma estrutura de grupo consistente com a estrutura de variedade, no sentido de que as operações  $(x, y) \mapsto xy$  e  $x \mapsto x^{-1}$  em  $G$ , são diferenciáveis.

**Observação 2.2.1.** Demonstra-se que cada grupo de Lie  $G$  possui uma estrutura de variedade analítica (veja [22]).

**Exemplo 10.** Um exemplo simples de grupo de Lie é a variedade  $S^1$ .

Como conjunto trata-se do círculo de raio 1 centrado na origem do plano complexo.

$$S^1 = \{\exp(i\phi) \in \mathbb{C}; \phi \in \mathbb{R}\}.$$

Com a topologia induzida de  $\mathbb{C}$ , podemos construir o seguinte atlas:

Para  $x \in S^1, x \neq \pm 1$ , tomamos a carta  $(U, \Phi)$ :

$$U = \{\exp(i\phi) : |x - \exp(i\phi)| < \min\left(\frac{|1-x|}{2}, \frac{|1+x|}{2}\right)\}$$

$$\Phi : C^1 \rightarrow \mathbb{R}; \Phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \cos\phi.$$

Para  $x \in S^1, x \neq \pm i$ , tomamos a carta  $(U, \Phi)$ :

$$U = \{\exp(i\phi) : |x - \exp(i\phi)| < \min\left(\frac{|x-i|}{2}, \frac{|x+i|}{2}\right)\}$$

$$\Phi : C^1 \rightarrow \mathbb{R}; \Phi(x) = \frac{1}{2i}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \sin\phi.$$

Isso faz de  $C^1$  uma variedade diferenciável de dimensão 1.

Dados  $x, y \in S^1$ , a operação produto é a usual  $x \cdot y = \exp(i\phi_x) \cdot \exp(i\phi_y) = \exp(i(\phi_x + \phi_y))$ . Pode-se mostrar que essa operação é diferenciável.

## 2.3 Vizinhança da identidade

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que um grupo de Lie  $G$  conexo é gerado por qualquer vizinhança da identidade. Esse resultado mostra-se de grande importância na obtenção de condições suficientes para a controlabilidade de sistemas invariantes, como veremos mais adiante.

Se  $g$  é um elemento arbitrário de um grupo de Lie  $G$ , as aplicações  $L_g : G \rightarrow G$  e  $R_g : G \rightarrow G$  definidas por  $Lg(h) = gh$  e  $R_g(h) = hg$  são designadas, respectivamente, por translação à esquerda e translação à direita. Atendendo

à definição de grupo de Lie, estas aplicações são  $C^\infty$ . Dados dois elementos  $g_1, g_2$  em  $G$  verifica-se facilmente que

$$L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2} \quad \text{e} \quad R_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_1 g_2}.$$

Assim  $L_{Id} = R_{Id} = I$ , onde  $Id$  é o elemento identidade de  $G$  e  $I$  é a aplicação identidade. Então,  $L_g$  e  $R_g$ , tem respectivamente, as inversas  $L_{g^{-1}}$  e  $R_{g^{-1}}$  que também são  $C^\infty$ , o que nos permite concluir que  $L_g$  e  $R_g$  são difeomorfismos de  $G$ .

Como consequência dos difeomorfismos mencionados acima temos que, dado um subconjunto  $A \subset G$  e  $g \in G$ , a translação  $L_g(A) = \{gx; x \in A\}$  é um conjunto aberto ou fechado, dependendo do fato de que  $A$  seja aberto ou fechado, respectivamente. O mesmo vale para a translação à direita.

**Proposição 2.3.1.** *Suponha que  $H$  é um subgrupo aberto de  $G$ . Então  $H$  é fechado.*

*Demonstração.* Uma classe lateral  $gH$  de  $H$  é obtida por uma translação à esquerda. Portanto se  $H$  é aberto, o mesmo ocorre com  $gH$ . Mas o grupo  $G$  é a união de  $H$  com as classes laterais  $gH, g \notin H$ . Isso significa que o complementar de  $H$  em  $G$  é uma união de abertos e daí que  $H$  é fechado.

**Observação 2.3.1.** Devido a invariança da topologia de  $G$  por translações à esquerda e à direita, qualquer subgrupo de interior não vazio é aberto (e portanto fechado). De fato: tome  $x \in \text{int}H$  e um aberto  $V$  que é vizinhança da identidade, tal que  $xV \subset H$ . Então  $V = x^{-1}(xV) \subset H$  pois  $H$  é subgrupo. Daí se  $y \in H$  então  $y \in yV \subset H$ , mostrando que todo ponto de  $H$  é interior, isto é,  $H$  é aberto. Um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  que é ao mesmo tempo aberto e fechado é união de componentes conexas de  $X$ , isto é, se uma componente conexa  $C \subset X$  satisfaz  $C \cap A \neq \emptyset$  então  $C \subset A$ . Esta observação juntamente com a proposição 2.2.1 mostra que os subgrupos abertos de  $G$  são uniões de componentes conexas de  $G$ . Em particular, se o grupo é conexo ele é o único de seus subgrupos abertos.

Agora considere os conjuntos  $A, B \subset G$  e escreva

$$A.B = AB = \{xy \in G; x \in A, y \in B\}$$

Por definição  $AB = \cup_{x \in B} Ax = \cup_{x \in A} xB$ . Assim se  $A$  é aberto ou  $B$  então  $AB$  é aberto por ser união de abertos. Deve-se observar, no entanto, que  $AB$  pode não ser fechado, mesmo que ambos os conjuntos sejam fechados.

Juntamente com a notação  $AB$ , surgem naturalmente as notações  $A^2 = A.A, A^3 = A^2.A = A.A^2, \text{etc.}$

Para cada  $A \subset G$  usaremos  $A^{-1} = \{x^{-1} \in G; x \in A\}$ . Como a inversão  $i(x) = x^{-1}$  é um homeomorfismo, segue que  $A^{-1} = i(A)$  é aberto ou fechado se e só se,  $A$  é aberto ou fechado, respectivamente.

**Definição 2.3.1.** *Uma vizinhança  $U$  da identidade é dita simétrica se  $U = U^{-1}$ .*

**Observação 2.3.2.** Se  $V$  é uma vizinhança qualquer de  $Id \in G$  então  $V^{-1}$  também o é e  $V \cap V^{-1}$  é uma vizinhança simétrica.

**Proposição 2.3.2.** *Seja  $G$  um grupo de Lie conexo e  $V$  uma vizinhança da identidade. Então  $G = \cup_{n \geq 1} V^n$ .*

*Demonstração.* Seja  $W = V \cap V^{-1}$  uma vizinhança simétrica contida em  $V$ . Como  $\cup_{n \geq 1} W^n \subset \cup_{n \geq 1} V^n$ , basta mostrar que  $G = \cup_{n \geq 1} W^n$ .

Note que a união  $\cup_{n \geq 1} W^n$  é fechada por produtos e além do mais, como  $W$  é simétrico,  $(W^n)^{-1} = W^n$ . Isso mostra que  $\cup_{n \geq 1} W^n$  é um subgrupo de  $G$ , que tem interior não-vazio pois,  $W \subset \cup_{n \geq 1} W^n$ . Portanto  $\cup_{n \geq 1} W^n$  é um subgrupo aberto. Pela proposição 2.2.1 é também fechado. Como  $G$  é conexo, (vide observação 2.3.1) segue que deve valer a igualdade  $G = \cup_{n \geq 1} W^n$ .

## 2.4 Grupos de Lie Lineares

A classe mais importante de grupos de Lie é constituída por grupos de Lie lineares, ou seja, grupos de transformações lineares em  $\mathbb{R}^n$ . Uma transformação linear  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  possui, na base  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  uma representação matricial  $X = (x_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , a qual identificamos com o operador  $X$ .

Denote o espaço linear de todas as matrizes reais  $n \times n$  por

$$M(n, \mathbb{R}) = \{X = (x_{ij}) | x_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n\}.$$

Usualmente estaremos denotando este espaço simplesmente por  $M(n)$ .

**Exemplo 11. (O grupo Linear Geral)**

O grupo linear geral consiste de todas as matrizes  $n \times n$  invertíveis:

$$GL(n, \mathbb{R}) = GL(n) = \{X \in M(n) | \det X \neq 0\}.$$

Observe que  $GL(n)$  satisfaz as exigências da definição (2.2.1), como pode ser visto abaixo e portanto é um grupo de Lie:

1)  $GL(n) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  e sendo a aplicação  $\det: M(n) \rightarrow \mathbb{R}$  contínua segue que  $GL(n)$  é domínio aberto, sendo assim uma subvariedade diferenciável de

$M(n)$ .

2)  $GL(n)$  é um grupo com respeito ao produto de matrizes: se  $X, Y \in GL(n)$ , então o produto  $XY \in GL(n)$ . Obviamente a matriz identidade  $Id = (\delta_{ij}) \in GL(n)$ , onde  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ . Para uma matriz não singular  $X$ , sua inversa  $X^{-1}$  também é não singular.

3) As operações em  $GL(n)$  são diferenciáveis:

i)  $(X, Y) \mapsto XY$  é diferenciável visto que  $(XY)_{ij}$  são polinômios nas entradas  $X_{ij}, Y_{ij}$ .

ii)  $X \mapsto X^{-1}$  também é diferenciável pois  $(X^{-1})_{ij}$  são funções racionais nas entradas  $X_{ij}$  cujo denominador (o determinante) não se anula.

**Definição 2.4.1.** *Um grupo de Lie  $G \subset M(n)$  é chamado um grupo de Lie linear.*

Uma condição suficiente para que um conjunto de matrizes seja um grupo de Lie linear é dada no seguinte teorema. O leitor interessado na sua demonstração poderá consultar [5]

**Teorema 2.4.1.** *Se  $G$  é um subgrupo fechado de  $GL(n)$  então  $G$  é um grupo de Lie Linear.*

O teorema (2.4.1) nos diz que para verificarmos se um conjunto de matrizes  $G \subset M(n)$  é um grupo de Lie linear basta verificarmos a validade das três condições seguintes:

(1)  $G \subset GL(n)$ ,

(2)  $G$  é um grupo com respeito ao produto de matrizes, e

(3)  $G$  é topologicamente fechado em  $GL(n)$ , isto é,  $G = GL(n) \cap S$ , onde  $S$  é um subconjunto fechado em  $M(n)$ .

Seguem abaixo alguns importantes exemplos de grupos de Lie lineares além do grupo linear geral  $GL(n)$ . Em todos os casos as hipóteses do teorema (2.4.1) podem ser verificadas sem dificuldade.

**Exemplo 12. (Grupo linear especial)** O grupo linear especial é formado pelas matrizes  $n \times n$  unimodulares:

$$SL(n, \mathbb{R}) = SL(n) = \{X \in M(n) | \det X = 1\}.$$

Tais matrizes correspondem aos operadores  $v \mapsto Xv$  que preservam o volume padrão em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 13. (Grupo Ortogonal)** O grupo ortogonal é formado pelas  $n \times n$  matrizes ortogonais:

$$O(n) = \{X \in M(n) | XX^T = Id\}.$$

onde  $X^T$  denota a transposta da matriz  $X$ .

Transformações ortogonais preservam várias estruturas em  $\mathbb{R}^n$ .

Por exemplo: preservam a norma ( $|Xv| = |v|$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^n$ ), preservam a distância ( $|Xu - Xv| = |u - v|$ ),  $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ ), preservam o produto interno ( $\langle Xu, Xv \rangle = \langle u, v \rangle$ ,  $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ ).

**Exemplo 14. (Grupo Ortogonal Especial)** O grupo ortogonal especial consiste das matrizes ortogonais unimodulares:

$$SO(n) = \{X \in M(n) | XX^T = Id, \det X = 1\}.$$

Transformações ortogonais especiais preservam ambos a estrutura euclideana e a orientação em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 15. (Grupo Afim)** De um modo geral, considere  $G \subset GL(n)$  um grupo de Lie e  $V$  um espaço vetorial sobre o qual  $G$  atua, consideremos o conjunto dos elementos que resultam do produto cartesiano de  $V$  por  $G$ .

Usaremos a notação  $V \otimes_s G$  para esse conjunto que será denominado o produto semidireto de  $V$  por  $G$ . Definamos em  $V \otimes_s G$  as operações

$$\begin{aligned} (v, X)(w, Y) &= (v + Xw, XY), \quad \forall v, w \in V, \quad \forall X, Y \in G, \\ (v, X)^{-1} &= (-X^{-1}v, X^{-1}). \end{aligned}$$

Com estas operações,  $V \otimes_s G$  é um grupo com a identidade  $(0, Id)$  onde  $Id$  é a identidade de  $G$ . Os elementos  $(v, X) \in V \otimes_s G$  podem ser naturalmente identificados com matrizes de  $GL(n+1, \mathbb{R})$  do seguinte modo:

$$(v, X) \mapsto \widehat{X} = \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dessa forma o grupo afim é definido da seguinte maneira:

$$\text{Aff}(n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} Y & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n+1) | Y \in GL(n), b \in \mathbb{R}^n \right\} \subset GL(n+1).$$

Tais matrizes correspondem a transformações afins invertíveis em  $\mathbb{R}^n$  da forma  $v \mapsto Yv + b$ , ou seja, uma aplicação linear  $Y$  mais a translação  $b$ .



**Exemplo 16. Grupo Euclideo** o grupo Euclideo é o subgrupo do grupo afim, dado abaixo:

$$E(n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} Y & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n+1) \mid Y \in SO(n), b \in \mathbb{R}^n \right\} \subset GL(n+1).$$

Essas matrizes parametrizam as isometrias afins  $v \mapsto Yv + b$ , preservando a orientação.

**Exemplo 17. Grupo Triangular** Consiste esse grupo de todas as matrizes triangulares invertíveis:

$$\begin{aligned} T(n) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \in GL(n) \right\} \\ &= \{ X = (x_{ij} \in \mathbb{R}) \mid x_{ij} = 0, i > j, x_{ii} \neq 0 \} \end{aligned}$$

São matrizes de operadores lineares invertíveis  $v \mapsto Xv$  preservando o flag dos subespaços  $\mathbb{R}e_1 \subset \text{span}(e_1, e_2) \subset \dots \subset \text{span}(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$ .

No que segue trataremos de matrizes complexas. Denotaremos o espaço de todas as  $n \times n$  matrizes com entradas complexas por

$$M(n, \mathbb{C}) = \{ Z = (z_{jk}) \mid z_{jk} \in \mathbb{C}, j, k = 1, \dots, n \}.$$

Dada uma matriz  $Z \in M(n, \mathbb{C})$ , cada uma de suas entradas  $z_{jk}$  se decompõe em uma parte real e outra imaginária, a saber

$$z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}.$$

Por esse motivo a matriz complexa  $Z$  decompõe-se de maneira semelhante, ou seja,

$$Z = X + iY, \quad X = (x_{jk}), \quad Y = (y_{jk}), \quad x_{jk}, y_{jk} \in \mathbb{R}.$$

Veja que podemos considerar  $M(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$ .

Para cada matriz complexa de ordem  $n$  podemos fazer corresponder uma matriz real de ordem  $2n$ . O processo que dá essa correspondência é chamado de *realificação* da matriz complexa e é definido como segue:

$$Z \sim \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R}), \quad Z = X + iY \in M(n, \mathbb{C}).$$

A matriz  $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$  dada há pouco é a matriz do operador linear real em  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$  correspondendo a  $Z$  nas bases  $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ . Assim é natural que a realificação respeita o produto de matrizes: se

$$Z_1 = X_1 + iY_1 \sim \begin{pmatrix} X_1 & -Y_1 \\ Y_1 & X_1 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = X_2 + iY_2 \sim \begin{pmatrix} X_2 & -Y_2 \\ Y_2 & X_2 \end{pmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= X_1 X_2 - Y_1 Y_2 + i(Y_1 X_2 + X_1 Y_2) \sim \begin{pmatrix} X_1 X_2 - Y_1 Y_2 & -X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \\ X_1 Y_2 + Y_1 X_2 & X_1 X_2 - Y_1 Y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1 & -Y_1 \\ Y_1 & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & -Y_2 \\ Y_2 & X_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A realificação nos permite considerar  $M(n, \mathbb{C}) \subset M(2n, \mathbb{R})$ .

**Exemplo 18. (Grupo Linear Geral Complexo).** O grupo linear geral complexo é formado por todas as  $n \times n$  matrizes complexas invertíveis:

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{C}) &= \{Z \in M(n, \mathbb{C}) \mid \det Z \neq 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R}) \mid \det^2 X + \det^2 Y \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Aqui vale uma proposição similar ao teorema (2.4.1).

**Teorema 2.4.2.** *Se  $G$  é um subgrupo fechado de  $GL(n, \mathbb{C})$ , então  $G$  é um grupo de Lie linear.*

**Exemplo 19. (Grupo Linear Especial Complexo).** Este grupo é formado por todas as matrizes complexas unimodulares:

$$\begin{aligned} SL(n, \mathbb{C}) &= \{Z \in M(n, \mathbb{C}) \mid \det Z = 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R}) \mid \det(X + iY) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

**Exemplo 20. (Grupo Unitário).** Consiste de todas as  $n \times n$  matrizes complexas unitárias:

$$U(n) = \{Z \in M(n, \mathbb{C}) \mid \bar{Z}^T Z = Id\},$$

onde  $\bar{Z}$  denota a matriz complexa conjugada de  $Z$ . Tais matrizes correspondem às transformações que preservam a estrutura unitária em  $\mathbb{C}^n$ . Calculemos a realificação de uma matriz unitária: temos que

$$Z = X + iY, \quad \bar{Z}^T = X^T - iY^T,$$

Assim

$$\begin{aligned} \overline{Z}^T Z &\sim \begin{pmatrix} X^T & Y^T \\ -Y^T & X^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^T X + Y^T Y & -X^T Y + Y^T X \\ -X^T Y + Y^T X & X^T X + Y^T Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \sim Id + i.0. \end{aligned}$$

Por causa das equivalências acima, a realificação do grupo unitário escreve-se como

$$U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R}) \mid X^T X + Y^T Y = Id, \ X^T Y - Y^T X = 0 \right\}.$$

Note que  $1 = \det(\overline{Z}^T Z) = \overline{\det Z} \det Z = |\det Z|^2$ , donde  $\det Z = e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 21. (Grupo Unitário Especial).** Trata-se de outro importante exemplo de um grupo formado por matrizes complexas. Temos

$$\begin{aligned} SU(n) &= U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}) \mid \overline{Z}^T Z = Id, \ \det Z = 1 \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R}) \mid X^T X + Y^T Y = Id, \ X^T Y - Y^T X = 0, \right. \\ &\quad \left. \det(X + iY) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

## 2.5 A álgebra de Lie de um grupo de Lie

Nesta seção vamos definir o que é uma álgebra de Lie de um grupo de Lie linear. Porém precisamos antes de alguns conceitos preliminares.

**Definição 2.5.1.** *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  munido de uma operação produto (colchete ou comutador)*

$$[, ] : V \times V \rightarrow V$$

com as seguintes propriedades:

1. *é bilinear, ou seja,*

$$[\alpha X_1 + \beta X_2, Y] = \alpha[X_1, Y] + \beta[X_2, Y]$$

$$[X, \alpha Y_1 + \beta Y_2] = \alpha[X, Y_1] + \beta[X, Y_2], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall X_1, X_2 \in V.$$

2. *anti-simétrico, ou seja,  $[X, X] = 0$  para todo  $X \in V$  (o que implica  $[X, Y] = -[Y, X]$ , para todo  $X, Y \in V$  e é equivalente se o corpo de escalares*

não é de característica dois) e

3. satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo  $X, Y, Z \in V$

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0, \quad \forall X, Y, Z \in V.$$

A dimensão da álgebra de Lie  $V$  é a dimensão de  $V$  visto como espaço vetorial. Qualquer base para o espaço vetorial  $V$  é uma base para a álgebra de Lie.

**Exemplo 22.** O espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do produto vetorial usual  $[X, Y] = X \times Y$ , constitui uma álgebra de Lie.

**Exemplo 23.** O espaço de todas as transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão  $n$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  que é o mesmo que o espaço  $M(n, \mathbb{K})$  das matrizes  $n \times n$  com coeficientes em  $\mathbb{K}$ . O colchete é dado por  $[X, Y] = XY - YX$  com  $X$  e  $Y$  matrizes.

**Definição 2.5.2.** Seja  $\mathcal{G}$  uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de  $\mathcal{G}$  é um subespaço vetorial  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{G}$  que é fechado para o colchete.

Evidentemente, uma subálgebra de Lie é uma álgebra de Lie com a estrutura herdada pela estrutura de  $G$ .

**Exemplo 24.**  $\mathfrak{sl}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid \text{tr} X = 0\}$ , o conjunto das matrizes de traço nulo é uma álgebra de Lie.

**Exemplo 25.**  $\mathfrak{so}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X^T = -X\}$ , o conjunto das matrizes anti-simétricas é uma álgebra de Lie.

**Definição 2.5.3.** Duas álgebras de Lie  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  são isomorfas se existir um isomorfismo  $\sigma$  entre os espaços vetoriais satisfazendo

$$\sigma([X, Y]_{\mathcal{G}_1}) = [\sigma(X), \sigma(Y)]_{\mathcal{G}_2}$$

, onde  $[\cdot]_{\mathcal{G}_1}$  e  $[\cdot]_{\mathcal{G}_2}$  denotam, respectivamente, o colchete de Lie em  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ .

**Exemplo 26.**  $(\mathbb{R}^3, \times)$  é isomorfa a  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}), [\cdot]$ . O isomorfismo é dado por

$$\sigma : \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

onde o símbolo “ $\times$ ” denota o produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.6 Campos invariantes

De um modo geral, um campo de vetores em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação  $X : M \rightarrow \cup_{p \in M} T_p M$  tal que  $X(x) \in T_x M$ , para cada  $x \in M$ . O campo  $X$  induz a equação diferencial  $\frac{dx}{dt} = X(x)$ .

**Definição 2.6.1.** Uma curva integral de um campo de vetores  $C^k$ , ou solução da equação diferencial induzida, que no instante  $t = 0$  passa pelo  $x_0 \in M$ , é uma aplicação diferenciável  $\Phi : (a, b) \rightarrow M$  definida em um intervalo maximal  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  contendo  $0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\Phi(0) = x_0$  e  $\frac{d\Phi}{dt} = X(\Phi(t))$ .

**Definição 2.6.2.** Dado um campo de vetores  $C^\infty$ ,  $X$ , em  $M$ , define-se fluxo de  $X$  como o conjunto das aplicações  $X_t : M \rightarrow M$ , onde para cada  $p \in M$  a aplicação  $t \mapsto X_t(p)$  é uma curva integral de  $X$  com condição inicial  $p$  e tal que

- 1-  $X_{t+s} = X_t \circ X_s = X_s \circ X_t$
- 2-  $X_0 = I$ , onde  $I$  é a aplicação identidade.

Seja  $X$  um campo vetorial definido em um grupo de Lie  $G$  e  $L_g : G \rightarrow G$  a aplicação translação à esquerda como já foi definida anteriormente.

**Definição 2.6.3.** O campo vetorial  $X$  é dito ser invariante à esquerda quando ele é preservado sob a translação à esquerda, ou seja,

$$X(L_g(p)) = dL_g(X(p)), \text{ para todo } g, p \in G.$$

Analogamente, define-se campo invariante à direita.

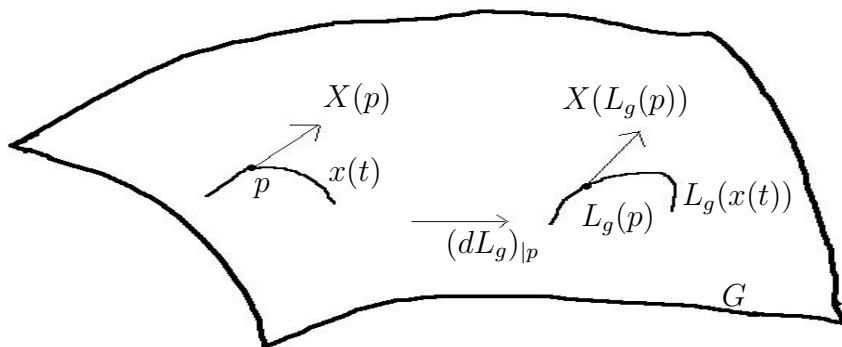


Figura 2.2: Campo invariante à esquerda

**Observação 2.6.1.** Os campos invariantes à esquerda são diferenciáveis e estão em correspondência bijetiva com o espaço vetorial  $T_{Id}G$ , tangente à  $G$  na identidade. De fato: segue da definição que  $X(g) = dL_g|_{Id}(X(Id))$  e então a diferenciabilidade de  $X$  segue da diferenciabilidade da operação produto do grupo. Para ver a correspondência bijetiva defina a aplicação

$$\Phi : \{ \text{campos inv. à esquerda} \} \rightarrow T_{Id}G \text{ dada por } \Phi(X) = X(Id).$$

Nós já sabemos que  $X(g) = dL_g(X(Id))$ . Agora suponha que  $\Phi(X) = \Phi(Y)$ , ou seja,  $X(Id) = Y(Id)$ . Então  $X(g) = dL_g(X(Id)) = dL_g(Y(Id)) = Y(g), \forall X, Y \in \{ \text{campos inv. à esquerda} \}$  e  $g \in G$ . Isso mostra que  $X = Y$  e portanto a injetividade de  $\Phi$ . Para a sobrejetividade, seja  $v \in T_{Id}G$  e defina o campo  $X_v(g) = (dL_g)|_{Id}(v)$ . Esse campo é invariante à esquerda e claramente satisfaz  $X_v(Id) = v$ . Portanto  $\Phi$  é sobrejetiva.

Mostra-se de modo semelhante ao que foi feito acima que os campos invariantes à direita estão em correspondência bijetiva com o espaço tangente ao grupo  $G$  no elemento identidade. Mostra-se ainda que se  $X, Y$  são campos invariantes à esquerda (respectivamente à direita) então o colchete de Lie  $[X, Y]$  é invariante à esquerda (respectivamente à direita) (veja [5]). Assim tanto, campos invariantes à esquerda, quanto campos invariantes à direita são subálgebras de Lie da álgebra de Lie de todos os campos de vetores em  $G$ . As correspondências bijetivas mencionadas acima permitem dar ao espaço tangente ao grupo  $G$  na identidade uma estrutura de álgebra de Lie. Assim, dados  $X_1, X_2$  campos invariantes à esquerda, o isomorfismo  $\Phi(X_i) = X_i(Id)$  induz o colchete  $[X_1(Id), X_2(Id)] = [X_1, X_2](Id)$  em  $T_{Id}G$ .

Recordemos agora a definição do colchete de Lie entre duas funções  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.6.4.** *Sejam  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicações diferenciáveis. Se define o colchete de Lie entre  $f$  e  $g$  por*

$$[f, g](x) = Df(x)(g(x)) - Dg(x)(f(x)).$$

Em particular, se  $A, B \in M(n, \mathbb{R})$  são consideradas como aplicações lineares, então obtemos imediatamente que

$$[A, B](x) = (AB - BA)x, \text{ ou seja } [A, B] = AB - BA.$$

Considere agora o espaço tangente a um grupo de Lie  $G$  linear na identidade,

$$T_{Id}G = \{ \dot{X}(0) | X(t) \in G, X(0) = Id \}.$$

Este é um espaço linear e está dotado com a operação adicional comutador de matrizes

$$[A, B] = AB - BA \in M(n).$$

Assim  $T_{Id}G$  é uma álgebra de Lie. Esta observação nos conduz à seguinte definição.

**Definição 2.6.5.** *O espaço tangente ao grupo de Lie  $G$  na identidade é chamado a álgebra de Lie do grupo de Lie  $G$ .*

**Exemplo 27. (A Álgebra de Lie de  $GL(n)$ ).** A álgebra de Lie do grupo das matrizes invertíveis é denotada por  $gl(n)$ . Então

$$gl(n) = \{\dot{X}(0) | X(t) \in GL(n), X(0) = Id\}.$$

Considere  $X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$  e seja  $g(t) = \det X(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Obtemos então

$$\begin{vmatrix} x'_{11}(t) & \dots & x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n-1)1}(t) & \dots & x_{(n-1)n}(t) \\ x'_{n1}(t) & \dots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix} = g'(t) \in \mathbb{R}.$$

Usando o fato de que  $X(0) = Id$  obtemos para  $t = 0$ ,

$$x'_{11}(0) + x'_{22}(0) + \dots + x'_{nn}(0) = g'(0)$$

ou seja,  $tr \dot{X}(0) = g'(0) = k \in \mathbb{R}$ . Sendo assim, dada uma matriz  $A \in M(n)$  qualquer onde  $tr A = k$ , existe uma curva diferenciável  $X(t)$  satisfazendo  $X(0) = Id$  e  $\dot{X}(0) = A$ . Isso mostra que  $gl(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$ .

Deve-se observar que

$$A = \left(A - \frac{1}{n} tr A Id\right) + \left(\frac{1}{n} tr A Id\right), \quad \forall A \in gl(n, \mathbb{R})$$

ou seja,

$$gl(n, \mathbb{R}) = sl(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{K}Id.$$

Uma maneira mais elegante de determinarmos a álgebra de Lie de  $GL(n)$  é dada a seguir:

Uma vez que o vetor velocidade  $\dot{X}(t) = (\dot{x}_{ij}(t))$  é uma matriz  $n \times n$  segue que

$$\dot{X}(0) = (\dot{x}_{ij}(0)) = A \in M(n).$$

isto nos dá  $\mathfrak{gl}(n) = T_{Id}\text{GL}(n) \subset M(n)$ . Para obtermos a inclusão oposta, dada  $A \in M(n)$  uma matriz qualquer exibiremos uma curva  $X(t)$  satisfazendo:

$$(1) X(t) \in \text{GL}(n)$$

$$(2) X(0) = Id \text{ e } \dot{X}(0) = A.$$

A curva  $X(t) = Id + tA$  satisfaz a condição (2). Para ver que a condição (1) também é cumprida, note que  $\text{GL}(n)$  é um conjunto aberto em  $M(n)$  por ser imagem inversa do aberto  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  pela aplicação determinante que é contínua. Como  $Id \in \text{GL}(n)$  segue que para  $t$  suficientemente próximo de zero  $X(t) = Id + tA \in \text{GL}(n)$ . Consequentemente  $\mathfrak{gl}(n) = T_{Id}\text{GL}(n) = M(n)$ .

**Exemplo 28. (A Álgebra de Lie de  $\text{SL}(n)$ ).** Como na primeira parte do exemplo anterior, porém considerando agora que  $\det X(t) = 1$  obtemos

$$x'_{11}(0) + x'_{22}(0) + \dots + x'_{nn}(0) = 0,$$

ou seja, que  $\text{tr}A = 0$ . Logo

$$\mathfrak{sl}(n) = \{A \in M(n) | \text{tr}A = 0\}.$$

**Exemplo 29. (A Álgebra de Lie de  $\text{SO}(n)$ ).** Esta álgebra de Lie é denotada por

$$\mathfrak{so}(n) = T_{Id}\text{SO}(n) = \{\dot{X}(0) | X(t) \in \text{SO}(n), X(0) = Id\}.$$

Dada  $X(t) \in \text{SO}(n)$  devemos ter  $X(t)X^T(t) = Id$ , donde

$$0 = \dot{X}(0)X^T(0) + X(0)\dot{X}^T(0) = \dot{X}(0) + \dot{X}^T(0),$$

uma vez que  $\dot{X}(0) = \dot{X}^T(0) = Id$ . Daí, se denotarmos  $A = \dot{X}(0)$  teremos que

$$\mathfrak{so}(n) = \{A \in M(n) | A + A^T = 0\},$$

ou seja, o conjunto das matrizes anti-simétricas. De maneira similar calculamos as álgebras de Lie nos seguintes casos.

**Exemplo 30. (A Álgebra de Lie de  $\text{Aff}(n)$ ).**

$$\mathfrak{aff}(n) = T_{Id}\text{Aff}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{gl}(n), b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

**Exemplo 31. (A Álgebra de Lie de  $\text{E}(n)$ ).**

$$\mathfrak{e}(n) = T_{Id}\text{E}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{so}(n), b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$



**Exemplo 32. (A Álgebra de Lie de  $T(n)$ ).**

$$t(n) = T_{Id}T(n) = \{A = (a_{ij}) \in M(n) | a_{ij} = 0, i > j\},$$

são matrizes triangulares.

**Exemplo 33. (A Álgebra de Lie do grupo unitário  $U(n)$ ).** Temos  $u(n) = T_{Id}U(n)$ , e procedemos como no caso de  $SO(n)$ . Dada uma curva  $Z(t) \in U(n)$ , satisfazendo  $Z(0) = Id$ , devemos ter  $Z(t)\bar{Z}^T(t) = Id$ . Assim, derivando em relação a  $t$  e avaliando em  $t = 0$  temos

$$0 = \dot{Z}(0)\bar{Z}^T(0) + Z(0)\bar{\dot{Z}}^T(0) = \dot{Z}(0) + \bar{\dot{Z}}^T(0),$$

visto que  $Z(0) = \bar{Z}^T(0) = Id$ . Agora denotando  $A = \dot{Z}(0)$ , obtemos  $A + \bar{A}^T = 0$ , uma matriz anti-Hermitiana. Logo

$$u(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) | A + \bar{A}^T = 0\}.$$

**Exemplo 34. (A Álgebra de Lie de  $SU(n)$ ).**

$$u(n) = T_{Id}SU(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) | A + \bar{A}^T = 0, \text{tr} A = 0\}.$$

Resumindo, nós consideramos a passagem de um grupo de Lie  $G$  para um correspondente objeto linear- a álgebra  $L$  do grupo de Lie  $G$ . Uma questão natural na possibilidade da passagem inversa é resolvida (para grupos de Lie lineares) via aplicação exponencial.

## Capítulo 3

# Sistemas Invariantes em Grupos de Lie Lineares

Neste capítulo, essencialmente estudaremos os sistemas de controles invariantes em grupos de Lie lineares e suas condições gerais de controlabilidade. Veja [12], [14], [15].

Dado um sistema invariante em um grupo de Lie  $G$  linear, veremos como uma ação desse grupo induz um sistema numa variedade diferenciável  $M$ . A controlabilidade do sistema induzido será estudada via estudo da controlabilidade do sistema no grupo  $G$ .

Começaremos com o conceito de matriz exponencial, essencial nesse estudo.

### 3.1 A matriz exponencial

O conceito de matriz exponencial pode ser dado através de séries de maneira análoga ao conceito de exponencial real. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $t$  um parâmetro real. Definimos matriz exponencial  $e^{tA}$ , por

$$e^{tA} = I + A + \frac{(A)^2}{2!} + \frac{(A)^3}{3!} + \dots \quad (3.1)$$

se está série converge.

**Teorema 3.1.1.** *A série (3.1) converge uniformemente em conjuntos compactos.*

*Demonstração.* Supondo que  $tA$  pertence a um conjunto compacto, existe  $r$  tal que  $\|tA\| \leq r$ . Daí  $\|(tA)^k\| \leq r^k$  e, portanto, a norma dos termos da série

(3.1) podem ser majorados pelos correspondentes termos da série numérica convergente  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k}{k!}$ . Pelo critério de Weierstrass, segue-se o resultado.

**Proposição 3.1.1.** *A matriz exponencial tem as seguintes propriedades:*

- (1)  $e^0 = Id$ ,  $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$ ;
- (2)  $e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^{tA}B$ , para qualquer matriz invertível  $B$ ;
- (3) Se  $AB = BA$  então  $e^{tA}B = Be^{tA}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  ;
- (4) Se  $AB = BA$  então  $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ;
- (5)  $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ;
- (6)  $\forall A \in gl(n, \mathbb{R})$ ,  $e^A \in GL(n, \mathbb{R})$  e  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ;
- (7)  $\det(e^A) = e^{trA}$ .

*Demonstração.* (1) Como a série exponencial converge absolutamente podemos derivá-la termo a termo para obter

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = \frac{d}{dt}\left(Id + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^nt^n}{n!} + \dots\right) = e^{At}A.$$

(2) Primeiro vamos provar por indução que  $(B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^k B$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

De fato: para  $k = 1$  é óbvio. Suponha que a igualdade seja válida para  $n = k$ , ou seja,  $(B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^k B$ . Assim  $(B^{-1}AB)^{k+1} = (B^{-1}AB)^k(B^{-1}AB) = B^{-1}A^k B(B^{-1}AB) = B^{-1}A^k IdAB = B^{-1}A^{k+1}B$ , donde concluímos a veracidade da igualdade mencionada.

Agora

$$\begin{aligned} e^{B^{-1}AB} &= I + B^{-1}AB + \frac{B^{-1}A^2B}{2!} + \dots \\ &= B^{-1}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots\right)B \\ &= B^{-1}e^A B. \end{aligned}$$

(3) Se  $AB = BA$  é fácil mostrar por indução que  $BA^k = A^k B$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots$ . Segue então que

$$\begin{aligned} Be^{tA} &= B + tBA + \frac{t^2}{2!}BA^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}BA^k + \dots \\ &= B + tBA + \frac{t^2}{2!}A^2B + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k B + \dots \\ &= e^{tA}B. \end{aligned}$$

(4) Considere a equação diferencial matricial

$$\dot{X}(t) = (A + B)X(t), \quad X(t) \in \mathcal{G}l(n, \mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

É fácil ver que  $X_1(t) = e^{(A+B)t}$  é solução desta equação diferencial satisfazendo a condição inicial  $X(0) = Id$ . Vamos mostrar que  $X_2(t) = e^{tA}e^{tB}$  também é solução da mesma equação diferencial e com a mesma condição inicial, de onde se verificará a igualdade  $X_1(t) = e^{(A+B)t} = X_2(t) = e^{tA}e^{tB}$  desejada.

Basta ver que sendo  $X_2(t) = e^{tA}e^{tB}$  então  $X_2(0) = Id$ , derivando com relação a  $t$  temos

$$\dot{X}_2(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} = (A + B)X_2(t).$$

(5) Segue imediatamente de (4)

(6)  $A \in \mathcal{G}l(n, \mathbb{R}) \Rightarrow e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^0 = Id \Rightarrow e^A \in GL(n, \mathbb{R})$ . E  $\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{At} e^{-At} = e^0 = e^{-At} e^{At} = Id$  donde temos que  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ .

(7) Note inicialmente que:

(i) se  $\lambda$  é auto-valor da matriz  $A$  associado ao autovetor  $v$  então vale  $A_k v = \lambda^k v$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Então

$$e^A v = (Id + A + \frac{A^2}{2!} + \dots)v = v + \lambda v + \frac{\lambda^2 v}{2!} + \dots = (1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots)v = e^\lambda v.$$

Assim  $\lambda$  autovalor de  $A$  implica que  $e^\lambda$  autovalor de  $e^A$  com o mesmo autovetor  $v$ .

(ii) matrizes semelhantes possuem o mesmo determinante: se  $M$  e  $N$  são matrizes semelhantes então existe uma matriz  $P$  inversível tal que  $M = P^{-1}NP$ . Então

$$\det M = \det(P^{-1}NP) = \det(P^{-1})\det(N)\det(P) = \det(P^{-1})\det(P)\det(N) = \det(N).$$

(iii) matrizes semelhantes possuem o mesmo traço.

(iv) a matriz  $A$  é (obviamente) semelhante à matriz diagonal  $(a_{ij})$  tal que  $a_{ii} = \lambda_i$  onde  $\lambda_i$  são os autovalores de  $A$  e a matriz  $e^A$  é (obviamente) semelhante á matriz diagonal  $D = (d_{ij})$  tal que  $d_{ii} = e^{\lambda_i}$ .

Observando os itens (i),(ii),(iii) e (iv), segue-se que

$$\det(e^A) = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \dots e^{\lambda_n} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)} = e^{\text{tr}A}.$$

Observe um fato importante: como  $\frac{d}{dt}(e^{At}) = e^{At}A$ , segue que  $X(t) = e^{At}$  é a solução do problema de Cauchy

$$\dot{X} = XA, \quad X(0) = Id$$

e de um modo geral todas as soluções da equação matricial

$$\dot{X} = XA \quad \text{são da forma} \quad X(t) = X(0)e^{At}.$$

Para uma matriz arbitrária  $A \in gl(n)$ , a exponencial  $e^A \in GL(n)$  uma vez que  $\det(e^A) = e^{\text{tr}A} \neq 0$ . Além do mais, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} gl(n) & \xrightarrow{\text{tr}} & GL(n) \\ \downarrow e & \searrow & \downarrow e \\ GL(n) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Assim nós construímos uma aplicação diferenciável

$$\exp : gl(n) \rightarrow GL(n).$$

Esta construção é generalizada na seguinte seção.

## 3.2 Campos de vetores invariantes à esquerda

Nós já sabemos que para uma matriz arbitrária  $A \in gl(n, \mathbb{R})$ , o problema de Cauchy

$$\dot{X} = XA, \quad X(0) = X_0, \quad X \in GL(n),$$

possui uma única solução da forma

$$X(t) = X_0 \exp(tA) \in GL(n).$$

Agora dado um grupo de Lie Linear, o que podemos dizer sobre um problema similar:

$$\dot{X} = XA, \quad X \in G?$$

**Exemplo 35.** Considere, por exemplo, o problema de Cauchy no grupo linear especial  $SL(n)$ :

$$\dot{X} = XA, \quad X(0) = Id, \quad X \in SL(n) \quad (3.2)$$

Pela unicidade, as soluções desta EDO devem ser dadas, como no caso de  $G = GL(n)$ , pela matriz exponencial. Mas a questão agora é saber se esta solução está no grupo de Lie em consideração, ou seja,  $X(t) = \exp(tA) \in SL(n)$ ? É claro que, em geral, a resposta é negativa. Realmente, se  $x(t) = \exp(tA) \in SL(n)$ , então

$$A = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tA) \in T_{Id}SL(n) = \mathfrak{sl}(n).$$

Desta forma se  $A \notin \mathfrak{sl}(n)$ , então a EDO (5.4) não está bem definida, ou seja, o campo vetorial  $V(X) = XA$  não é tangente ao grupo de Lie  $SL(n)$ .

Estamos agora interessados em descrever o espaço tangente a um grupo de Lie  $G$  em um ponto qualquer  $X \in G$ . Esta questão é explicitada na próxima proposição.

**Proposição 3.2.1.** *Seja  $G$  um grupo de Lie,  $L$  sua álgebra e  $X \in G$ . Então  $T_X G = XT_{Id}G = XL = \{XA \mid A \in L\}$ .*

*Demonstração.* Veja que

$$T_X G = \{\dot{X}(0) \mid X(t) \in G, X(0) = X\}.$$

Vamos mostrar que  $T_X G \subset XT_{Id}G = XL$ , ou seja, que para cada  $Y \in T_X G$  existe  $A \in T_{Id}G$  tal que  $Y = XA$ . De fato: existe uma curva diferenciável  $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$  tal que  $X(0) = X$  e  $\dot{X}(0) = Y$ . A curva diferenciável  $Y(t) = X^{-1}X(t)$  é tal que  $Y(0) = X^{-1}X(0) = X^{-1}X = Id$  (passa pela identidade) e  $\dot{Y}(0) = X^{-1}\dot{X}(0)$ . Isso mostra que  $\dot{Y}(0) = X^{-1}\dot{X}(0) \in T_{Id}G$ . Basta agora tomar  $A = \dot{Y}(0)$  e ver que  $XA = X\dot{Y}(0) = XX^{-1}\dot{X}(0) = Id\dot{X}(0) = \dot{X}(0) = Y$ . Assim  $T_X G \subset XT_{Id}G = XL$  e uma vez que esses espaços possuem a mesma dimensão segue que  $T_X G = XT_{Id}G = XL$ .

De acordo com o teorema acima vemos que o produto à esquerda por  $X$  translada o espaço tangente  $L$  na identidade ao espaço tangente  $XL$  no ponto  $X$ . Então para qualquer elemento  $A \in L$  o vetor  $V(X) = AX \in T_X G$   $X \in G$ , ou seja, o campo vetorial  $V(X)$  é tangente ao grupo de Lie  $G$ . Assim a EDO

$$\dot{X} = XA; \quad X \in G, \quad (3.3)$$

está bem definida e possui a solução

$$X(t) = X(0) \exp(At) \in G.$$

Deve-se notar a seguinte importante propriedade da *EDO* (3.5): se uma curva  $X(t)$  é uma trajetória do campo  $V(X) = XA$  então a translação à esquerda  $YX(t)$  é também uma trajetória desta *EDO* para qualquer  $Y \in G$ . De fato:  $X(t) = X(0) \exp(tA) \Rightarrow Y(t) = YX(t) = Y \exp(tA)X(0) = Y(0)\exp(tA)$ .

A propriedade mencionada acima nos conduz a uma definição:

**Definição 3.2.1.** *Campos de vetores da forma*

$$V(X) = XA \quad X \in G \quad A \in L,$$

são chamados de campos de vetores esquerda-invariantes no grupo de Lie linear  $G$ .

Todos os campos invariantes à esquerda em um grupo de Lie linear possuem a forma da definição anterior como veremos a seguir.

Seja  $V : G \rightarrow M(n, \mathbb{R})$  um campo invariante à esquerda em um grupo linear  $G$ . Então, segue da definição 2.6.3 que, para todo  $X \in G$

$$\begin{aligned} V(X) &= dL_X|_{Id}(V(Id)) \\ &= L_X(V(Id)) \\ &= XV(Id). \end{aligned}$$

As considerações feitas há pouco mostram que podemos definir a álgebra de Lie de um grupo de Lie linear do seguinte modo:

$$\begin{aligned} T_{Id}G &= \{\dot{X}(0); X(t) \in G \quad X(0) = Id\} \\ &= \{A \in M(n, \mathbb{K}); \dot{X}(t) = V(X) = XA, \quad X(0) = Id\} \\ &= \{A \in M(n, \mathbb{K}); \exp(tA) \in G, \quad \forall t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Acima estamos considerando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Veja a figura a 3.1.

Suponha que temos dois campos de vetores esquerda-invariantes no grupo de Lie  $G$ ,

$$V(X) = XA, \quad W(X) = XB, \quad A, B \in L \quad X \in G.$$

Estamos interessados em saber o que é o colchete de Lie de tais campos vetoriais. É claro que o campo  $[V, W]$  é esquerda-invariante visto que  $V$  e  $W$  o são. Para calcular este campo recordamos a definição de colchete de Lie de dois campos vetoriais, em termos de seus fluxos.

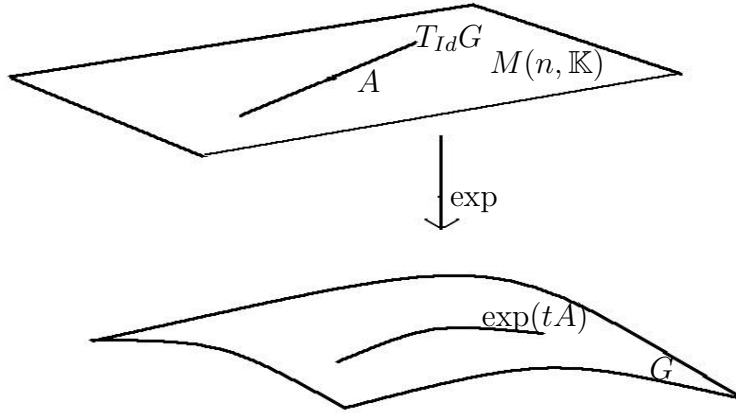


Figura 3.1:

**Definição 3.2.2.** *Sejam  $V$  e  $W$  campos de vetores diferenciáveis em uma variedade diferenciável  $M$ . O colchete de Lie (ou comutador) destes campos é o campo vetorial  $[V, W] \in \text{Vec}M$  tal que*

$$[V, W](X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0_+} \gamma(\sqrt{t}), \quad x \in M,$$

sendo a curva  $\gamma$  é definida como

$$\gamma(t) = e^{-tW} e^{-tV} e^{tW} e^{tV}.$$

onde  $e^{tV}$  denota o fluxo do campo vetorial  $V$

$$\left. \frac{d}{dt} e^{tV}(X) = V(e^{tV}(X)), \quad e^{tV} \Big|_{t=0} (X) = X,$$

e  $\text{Vec}M$  denota o espaço de todos os campos de vetores diferenciáveis na variedade diferenciável  $M$ .

O cálculo do colchete de Lie entre campos de vetores esquerda-invariantes é dado na seguinte proposição.

**Proposição 3.2.2.** *Sejam  $G$  um grupo de Lie,  $L$  sua álgebra e  $A, B \in L$ . Se  $V(X) = XA$  e  $W(X) = XB$  são campos de vetores esquerda-invariantes em  $G$ , então*

$$[V, W](X) = [XA, XB] = X[A, B] = X(AB - BA), \quad X \in G.$$



*Demonstração.* Como já sabemos os fluxos dos campos de vetores esquerda-invariantes são dados pela matriz exponencial, ou seja,

$$e^{tV}(X) = X \exp(tA), \quad e^{tB}(X) = X \exp(tB).$$

Pela definição (3.2.2) e utilizando a definição de produto de séries obtemos

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= X \exp(tA) \exp(tB) \exp(-tA) \exp(-tB) \\ &= X \left( Id + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \dots \right) \left( Id + tB + \frac{t^2}{2} B^2 + \dots \right) \\ &\quad \left( Id - tA - \frac{t^2}{2} A^2 - \dots \right) \left( Id - tB - \frac{t^2}{2} B^2 - \dots \right) \\ &= X \left( Id + t(A+B) + \frac{t^2}{2} (A^2 + 2AB + B^2) + \dots \right) \\ &\quad X \left( Id - t(A+B) + \frac{t^2}{2} (A^2 + 2AB + B^2) + \dots \right) \\ &= X \left( Id + t^2 (AB - BA) + \dots \right) = X \left( Id + t^2 [A, B] + \dots \right), \end{aligned}$$

Segue da igualdade acima que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(\sqrt{t}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X \left( Id + t^2 [A, B] + \dots \right) = X [A, B],$$

que é o colchete de Lie  $[XA, XB]$  pela definição (3.2.2).

**Corolário 3.2.1.** *Campos de vetores esquerda-invariantes em um grupo de Lie  $G$  formam uma álgebra isomórfica à álgebra de Lie  $L = T_{Id}G$ . O isomorfismo é definido como segue:*

*campo vetorial esquerda-invariante  $V(X) = XA \in VecG \leftrightarrow V(Id) = A \in L$ .*

Assim no que segue nós identificamos duas representações para a álgebra de Lie de um grupo de Lie  $G$ :

- (1)  $L = T_{Id}G$  e
- (2)  $L = \{\text{campos de vetores esquerda-invariantes em } G\}$

Isso está de acordo com o que foi mencionado no capítulo 2.

### 3.3 Sistemas de controle esquerda-invariantes

Considere  $G$  um grupo de Lie e  $L$  sua álgebra de Lie.

**Definição 3.3.1.** Um sistema de controle esquerda-invariante  $\Gamma$  é, em um grupo de Lie  $G$ , um conjunto arbitrário de campos de vetores invariantes à esquerda em  $G$ , isto é, qualquer subconjunto

$$\Gamma \subset L. \quad (3.4)$$

**Exemplo 36. (Controles afins).** Uma classe particular de sistemas esquerda-invariantes, importante para muitas aplicações é formada por sistemas de controles afins

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^m u_i B_i \mid (u_1, u_2, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}, \quad (3.5)$$

onde  $A, B_1, \dots, B_m$  são elementos de  $L$ . Se o conjunto controle  $U$  coincide com  $\mathbb{R}^m$ , então o sistema (3.5) é um subespaço afim de  $L$ .

A seguir escreveremos um sistema esquerda-invariante como (3.4) ou (3.5), isto é, como um conjunto de campos de vetores ou como um polissistema. Na notação clássica, os sistemas de controles afins (3.5) são escritos como segue:

$$\dot{X} = XA + \sum_{i=1}^m u_i X B_i, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in U, \quad X \in G. \quad (3.6)$$

**Definição 3.3.2.** Uma trajetória de um sistema esquerda-invariante  $\Gamma$  em  $G$  é uma curva absolutamente contínua  $X(t) \in G$  definida em um intervalo  $[t_0, T] \subset \mathbb{R}$  tal que existe uma partição

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

e campos de vetores esquerda-invariantes

$$A_1, \dots, A_N \in \Gamma$$

tal que a restrição de  $X(t)$  a cada intervalo aberto  $(t_{i-1}, t_i)$  é diferenciável e

$$\dot{X}(t) = X(t)A_i \quad \text{para } t \in (t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Na notação clássica, isto corresponde a controles admissíveis constantes por partes.

**Definição 3.3.3.** Para qualquer  $T \geq 0$  e qualquer  $X \in G$ , o conjunto alcançável (ou atingível) ou conjunto acessível em tempo  $T$  de um sistema de controle esquerda-invariante  $\Gamma \subset L$  a partir do ponto  $X$  é o conjunto  $\mathcal{A}_\Gamma(X, T)$  dos pontos que podem ser alcançados a partir de  $X$  em exatamente  $T$  unidades de tempo:

$$\mathcal{A}_\Gamma(X, T) = \{X(T) | X(\cdot) \text{ é uma trajetória de } \Gamma, X(0) = X\}.$$

O conjunto acessível para um tempo não maior do que  $T \geq 0$  é definido como

$$\mathcal{A}_\Gamma(X, \leq T) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \mathcal{A}_\Gamma(X, t).$$

O conjunto acessível de um sistema  $\Gamma$  a partir de um ponto  $X \in G$  é o conjunto  $\mathcal{A}_\Gamma(X)$  de todos os pontos terminais  $X(T)$ ,  $T \geq 0$ , de todas as trajetórias de  $\Gamma$  começando em  $X$ :

$$\mathcal{A}_\Gamma(X) = \{X(T) | X(\cdot) \text{ trajetória de } \Gamma, X(0) = X, T \geq 0\} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{A}_\Gamma(X, T).$$

Se não houver ambiguidades, na sequência denotaremos os conjuntos acessíveis  $\mathcal{A}_\Gamma(X, T)$  e  $\mathcal{A}_\Gamma(X)$  por  $\mathcal{A}(X, T)$  e  $\mathcal{A}(X)$ , respectivamente.

**Definição 3.3.4.** Um sistema  $\Gamma$  é chamado controlável se, dados quaisquer par de pontos  $X_0$  e  $X_1$  em  $G$ , o ponto  $X_1$  pode ser atingido a partir de  $X_0$  ao longo de uma trajetória de  $\Gamma$  para um tempo não negativo:

$$X_1 \in \mathcal{A}(X_0), \text{ para qualquer } X_0, X_1 \in G,$$

ou seja,

$$\mathcal{A}(X) = G \text{ para qualquer } X \in G.$$

Na literatura de controle essa noção corresponde a *controlabilidade global* ou *controlabilidade completa*. Porém, para sistemas esquerda-invariantes essas propriedades são equivalentes à controlabilidade local na identidade, como veremos em um teorema mais adiante, bastando provar que  $\mathcal{A}(Id) = G$ .

### 3.4 Sistemas de controle direita-invariantes

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito para sistemas esquerda-invariantes podemos considerar *campos de vetores direita-invariantes* os quais tomam a forma  $\dot{Y} = BY$ .

Uma observação importante é que podemos transformar campos de vetores esquerda-invariantes em campos de vetores direita-invariantes, e vice-versa, através da inversão

$$i : G \rightarrow G, \quad i(X) = X^{-1} = Y.$$

Para sermos mais precisos, considere  $X(t)$  uma trajetória de uma EDO esquerda-invariante  $\dot{X} = XA$ . Vamos mostrar que  $Y(t) = i(X)(t) = X^{-1}(t)$  é uma trajetória do sistema direita-invariante  $\dot{Y} = -AY$ . De fato:

$$Y(t) = X^{-1}(t) \Rightarrow Y(t)X(t) = Id \Rightarrow \dot{Y}(t)X(t) + Y(t)\dot{X}(t) = 0,$$

assim

$$\dot{Y}(t) = -Y(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t) = -Y(t)X(t)AY(t) = -AY(t),$$

consequentemente

$$\dot{X} = XA \Leftrightarrow \dot{Y} = -AY, \quad Y = X^{-1}$$

Uma vez que  $X(t) = X_0 e^{At}$  segue-se que  $Y(t) = e^{-tA} Y_0$ .

Mostra-se de modo semelhante ao que foi feito na proposição (3.2.1) que  $T_X G = LX$ , e que a álgebra  $L = T_{Id} G$  pode ser identificada com a álgebra de Lie dos campos de vetores direita-invariantes  $\{AX | A \in L\}$  em  $G$ .

**Definição 3.4.1.** *Um sistema de controle direita-invariante em um grupo de Lie  $G$  é um conjunto arbitrário de campos de vetores direita-invariante em  $G$ .*

**Definição 3.4.2.** *Um sistema de controle direita-invariante é dito ser um sistema de controle afim em um grupo de Lie  $G$  se possui a forma*

$$\dot{Y} = AY + \sum_{i=1}^m u_i B_i Y, \quad u \in U \subset \mathbb{R}, \quad Y \in G. \quad (3.7)$$

a inversão  $X = Y^{-1}$  transforma o sistema direita-invariante (3.7) no sistemas esquerda-invariante

$$\dot{X} = -XA - \sum_{i=1}^m u_i X B_i, \quad u \in U, \quad X \in G.$$

De acordo com o exposto acima vemos que todo problema de sistemas de controle direita-invariantes pode ser reduzido ao estudo de sistemas esquerda-invariantes via inversão.

### 3.5 Propriedades básicas das órbitas e dos conjuntos acessíveis

Considere  $G$  um grupo de Lie linear e  $L$  sua álgebra de Lie, ou seja, o espaço dos campos de vetores esquerda-invariantes em  $G$ .

**Lema 3.5.1.** *Seja  $A \in L$  e  $X_0 \in G$ . Então o problema de Cauchy*

$$\dot{X} = XA, \quad X(t_0) = X_0$$

*possui a solução  $X(t) = X_0 \exp((t - t_0)A)$ .*

*Demonstração.* Imediata.

*Dada uma trajetória  $X(t)$  e um tempo  $T$  fixo, o lema acima nos permite dar uma descrição do ponto final  $X(T)$  via produto de exponenciais.*

**Lema 3.5.2.** *Seja  $X(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , uma trajetória de um sistema esquerda-invariante  $\Gamma \subset L$  com  $X(0) = X_0$ . Então existe  $N \in \mathbb{N}$  e*

$$\tau_1, \dots, \tau_N > 0, \quad A_1, \dots, A_N \in \Gamma.$$

*tal que*

$$X(T) = X_0 \exp(\tau_1 A_1) \dots \exp(\tau_N A_N), \quad \tau_1 + \dots + \tau_N = T.$$

*Demonstração.* Pela definição de trajetória, existem  $N \in \mathbb{N}$  e

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \quad A_1, \dots, A_N \in \Gamma$$

tal que  $X(t)$  é absolutamente contínua e

$$t \in (t_{i-1}, t_i) \Rightarrow \dot{X}(t) = X(t)A_i,$$

com

$$X(t) = X(t_{i-1}) \exp[(t - t_{i-1})A_i], \quad X(t_i) = X(t_{i-1}) \exp[(t_i - t_{i-1})A_i].$$

Em particular, temos:

$$t \in (0, t_1) \Rightarrow \dot{X} = X(t)A_1, \quad X(0) = X_0.$$

e

$$X(t) = X_0 \exp(tA_1), \quad X(t_1) = X_0 \exp(t_1 A_1).$$

Agora

$$t \in (t_1, t_2) \Rightarrow \dot{X} = X(t)A_2, \quad X(t_1) = X_0 \exp(t_1 A_1)$$

e então

$$X(t) = X(t_1) \exp[(t - t_1)A_2] = X_0 \exp(t_1 A_1) \exp[(t - t_1)A_2],$$

$$X(t_2) = X_0 \exp(t_1 A_1) \exp[(t_2 - t_1)A_2].$$

Continuando com esse procedimento obtemos

$$X(t_N) = X(T) = X_0 \exp(t_1 A_1) \exp[(t_2 - t_1)A_2] \dots \exp[(t_N - t_{N-1})A_N].$$

Agora fazendo  $\tau_1 = t_1, \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \tau_N = t_N - t_{N-1}$ , obtemos

$$X(T) = X_0 \exp(\tau_1 A_1) \exp(\tau_2 A_2) \dots \exp(\tau_N A_N), \quad \sum_{i=1}^N \tau_i = T$$

que é a representação desejada.

Utilizando a representação do lema anterior podemos agora obter algumas propriedades elementares dos conjuntos acessíveis.

**Lema 3.5.3.** *Seja  $\Gamma \subset L$  um sistema esquerda-invariante, e  $X$  um ponto arbitrário em  $G$ . Então:*

- (1)  $\mathcal{A}_\Gamma(X) = \{X \exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N) \mid A_i \in \Gamma, t_i \geq 0, N \geq 0\}$ ;
- (2)  $\mathcal{A}_\Gamma(X) = X \mathcal{A}_\Gamma(Id)$ ;
- (3)  $\mathcal{A}_\Gamma(Id)$  é um subsemigrupo de  $G$ ;
- (4)  $\mathcal{A}_\Gamma(X)$  é um subconjunto conexo por arcos de  $G$ .

*Demonstração.* O itens (1) e (2) decorrem imediatamente do lema anterior. Vamos provar os demais itens.

(3) Devemos mostrar que dados  $X_1$  e  $X_2$  em  $\mathcal{A}_\Gamma(Id)$ , o produto  $X_1 X_2 \in \mathcal{A}_\Gamma(Id)$ . Mas, uma vez que

$$\mathcal{A}_\Gamma(Id) = \{\exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N) \mid A_i \in \Gamma, t_i > 0, N \geq 0\},$$

então o produto  $X_1 X_2$  ainda está em  $\mathcal{A}_\Gamma(Id)$ .

(4) Qualquer ponto em  $\mathcal{A}_\Gamma(X)$  é conectado com o ponto inicial  $X$  por uma trajetória  $X(t)$ . Logo, dois pontos quaisquer podem ser conectados por uma trajetória de  $\Gamma$  que passa pelo ponto inicial.

**Definição 3.5.1.** *A órbita de um sistema  $\Gamma$  passando por um ponto  $X \in G$  é o seguinte subconjunto do grupo de Lie  $G$ :*

$$\mathcal{O}_\Gamma(X) = \{X \exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N) \mid A_i \in \Gamma, t_i \in \mathbb{R}, N \geq 0\};$$

Observe que o conjunto acessível  $\mathcal{A}_\Gamma(X)$  é formado pelos elementos que são atingidos em tempo não negativo a partir de  $X$  enquanto a órbita  $\mathcal{O}_\Gamma(X)$  leva em consideração, além destes, aqueles que são atingidos em tempo negativos. Na órbita é permitido avançar para frente ou para trás, enquanto no conjunto acessível só é permitido movimento para frente. De acordo com isso temos

$$\mathcal{A}_\Gamma(X) \subset \mathcal{O}_\Gamma(X).$$

Em um certo sentido a estrutura das órbitas é mais simples do que a dos conjuntos acessíveis.

No que segue denotaremos por  $\text{Lie}(\Gamma)$  a álgebra de Lie gerada por  $\Gamma$ , isto é, a menor subálgebra de Lie de  $L$  contendo  $\Gamma$ .

**Lema 3.5.4.** *Seja  $\Gamma \subset L$  um sistema esquerda-invariante, e  $X$  um elemento arbitrário em  $G$ . Então:*

- (1)  $\mathcal{O}_\Gamma(X) = X\mathcal{O}_\Gamma(Id)$ ;
- (2)  $\mathcal{O}_\Gamma(Id)$  é o subgrupo de Lie de  $G$  conexo, com álgebra de Lie  $\text{Lie}(\Gamma)$ .

*Demonstração.* O item (1) é evidente.

(2) Inicialmente veja que a órbita é conexa uma vez que qualquer de seus pontos são conectados com a identidade por uma curva contínua cuja existência é garantida pela própria definição de órbita.

Agora,  $\mathcal{O}_\Gamma(Id)$  é um subgrupo de  $G$ : claramente  $Id \in \mathcal{O}_\Gamma(Id)$  e se  $X, Y \in \mathcal{O}_\Gamma(Id)$  então o produto  $XY \in \mathcal{O}_\Gamma(Id)$  por ser um produto de exponenciais. Além disso se

$$X = \exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N) \in \mathcal{O}_\Gamma(Id)$$

então

$$X^{-1} = \exp(-t_N A_N) \dots \exp(-t_1 A_1) \in \mathcal{O}_\Gamma(Id).$$

Segue do teorema geral das órbitas (veja [12]) que  $\mathcal{O}_\Gamma(Id) \subset G$  é uma variedade diferenciável com o espaço tangente  $T_{Id}\mathcal{O}_\Gamma(Id) = \text{Lie}(\Gamma)$ . Então a órbita  $\mathcal{O}_\Gamma(Id)$  é um subgrupo de Lie com álgebra de Lie  $\text{Lie}(\Gamma)$ , ver [22].

**Proposição 3.5.1.** *Um sistema esquerda-invariante  $\Gamma$  é controlável se, e somente se,  $\mathcal{A}_\Gamma(Id) = G$ .*

*Demonstração.* Se  $\Gamma$  controlável, então  $\mathcal{A}_\Gamma(X) = G$  para todo  $X \in G$ . Em particular, vale para  $X = Id$ .

Reciprocamente, supondo  $\mathcal{A}_\Gamma(Id) = G$  segue do lema anterior que  $\mathcal{A}_\Gamma(X) = X\mathcal{A}_\Gamma(Id) = XG = G$ . Logo o sistema é controlável.

No que segue usaremos as seguintes notações abreviadas:

$$\mathcal{A}_\Gamma(Id) = \mathcal{A}_\Gamma = \mathcal{A}, \quad \mathcal{O}_\Gamma(Id) = \mathcal{O}_\Gamma = \mathcal{O}.$$

Dado um subconjunto  $l$  de um espaço vetorial  $V$ , denotaremos por  $\text{span}(l)$  o subespaço vetorial de  $V$  gerado por  $l$  e por  $\text{co}(l)$  o cone convexo gerado por  $l$ . O fecho topológico e o interior de um conjunto  $S$  serão denotados, respectivamente por,  $\text{cl}(S)$  e  $\text{int}S$ .

### 3.6 Acessibilidade normal

Seja  $g$  uma álgebra de Lie e  $\Gamma \subset g$  um sistema de controle. As noções que estudaremos nesta seção serão importantes para o estudo das propriedades topológicas dos conjuntos acessíveis e da controlabilidade.

Se  $Y \in G$  é acessível (é atingível) a partir de um ponto  $X \in G$ , então existem elementos  $A_1, A_2, \dots, A_N \in \Gamma$  e  $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^n$  com coordenadas positivas tal que

$$Y = X \exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N).$$

Assim o ponto  $Y$  é imagem da aplicação

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^N &\rightarrow G \\ (s_1, \dots, s_N) &\mapsto X \exp(s_1 A_1) \dots \exp(s_N A_N) \end{aligned}$$

**Definição 3.6.1.** Um ponto  $Y \in G$  é dito *normalmente acessível* a partir de um ponto  $X \in G$  por  $\Gamma$  se existem elementos  $A_1, A_2, \dots, A_N \in \Gamma$  e  $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$  com coordenadas positivas tal que a aplicação

$$F : \mathbb{R}^N \rightarrow G, \quad F(t_1, \dots, t_N) = X \exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N)$$

satisfaça as seguintes condições:

(i)  $F(t) = Y$

(ii) posto  $D_t F = \dim G$ . (O posto da diferencial de  $F$  em cada  $t$  coincide com a dimensão de  $G$ ).

O ponto  $Y$  é dito *normalmente acessível* a partir de  $X$  por  $A_1, \dots, A_n$ .

**Lema 3.6.1.** Se um ponto  $Y \in G$  é normalmente acessível a partir de  $X \in G$  por  $\Gamma$ , então  $Y \in \text{int} \mathcal{A}_\Gamma(X)$ .

*Demonstração.* A aplicação  $F$  é um difeomorfismo local em  $t$ . Assim existe uma vizinhança  $V$  de  $t$  tal que a restrição  $F|_V$  é um difeomorfismo. Então o conjunto  $F(V)$  é aberto. Por outro lado, para qualquer  $s = (s_1, \dots, s_N)$ ,  $s_i > 0$ , o ponto  $F(s) \in \mathcal{A}_\Gamma(X)$ . Assim  $F(V) \subset \mathcal{A}_\Gamma(X)$  é uma vizinhança do ponto  $Y = F(t)$ , ou seja,  $Y$  é um ponto interior de  $\mathcal{A}_\Gamma(X)$ .

O próximo teorema é de grande importância para a obtenção de condições necessárias para a controlabilidade de um sistema esquerda-invariante. Sua demonstração pode ser encontrada em [1].



**Teorema 3.6.1. (Krener)** *Se  $\text{Lie}(\Gamma) = L$ , então em qualquer vizinhança  $V$  da identidade  $Id \in G$ , existem pontos normalmente acessíveis a partir da identidade  $Id$  por  $\Gamma$ . Consequentemente, para qualquer vizinhança  $V \ni Id$ , a interseção  $\text{int}\mathcal{A} \cap V$  é não-vazia e além disso o interior de  $\mathcal{A}$  é não-vazio.*

### 3.7 Condições gerais de controlabilidade

Sejam  $G$  um grupo de Lie linear,  $L$  sua álgebra e  $\Gamma \subset L$  um sistema esquerda-invariante em  $G$ . Provaremos nesta seção algumas condições básicas de controlabilidade para o sistema  $\Gamma$  em  $G$ .

**Teorema 3.7.1. (Condições de conexidade).** *Se  $\Gamma \subset L$  é controlável em  $G$ , então o grupo de Lie  $G$  é conexo.*

*Demonstração.* Já sabemos que  $\mathcal{A}_\Gamma(X)$  é um subconjunto conexo de  $G$  para todo  $X \in G$  e em particular  $\mathcal{A}_\Gamma(Id)$  é conexo. Se  $\Gamma$  é controlável então  $\mathcal{A}_\Gamma(Id) = G$ , donde a conexidade de  $G$ .

**Exemplo 37.** O grupo de Lie  $GL(n)$  não é conexo uma vez que consiste de duas componentes conexas,  $GL_+(n) = \{X \in M(n) | \det(X) > 0\}$  e  $GL_-(n) = \{X \in M(n) | \det(X) < 0\}$ . Para reforçar esse fato veja que  $\det(GL(n)) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e se  $GL(n)$  fosse conexo então, pelo fato de que a aplicação determinante é contínua,  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  deveria ser conexo. Isso mostra que não existem sistemas controláveis em  $GL(n)$ . Porém, algo interessante para estudar é a controlabilidade na sua componente conexa da identidade  $GL_+(n)$ .

**Exemplo 38.** O grupo ortogonal  $O(n) = SO(n) \cup O_-(n)$  é desconexo, onde  $O_-(n) = \{X \in O(n) | \det X = -1\}$ . Podemos estudar controlabilidade em  $SO(n)$ .

**Teorema 3.7.2. (Condição do posto).** *Seja  $\Gamma \subset L$ .*

- (1) *Se  $\Gamma$  é controlável, então  $\text{Lie}(\Gamma) = L$ .*
- (2)  *$\text{int } \mathcal{A} \neq \emptyset$ , se e somente se,  $\text{Lie}(\Gamma) = L$ .*

*Demonstração.* (1) Se  $\Gamma$  é controlável, então  $\mathcal{A} = G$  e como  $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$  segue que  $\mathcal{O} = G$ . Segue que,  $\text{Lie}(\Gamma) = T_{Id}\mathcal{O} = T_{Id}G = L$ .

(2) Suponha que  $\text{Lie}(\Gamma) \neq L$ . Então  $\dim \mathcal{O} = \dim \text{Lie}(\Gamma) < \dim L = \dim G$ . Assim  $\text{int } \mathcal{O} = \emptyset$ . Daí, por maior motivo,  $\text{int } \mathcal{A} = \emptyset$ . Reciprocamente, se  $\text{Lie}(\Gamma) = L$  então pelo teorema de Krener  $\text{int}\mathcal{A} \neq \emptyset$ .

**Teorema 3.7.3. (Teste do Grupo).** *Um sistema  $\Gamma$  é controlável em um grupo de Lie  $G$  se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- (1)  *$G$  é conexo;*

- (2)  $\text{Lie}(\Gamma) = L$ ;  
(3) O conjunto acessível  $\mathcal{A}$  é um subgrupo de  $G$ .

*Demonstração.* Se  $\Gamma$  é controlável então os itens (1) e (2) são garantidos, respectivamente, pelos teoremas 3.7.1 e 3.7.2. O item (3) segue do fato de que  $\mathcal{A}(Id) = G$ .

Reciprocamente, suponhamos válidos os itens (1), (2) e (3). Dado  $Y \in \mathcal{O}$  temos

$$Y = \exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N), \quad t_i \geq 0, \quad A_i \in \Gamma$$

ou então

$$Y = \exp(-t_1 A_1) \dots \exp(-t_N A_N), \quad t_i \geq 0, \quad A_i \in \Gamma.$$

Na primeira situação  $Y \in \mathcal{A}$ , pela descrição de  $\mathcal{A}$  em termos de exponenciais. Agora pelo item (3)  $\mathcal{A}$  é subgrupo de  $G$  e então, dado  $X \in \mathcal{A}$  temos que  $X^{-1} \in \mathcal{A}$ . Em particular

$$X = \exp(t_i A_i) \in \mathcal{A} \Rightarrow X^{-1} = \exp(-t_i A_i) \in \mathcal{A}.$$

Novamente pelo fato de  $\mathcal{A}$  ser subgrupo se conclui que o produto  $Y = \exp(-t_1 A_1) \dots \exp(-t_N A_N) \in \mathcal{A}$ . Assim  $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$  e então vale a igualdade  $\mathcal{O} = \mathcal{A}$ . Mas  $\mathcal{O} \subset G$  é um subgrupo de Lie conexo, com a álgebra de Lie  $T_{Id} \mathcal{O} = \text{Lie}(\Gamma)$ . Pelo item (2)  $\text{Lie}(\Gamma) = L$ . Então segue que  $\mathcal{O} = G$  (veja [5]). Assim  $\mathcal{A} = \mathcal{O} = G$  e portanto  $\Gamma$  é controlável.

**Definição 3.7.1.** Um sistema é dito localmente controlável em um ponto  $X$  se  $X \in \text{int} \mathcal{A}(X)$ .

**Teorema 3.7.4. (Teste da controlabilidade local)** Um sistema  $\Gamma \subset L$  é controlável em um grupo de Lie  $G$  se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- (1)  $G$  é conexo;  
(2)  $\Gamma$  é localmente controlável na identidade.

*Demonstração.* Se  $\Gamma$  é controlável então, obviamente, são satisfeitos os itens (1) e (2). Vamos mostrar que os itens (1) e (2) são suficientes para a controlabilidade de  $\Gamma$ .

Como  $\Gamma$  é localmente controlável na identidade existe uma vizinhança  $V \ni Id$  tal que  $V \subset \mathcal{A}$ . É claro que o conjunto  $V^n = \{X^n | X \in V \subset \mathcal{A}\}$  é ainda um subconjunto de  $\mathcal{A}$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Sendo o grupo de Lie  $G$  conexo, este é gerado por qualquer vizinhança da identidade. Assim

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n = G.$$

Então  $\mathcal{A} \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n = G$ , resultando  $\mathcal{A} = G$  e portanto a controlabilidade de  $\Gamma$ .

**Teorema 3.7.5. (Teste do fecho).** *Um sistema  $\Gamma \subset L$  é controlável em um grupo de Lie  $G$  se, e somente se, são satisfeitas as seguintes condições:*

- (1)  $\text{Lie}(\Gamma) = L$ .
- (1)  $\text{cl}\mathcal{A} = G$ .

*Demonstração.* Os itens (1) e (2) são, obviamente, necessários pelo que já vimos até aqui. Mostraremos que eles são suficientes. Considere o sistema tempo-reverso  $-\Gamma = \{-A | A \in \Gamma\}$ . As trajetórias do sistema  $-\Gamma$  são trajetórias do sistema inicial consideradas na direção oposta,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{-\Gamma} &= \{\exp(-t_1 A_1) \dots \exp(-t_N A_N) | t_i \geq 0, A_i \in \Gamma\} \\ &= \{(\exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N))^{-1} | t_i \geq 0, A_i \in \Gamma\} \\ &= (\mathcal{A}_\Gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Uma vez que  $\text{Lie}(-\Gamma) = \text{Lie}(\Gamma) = L$ , segue pelo teorema (3.7.2) que  $\text{int}\mathcal{A}_{-\Gamma} \neq \emptyset$ . Existe então um subconjunto aberto  $V \subset \mathcal{A}_{-\Gamma}$ . Além disso, pela hipótese do teorema,  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma = G$ , ou seja,  $G = \mathcal{A}_\Gamma \cup \partial\mathcal{A}_\Gamma$ . Como  $V$  é aberto, nem todos os pontos de  $V$  estão na fronteira de  $\mathcal{A}_\Gamma$ , sendo assim existe um ponto  $X \in \mathcal{A}_\Gamma \cap V \neq \emptyset$ . Temos  $X \in V \subset \mathcal{A}_{-\Gamma} = (\mathcal{A}_\Gamma)^{-1}$ , assim o conjunto aberto  $V^{-1} \subset \mathcal{A}_\Gamma$  é uma vizinhança do ponto inverso  $X^{-1}$ . Consequentemente, o conjunto aberto  $V^{-1}X \subset \mathcal{A}_\Gamma$ . Porém,  $Id = X^{-1}X \in V^{-1}X \subset \mathcal{A}_\Gamma$ . Daí  $Id \in \text{int}\mathcal{A}_\Gamma$ , e então o sistema  $\Gamma$  é controlável pelo teorema (3.7.4).

O teorema anterior possui importantes consequências de longo alcance. Graças a ele, relativamente ao estudo de controlabilidade de sistemas de posto máximo, pode-se substituir o conjunto acessível  $\mathcal{A}$  pelo seu fecho  $\text{cl}\mathcal{A}$ . Essa idéia dá origem a uma poderosa técnica de extensão que será descrita no próximo capítulo.

## 3.8 Sistemas induzidos no espaço homogêneo

Nesta seção abordaremos a seguinte questão: dado um sistema direita-invariante  $\Gamma$  em um grupo de Lie  $G$  definiremos uma ação de  $G$  sobre uma variedade  $M$  e a partir daí construiremos um sistema em  $M$  induzido por  $\Gamma$ . De acordo com isso, a controlabilidade em  $M$  será analisada via controlabilidade em  $G$ .

O exemplo seguinte dá uma ideia geral do que pretendemos fazer.

**Exemplo 39. (Sistemas Bilineares).** Considere o seguinte sistema direita-invariante em  $GL_+(n)$  :

$$\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset gl(n).$$

Na notação clássica este sistema é escrito como

$$\dot{X} = AX + uBX, \quad X \in GL(n), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Introduza também o seguinte sistema bilinear:

$$\dot{x} = Ax + uBx, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, u \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

onde a exclusão da origem do espaço  $\mathbb{R}^n$  é justificada pelo fato de que campos de vetores desaparecem na origem, ou seja, esta é um ponto de equilíbrio global para sistemas bilineares.

Considere  $X(t)$  uma trajetória do sistema (3.8) com  $X(0) = Id$ . Note que se  $x(t) = X(t)x_0$  então

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{X}(t)x_0 \\ &= (AX(t) + uBX(t))x_0 \\ &= AX(t)x_0 + uBX(t)x_0 \\ &= Ax(t) + uBx(t) \end{aligned}$$

e além disso  $x(0) = X(0)x_0 = Idx_0 = x_0$ . Assim, se  $X(t)$  é uma trajetória do sistema (3.8) com  $X(0) = Id$  então  $x(t) = X(t)x_0$  é uma trajetória do sistema (3.9) com  $x(0) = x_0$ .

Assuma que o sistema esquerda-invariante 3.8 seja controlável em  $GL_+(n)$ . Veremos que o sistema bilinear 3.9 é controlável em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . De fato: dados quaisquer dois pontos  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , existe uma matriz  $X_1 \in GL_+(n)$  tal que se verifique  $X_1x_0 = x_1$ . A procura de tal matriz nos levaria a um sistema linear com  $n$  equações, cada uma delas contendo  $n$  variáveis distintas das variáveis de uma outra equação. Assim, pode-se escolher soluções de cada uma delas de modo que constituam as entradas de uma matriz  $X_1$  com determinante positivo.

Em virtude da controlabilidade de  $\Gamma$  existe uma trajetória  $X(t)$  do sistema direita-invariante tal que  $X(0) = Id$  e  $X(T) = X_1$  para algum  $T \geq 0$ . Então a trajetória  $x(t) = X(t)x_0$  do sistema bilinear guia  $x_0$  até  $x_1$ :

$$x(0) = x_0 \text{ como já vimos, e } x(T) = X(T)x_0 = X_1x_0 = x_1.$$

O que acabamos de verificar é que se o sistema direita-invariante 3.8 é controlável em  $GL_+(n)$ , então o sistema bilinear 3.9 é controlável em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Existem três pontos chaves no argumento precedente:

(1) O grupo de Lie  $G = GL_+(n)$  age na variedade  $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , ou seja, qualquer  $X \in G$  define uma aplicação

$$X : M \rightarrow M, \quad X : x \mapsto Xx.$$

(2)  $G$  age transitivamente em  $M$ :

$$\forall x_0, x_1 \in M \exists X \in G \text{ tal que } Xx_0 = x_1.$$

(3) O sistema bilinear (3.9) é induzido pelo sistema direita-invariante (3.8), isto é, se  $X(t)$  é uma trajetória de (3.8) com  $X(0) = Id$  então  $X(t)x$  é uma trajetória de (3.9).

Essa construção está formalizada a seguir.

**Definição 3.8.1.** Dizemos que um grupo de Lie  $G$  age sobre uma variedade  $M$  se existe uma aplicação diferenciável  $\theta : G \times M \rightarrow M$  que satisfaz as seguintes condições:

- (1)  $\theta(YX, x) = \theta(Y, \theta(X, x))$  para qualquer  $X, Y \in G$  e qualquer  $x \in M$ .
- (2)  $\theta(Id, x) = x$  para qualquer  $x \in M$ .

**Definição 3.8.2.** Um grupo de Lie  $G$  age transitivamente em  $M$  se para quaisquer  $x_0, x_1 \in M$  existe  $X \in G$  tal que  $\theta(X, x_0) = x_1$ . A variedade que admite uma ação transitiva de um grupo de Lie é chamada o espaço homogêneo deste grupo de Lie.

**Definição 3.8.3.** Seja  $A \in L$ . O campo vetorial  $\theta_*A \in VecM$  induzido pela ação de  $\theta$  é definido como segue:

$$(\theta_*A)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \theta(\exp(tA), x), \quad x \in M.$$

**Exemplo 40.** O grupo de Lie  $GL_+(n)$  age transitivamente em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  como segue:

$$\theta(X, x) = Xx, \quad X \in GL_+(n), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Para um campo vetorial direita-invariante  $V(X) = AX$ , o fluxo passando pela identidade é  $\exp(At)$ , assim

$$(\theta_*V)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \theta(e^{Vt}(Id), x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(At)x = Ax.$$

**Definição 3.8.4.** Seja  $\Gamma \subset L$  um sistema direita-invariante. O sistema

$$\theta_*\Gamma \subset VecM, \quad (\theta_*\Gamma)(x) = \{(\theta_*A)(x) | A \in \Gamma\}, \quad x \in M$$

é chamado o sistema induzido em  $M$ .

**Exemplo 41.** Seja  $\Gamma = \{A + uB | u \in \mathbb{R}\} \subset L$  um sistema direita-invariante em um grupo de Lie Linear  $G \subset GL(n)$ . Na notação clássica  $\Gamma$  é escrito como  $\dot{X} = AX + uBX$ ,  $X \in G$ ,  $u \in \mathbb{R}$ .

Temos  $\theta_*(AX) = Ax$ ,  $\theta_*(BX) = Bx$ , assim  $\theta_*(AX + uBX) = Ax + uBx$ . Assim o sistema induzido  $\theta_*\Gamma$  é bilinear:

$$\dot{x} = Ax + uBx, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

**Lema 3.8.1.** Se  $X(t)$  é uma trajetória do sistema direita-invariante  $\Gamma$ , então  $x(t) = \theta(X(t), x_0)$  é uma trajetória do sistema induzido  $\theta_*\Gamma$  para qualquer  $x_0 \in M$ .

*Demonstração.* Vamos considerar apenas o caso em que a trajetória inteira  $X(t)$  satisfaz uma única EDO uma vez que uma trajetória arbitrária de  $\Gamma$  é a concatenação de tais partes. Assim temos que  $X(t) = \exp(At)x_0$  e  $x(t) = \theta(\exp(At)X_0, x_0)$ . Vamos mostrar que  $x(t)$  satisfaz o sistema induzido:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\theta(\exp(At), x_0) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \theta(\exp(A(t+\epsilon))X_0, x_0) \\ &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \theta(\exp(A\epsilon)\exp(At)X_0, x_0) \\ &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \theta(\exp(A\epsilon), \theta(\exp(At)X_0, x_0)) \\ &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \theta(\exp(A\epsilon), x(t)) \\ &= (\theta_*A)(x(t)). \end{aligned}$$

**Teorema 3.8.1.** Sejam  $\theta$  uma ação transitiva de um grupo de Lie  $G$  em uma variedade  $M$ ,  $\Gamma \subset L$  um sistema direita-invariante em  $G$  e  $\theta_*\Gamma \subset VecM$  o sistema induzido em  $M$ .

(1) Se  $\Gamma$  é controlável em  $G$ , então  $\theta_*\Gamma$  é controlável em  $M$ .

(2) Além disso, se o semigrupo  $\mathcal{A}_\Gamma$  age transitivamente em  $M$ , então  $\theta_*\Gamma$  é controlável em  $M$ .

*Demonstração.* Se  $G$  é controlável então  $\mathcal{A}_\Gamma = G$ . Como a ação de  $\theta$  é transitiva segue que  $\mathcal{A}_\Gamma$  age transitivamente em  $M$ . Isso mostra que se (2) é válida, então a proposição (1) também é válida. Por esse motivo mostraremos apenas a afirmação (2). Tome quaisquer dois pontos  $x_0, x_1 \in M$ . Pela transitividade da ação de  $\Gamma$  em  $M$  existe  $X \in \mathcal{A}_\Gamma$  tal que  $\theta(X, x_0) = x_1$ . Por outro lado, como  $X \in \mathcal{A}_\Gamma$ , existe alguma trajetória  $X(t)$  tal que  $X(0) = Id$  e  $X(T) = X$

para algum  $T \geq 0$ . Então a curva  $x(t) = \theta(X(t), x_0)$  é uma trajetória do sistema induzido  $\theta_*\Gamma$  que atinge o ponto  $x_1$  a partir do ponto  $x_0$ , como pode ser visto abaixo:

$$x(0) = \theta(X(0), x_0) = \theta(Id, x_0) = x_0, \quad x(T) = \theta(X(T), x_0) = \theta(X, x_0) = x_1.$$

A seguir veremos importantes aplicações do teorema 3.8.1 relatadas pela ação linear de um grupo linear  $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ . Neste caso os sistemas induzidos são bilineares, ou mais geralmente, afins.

**Exemplo 42.**  $G = GL_+(\mathbb{R})$ ,  $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Temos

$$\theta(X, x) = Xx,$$

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^m u_i B_i \right\} \subset gl(n),$$

$$\theta_*\Gamma : \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^n u_i B_i x, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Se  $\mathcal{A} = GL_+(n)$  ou  $SL(n)$  então o sistema  $\theta_*\Gamma$  é controlável em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . O conjunto acessível pode ser até menor, por exemplo, no caso que  $\mathcal{A} = SO(n) \times \mathbb{R}_+ Id$  o sistema  $\theta_*\Gamma$  permanece controlável.

**Exemplo 43.**  $G = SL(n)$ ,  $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Similarmente,

$$\theta(X, x) = Xx,$$

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^m u_i B_i \right\} \subset sl(n),$$

$$\theta_*\Gamma : \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^n u_i B_i x, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Se  $\mathcal{A}$  é transitiva em  $\mathbb{R}^n$  então o sistema bilinear  $\theta_*\Gamma$  é controlável em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

**Exemplo 44.**  $G = SO(n)$ ,  $M = S^{n-1}$ .

$$\theta(X, x) = Xx,$$

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^m u_i B_i \right\} \subset so(n),$$

$$\theta_*\Gamma : \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^n u_i B_i x, \quad x \in S^{n-1}$$

Em particular se

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

então  $\theta_*\Gamma$  é controlável em  $S^2$  (rotações).

**Exemplo 45.**  $G = U(n)$  ou  $SU(n)$ ,  $M = S^{2n-1}$ .

$$\theta(Z, z) = Zz,$$

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^m u_i B_i \right\} \subset u(n) \text{ ou } su(n)$$

$$\theta_*\Gamma : \dot{z} = Az + \sum_{i=1}^n u_i B_i z, \quad x \in S^{2n-1}$$

**Exemplo 46.**  $G = Aff_+(n)$ ,  $M = \mathbb{R}^n$ . A componente conexa da identidade no grupo afin

$$Aff_+(n) = \left\{ \begin{pmatrix} X & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset GL(n+1)$$

age transitivamente no espaço

$$M = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

como segue

$$\theta \left( \begin{pmatrix} X & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} X & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Xx + y \\ 1 \end{pmatrix} \cong Xx + y.$$

Considere um sistema direita-invariante em  $G$ :

$$\Gamma = \left\{ C_0 + \sum_{i=1}^m u_i C_i \right\}, \quad C_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{aff}(n).$$

Os campos vetoriais induzidos são afins:

$$\theta_* \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \\ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = Ax + b,$$

e o sistema induzido escreve-se como



$$\theta_*\Gamma : \dot{x} = A_0x + b_0 + \sum_{i=1}^m u_i(A_i x + b_i), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, para  $b_0 = 0, A_1 = \dots = A_m = 0$ , nós obtemos o sistema linear

$$\dot{x} = A_0x + \sum_{i=1}^m u_i b_i, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.10)$$

Pode-se mostrar que se a condição de Kalman é satisfeita, ou seja,

$$\text{span}(b_1, \dots, b_m; A_0 b_1, \dots, A_0 b_m; A_0^{n-1} b_1, \dots, A_0^{n-1} b_m) = \mathbb{R}^n,$$

então o sistema linear 3.10 é controlável em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 47.** O caso em que  $G = E(n)$ ,  $M = \mathbb{R}^n$  é completamente similar ao caso de  $\text{Aff}_+(n)$ .

Nesta seção foi desenvolvida uma teoria de sistemas induzidos por sistemas direita-invariantes por causa da importante classe de sistemas bilineares  $\dot{x} = Ax + uBx$ , onde  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é um vetor coluna. É claro que a teoria dos sistemas induzidos por sistemas esquerda-invariantes é totalmente a mesma e, neste caso, o sistema induzido escreve-se como  $\dot{y} = yA + uyB$ , onde  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é um vetor linha.

# Capítulo 4

## Controlabilidade em grupos de Lie compactos

Neste capítulo daremos uma condição suficiente para a controlabilidade de sistemas direita-invariantes em grupos de compactos e conexos.

### 4.1 Técnicas de extensão para sistemas esquerda-invariantes

Com base no conceito de saturado de Lie de um sistema direita-invariante constrói-se uma técnica de extensão que dá condições suficientes para a controlabilidade. Essa técnica não será explorada aqui, visto que nosso objetivo é apenas estabelecer uma linguagem básica que nos possibilite a demonstração do teorema (4.2.3), que dá uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade de um sistema esquerda-invariante em um grupo de Lie  $G$  compacto e conexo.

#### 4.1.1 O saturado de um sistema direita-invariante

**Definição 4.1.1.** *Sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset L$ . O sistema  $\Gamma_1$  é dito equivalente ao sistema  $\Gamma_2$  se  $\text{cl}\mathcal{A}_{\Gamma_1} = \text{cl}\mathcal{A}_{\Gamma_2}$ . Utiliza-se a notação  $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ .*

Vamos mostrar, a seguir que, além de  $\mathcal{A}_\Gamma$ , o conjunto  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$  também é um semigrupo .

**Lema 4.1.1.** *Seja  $\Gamma \subset L$ . Então  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$  é um subsemigrupo de  $G$ .*

*Demonstração.* Sejam  $X, Y \in \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ . Existem seqüências  $\{X_n\}$  e  $\{Y_n\}$  em  $\mathcal{A}_\Gamma$  tais que  $X_n \rightarrow X$ ,  $Y_n \rightarrow Y$  com  $n \rightarrow \infty$ . É claro que  $X_n Y_n \rightarrow XY$  com  $n \rightarrow \infty$ , e como  $\{X_n Y_n\} \subset \mathcal{A}_\Gamma$  segue que  $XY \in \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ .

**Observação 4.1.1.** Vamos precisar do seguinte fato elementar: sejam  $A, B \subset G$ . Se  $A \subset \text{cl}B$  então  $\text{cl}A \subset \text{cl}B$ .

**Lema 4.1.2.** Se  $\Gamma_1 \sim \Gamma$  e  $\Gamma_2 \sim \Gamma$ , então  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \sim \Gamma$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma = \text{cl}\mathcal{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ . Como  $\Gamma_1 \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  temos que  $\mathcal{A}_{\Gamma_1} \subset \mathcal{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ . Assim  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma = \text{cl}\mathcal{A}_{\Gamma_1} \subset \text{cl}\mathcal{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ .

Para a inclusão oposta, visto a observação feita acima, é suficiente provarmos que  $\mathcal{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \subset \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ .

Seja então  $X = \exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N)$ ,  $t_i \geq 0$ ,  $A_i \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Temos que  $\exp(t_i A_i) \in \mathcal{A}_{\Gamma_1} \cup \mathcal{A}_{\Gamma_2} \subset \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ , assim pelo lema anterior, o produto destas exponenciais  $X \in \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$  e a inclusão oposta está mostrada. Portanto  $\text{cl}\mathcal{A} = \text{cl}\mathcal{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ , mostrando que  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \sim \Gamma$ .

O lema anterior nos permite fazer a união de sistemas equivalentes. Torna-se natural então considerar a união de todos os sistemas equivalentes a um dado sistema.

**Definição 4.1.2.** O *saturado* de um sistema direita-invariante  $\Gamma \subset L$  é o seguinte sistema:  $\text{Sat}(\Gamma) = \cup \{\Gamma' \subset L \mid \Gamma' \sim \Gamma\}$ .

Pode-se definir o saturado de  $\Gamma$ , como sendo o maior subconjunto de  $\text{Lie}\Gamma$  que é equivalente a  $\Gamma$ . Tomando a definição anterior, este é um fato decorrente do item (1) da seguinte proposição.

**Proposição 4.1.1.** (1)  $\text{Sat}(\Gamma) \sim \Gamma$ .

(2)  $\text{Sat}(\Gamma) = \{A \in L \mid \exp(\mathbb{R}_+ A) \subset \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma\}$ .

*Demonstração.* (1) É claro que  $\Gamma \sim \Gamma$  e assim  $\Gamma \subset \text{Sat}(\Gamma)$ . Isto mostra que  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma \subset \text{cl}\mathcal{A}_{\text{Sat}(\Gamma)}$ .

Vamos mostrar agora a inclusão oposta. Seja  $X \in \mathcal{A}_{\text{Sat}(\Gamma)}$ , ou seja,

$$X = \exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N), \quad t_i > 0, \quad A_i \in \text{Sat}(\Gamma).$$

Cada elemento  $A_i$  está contido em um sistema  $\Gamma_i \sim \Gamma$ , assim  $\exp(t_i A_i) \in \mathcal{A}_{\Gamma_i} \subset \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ . Como  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$  é um subgrupo segue que  $\text{cl}\mathcal{A} \ni X$ . Logo  $\mathcal{A}_{\text{Sat}(\Gamma)} \subset \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ . Com isto o item (1) está provado.

(2) Denote o sistema

$$\widehat{\Gamma} = \{A \in L \mid \exp(\mathbb{R}_+ A) \subset \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma\}.$$

Provaremos que: (i)  $\widehat{\Gamma} \subset \text{Sat}(\Gamma)$  e (ii)  $\text{Sat}(\Gamma) \subset \widehat{\Gamma}$ .

Prova de (i): Mostraremos que  $\widehat{\Gamma} \sim \Gamma$ . Considere a representação

$$\mathcal{A}_{\widehat{\Gamma}} = \{\exp(t_1 A_1) \dots \exp(t_N A_N), \quad t_i > 0, \quad A_i \in \widehat{\Gamma}\}.$$

Uma vez que  $\exp(t_i A_i) \in \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ , segue que  $\mathcal{A}_{\widehat{\Gamma}} \subset \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ , pois  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$  é subgrupo. Daí  $\text{cl}\mathcal{A}_{\widehat{\Gamma}} \subset \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ . Além disso, uma vez que  $\Gamma \subset \widehat{\Gamma}$ , temos que  $\mathcal{A}_\Gamma \subset \mathcal{A}_{\widehat{\Gamma}}$ . Logo vale a igualdade,  $\text{cl}\mathcal{A}_{\widehat{\Gamma}} = \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$  e portanto  $\widehat{\Gamma} \sim \Gamma$ .

Prova de (ii): Seja  $A \in \text{Sat}(\Gamma)$  Então  $A \in \Gamma' \sim \Gamma$ . Assim  $\exp(tA) \in \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ , isto é,  $A \in \widehat{\Gamma}$ . Logo a inclusão (ii) é válida.

Por (i) e (ii) concluímos a igualdade requerida no item (2) da proposição.

**Observação 4.1.2.** Infelizmente, o saturado não é o objeto tangente apropriado para  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$  responsável pela controlabilidade: é possível que  $\text{Sat}(\Gamma) = L$ , e ainda  $\Gamma$  não é controlável.

**Exemplo 48. (O fluxo irracional do toro).** O toro é um grupo de Lie abeliano bidimensional :

$$G = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 = \{(x \bmod 1, y \bmod 1)\}.$$

Temos que sua álgebra de Lie é  $L = T_{Id}\mathbb{T} = \mathbb{R}^2$ .

Considere o sistema direita-invariante em  $G$ , sem controle, isto é,  $U = \{0\}$ ,

$$\Gamma = \{A\}, \quad A = (1, r), \quad r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

O conjunto acessível é o fluxo no toro:

$$\mathcal{A} = \exp(\mathbb{R}_+ A) = \{(x \bmod 1, kx \bmod 1) | x \geq 0\} \neq \mathbb{T}^2, \quad \text{cl}\mathcal{A} = \mathbb{T}^2.$$

Assim  $\Gamma \sim L = \text{Sat}\Gamma$ , embora  $\Gamma$  não seja controlável em  $\mathbb{T}^2$ . A razão disso é que a condição do posto é violada:  $\text{Lie}(\Gamma) = \mathbb{R}A \neq L$ .

## 4.2 O saturado de Lie de um sistema invariante

**Definição 4.2.1.** O saturado de Lie de um sistema esquerda-invariante é definido como segue:

$$LS(\Gamma) = \text{Lie}(\Gamma) \cap \text{Sat}(\Gamma).$$

A seguinte descrição é uma consequência imediata da proposição (4.1.1).

**Corolário 4.2.1.**  $LS(\Gamma) = \{A \in \text{Lie}(\Gamma) | \exp(\mathbb{R}_+ A) \subset \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma\}$ .

**Teorema 4.2.1. (Teste do saturado de Lie).** *Um sistema esquerda-invariante  $\Gamma \subset L$  é controlável num grupo de Lie  $G$  conexo se, e somente se,  $LS(\Gamma) = L$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\Gamma$  seja controlável. Então  $\mathcal{A}_\Gamma = G$ . Segue que  $\exp(\mathbb{R}_+\mathbb{A}) \subset \text{cl}\mathcal{A}_\Gamma$ ,  $\forall A \in L$ . De acordo com isso  $\text{Sat}(\Gamma) = L$ , e então

$$\text{LS}(\Gamma) = \text{Lie}(\Gamma) \cap \text{Sat}(\Gamma) = \text{Lie}(\Gamma) \cap L.$$

Por outro lado já sabemos que se  $\Gamma$  é controlável então  $\text{Lie}(\Gamma) = L$ . Assim, segue disso e da igualdade anterior que  $\text{LS}(\Gamma) = L$ .

Reciprocamente, suponha que  $\text{LS}(\Gamma) = L$ . Essa igualdade nos diz que  $\text{Sat}(\Gamma) = L$ . Além disso, o grupo conexo  $G$  é gerado pelos semigrupos a um parâmetro  $\{\exp(tA) | A \in L, t \geq 0\}$  considerado como um semigrupo. Segue então, desses dois fatos que, que  $\text{cl}\mathcal{A}_L = G$ . Como  $\text{Sat}(\Gamma) \sim \Gamma$  e  $\text{Sat}(\Gamma) = L$ , temos que  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma = \text{cl}\mathcal{A}_L = G$ . É claro que  $\text{Lie}(\Gamma) = L$  pois  $L = \text{LS}(\Gamma) = \text{Lie}(\Gamma) \cap \text{Sat}(\Gamma) = \text{Lie}(\Gamma) \cap L$ . Como vimos  $\text{cl}\mathcal{A}_\Gamma = G$ , segue então do teorema (3.7.5) que  $\Gamma$  é controlável.

No seguinte teorema são dadas as propriedades básicas do saturado de Lie. O leitor interessado em sua demonstração poderá consultar [14].

**Teorema 4.2.2.** (1)  $\text{LS}(\Gamma)$  é um cone positivo convexo e fechado em  $L$ , isto é,

(1a)  $\text{LS}(\Gamma)$  é topologicamente fechado:

$$\text{cl}(\text{LS}(\Gamma)) = \text{LS}(\Gamma),$$

(1b)  $\text{LS}(\Gamma)$  é um cone convexo:

$$A, B \in \text{LS}(\Gamma) \Rightarrow \alpha A + (1 - \alpha)B \in \text{LS}(\Gamma), \forall \alpha \in [0, 1],$$

(1c)  $\text{LS}(\Gamma)$  é um cone positivo:

$$A \in \text{LS}(\Gamma) \Rightarrow \alpha A \in \text{LS}(\Gamma), \forall \alpha \geq 0.$$

Assim,

$$A, B \in \text{LS}(\Gamma) \Rightarrow \alpha A + \beta B \in \text{LS}(\Gamma), \forall \alpha, \beta \geq 0.$$

(2) Para qualquer  $\pm A, B \in \text{LS}(\Gamma)$  e qualquer  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(\text{ad}A)B = B + (s\text{ad}A)B + \frac{1}{2!}(s\text{ad}A)^2B + \dots + \frac{1}{n!}(s\text{ad}A)^nB + \dots \in \text{LS}(\Gamma).$$

(3) Se  $\pm A, \pm B \in \text{LS}(\Gamma)$ , então  $\pm[A, B] \in \text{LS}(\Gamma)$ .

(4) Se  $A \in \text{LS}(\Gamma)$  e se o subgrupo a um parâmetro  $\{\exp(tA) | t \in \mathbb{R}\}$  é periódico (isto é, compacto) então  $-A \in \text{LS}(\Gamma)$ .

(5) Além disso, se  $A \in \text{LS}(\Gamma)$  e se o subgrupo a um parâmetro  $\{\exp(tA) | t \in \mathbb{R}\}$  é quase-periódico, ou seja,  $\exp(\mathbb{R}_-A) \subset \text{clexp}(\mathbb{R}_+A)$ , então  $-A \in \text{LS}(\Gamma)$ .

Usualmente, é difícil construir explicitamente o saturado de Lie de um sistema direita-invariante. Por causa disto os teoremas (4.2.1) e (4.2.2) são aplicados como condições suficientes para a controlabilidade via o seguinte procedimento: dado um sistema  $\Gamma$  constrói-se uma família ascendente, totalmente ordenada, de extensões  $\{\Gamma_\alpha\}$  de  $\Gamma$ , ou seja,

$$\Gamma_0 = \Gamma, \quad \Gamma_\alpha \subset \Gamma_\beta, \quad \text{se } \alpha < \beta.$$

No que segue denotamos por  $co(\Gamma)$  o cone convexo gerado por  $\Gamma$  e por  $\text{ad } A : L \rightarrow L$  o operador correspondente a  $A \in L$  tal que

$$\text{ad}A : B \mapsto [A, B].$$

As regras de extensão são garantidas pelo teorema 4.2.2:

- (1) dado  $\Gamma_\alpha$ , constrói-se  $\Gamma_\beta = \text{cl}(co(\Gamma_\alpha))$ ;
- (2) para  $\pm A, B \in \Gamma$ , constrói-se  $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup e^{\mathbb{R}\text{ad}A}B$ ;
- (3) para  $\pm A, \pm B \in \Gamma_\alpha$ , constrói-se  $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup \mathbb{R}[A, B]$ ;
- (4) dado  $A \in \Gamma_\alpha$  com grupo a um parâmetro periódico, ou quase-periódico, constrói-se  $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup \mathbb{R}A$ .

O teorema (4.2.2) garante que todas as extensões  $\Gamma_\alpha$  pertencem a  $LS(\Gamma)$ . Se obtivermos a relação  $\Gamma_\alpha = L$  em algum passo, então  $LS(\Gamma) = L$  e o sistema  $\Gamma$  será controlável pelo teorema (4.2.1).

Vamos considerar nesta seção grupos de Lie que são compactos. Por exemplo, os grupos  $SO(n), U(n), SU(n)$  são compactos e conexos.

O seguinte simples fato é crucial para o problema de controlabilidade em grupos de Lie compactos.

**Lema 4.2.1.** *Seja  $G$  é um grupo de Lie compacto e  $A$  um elemento da sua álgebra de Lie. Então o subgrupo a um parâmetro  $\exp(\mathbb{R}A)$  é quase periódico, ou seja,*

$$\exp(\mathbb{R}_-A) \subset \text{cl } \exp(\mathbb{R}_+A).$$

*Demonstração.* Seja  $X = \exp(tA)$  para um  $t > 0$  arbitrariamente fixado. Temos de provar que  $\exp(-tA) = X^{-1} \in \text{cl } \exp(\mathbb{R}_+A)$ . A sequência  $\{X^n\}$  possui uma subsequência convergente no grupo de Lie compacto  $G$ , digamos

$$X^{n_k} \rightarrow Y \in G \quad \text{com } k \rightarrow \infty, \quad n_{k+1} > n_k.$$

Então

$$X^{n_{k+1}-n_k-1} = X^{n_{k+1}}X^{-n_k}X^{-1} \rightarrow YY^{-1}X^{-1} = X^{-1} \quad \text{com } k \rightarrow \infty.$$

Mas  $n_{k+1} - n_k - 1 \geq 0$ , donde  $X^{-1} \in \text{cl } \exp(\mathbb{R}_+A)$ .

**Corolário 4.2.2.** *Seja  $G$  um grupo de Lie compacto, e  $\Gamma \subset L$ . Então  $LS(\Gamma) = Lie(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar inicialmente que  $LS(\Gamma)$  é uma álgebra de Lie. Se  $A, B \in LS(\Gamma)$  então, pelo lema 4.2.1,  $\pm A, \pm B \in LS(\Gamma)$ . Segue disto e do fato de que  $LS(\Gamma)$  é um cone, que  $(\pm\alpha)(\pm A) + (\pm\beta)(\pm B) \in LS(\Gamma)$ , ou seja,  $\alpha A + \beta B \in LS(\Gamma)$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Além disso, o mesmo lema juntamente com o item 3) do teorema 4.2.2 garantem que,  $\pm[A, B] \in LS(\Gamma)$ . Isto mostra que  $LS(\Gamma)$  é uma subálgebra de  $L$ .

Agora, é claro que  $LS(\Gamma) \subset Lie(\Gamma)$  ( lembre que  $LS(\Gamma) = Lie(\Gamma) \cap Sat(\Gamma)$ ). Por outro lado, já sabemos que  $\Gamma \subset Sat(\Gamma)$ , por ser equivalente a si mesmo e além disso  $\Gamma \subset Lie(\Gamma)$ , pois  $Lie(\Gamma)$  é gerada por  $\Gamma$ . De acordo com isso  $\Gamma \subset LS(\Gamma)$ . Logo,  $\Gamma \subset LS(\Gamma) \subset Lie(\Gamma)$ . Desta cadeia de inclusões e do fato de que  $Lie(\Gamma)$  é a menor subálgebra contendo  $\Gamma$ , concluímos que  $LS(\Gamma) = Lie(\Gamma)$ .

Uma consequência do lema anterior é o seguinte teorema

**Teorema 4.2.3.** *Um sistema esquerda-invariante  $\Gamma \subset L$  é controlável em um grupo de Lie  $G$  compacto e conexo se, e somente se,  $Lie(\Gamma) = L$ .*

*Demonstração.* Segue imediatamente do corolário anterior e do teorema (4.2.1).

**Exemplo 49.** Considere o grupo de Lie compacto e conexo  $G = SO(3)$ , constituído de todas as matrizes  $3 \times 3$  reais, ortogonais com determinante positivo. Sua álgebra de Lie  $L = so(3)$  é o conjunto de todas as matrizes anti-simétricas. Tome qualquer matrizes linearmente independentes  $A_1, A_2 \in so(3)$  e considere o sistema esquerda-invariante  $\Gamma = \{A_1, A_2\}$ . Pode-se observar facilmente que  $[A_1, A_2] \in so(3)$  e além disso  $\{A_1, A_2, [A_1, A_2]\}$  é um conjunto linearmente independente, isto é, gera toda a álgebra de Lie  $so(3)$ . Pelo teorema (4.2.3) o sistema é controlável. Isso nos diz que qualquer rotação pode ser escrita como um produto de exponenciais

$$\exp(t_1 A_{i_1}) \dots \exp(t_N A_{i_N}), \quad t_j \geq 0, \quad i_j \in \{1, 2\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

The single-input right-invariant affine in control system

$$\dot{X} = (A_1 + uA_2)X, \quad u \in U \subset \mathbb{R}, \quad X \in SO(3)$$

é também controlável (para qualquer conjunto controle contendo mais de um elemento). Conseqüentemente, o sistema bilinear induzido

$$\dot{x} = A_1 x + uA_2 x, \quad x \in S^2, \quad u \in U$$

é controlável na esfera  $S^2$ .

**Exemplo 50.** As considerações do exemplo anterior podem ser generalizadas para o grupo  $G = SO(n)$  de rotações do  $\mathbb{R}^n$ . Neste caso, a álgebra de Lie  $L$  de  $G$  é o conjunto de todas as matrizes anti-simétricas  $so(n)$ . Considere as matrizes

$$A_1 = (E_{1,2} - E_{2,1}) + (E_{2,3} - E_{3,2}) + \dots + (E_{n-2,n-1} - E_{n-1,n-2})$$

e  $A_2 = E_{n-1,n} - E_{n,n-1}$ , onde denotamos por  $E_{i,j}$  a matriz tendo a identidade real na posição  $ij$  e zero nas demais entradas. Pode-se mostrar que  $Lie(A_1, A_2) = so(n)$ . Assim, embora o grupo  $SO(n)$  seja  $\frac{1}{2}n(n-1)$ -dimensional, o sistema

$$\dot{X} = (A_1 + uA_2)X, \quad X \in SO(n), u \in U \subset \mathbb{R},$$

no qual somente um controle é envolvido, é controlável (se o conjunto de parametros controles  $U$  contém pelo menos dois pontos distintos).

Note que o conjunto de pares  $(A_1, A_2)$  tal que  $Lie(A_1, A_2) = L$  é aberto e denso em  $L \times L$  (isto é válido para qualquer algebra de Lie  $L$  semisimples, (veja [9]). Assim, podemos substituir as matrizes  $A_1$  e  $A_2$  por um quase arbitrário par em  $L \times L$ .

**Exemplo 51.** Para o grupo de Lie  $G = SU(2)$ , sua álgebra de Lie pode ser representada como segue:

$$L = su(2) = span\left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Para quaisquer  $A_1, A_2 \in L$ , linearmente independentes, tem-se que  $[A_1, A_2] \notin span(A_1, A_2)$ , assim  $Lie(A_1, A_2) = L$ . Também o sistema  $\Gamma = \{A_1 + uA_2; u \in U\}$  (onde  $U$  contém mais de um elemento) é controlável em  $G = SU(2)$ . Consequentemente, o sistema bilinear induzido

$$\dot{z} = A_1z + uA_2z, \quad z \in S^3, \quad u \in \mathbb{R}$$

é controlável na esfera  $S^3$ .



# Capítulo 5

## Controlabilidade em tempo Uniforme

Considere  $G$  um grupo de Lie semi-simples conexo e compacto. Dado um sistema de controle invariante controlável em  $G$  mostraremos neste capítulo a existência de um tempo uniforme para a controlabilidade. Este resultado foi primeiro declarado e provado por Jurdevic e Sussmann em [6]. Porém a prova que será dada qui, devida a Ayala-Tribuzy-José, (veja [2]) é elementar e usa um argumento que provém diretamente da definição de grupo de Lie semi-simples.

Precisamos de alguns conceitos preliminares.

Seja  $G$  um grupo de Lie com sua álgebra de Lie  $L$ .

Lembramos que um sistema de controle invariante  $\Sigma = (G, \mathcal{D})$  é determinado por uma família de equações diferenciais dadas por

$$\mathcal{D} = \{X^u = X + \sum_{j=1}^m u_j Y^j, \quad u \in \mathcal{U}\}. \quad (5.1)$$

O campo vetorial  $X$  e os vetores controles  $Y^j, j = 1, 2, \dots, m$ , são elementos de  $L$  considerados como campos de vetores esquerda-invariantes. As funções de controle admissíveis são elementos na classe

$$\mathcal{U}_K = \{u : \mathbb{R} \rightarrow K \subset \mathbb{R}^n | u(t) \text{ é uma função constante por partes}\}.$$

Aqui  $K = \mathbb{R}^n$  denota o conjunto de controles irrestritos ou cubo  $K = [-1, 1]^m$  ou o conjunto limite formado pelos controles bang-bang  $K = \partial[-1, 1]^m$ .

Salvo menção em contrário, qualquer resultado apresentado aqui será independente da classe de controles admissíveis.

Para cada  $u \in \mathcal{U}$  e qualquer condição inicial  $x \in G$  a equação diferencial determinada por  $X^u$  possui uma única solução global  $X_t^u(x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  com  $X_0^u(x) = x$ , onde  $X_t^u(x)_{t \in \mathbb{R}}$  é o grupo a 1-parâmetro de  $X^u$ .

Assumiremos que  $\Sigma$  satisfaz a condição do posto da álgebra de Lie, (*LARC*), isto é

$$\text{Span}_{\mathcal{L}\mathcal{A}}(\mathcal{D})(x) = T_x G, \text{ para qualquer } x \in G.$$

Aqui  $\text{Span}_{\mathcal{L}\mathcal{A}}(\mathcal{D})$  é a álgebra de Lie gerada pelos campos vetoriais em  $\mathcal{D}$ , ou seja, gerada por  $X, Y^j, j = 1, \dots, m$  e fechado para o usual colchete de Lie  $[\cdot, \cdot]$  entre campos vetoriais. A propriedade *LARC* imposta há pouco, avaliada no elemento identidade  $Id$  de  $G$ , mostra que a sequência crescente de subespaços  $\mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}] + [\mathcal{D}, [\mathcal{D}, \mathcal{D}]] + \dots$ , coincide com  $L$ . Além disso se  $u$  é um controle constante, a propriedade da invariância de  $X^u$  implica que  $X_t^u(x) = x \cdot X_t^u(Id)$ .

Como estamos considerando o conjunto  $K$  simétrico em relação à origem temos que

$$\{-X^u = -X - \sum_{j=1}^m u_j Y^j, \quad u \in \mathcal{U}$$

é equivalente a

$$\{-X^u = -X + \sum_{j=1}^m u_j Y^j, \quad u \in \mathcal{U}$$

e então o sistema de controle invariante  $-\Sigma$  é definido a partir do sistema  $\Sigma$  substituindo-se  $X$  por  $-X$  em (5).

Denotaremos por  $A(t, Id)$  o conjunto acessível a partir da identidade em tempo  $t$ , do sistema  $\Sigma$  e  $A_-(s, Id)$  o conjunto acessível a partir da identidade em tempo  $s$  do sistema  $-\Sigma$ .

**Observação 5.0.1.** Note que se olharmos os sistema  $\Sigma$  e  $-\Sigma$  como conjuntos  $\Gamma$  e  $-\Gamma$ , respectivamente, de campos de invariantes à esquerda então podemos escrever

$$A(t, Id) = \{\exp(t_k X_k) \dots \exp(t_1 X_1), \quad X_i \in \Gamma, \quad \sum_{i=1}^k t_i = t$$

e

$$A_-(s, Id) = \exp(s_r Y_k) \dots \exp(s_1 Y_1), \quad Y_i \in \Gamma, \quad \sum_{i=1}^k s_i = s$$

**Definição 5.0.2.** Um sistema de controle  $\Sigma = (G, \mathcal{D})$  é dito controlável em tempo uniforme  $t > 0$ , se para quaisquer dois pontos arbitrários  $x, y \in G$  existe um controle admissível  $u = u(x, y) \in \mathcal{U}$  tal que  $X_t^u(x) = y$ .

## 5.1 Existência de um tempo uniforme para $\Sigma$

No que segue consideraremos  $G$  um grupo de Lie conexo, compacto e semisimples. É claro que sob a condição *LARC*, o sistema de controle  $\Sigma$  é controlável (veja o teorema 4.2.3), o que é uma condição necessária para o nosso estudo.

Denote por

$$\mathfrak{h} = \text{Ideal}_L\{Y^1, Y^2, \dots, Y^n\}$$

o ideal em  $L$  gerado pelos vetores controles e por  $H$  o subgrupo de Lie de  $G$  conexo associado à álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$ . Uma vez que  $\mathfrak{h}$  é um ideal, segue que  $H$  é um subgrupo normal de  $G$ . Esses fatos, na verdade, são resultados básicos da teoria mais geral dos grupos de Lie. O subgrupo  $H$  mencionado acima é gerado pelo conjunto  $\exp(\mathfrak{h})$ . Se  $\mathfrak{h}$  é um ideal então  $H = \langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle$  é um subgrupo normal de  $G$ . Esses fatos estão demonstrados em [22].

**Lema 5.1.1.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semisimples. Então  $\mathfrak{g}$  não possui ideais de codimensão 1.*

*Demonstração.* Suponha que  $\mathfrak{h}$  seja um ideal de  $\mathfrak{g}$  de codimensão 1, ou seja,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$$

onde  $\mathfrak{a}$  é uma álgebra de dimensão 1. Agora como  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  é isomorfa à  $\mathfrak{a}$  (veja [16]pp.22) e  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  é uma subálgebra semisimples (veja [16]) resulta que  $\mathfrak{a}$  é uma álgebra semisimples unidimensional. Porém, isso é uma contradição, pois as álgebras unidimensionais não são semisimples.

**Observação 5.1.1.** Como estamos considerando  $G$  um grupo semisimples, ou seja, sua álgebra de Lie  $L$  é semisimples, segue do teorema 5.1.1 que o ideal  $\mathfrak{h} = \text{Ideal}_L\{Y^1, Y^2, \dots, Y^n\}$  não possui ideais de codimensão 1. Logo,  $X \in \mathfrak{h}$  e decorre da condição *LARC* que  $\mathfrak{h} = L$ . Assim  $H = \langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle = G$ , conseqüentemente a translação de  $H$  por  $\exp(tX)$  coincide com  $G$ , ou seja,  $\exp(tX)H = G$ .

O conjunto de acessibilidade  $\Sigma$  a partir da identidade  $Id \in G$  em exatamente  $t > 0$  unidades de tempo é denotado por

$$A(t, e) = \{X_t^u(x) : u \in U\}.$$

A proposição seguinte será enunciada sem demonstração. O leitor interessado poderá consultar [12].

**Proposição 5.1.1.** *Seja  $\Sigma$  um sistema esquerda-invariante em um grupo de Lie compacto e conexo. Então, para cada  $t > 0$*

(i) *com respeito à topologia de  $H$ ,*

$$cl(int_{\exp(tX)H}A(t, Id)) = A(t, Id);$$

(ii)  $A(t, Id) \subset \exp(tX)H$ .

De acordo com a proposição acima,  $A(t, Id)$  está contido em uma  $G$ -subvariedade de codimensão 0 ou 1, dependendo do fato de que  $X$  esteja ou não em  $\mathfrak{h}$ . Em particular, como  $Id \in intA(t, Id)$  segue que  $A(t, Id)$  possui interior não vazio nessa subvariedade. Se  $X \in \mathfrak{h}$  então é válida a relação  $\mathfrak{h} = L$ .

**Exemplo 52.** Considere o Toro  $T^2 = S^1 \times S^1$  e o sistema de controle invariante  $\Sigma = (T^2, \mathcal{D})$  com

$$\mathcal{D} = \{X^u = X + uY : u \in \mathcal{U}\}.$$

onde  $X = (\frac{\partial}{\partial x}, 0)$  e  $Y = (0, \frac{\partial}{\partial y})$ . A componente não nula de  $X$  e de  $Y$  são campos vetoriais invariantes na esfera  $S^1$ . Uma vez que  $T$  é comutativo,  $\mathfrak{h} = \langle Y \rangle$  possui dimensão 1. Assim, o subgrupo  $H$  possui codimensão 1 e para cada tempo positivo  $t$ , o conjunto acessível em exatamente  $t$  unidades de tempo está contido na subvariedade 1-dimensional  $\exp(tX)H$  de  $T^2$ . Então, nesta situação, não podemos esperar que haja controlabilidade uniforme. Da teoria geral dos grupos abelianos nós sabemos que existem inteiros não negativos  $n, m$  tais que qualquer grupo de Lie abeliano possui a forma  $G = T^n \times \mathbb{R}^m$ . Uma vez que estamos considerando  $G$  compacto, este exemplo mostra que não podemos esperar a propriedade do tempo uniforme para a parte de  $G$ .

**Exemplo 53.** Considere em  $G = SO(3)$  o sistema

$$\mathcal{D} = \{X^u = X + uY : u \in \mathcal{U}\},$$

onde  $X$  e  $Y$  são duas quaisquer matrizes anti-simétricas linearmente independentes. Então  $\mathfrak{h} = L$ .

**Observação 5.1.2.** De acordo com a proposição 5.1.1 e os exemplos anteriores é natural concentrar nosso estudo em sistemas de controles  $\Sigma$ , onde campo vetorial  $X$  está no ideal  $\mathfrak{h}$ . Como já afirmamos anteriormente focaremos nosso estudo no problema de controlabilidade em grupos de Lie semi-simples.

**Proposição 5.1.2.** *Seja  $G$  um grupo de Lie semi-simples conexo e compacto. Considere um sistema de controle invariante  $\Sigma = (G, \mathcal{D})$  satisfazendo a condição LARC. Então existe um tempo positivo  $s_+$  tal que,  $G = \mathcal{A}(s_+, Id)$*

*Demonstração.* Nas condições do teorema  $\exp(tX)H = G$ . De fato,  $T_{Id}H = h$  é um ideal de codimensão 0 ou 1. Porém  $G$  é semisimples. Assim  $h = L$  e portanto  $H = G$ . Então segue da proposição 5.1.1, para cada tempo positivo  $t$ ,

$$cl(int_{\exp(tX)H}A(t, Id) = cl(int_G A(t, Id)) = clA(t, Id) \quad (5.2)$$

e

$$cl(int_{\exp(tX)H}A_-(t, Id) = cl(int_G A_-(t, Id)) = clA_-(t, Id). \quad (5.3)$$

Por outro lado, como os sistemas são controláveis temos

$$\cup_{t \geq 0} A(t, Id) = G = \cup_{t \geq 0} A_-(t, Id). \quad (5.4)$$

De acordo com o exposto acima podemos garantir a existência de tempos  $t, s > 0$  e um ponto  $x \in G$  com

$$x \in int_G A(t, Id) \cap int_G A_-(s, Id).$$

De fato: fixe  $t > 0$ . Note que  $intA(t, Id) \neq \emptyset$ , caso contrário teríamos  $clintA(t, Id) = clA(t, Id) = \emptyset$ , o que é obviamente uma contradição. Dado então  $y \in intA(t, Id)$ , a segunda igualdade em (5.3) mostra que existe um tempo  $s > 0$  tal que  $y \in A_-(s, Id)$ . Usando a segunda igualdade em (5.2) obtemos

$$y \in A_-(s, Id) \subset cl(int_G A_-(s, Id)),$$

e conseqüentemente a existência de uma seqüência de pontos  $(y_n)$  em  $intA_-(s, Id)$  tal que  $y_n \rightarrow y$ . Como  $y \in intA(t, Id)$  existe uma vizinhança  $V_y$  de  $y$  com

$$y \in V_y \subset intA(t, Id).$$

Segue então disso e do fato de que  $y_n \rightarrow y$ , que para  $n_0$  suficientemente grande  $y_{n_0} \in V_y \subset intA(t, Id)$ . Assim, se tomarmos  $x = y_m$  para qualquer  $m \geq n_0$  teremos

$$x \in int_G A(t, Id) \cap int_G A_-(s, Id) \quad (5.5)$$

como havíamos requerido.

Vamos mostrar agora que  $Id \in intA(t + s, Id)$ . Veja que

$$x = \exp(s_r Y_r) \dots \exp(s_1 Y_1), \quad Y_i \in -\mathcal{D}; \quad \sum_{s=1}^r s_i = s.$$

e então

$$\begin{aligned} Id &= \exp(-s_1 Y_1) \dots \exp(-s_r Y_r) x \\ &= \exp(s_1(-Y_1)) \dots \exp(s_r(-Y_r)) x, -Y_i \in \mathcal{D}, \sum_{s=1}^r = s. \end{aligned}$$

Isto significa que se o controle  $v_x = v_x(Id, x)$  guia  $Id$  até  $x$  através de uma  $-\sum$ -trajetória em tempo  $s$ , então existe um controle  $u_{Id} = u_{Id}(x, Id)$  que guia  $x$  até  $Id$  em tempo  $s$  através de uma  $\sum$ -trajetória. Assim fica claro que a concatenação  $u = u_{Id} * u_x$  conduz  $Id$  para  $Id$  no tempo  $t + s$  através de uma  $\sum$ -trajetória, ou seja,  $Id \in A(t + s, Id)$ . Tome agora uma vizinhança qualquer  $V_x$  de  $x$  tal que

$$x \in V_x \subset \text{int}_G A(t, Id) \cap \text{int}_G A_-(s, Id).$$

O difeomorfismo  $X_s^{u_{Id}}$  induzido pelo controle  $u_{Id}$  em tempo  $s$  translada a vizinhança  $V_x$  de  $x$  a uma vizinhança  $V_{Id}$  de  $Id$ . Como  $G$  é conexo segue da proposição 2.2.1 que  $G = \cup_{n \geq 1} (V_{Id})^n$ . Da compacidade de  $G$  existe um menor inteiro  $k$  tal que  $G = \cup (V_{Id})^k$ . Como  $A(Id) = \cup_{t \geq 0} A(t, Id)$  é um semigrupo resulta que  $G = \cup (V_{Id})^k \subset A(t + s, Id)^k \subset A(k(t + s), Id)$ . Tomando  $s_+ = k(t + s)$  fica provada a proposição.

Agora estamos aptos a provar o resultado principal deste capítulo.

**Teorema 5.1.1.** *Seja  $G$  um grupo de Lie conexo, compacto e semisimples  $\Sigma = (G, \mathcal{D})$  um sistema de controle invariante em  $G$  satisfazendo a condição LARC. Então, existe um tempo positivo  $s_\Sigma$  tal que  $\Sigma$  é controlável no tempo uniforme  $s_\Sigma$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in G$  quaisquer. Vamos mostrar como conduzir  $x$  até  $y$  através de uma  $\sum$ -trajetória em tempo uniforme. Na proposição 5.1.2 nós provamos a existência de um tempo  $s_+$  tal que começando a partir de  $Id$  é possível atingir qualquer ponto  $y \in G$  em exatamente  $s_+$  unidades de tempo, através de uma  $\sum$ -trajetória. Considere agora o sistema de controle transitivo  $-\sum$ . Novamente pela proposição 5.1.2, existe um tempo positivo  $s_-$  tal que a partir da identidade se alcança qualquer ponto  $x \in G$  através de uma  $-\sum$ -trajetória. Como vimos anteriormente, podemos conduzir  $x$  até  $Id$  no tempo  $s_-$  através de uma  $\sum$ -trajetória. Para finalizar, basta ver que o elemento  $x$  é guiado até  $y$  através de uma  $\sum$ -trajetória, passando por  $Id$ , no tempo uniforme  $s_\Sigma = s_+ + s_-$ . Portanto o sistema  $\Sigma$  é controlável em tempo uniforme, como queríamos mostrar.

## 5.2 Aplicações

Vamos aplicar o teorema 5.1.1 a uma classe especial de sistemas homogêneos: os sistemas afins. Vamos considerar aqui os sistemas de controles usando campos de vetores invariantes à direita. Podemos fazer isso, pois já vimos que qualquer problema envolvendo campos invariantes à direita pode ser transformado em um problema envolvendo campos invariantes à esquerda, e vice-versa. Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $\Sigma = (G, \mathcal{D})$  um sistema de controle direita invariante em um grupo de Lie conexo  $G$  com álgebra de Lie  $L$ , que age transitivamente em  $M$  através da aplicação

$$p : G \times M \rightarrow M.$$

A dinâmica do conjunto  $\mathcal{D} \subset L$  induz o sistema não linear

$$p_*(\Sigma) = (M, p_*(\mathcal{D}))$$

onde  $p_*$  denota a diferencial de  $p$  como visto no capítulo 3 seção 3.8.

**Teorema 5.2.1.** *Se o sistema  $\Sigma$  é controlável em  $G$ , então  $p_*\Sigma$  é controlável em  $M$ . Além disso, para cada tempo positivo  $s$*

$$\mathcal{A}_\Sigma(s, x) = G \Rightarrow \mathcal{A}_{p_*(\Sigma)}(s, p(x)) = M.$$

**Teorema 5.2.2.** *Seja  $G$  um grupo de Lie compacto conexo e semisimples agindo transitivamente em  $M$ . Considere o sistema de controle invariante à direita  $\Sigma = (G, \mathcal{D})$ . Então, existe um tempo positivo  $s_{p_*}(\Sigma)$  tal que o sistema afim*

$$p_*(\Sigma) = (M, p_*(\mathcal{D}))$$

*é controlável no tempo uniforme  $s_{p_*}(\Sigma)$ .*

*Demonstração.* Pelo teorema 5.1.1,  $\Sigma$  é controlável no tempo uniforme  $s_\Sigma$ . A prova segue do teorema 5.2.1 e do fato de que  $s_\Sigma = s_{p_*}(\Sigma)$ .

Como um exemplo genérico, considere o sistema de controle bilinear  $\Sigma_B$  em  $\mathbb{R}^n$ .

$$\dot{x} = [A_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_i(t)]x(t)$$

determinado pelas matrizes  $A_i \in gl(n, \mathbb{R})$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  e com  $u \in \mathcal{U}$ , como foi dado em 5. Seja  $G$  um grupo de Lie conexo com álgebra com a subálgebra

$$\mathfrak{g} = \text{Span}_{\mathcal{L}\mathcal{A}}\{A_0, A_1, \dots, A_m\} \subset gl(n, \mathbb{R}).$$

O sistema

$$\dot{X} = [A_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_i]X(t), X \in G$$

induzido por  $\sum_B$  é invariante à direita em  $G$ . Assuma que  $G$  é compacto e semisimples. Então, o sistema afim

$$\dot{x} = [A_0 + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_i(t)]x(t), \quad x(0) = x_0$$

definido na órbita

$$G(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; x = gx_0 \text{ com } g \in G\}$$

é controlável em tempo uniforme.

**Exemplo 54.** Considere o sistema de controle bilinear

$$\dot{x}(t) = [A_0 + u(t)A_1]x(t)$$

onde  $A_0$  e  $A_1$  geram a álgebra de Lie

$$\mathfrak{g} = \text{Span}_{\mathcal{L}\mathcal{A}}\{A_0, A_1\} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}).$$

O grupo e Lie compacto associado é  $G = SO(n)$ . Recorde que para cada número natural  $n$  o grupo  $SO(n)$  é simples, com exceção do caso semisimples  $SO(4)$ . Isso mostra que o sistema afim é controlável em tempo uniforme na variedade  $M = S^{n-1}$ . Para um exemplo concreto geral, considere  $A_0 = \sum_{i=1}^{n-2} E_i, i+1 - E_{i+1,i}$  e  $A_1 = E_{n-1,n} - E_{n,n-1}$ . As matrizes  $E_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  são elementos da base canônica de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . Então,  $A_0$  e  $A_1$  geram  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ .

O exemplo seguinte mostra que o tempo uniforme no teorema 11 não é arbitrário.

**Exemplo 55.** Em  $\mathbb{R}^3$  considere o sistema de controle bilinear  $\sum_B$  :

$$\dot{x}(t) = [X + u(t)Y]x(t),$$

onde  $X = -E_{1,3} + E_{3,1}$  e  $Y = E_{1,2} - E_{2,1}$  e  $u \in \mathcal{U}$ . Como o teorema (5.1.1) mostra, o sistema de controle invariante  $\sum$  determinado por  $\sum_B = p_*(\sum)$ , é controlável em tempo uniforme em  $SO(3)$ . Assim o teorema (5.2.1) implica que o sistema de controle bilinear é controlável em tempo uniforme em  $S^2$ , considere, por exemplo, como a órbita de  $G$  em  $e_2 = (0, 1, 0)$ . A seguir denotaremos  $A = \cap_{t>0} A(t, Id)$ . Considere a classe de controles admissíveis irrestrito  $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}$ . Mostraremos que o subconjunto  $A(e_2) \subset S^2$  onde quaisquer



dois pontos podem ser interligados em tempo positivo uniforme e arbitrário é reduzido ao círculo equador.

Considere a função  $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = \langle e_3, x \rangle$  na esfera. Aqui  $\langle, \rangle$  denota o usual produto interno em  $\mathbb{R}^3$  e  $\beta(t) = h(x(t))$ . Aqui  $x(t)$  é uma solução de  $\sum_B$  com controle  $u$ . Temos que

$$\dot{\beta}(t) = (dh)_{x(t)}\dot{x}(t) = (dh)_{x(t)}(Xx(t) + u(t)Yx(t)).$$

Uma vez que  $h$  é constante em qualquer trajetória determinada pelo campo vetorial invariante  $Y$ , segue que  $(dh)_{x(t)}(Yx(t)) = 0$ . Seja  $x(t)$  uma solução que conduz um ponto  $x_0$  do equador ao pólo norte no tempo positivo  $s_0$ . Temos então que

$$\beta(0) = 0, \quad \beta(s_0) = 1 \quad \text{e} \quad \beta(s) = \int_0^s \dot{\beta}(\zeta) d\zeta.$$

Em particular,  $1 \leq \int_0^{s_0} |\beta(s)| ds < Ms_0$ , onde  $M$  é qualquer limitação apropriada para a integral. Assim, temos  $\frac{1}{M} < s_0 < s_\Sigma$ . Então o pólo norte não pode ser atingido a partir do equador em tempo menor ou igual a  $\frac{1}{M}$ . Este fato mostra que, em geral, o tempo uniforme pode não ser arbitrário. Além disso, uma vez que o grupo de Lie  $SO(3)$  é simples, a única subálgebra  $\mathfrak{a}$  satisfazendo  $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  é  $\mathfrak{g}$  (veja [8]). Então,  $\mathfrak{z} = \mathfrak{a}$ . Em outras palavras,  $A = \exp(\mathbb{R}Y)$  e para qualquer tempo positivo arbitrário  $t$

$$\{\text{Equador} = \exp(tuY)e_2 : u \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}}\}.$$

Agora, pode-se perceber que qualquer trajetória conectando os polos precisa de pelo menos  $\pi$  unidades de tempo. Então,  $\pi \leq s_\Sigma$ . Falando de outra forma, se um de quaisquer dois pontos não é um pólo, então enviando-os ao equador vemos que um pode ser atingido a partir do outro em  $\pi$  unidades de tempo. De fato, podemos desperdiçar tempo no equador. Então, obtemos  $s_\Sigma = \pi$ .

**Observação 5.2.1.** Podemos perceber que o tempo uniforme obtido no teorema 5.1.1 não é arbitrário, pois depende da existência de um estado  $x$  no interior do conjunto acessível dos sistemas  $\sum$  e  $-\sum$ . Além disso, depende também de uma vizinhança  $V_{Id}$  da identidade em  $A(t_+, Id)$  e consequentemente de um número inteiro  $k$  tal que  $G = \cup(V_{Id})^k$ .

Embora, em algumas situações o tempo uniforme possa ser arbitrário, não conhecemos nenhuma propriedade em  $G$  ou no sistema para obter esta condição. Como mencionamos no final do capítulo 1, quando estamos trabalhando com sistemas lineares em  $\mathbb{R}^n$ , com controles irrestritos, temos uma condição suficiente para se obter controlabilidade uniforme em tempo arbitrário.

## Referências Bibliográficas

- [1] *Ayala, V.*, Controllability of Nilpotent Systems, *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions. Banach Center Publications, vol 32, pp.35-46. Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, 1995.*
- [2] *Ayala, Victor; Ayala, José; Tribuzy, Ivan* Controllability of Invariant Control systems at uniform time. *a ser publicado em KIBERNETICA na revista CHECOSLOVACA.*
- [3] *Ayala, Victor* Controlabilidade de sistemas lineares sobre grupos de matrizes. *Antofagasta, Chile, 2000.*
- [4] *Brockett, R.W.*. System theory on groups Manifolds and coset Spaces, *SIAM J. Control 10, 265-284, 1972.*
- [5] *Carmo, Manfredo P.* geometria riemanniana, *IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988*
- [6] *Colonius, Fritz; Kliemann, Wolfgang.* The Dynamics of Control *Birkhauser, Boston, 2000.*
- [7] *Colonius, Fritz* Properties of Bilinear Control Systems *september 2007.*
- [8] *Alessandro, Domenico D.* Small time controllability of systems on compact Lie Groups and spin angular momentum, *Journal of Mathematical Physics, vol 42, n.9,2001.*
- [9] *Leite, F. Silva; Crouch, P.* Controllability on classical Lie Groups *Math. Control Signals Systems, 1, 31-42, 1988.*
- [10] *Jurdjevic, V. and Kupka, I.*, Control Systems on Semi-simple Lie Groups e their Homogeneous Spaces, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*  $\text{3}L,4, 151-179, 1981.$
- [11] *Jurdjevic, V. and Sussmann,* Control Systems on Lie Groups, *Journ. Differ. Equat. 12 313-329,1972.*

- [12] *Jurdjevic, Velemir Geometric Control Theory* *Cambridge University press, New York, 1997.*
- [13] *Lee, John M. Introduction to Smooth Manifolds version 3.0* *University of Washington. Seattle, December 2000.*
- [14] *Sachkov Yu. L., Control theory on Lie groups , Lectures Notes SISSA, january-february Italian, Trieste, 2006.*
- [15] *Sachkov, Yu. L., Controllability of Hipersurface and Solvable Invariant Systems, Journal of Dynamical and Control Systems 2, 55-67, 1996.*
- [16] *San Martin B. L.A., Álgebras de Lie, Editorial UNICAMP, Brasil, 1999.*
- [17] *San Martin B. L.A. and Tonelli P.A., Semigroup actions on Homogeneous spaces, Semigroup Forum, 1-30, 1994.*
- [18] *Sontag, Mathematical Control Theory, springer-verlag, second edition, 1998.*
- [19] *Strauss M., An introduction to optimal Control theory, springer-Verlag, 1982.*
- [20] *Sussmann, Héctor J; Jurdjevic, Velemir. Controllability of nonlinear systems 1971.*
- [21] *Ventura Ricardo, Sandra Isabel Controlabilidade em grupos de Lie. Dissertação de mestrado, Universidade de Coimbra, 2000.*
- [22] *Warner F. W. Foundations on Differential Manifolds and Lie Groups, Springer, University of Pensilvânia, 1983.*