UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE IMERSÕES REGULARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

ANA ACÁCIA PEREIRA VALENTE

MANAUS

2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANA ACÁCIA PEREIRA VALENTE

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE IMERSÕES REGULARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

MANAUS
2003

ANA ACÁCIA PEREIRA VALENTE

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE IMERSÕES REGULARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Aprovado em Dezembro de 2003.

BANCA EXAMINADORA

....
Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof. Dr. Levi Lima
Universidade Federal do Ceará.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador pelo acompanhamento constante;

Aos meus familiares pelo apoio;

Ao meu esposo por ter estado presente em todos os momentos que precisei.

Aos colegas da instituição que me auxiliaram na discussão da temática e contribuíram no delinear do caminho;

Aos colegas da turma que incentivaram.

RESUMO

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE IMERSÕES REGULARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Este trabalho tem como finalidade apresentar uma exposição clara e detalhada de dois dos teoremas apresentados no artigo de Lúcio Rodriguez e Renato Tribuzy sobre Redução de Codimensão de Imersões Regulares em Espaços de Curvatura Constante c.
Mostra-se que se tivermos uma variedade compacta e conexa M, de dimensão n, e uma imersão $f : M^n \to R^{n+p}$, 1-1 regular, isto é, quando a dimensão do primeiro espaço normal N gerado pelas imagens da segunda forma fundamental tem dimensão constante igual a 1, então podemos reduzir a codimensão da imersão para 1.
Outro resultado importante neste trabalho é o fato de que se a variedade é apenas completa, conexa e com curvatura de Ricci não-negativa, então a imersão será um cilindro sobre uma curva, do contrário, podemos reduzir a codimensão para 1 e nossa imersão será o bordo de um corpo convexo em um subespaço afim do R^{n+p}.

Palavras-chave: Imersões Regulares, Curvatura Constante, Redução de Codimensão.

ABSTRACT

REDUCTION OF CODIMENSION OF REGULAR IMMERSIONS

The work of this essay is to make a clear on detailed exposition of the two theorems of the article of Lúcio Rodriguez and Renato Tribuzy on the Reduction of Codimension of Regular Immersions in the space of constant curvature c.
We show that if M is a compact and connected manifold, of dimension n, and is an immersion $f : M^n \to R^{n+p}$, 1-1 regular, that is, when the first normal space N generated by image of the second fundamental form has constant dimension 1, then we can reduce the codimension of the immersion to 1.
Other result important in the work show that if M is complete, connected with non-negative Ricci curvature, then f is a cylinder over a curve our we can reduce the codimension to 1 and $f(M)$ is the boundary of a convex set in an affine subspace of R^{n+p}.

Keywords: Regular Immersions, Constant Curvature, Reduction of Codimension.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo sistemático de dois teoremas que são partes integrantes do artigo de Lucio Rodriguez e Renato Tribuzy [1] que trata da redução da codimensão de imersões regulares. Para isso, consideremos imersões $f : M^n \to R^{n+p}$, C^∞, de uma variedade M de dimensão n no espaço Euclideano de dimensão $(n+p)$. Ao número p chamamos de codimensão de f, que é dita, 1-1 regular, quando o subespaço N, gerado pelas imagens da segunda forma fundamental e denominado primeiro espaço normal, tem dimensão constante 1.

Nosso intúito é criar condições possíveis afim de que possamos reduzir a codimensão de f para 1. Os dois principais resultados deste trabalho são :

Teorema 5.1 - Se M^n é compacta, conexa e $f : M^n \to R^{n+p}$ é $1-1$ regular, então podemos reduzir a codimensão para 1 .

Teorema 5.2 - Seja M^n completa e conexa com curvatura de Ricci não negativa. Se $f : M^n \to R^{n+p}$ é $1-1$ regular, então ou:
(i) f é um cilindro sobre uma curva
(ii) podemos reduzir a codimensão para 1 e $f(M)$ é a fronteira de um conjunto convexo dentro de um subespaço afim do R^{n+p} de dimensão $(n+1)$.

Dada uma imersão $f : M^n \to R^{n+p}$, o problema de redução da codimensão desta imersão consiste basicamente em obter um inteiro d, $1 \leq d \leq p$, tal que $f(M)$ esteja contida em uma subvariedade totalmente geodesica de R^{n+p} e de dimensão $(n+d)$. Em outras palavras, procura-se saber que parte do espaço ambiente R^{n+p} pode ser desprezada sem afetar a imersão .

No segundo resultado, a hipótese de compacidade é retirada e a va-riedade passa a ser completa e de curvatura de Ricci não-negativa. Mostra-se, então, que se a codimensão não puder ser reduzida, pelo Teorema de Hartman[5] a imersão será cilíndrica, caso contrário, temos que em codimensão 1, curvatura de Ricci não-negativa implica curvatura seccional não-negativa e pelo Teorema de Sachsteder

[6] a imersão será o bordo de um corpo convexo num subespaço afim do espaço Euclideano R^{n+p}.

Este trabalho está dividido em quatros partes. Na primeira, são vistos alguns fatos básicos da Geometria Riemanniana. Na segunda, estabelecemos as Equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Na terceira, apresentamos conceitos, definições e resultados importantes sobre Redução de Codimensão. E por fim, demonstramos os dois principais resultados .

Capítulo 2

Generalidades

Neste capítulo veremos alguns fatos básicos da Geometria Riemanniana com o intuito de fixar notações e apresentar alguns resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Sejam M uma variedada diferenciável, $p \in M$ um ponto qualquer. Denotaremos por $F(M)$ o conjunto de todas as funções reais definidas sobre M e diferenciável significará sempre de classe C^{∞}.

Definição 2.1- Dado p em M, um vetor tangente a M em p é uma aplicação linear $X_p : F(M) \to R$ tal que :

(1)X_p é linear.
(2)$X_p(fg) = g(p)(X_p f) + f(p)(X_p g)$

Denotaremos por T_pM o conjunto de todos os vetores tangentes em p. T_pM é um espaço vetorial e é chamado de espaço tangente de M em p e possui dimensão n.

Um campo vetorial X é uma regra que associa a cada ponto p em M um vetor X_p em T_pM. Um campo vetorial X atua nas funções de $F(M)$ da seguinte maneira Xf e a função $(Xf)(p) = X_p f$. Dizemos que X é diferenciável se $Xf \in F(M)$ para todo $f \in F(M)$. Denotamos por χ o espaço dos campos vetoriais diferenciáveis.

Dados campos vetoriais X e Y em $\chi(M)$ podemos definir o colchete deles, denotado por $[X, Y]$, como

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Verifica-se que $[X, Y] \in \chi(M)$.

Definição 2.2 - Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades. Dizemos que f é regular em p se $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ é injetiva. E mais, se f é regular em p então f é também regular numa vizinhança de p, e f é um homeomorfismo local.

Dizemos que f é uma imersão se f é regular em todo ponto de M.

Definição 2.3 - Uma métrica Riemanniana numa variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p:

$$<,>_p: T_pM \times T_pM \to R$$

bilinear simétrica e positiva definida, i.e., para todo $X \in T_pM$,

$$< X, X > \geq 0 \text{ e } < X, X >= 0 \Leftrightarrow X = 0$$

e que varia diferenciavelmente.

Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável munido de uma métrica Riemanniana. Dada uma imersão $f : M \to \widetilde{M}$ numa variedade $\widetilde{M}$ com métrica Riemanniana $<,>_{\widetilde{M}}$, podemos induzir uma métrica Riemanniana $<,>_M$ em M pela seguinte expressão,

$$< X(p), Y(p) >_M = < dfX(p), dfY(p) >_{\widetilde{M}}.$$

E se, M e $\widetilde{M}$ são variedades Riemannianas com métricas Riemannianas $<,>_M$ e $<,>_{\widetilde{M}}$, respectivamente, então diz-se que $f : M \to \widetilde{M}$ é uma imersão isométrica se

$$< X(p), Y(p) >_M = < dfX(p), dfY(p) >_{\widetilde{M}}, \forall X, Y \in T_pM \text{ e } \forall p \in M$$

Definição 2.4 - Uma conexão afim de uma variedade diferenciável M é uma regra ∇ que associa a um par de campos vetoriais $X, Y \in \chi(M)$ um outro campo vetorial $\nabla_X Y$ em $\chi(M)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(1)$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
(2)$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
(3)$\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

onde $f, g \in F(M)$ e $X, Y, Z \in \chi(M)$.

Proposição 2.1 - Seja M uma variedade diferenciável como uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:

(i)$\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$
(ii)$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$

onde W é um campo de vetore ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.
(iii)Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \chi(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então:

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$$

<u>Demonstração</u> - Suponha que exista uma correspondência satisfazendo as condições acima. Seja $x : U \subset R^n \to M$ um sistema de coordenadas com $c(I) \cap x(U) \neq \emptyset$ e seja $(x_1(t), ..., x_n(t))$ a expressão local de$c(t)$,$t \in I$. Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Podemos então expressar o campo V localmente como

$$V = \sum_j v_j X_j, j = 1, ...n$$

onde $v_j = v_j(t)$ e $X_j = X_j(c(t))$.

Para (i) e (ii), temos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_j v_j \frac{DV}{dt}$$

Por (iii) e (3) da definição anterior,

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_j = \nabla_{\sum (\frac{dx_i}{dt}) X_i} X_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, i, j = 1, ..., n$$

Portanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv_i}{dt} X_i + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v_i \nabla_{X_i} X_j (2.1)$$

A expressão (2.1) mostra que existe uma correspondência satisfazendo às condições da proposição, então tal correspondência é única.

Para mostrar a existência, definamos $\frac{DV}{dt}$ em $x(U)$ por (2.1). É imediato verificar que (2.1) possui as propriedades desejadas. Se $y(W)$ é uma outra vizinhança coordenada, com $y(W) \cap x(U) \neq \emptyset$ e definindo $y(W)$ por (2.1), as condições coincidem em $y(W) \cap x(U)$, e pela unicidade de $\frac{DV}{dt}$ em $x(U)$. Portanto, a definição pode ser estendida para todo M.

Definição 2.5 - Seja M uma variedade diferenciável como uma conexão afim ∇. Dizemos que um campo de vetores, V, ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ é paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0, \forall t \in I$.

Proposição 2.2 - Seja M uma variedade diferenciável como uma conexão afim ∇. Seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0), t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelos V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$. $V(t)$ é chamado de transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c.

Demonstração - Suponhamos que o teorema foi provado para o caso em que $c(I)$ está contido em uma vizinhança coordenada. Por compacidade, para todo $t_1 \in I$, o segmento $c([t_0, t_1]) \subset M$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas, em cada uma das quais, V pode ser definido, por hipótese. Pela unicidade, as definições coincidem nas interseções não vazias, o que permite definir V para $[t_0, t_1]$.

Portanto, temos que mostrar o teorema no caso em que $c(I)$ está contido em uma vizinhança coordenada $x(U)$ de um sistema de coordenadas $x : U \subset R^n \to M$ em torno de $c(I)$. Seja $x^{-1}(c(t)) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ a expressão local de $c(t)$ e seja $V_0 = \sum_j v_0 X_j$, onde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(c(t))$.

Suponhamos que exista $V \in x(U)$ que é paralelo ao longo de c com $V(t_0) = V_0$. Então, $V = \sum v_j X_j$ satisfaz

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} v_j \nabla_{X_i} X_j$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{i,j} X_k$, e trocando j por k na primeira soma, obtemos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \{ \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j} v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma^k_{i,j} \} X_k = 0$$

o sistema de n equações diferenciais em $v_k(t)$,

$$\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j} v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma^k_{i,j} = 0, k = 1, ..., n,$$

possui uma única solução satisfazendo a condição inicial $v_k(t_0) = v_{k_0}$. Portanto, se V existe, ele é único. Além disso, como o sistema é linear, a solução está definida para todo $t \in I$, o que demonstra a existência de um único V com as propriedades desejadas.

Definição 2.6 - Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $<,>$. A conexão é chamada compatível com a métrica $<,>$ quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $< P, P' >= constante$.

Diz-se que uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica $<,>$ se, e somente se:

$$X < Y, Z >=< \nabla_X Y, Z > + < Y \nabla_X Z >$$

Proposição 2.3 - Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ tem-se

$$\frac{d}{dt} < V, W >=< \frac{DV}{dt}, W > + < V, \frac{DW}{dt} >, t \in I$$

Demonstração - É claro que a equação acima implica a definição. Mostraremos a recíproca. Seja $\{P_1(t_0), ..., P_n(t_0)\}$ uma base ortonormal de $T_{c(t_0)}M, t \in I$. Usando a proposição anterior, podemos estender paralelamente cada um dos vetores $P_i(t_0), i = 1, ..., n$, ao longo de c. Como ∇ é compatível com a métrica,$\{P_1(t), ..., P_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{c(t))}M$, para todo $t \in I$. Portanto temos

$$V = \sum_i v_i P_i$$

e

$$W = \sum_i w_i P_i$$

onde $i = 1, ..., n$, e v_i, w_i são funções diferenciáveis em I.

Temos que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv_i}{dt} P_i$$

$$\frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw_i}{dt} P_i$$

Portanto,

$$< \frac{DV}{dt}, W > + < V, \frac{DW}{dt} >= \sum_i \{\frac{dv_i}{dt} w_i + \frac{dw_i}{dt} v_i\}$$

$$< \frac{DV}{dt}, W > + < V, \frac{DW}{dt} >= \frac{d}{dt} \{\sum_i v_i w_i\} = \frac{d}{dt} < V, W > .$$

Corolário 2.1- Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,

$$X < Y, Z >=< \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >, \forall X, Y, Z \in \chi(M)$$

Demonstração - Supondo ∇ compatível com a métrica, $p \in M$ e seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável com $c(t_0) = p, t_0 \in I$, e com $\frac{dc}{dt}|_{t=t_0} = X(p)$. Então,

$$X(p) < Y, Z >= \tfrac{d}{dt} < Y, Z > |_{t=t_0} =< \nabla_{X(p)} Y, Z >_p + < Y, \nabla_{X(p)} Z >_p$$

Como p é arbitrário , obtemos a igualdade desejada. A recíproca é imediata.

Definição 2.7 - Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dito simétrica quando:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \forall X_i, X_j \in \aleph(M)$$

Em um sistema de coordenadas (U, x), o fato de ∇ ser simétrica implica que $\forall i, j = 1, ..., n$ tem-se:

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Teorema (Levi-Cevita)- Dado uma variedade Riemanniana M existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

(a)∇ é simétrica
(b)∇ é compatível com a métrica.

<u>Demonstração</u> - Suponhamos que existe uma conexão ∇ satisfazendo (a) e (b). Então,

$$\begin{gathered} X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >, (i) \\ X < Z, X > = < \nabla_Y Z, X > + < Z, \nabla_Y X >, (ii) \\ Z < X, Y > = < \nabla_Z X, Y > + < X, \nabla_Z Y >, (iii) \end{gathered}$$

Somando (i) e (ii) e subtraindo (iii), temos, usando a simetria de ∇, que

$$\begin{gathered} X < Y, Z > + X < Z, X > - Z < X, Y > = < [X, Z], Y > \\ + < [Y, Z], X > + < [X, Y], Z > + 2. < Z, \nabla_Y X > . \end{gathered}$$

Portanto,

$$\begin{gathered} < Z, \nabla_Y X > = \tfrac{1}{2}\{X < Y, Z > + X < Z, X > - Z < X, Y > \\ - < [X, Z], Y > - < [Y, Z], X > - < [X, Y], Z > \} \end{gathered}$$

A equação anterior mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica $<,>$. Portanto, caso exista, ela é única.

Para mostrar a existência, defina ∇ pela última equação. É imediato verificar que ∇ está bem definida e que satisfaz às propriedades desejadas.
A conexão dada pelo teorema acima é denominado conexão de Levi-Cevita (ou Riemanniana de M).

Definição 2.8 - Seja M um variedade Riemanniana munida de sua conexão

Riemanniana. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se neste ponto tivermos:

$$\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0;$$

se γ é geodésica em t,$\forall t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.

Dizemos que um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é minimizante se $l(\gamma) \leq l(c)$ onde $l()$ indica o comprimento de uma curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Proposição 2.4 - Dado $q \in M$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre um aberto de M.

Definição 2.9 - Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se $\forall p \in M$, a aplicação exponencial exp_p, está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in R$.

Teorema (Hopf-Rinow) - Seja M uma variedade Riemanniana completa e conexa. Então, dados dois pontos p e q de M, existe uma única geodésica minimal ligando estes dois pontos.

A demonstração do principal resultado deste trabalho faz uso ainda do Teorema de Frobenius [2] que enuciaremos a seguir. Mas antes precisamos de alguns conceitos sobre folheações.

Definição 2.10- Seja M uma variedade de dimensão m diferenciável. Uma folheação diferenciável e dimensão n de M é um atlas máximo F diferenciável em M com as seguintes propriedades:

(i) Se $(U, \varphi) \in F$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset R^n \times R^{m-n}$, onde $U_1 \subset R^n$ e $U_2 \subset R^{m-n}$ são discos abertos.
(ii) Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in F$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é da forma :

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), (x, y) \in R^n \times R^{m-n}.$$

Um campo de $k - planos$ numa variedade M é uma aplicação $P : M \rightarrow T_qM$, que associa a cada ponto $q \in M$ um subespaço vetorial de dimensão k de T_qM.

Dizer que um campo de k-planos P em M é diferenciável se para todo $q \in M$ existem $k-campos$ de vetores diferenciáveis ,$X_1, ..., X_k$, definidos numa vizinhaça V de q tais que para todo $x \in V$,

$$\{X_1(x), ..., X_k(x)\}\text{,é uma base de } P(x).$$

Proposição 2.5 Toda folheação F de dimensão k diferenciável, em M, define um campo de k-planos diferenciável em M, o qual denotaremos por TF.

Em particular, se M não admite campos contínuos de $k-planos$, então M não possui folheação de dimensão k. A pergunta natural que surge é a seguinte: Dado um campo de $k-planos$ P em M, sob que condições existe uma folheação F de dimensão k tal que para todo $q \in M$, $T_qF = P(q)$?. A resposta para esta pergunta é dada pelo teorema de Frobenius o qual enuciaremos a seguir. A sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Definição 2.11 - Diz-se que um campo de planos P é involutivo se, dado dois campos de vetores X e Y tais que, para todo $q \in M$, $X(q)$ e $Y(q) \in P(q)$, então $[X,Y](q) \in P(q)$, onde [,] é o colchete de Lie.

Teorema (de Frobenius) - Seja P uma campo de $k-planos$ diferenciável, em M. Se P é involutivo então existe uma folheação F de dimensão k e diferenciável em M tal que $T_qF = P(q)$ para todo $q \in M$. Reciprocamente, se F é uma folheação diferenciável e P é um campo de planos tangentes a F, então P é involutivo.

Dizemos também que um campo de planos involutivo é completamente integrável. Em particular, se $k = 1$, P é sempre integrável. Neste caso o teorema se reduz ao teorema de existência e unicidade das soluções de uma equação diferencial ordinária.

Capítulo 3

Equações de Gauss , Codazzi e Ricci

O objetivo deste capítulo é o de estabelecer as equações fundamentais da teoria local das imersões isométricas, a saber as Equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Mas antes apresentaremos a noção de curvatura.

Definição 3.1 - A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada para $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, Z \in \chi(M) \tag{3.1}$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 3.1 - Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, o número

$$K(\sigma) = K(x,y) = \frac{< R(x,y)x, y >}{|x \wedge y|} \tag{3.2}$$

onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ e

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - < x, y >^2},$$

é chamado de <u>curvatura seccional</u> (ou curvatura) de σ em p.

Algumas combinações das curvaturas seccionais aparecem com tanta freqüência que elas merecem nomes.

Seja $X \in T_pM$, um vetor unitário; tomemos uma base ortonormal $\{X_1, X_2, ..., X_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a X e consideremos as seguintes médias:

$$Ric_p(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i}^{n-1} < R(X, X_i)X, X_i > \tag{3.3}$$

e

$$K(p) = \frac{1}{n}\sum_{j}^{n} Ric_p(X_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{ij} < R(X_i, X_j)X_i, X_j > \qquad (3.4)$$

É possível mostrar que as expressões acima não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais e são chamadas Curvatura de Ricci na direção de X e Curvatura escalar em p, respectivamente.

Teorema 4.2- Seja M uma variedade completa que possui geodésicas minimizantes e curvatura de Ricci não-negativa. Então M é isométrica ao produto $\overline{M} \times R^k$, onde $\overline{M}$ não contém nenhuma geodésica que seja minimal em todo seu percurso e R^k possui a métrica plana usual.

A demonstração deste Teorema pode ser encontrado em [3].

A seguir daremos uma breve noção sobre tensores. Para o que se segue convém observar que $\chi(M)$ é um módulo sobre $D(m)$, isto é, $\chi(M)$ tem uma estrutura linear quando tomamos como escalares os elementos de $F(M)$.

Definição 3.2- Um <u>tensor</u> T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\chi(M) \times ... \times \chi(M)}_{r-fatores} \to F(M)$$

Isto significa que, dados $Y_1, ..., Y_r \in \chi(M), T(Y_1, ..., Y_r)$, é uma função diferenciável em M, e que T é linear em cada argumento.

Exemplo - O tensor curvatura

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to D(M) \qquad (3.5)$$

é definido por

$$R(X, Y, Z, W) =< R(X, Y)Z, W >; X, Y, Z, W \in \chi(M)$$

Costuma-se identificar o campo $X \in \chi(M)$ com o tensor $X : \chi(M) \to D(M)$ dado por $X(Y) =< X, Y >$, para todo $Y \in \chi(M)$.

É possível estender aos tensores a noção de derivada covariante.

Definição 3.3 Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(n + 1)$ dado por

$$\nabla T(Y_1,...,Y_r,Z) = Z(T(Y_1,...,Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1,...,Y_r) - ... - T(Y_1,...,\nabla_Z Y_r)$$

Para cada $Z \in \chi(M)$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1,...,Y_r) = \nabla T(Y_1,...,Y_r,Z)$$

Observação - Seja $X \in \chi(M)$. Identifiquemos o campo X com o tensor $X : \chi(M) \times \chi(M) \to F(M)$ dado por $< X, Y >, \forall Y \in \chi(M)$. A derivada covariante do tensor X em relação a um campo $Z \in \chi(M)$ é tal que $,\forall Y \in \chi(M)$

$$\begin{gathered} \nabla_Z X(Y) = \nabla X(Y,Z) = Z(X(Y)) - X(\nabla_Z Y) = \\ Z < X, Y > - < X, \nabla_Z Y >=< \nabla_Z X, Y > \end{gathered}$$

Decorre daí que o tensor $\nabla_Z X$ pode ser identificado ao campo $\nabla_Z X$. Dessa forma, podemos derivar tensores tomando valores no espaço tangente.
Definiremos, a seguir, a segunda forma fundamental de uma imersão.

Consideremos uma imersão $f : M \to \widetilde{M}$ onde $\widetilde{M}$ é uma variedade com conexão $\widetilde{\nabla}$. Sejam X e Y campos vetoriais de M. Dados p em M e U uma vizinhança de p onde f é injetiva, temos que dfX e dfY são campos vetoriais definidos ao longo de $f(U)$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $X \in T_pM, p \in U$ com $df_pX \in T_{f(p)}\widetilde{M}$. Usaremos tais identificações para podermos estender campos vetoriais $X, Y \in T_pM$(definidos em U) a campos vetoriais $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ definidos numa vizinhança $f(U)$ de $f(p)$ em $\widetilde{M}$. Definimos $(\widetilde{\nabla}_X Y)_p$ como $(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{p}}\widetilde{Y})_X$. Como $(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})_X$ depende só de $\widetilde{X}_p = X_p$ e de $\widetilde{Y}$ ao longo de uma curva em $f(U)$, temos que a definição não depende da extensão.

Suponhamos agora que $f : (M, <,>_M) \to (\widetilde{M}, <,>_{\widetilde{M}})$ é uma imersão isométrica. Podemos escrever $T_p\widetilde{M}$ como $T_pM \oplus N_p$, onde $N_p(= T_pM^\perp)$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\widetilde{M}$ determinado pelo produto escalar $<,>_{\widetilde{M}}$.

O subespaço N_p é chamado o <u>Espaço Normal</u> de M no ponto p. Se $\widetilde{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\widetilde{M}$ se $X, Y \in \chi(M)$,podemos escrever,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \tag{3.6}$$

onde $\nabla_X Y \in T_pM$ é a componente tangente e $\alpha(X,Y) \in N_p$ é a componente normal. A aplicação α é chamada a <u>Segunda</u> <u>Forma</u> <u>Fundamental</u> da imersão.

Um <u>Campo Vetorial Normal</u> é uma aplicação

$$\begin{gathered} \xi : M \to N_p \\ p \mapsto \xi_p \end{gathered}$$

onde $N_p \subset T_p\widetilde{M}$.

Denotaremos por $\chi(M)^{\perp}$ o conjunto de todos os campos vetoriais normais diferenciáveis da imersão f. Dessa forma, podemos considerar a segunda forma fundamental como uma aplicação

$$\alpha_p : T_pM \times T_pM \to T_pM^{\perp}$$

simétrica e bilinear .

Dessa forma α_p pode ser considerada como um tensor. Assim, para cada $Z \in T_pM$, a derivada covariante $\nabla_Z\alpha$ é um tensor que toma valores no espaço normal.

Considerando $\xi \in T_pM^{\perp}$ e $X \in T_p(M)$ faz sentido falarmos em $\widetilde{\nabla}_X\xi$. Sendo assim, seja $-A_\xi X$ a componente tangente e $\nabla^{\perp}_X\xi$ a componente normal de $\widetilde{\nabla}_X\xi$, isto é,

$$\widetilde{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X\xi \tag{3.7}$$

Sobre a aplicação $(X, \xi) \to A_\xi X$ temos duas considerações a fazer. A primeira é que esta aplicação é bilinear , donde concluimos que $(A_\xi X)_p$ só depende de ξ_p e de X_p.

A segunda é que, se X e $Y \in T_pM$ e $\xi \in T_pM^{\perp}$, temos que

$$< A_\xi X, Y >=< \alpha(X, Y), \xi > \tag{3.8}$$

o que torna A_ξ uma aplicação linear e simétrica.

As expressões

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$
$$\widetilde{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X\xi$$

onde $X, Y \in T_pM$ e $\xi \in T_pM^{\perp}$, são as Fórmulas de Gauss e de Weingarten, respectivamente.

Exemplo - Considerando o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, isto é , $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$; tal que $f(M) = \widetilde{M}$ é então denominada uma hipersuperfície. Seja $p \in M$ e $\xi \in (T_pM)^{\perp}, |\xi| = 1$. Como $A_\xi : T_pM \to T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM com valores próprios reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, isto é, $A_\xi(e_i) = \lambda_i e_i, 1 \leq i \leq n$.

Veremos a seguir como a curvatura de M, a curvatura de $\widetilde{M}$ e as segundas formas fundamentais se relacionam.

Se $X, Y \in T_pM \subset T_p\widetilde{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $K(X, Y)$

e $\widetilde{K}(X,Y)$ as curvaturas seccionais de M e $\widetilde{M}$, respectivamente, no plano gerado por X e Y.

Teorema (Gauss) - Sejam $p \in M$ e X, Y vetores ortonormais de T_pM. Então

$$K(X,Y) - \widetilde{K}(X,Y) =< \alpha(X,X), \alpha(Y,Y) > - < \alpha(X,Y), \alpha(X,Y) > \tag{3.9}$$

No caso de hipersuperfície $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$, a equação de Gauss acima, admite uma expressão mais simples. Sejam $p \in M$ e $\xi \in (T_pM)^\perp$. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM que diagonaliza A_ξ, isto é, $A_\xi(e_i) = \lambda_i e_i, i = 1, ..., n$, onde λ_i são os valores próprios de A_ξ. Então $< \alpha(e_i, e_i), \xi >= \lambda_i$ e $< \alpha(e_i, e_j), \xi >= 0$, se $i \neq j$. Portanto a equação de Gauss se escreve

$$K(e_i, e_j) - \widetilde{K}(e_i, e_j) = \lambda_i . \lambda_j \tag{3.10}$$

Introduziremos a seguir a noção de subvariedades totalmente geodésicas.

Uma <u>imersão</u> $f : M \to \widetilde{M}$ é <u>geodésica</u> em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental é identicamente nula em p. A imersão f é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$.

Proposição 3.2 - Uma imersão $f : M \to \widetilde{M}$ é geodésica em $p \in M$ se e só se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\widetilde{M}$ em p.

A proposição acima permite obter o que é provavelmente a melhor interpretação geométrica da curvatura seccional. Seja M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Seja $B \subset T_pM$ uma bola aberta onde a exp_p é um difeomorfismo, e seja $T \subset T_pM$ um subespaço de dimensão dois. Então $exp_p(T \cap B) = S$ é uma subvariedade de dimensão dois em M passando por p. Intuitivamente, S é uma superfície formada por geodésicas que saem de p e são tangentes a T em p. Pela proposição anterior, S é geodésica em p, donde as segundas formas fundamentais da inclusão $i : S \subset M$ são nulas em p. Como subvariedade de M, S possui uma métrica induzida, cuja curvatura Gaussiana em p será indicada por K_S. Decorre da fórmula de Gauss que

$$K_S(p) = K(p, T) \tag{3.11}$$

Isto é, a curvatura seccional $K(p, T)$ é a curvatura Gaussiana em p de uma pequena superfície formada por geodésicas de M que saem de p e são tangentes a T.

Passaremos agora a estudar a componente normal de $\widetilde{\nabla}_X \eta$ indicada por $\nabla^\perp$. Verifica-se facilmente que, $\nabla^\perp$ satisfaz as seguintes propriedades:

(1)$\nabla^\perp_{fX+Y}\xi = f\nabla^\perp_X \xi + \nabla^\perp_Y \xi$
(2)$\nabla^\perp_X(f\xi + \eta) = f\nabla^\perp_X \xi + (Xf)\xi + \nabla^\perp_X \eta$
onde $X, Y \in \chi(M), \xi, \eta \in \chi(M)^\perp$ e $f \in F(M)$.

Por conta das propriedades acima $\nabla^{\perp}$ é chamada de Conexão Normal da imersão.

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir de $\nabla^{\perp}$ uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada curvatura normal $R^{\perp}$ da imersão e definida por

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\eta - \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\eta + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta \tag{3.12}$$

Veremos a seguir como a geometria do fibrado tangente e a geometria do fibrado normal se relacionam com a segunda forma fundamental da imersão.

Proposição 3.3 - As seguintes equações se verificam:

(a)Equação de Gauss

$$< R(X,Y)Z, W >= c < \widetilde{R}(X,Y)Z, W > + < \alpha(Y,W), \alpha(X,Z) > \tag{3.13}$$

$+ < \alpha(X,W), \alpha(Y,Z) >$

(b)Equação de Codazzi

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z) \tag{3.14}$$

(c)Equação de Ricci

$$< \widetilde{R}(X,Y)\eta, \xi > - < R^{\perp}(X,Y)\eta, \xi >=< [A_{\eta}, A_{\xi}]X, Y > \tag{3.15}$$

Demonstração:

Sejam $X, Y, Z \in TM$.

$\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) = \widetilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) = \widetilde{\nabla}_X \nabla_Y Z + \widetilde{\nabla}_X \alpha(Y,Z) =$
$= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z)$.

Analogamente:
$\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z)$.

Temos ainda : $\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z)$

Fazendo :$\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$, teremos:

$\widetilde{R}(X,Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) + \alpha(X, \nabla_Y Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \alpha([X,Y],Z) + A_{\alpha(X,Z)}Y - A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z)$.

Onde : $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = R(X,Y)Z$. Tomando o produto interno desta última expressaão com $W \in TM$, teremos :

$$< \widetilde{R}(X,Y)Z,W > = < R(X,Y)Z,W > - < A_{\alpha(Y,Z)}X,W > \\ + < A_{\alpha(X,Z)}Y,W >$$

Como :

$$< A_{\alpha(Y,Z)}X,W > = < \alpha(X,W),\alpha(Y,Z) >$$
$$< A_{\alpha(X,Z)}Y,W > = < \alpha(Y,W),\alpha(X,Z) >$$

Teremos :

$$< \widetilde{R}(X,Y)Z,W > = < R(X,Y)Z,W > - < \alpha(X,W),\alpha(Y,Z) > \\ + < \alpha(Y,W),\alpha(X,Z) >$$

que é a Equação de Gauss.

Onde R e $\widetilde{R}$ são respectivamente os tensores curvaturas de M e $\widetilde{M}$. Em particular, se $K(X,Y) = < R(X,Y)Y,X >$ e $\widetilde{K}(X,Y) = < \widetilde{R}(X,Y)Y,X >$ denotam a curvatura seccional em M e $\widetilde{M}$ dos planos gerado pelos vetores ortonormais $X,Y \in T_pM$, a equação de Gauss se escreve:

$$\widetilde{K}(X,Y) = K(X,Y) - < \alpha(X,X),\alpha(Y,Y) > + \|\alpha(X,Y)\|^2$$

Por outro lado temos:

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$$
$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) - \widetilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \alpha(X,Z)) - \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z)$$
$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X\nabla_Y Z + \widetilde{\nabla}_X\alpha(Y,Z) - \widetilde{\nabla}_Y\nabla_X Z - \widetilde{\nabla}_Y\alpha(X,Z) - \nabla_{[X,Y]}Z - \alpha([X,Y],Z)$$
$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \nabla_Y\nabla_X Z - \alpha(Y,\nabla_X Z) + A_{\alpha(X,Z)}Y - \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) - \nabla_{[X,Y]}Z - \alpha(\nabla_X Y,Z) + \alpha(\nabla_Y X,Z)$$

Observando que $\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = R(X,Y)Z$ e definindo:

$$\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) = (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z)$$
$$-\nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) + \alpha(\nabla_Y X,Z) + \alpha(X,\nabla_Y Z) = -(\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z)$$

A última expressão se escreve como:

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)}X + (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) + A_{\alpha(X,Z)}Y - (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z)$$

E tomando a componente normal de $\widetilde{R}(X,Y)Z$, obteremos a equação abaixo, que é a Equação de Codazzi:

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z)$$

.

A seguir, denotaremos $R^{\perp}$ como tensor curvatura do fibrado normal $TM^{\perp}$, ou seja :

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\eta - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{Y}\eta - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta$$

onde $X, Y \in TM, \eta \in TM^{\perp}$.
Sendo assim:

$\widetilde{R}(X,Y)\eta = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\eta - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X\eta - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\eta$
$\widetilde{R}(X,Y)\eta = \widetilde{\nabla}_X(-A_\eta Y + \nabla^{\perp}_{Y}\eta) - \widetilde{\nabla}_Y(-A_\eta X + \nabla^{\perp}_{X}\eta) + A_\eta[X,Y] - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta$
$\widetilde{R}(X,Y)\eta = -\nabla_X A_\eta Y - \alpha(X, A_\eta Y) - A_{\nabla^{\perp}_{Y}\eta}X + \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\eta + \nabla_Y A_\eta X + \alpha(Y, A_\eta X) + A_{\nabla^{\perp}_{X}\eta}Y - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\eta + A_\eta[X,Y] - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta$

Considerando a parte normal desta última expressão , obtemos a Equação de Ricci:

$$(\widetilde{R}(X,Y)\eta)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\eta + \alpha(Y, A_\eta X) - \alpha(X, A_\eta Y) \tag{3.16}$$

E se considerarmos a parte tangente de $\widetilde{R}$:

$$(\widetilde{R}(X,Y)\eta)^{T} = \nabla_Y A_\eta X - A_\eta \nabla_Y X - A_{\nabla^{\perp}_{Y}\eta}X - \nabla_X A_\eta Y + A_\eta \nabla_X Y + A_{\nabla^{\perp}_{X}\eta}Y$$

e definirmos $\nabla_Y A_\eta X - A_\eta \nabla_Y X - A_{\nabla^{\perp}_{Y}\eta}X = (\nabla_Y A)(X,\eta)$, a equação de Codazzi se escreve:

$$(\widetilde{R}(X,Y)\eta)^{T} = (\nabla_Y A)(X,\eta) - (\nabla_X A)(Y,\eta)$$

Lema 3.1 - Sejam M uma variedade com curvatura seccional constante e p um ponto de M. Defina a aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por

$$< R'(X,Y,Z), W >=< X,Z >< Y,W > - < Y,Z >< X,W > \tag{3.17}$$

$\forall X,Y,Z,W \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a c se e somente se $R = c.R'$, onde R é a curvatura de M.

Portanto considerando M imersa em uma variedade Riemanniana de curvatura cons-tante, para $X,Y,Z,W \in TM$ e $\eta, \xi \in TM^{\perp}$, as equações e Gauss, Codazzi e Ricci são :

(i) Equação de Gauss :

$$< R(X,Y)Z, W >= c < \widetilde{R}(X,Y)Z, W > + < \alpha(Y,W), \alpha(X,Z) > \tag{3.18}$$

$+ < \alpha(X,W), \alpha(Y,Z) >$

(ii) Equação de Codazzi :

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z) \tag{3.19}$$

Ou equivalentemente :

$$(\nabla_X A)(Y,\eta) = (\nabla_Y A)(X,\eta)$$

(iii) Equação de Ricci :

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = \alpha(X, A_{\eta}Y) - \alpha(A_{\eta}X, Y) \tag{3.20}$$

Ou, equivalentemente :

$$< R^{\perp}(X,Y)\eta, \xi > = < [A_{\eta}, A_{\xi}]X, Y > \tag{3.21}$$

Uma consequência da Álgebra Linear e da última equação é que $R_p^{\perp} = 0$ se, e somente se, existe uma base ortogonal de vetores em T_pM que diagonaliza simultaneamente todos os $A_{\xi}, \xi \in T_pM^{\perp}$.

Capítulo 4

Redução de Codimensão

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$, definimos o primeiro espaço normal N_1 de f em $p \in M$, o subespaço gerado pela segunda forma fundamental α de f em p, isto é,

$$N_1 = ger\{\alpha(X,Y); X, Y \in T_pM\}.$$

Um subfibrado normal de dimensão l de f é uma família N_p, $p \in M$, de subespaços vetoriais de $T_pM^\perp$ de dimensão l, com a propriedade de que $\forall p \in M, \exists U \subset M$,$U$ vizinhança de p, e campos normais diferenciáveis $\eta_1, ..., \eta_l$, definidos em U, tal que para todo $q \in U$, $\eta_1(q), ..., \eta_l(q)$ geram N_q. Uma imersão f é 1-regular se a dimensão de $N_1(p)$ é constante ao longo de M.

De agora em diante consideraremos a imersão $f : M^n \to R^{n+p}$, onde R^{n+p} é o espaço euclideano de dimensão $(n+p)$ e $p = (n+p) - (n)$ é a codimensão da imersão f.

Diz-se que uma imersão $f : M^n \to R^{n+p}$ admite redução de codimensão para $q < p$ se existir uma subvariedade totalmente geodésica $R^{n+q} \subset R^{n+p}$. A imersão f é dita substancial quando a codimensão não puder ser mais reduzida.

Definição 4.1 - Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+r}$ uma imersão isométrica. Dizemos que N é um subfibrado paralelo de $TM^\perp$, se para todo campo de vetores em N a derivada normal desse campo,$\nabla^\perp N$, não possui componente no complemento ortogonal de N em $TM^\perp$, isto é, $\nabla^\perp_X N \subset N, \forall X \in TM$.

Lema 4.1 - Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+r}$ uma imersão isométrica. Se N é um subfibrado paralelo de $TM^\perp$, e $\widetilde{N}$ é o seu complemento ortogonal em $TM^\perp$, então $\widetilde{N}$ é um subfibrado paralelo em $TM^\perp$.

Lema 4.2 - Considere $f : M^n \to \overline{M}^{n+r}$ uma imersão isométrica e $\gamma : I \subset R \to M$ uma curva diferenciável, tal que $\gamma(0) = p$. Se N é um subfibrado paralelo em $TM^\perp$, $v_0 \in N_p$ e $v(t)$ o campo de vetores paralelos na conexão normal, tal que

$v(0) = v_0$. Então $v(t) \in N, \forall t \in I$.

Demonstração - Supondo $v(0) \in N_p$, queremos mostrar que $v(t) \in N$ para todo $t \in I$. Seja $\widetilde{N}$ o complemento ortogonal de de N em $TM^{\perp}$, e consideremos campos de vetores $\omega(\gamma(t)) \in \widetilde{N}$ restrito a γ. Temos

$$< v(0), \omega(\gamma(t)) >= 0$$

portanto

$$\begin{aligned} \gamma'(t) < v(0), \omega(\gamma(t)) > &= < \widetilde{\nabla}_{\gamma'(t)} v(t), \omega(\gamma(t)) > \\ &+ < v(t), \widetilde{\nabla}_{\gamma'(t)} \omega(\gamma(t)) > \\ &= < v(t), \nabla^{\perp}_{\gamma'(t)} \omega(\gamma(t)) >= 0, \end{aligned}$$

visto que $\widetilde{N}$ é paralelo.

Teorema (Erbacher) - Seja $f : M^n \to R^{n+r}$ uma imersão isométrica onde M é uma variedade conexa. Suponha que exista um inteiro q e um subfibrado normal N, de dimensão q, que é paralelo na conexão normal e contém o primeiro espaço normal N_1 de f, isto é, $N_p \supset (N_1)_p, \forall p \in M$. Então existe uma variedade totalmente geodésica $R^{n+q} \subset R^{n+r}$ tal que $f : M^n \to R^{n+q}$.

Demonstração: Seja p um ponto qualquer de M, vamos mostrar que $f(M) \subset T_pM \bigoplus N(p)$. Como N é um subfibrado normal paralelo, pelo Lema 4.1 temos que $\widetilde{N}$ também o é. Seja $\eta_0 \in \widetilde{N}(p)$ um vetor no complemento ortogonal de $N(p)$ em $TM^{\perp}$. Consideremos uma curva $\gamma : I \subset R \to M$, tal que $\gamma(0) = p$. Seja $\eta(t)$ o campo de vetores paralelo na conexão normal tal que $\eta(0) = \eta_0$. Pelo Lema 4.2,temos que $\eta(t) \in \widetilde{N}(\gamma(t))$, para todo $t \in I$.

Da fórmula de Weingarten, obtemos

$$\overline{\nabla}_{\gamma'(t)} \eta(t) = -A_{\eta(t)} \gamma'(t) + \nabla^{\perp}_{\gamma'(t)} \eta(t).$$

Como $\eta(t)$ é paralelo para todo $t \in I$, temos $\nabla^{\perp}_{\gamma'(t)} \eta(t) = 0$, e para todo $X \in T_pM$ temos

$$< A_{\eta(t)} \gamma'(t), X >= < \eta(t), \alpha(\gamma'(t), X) >= 0,$$

pois por hipótese $N_1(p) \subset N(p)$. Como a variedade é conexa e $\overline{\nabla}_{\gamma'(t)} \eta(t) = 0$, temos que $\eta(t)$ é constante. Sendo $\eta(0) = \eta_0$, temos que $\eta(t) = \eta_0$ em R^{n+r}. Logo,

$$\tfrac{d}{dt} < f(\gamma(t)) - f(p), \eta_0 >= < d(\gamma'(t)), \eta_0 >= 0.$$

Dessa forma, concluímos que $< f(\gamma(t)) - f(p), \eta_0 >= 0$ para todo $t \in I$. Como a curva e o vetor $\eta_0 \in \widetilde{N}(p)$ são tomados arbitrariamente, temos que $f(M) \subset T_pM \bigoplus N(p)$, que é uma subvariedade totalmente geodésica de R^{n+r} de dimensão (n+q). c.q.d.

Corolário 4.1- Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+r}$ uma imersão isométrica 1-regular. Se N_1 é um subfibrado paralelo de dimensão $q < r$, então a codimensão substancial de f é q.

Definiremos agora índice de nulidade relativa.

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \widetilde{M}$ definimos em cada ponto $p \in M$ dois subespaços de T_pM:

$$A_p = \{X \in T_pM; R(X,Y) = \widetilde{R}(X,Y) \mid T_pM, \forall Y \in T_pM\}$$
$$D_p = \{X \in T_pM; \alpha(X,Y) = 0, \forall Y \in T_pM\}$$

Definimos o índice de nulidade de f, $\eta(p)$, como a dimensão de A_p, e o índice de nulidade relativa, $\nu(p)$, como a dimensão de D_p.

A proposição seguinte mostra o que acontece quando a dimensão de D_p é constante num aberto de M.

Proposição 4.1 - Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica de M numa variedade $\widetilde{M}$ de curvatura constante c. Se a dimensão do subespaço D_p(isto é, o índice de nulidade relativa $\nu(p)$)é igual a uma constante l num aberto de M, então esses subespaços formam uma distribuição integrável (involutiva) cujas folhas são l-subvariedades totalmente geodésicas.

Demonstração - Sejam X e Y campos vetoriais definidos num aberto U de M, tangentes a distribuição D_p; precisamos mostrar que $[X,Y]_p$ pertence a D_p, para todo $p \in U$. Para isso basta mostrar que $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$ e $\widetilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X$ estão em D_p pois $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

Observamos primeiro que $X \in D_p$ se, e somente se,$\widetilde{\nabla}_X Z$ é tangente a M para todo $Z \in \aleph(M)$. Com efeito, tem-se que $\widetilde{\nabla}_X Z = \nabla_X Z + \alpha(X,Z)$. Como $X \in D_p$, temos que $\alpha(X,Z) = 0, \forall Z \in T_pM$. Logo $\widetilde{\nabla}_X Z$ só tem componente tangente. Dessa forma, se mostrarmos que $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_X Y} Z$ possui apenas componente tangente, então concluiremos que $\widetilde{\nabla}_X Y \in D_p$. Temos:

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_X Y} Z = \widetilde{\nabla}_Z \widetilde{\nabla}_X Y + [\widetilde{\nabla}_X Y, Z] =$$
$$= \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Z Y + \widetilde{R}(Z,X)Y + \widetilde{\nabla}_{[Z,X]} Y + [\widetilde{\nabla}_X Y, Z] =$$
$$= \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z + \widetilde{\nabla}_X([Z,Y]) + \widetilde{R}(Z,X)Y + \widetilde{\nabla}_{[Z,X]} Y + [\widetilde{\nabla}_X Y, Z]$$

Pela equação (3.17):

$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\nabla}_X Y} Z = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z + \widetilde{\nabla}_X([Z,Y]) + c(< Z, Y > X - < Z, X > Y) + \widetilde{\nabla}_{[Z,X]} Y +$
$[\widetilde{\nabla}_X Y, Z]$

é tangente a M pois cada um dos termos é. Logo a distribuição é involutiva e pelo Teorema de Frobenius, temos que por cada ponto $q \in U$ passa uma única variedade P_q de dimensão l, um afolha da distribuição, tal que $(TP_q)p = D_p$.

Temos ainda que essa subvariedade P_q é totalmente geodésica em $\widetilde{M}$. Com efeito,vimos que se X e Y pertencem a $\chi(P_q)$ então $\widetilde{\nabla}_X Y$ está em (TP_q), ou seja, a segunda forma fundamental de P_q em relação a $\widetilde{M}$ é identicamente nula. c.q.d.

A seguir enunciaremos o seguinte teorema feita por Hartman [5] que será de grande importância na demonstração de um dos nossos principais resultados.

Teorema (Hartmann) - Suponha (i) M^n é uma variedade Riemanniana completa com curvaturas seccionais não negativas, (ii)$f : M^n \to R^{n+p}$ uma imersão isométrica, com $p > 0$,e (iii) a nulidade relativa seja sempre maior ou igual a zero. Seja m o valor mínimo da nulidade relativa para $p \in M^n$. Então $f(M)$ é m-cilíndrica.

Capítulo 5

Resultados Principais

Neste capítulo provaremos os dois principais resultados deste trabalho.

Iremos considerar imersões C^{∞}, $f : M^n \to R^{n+p}$ de uma variedade M de dimensão n no espaço euclideano de dimensão $(n+p)$.

Dizemos que tal imersão é $(1,k)$ regular se o primeiro espaço normal N tem dimensão constante k, equivalentemente se o segundo espaço osculador tem dimensão constante $(n+k)$.

Nosso objetivo é criar condições que nos permitam reduzir a codimensão de f a k, quando lá existir uma subvariedade L de R_c^{n+p} de dimensão $(n+k)$ totalmente geodésica tal que $f(M) \subset L$.

Um resultado básico na prova da redução da codimensão de uma imersão consiste em mostrar que o primeiro espaço normal N é paralelo na conexão normal $\nabla^{\perp}$, isto é, $\nabla_X^{\perp} N \subset N, \forall X \in TM$.

Indicaremos por $\widetilde{N}$ o complemento ortogonal de N no espaço normal $TM^{\perp}$. Se v é uma seção de $\widetilde{N}$ em uma vizinhança $U \subset M$ e $\{X_1, ..., X_n\}$ é uma base tangente em p, então $B_i = (\nabla_{X_i}^{\perp} v)^N$ é a projeção de $\nabla_{X_i}^{\perp} v$ em N. Como v é arbitrário, para provarmos que N é paralelo, pelo Lema 4.1, basta mostrarmos que $B_i = 0, i = 1, ..., n$.

Lema 5.1 - Para qualquer referencial tangente $X_1, ..., X_n$,

$$< B_i, \alpha_{jk} > = < B_j, \alpha_{ik} >$$

onde denotaremos $\alpha_{ik} = \alpha(X_i, X_k)$.

<u>Demonstração</u> :

$$< B_i, \alpha_{jk} > = < \nabla_{X_i}^{\perp} v, \alpha(X_j, X_k) >$$

Temos que $v \in \widetilde{N}$ e $\alpha(X_j, X_k) \in N$, portanto

$$< v, \alpha(X_j, X_k) >= 0$$
$$X_i < v, \alpha(X_j, X_k) >= 0$$
$$< \nabla^{\perp}_{X_i} v, \alpha(X_j, X_k) > + < v, \nabla^{\perp}_{X_i} \alpha(X_j, X_k) >= 0$$
$$< \nabla^{\perp}_{X_i} v, \alpha(X_j, X_k) >= - < v, \nabla^{\perp}_{X_i} \alpha(X_j, X_k) >$$

Dessa forma:

$$< B_i, \alpha_{jk} >= - < v, \nabla^{\perp}_{X_i} \alpha(X_j, X_k) >$$

Como, por definição: $(\nabla^{\perp}_{X_i}\alpha)(X_j, X_k) = \nabla_{X_i}\alpha(X_j, X_k) - \alpha(\nabla_{X_i}X_j, X_k) - \alpha(X_j, \nabla_{X_i}X_k)$, assim, teremos:

$$< B_i, \alpha_{jk} >= - < v, (\nabla^{\perp}_{X_i}\alpha)(X_j, X_k) + \alpha(\nabla_{X_i}X_j, X_k) + \alpha(X_j, \nabla_{X_i}X_k) >$$
$$< B_i, \alpha_{jk} >= - < v, (\nabla^{\perp}_{X_i}\alpha)(X_j, X_k) >$$

Mas pela Equação de Codazzi: $(\nabla^{\perp}_{X_i}\alpha)(X_j, X_k) = (\nabla^{\perp}_{X_j}\alpha)(X_i, X_k)$. Logo a expressão acima se escreve:

$$< B_i, \alpha_{jk} >= - < v, (\nabla^{\perp}_{X_j}\alpha)(X_i, X_k) >$$

O que mostra

$$< B_i, \alpha_{jk} >=< B_j, \alpha_{ik} >$$

Como queríamos demonstrar.

Lema 5.2 - Seja $f : M^n \to R^{n+p}$ uma imersão e $U \subset M$ um aberto fixo tal que $f \mid U$ é $1-1$ regular. Se para cada ponto de U existe uma curvatura seccional $k \neq 0$, então N é paralelo em U.

Demonstração : Para mostrarmos que N é paralelo em U, devemos mostrar que para toda direção normal $v \in \widetilde{N}$, definida em U temos $\nabla^{\perp}_{X_i} v \subset \widetilde{N}$, isto é, que $B_i = (\nabla^{\perp}_{X_i} v)^N = 0$.

Seja $p \in U$. Tomemos $\{e_{n+1}, e_{n+2}, ..., e_{n+k}\}$ uma referencial normal numa vizinhança de p em U, tal que e_{n+1} gera N. Seja $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ um referencial tangente que diagonaliza a segunda forma fundamental,isto é, $A_{e_{n+1}} X_i = \lambda_i X_i, i = 1, ..., n$. onde

$$< \alpha(X_i, X_i), e_{n+1} >= \lambda_i \text{ e } < \alpha(X_i, X_j), e_{n+1} >= 0$$

Devemos mostrar que $\forall s > n+1, B_i = (\nabla^{\perp}_{X_i} e_s)^N = 0, i = 1, ..., n$

Pela Equação de Gauss, $K(X_i, X_j) - c = \lambda_i \lambda_j$, sendo em p, $K(X_i, X_j) \neq c$,temos que $\lambda_i \lambda_j \neq 0$, então existem índices j e l, $j \neq l$,tal que $\alpha_{jj} \neq 0$ e $\alpha_{ll} \neq 0$, onde um dos dois índices , j ou l é diferente de i. Digamos $j \neq i$. Temos que,

$$< B_i, \alpha_{jj} >=< B_j, \alpha_{ij} >$$

pelo Lema 5.1. Mas $\alpha_{ij} = 0$, pois a segunda forma fundamental é diagonalizável. Assim:

$$< B_j, \alpha_{ij} >= 0 \Rightarrow < B_i, \alpha_{jj} >= 0 \Leftrightarrow B_i = 0$$

pois $\alpha_{jj} \neq 0$. Como, $B_i = (\nabla^{\perp}_{X_i} e_s)^N$; temos $\nabla^{\perp}_{X_i} e_s = 0$, e portanto N é paralelo em U, como queríamos demostrar.

Lema 5.3 - Seja $F \subset M$ um conjunto aberto onde o índice de nulidade relativo υ da imersão $f : M^n \rightarrow R^{n+p}$ é igual a uma constante $l > 0$. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ um segmento geodésico contido em uma folha L da folheação de nulidade relativo. Se o primeiro espaço normal N é paralelo em $\gamma(a)$ então é paralelo em $\gamma(t)$ para todo $t \epsilon [0, a)$.

Demonstração: Seja $\{X_1, ..., X_n\}$ um referencial tangente definido numa vizinhança do ponto $\gamma(t)$ em f com a propriedade que $\{X_1, ..., X_l\}$ gera a nulidade relativa do espaço D em todos os pontos tal que $X_1 = \gamma'(t)$, o vetor tangente para a curva γ. Visto que a folha L que contém γ é totalmente geodésica, podemos assumir que os vetores X_i, $i = 1, ..., n$ são paralelos ao longo de γ, isto é

$$\nabla_{\gamma'(t)} X_i = 0, i = 1, ..., n.$$

Primeiramente mostramos que $\nabla^{\perp}_{Y} N \subset N$ para todo Y na distribuição de nulidade relativa D_p, para todo p em F. Seja v um campo arbitrário de vetores normais numa vizinhança de p que é ortogonal a N, seja $B_i = (\nabla^{\perp}_{X_i} v)^N$; precisamos mostrar que $B_i = 0, i = 1, ..., l$. Se $i \leq l$, então pela definição de D_X , $\alpha_{ik} = 0$, para todo k; pelo Lema 1, $< B_i, \alpha_{jk} >=< B_j, \alpha_{ik} >= 0, \forall j, k$. Portanto, como N é gerado pelos α_{jk}'s, $j, k = 1, ..., n$, $B_i = 0$.

Considere $\{e_1, ..., e_k\}$ um referencial normal ortogonal definido numa vizinhança de $\gamma([0, a))$ com a propriedade que $\{e_1, ..., e_s\}$ gera o primeiro espaço normal N. Visto que $\nabla^{\perp}_{X_l} N \subset N$, podemos assumir que $\{e_1, ..., e_k\}$ são paralelos ao longo do segmento geodésico γ. Sejam δ e r, tais que $\delta > s$ e $r \leq s$, considere as funções $f_i(t) =< \nabla^{\perp}_{X_i} e_r, e_\delta >, i = l + 1, ..., n$ diferenciável ao longo de γ, obtemos que:

$$f'_i(t) = X_1 < \nabla^{\perp}_{X_i} e_r, e_\delta >=< \nabla^{\perp}_{X_1} \nabla^{\perp}_{X_i} e_r, e_\delta > + < \nabla^{\perp}_{X_i} e_r, \nabla^{\perp}_{X_1} e_\delta >$$
$$f'_i(t) =< \nabla^{\perp}_{X_1} \nabla^{\perp}_{X_i} e_r, e_\delta >$$

visto que $\nabla^{\perp}_{X_1} e_\delta = 0$ ao longo de γ.

Como $R^{\perp}(X_1, X_i) e_r = \nabla^{\perp}_{X_1} \nabla^{\perp}_{X_i} e_r - \nabla^{\perp}_{X_i} \nabla^{\perp}_{X_1} e_r - \nabla^{\perp}_{[X_1, X_i]} e_r$, onde $R^{\perp}$ é o tensor de curvatura da conexão normal $\nabla^{\perp}$, temos que

$$f'_i(t) =< R^{\perp}(X_1, X_i) e_r, e_\delta > + < \nabla^{\perp}_{X_i} \nabla^{\perp}_{X_1} e_r, e_\delta > + < \nabla^{\perp}_{[X_1, X_i]} e_r, e_\delta >$$

Pela Equação de Ricci para imersões

$$f_i'(t) = X_i < \nabla^{\perp}_{X_1} e_r, e_\delta > - < \nabla^{\perp}_{X_1} e_r, \nabla^{\perp}_{X_i} e_\delta > + < \nabla^{\perp}_{[X_1,X_i]} e_r, e_\delta > + < [A_{e_r}, A_{e_\delta}] X_1, X_i >$$

$$f_i'(t) = < \nabla^{\perp}_{[X_1,X_i]} e_r, e_\delta > + < [A_{e_r}, A_{e_\delta}] X_1, X_i >$$

posto que $\nabla^{\perp}_{X_1} e_r$ sempre está em M e $(\nabla^{\perp}_{X_1} e_r)_{\gamma(t)} = \nabla^{\perp}_{\gamma'} e_r = 0$, logo

$$f_i'(t) = < \nabla^{\perp}_{[X_1,X_i]} e_r, e_\delta > = < \nabla^{\perp}_{\nabla_{X_1} X_i - \nabla_{X_i} X_1} e_r, e_\delta >$$

Tendo em vista que pelo fato de e_δ ser perpendicular em N, implica que $A_{e_\delta} = 0$.

Sendo X_i paralelo ao longo de γ, teremos

$$f_i'(t) = - < \nabla^{\perp}_{\nabla_{X_i} X_1} e_r, e_\delta >$$

$$f_i'(t) = -\Sigma_{j=1}^{n} < \nabla_{X_i} X_1, X_j > . < \nabla^{\perp}_{X_j} e_r, e_\delta >$$

$$f_i'(t) = -\Sigma_{j=l+1}^{n} < \nabla_{X_i} X_1, X_j > . < \nabla^{\perp}_{X_j} e_r, e_\delta >$$

visto que $\nabla^{\perp}_{X_j} e_r$ está em N se $j \leq l$.

Como $f_j(t) = < \nabla^{\perp}_{X_j} e_r, e_\delta >$,

$$f_i'(t) = \Sigma_{j=l+1}^{n} < CX_i, X_j > f_j(t).$$

Onde $C : D^{\perp}_{\gamma(t)} \to D^{\perp}_{\gamma(t)}$ é a aplicação linear definida por $C(Z) = -(\nabla_Z X_1)^{D^{\perp}}$ onde $D^{\perp}$ é o complemento ortogonal do espaço normal de D e $()^{D^{\perp}}$ denota a projeção ortogonal de $D^{\perp}$.

Se $F(t) = (f_{l+1}(t), ..., f_n(t))$ e $\widetilde{C}_{\gamma(t)}$ é a matriz com coeficientes $\widetilde{C}_{ij} = < CX_i, X_j >_{\gamma(t)}$ então a equação anterior nos dá a seguinte equação diferencial

$$F'(t) = \widetilde{C}_{\gamma(t)} F(t)$$

A solução desta equação diferencial é da forma

$$F(t) = exp(\textstyle\int_0^t \widetilde{C}_{\gamma(u)} du) F(0)$$

Consequentemente se $F(0) \neq 0$ então $F(a) \neq 0$. Desta forma concluímos que $F(t) = 0$ para $r \leq s$ arbitrário e $\delta > s$ se e somente se $\nabla^{\perp}_{X_i} N \subset N, i = l+1, ..., n$, como queriamos demonstrar.

Teorema 5.1 - Se M^n é compacta, conexa e $f : M^n \to R^{n+p}$ é $1-1$ regular, então podemos reduzir a codimensão para 1 .

Demonstração - Precisamos mostrar que para cada ponto de M, o primeiro espaço normal N é paralelo, afim de podermos usar o Teorema de redução de codimensão de Erbacher e obter nosso resultado.

Seja $A = \{q \in M / \exists T \subset T_qM; K_T \neq 0\}$. Pelo Lema 2, temos que N é paralelo em A.

Seja $p \in \overline{A}$. Então p é aderente a A, isto é, p é limite de uma seqüência de pontos de A. Vamos mostrar que N é paralelo em p. O fato de f ser 1-1 regular implica que o primeiro espaço normal é gerado por uma só direção normal v. Seja $v \in N; |v| = 1$ uma direção normal definida em A. Sendo N paralelo em A, $(\nabla^{\perp}_{X_i} v)_q = 0, \forall q \in A$, onde $X_i \in T_qM$. Como p é aderente a A, implica que $(\nabla^{\perp}_{X_i} v)_p^{\widetilde{N}} = 0$, logo N é paralelo em p.

Temos que o subespaço de nulidade relativa

$$D_p = \{X \in T_pM; \alpha(X, Y) = 0, \forall Y \in T_pM\}.$$

é por definição o núcleo da segunda forma fundamental, que representaremos por $Ker(A_\eta)_p$, dessa forma $dim(D_p) = dim(Ker(A_\eta)_p)$.

O fato de f ser 1-1 regular, significa que a $dimN = 1$, isto é, existe $X_l \in T_pM$; tal que $\alpha(X_l, X_k) \neq 0, \forall X_k \in T_pM$.

Considere $\{X_1, ..., X_n\}$ um campo de vetores ortonormais tagentes que diagonaliza a segunda forma fundamental e tomemos X_i e X_j dois campos que geram um subespaço $T \subset T_pM$.
Sendo $K(X_i, X_j) \neq 0$, pela Equação de Gauss

$$< \alpha(X_i, X_i), \alpha(X_j, X_j) > \neq 0.$$

Mas isto só ocorre se

$$\alpha(X_i, X_i) \neq 0 \text{ e } \alpha(X_j, X_j) \neq 0$$

o que mostra que existem $X_i, X_j \in T_pM$, tal que X_i, X_j não estão no $Ker(A_\eta)$, logo a dimensão do $Ker(A_\eta) < n - 1$.

Dessa forma, para um ponto em $B = M - A$, o núcleo terá dimensão $\geq (n-1)$ uma vez que $k = 0$; por outro lado, a dimensão do núcleo tem de ser exatamente igual a $(n-1)$, pois, N é constituído pelas imagens da segunda forma fundamental e sua dimensão é sempre igual a 1, significa que existe no máximo um elemento fora do núcleo de A_η cuja imagem gera N. Desta maneira garantimos que $dimKer(A_\eta) = (n-1) \forall q \in B$.

Estamos assim nas condições da proposição 4.1, que garante a existência de uma folheação $\Im$ no interior de B tal que $T_q\Im = Ker(A_\eta)_q$, cujas folhas são subvariedades totalmente geodésicas de dimensão $(n-1)$; onde estas geodésicas também serão geodésicas do espaço ambiente Q. Com efeito, se γ é uma geodésica de uma das folhas, então $\frac{D}{dt}\gamma'(t) = 0$. Dessa forma $\widetilde{\nabla}_{\gamma(t)}\gamma(t) = \nabla_{\gamma(t)}\gamma(t) + \alpha(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$, o que mostra o afirmado.

Temos duas possibilidades: A primeira é que as geodésicas coincidem num ponto do fecho de A, e a segunda é que as geodésicas continuam indefinidamente no interior de B. Mas, essa segunda possibilidade nunca poderá acontecer, tendo em vista que M é compacta e uma geodésica de R^{n+p} não é limitada. Portanto, a geodésica tem que coincidir num ponto do fecho de A onde N é paralelo. Agora, pelo Lema 4 concluimos que N é paralelo em B consequentemente N será paralelo em todos os pontos de M.

Teorema 5.2 - Seja M^n completa e conexa com curvatura de Ricci não negativa. Se $f : M^n \to R^{n+p}$ é $1-1$ regular, então ou:

(i) f é um cilindro sobre uma curva
(ii) podemos reduzir a codimensão para 1 e $f(M)$ é a fronteira de um conjunto convexo dentro de um subespaço afim do R^{n+p} de dimensão $(n+1)$.

Demonstração: Como vimos anteriormente, se qualquer ponto do interior de B, puder ser ligado a um ponto do fecho de A por uma geodésica que está numa das folhas da folheação de nulidade relativa então pelo teorema anterior podemos reduzir a codimensão para 1.

Caso contrário ,$\exists p \in int(B)$ tal que, todas as geodésicas que saem de p e são tangentes a folheação que passa por p, podem ser estendidas indefinidamente. Isto implica que esta folha é um subespaço afim de dimensão $(n-1)$ no R^n. E sabemos que geodésicas deste subespaço minimizam distâncias em M, visto que são retas.

Pelo teorema 4.2, temos que M é isométrica ao produto $\overline{M} \times R^{n-1}$, onde $\overline{M}$ é uma curva que não possui geodésicas minimizantes. Temos que $\overline{M} \times R^{n-1}$ é isométrico ao R^n. Com efeito, seja Z um campo paralelo de R^{n-1} e tome R' como a curvatura de $\overline{M} \times R^{n-1}$. Temos : $R'(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_y Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0$; o que mostra o afirmado. Logo, M é localmente isométrica ao R^n. Isto, juntamente com o fato que $dimN = 1$, implica que o índice de nulidade relativa $v = n-1$ em M. Agora aplicamos o Teorema de Hartmann e concluimos que a imersão é um (n-1)-cilindro gerado por uma curva.

Agora, suponhamos que possamos reduzir a codimensão para 1. Observemos que, em codimensão 1, curvatura de Ricci positiva implica curvatura seccional positiva. Com efeito, seja $X_1 \in T_pM$ arbitrário tal que a partir de X_1 possamos completar uma base $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ de T_pM.

Seja $H = \frac{1}{n}\sum_1^n \alpha(X_i, X_i) \in T_pM^\perp$, o vetor curvatura média da imersão. Tomando o produto interno de H com $\alpha(X_1, X_1)$, teremos:

$< \alpha(X_1, X_1), H >= \frac{1}{n} < \alpha(X_1, X_1), \sum_1^n \alpha(X_i, X_i) >$

$< \alpha(X_1, X_1), H >= \frac{1}{n}\|\alpha(X_1, X_1)\|^2 + \frac{1}{n}\sum_1^n < \alpha(X_1, X_1), \alpha(X_i, X_i) >$

$< \alpha(X_1, X_1), H >\geq \frac{1}{n}\|\alpha(X_1, X_1)\|^2 + \frac{1}{n}\sum_1^n (< \alpha(X_1, X_1), \alpha(X_i, X_i) >$
$- \|\alpha(X_1, X_i)\|^2)$

$< \alpha(X_1, X_1), H >\geq \frac{1}{n}\|\alpha(X_1, X_1)\|^2 + \frac{n-1}{n}(Ric(X_1) - c) \geq 0$

Como X_1 é abitrário, $< \alpha(X_i, X_i), H >\geq 0, \forall i = 1, ..., n$

Considere uma base ortonormal $\{X_1, ..., X_n\}$ de T_pM que diagonaliza a segunda forma fundamental . Pela equação de Gauss, temos que:

$$K(X_i, X_j) = \lambda_i.\lambda_j + c$$

onde $K(X_i, X_j)$ é a curvatura seccional do plano gerado por X_i e X_j e $\lambda_i =< \alpha(X_i, X_i), H >; H \in T_pM^\perp, i, j = 1, ..., n$. Assim, a expressão acima se escreve como:

$$K(X_i, X_j) =< \alpha(X_i, X_i), H > . < \alpha(X_j, X_j), H >$$

Dessa forma :

$$K(X_i, X_j) \geq 0$$

Consequentemente A_H é definida semi-positiva e as curvaturas seccionais são não-negativas. Finalmente,pelo teorema de Sacksteder [6] que garante que se $M^n, n \geq 2$ é uma variedade Riemanniana completa de curvatura seccional não negativa e $f : M \to R^{n+1}$ uma imersão isométrica então a imagem $f(M)$ é o bordo de um corpo covexo em R^{n+1}, como queríamos demonstrar.

Referências Bibliográficas

[1] Rodriguez, L., Tribuzy, R.: Reduction of Codimension of Regular Imersions. Math. Z. 185,321-331, 1984.

[2] Camacho, Cézar.: Teoria Geométrica das Folheações / Alcides Lins Neto & César Camacho. - Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[3] Cheeger, J. , Gromoll, D.: The Splitting Theorem for Manifolds of Non-Negative Ricci Curvature. J. Differential Geometry 6, 119-128, 1971.

[4] Erbacher, J.A.: Reduction of the Codimension of an Isometric Immersion. J. Differential Geometry 5, 333-340, 1971.

[5] Hartman, P.:On the Isometric Immersions in Euclidean Space of Manifolds with non-negative Sectional Curvatures. Trans. Amer. Math. Soc.147,529-540, 1970.

[6] Sacksteder, R.: On Hypersurfaces with non-negative Sectional Curvatures. Amer. J. Math. 82, 609-630, 1960.

[7] Rodrigues, L.: Geometria das Subvariedades. Monografias de Matemática, n.26. IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[8] Carmo, Manfredo P.: Geometria Riemanniana, - Rio de Janeiro: IMPA, 1988 - 2 edição.