UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CONVERGÊNCIA Q-QUADRÁTICA DO MÉTODO DE NEWTON COM DADOS EM UM PONTO

ANDRÉA FREITAS FRAGATA

MANAUS

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANDRÉA FREITAS FRAGATA

CONVERGÊNCIA Q-QUADRÁTICA DO MÉTODO DE NEWTON COM DADOS EM UM PONTO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Concentração em Otimização.

Orientador: Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto

MANAUS
2007

ANDRÉA FREITAS FRAGATA

CONVERGÊNCIA Q-QUADRÁTICA DO MÉTODO DE NEWTON COM DADOS EM UM PONTO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Concentração em Otimização.

Aprovado em 30 de março de 2007.

BANCA EXAMINADORA

....
Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto, orientador
Universidade Federal do Amazonas

....
Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto
Universidade Federal do Piauí

....
Prof. Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva
Universidade Federal do Amazonas.

Ao professor Alfredo Wagner

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, minha fonte de inspiração nas dúvidas e incertezas.
A Raul Mesquita e J.Ponciano, pela prestatividade.
Ao professor Alfredo Wagner , pelas várias horas passadas em pacientes revisões.
A Karla Tribuzy, pelos valiosos conselhos.
A minha filha Saneila e a toda minha família pelo apoio moral e financeiro.
A todos os professores da Graduação e do Mestrado, em particular aos professores Nilomar Vieira e Renato Tribuzy, pela dedicação.
A todos os meus colega de estudo, especialmente ao Edson Lopes, Nazareno, Laurimar e Samuel pela força e incentivo.

Sumário

Resumo

Muitos problemas de física, engenharia, ecomomia e outras ciências são modelados de maneira muito conveniente por sistemas não-lineares. Nestes casos, podemos usar o método de Newton, que é um método iterativo, no sentido de garantir a convergência a uma solução, supondo que o ponto inicial usado como aproximação da mesma é suficientemente bom. O objetivo deste trabalho é dar uma demonstração, baseada nos resultados obtidos por João Xavier e Orizon Ferreira, que o Método de Newton sob as hipóteses do Teorema de Smale converge Q-quadraticamente e como conseqüência esses autores deduziram um erro estimado, o que configura um resultado novo, uma vez que, apenas a convergência R-quadrática foi obtida.

Abstract

Many problems in Physics, Engineering, Economics and other sciences are modeled by suitable nonlinear systems. In these models, we can use Newton's iterative method for approximating solutions, starting from an initial approximation which is assumed to be sufficiently good. The goal of this work is to give a proof that, under the assumptions of Smale's theorem, the method converges Q-quadratically. The proof presented is based on some results proved by João Xavier e Orizon Ferreira, which improve previous results giving only the R-quadratic convergence of the method.

Introdução

O Método de Newton e suas modificações desempenham um papel importante em encontrar soluções de equações e sistemas de equações não-lineares. Steve Smale propõe diferenciabilidade forte e analiticidade da aplicação no espaço de Banach. Os resultados do trabalho de Smale são importantes para a construção de algoritmos globais baseados no Método de Newton e para a estimativa da eficiência desses algoritmos.

Neste trabalho daremos uma demonstração, baseada no trabalho de João Xavier e Orizon Ferreira [1], que o Método de Newton, sob as hipóteses do Teorema de Smale, converge Q-quadraticamente.

A estrutura do trabalho encontra-se organizada da seguinte forma:

O Capítulo 1 contém várias definições e resultados fundamentais sobre Método de Newton, entre os quais, temos as definições de convergência Q-quadrática e o enunciado do Teorema de Smale cujas hipóteses utilizamos no presente trabalho.

O Capítulo 2 trata dos resultados que nos auxiliarão na demostração do Teorema da Convergência Q-quadrática, contém também a definição de Zero Aproximado e o Teorema da Dominação.

Finalmente, no Capítulo 3, mostraremos a convergência Q-quadrática e alguns resultados utilizados na demonstração.

Capítulo 1

O Método de Newton

1.1 O Método de Newton

Nos cursos de cálculo numérico, estuda-se o Método de Newton (também conhecido como Newton-Raphson) no contexto de achar zeros de funções. Nesse método tem-se uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 no intervalo I, com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, toma-se um valor inicial x_0 e põe-se

$$\begin{gathered} x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) \\ x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) \\ \vdots \\ x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)\ ,\ \textit{etc.} \end{gathered}$$

Se a seqüência (x_n) convergir, seu limite **a** será uma raiz da equação $f(x) = 0$, pois fazendo $n \to \infty$ na igualdade

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

resulta $a = a - f(a)/f'(a)$, donde $f(a) = 0$.

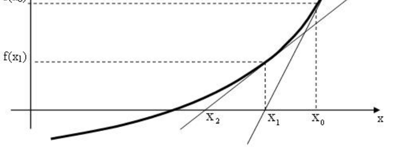

Figura 1.1: Como a inclinação da tangente é $f'(x_0) = f(x_0)/(x_0 - x_1)$, segue que $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

A idéia que motiva o método de Newton é que, se a tangente aproxima a curva então sua intersecção com o eixo x aproxima o ponto de intersecção da curva com esse eixo, isto é, o ponto $(x, f(x))$ em que $f(x) = 0$.

A generalização do método de Newton para sistemas de equações não-lineares foi proposta pela primeira vez não por Newton, mas por Simpson, eminente matemático do século XVIII. O princípio em que se baseia o método é paradigmático na resolução aproximada de problemas matemáticos: o objetivo final é um problema "difícil"(neste caso, $F(x) = 0$), cuja solução vai sendo aproximada por uma seqüência de pontos $\{x_n\}$. Dada cada aproximação x_n, constrói-se, com a informação disponível nesse ponto, um problema "fácil", que sabemos resolver. A aproximação x_{n+1} é a solução do problema fácil. O problema fácil muda de uma interação para a seguinte e, via de regra, sua solução está cada vez mais próxima da solução do problema difícil original. De acordo com as considerações acima nosso problema será resolver

$$F(x) = 0,\ F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ F \in C^1(\mathbb{R}^n), \text{ onde}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad e \quad J(x) = F'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix},$$

sendo J a matriz jacobiana.

O $n-$ésimo problema fácil vem de considerar a aproximação de Taylor de primeira ordem de $F(x)$, numa vizinhança do ponto atual x_n:

$$F(x) \approx L_n(x) = F(x_n) + J(x_n)(x - x_n). \tag{1.1}$$

Seguindo o princípio descrito acima, o ponto seguinte x_{n+1} é uma solução de

$$L_n(x) = 0. \tag{1.2}$$

Se $J(x_n)$ é não singular então a equação 1.2 tem solução única, e a iteração de Newton consiste em resolver um sistema linear:

$$\begin{cases} J(x_n)s_n = -F(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + s_n \quad . \end{cases} \tag{1.3}$$

A implementação do sistema 1.3 pressupõe o cálculo de $J(x_n)$, isto é, a avaliação das derivadas primeiras das funções $f_i,\ i = 1, ..., n$.

Até poucos anos atrás, o cálculo de derivadas era considerado não só difícil mas também muito suscetível a erros humanos. Atualmente a possibilidade de falha humana pode ser evitada, através das diferenciações simbólica e automática. É importante ressaltar que, em geral, quando se calcula efetivamente as derivadas, muitos cálculos usados na avaliação da função podem ser reaproveitados. A diferenciação automática é um conjunto de técnicas que produz um programa que avalia $F(x)$ e $J(x)$, com os reaproveitamentos necessários, partindo de um programa que avalia apenas $F(x)$.

O método de Newton possui uma propriedade única entre os algoritmos para resolver sistemas de equações não-lineares: a invariância por mudança de coordenadas, tanto no espaço domínio quanto no contra-domínio. No contra-domínio, isto significa que as iterações de Newton aplicadas a $F(x) = 0$ são as mesmas que as aplicadas ao sistema $AF(x) = 0$, para qualquer matriz A não-singular. A invariância no domínio consiste em que, se $\{x_n\}$ é a seqüência newtoniana para $F(x) = 0$, então os iterados para o sistema $F(Ax+b) = 0$, com A não-singular e com a aproximação inicial $Ax_0 + b$, são os pontos da forma $Ax_n + b$.

1.2 Convergência Local

Diremos que um método possui convergência local em relação a um determinado tipo de solução do problema considerado se, dada uma solução x_* desse tipo, existe um $\varepsilon > 0$ tal que toda seqüência $\{x_n\}$ gerada pelo algoritmo onde $\|x_0 - x_*\| \leq \varepsilon$, converge para x_*. Os resultados de convergência local estão quase sempre associados a resultados de ordem de convergência. Diremos que uma seqüência $\{x_n\}$ converge Q-linearmente para x_* relativamente à norma $\|.\|$ se existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $r \in (0,1)$ tais que, para todo $n \geq n_0$,

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq r\|x_n - x_*\|. \tag{1.4}$$

A convergência de $\{x_n\}$ para x_* será chamada *Q-superlinear* se existe uma seqüência $r_n > 0$ tendendo a zero, tal que

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq r_n\|x_n - x_*\| \tag{1.5}$$

para todo $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$. Pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^n$ podemos ver que a convergência Q-superlinear de uma seqüência é independente da norma. Ao mesmo tempo, se $x_n \to x_*$ Q-superlinearmente, então dados qualquer $r \in (0, 1)$ e qualquer norma em $\mathbb{R}^n$, a desigualdade 1.4 acabará se verificando para n_0 suficientemente grande, ou seja, teremos convergência Q-linear. Se $x_n \to x_*$ e existem $n_0 \in \mathbb{N}$, $c > 0$ e $p > 0$ tais que, para todo $n \geq n_0$

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq c\|x_n - x_*\|^p, \tag{1.6}$$

diremos que $\{x_n\}$ converge para x_* com Q-ordem p. Para $p = 2$, diremos que a convergência é Q-quadrática. Quanto maior for p mais rapidamente x_n tenderá a x_*. Com efeito, se para uma iteração n o erro $\|x_n - x_*\|$ é da ordem de 0.1, então na iteração seguinte será da ordem de $c.\ 0.1^p$, e depois de m iterações será $c.\ 0.1^{mp}$. Portanto o número de dígitos corretos das componentes da solução crescerá rapidamente se $p \geq 2$. Por isso, costuma-se dizer que, na convergência Q-quadrática, o número de decimais corretos é duplicado em cada iteração. Assim, o tipo de convergência mais desejável é a de Q-ordem p com o maior valor de p possível. Nas seqüências produzidas por métodos numéricos geradas em um computador, a convergência Q-quadrática é observadada no rápido crescimento dos dígitos repetidos de uma iteração para outra, ou, equivalentemente, o número de decimais repetidos do erro. Além disso diz-se que $\{x_n\}$ converge a x_* com R-ordem de convergência p se existir uma sequência $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ que converge exibindo um comportamento Q de ordem p tal que o erro

$$\|x_n - x_*\| = \|e_n\| \leq |a_n|.$$

O prefixo Q (por quociente) nas definições acima se utiliza para diferenciar esse tipo de convergência das do tipo R (por raízes).

Exemplos :

a) Seja $x_n = 1 + 2^{-n}$ tal que,

$$\lim_{n\to\infty} 1 + 2^{-n} = 1 = x_*.$$

Calculando:

$\|x_{n+1} - 1\| = \|2^{-(n+1)}\| = \|2^{-1}2^{-n}\| = \frac{1}{2}\|2^{-n} + 1 - 1\| = \frac{1}{2}\|x_n - 1\|,$
obtemos que x_n converge a 1 Q-linearmente com $c = \frac{1}{2}$.

b) Seja $x_n = 1 + 2^{-2^n}$ tal que,

$$\lim_{n\to\infty} 1 + 2^{-2^n} = 1 = x_*.$$

Calculando:

$$\|x_{n+1} - 1\| = \|2^{-2^{(n+1)}}\| = \|2^{-(2^n 2)}\| =$$
$$= \|(2^{-2^n})^2\| = \|2^{-2^n} + 1 - 1\|^2 = \|x_n - 1\|^2.$$

Logo, a convergência é Q-quadrática com $c = 1$.

1.3 Convergência do Método de Newton

Definição 1.3.1 *A função $g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana com constante γ em um conjunto X, ou seja, $g \in Lip_\gamma(X)$, se para todos $x, y \in X$,*

$$|g(x) - g(y)| \leq \gamma |x - y|.$$

Lema 1.3.1 (Lema de Banach) *Dada uma norma arbitrária $\|.\|$ em $\mathbb{R}^n$, que denota também a norma matricial subordinada, se $\|A\| < 1$, então $(I - A)^{-1}$ existe e*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Além disso, se A é não-singular e $\|A^{-1}(B - A)\| < 1$ então, B é não-singular e

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(B - A)\|}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear contínua com $\|A\| < 1$. Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Para todo $n \geq 0$ temos $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Assim $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\|$ converge pois é majorada pela série geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A^n$, com $\|A\| \leq 1$. Logo existe uma transformação linear $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$S = I + A + A^2 + ... + A^n + ...$$

e mostraremos que $S = (I - A)^{-1}$. Com efeito,

$$S.(I-A) = \lim_{n\to\infty} (I+A+A^2+...+A^n)(I-A) = \lim_{n\to\infty} \left(I - A^{n+1}\right) = I,$$

pois $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$. De modo análogo se verifica que $(I-A).S = I$. Logo

$$\|(I-A)^{-1}\| = \lim_{n\to\infty} \|I + A + A^2 + ... + A^n\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\|I\| + \|A\| + \|A^2\| + ... + \|A^n\|\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Para mostrar a segunda desigualdade basta aplicar o resultado anterior, o que finaliza a demonstração do lema.

□

No teorema seguinte $\mathcal{B}(x_*, r)$ denotará uma bola aberta de centro x_* e raio r, isto é, $\mathcal{B}(x_*, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_*\| < r\}$.

Teorema 1.3.1 (Convergência Q-quadrática) *Seja $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável em um aberto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que existam $x_* \in \mathbb{R}^n$, $r, \beta > 0$ tais que $\mathcal{B}(x_*, r) \subset D$, $F(x_*) = 0$, e $J(x_*)^{-1}$ com $\|J(x_*)\|^{-1} \leq \beta$, e além disso $J \in Lip_\gamma\left(\mathcal{B}(x_*, r)\right)$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x_0 \in \mathcal{B}(x_*, \varepsilon)$, a seqüência $x_1, x_2, ...$ gerada por*

$$x_{n+1} = x_n - J(x_n)^{-1}F(x_n), \; n = 0, 1, ...$$

está bem definida, converge para x_* e satisfaz

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq \beta\gamma\|x_n - x_*\|^2, \; n = 0, 1, ... \; .$$

DEMONSTRAÇÃO: Escolhemos um ε tal que $J(x)$ é não singular para qualquer $x \in \mathcal{B}(x_*, \varepsilon)$, e então mostraremos que o erro local produzido por cada iteração do método de Newton é no máximo de ordem $O(\|x_n - x_*\|)^2$, e a convergência é Q-quadrática.

Seja $\varepsilon = min\{r, \frac{1}{2\beta\gamma}\}$. Mostraremos por indução sobre n que a cada passo $\|x_{n+1} - x_*\| \leq \beta\gamma\|x_n - x_*\|^2$ é satisfeito. Verificando, inicialmente, que $J(x_0)$ é não-singular temos, pelo fato de $\|x_0 - x_*\| \leq \varepsilon$, $J \in Lip_\gamma\left(\mathcal{B}(x_*, \varepsilon)\right)$ e por $\varepsilon = min\{r, \frac{1}{2\beta\gamma}\}$ que

$$\|J(x_*)^{-1}[J(x_0) - J(x_*)]\| \leq \|J(x_*)^{-1}\| \; \|J(x_0) - J(x_*)\| \leq$$

$$\leq \beta\gamma\|x_0 - x_*\| \leq \beta\gamma\varepsilon \leq \frac{1}{2}.$$

Pelo Lema de Banach, temos: $J(x_0)$ é não-singular e

$$\|J(x_0)^{-1}\| \leq \frac{\|J(x_*)^{-1}\|}{1 - \|J(x_*)^{-1}[J(x_0) - J(x_*)]\|} \leq$$

$$\leq \frac{\|J(x_*)^{-1}\|}{1-\frac{1}{2}} = 2\|J(x_*)^{-1}\| \leq 2\beta.$$

Logo x_1 está bem definida e

$$x_1 - x_* = x_0 - x_* - J(x_0)^{-1}F(x_0) = x_0 - x_* - J(x_0)^{-1}[F(x_0) - F(x_*)] =$$

$$= J(x_0)^{-1}[F(x_*) - F(x_0) - J(x_0)(x_* - x_0)].$$

Normalizando os dois lados da igualdade,

$$\|x_1 - x_*\| \leq \|J(x_0)^{-1}\| \; \|F(x_*) - F(x_0) - J(x_0)(x_* - x_0)\|$$

$$\|x_1 - x_*\| \leq 2\beta.\frac{\gamma}{2}\|x_0 - x_*\|^2 = \beta\gamma\|x_0 - x_*\|^2.$$

Portanto, a verificação para n e $n+1$ é feita de modo análogo aos passos anteriores($n = 0$).

$\square$

No teorema seguinte, $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ denotarão Espaços de Banach. Chama-se espaço de Banach a todo espaço vetorial normado e completo relativamente a essa norma.

$F : X \longrightarrow \mathbb{F}$ denotará uma aplicação analítica. Dizemos que uma aplicação é analítica quando podemos representá-la por uma série de potência que possua raio de convergência positivo.

1.4 Teorema de Smale

Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ espaços de Banach, $X \subseteq \mathbb{E}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação contínua, analítica em $int(X)$. Tome $x_0 \in int(X)$ com $Df(x_0)$ não-singular e defina

$$\gamma := \sup_{k>1} \left\| \frac{Df(x_0)^{-1}D^k f(x_0)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}.$$

Suponha que $\mathcal{B}(x_0, \frac{1}{\gamma}) \subseteq X$ e que exista $\beta \geq 0$ tal que

$$\|Df(x_0)^{-1}f(x_0)\| \leq \beta$$

e $\alpha := \beta.\gamma \leq 3 - 2\sqrt{2}$. Então a seqüência $\{x_n\}$ gerada pelo Método de Newton, para resolver $f(x) = 0$ com ponto inicial x_0

$$x_n = x_{n-1} - Df(x_{n-1})^{-1}f(x_{n-1}), \;\; n \geq 1$$

está bem definida, $\{x_n\} \subset \mathcal{B}(x_0, \frac{\tau(\alpha)}{\gamma})$ e converge para um ponto ξ, o qual é o único zero de f em $\mathcal{B}[x_0, \frac{\tau(\alpha)}{\gamma}]$, onde

$$\frac{\tau(\alpha)}{\gamma} = \left(\frac{\alpha + 1 - \sqrt{(\alpha+1)^2 - 8\alpha}}{4\gamma} \right).$$

Além disso, $\{x_n\}$ converge R-linearmente.

DEMONSTRAÇÃO: Consultar[5].

Capítulo 2

Resultados Auxiliares

Neste capítulo estão enunciados alguns Teoremas cujos resultados serão usados na demonstração do Teorema da Convergência Q-quadrática (J.Xavier e O.Ferreira). Estes resultados são puramente técnicos e as demonstrações podem ser encontradas nas referências indicadas ao longo do trabalho.

Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ espaços de Banach e $f : D_r(x_0) \longrightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação analítica onde $x_0 \in \mathbb{E}$ e $D_r(x_0) = \{x \in \mathbb{E}; \|x - x_0\| \leq r\}$. A derivada de f em $x \in D_r(x_0)$ será denotada por $Df(x)$ e $Df^k(x)$ a derivada de ordem k.

O método de Newton para resolver

$$\boxed{f(x) = 0} \tag{2.1}$$

gera a seqüência $\{x_n\}$ por um processo iterativo

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - Df(x_{n-1})^{-1} f(x_{n-1})}\ . \tag{2.2}$$

Para todo ponto $x \in D_r(x_0)$ definiremos

$$\beta(f, x) = \|Df(x)^{-1} f(x)\|$$

$$\gamma(f, x) = \sup_{k>1} \|\frac{Df(x)^{-1} D^k f(x)}{k!}\|^{\frac{1}{k-1}}. \tag{2.3}$$

$$\alpha(f, x) = \beta(f, x)\gamma(f, x).$$

Se $Df(x)^{-1}$ não existir então $\beta(f, x) = \infty$ e $\gamma(f, x) = \infty$.

Também usaremos as seguintes expressões que desempenharão um importante papel nos próximos resultados.

$$\tau(\alpha) = \frac{(1 + \alpha) - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}}{4} \quad para \quad 0 \leq \alpha \leq 3 - 2\sqrt{2} \tag{2.4}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{4}(13 - 3\sqrt{17}) \tag{2.5}$$

Definição 2.0.1 *Um ponto x_0 é chamado um* zero aproximado *de f se a seqüência $\{x_n\}$ gerada por 2.2 está bem definida e satisfaz:*

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}-1} \|x_1 - x_0\| \ \forall n \geq 1 \tag{2.6}$$

Teorema 2.0.1 *Seja $f : D_r(x_0) \longrightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação analítica, $\beta = \beta(f, x_0)$, $\gamma = \gamma(f, x_0)$ e $r \geq \frac{\tau(\alpha)}{\gamma}$. Se $\alpha \leq \alpha_0$, então os iterados de Newton $x_1, x_2, ...$ estão bem definidos, convergem para $\xi \in D_r(x_0)$ com $f(\xi) = 0$ e, para todo $n \geq 1$,*

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}-1} \|x_1 - x_0\|. \tag{2.7}$$

Além disso, $\|\xi - x_0\| \leq \frac{\tau(\alpha)}{\gamma}$, e $\|\xi - x_1\| \leq \frac{\tau(\alpha)-\alpha}{\gamma}$.

DEMONSTRAÇÃO: Consultar [4]. O teorema 2.0.1 implica em que a seqüência $\{x_n\}$ satisfaz

$$\|x_n - \xi\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \|x_1 - x_0\| k \tag{2.8}$$

onde $k = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{i-1}-1}$. A demonstração pode ser encontrada em [5], pág. 36. A inequação 2.8 significa que a seqüência $\{x_n\}$ tem convergência R-quadrática.

Agora, para cada $\beta, \gamma > 0$, definimos $h : (0, \frac{1}{\gamma}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{h_{\beta,\gamma}(t) = \beta - t + \frac{\gamma t^2}{1 - \gamma t}}. \tag{2.9}$$

Seja $\alpha = \beta\gamma$ satisfazendo $(\alpha+1)^2 - 8\alpha > 0$ ou equivalentemente $0 < \alpha < 3 - 2\sqrt{2}$. Então $h_{\beta,\gamma}$ tem duas raízes reais distintas positivas, cuja menor raiz é

$$\frac{\tau(\alpha)}{\gamma} = \frac{(1 + \alpha) - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}}{4\gamma}. \tag{2.10}$$

Observe que $h''_{\beta,\gamma}(t) = \frac{2\gamma}{(1-\gamma t)^3} > 0$ para $0 < t < \frac{1}{\gamma}$, o que implica em que $h_{\beta,\gamma}$ é convexa em $0 \leq t < \frac{1}{\gamma}$. Assim o método de Newton, para resolver $h_{\beta,\gamma}(t) = 0$ iniciando em $t_0 = 0$ gera a seqüência

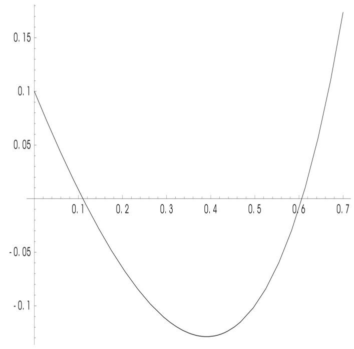

Figura 2.1: Gráfico da função $h_{\beta,\gamma}(t)$

monótona $\{t_n\}$, que converge para $\frac{\tau(\alpha)}{\gamma}$. Esta observação, será demonstrada através do teorema:

Teorema 2.0.2 *Sejam I um intervalo aberto da reta, e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, convexa e diferenciável em I. Seja $x^0 \in I$ e suponha que $x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$ pertença a I, e que exista x^* tal que $f(x^*) = 0$. Então se $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$ é a sequência gerada pelo método de Newton, vale:*

i) $f(x^k) \geq 0, \forall k \geq 1$;

ii) x^k é monótona, $k \geq 1$;

iii)x^k converge para $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.

Lema 2.0.1 *Seja I um intervalo aberto e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, convexa e diferenciável em I. Suponha que existam $x^0 < x^1$ em I tais que $f'(x^0) < 0 < f'(x^1)$. Então se x^* é um minimizador de f e $\overline{y}$ é a ordenada do ponto de encontro das retas tangentes ao gráfico de f em $(x^0, f(x^0))$ e $(x^1, f(x^1))$ então $f(x^*) \geq \overline{y}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos as retas r_0 e r_1 tangentes ao gráfico de f em $(x^0, f(x^0))$ e $(x^1, f(x^1))$, respectivamente e os pontos de intersecção destas retas com o eixo horizontal $(a, 0)$ e $(b, 0)$. Suponhamos sem perda de generalidade que $x^* = 0$ tal que $f(x^*) = 0$. Assim,

$$b = x^1 - \frac{f(x^1)}{f'(x^1)}$$

$$a = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$$

Logo,

$$0 = f(x^*) \geq f(x^1) + f'(x^1)(0 - x^1)$$
$$0 \geq f(x^1) - f'(x^1)x^1$$
$$f'(x^1)x^1 \geq f(x^1)$$
$$x^1 \geq \frac{f(x^1)}{f'(x^1)}$$
$$b = x^1 - \frac{f(x^1)}{f'(x^1)} \geq 0$$

Analogamente,

$$0 = f(x^*) \geq f(x^0) + f'(x^0)(0 - x^0)$$
$$0 \geq f(x^0) - f'(x^0)x^0$$
$$f'(x^0)x^0 \geq f(x^0)$$
$$x^0 \leq \frac{f(x^0)}{f'(x^0)},$$

pois $f'(x^0) < 0$

$$a = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} \leq 0.$$

Então $r_0 : y = f'(x^0)(x - a)$ e $r_1 : y = f'(x^1)(x - b)$.

$$f'(x^0)(x - a) = f'(x^1)(x - b)$$
$$(f'(x^1) - f'(x^0))x = f'(x^1)b - f'(x^0)a$$
$$x = \frac{f'(x^1)b - f'(x^0)a}{f'(x^1) - f'(x^0)} = \frac{f'(x^1)b - f'(x^0)b + f'(x^0)b - f'(x^0)a}{f'(x^1) - f'(x^0)}$$
$$x = \frac{(f'(x^1) - f'(x^0))b}{f'(x^1) - f'(x^0)} + \frac{f'(x^0)(b - a)}{f'(x^1) - f'(x^0)}$$
$$x = b + \frac{f'(x^0)(b - a)}{f'(x^1) - f'(x^0)}$$

Substituindo x m r_1 temos,

$$\overline{y} = f'(x^1)[b + \frac{f'(x^0)(b - a)}{f'(x^1) - f'(x^0)} - b]$$
$$\overline{y} = \frac{f'(x^1)f'(x^0)(b - a)}{f'(x^1) - f'(x^0)}.$$

Pelas hipóteses do lema temos:$f'(x^1) > 0, f'(x^0) < 0$, $(b-a) > 0$ e $(f'(x^1) - f'(x^0)) > 0$ pela monotonicidade da derivada. Portanto, $\overline{y} \leq 0 = f(x^*)$.

$\square$

Lema 2.0.2 *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa diferenciável. Se $x^0 \in I$ é tal que:*

i) $f(x^0) > 0$ e $f'(x^0) < 0$;

ii) $x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} \in I$;

iii) $f'(x^1) > 0$.

Então $f(x) > 0, \forall x \in I$.

DEMONSTRAÇÃO: Como $f'(x^0) < 0$ e $f'(x^1) > 0$ existe $x^* \in (x^0, x^1)$ tal que $f'(x^*) = 0$, portanto, x^* é minimizador de f.

$$r_0 : f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0)$$

$$r_1 : f(x^1) + f'(x^1)(x - x^1).$$

Pelo lema anterior, se $\overline{y}$ é a ordenada do ponto de intersecção então $f(x^*) \geq \overline{y}$.

$$f(x^1) + f'(x^1)(x - x^1) = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0)$$

$$f(x^1) + f'(x^1)x - f'(x^1)x^1 = f(x^0) + f'(x^0)x - f'(x^0)x^0$$

$$(f'(x^1) - f'(x^0))x = f(x^0) - f(x^1) + x^1 f'(x^1) - x^0 f'(x^0)$$

$$(f'(x^1) - f'(x^0))x = f(x^0) - f(x^1) + x^1 f'(x^1) - x^0 f'(x^1) + x^0 f'(x^1) - x^0 f'(x^0)$$

$$(f'(x^1) - f'(x^0))x = f(x^0) - f(x^1) + (x^1 - x^0) f'(x^1) + x^0 [f'(x^1) - f'(x^0)]$$

Como $x^1 - x^0 = \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$ temos,

$$x = \frac{f(x^0) - f(x^1)}{f'(x^1) - f'(x^0)} - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} \frac{f'(x^1)}{f'(x^1) - f'(x^0)} + x^0 \frac{f'(x^1) - f'(x^0)}{f'(x^1) - f'(x^0)}$$

$$x = \frac{f(x^0) - f(x^1)}{f'(x^1) - f'(x^0)} - \frac{f(x^0) f'(x^1)}{f'(x^0) f'(x^1) - f'(x^0)} + x^0$$

Substituindo em r_0 temos,

$$\overline{y} = f(x^0) + f'(x^0)[\frac{f(x^0) - f(x^1)}{f'(x^1) - f'(x^0)} - \frac{f(x^0) f'(x^1)}{f'(x^0)(f'(x^1) - f'(x^0))}]$$

$$\overline{y} = \frac{f(x^0)(f'(x^1) - f'(x^0)) + f'(x^0)(f(x^0) - f(x^1)) - f'(x^0)f'(x^1)}{f'(x^1) - f'(x^0)}$$

$$\overline{y} = \frac{f(x^0)f'(x^1) - f(x^0)f'(x^0) + f'(x^0)f(x^0) - f'(x^0)f(x^1) - f'(x^0)f'(x^1)}{f'(x^1)f'(x^0)}$$

$$\overline{y} = \frac{f(x^0)f'(x^1) - f'(x^0)f(x^1) - f'(x^0)f'(x^1)}{f'(x^1) - f'(x^0)}.$$

Pelas hipótese do lema temos:

$f(x^0) > 0, f'(x^1) > 0 \Longrightarrow f(x^0)f'(x^1) > 0.$

$f'(x^0) < 0, f(x^1) \geq 0 \Longrightarrow -f'(x^0)f(x^1) \geq 0.$

$f'(x^0) < 0, f'(x^1) > 0 \Longrightarrow -f'(x^0)f'(x^1) > 0$ e além disso, $(f'(x^1) - f'(x^0)) > 0$ pela monotonicidade da derivada.

Portanto, $\overline{y} > 0$ e $f(x^*) \geq \overline{y} > 0$.

□

Agora demonstraremos o teorema, que será feito por indução.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$. Pela convexidade da f temos, $f(x^1) \geq f(x^0) + f'(x^0)(x^1 - x^0) = f(x^0) + f'(x^0)(-\frac{f(x^0)}{f'(x^0)}) = 0$, portanto, $f(x^1) \geq 0$.

Seja $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$, $f(x^{k+1}) \geq f(x^k) + f'(x^k)(x^{k+1} - x^k)$ $= f(x^k) + f'(x^k)(-\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}) = 0 \therefore f(x^{k+1}) \geq 0$.

Mostraremos que a partir de $k = 1$, x^k é monótona:

Suponha, sem perda de generalidade, $f'(x^1) < 0$.

Suponha, por absurdo, que $f'(x^k) < 0$ e $f'(x^{k+1}) > 0$. Pelo lema acima, $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ contrariando a hipótese que existe x^* tal que $f(x^*) = 0$. Assim a derivada não muda de sinal nas iteradas do método de Newton, consequentemente, $x^{k+1} - x^k = \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \geq 0$.Como $f'(x^k) < 0$ temos $x^{k+1} - x^k \geq 0$ e a sequência é monótona.

□

2.1 O Teorema da Dominação

Teorema 2.1.1 (Da Dominação) *Sejam* $f : D_r(x_0) \longrightarrow \mathbb{F}$ *uma aplicação analítica,* $\beta = \beta(f, x_0)$, $\gamma = \gamma(f, x_0)$, $\alpha = \beta\gamma$ *e suponha*

$r \geq \frac{\tau(\alpha)}{\gamma}$ e $\alpha \leq \alpha_0$. Desse modo os valores de α e β definem $h_{\beta,\gamma}$ e a seqüência $\{t_n\}$. Então

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq t_n - t_{n-1},\ n = 1, 2, ... \tag{2.11}$$

onde $\{x_n\}$ é a seqüência newtoniana de f iniciando em x_0.

DEMONSTRAÇÃO: Consultar [4].

Na verdade o teorema da dominação vem confirmar a última sentença do teorema 2.0.1:

$$\|x_0 - \xi\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) = \frac{\tau(\alpha)}{\gamma}$$

$$\|x_1 - \xi\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) = \frac{\tau(\alpha)}{\gamma} - \beta =$$

$$= \frac{\tau(\alpha) - \beta\gamma}{\gamma} = \frac{\tau(\alpha) - \alpha}{\gamma}.$$

Logo, da equação 2.11 segue que $\|x_n - x_0\| \leq t_n,\ n = 1, 2, ...$ e isso implica em que $\{x_n\} \subset D_{\frac{\tau(\alpha)}{\gamma}}(x_0)$.

Seja

$$\psi(u) = 2u^2 - 4u + 1,\ 0 \leq u \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 \leq \psi \leq 1. \tag{2.12}$$

Lema 2.1.1 *Seja $f : D_r(x_0) \longrightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação analítica e seja $\gamma = \gamma(f, x_0)$. Se $x \in D_r(x_0)$ com $\psi(u) > 0$ onde $u = \|x - x_0\|\gamma$ então*

1. *$Df(x)$ é invertível;*
2. *$\|Df(x)^{-1}Df(x_0)\| \leq \frac{(1-u)^2}{\psi(u)}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Consultar [4].

Observe que

$$h'_{\beta,\gamma}(t) = \frac{-1 + 4\gamma t - 2\gamma^2 t^2}{(1 - \gamma t)^2}.$$

Então,

$$h'_{\beta,\gamma}(\tfrac{u}{\gamma}) = \tfrac{-1+4u-2u^2}{(1-u)^2} = -\tfrac{\psi(u)}{(1-u)^2}.$$

Logo,

$$\frac{(1-u)^2}{\psi(u)} = -\frac{1}{h'_{\beta,\gamma}(\frac{u}{\gamma})}. \tag{2.13}$$

Como $h'_{\beta,\gamma}$ é monótona crescente, então da equação 2.13 segue que, $f'(u) = \frac{\frac{1}{\gamma}h''(\frac{u}{\gamma})}{[h'(\frac{u}{\gamma})]^2} > 0$ logo $f(u) = -\frac{1}{h'(\frac{u}{\gamma})}$ é monótona crescente, consequentemente, para todo $\alpha \leq \alpha_0$, e

$$x \in D_{\frac{\tau(\alpha)}{\gamma}}(x_0) = \{x \in \mathbb{E}; \|x - x_0\| \leq \frac{\tau(\alpha)}{\gamma}\}$$

tem-se,

$$\frac{(1 - \|x - x_0\|\gamma)^2}{\psi(\|x - x_0\|\gamma)} \leq \frac{(1-\tau(\alpha))^2}{\psi(\tau(\alpha))}. \tag{2.14}$$

Capítulo 3

Convergência Q-quadrática

Neste capítulo demonstraremos que, sob as hipóteses do teorema de Smale, a seqüência $\{x_n\}$ gerada pelo método de Newton converge Q-quadraticamente e, além disso,como consequência mostraremos a taxa de convergência obtida por João Xavier e O.Ferreira.

Lema 3.0.2 *Sejam $f : D_r(x_0) \longrightarrow \mathbb{F}$ contínua, diferenciável no interior $D_r^0(x_0)$ de $D_r(x_0)$ e $Df(x_0)$ não-singular. Suponha que, para todo x,$x' \in D_r(x_0)$*

$$\|Df(x_0)^{-1}(Df(x) - Df(x'))\| \leq L\|x' - x\|$$

se $x \in D_r^0(x_0)$, $v \in \mathbb{E}$, $t \in \mathbb{R}$ e $x + tv \in D_r(x_0)$. Então

$$f(x+tv) = f(x)+tDf(x)v+R(t) \text{ com } \|Df(x_0)^{-1}R(t)\| \leq \frac{L}{2}t^2\|v\|^2.$$

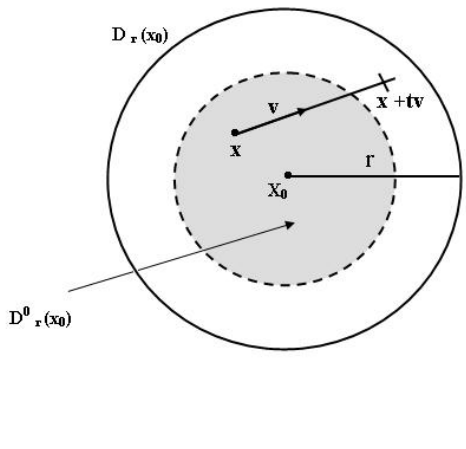

Figura 3.1: A área hachurada está contida em $D_r^0(x_0)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $R(s) = f(x+sv) - f(x) - tDf(x)v$. Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$f(x+sv)-f(x)-tDf(x)v = \left[\int_0^t Df(x+sv)vds\right] - \int_0^t Df(x)vds =$$

$$= \int_0^t \left(Df(x+sv) - Df(x)\right) vds.$$

Assim,

$$\|Df(x_0)^{-1}R(s)\| = \|Df(x_0)^{-1}(f(x+sv) - f(x) - tDf(x))\| =$$

$$= \left\| \int_0^t Df(x_0)^{-1} \left(Df(x+sv) - Df(x)\right) vds \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^t \|Df(x_0)^{-1}(Df(x+sv) - Df(x))\| \, \|v\| ds \leq$$

$$\leq \int_0^t L\|x - (x+sv)\| \, \|v\| ds \leq L\|v\|^2 \int_0^t sds \leq \frac{L}{2} t^2 \|v\|^2.$$

$\square$

Lema 3.0.3 *Sejam $f : D_r(x_0) \longrightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação analítica, $\beta = \beta(f, x_0)$, $\gamma = \gamma(f, x_0)$, $\alpha = \beta\gamma$ e $r > \frac{\tau(\alpha)}{\gamma}$. Se $\alpha \leq \alpha_0$ então, para todos $x, x' \in D_{\frac{\tau(\alpha)}{\gamma}}(x_0)$,*

$$\|Df(x_0)^{-1}(Df(x') - Df(x)\| \leq \frac{2\gamma}{(1-\tau(\alpha))^3}\|x' - x\|. \tag{3.1}$$

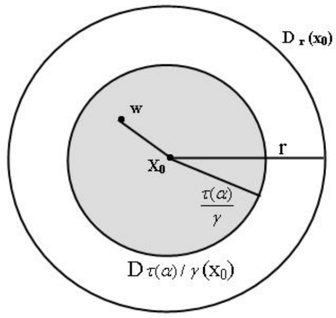

Figura 3.2: O disco interno tem raio $\frac{\tau(\alpha)}{\gamma}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Tome $w \in D_{\frac{\tau(\alpha)}{\gamma}}(x_0)$ onde $\|w - x_0\| < \frac{\tau(\alpha)}{\gamma} < r$.

$$Df(x_0)^{-1}D^2f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Df(x_0)^{-1}D^{k+2}f(x_0)(w-x_0)^k. \quad (3.2)$$

Como $\alpha \leq \alpha_0$ temos que $\gamma\|w - x_0\| < \tau(\alpha) < 1$. Assim, da equação 3.2 segue que

$$\|Df(x_0)^{-1}D^2f(w)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} Df(x_0)^{-1}D^{k+2}f(x_0)(w-x_0)^k \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)!}{k!} \left[\left\| \frac{Df(x_0)^{-1}D^{k+2}f(x_0)}{(k+2)!} \right\|^{\frac{1}{k+1}} \right]^{k+1} \|w - x_0\|^k \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)k!}{k!} \gamma^{k+1} \|w - x_0\|^k =$$

$$= \gamma \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) \left(\gamma\|w - x_0\|\right)^k =$$

$$= \frac{2\gamma}{(1 - \gamma\|w - x_0\|)^3} \leq \frac{2\gamma}{(1-\tau(\alpha))^3}.$$

Como

$$\|Df(x_0)^{-1}(Df(x) - Df(x'))\| \leq \sup_{\omega \in D_r(x_0)} \|Df(x_0)^{-1}\ D^2f(\omega)\| \|x' - x\|$$

(onde a última desigualdade decorre da desigualdade do valor médio), o que prova o lema.

□

3.1 Teorema da Convergência Q-quadrática (J.Xavier e O.Ferreira)

Teorema 3.1.1 *Sejam $f : D_r(x_0) \longrightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação analítica, $\beta = \beta(f, x_0)$, $\gamma = \gamma(f, x_0)$, $\alpha = \beta\gamma$ e $r > \frac{\tau(\alpha)}{\gamma}$. Então, se $\alpha \leq \alpha_0$, os iterados de Newton $x_1, x_2, ...$ estão bem definidos, convergem para $\xi \in D_r(x_0)$ com $f(\xi) = 0$ e existe uma constante $M = M(x_0)$ tal que $\|x_{n+1} - \xi\| \leq M\|x_n - \xi\|^2$ para todo $n \geq 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $\alpha \leq \alpha_0$ temos pelo teorema 2.0.1 que $\|x_n - x_{n-1}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}-1} \|x_1 - x_0\|$ é satisfeita. Logo x_0 é um zero aproximado de f, e a seqüência $\{x_n\}$ converge para um ξ, onde $f(\xi) = 0$. Além disso, pelo teorema da dominação, segue que $\|x_n - x_0\| \leq t_n$, implicando em que $\{x_n\} \subset D_{\frac{\tau(\alpha)}{\gamma}}(x_0)$. Portanto, pelo lema 2.1.1 (pág. 19), item 2 , e pela relação 2.14 temos

$$\|Df(x_n)^{-1}Df(x_0)\| \leq \frac{(1-\tau(\alpha))^2}{\psi(\tau(\alpha))} \tag{3.3}$$

e pelos lemas 3.0.2 e 3.0.3 temos

$$\|Df(x_0)^{-1}R_n\| \leq \frac{2\gamma}{2(1-\tau(\alpha))^3}\|x_n - \xi\|^2 \tag{3.4}$$

onde $f(\xi) = f(x_n) + Df(x_n)(\xi - x_n) + R_n$. Assim, das relações 3.3 e 3.4 e de $f(\xi) = 0$ temos

$$f(x_n) + Df(x_n)(\xi - x_n) + R_n = 0,$$

$$R_n = -f(x_n) - Df(x_n)(\xi - x_n)$$

$$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - Df(x_n)^{-1}(f(x_n) - f(\xi))$$

$$x_{n+1} - \xi = Df(x_n)^{-1}\left(Df(x_n)(x_n - \xi) - f(x_n) + f(\xi)\right)$$

$$x_{n+1} - \xi = Df(x_n)^{-1}R_n$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - \xi\| = \|Df(x_n)^{-1}R_n\| = \|Df(x_n)^{-1}Df(x_0)Df(x_0)^{-1}R_n\| \leq \\ \leq \|Df(x_n)^{-1}Df(x_0)\| \; \|Df(x_0)^{-1}R_n\| \leq \\ \leq \frac{[1-\tau(\alpha)]^2}{\psi(\tau(\alpha))}.\frac{2\gamma}{2(1-\tau(\alpha))^3}\|x_n - \xi\|^2 \leq \\ \leq \frac{\gamma}{\psi(\tau(\alpha))(1-\tau(\alpha))}.\|x_n - \xi\|^2 \leq M\|x_n - \xi\|^2\end{aligned}$$

onde $M = \frac{\gamma}{\psi(\tau(\alpha))(1-\tau(\alpha))}$.

□

Exemplo : Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x$.

Neste caso, temos $\beta = 1, \gamma = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{2}$. Com esses resultados, podemos observar que as condições dada pelo teorema 3.1.1 não estão satisfeitas, ou seja, $\alpha > \alpha_0$ logo a sequência gerada pelo

Método de Newton não converge. Isso significa que na vizinhança de um ponto x_0, mesmo tendo os parâmetros α, β e γ definidos não podemos garantir a existência de uma raiz para f.

Teorema 3.1.2 (Ostrowski) *Seja $\{x_n\}$ uma seqüência no espaço de Banach $\mathbb{E}$, convergente para ξ, tal que*

$$\|x_{n+1} - \xi\| \leq M\|x_n - \xi\|^2 \tag{3.5}$$

para todo n e uma constante positiva M. Se $\mu < \frac{1}{4}$, $M\|x_{n+1} - x_n\| < \mu$ e $M\|\xi - x_n\| \leq \frac{2}{1+\sqrt{1-4\mu}}$, então

$$\frac{2}{1+\sqrt{1+4\mu}} \leq \frac{\|\xi - x_n\|}{\|x_{n+1} - x_n\|} \leq \frac{2}{1+\sqrt{1-4\mu}}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\|x_{n+1} - \xi\| \leq M\|x_n - \xi\|^2$. Para facilitar os cálculos façamos $d_n = \|\xi - x_n\|$ e $D_n = \|x_{n+1} - x_n\|$. Assim $d_{n+1} \leq M(d_n)^2$. Agora consideremos a identidade

$$(\xi - x_n) - (x_{n+1} - x_n) = \xi - x_{n+1}$$

o que pela desigualdade triangular nos dá:

$$|\|d_n\| - \|D_n\|| \leq \|d_n - D_n\|.$$

Logo $|d_n - D_n| \leq Md_n^2$. Temos também que,

$$\left|\frac{d_n - D_n}{Md_n^2}\right| \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq \frac{d_n - D_n}{Md_n^2} \leq 1$$

Logo $d_n - D_n = \theta^* M d_n^2;\ \theta^* \in [-1, 1]$. Observe que se $\theta^* = 0$ então $d_n = D_n$. Por outro lado temos

$$\theta^* M d_n^2 - d_n + D_n = 0$$

$$\triangle = (-1)^2 - 4.\theta^* M.D_n$$

$$\triangle = 1 - 4M\theta^* D_n.$$

$$d_n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4M\theta^* D_n}}{2M\theta^*}.$$

Escolha

$$d_n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4M\theta^* D_n}}{2M\theta^*} \times \frac{1 + \sqrt{1 - 4M\theta^* D_n}}{1 + \sqrt{1 - 4M\theta^* D_n}}$$

$$d_n = \frac{1^2 - (\sqrt{1 - 4M\theta^* D_n})^2}{2M\theta^*(1 + \sqrt{1 - 4M\theta^* D_n})}$$

$$d_n = \frac{4M\theta^* D_n}{2M\theta^*(1 + \sqrt{1 - 4M\theta^* D_n})} = \frac{2D_n}{1 + \sqrt{1 - 4M\theta^* D_n}}.$$

Sabemos que $MD_n < \mu < \frac{1}{4}$. Assim $4\theta^*\mu < 4\mu$, ou seja, $-4\theta^*\mu > -4\mu$.

Logo

$$-4\theta^* MD_n > -4\theta^*\mu > -4\mu$$

$$1 - 4\theta^* MD_n > 1 - 4\theta^*\mu > 1 - 4\mu$$

$$\sqrt{1 - 4\theta^* MD_n} > \sqrt{1 - 4\mu}$$

$$1 + \sqrt{1 - 4\theta^* MD_n} > 1 + \sqrt{1 - 4\mu}$$

$$\boxed{\frac{1}{1 + \sqrt{1 - 4\theta^* MD_n}} < \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}.}$$

Por outro lado

$$MD_n < \mu$$

$$4\theta^* MD_n < 4\theta^*\mu < 4\mu.$$

Assim,

$$1 - 4\theta^* MD_n < 1 + 4\theta^* MD_n < 1 + 4\theta^*\mu < 1 + 4\mu$$

$$1 + \sqrt{1 - 4\theta^* MD_n} < 1 + \sqrt{1 + 4\mu}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{1 - 4\theta^* MD_n}} > \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 4\mu}}.$$

Portanto

$$\boxed{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\mu}} \leq \frac{d_n}{D_n} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\theta^* MD_n}} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}.}$$

e assim temos

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\mu}} \leq \frac{\|\xi - x_n\|}{\|x_{n+1} - x_n\|} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}.$$

$\square$

Lema 3.1.1 *Se* $\mu < \frac{1}{4}$ *então* $\dfrac{7\mu}{2} \leq \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}$.

DEMONSTRAÇÃ0: Observe que

$$0 \leq \mu \leq \frac{1}{4}$$

$$0 \leq 7\mu \leq \frac{7}{4}$$

e

$$-1 \leq -4\mu \leq 0.$$

$$1 - 1 \leq 1 - 4\mu \leq 0 + 1$$

$$0 \leq 1 - 4\mu \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{1 - 4\mu} \leq 1$$

$$0 \leq 1 \leq 1 + \sqrt{1 - 4\mu} \leq 2.$$

Assim

$$0 \leq 7\mu \leq 7\mu(1 + \sqrt{1 - 4\mu}) \leq \frac{7}{4}2 = 3,5 < 4.$$

Portanto

$$\frac{7\mu}{2} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}$$

□

Teorema 3.1.3 *Sejam $f : D_r(x_0) \longrightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação analítica, $\beta = \beta(f, x_0)$, $\gamma = \gamma(f, x_0)$, $\alpha = \beta\gamma$ e $r \geq \frac{\tau(\alpha)}{\gamma}$. Então se $\alpha \leq \alpha_0$, as iteradas $x_1, x_2, ...$ estão bem definidas, a seqüência por elas formada converge para $\xi \in D_r(x_0)$ com $f(\xi) = 0$ e existe uma constante $\mu \leq 0,115146$ tal que*

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\mu}} \leq \frac{\|\xi - x_n\|}{\|x_{n+1} - x_n\|} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\mu}} \tag{3.6}$$

para todo $n \geq 2$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo teorema 3.1.1 segue que $\{x_n\}$ satisfaz $\|x_{n+1} - \xi\| \leq M\|x_n - \xi\|^2$. Defina

$$\mu = \frac{\alpha_0}{8\psi(\tau(\alpha_0))(1 - \tau(\alpha_0))} \leq 0,115146 < \frac{1}{4},$$

onde τ foi definida na relação 2.4 e ψ em 2.12. Agora pela inequação 2.7 do teorema 2.0.1 temos que

$$M\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{2M\beta}{2^{2^n}} \leq \frac{\alpha}{8\psi(\tau(\alpha))(1 - \tau(\alpha))} \leq \mu.$$

Para $n > 2$, pela relação

$$\|x_n - \xi\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \|x_1 - x_0\| k \Longrightarrow \|\xi - x_n\| \leq \frac{k\beta}{2^{2^n - 1}},$$

onde $k \leq \frac{7}{4}$, e pelo lema 3.1.1 temos:

$$M\|\xi - x_n\| \leq \frac{7\alpha}{16\psi(\tau(\alpha))(1 - \tau(\alpha))} \leq \frac{7\mu}{2} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\mu}}.$$

Portanto, pelo teorema de Ostrowski vale 3.6.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] da Cruz Neto J.X.,Ferreira O.P., Q-Quadratic Convergence on Newton's Method from Data at one Point. International Journal Of Applied Mathematcs, Bulgária 2000, v.3, n.4, p.44144.

[2] Ortega J.M., and Rheimboldt W.C., *Interactive solution of nonlinear equation in several variables*,Academic Press, New York(1970).

[3] Ostrowski A.M., *Solution of equations on Euclidean and Banach spaces*, Academic Press, New York (1973).

[4] Shub M., and Smale S., *Complexity of Bezout's theorem I: Geometric aspects*, Journal of the American Mathematical Society, Vol. 6, 2(1993), 459-499.

[5] Smale S., *Newton method estimates from data at one point*, The Merging of Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics (Ewing, R. Gross, K. and Martin, C. eds.), Springer-Verlag, New York (1986), 185-196.

[6] Dennis J. E., and Schnabel R.B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1983.