

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*UM MÉTODO PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO
MULTIOBJETIVO EM AMBIENTE FUZZY*

GUSTAVO CUNHA DA SILVA NETO

MANAUS - 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

GUSTAVO CUNHA DA SILVA NETO

UM MÉTODO PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO
MULTIOBJETIVO EM AMBIENTE FUZZY

Dissertação submetida ao corpo docente da coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática, área de concentração em Otimização.

Orientador: Prof. Dr. Mário Salvatierra Júnior

Co-orientador: Prof. Dr. Sandro Dimy Barbosa Bitar

MANAUS - 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

SILVA NETO, GUSTAVO CUNHA da

Um método para solução de problemas de otimização multiobjetivo em ambiente fuzzy, Manaus, 2011.

XIII, 83 p. 21,0 cm x 29,7 cm (UFAM, M.Sc., Matemática, 2011)
Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Amazonas, UFAM

- 1 - Programação linear multiobjetivo.
- 2 - Números Fuzzy.
- 3 - Solução eficiente.
- 4 - Sistemas elétricos isolados.

I. PPGM/UFAM II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA NETO, G.C. *Um método para solução de problemas de otimização multiobjetivo em ambiente fuzzy*. Manaus, 2011. Dissertação de Mestrado. PPGM - Universidade Federal do Amazonas.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Gustavo Cunha da Silva Neto.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Um método para solução de problemas de otimização multiobjetivo em ambiente fuzzy

GRAU/ANO: Mestre em Matemática/2011

É concedida à Universidade Federal do Amazonas a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação, e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem sua autorização por escrito.

Gustavo Cunha da Silva Neto
Rua Benjamin Constant, N°154
Petrópolis
CEP: 69063-010 - Manaus/AM
e-mail: *gustavo_csn@hotmail.com*

UM MÉTODO PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO
MULTIOBJETIVO EM AMBIENTE FUZZY.

GUSTAVO CUNHA DA SILVA NETO

Dissertação submetida ao corpo docente da coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática, área de concentração em Otimização.

Aprovada por:

Prof. Dr. Mário Salvatierra Júnior
Orientador - UFAM

Prof. Dr. Sandro Dimy Barbosa Bitar
Co-orientador - UFAM

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Membro - UFAM

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
Membro - UFABC

MANAUS, 02 DE SETEMBRO DE 2011.

Ao meu pai,
Antonio Augusto (*in memoriam*),
Dedico.

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, por me permitir alcançar mais um passo em minha vida.

A meu pai, Antonio (*in memoriam*), por ter-me ensinado, além de outras coisas, a importância do caráter e da honestidade para ser um verdadeiro homem. Meu Amigo, meu Exemplo, meu Pai, muito obrigado por tudo! Farei o impossível para deixá-lo cada vez mais orgulhoso. Que Deus te guarde!

À minha mãe, Francisca e ao meu irmão, Augusto, por terem sido verdadeiros pilares de sustentação, pessoas estas que tenho enorme amor, carinho e admiração.

À Daniella Reis, pelo apoio, cuidado, carinho e amor que me tens dado, sendo uma verdadeira companheira em todos os momentos.

A meu orientador, Prof. Mário Salvatierra Júnior e a meu co-orientador, Prof. Sandro Dimy Barbosa Bitar pelas excelentes orientações e confiança depositada em mim para realização deste trabalho. Quero agradecer também, pelos conselhos e pelo apoio dado num dos momentos mais difíceis de minha vida. Além de orientadores, vocês foram verdadeiros amigos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGM) da Universidade Federal do Amazonas, por possibilitar o desenvolvimento deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES*, pelo suporte financeiro para realização deste trabalho.

*O aluno foi bolsista da FAPEAM no 1º ano do curso de mestrado, tendo sua bolsa transferida para CAPES no 2º ano.

A meu amigo Filipe Misturini, pela amizade e pela ajuda na escrita deste trabalho.

A todos meus amigos do curso de mestrado em Matemática da UFAM, pelos momentos difíceis e de confraternização que passamos. Em especial para os amigos Emerson, Manoel Ricardo e Yashi, por suas amizades e por estarem sempre à disposição quando precisei de ajuda. Essa vitória também é de vocês!

À Prof. Flávia Morgana pela confiança depositada no início de minha jornada nesse curso.

Aos Professores Marcus Marrocos, Valtemir Cabral e Roberto Prata, pelo tempo dispensado às discussões técnicas essenciais para o desenvolvimento do trabalho.

À Prof. Karla Tribuzy, pela ajuda de grande importância para realização de minha defesa.

Ao Prof. Nilomar Vieira e ao Prof. Rodney Bassanezi, pelas considerações feitas ao trabalho e pelas presenças em minha banca de defesa de dissertação.

A todos amigos (Professores) do Departamento de Matemática da UFAM, pelo apoio dado nessa caminhada.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

*"Se você quer ser bem sucedido, precisa ter dedicação total,
buscar seu último limite e dar o melhor de si."*

(Ayrton Senna)

Resumo

Neste trabalho apresenta-se um modelo para solução de problemas de programação linear multiobjetivo baseado no cálculo da distância mínima fuzzy. Os fundamentos teóricos discorrem sobre alguns elementos de lógica fuzzy bem como elementos de otimização multiobjetivo crisp necessários para formulação do modelo. Além disso, apresentam-se alguns métodos multiobjetivo clássicos que são classificados em três tipos: à Priori, à Posteriori e Interativos. A partir destes elementos, formula-se o método para encontrar uma solução eficiente a partir da distância mínima fuzzy, obtida através de um subproblema calculado com base na métrica L_1 . Ao final, faz-se um estudo de caso no contexto do planejamento energético de sistemas elétricos isolados sobre o qual se analisa a inclusão do biodiesel como insumo para geração de energia elétrica levando em consideração os valores do custo global para geração e número de empregos diretos promovidos com a utilização dessa tecnologia. Além disso, avalia-se, a partir dos valores obtidos, o impacto ambiental representado aqui pela emissão de dióxido de carbono com a utilização dos respectivos insumos.

Palavras-chave: Programação linear multiobjetivo. Números Fuzzy. Solução eficiente. Sistemas elétricos isolados.

Abstract

This paper presents a model for solving multiobjective linear programming problems based on the calculation of the minimum fuzzy distance. The theoretical principles outline some elements of the fuzzy logic as well as crisp multiobjective optimization elements needed for the formulation of the model. Moreover, some classical multiobjective methods are presented and classified in three types: a priori, a posteriori and interactive. From these elements we formulate the method for finding an efficient solution from the minimal fuzzy distance, obtained through a subproblem which is calculated based on the L_1 metric. At the end, a study case is done in the context of energy planning in isolated electric systems in which we analyze the inclusion of biodiesel as input for electricity generation taking into account the values of the overall cost for generation and number of direct jobs promoted using this technology. In addition, we evaluate, from the values obtained, the environmental impact represented here by the emission of carbon dioxide with the use of their inputs.

Keywords: Multiobjective Linear Programming. Fuzzy Numbers. Efficient solution. Isolated Electric Systems.

Sumário

Introdução	1
O problema e sua importância	1
Objetivos	3
Objetivo geral	3
Objetivos específicos	4
Descrição da dissertação	4
1 Elementos de Lógica Fuzzy	5
1.1 Subconjuntos Fuzzy	5
1.2 Números Fuzzy	8
1.3 Aritmética dos Números Fuzzy	11
2 Elementos de Otimização Multiobjetivo	14
2.1 Problema de otimização multiobjetivo	15
2.2 Pareto-otimalidade	15
2.3 Alguns métodos para solução de Problemas de Otimização Multiobjetivo	21
2.3.1 Métodos à Priori	22
2.3.1.1 Método Lexicográfico	22
2.3.1.2 Método da Função Utilidade (<i>Value Function Method</i>)	24
2.3.1.3 Métodos baseados em limitantes	25
2.3.1.4 Programação por Metas	26
2.3.2 Métodos à Posteriori	28

2.3.2.1	Método das ponderações	29
2.3.2.2	Método das ε -restrições	30
2.3.2.3	Método Simplex multiobjetivo	30
2.3.3	Métodos iterativos	31
2.3.3.1	Método de Geoffrion, Dyer e Feinberg	32
3	Programação Linear Multiobjetivo Fuzzy	34
3.1	Valor Fuzzy	35
3.2	Ambiguidade de um número Fuzzy	37
3.3	Incerteza (<i>Fuzziness</i>)	41
3.4	Função de classificação para Números Fuzzy	42
3.5	Programação Linear com função objetivo Fuzzy	43
3.6	Programação Linear Multiobjetivo Fuzzy	47
3.6.1	Definição do problema	48
3.6.2	Solução baseada na minimização da distância Fuzzy	49
3.6.3	Modelo para obtenção do vetor de decisão ótimo	59
3.6.4	Algoritmo para Solução do Problema de PLMO Fuzzy	64
4	Aplicação	65
4.1	Sistema elétrico brasileiro	65
4.2	Insumos energéticos para os sistemas isolados	67
4.3	Considerações sobre o local de estudo (Itacoatiara-AM)	68
4.4	Montagem das Funções Objetivo e Restrições	69
4.4.1	Insumo Diesel	70
4.4.2	Insumo biodiesel	71
4.5	Obtenção das soluções e análise dos resultados	73
4.5.1	Análise dos resultados	74

Considerações finais	78
Conclusão	78
Sugestões para trabalhos futuros	79
Referências Bibliográficas	80

Lista de Figuras

1.1.1	Altura e suporte de um subconjunto Fuzzy	7
1.1.2	Representação gráfica para o α -nível de um número Fuzzy	8
1.2.3	Número Fuzzy Triangular	9
2.2.1	Pareto Dominância no espaço de objetivos. Fonte: Arroyo (2002)	17
2.2.2	Representação para o Ponto Ideal para o caso $m = 2$	21
3.1.1	Números Fuzzy $\tilde{U} = (-1, 0, 1)$ e $\tilde{W} = (2, 3, 4)$	36
3.1.2	Números Fuzzy $\tilde{M} = (1, 4, 7)$ e $\tilde{N} = (0, 5, 6)$	37
3.2.3	Números Fuzzy $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$	40
3.6.4	Determinação $r_{\tilde{f}_j}$ para as funções de minimização.	50
4.3.1	Esquema básico para cadeia de produção de energia. Fonte: Bitar (2009) . . .	68

Lista de Tabelas

4.1	Dados utilizados na confecção dos modelos matemáticos. Fonte: Bitar (2009) .	69
4.3	Conjuntos α -níveis da função custo total (US\$) para variações nas demandas (Diesel).	75
4.4	Conjuntos α -níveis da função custo total (US\$) para variações nas demandas (Biodiesel).	75
4.5	α -níveis do custo unitário (US\$ / MWh) para variações nas demandas (Diesel).	75
4.6	α -níveis do custo unitário (US\$ / MWh) para variações nas demandas (Biodiesel).	76
4.7	α -níveis do número de postos de trabalho (Emp./ MWh) para variações nas demandas (Diesel).	76
4.8	α -níveis do número de postos de trabalho (Emp./ MWh) para variações nas demandas (Biodiesel).	76
4.9	Emissão de CO_2	76
4.10	Valores obtidos para as variáveis de decisão para o Diesel (Energia em MWh).	76
4.11	Valores obtidos para as variáveis de decisão para o Biodiesel (Energia em MWh).	77
4.12	Percentual de utilização da capacidade instalada de cada unidade.	77

Introdução

O problema e sua importância

Em muitas situações, é necessário tomar uma decisão dentre algumas alternativas disponíveis. Essa decisão, na maioria dos casos, é fundamentada numa série de acontecimentos anteriores a essa situação. Por exemplo, no âmbito industrial, muitas vezes, as decisões são baseadas no empirismo do grupo de gestão. Nesse caso, a decisão pode até ser satisfatória em um determinado sentido, mas ainda assim pode ser possível uma melhoria nesse grau de satisfação. Para isso, se fazem necessários os métodos de otimização matemática.

Para o uso desses métodos é preciso modelar matematicamente o que acontece na realidade de forma mais fiel possível, ou seja, modelar matematicamente o critério a ser utilizado e em que ambiente (conjunto de alternativas possíveis) a maximização (ou minimização) desse objetivo pode ocorrer. A alternativa ótima ou melhor política é, na teoria, aquela que está associada aos valores ótimos para as funções objetivo utilizadas no modelo de otimização. Ao modelo de otimização cuja função objetivo é um funcional linear e conjunto factível formado por restrições também lineares é chamado de programação linear (PL).

Com essa naturalidade em traduzir esses contextos, a otimização se torna aplicável a várias áreas do conhecimento e auxilia na solução de vários problemas reais, como por exemplo, na solução de determinados problemas de ordem estratégica e tática como a que aconteceu na segunda guerra mundial, onde se usou pela primeira vez a expressão Pesquisa Operacional (PO) e que veio a se tornar um importante campo de análise de decisão. Segundo Silva

(2009), a PO forneceu uma base quantitativa e racional para as decisões tomadas. De fato, ela tem o objetivo de desenvolver técnicas para otimizar o desempenho de sistemas que podem ser econômicos, militares, fabris, entre outros.

Segundo Andrade (2009), a pesquisa operacional tem duas características importantes. A primeira é chamada "enfoque sistêmico", pois ultrapassa os limites da cultura do especialista que costumava a usar somente sua experiência; a segunda, a qual facilita o processo de análise de decisão, é a utilização de modelos, ou seja, permite a possibilidade de simulação, consequentemente uma melhor avaliação antes da alternativa escolhida ser efetivamente implementada. Andrade (2009) diz ainda que por si só, a economia de recursos e a experiência adquirida com a experimentação justificam o conhecimento e a utilização da Pesquisa Operacional como instrumento de gerência.

Muitas vezes, deseja-se atingir vários objetivos ao mesmo tempo. Por exemplo, numa determinada empresa é desejado maximizar seu lucro mensal e também reduzir ao máximo (minimizar) seu consumo de energia elétrica mensal. É possível que, nesse caso, que a decisão ótima para o lucro máximo entre em conflito com a decisão para o consumo mínimo, vistas de forma individual. A esse tipo de problema, dá-se o nome de problema multiobjetivo (ou de objetivos múltiplos). Se tanto os objetivos quanto as restrições são lineares, o problema será chamado de programação linear multiobjetivo (PLMO). No PLMO pode-se ter funções com diferentes graus de importância e, com isso, é preciso que o modelo de alguma forma traduza esse grau de importância e o mais comum a se fazer é ponderar ("dar pesos") para cada função objetivo. Quem determina esse grau de importância, claro, é o tomador de decisão.

Pela essência do PLMO percebe-se que é uma excelente ferramenta para otimização de problemas reais, mesmo exigindo que tanto a função objetivo quanto a região viável - que também pode ser chamada de conjunto de restrições - do problema sejam lineares. Vale ressaltar, porém, que os coeficientes das funções objetivo são fixos, o que em muitos casos não corresponde à realidade. Muitas vezes há imprecisões nesses parâmetros e se faz necessário de

alguma forma torná-los flexíveis de forma que contemple tais incertezas. Rommelfanger (1996 apud GANDOLPHO, 2005) diz que a teoria dos conjuntos Fuzzy oferece uma poderosa forma de modelar a incerteza dos dados sem necessidade de recorrer aos conceitos estocásticos, ou seja, aqueles que os coeficientes tem representação probabilística. Desta forma, a teoria dos conjuntos Fuzzy torna-se uma considerável ferramenta para PLMO's que contenham incertezas.

Para contemplar essa flexibilização, vários modelos de programação linear Fuzzy foram propostos como, por exemplo, os encontrados em Jimenez e Terol (2009), Arenas *et al* (2005), Bector e Chandra (2005).

Nesta dissertação abordar-se-á um método para solução de PLMO em que os coeficientes das funções objetivos são números fuzzy. A solução é encontrada a partir da minimização da distância fuzzy para um ponto "ideal" na métrica L_1 (TEROL, 2008). A partir desse método, será feito um estudo de caso no contexto do planejamento energético de sistemas elétricos isolados em uma cidade do interior do Amazonas. Basicamente, serão criados cenários de aumento de demanda com intuito de avaliar as variáveis de decisão para minimização do custo e maximização de geração de empregos diretos (impacto social), concluindo com uma análise sobre a emissão de CO_2 com o uso da tecnologia de geração de energia utilizada.

Objetivos

Objetivo geral

Apresentar um método de otimização para problemas de programação linear multiobjetivo em ambiente fuzzy.

Objetivos específicos

Este trabalho têm alguns objetivos específicos, tais como, destacar elementos da lógica fuzzy e da otimização multiobjetivo necessários para descrição do modelo matemático investigado. Um outro objetivo é apresentar um método para resolver problemas de programação linear fuzzy (custos fuzzy).

Além disso, pretende-se aplicar o método de otimização multiobjetivo fuzzy, tema desta dissertação, na avaliação do custo total com a geração de energia, impacto social e ambiental cujos cenários são simulados com base na variação do consumo de energia em sistemas elétricos isolados. Outros objetivos particulares estão relacionados à análise das soluções obtidas.

Descrição da dissertação

Esta dissertação está organizada em quatro capítulos. O capítulo 1 trata de alguns elementos de Lógica Fuzzy importantes para fundamentação teórica. No capítulo 2 são apresentados alguns tópicos bem como métodos clássicos da otimização multiobjetivo crisp. Já no capítulo 3 apresenta-se o modelo de programação linear multiobjetivo fuzzy e sua solução baseada no cálculo da distância mínima fuzzy. No capítulo 4, aplica-se tal modelo no contexto do planejamento energético de sistemas elétricos isolados além das respectivas análises dos resultados obtidos. Finalmente, algumas considerações finais são feitas juntamente com perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Elementos de Lógica Fuzzy

Na maioria dos fenômenos modelados matematicamente surgem dados imprecisos, muitas vezes aproximados por números reais, o que causa certa "*rigidez*" no modelo, muitas vezes desnecessária. A Teoria dos Conjuntos Fuzzy, introduzida por Lotfi Asker Zadeh em 1965, surge como uma excelente alternativa para modelagem desses problemas. Segundo Barros e Bassanezi (2006), a principal intenção dessa teoria é dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, como "*aproximadamente*", "*em torno de*", dentre outros. Fato este que acarreta uma maior fidelidade no armazenamento e na programação de conceitos imprecisos no computador, tornando possível a operação com números que contenham incertezas incorporadas.

Este capítulo tem a finalidade de fornecer os elementos necessários sobre a teoria dos conjuntos Fuzzy para sustentação do modelo de otimização multiobjetivo dissertado neste trabalho.

1.1 Subconjuntos Fuzzy

A teoria clássica dos conjuntos baseia-se na lógica aristotélica a qual tem como princípios centrais a lei da não contradição e a do terceiro excluído. Sobre esse, o conceito de pertinência fica bem definido (maiores informações podem ser encontradas em Cane (1959), Sousa (2007)).

Segundo Barros e Bassanezi (2006), Zadeh, para obter a formalização matemática de um conjunto fuzzy, baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado pela sua *função característica*, conforme definição abaixo:

Definição 1.1.1 *Seja $N \subset U$ um subconjunto do universo U (clássico). A função característica de N , $\mu_N(x) : U \longrightarrow \{0, 1\}$, é dada por:*

$$\mu_N(x) = \begin{cases} 1, & x \in N \\ 0, & x \notin N \end{cases} \quad (1.1)$$

Zadeh (1965) propõe uma extensão para essa função característica, de modo que um elemento poderia ter um grau de pertinência entre 0 e 1, ou seja, assumindo infinitos valores no intervalo $[0, 1]$.

Definição 1.1.2 *Um subconjunto fuzzy N de um conjunto clássico U ($N \subset U$) é caracterizado pela função*

$$\mu_N(x) : U \longrightarrow [0, 1] \quad (1.2)$$

chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy N .

Ao verificar a Definição 1.1.2, percebe-se que se trata de uma extensão da função característica vista em (1.1) em que o contra-domínio da função é modificado de $\{0, 1\}$ para o intervalo $[0, 1]$, ou seja, faz sentido falar de "grau de pertinência" dos elementos do subconjunto N , o que não acontecia nos conjuntos clássicos. Vale ressaltar que os conjuntos clássicos são, na teoria Fuzzy, chamados de *crisp*. É comum escrever o subconjunto N como um conjunto clássico formado pelos pares ordenados: $N = \{(x, \mu_N(x)) / x \in U\}$.

Definição 1.1.3 *Sejam N e M subconjuntos fuzzy de U . Sejam $\mu_N(x)$, $\mu_M(x)$ as respectivas funções de pertinência. Diz-se que N e M são iguais se $\mu_N(x) = \mu_M(x) \forall x \in U$.*

Definição 1.1.4 (Complementar de subconjunto fuzzy) *O complementar de um subconjunto N , denotado por N' , num conjunto universo clássico U é aquele que tem sua função de pertinência dada por:*

$$\mu_{N'}(x) = 1 - \mu_N(x), \quad \forall x \in U . \quad (1.3)$$

Definição 1.1.5 *Seja N um subconjunto fuzzy de U . O suporte de N , denotado $Supp(N)$ é um conjunto crisp dado por:*

$$Supp(N) = \{x \in U \mid \mu_N(x) > 0\} . \quad (1.4)$$

Definição 1.1.6 *Seja $N \subset U$ um subconjunto fuzzy. A altura $h(N)$ de N é definida como*

$$h(N) = \max_{x \in U} \mu_N(x) \quad (1.5)$$

Se $h(N) = 1$, A é dito subconjunto normal. Caso contrário, será chamado subnormal.

É fácil ver que, se A é subnormal, então pode-se definir outro conjunto fuzzy com função de pertinência definida por $\frac{\mu_N(x)}{h(N)}$ e então esse novo conjunto será normal.

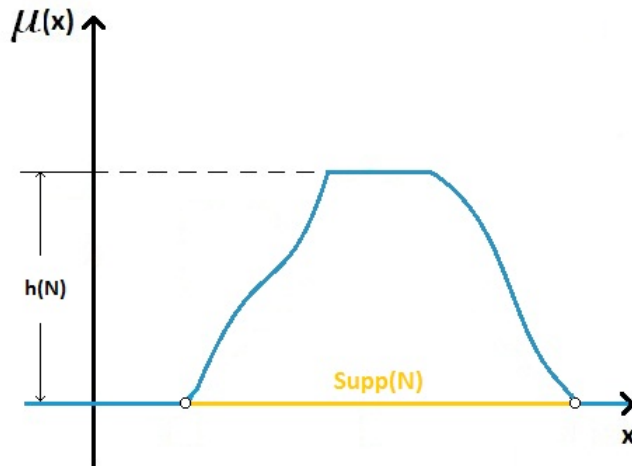


Figura 1.1.1: Altura e suporte de um subconjunto Fuzzy

Definição 1.1.7 (α -nível) *Seja $\alpha \in [0,1]$ e $N \subset U$ um subconjunto fuzzy. O conjunto α -nível (ou α -corte) de N é um conjunto crisp dado por:*

$$[N]_\alpha = \{x \in U \mid \mu_N(x) \geq \alpha\}, \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (1.6)$$

$$[N]_0 = \overline{Supp(N)}, \quad (\alpha = 0)$$

Em que $[N]_0$ é o fecho do suporte de N representado por $\overline{Supp(N)}$.

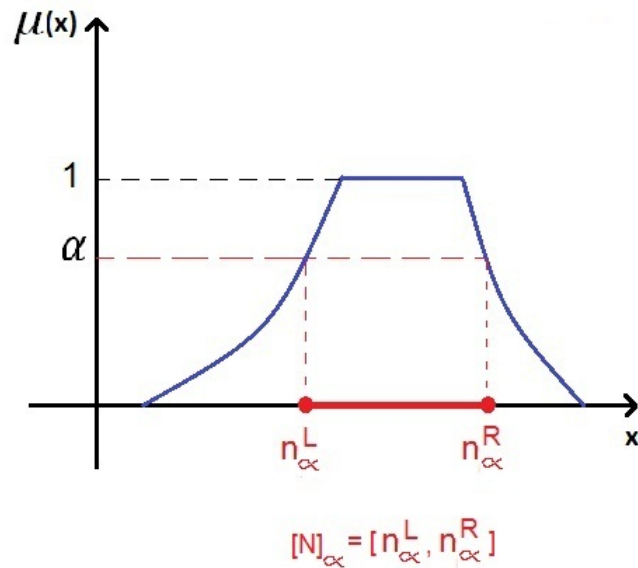


Figura 1.1.2: Representação gráfica para o α -nível de um número Fuzzy

1.2 Números Fuzzy

Nesta seção apresenta-se a definição de número fuzzy assim como os principais teoremas relacionados à teoria. Os números fuzzy são usados na modelagem matemática de termos linguísticos ou expressões como "números próximos de", utilizados muitas vezes no âmbito da tomada de decisão. Um dos requisitos para que esse conjunto seja um número fuzzy é que seu universo seja \mathbb{R} . A seguir, apresentam-se as definições e resultados que ajudam na compreensão e relacionamento com o estudo da matemática intervalar.

Definição 1.2.1 (Bector e Chambra (2005)) *Um subconjunto fuzzy \tilde{N} em \mathbb{R} é chamado número fuzzy se satisfaz as seguintes condições:*

- a) \tilde{N} é normal;
- b) $[\tilde{N}]_\alpha$ é um intervalo fechado para todo $\alpha \in (0, 1]$;

c) O suporte de \tilde{N} é limitado.

Exemplo 1.2.1 (Número Fuzzy Triangular) Um número fuzzy triangular pode ser representado na forma $\tilde{N} = (a, b, c)$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ são números distintos e cuja função de pertinência é definida por:

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & b < x \leq c \\ 0, & x < a \text{ ou } x > c \end{cases} \quad (1.7)$$

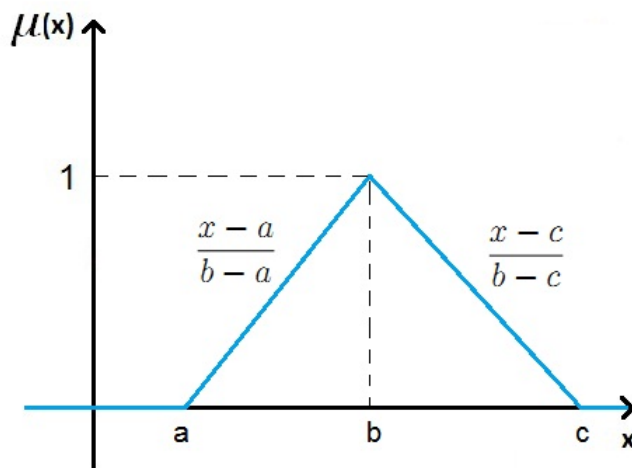


Figura 1.2.3: Número Fuzzy Triangular

Um cálculo simples demonstra que seu conjunto α -nível é representado pelo intervalo fechado:

$$[n_{\alpha}^L, n_{\alpha}^R] = [(b-a)\alpha + a, (b-c)\alpha + c]. \quad (1.8)$$

Exemplo 1.2.2 (Singleton) É possível associar um número crisp r a um número fuzzy \tilde{N} com função de pertinência dada por $\mu_{\tilde{N}}(x) = 1$ para $x = r$ e $\mu_{\tilde{N}}(x) = 0$ para $x \neq r$. Esse número é chamado de **singleton** e representado por $\{r\}$ ou simplesmente por r . Seu α -nível pode ser escrito, para fins de cálculo, como $[r, r]$.

Neste trabalho, a notação N_α será utilizada para o α -nível de um subconjunto fuzzy N . $[\tilde{N}]_\alpha = [n_\alpha^L, n_\alpha^R]$ será usada para a representação do conjunto α -nível de um número fuzzy \tilde{N} . Existem várias formas para se definir um número fuzzy, como, por exemplo, a encontrada em Terol (2008). Uma maneira de caracterizar um número fuzzy é utilizando o Teorema da Representação, enunciado a seguir.

Teorema 1.2.1 (Teorema da Representação) *Um número fuzzy \tilde{N} pode ser representado (ou decomposto) por uma série de α -níveis da seguinte forma:*

$$\tilde{N} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha[\tilde{N}]_\alpha) \quad (1.9)$$

Uma prova da generalização desse teorema pode ser encontrada em Ralescu (1992).

O uso dos conjuntos α -níveis de um número fuzzy ao invés da sua função de pertinência apresenta-se como uma alternativa muito conveniente com o resultado do Teorema 1.2.1. No âmbito computacional, por exemplo, é preciso trabalhar com dados numéricos, então se torna mais econômico (computacionalmente) trabalhar com os dados dos α -níveis, representados pelos seus extremos (limites inferior e superior do intervalo real) do que trabalhar diretamente com a função de pertinência. Neste trabalho, os cálculos dos números fuzzy necessários para o desenvolvimento do método de otimização são feitos a partir dos α -níveis, garantidos pelo Teorema da Representação.

Como o conjunto α -corte de um número fuzzy é um intervalo real fechado (Ver Definições (1.1.7), (1.2.1)), as operações entre números fuzzy podem ser simplesmente feitas entre seus respectivos níveis, o que incidirá na chamada aritmética intervalar (maiores informações podem ser encontradas em Diverio (1995) e Oliveira *et al* (1997)).

Partindo desse pressuposto, abaixo seguem-se algumas operações e resultados com números fuzzy a partir de seus α -cortes:

Teorema 1.2.2 (Igualdade de números fuzzy a partir dos α -níveis) *Dois números fuzzy \tilde{N} e \tilde{M} são iguais se, e somente se $[\tilde{N}]_\alpha = [\tilde{M}]_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Prova: Suponha que $[\tilde{N}]_\alpha = [\tilde{M}]_\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$. Se $\tilde{N} \neq \tilde{M}$, então, pela Definição 1.1.3, existe $w \in \mathbb{R}$ (conjunto universo), tal que o valor das funções de pertinência não coincidem.

Suponha $\mu_{\tilde{N}}(w) < \mu_{\tilde{M}}(w)$. Isto quer dizer que $w \in [\tilde{N}]_{\alpha=\mu_{\tilde{N}}(w)}$ e $w \notin [\tilde{M}]_{\alpha=\mu_{\tilde{N}}(w)}$, o que é absurdo, pois $[\tilde{N}]_\alpha = [\tilde{M}]_\alpha \forall \alpha \in [0, 1]$, por hipótese. Similarmente analisa-se o caso $\mu_{\tilde{N}}(w) > \mu_{\tilde{M}}(w)$.

É óbvio que, se $\tilde{N} = \tilde{M} \Rightarrow [\tilde{N}]_\alpha = [\tilde{M}]_\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$. Logo, a prova está concluída. ■

1.3 Aritmética dos Números Fuzzy

A abordagem utilizada aqui para operações entre números fuzzy é baseada no Teorema da Representação (Teorema 1.2.1) utilizando os respectivos α -níveis, idéia esta introduzida na seção anterior.

Considere dois números fuzzy \tilde{N}, \tilde{M} e seus respectivos α -níveis $[n_\alpha^L, n_\alpha^R]$ e $[m_\alpha^L, m_\alpha^R]$. Seja " $*$ " uma operação aritmética entre números fuzzy. Então, tem-se a seguinte definição:

Definição 1.3.1 (Bector e Chambrá (2005)) *Sejam $\tilde{N}, \tilde{M}, [\tilde{N}]_\alpha$ e $[\tilde{M}]_\alpha$ conforme já definido. Então, a operação $(*)$ realizada sobre os números fuzzy \tilde{N} e \tilde{M} , denotada por $\tilde{N} * \tilde{M}$ tem como resultado um número fuzzy em \mathbb{R} em que:*

$$\tilde{N} * \tilde{M} = \bigcup_{\alpha} \alpha(\tilde{N} * \tilde{M})_{\alpha} \quad e \tag{1.10}$$

$$(\tilde{N} * \tilde{M})_{\alpha} = [\tilde{N}]_{\alpha} * [\tilde{M}]_{\alpha}$$

Bector e Chambrá (2005) ressaltam que o motivo da operação $\tilde{N} * \tilde{M}$ resultar em um número fuzzy - não um conjunto fuzzy simplesmente - é que sendo \tilde{N} e \tilde{M} números fuzzy

os conjuntos $[\tilde{N}]_\alpha$, $[\tilde{M}]_\alpha$ e $(\tilde{N} * \tilde{M})_\alpha$ são todos intervalos fechados para $\alpha \in (0, 1]$, além de satisfazerem os outros itens da Definição (1.2.1). Além disso, para um dado $\alpha \in (0, 1]$, o intervalo fechado $(\tilde{N} * \tilde{M})_\alpha$ pode ser calculado através da aritmética intervalar nos intervalos fechados $[\tilde{N}]_\alpha$ e $[\tilde{M}]_\alpha$ com respeito à operação $(*)$.

Para efeito de operações com números fuzzy através dos α -níveis, têm-se:

Propriedade 1.3.1 (Operações com números fuzzy a partir dos α -níveis) *Sejam*

$k \in \mathbb{R}$, $[\tilde{N}]_\alpha = [n_\alpha^L, n_\alpha^R]$ e $[\tilde{M}]_\alpha = [m_\alpha^L, m_\alpha^R]$ α -níveis dos números fuzzy \tilde{N} e \tilde{M} , respectivamente. Então:

$$P1-) [\tilde{N}]_\alpha + [\tilde{M}]_\alpha = [n_\alpha^L + m_\alpha^L, n_\alpha^R + m_\alpha^R];$$

$$P2-) k[\tilde{N}]_\alpha = [kn_\alpha^R, kn_\alpha^L] \text{ se } k < 0 \text{ e } k[\tilde{N}]_\alpha = [kn_\alpha^L, kn_\alpha^R] \text{ se } k \geq 0;$$

$$P3-) [\tilde{N}]_\alpha - [\tilde{M}]_\alpha = [n_\alpha^L - m_\alpha^R, n_\alpha^R - m_\alpha^L].$$

Exemplo 1.3.1 *Sejam os números triangulares $\tilde{A} = (1, 2, 3)$ e $\tilde{B} = (6, 9, 11)$. Utilizando (1.8), seus respectivos α -níveis são $[\tilde{A}]_\alpha = [\alpha + 1, -\alpha + 3]$, $[\tilde{B}]_\alpha = [3\alpha + 6, -2\alpha + 11]$. Além disso, tem-se:*

* Para o cálculo de $\tilde{A} + \tilde{B}$, aplica-se o item P1 da Propriedade 1.3.1 nos α -níveis de \tilde{A} e \tilde{B} , isto é, $[\tilde{A}]_\alpha + [\tilde{B}]_\alpha = [4\alpha + 7, -3\alpha + 14]$. Observando a equação (1.8), verifica-se que tal resultado corresponde ao α -nível do número triangular $(7, 11, 14)$.

* Utilizando do mesmo raciocínio, tem-se que $\tilde{B} - \tilde{A} = (3, 7, 10)$. Lembrando que $[\tilde{B}]_\alpha - [\tilde{A}]_\alpha = [4\alpha + 3, -3\alpha + 10]$

* $-\tilde{A} = (-3, -2, -1)$. Aplicando P1 nos α -níveis: $-[\tilde{A}]_\alpha = [\alpha - 3, -\alpha - 1]$

Com essa idéia, pode-se mostrar que dados dois números triangulares quaisquer $\tilde{N} = (a, b, c)$ e $\tilde{M} = (d, e, f)$, $\tilde{N} + \tilde{M} = (a + d, b + e, c + f)$, $\tilde{M} - \tilde{N} = (d - c, e - b, f - a)$ e $-\tilde{N} = (-c, -b, -a)$ e assim resultam em números triangulares.

Capítulo 2

Elementos de Otimização Multiobjetivo

Os primórdios da teoria de otimização multiobjetivo vêm de deduções do engenheiro italiano Vilfredo Pareto (1848-1923) em *Cours d'économie politique* (1896-97). Nesta obra, dentre outros itens, estudava-se sobre um estágio que otimizava o bem-estar de uma sociedade. Esse estágio, segundo Pareto (1996), pode ser entendido, no contexto da economia, como aquele em que o bem-estar de uma sociedade é máximo se não existe outro estado tal que seja possível aumentar o bem-estar de um indivíduo sem diminuir o bem-estar dos demais; isto é, não há forma de melhorar a situação de um, sem prejudicar a situação dos outros. A esse conceito dá-se o nome *ótimo de Pareto* e ele é de fundamental importância para o estudo da programação multiobjetivo.

O estudo de problemas de otimização tornou-se aplicável a várias áreas do conhecimento e auxilia na solução de vários problemas práticos, como os processos de decisão que envolvem a consideração de determinado número de objetivos conflitantes entre si. A solução de tais problemas tem sido motivo de investigação dentro da comunidade científica.

Devido a importância de seu estudo, neste capítulo apresenta-se os elementos de programação matemática necessários para o desenvolvimento do modelo de otimização multiobjetivo dissertado neste trabalho.

2.1 Problema de otimização multiobjetivo

Um problema de Programação Multiobjetivo tem como objetivo encontrar um vetor de variáveis de decisão que esteja de acordo com suas restrições otimizando uma função vetorial que agrega várias funções, muitas vezes conflitantes. O modelo geral de otimização multiobjetivo pode ser formulado como segue.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{s. a.} \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Em (2.1), $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Os vetores $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$ encontram-se num espaço vetorial chamado espaço de objetivos, denotado por $Y = f(X) \subset \mathbb{R}^m$ e X denota o espaço de decisões ou espaço de soluções viáveis. Vale ressaltar que x é denotado vetor de decisão e $y = f(x)$ é chamado vetor de objetivos.

Um problema de programação linear multiobjetivo é semelhante ao Problema (2.1) sendo que as funções coordenadas de f são lineares (ou seja, $f_k(x) = \sum c_{ki}x_i, k = 1, 2, \dots, m$) e o conjunto viável X é definido por restrições lineares.

2.2 Pareto-otimalidade

Em problemas multiobjetivo, devido a conflitos entre as funções objetivo ou até mesmo indefinições em algumas delas, não é possível encontrar uma solução (sentido usual) para o Problema 2.1 (solução viável que satisfaça todas as funções objetivo simultaneamente).

Para contornar essa dificuldade é necessário dar um novo sentido ao que vem a ser solução para um problema multiobjetivo e isso requer alguns conceitos, os quais serão apresentados a seguir.

Definição 2.2.1 (Comparação de vetores) *as relações " \leq ", " $<$ " e " $=$ ", para dados dois vetores $v, w \in X$, são definidas da seguinte forma:*

$$f(v) \leq f(w) \Leftrightarrow f_i(v) \leq f_i(w), i = 1 \dots m;$$

$$f(v) < f(w) \Leftrightarrow f_i(v) < f_i(w), i = 1 \dots m; \quad (2.2)$$

$$f(v) = f(w) \Leftrightarrow f_i(v) = f_i(w), i = 1 \dots m;$$

as relações " \geq " e " $>$ " são definidas de forma análoga. Já a relação " \neq " é definida como:

$$f(v) \neq f(w) \Leftrightarrow \exists i \mid f_i(v) \neq f_i(w). \quad (2.3)$$

Quando entre os vetores $f(v)$ e $f(w)$ não for possível relacioná-los através de " \leq " (ou seja, não for possível escrever $f(v) \leq f(w)$ ou $f(w) \leq f(v)$), será utilizada a notação $f(v) \not\leq f(w)$.

No caso da otimização mono-objetivo, o espaço de objetivos é completamente ordenado, isso quer dizer que, dados dois elementos $v, w \in X$ é sempre verdadeiro que $f(v) \leq f(w)$ ou $f(w) \leq f(v)$. Já no ambiente multiobjetivo, o espaço de objetivos não é ordenado totalmente, no entanto é parcialmente ordenado. Isso quer dizer que dados dois vetores $v, w \in X$, utilizando-se da relação " \leq ", há três possibilidades para comparação entre eles: $f(v) \leq f(w)$, $f(w) \leq f(v)$ ou $(f(v) \not\leq f(w) \text{ e } f(w) \not\leq f(v))$.

Exemplo 2.2.1 *Considere os vetores $u, v, w \in X \subset \mathbb{R}^3$ tais que:*

$$f(u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f(v) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad f(w) = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Então verificam-se as seguintes relações: $f(u) \leq f(v)$, $f(u) \leq f(w)$, $f(v) \not\leq f(w)$ e $f(w) \not\leq f(v)$.

Para uma melhor definição do que vem a ser *ótimo de Pareto*, é preciso definir o conceito de Pareto Dominância (ou somente dominância).

Definição 2.2.2 (Pareto Dominância no espaço de objetivos) *Sejam $y_1, y_2 \in Y$, dois vetores no espaço de objetivos. Diz-se que y_1 domina y_2 se $y_1 \leq y_2$ e $y_1 \neq y_2$. Em outras palavras, $y_{1i} \leq y_{2i}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ e $y_{1i} < y_{2i}$ para pelo menos um $i \in \{1, \dots, m\}$. Caso aconteça que $y_1 \not\leq y_2$ e $y_2 \not\leq y_1$ (y_1 não domina y_2 e y_2 não domina y_1), então y_1, y_2 são chamados indiferentes.*

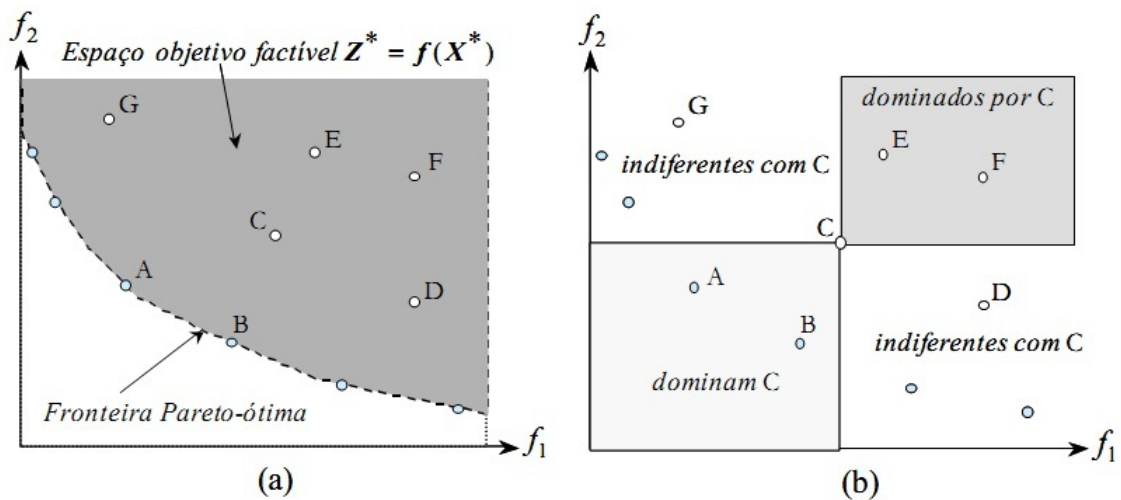


Figura 2.2.1: Pareto Dominância no espaço de objetivos. Fonte: Arroyo (2002)

Na Figura 2.2.1 (b), o ponto C domina os pontos pertencentes ao retângulo superior direito (subconjunto do espaço de objetivos). Os pontos pertencentes ao retângulo inferior esquerdo dominam o ponto C. Os pontos G, C e D são indiferentes.

Definição 2.2.3 (Pareto Dominância no espaço de decisão) *Sejam $x_1, x_2 \in X$. Diz-se que x_1 domina x_2 se $f(x_1)$ dominar $f(x_2)$, ou seja, $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$. Caso ocorra $f(x_1) \not\leq f(x_2)$ e $f(x_2) \not\leq f(x_1)$, então x_1, x_2 são chamados indiferentes.*

Com o conceito de dominância, torna-se mais simples definir o conjunto formado pelas soluções do Problema 2.1, chamado de ótimo de Pareto ou conjunto Pareto-ótimo.

Definição 2.2.4 (Conjunto Pareto-ótimo) Um vetor de decisão $\bar{x} \in X$ é uma solução pareto-ótima para o Problema 2.1 se não existe outro vetor de decisão $x \in X$ tal que $f(x) \leq f(\bar{x})$ e $f(x) \neq f(\bar{x})$, em outras palavras, se nenhum $x \in X$ dominar $\bar{x} \in X$, então \bar{x} é pareto-ótimo. O conjunto de todas as soluções pareto-ótimas é denominado Conjunto Pareto-ótimo. A imagem do conjunto Pareto-ótimo em $Y = f(X)$ é chamada fronteira Pareto-Ótima.

A partir das definições de dominância e de solução Pareto-ótima, vale ressaltar que:

- um vetor $y = f(x) \in Y$ é Pareto-ótimo se seu vetor de decisão correspondente x é Pareto-ótimo;
- a fronteira Pareto-ótima é formada por pontos indiferentes dois a dois.

Na Figura 2.2.1 (a), mostra-se um exemplo da fronteira Pareto-ótima. Os pontos pertencentes a esta fronteira são os pontos Pareto-ótimos. Note que estes pontos são indiferentes uns aos outros.

Segundo Nakayama *et al.* (2009), outras denominações são utilizadas para fazer referência aos pontos (ou soluções) Pareto-Ótimos: *soluções eficientes*, introduzida por Koopmans; *soluções não-dominadas*, por von Neumann-Morgenstein e *soluções não-inferiores* por Zadeh. Todas estas notações são utilizadas na literatura.

A definição de pareto-ótimo pode ser entendida como aquela em que, não é possível melhorar algum objetivo sem degradar ou piorar qualquer outro objetivo; o que está de acordo com o que Pareto escreveu em *Cours d'économie politique*. No geral, é adotado um sentido global para as soluções eficientes, como feito na Definição 2.2.4, mas é possível caracterizar a Pareto-otimalidade localmente para tais soluções.

Definição 2.2.5 (Solução localmente Pareto-ótima) Um vetor de decisão $\bar{x} \in X$ é localmente Pareto-ótimo se existe $\delta > 0$ tal que \bar{x} é Pareto-ótimo em $X \cap B(\bar{x}, \delta)$. Ou seja, se \bar{x}

não é dominado por nenhum ponto da bola $B(\bar{x}, \delta)$. Um vetor de objetivos $y^* \in Y$ é localmente Pareto-ótimo se seu vetor de decisão correspondente é localmente Pareto-ótimo.

Analogamente à otimização mono-objetivo, toda solução globalmente Pareto-ótima será localmente Pareto-ótima. Para a recíproca ser verdadeira são necessárias algumas outras hipóteses, como por exemplo, as dependentes de alguns resultados de Análise Convexa, apresentados a seguir.

Definição 2.2.6 (Combinação convexa) *Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. A combinação convexa desses vetores é dada por:*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \text{ com } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0. \quad (2.4)$$

Definição 2.2.7 (Conjuntos convexos) *Diz-se que $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo se, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ e $\alpha \in [0, 1]$, a combinação convexa $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in X$.*

Exemplo 2.2.2 *O conjunto dado por $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, sendo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ é convexo.*

Definição 2.2.8 (Ponto extremo) *Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. Um ponto $x \in X$ é um ponto extremo de X se não existirem $y, z \in X$ distintos de x e $\alpha \in [0, 1]$ tais que $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$.*

Definição 2.2.9 (Função convexa) *Uma função $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$f_i(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f_i(x) + (1 - \alpha)f_i(y) \quad (2.5)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, sendo $x \neq y$ e $0 < \alpha < 1$, a desigualdade for estrita, então f_i é estritamente convexa.

Definição 2.2.10 (Programação Multiobjetivo Convexa) *O problema de otimização multiobjetivo definido em (2.1) é convexo se todas as funções coordenadas da função vetorial f e o conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ forem convexos.*

Com estas definições, é possível enunciar o seguinte teorema que fornece condições para que uma solução localmente Pareto-ótima seja globalmente Pareto-ótima.

Teorema 2.2.1 *Se o problema de otimização definido em (2.1) for convexo, então toda solução localmente Pareto-ótima é também globalmente Pareto-ótima.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada, por exemplo, em Miettinen (1999).

Segundo Miettinen (1999), matematicamente, toda solução eficiente (pareto-ótima) é igualmente aceitável como solução do problema de programação multiobjetivo (PPM), lembrando que a fronteira Pareto-ótima é formada por pontos indiferentes entre si. Então se faz necessário algum critério ou alguém que possa classificar e/ou escolher alguma ou algumas soluções aceitáveis. Nesse momento insere-se a figura do decisor (tomador de decisão - TD) que é uma pessoa ou um grupo de pessoas que supostamente tem experiência a respeito do processo ao qual o PPM está inserido para ajudar a encontrar soluções. O tomador de decisão pode expressar relações de preferência entre as soluções Pareto-ótimas tornando o modelo mais realista e adequado aos propósitos do TD.

Para o decisor é interessante selecionar somente uma solução, ou no máximo um número finito (pequeno) de soluções. No geral, o grupo de decisores definem uma solução a partir de negociações entre eles. Em alguns casos, assume-se que só existe um decisor ou que o grupo de decisores tem decisões unânimes.

Quando se está num processo de decisão, é necessário solicitar algumas informações ou parâmetros adicionais ao decisor como por exemplo, valores desejáveis das funções objetivos (que podem ou não serem viáveis) que são de grande interesse e importância.

Definição 2.2.11 (Ponto Ideal) Um ponto $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*) \in Y$ tal que

$$y_j^* = \min \{f_j(x) \mid x \in X\}, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.6)$$

é chamado *Ponto Ideal* ou *Ponto Utópico*.

Vale lembrar que é muito improvável que o ponto ideal se torne uma solução do problema multiobjetivo devido aos conflitos entre as funções objetivos, caso contrário, a otimização estaria concluída.

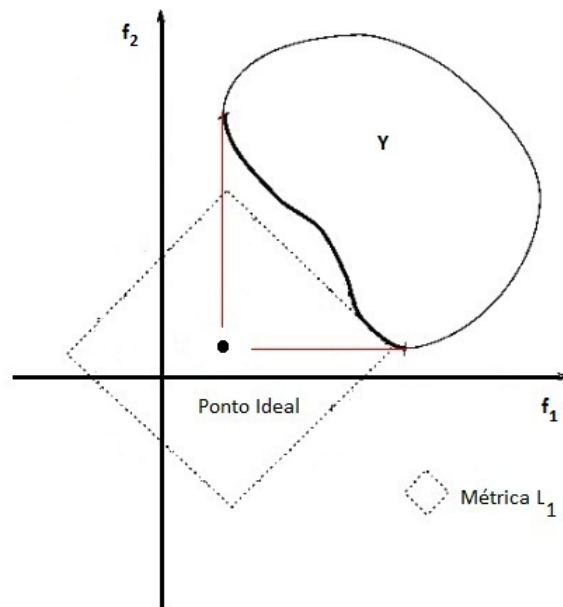


Figura 2.2.2: Representação para o Ponto Ideal para o caso $m = 2$.

2.3 Alguns métodos para solução de Problemas de Otimização Multiobjetivo

Os métodos de otimização multiobjetivo geralmente estão interessados na busca de soluções no espaço de objetivos ao invés do espaço de decisões. Segundo Miettinen (1999), uma das razões se deve ao fato que a dimensão do espaço de objetivos é usualmente menor que a do espaço de decisão. Outra razão seria que os decisores tem maior interesse nos valores das funções objetivo.

No geral, os métodos podem ser classificados em três categorias, *Métodos à Priori*, *Métodos à Posteriori* e *Métodos Interativos*, de acordo com o momento em que o decisor indica seus interesses.

2.3.1 Métodos à Priori

Nestes métodos há a consulta com o decisor antes de se encontrar as soluções do Problema de Otimização Multiobjetivo. Tem como vantagem um baixo custo computacional. No entanto, neste tipo de método, o decisor exhibe suas preferências sem conhecer suas alternativas. Caso haja mudança de idéia do decisor, o método tem que ser executado novamente.

2.3.1.1 Método Lexicográfico

Nesse método, as funções objetivo são classificadas em uma ordem de preferência ou importância pelo decisor. O vetor de decisão ótimo é obtido pela minimização dos objetivos começando pelo mais importante e procedendo de acordo com a ordem de preferência das referidas funções.

Nesse momento, há uma reorganização nos índices das funções coordenadas. Ou seja, $f_1(x)$ denota a função de maior importância e $f_m(x)$ denota a função de menor importância. Após isso, a obtenção da solução ótima \bar{x} é feita através de minimizações sucessivas como segue:

Considera-se primeiramente a função de maior importância somente, minimiza-a sobre o conjunto viável X do problema multiobjetivo mostrado em (2.1) sem considerar os demais objetivos. Ou seja,

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x) \\ \text{s. a.} \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.7}$$

encontrando o valor ótimo \hat{f}_1 . Em seguida, minimiza-se a função f_2 sobre o mesmo conjunto viável X adicionando uma nova restrição $\rightarrow f_1(x) = \hat{f}_1$, tornando-se no problema abaixo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_2(x) \\ \text{s. a.} \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \\ & f_1(x) = \hat{f}_1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

obtendo o valor ótimo \hat{f}_2 . Depois, é feito semelhante para f_3 adicionando as restrições $f_1(x) = \hat{f}_1$ e $f_2(x) = \hat{f}_2$, ou seja:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_3(x) \\ \text{s. a.} \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \\ & f_1(x) = \hat{f}_1 \\ & f_2(x) = \hat{f}_2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para o i -ésimo objetivo, a expressão anterior ficará como:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_i(x) \\ \text{s. a.} \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \\ & f_k(x) = \hat{f}_k, \\ & \quad k=1,2, \dots, i-1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Esse processo é continuado até a função de menor importância. Após esse processo, o \bar{x} tal que $f_m(\bar{x}) = \hat{f}_m$ é a solução do problema lexicográfico.

Teorema 2.3.1 *A solução encontrada no método lexicográfico é Pareto-ótima.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada, por exemplo, em Miettinen (1999).

O método lexicográfico, para alguns autores, é visto como parte da programação por Metas, que será comentada mais à diante, sendo chamado de Programação por Metas Lexicográfica.

2.3.1.2 Método da Função Utilidade (*Value Function Method*)

Definição 2.3.1 (Função Utilidade) *Uma função $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função utilidade se, dados $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$ acontecer as implicações abaixo:*

$$\begin{aligned} \text{i. } & y_1 \not\leq y_2 \text{ e } y_2 \not\leq y_1 \Leftrightarrow U(y_1) = U(y_2) \\ \text{ii. } & y_1 \leq y_2 \Leftrightarrow U(y_1) > U(y_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

A Função Utilidade $U(f(x))$ traduz o julgamento do decisor da seguinte maneira: se $y_1, y_2 \in Y \subset \mathbb{R}^m$ são dois vetores diferentes tais que $U(y_1) > U(y_2)$, então o decisor prefere y_1 ; se $U(y_1) = U(y_2)$, então o decisor julga-os indiferentes. Vale ressaltar que, na Definição 2.3.1, convencionou-se que se $y_1 \leq y_2$ então o decisor tem maior preferência por y_1 (contrário ao que geralmente é adotado na Teoria da Utilidade em Economia).

O método da Função Utilidade funciona bem se o decisor dá informações para ajudar a explicitar matematicamente (numericamente), através da Função Utilidade $U(f(x))$, seus julgamentos para a melhor decisão. Esse método pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{U}(f(x)) \\ \text{s.a. } & x \in X \end{aligned} \quad (2.12)$$

A vantagem desse método é a conversão de um problema multiobjetivo em um problema de otimização clássico com única função objetivo. No entanto, algumas dificuldades sobre esse método são listadas a seguir.

- Dificuldade para construção matemática de uma função de acordo com as preferências do decisor;

- Uma vez estabelecida a Função Utilidade, o modelo de otimização definido pode apresentar dificuldades em sua resolução;
- A incorporação das preferências do decisor ao modelo exigem excessivas informações e, algumas dessas podem apresentar um grau de incertezas ou "ruídos" na informações.

Definição 2.3.2 *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_1, x_2 \in X$. Diz-se que f é fortemente decrescente se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 \geq x_2$ e $x_1 \neq x_2$.*

Segundo Miettinen (1999), geralmente a função utilidade é assumida ser fortemente decrescente. Isto significa que a preferência do decisor aumentará se o valor de uma função objetivo decresce enquanto todos os outros valores das funções objetivo permanecem inalterados.

O seguinte teorema apresenta um importante resultado relacionado a soluções de funções fortemente decrescentes.

Teorema 2.3.2 *Seja a função utilidade $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ fortemente decrescente. Se U atinge seu máximo em $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, então \bar{y} é Pareto-ótimo.*

Prova: Seja $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ um maximizador da função utilidade fortemente decrescente U . Suponha que \bar{y} não é Pareto-ótimo. Então existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y \leq \bar{y}$ e $y \neq \bar{y}$. No entanto, U é fortemente decrescente, então $U(y) > U(\bar{y})$, o que contradiz o fato de que \bar{y} é maximizador de U em \mathbb{R}^m . Logo, \bar{y} é Pareto-ótimo.

2.3.1.3 Métodos baseados em limitantes

Neste método é requerido que o decisor selecione um objetivo de referência, digamos de índice i , e indicar limitantes inferior e superior (l_j, L_j , respectivamente) para os demais objetivos.

Ou seja:

$$\begin{aligned}
\min \quad & f_i(x) \\
s. \ a. \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \\
& l_j \leq f_j(x) \leq L_j, \quad \forall j \neq i
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Tal estratégia geralmente é combinada com outros métodos de resolução de problemas multiobjetivo. Sua principal desvantagem se deve à dificuldade de especificar à priori os limitantes para que tenha um problema viável e se tenha uma solução satisfatória de (2.13) para o decisor.

2.3.1.4 Programação por Metas

Introduzida por Charnes e Cooper em 1961, neste método o tomador de decisão determina níveis de aspiração, representados pelos valores M_j , para as funções objetivo através de desvios que serão minimizados. As funções objetivo juntamente com essas aspirações definem as *metas*. Segundo Miettinen (1999), as restrições, que geralmente são funcionais, podem ser vistas como subconjunto das metas. Nesse caso, as restrições seriam rígidas (inflexíveis, sem admitir desvios) e as metas, lógico, são flexíveis.

Com os valores fornecidos para as *metas* define-se as variáveis de desvio d_i da seguinte maneira:

$$d_j = M_j - f_j(x) \tag{2.14}$$

em que $d_j = d_j^- - d_j^+$ e $d_j^-, d_j^+ \geq 0$. A expressão anterior resultará em $f_j(x) + d_j^- - d_j^+ = M_j, \forall j = 1, \dots, m$.

A partir das definições das metas, o problema multiobjetivo torna-se um mono-objetivo onde se deseja minimizar os desvios d_i . É comum formular este método, chamado programação por metas ponderada, como:

$$\begin{aligned}
& \min \left(\sum_{i=1}^m w_i (d_i^+ + d_i^-) \right) \\
& s.a. \quad f_j(x) - d_j^+ + d_j^- = M_j \\
& \quad \quad d_j^+, d_j^- \geq 0 \\
& \quad \quad d_j^+ d_j^- = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \\
& \quad \quad x \in X
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Observe que w_j e M_j é o ponderador e o nível de aspiração (ou valor desejado) para o objetivo de índice j , respectivamente, d_j^+ indica quanto o j -ésimo objetivo excedeu M_j e d_j^- indica quanto ficou abaixo de M_j .

É possível verificar que não pode ocorrer simultaneamente $d_j^+ > 0$ e $d_j^- > 0$. Com isso, a restrição $d_j^+ d_j^- = 0$ sempre é satisfeita, podendo (2.15) ser escrito como:

$$\begin{aligned}
& \min \left(\sum_{i=1}^m w_i (d_i^+ + d_i^-) \right) \\
& s.a. \quad f_j(x) - d_j^+ + d_j^- = M_j \\
& \quad \quad d_j^+, d_j^- \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \\
& \quad \quad x \in X
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Evitando assim uma não-linearidade caso o problema multiobjetivo fosse de programação linear. Vale ressaltar que (2.16) será linear mono-objetivo se tanto as funções objetivo quanto as restrições forem lineares.

A programação por metas ponderada está relacionada com o método da métrica ponderada ou programação por compromisso, conforme visto em Miettinen (1999), o que torna (2.16) caso particular (com $p = 1$) da seguinte formulação feita através de métricas L_p :

$$\begin{aligned}
& \min \left(\sum_{i=1}^m w_i (d_i^+ + d_i^-)^p \right)^{\frac{1}{p}} ; \quad 1 \leq p \leq \infty \\
& \text{s.a.} \quad f_j(x) - d_j^+ + d_j^- = M_j \\
& \quad \quad \quad d_j^+, d_j^- \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \\
& \quad \quad \quad x \in X
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Miettinen (1999) comenta que a métrica L_1 é a mais utilizada pelo fato da origem da programação por metas vir do estudo de problemas de programação linear.

Uma outra vertente além das metas ponderadas é a denominada por alguns autores como programação por metas lexicográfica, em que a meta nesse caso é dada por um critério (ordenamento) feito nas funções objetivo. O decisor elege prioridades de tal forma que a maior prioridade é suposta muito mais importante que a segunda e assim por diante. Os comentários a respeito desse método foram apresentados na Subseção 2.3.1.1.

Teorema 2.3.3 *A solução de um problema de programação por metas ponderadas é Pareto-ótima para o Problema 2.1 se as variáveis de desvio d_j^+, d_j^- são soluções ótimas.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada, por exemplo, em Miettinen (1999).

2.3.2 Métodos à Posteriori

Neste, há a consulta com o decisor após gerar as soluções Pareto-ótimas. Tem como vantagem uma maior articulação do decisor nas suas preferências, afinal, agora ele tem um conjunto de alternativas em mãos. Ao contrário dos métodos à Priori, uma mudança de idéia do decisor não implica em uma nova execução de método. Como desvantagem, pode-se citar um maior custo computacional na busca de soluções.

2.3.2.1 Método das ponderações

A idéia principal desse método é obter uma solução Pareto-ótima através de um problema mono-objetivo tendo como função objetivo a ser minimizada a soma ponderada de todas as funções coordenadas f_i . Segundo Arroyo (2002), o Método das Ponderações é, provavelmente, o mais simples dos métodos chamados clássicos e é formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in X \end{aligned} \tag{2.18}$$

em que $w_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, m$. O peso w_i representa a importância da função objetivo i comparado com as demais. Há, geralmente, a normalização desses pesos, ou seja,

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1, \tag{2.19}$$

tornando a função objetivo de (2.18) não somente uma combinação linear, mas uma combinação convexa das funções objetivo do problema multiobjetivo.

O seguinte teorema encontrado em Chankong e Haimes (1983, apud ARROYO (2002)) apresenta condições para obtenção de soluções Pareto-ótimas através do problema ponderado.

Teorema 2.3.4 *Dado um vetor de pesos $w = (w_1, \dots, w_m)$, uma solução \bar{x} do problema mono-objetivo ponderado (2.18) é Pareto-ótima se uma das condições abaixo é satisfeita:*

- \bar{x} é solução única de (2.18);
- $w_i > 0, \forall i = 1, \dots, m$.

Segundo Arroyo (2002), a principal desvantagem desse método é que ele não consegue gerar todas as soluções Pareto-ótimas quando o espaço de objetivos não é convexo. Sendo este método recomendado, por exemplo, para problemas de programação linear multiobjetivo.

2.3.2.2 Método das ε -restrições

No método das ε -restrições, introduzido por Haimes *et al.* (1971 apud MIETTINEN (1999)), uma das funções objetivo (f_l), julgada mais importante, é selecionada para ser otimizada e todas as funções restantes são convertidas em restrições através de definição de limites superiores para cada uma delas (ε_j). O problema a ser resolvido é formulado como:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_l(x) \\ \text{s. a.} \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \\ & f_j(x) \leq \varepsilon_j, \quad \forall j = 1, \dots, m; \quad j \neq l. \end{aligned} \tag{2.20}$$

em que $l \in \{1, \dots, m\}$.

Arroyo (2002) comenta que variando convenientemente os limitantes ε_j , torna-se possível gerar o conjunto Pareto-ótimo, mesmo quando o espaço de objetivos não é convexo. O maior problema deste método é justamente a determinação destes valores de ε_j , pois dependendo de tal escolha, o conjunto solução pode até ser vazio, mesmo o problema multiobjetivo original tendo solução, ou seja, o método não funcionará. Cohon (1978, apud ARROYO (2002)) desenvolveu um algoritmo para obter valores adequados de ε_j .

Teorema 2.3.5 *Um vetor de decisões $\bar{x} \in X$ é Pareto-ótimo se ele é solução única do problema (2.20) para algum l com $\varepsilon_j = f_j(\bar{x})$ para $j = 1, \dots, m$ e $j \neq l$.*

Prova: Ver Miettinen (1999).

2.3.2.3 Método Simplex multiobjetivo

O progresso alcançado pela tecnologia de computadores tornou possível a resolução de problemas de programação envolvendo a inclusão de centenas ou milhares de variáveis conforme

encontrado em Kreyszig(2009). Acompanhando tal progresso, que já havia começado na época da Segunda Grande Guerra, juntamente com a facilidade no tratamento de problemas de Programação Linear (mono-objetivo), G.B.Dantzig em 1948 propôs um método iterativo para resolução de problemas de programação linear mono-objetivo, chamado *Método Simplex*.

Conforme Cohon (1978), existia a necessidade de se desenvolver técnicas para solução de problemas multiobjetivo que não dependessem de problemas auxiliares mono-objetivo. Com tal precisão, alguns algoritmos foram criados com esse propósito. Zeleny (1974) apresentou um método baseado no Método Simplex mono-objetivo, chamado *Método Simplex Multiobjetivo*, para gerar soluções Pareto-ótimas em problemas lineares, definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & Cx \\ \text{s. a.} \quad & Ax \leq b, \quad x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

com $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^k$, $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$.

Similar ao mono-objetivo, que "caminhava" entre os pontos extremos (Definição 2.2.8), o Método Simplex Multiobjetivo "percorre" pontos extremos até chegar em uma solução eficiente. Ele pode ser usado para gerar uma representação exata, conforme encontrado em Cohon (1978). O maior problema, por ser um método à Posteriori, é que, em problemas de grande porte, o decisor fica "perdido" em meio a tantas soluções Pareto-ótimas.

Maiores informações sobre o funcionamento desse método podem ser encontradas, por exemplo, em Cohon (1978), Ferreira (1999), Zeleny (1974).

2.3.3 Métodos iterativos

Conforme seu próprio nome, no método iterativo, o decisor é consultado enquanto se executa o algoritmo de busca de soluções do problema multiobjetivo e suas preferências são utilizadas na busca da solução. A busca só é interrompida quando o decisor se satisfaz com

a solução, o que se chama por "convergência psicológica". Tem relativamente baixo custo computacional, dependendo da existência ou não de alterações excessivas das preferências do decisor e ele pode definir suas preferências a partir de alguma informação sobre as alternativas possíveis.

2.3.3.1 Método de Geoffrion, Dyer e Feinberg

Esse método é baseado no Algoritmo de Frank-Wolfe, que foi criado para resolver problemas de programação quadrática mono-objetivo com restrições lineares (problema de otimização convexa). Então, recorre-se à uma função $u = U(F(x))$, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que, segundo Ferreira (1999), não precisa ser explicitamente conhecida, apenas localmente. O problema a ser resolvido é o seguinte problema de otimização convexa:

$$\begin{aligned} \min \quad & u = U(f(x)) \\ \text{s. a.} \quad & x \in X \end{aligned} \tag{2.22}$$

em que u é uma função convexa crescente diferenciável.

A necessidade de o Problema (2.22) ser convexo para utilização do método de Geoffrion, Dyer e Feinberg (GDF) vem do uso do Algoritmo de Frank-Wolfe. Miettinen (1999) afirma que o método de Geoffrion, Dyer e Feinberg também é chamado de método de Frank-Wolfe iterativo.

Conforme encontrado em Ferreira (1999), o algoritmo GDF é similar ao algoritmo de Frank-Wolfe sendo que os passos 2, 3 e 4 são feitos iterativamente consultando o decisor:

- 1- Determinar uma solução $x^0 \in X$; fazer $k = 0$;

- 2- Obter direção de busca d^k resolvendo o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla u(x^k)^T \xi \\ \text{s. a.} \quad & \xi \in X \end{aligned} \tag{2.23}$$

Seja ξ^k uma solução do problema; fazer $d^k := \xi^k - x^k$;

- 3- Determinar passo ótimo α_k através de busca unidimensional

$$\min_{\alpha \in [0,1]} u(x^k + \alpha d^k) \tag{2.24}$$

- 4- Calcular $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$; se $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, então parar. A solução é x^{k+1} . Caso contrário, $k := k + 1$ e retornar ao passo 2.

Maiores informações sobre o método de Geoffrion, Dyer e Feinberg podem ser encontradas em Miettinen (1999), Ferreira (1999).

Capítulo 3

Programação Linear Multiobjetivo Fuzzy

Neste capítulo são abordados problemas de Programação Linear Multiobjetivo em que os coeficientes das funções objetivo (ou custos) são números fuzzy e as restrições são crisp. A metodologia a ser apresentada baseia-se na minimização da distância dos pontos viáveis para um ponto desejado (ideal, conforme Definição 2.2.11 ou especificado pelo tomador de decisão). Espera-se que essa distância também seja representada por um número fuzzy. A partir dessa distância mínima, obtém-se informações que poderão contribuir para decisão ótima.

Aqui serão definidos, conforme Delgado *et al.* em "*On a Canonical Representation of Fuzzy Numbers*" (1998a.), e "*A Fuzziness Measure for Fuzzy Numbers*" (1998b.), três índices que ajudam na captura de informações contidas em números fuzzy para simplificar sua representação e facilitar seu manuseio. São eles: Valor Fuzzy (*Value*), Ambiguidade (*Ambiguity*) e a Incerteza (*Fuzziness*).

O Valor Fuzzy (V), segundo Delgado *et al.* (1998a.), fornece informação a respeito do número fuzzy através de um número real associado. A Ambiguidade (A) basicamente mede quanta imprecisão está presente no que Delgado *et al.* (1998a.) chama de magnitude mal-definida ("*ill-defined magnitude*") de um número fuzzy. Já a Incerteza (*Fuzziness* - F) é similar à ambiguidade no sentido de se medir o quanto "fuzzy" é o número, de forma a enfatizar a concentração dos valores da função de pertinência próximo de 0,5.

Será apresentada também uma função utilizada para comparação entre números fuzzy: a *função de classificação*. Após isso, é apresentado um modelo de Programação Linear Mono-objetivo Fuzzy no qual se apresentará uma estratégia para encontrar sua solução com base no Teorema da Representação (Teorema 1.2.1) que ajudará a determinar o Ponto Ideal (Definição 2.2.11) para o problema de Programação Linear Multiobjetivo citado acima.

3.1 Valor Fuzzy

Terol (2008) afirma que os conceitos de Valor Fuzzy, Ambiguidade e Incerteza de um número fuzzy são capazes de recuperar a parte relevante da informação contida em um número fuzzy. Para definir tais índices é preciso definir função de redução.

Definição 3.1.1 *Uma função real é chamada função de redução se for uma função crescente $s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $s(0) = 0$ e $s(1) = 1$.*

As funções de redução tem o intuito de ponderar os diferentes α -níveis de um número fuzzy de forma a privilegiar os α -níveis com maiores valores para α .

Definição 3.1.2 (Valor Fuzzy) *Seja \tilde{N} um número fuzzy com α -nível $[n_\alpha^L, n_\alpha^R]$ e $s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função de redução. Define-se o Valor Fuzzy de \tilde{N} (com respeito a s) como:*

$$V_s(\tilde{N}) = \int_0^1 s(\alpha) [n_\alpha^L + n_\alpha^R] d\alpha \quad (3.1)$$

Geralmente são utilizadas como função de redução regulares, as quais são definidas pela seguinte propriedade:

$$\int_0^1 s(\alpha) d\alpha = 0,5 \quad (3.2)$$

A função mais simples a ser utilizada (inclusive adotada neste trabalho) com essa propriedade é a função $s(\alpha) = \alpha$. Com isso, o valor fuzzy da Definição 3.1.2 é escrito como:

$$V(\tilde{N}) = \int_0^1 \alpha [n_\alpha^L + n_\alpha^R] d\alpha \quad (3.3)$$

Exemplo 3.1.1 Considere os números fuzzy $\tilde{U} = (-1, 0, 1)$ e $\tilde{W} = (2, 3, 4)$ conforme mostrado na Figura 3.1.1. Eles tem α -níveis representados por $[-1 + \alpha, 1 - \alpha]$ e $[2 + \alpha, 4 - \alpha]$, respectivamente.

Ao classificar estes números, a conclusão natural é que $\tilde{U} < \tilde{W}$ no sentido em que \tilde{W} tem valores maiores em seu suporte. De uma forma mais simples: quanto mais à direita estiver um número em relação ao outro, maior relativamente ele será.

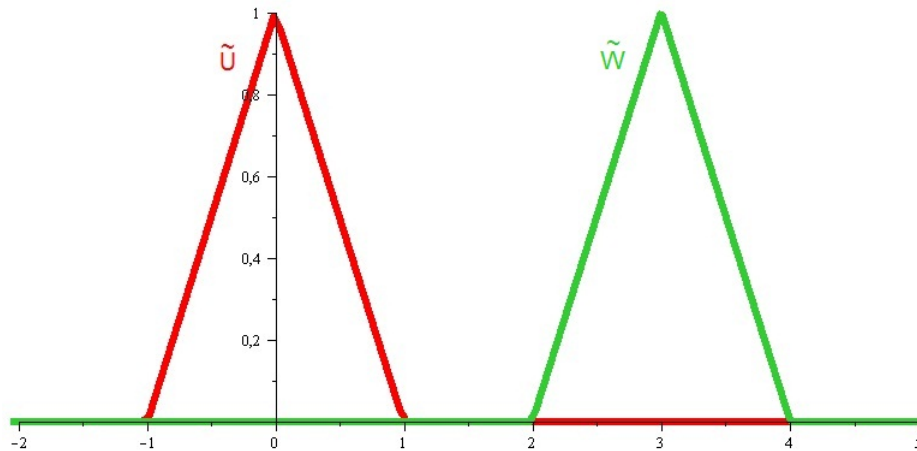


Figura 3.1.1: Números Fuzzy $\tilde{U} = (-1, 0, 1)$ e $\tilde{W} = (2, 3, 4)$.

A seguir, será mostrado um exemplo em que essa facilidade de se classificar números fuzzy nem sempre existe.

Exemplo 3.1.2 Considere os números fuzzy $\tilde{M} = (1, 4, 7)$ e $\tilde{N} = (0, 5, 6)$, conforme Figura 3.1.2. Eles tem α -níveis representados por $[1 + 3\alpha, 7 - 3\alpha]$ e $[5\alpha, 6 - \alpha]$, respectivamente.

Caso seja necessário classificar estes dois números, a idéia utilizada no Exemplo 3.1.1 já não se mostra tão eficiente. Conforme Figura 3.1.2, verifica-se que para valores de α baixos (próximos de zero) $\tilde{N} < \tilde{M}$. No entanto, para valores de α mais próximos de 1, conclui-se o contrário ($\tilde{M} < \tilde{N}$). Com isso, o valor fuzzy surge como uma boa forma de classificação (com respeito a uma conveniente função de redução) de números fuzzy. Utilizando a função $s(\alpha) = \alpha$, tem-se que $V(\tilde{M}) = 4$ e $V(\tilde{N}) = \frac{13}{3}$. Com isso, segundo esse critério, $\tilde{M} < \tilde{N}$.

Vale ressaltar que no Exemplo 3.1.1, $V(\tilde{U}) = 0$ e $V(\tilde{W}) = 3$, confirmando que $\tilde{U} < \tilde{W}$.

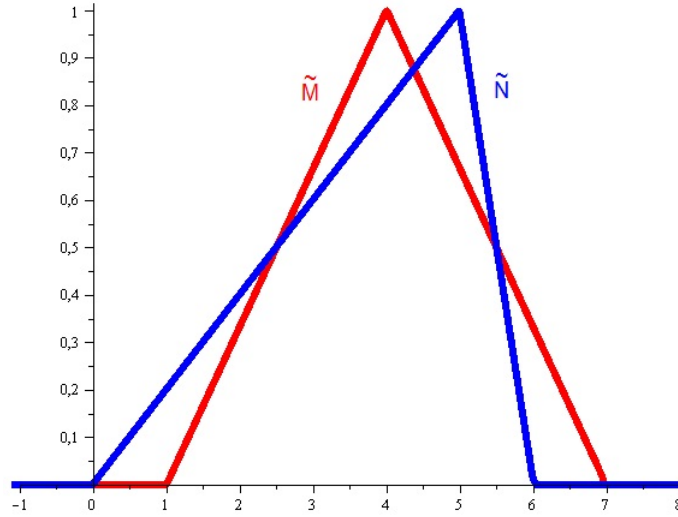


Figura 3.1.2: Números Fuzzy $\tilde{M} = (1, 4, 7)$ e $\tilde{N} = (0, 5, 6)$.

3.2 Ambiguidade de um número Fuzzy

Para a comparação entre números fuzzy, Delgado *et al.* (1998a.) defendem que juntamente com Valor Fuzzy um outro índice deve ser considerado para tal propósito: a Ambiguidade.

Definição 3.2.1 (Ambiguidade) *Seja \tilde{N} um número fuzzy com α -nível $[n_\alpha^L, n_\alpha^R]$ e $s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função de redução. Define-se a Ambiguidade de \tilde{N} (com respeito a s) como:*

$$A_s(\tilde{N}) = \int_0^1 s(\alpha) [n_\alpha^R - n_\alpha^L] d\alpha \quad (3.4)$$

Similar ao que foi feito com o Valor Fuzzy, fazendo $s(\alpha) = \alpha$, a Equação 3.4 é escrita como:

$$A(\tilde{N}) = \int_0^1 \alpha [n_\alpha^R - n_\alpha^L] d\alpha \quad (3.5)$$

Exemplo 3.2.1 Considere os números fuzzy $\tilde{U}, \tilde{W}, \tilde{M}$ e \tilde{N} dos Exemplos 3.1.1 e 3.1.2. As Ambiguidades destes números são: $A(\tilde{U}) = A(\tilde{W}) = \frac{1}{3}$ e $A(\tilde{M}) = A(\tilde{N}) = 1$.

Pelos Exemplos anteriores, (3.1.1), (3.1.2) e (3.2.1), tem-se a idéia de que o Valor Fuzzy pode ser visto como um valor central, conforme Delgado *et al.* (1998b.). Para confirmar tal idéia, pode-se mostrar que à partir das Equações 3.3 e 3.5 obtém-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} V(\tilde{N}) - A(\tilde{N}) &= 2 \int_0^1 \alpha n_\alpha^L d\alpha \\ V(\tilde{N}) + A(\tilde{N}) &= 2 \int_0^1 \alpha n_\alpha^R d\alpha \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V(\tilde{N}) &= 2 \int_0^1 \alpha n_\alpha^L d\alpha + A(\tilde{N}) \\ V(\tilde{N}) &= 2 \int_0^1 \alpha n_\alpha^R d\alpha - A(\tilde{N}) \end{aligned}$$

Quanto à Ambiguidade, vale ressaltar que $[n_\alpha^R - n_\alpha^L]$ é a largura do α -nível de \tilde{N} . Com isso, $A(\tilde{N})$ pode ser visto como uma distribuição global da função de pertinência do número fuzzy \tilde{N} ponderada pela função de redução. Sendo assim, conforme Terol (2008), $A(\tilde{N})$ é a medida da imprecisão de \tilde{N} .

Exemplo 3.2.2 Para um número fuzzy triangular $\tilde{T} = (a, b, c)$, tem-se que:

$$V(\tilde{T}) = \frac{a}{6} + \frac{2b}{3} + \frac{c}{6} \quad e \quad A(\tilde{T}) = \frac{c}{6} - \frac{a}{6};$$

Exemplo 3.2.3 Para um intervalo crisp $C = [p, q]$, o Valor Fuzzy e a Ambiguidade são:

$$V(C) = \frac{p+q}{2};$$

$$A(C) = \frac{q-p}{2};$$

Exemplo 3.2.4 Para um Singleton $S = \{v\}$, tem-se que:

$$V(S) = v;$$

$$A(S) = 0;$$

Delgado *et al.* (1998a.) destaca três pontos que são considerados a fim de construir um método de comparação para números fuzzy:

- (C1) Dois números fuzzy, por exemplo \tilde{M}, \tilde{N} , devem ser considerados iguais quando $V(\tilde{M}) = V(\tilde{N})$ e $A(\tilde{M}) = A(\tilde{N})$.
- (C2) Essa comparação deve ser determinada predominantemente pelo Valor Fuzzy. Somente quando os valores fuzzy de dois números são aproximadamente iguais, avalia-se a Ambiguidade.
- (C3) O papel da Ambiguidade no processo de classificação dependerá da segurança (ou insegurança) do decisor. Ou seja, o quanto ele confia em sua experiência para a tomada de decisão.

Por exemplo, considere os números fuzzy apresentados na Figura 3.2.3. Esse é um caso de dificuldade para comparação bem conhecido, segundo Delgado *et al.* (1998a.).

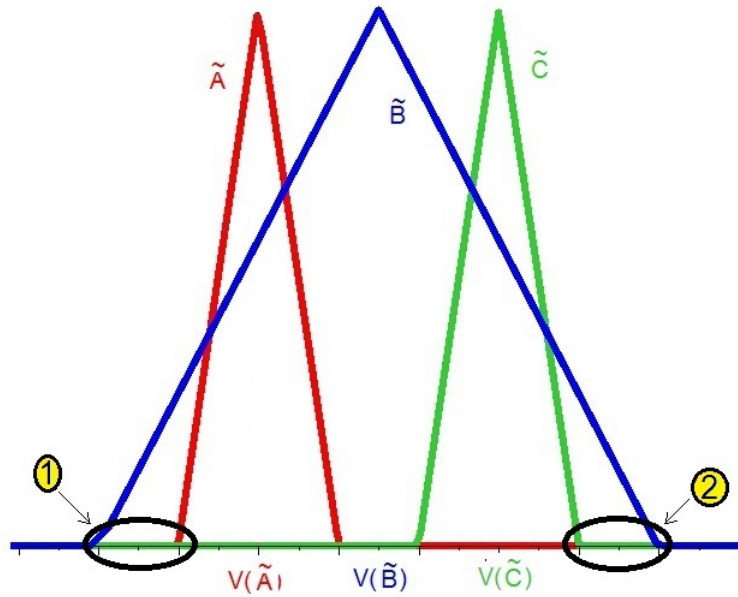


Figura 3.2.3: Números Fuzzy \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} .

É claro que $V(\tilde{C}) > V(\tilde{B}) > V(\tilde{A})$ e $A(\tilde{B}) > A(\tilde{A})$ e $A(\tilde{B}) > A(\tilde{C})$. Com isso, do ponto de vista do Valor Fuzzy, \tilde{C} é preferível à \tilde{B} que, por sua vez, é preferível à \tilde{A} . Contudo, \tilde{B} apresenta alguns possíveis valores maiores que todos os de \tilde{C} (indicados na região indicada por **2** da Figura 3.2.3), assim como valores menores que todos os de \tilde{A} (indicados na região indicada por **1** da Figura 3.2.3). Então, um decisor otimista, confiante em sua experiência poderia preferir \tilde{B} à \tilde{C} enquanto um decisor pessimista poderia preferir \tilde{A} à \tilde{B} .

Para um dado número fuzzy \tilde{D} , a idéia anterior pode ser vista como um "risco" dependente de $1 - \alpha$ para se obter um resultado $x(\alpha) \in Supp(\tilde{D})$. Ou seja, para \tilde{B} na Figura 3.2.3 é possível obter resultados $x(\alpha)$ maiores que os dos outros dois números fuzzy, porém isso acontece para valores de α baixos (ou seja, com risco maior). Caso o decisor tenha uma atitude muito otimista (ou experiente), ainda sim, persistirá com \tilde{B} .

Observação 3.2.1 Segundo Delgado et al. (1998a.), os critérios C1, C2 e C3 sugerem uma forma de comparação a partir do binômio Valor Fuzzy - Ambiguidade que pode ser resumida da seguinte maneira:

- Se $V(\tilde{M})$ e $V(\tilde{N})$ são "aproximadamente iguais", então vá para o próximo item. Caso

contrário classifique-os de acordo com os seus Valores Fuzzy.

- Compare $A(\tilde{M})$ e $A(\tilde{N})$. Se são "aproximadamente iguais", então esses números são indiferentes para o decisor. Caso contrário, levar em conta a opinião do decisor e a posição relativa das respectivas Ambiguidades.

3.3 Incerteza (*Fuzziness*)

Conforme comentado em Delgado *et al.* (1998b.), não é difícil ver que um determinado número fuzzy (por exemplo, número triangular) pode ter a mesma Ambiguidade (e Valor Fuzzy) que um intervalo Crisp. Então, Delgado *et al.* no artigo "*A fuzziness measure for fuzzy numbers: Applications*", (1998b.) indicam um novo índice, a Incerteza (*Fuzziness*), que representa o "quanto Fuzzy" é determinado número, sendo um conceito pouco diferente da Ambiguidade no sentido de evitar o problema citado no início deste parágrafo. Eles defendem que para distinguí-los dois números claramente, a Incerteza deve ser introduzida como medida adicional.

Definição 3.3.1 (Incerteza (*Fuzziness*)) Seja \tilde{N} um número fuzzy com α -nível $[n_\alpha^L, n_\alpha^R]$ e $s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $s(\alpha) = \alpha$. Defina-se a Incerteza de \tilde{N} (com respeito a $s(\alpha) = \alpha$) como:

$$F(\tilde{N}) = \int_0^{\frac{1}{2}} [n_\alpha^R - n_\alpha^L] d\alpha + \int_{\frac{1}{2}}^1 [n_\alpha^L - n_\alpha^R] d\alpha \quad (3.6)$$

Segundo Delgado *et al.* (1998b.), existem várias maneiras de medir a Incerteza. A idéia predominante na Literatura é a de medir a Incerteza através da "falta de distinção" entre o número fuzzy e seu complemento. Eles afirmam ainda que a Incerteza enfatiza a concentração dos valores da função de pertinência de um número fuzzy próximos de $\frac{1}{2}$, onde a máxima Incerteza ocorre. Klir (2006) afirma que essa é uma boa idéia visto que é essa falta de distinção que distingue um número fuzzy de um conjunto crisp. Quanto menor essa diferença (falta de

distinção), "mais fuzzy" o número será e conseqüente maior será a Incerteza (Fuzziness). Para ilustrar a idéia do índice de Incerteza, é apresentado o exemplo abaixo:

Exemplo 3.3.1 *Sejam $\tilde{T} = (a, b, c)$ um número triangular, $C = [p, q]$ um intervalo crisp e $S = \{v\}$ um singleton. As Incertezas respectivas são $F(\tilde{T}) = \frac{c-a}{4}$, $F(C) = 0$, $F(S) = 0$.*

3.4 Função de classificação para Números Fuzzy

Vale observar que existem muitas formas de comparação entre dois números fuzzy além da citada na Observação 3.2.1. A forma mais comum é através de funções de classificação as quais podem ser encontradas, por exemplo, em Fortemps e Roubens (1996), Kumar *et al* (2010), Chanas e Zielinski (2000 apud YAGER, 1981).

Definição 3.4.1 (Função de Classificação para Números Fuzzy) *Uma aplicação $R : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada função de classificação se para dados $\tilde{N}, \tilde{M} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ verifica-se:*

- $\tilde{N} \preceq \tilde{M} \Leftrightarrow R(\tilde{N}) \leq R(\tilde{M});$
- $\tilde{N} \prec \tilde{M} \Leftrightarrow R(\tilde{N}) < R(\tilde{M});$
- $\tilde{N} \approx \tilde{M} \Leftrightarrow R(\tilde{N}) = R(\tilde{M});$

Vale ressaltar que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ denota o conjunto de todos os números fuzzy em \mathbb{R} . Nesta dissertação, para efeito de comparação entre números fuzzy, será utilizada a seguinte função de classificação, encontrada em Farhadinia (2011):

$$R(\tilde{N}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (n_\alpha^L + n_\alpha^R) d\alpha \quad (3.7)$$

Ao observar a Definição 3.1.2, verifica-se que a função de classificação usada em Farhadinia (2011) é similar à sugerida em Delgado *et al.* (1998a.), com $s(\alpha) = \frac{1}{2}$. Portanto, por simplicidade e por satisfazer os três itens da Definição 3.4.1, a função R será utilizada ao invés de se utilizar o Valor Fuzzy V .

3.5 Programação Linear com função objetivo Fuzzy

O seguinte problema de Programação Linear Fuzzy será necessário para obtenção de solução para o modelo de Programação Multiobjetivo Fuzzy a ser dissertado neste capítulo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{f}(x) = \sum \tilde{c}_i x_i = \langle \tilde{c}, x \rangle \\ \text{s. a.} \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n)$ é um vetor de parâmetros que serão assumidos como números fuzzy.

Definição 3.5.1 *Um ponto $x^* \in X$ é chamado minimizador (ou solução) do Problema 3.8 se $\langle \tilde{c}, x^* \rangle \preceq \langle \tilde{c}, x \rangle$ para todo $x \in X$. Nesse caso, $\tilde{f}(x^*)$ será denominado conjunto ótimo fuzzy.*

Observe que $\langle \tilde{c}, x^* \rangle \preceq \langle \tilde{c}, x \rangle$ se, e somente se $R(\langle \tilde{c}, x^* \rangle) \leq R(\langle \tilde{c}, x \rangle)$ conforme Definição 3.4.1 e Equação 3.7.

Para encontrar uma solução do Problema 3.8, para cada $\alpha \in [0, 1]$, dois problemas serão introduzidos:

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & f_\alpha^L(x) = \sum c_{i\alpha}^L x_i \\ \text{s. a.} \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \quad x \geq 0 \end{aligned} \right\} (P_\alpha^L) \tag{3.9}$$

e

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & f_\alpha^R(x) = \sum c_{i\alpha}^R x_i \\ \text{s. a.} \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \quad x \geq 0 \end{aligned} \right\} (P_\alpha^R) \tag{3.10}$$

em que $f_\alpha^L(x)$ denota o valor da função objetivo quando cada coeficiente representa o valor do extremo inferior do α -nível de \tilde{c}_i e $f_\alpha^R(x)$ denota valor análogo, neste caso, referente ao extremo superior do α -nível de \tilde{c}_i . Observa-se que $x \geq 0$ permite formular facilmente os Problemas 3.9 e 3.10 e que $[\tilde{f}(x)]_\alpha = [f_\alpha^L(x), f_\alpha^R(x)]$. O seguinte teorema, enunciado e demonstrado pelo autor desta dissertação, caracteriza as soluções do Problema 3.8 a partir dos Problemas 3.9 e 3.10.

Teorema 3.5.1 *Seja \tilde{f}^* o conjunto fuzzy definido através da família de intervalos $\{[f_\alpha^{*L}, f_\alpha^{*R}], \alpha \in [0, 1]\}$, em que f_α^{*L} e f_α^{*R} são valores ótimos dos problemas P_α^L e P_α^R respectivamente. Então \tilde{f}^* é um número fuzzy que representa o conjunto ótimo fuzzy para o Problema 3.8 relativo à " \preceq ".*

Prova: Como $\tilde{c}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ é um número fuzzy, então $[c_{i\alpha}^L, c_{i\alpha}^R]$ é um intervalo fechado. Consequentemente, $[\sum c_{i\alpha}^L x_i, \sum c_{i\alpha}^R x_i] = [f_\alpha^L(x), f_\alpha^R(x)]$, utilizando aritmética intervalar e levando em consideração que $x_i \geq 0$. Ou seja, $f_\alpha^L(x) \leq f_\alpha^R(x), \forall \alpha \in [0, 1]$. Com isso, tem-se também que $\min_{x \in X, x \geq 0} f_\alpha^L(x) \leq \min_{x \in X, x \geq 0} f_\alpha^R(x)$. Logo $[\min_{x \in X, x \geq 0} f_\alpha^L(x), \min_{x \in X, x \geq 0} f_\alpha^R(x)] = [f_\alpha^{*L}, f_\alpha^{*R}]$ é um intervalo fechado (considerando também o caso em que $f_\alpha^{*L} = f_\alpha^{*R}$ válido) $\forall x \in X, x \geq 0$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Agora, considere $\alpha \leq \alpha_1$. Como $\tilde{c}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, é um número fuzzy então $c_{i\alpha}^L \leq c_{i\alpha_1}^L$ e $c_{i\alpha}^R \leq c_{i\alpha_1}^R$. Utilizando o raciocínio do parágrafo anterior e o fato de que $x_i \geq 0$, tem-se que $\sum c_{i\alpha}^L x_i \leq \sum c_{i\alpha_1}^L x_i$ e $\sum c_{i\alpha}^R x_i \leq \sum c_{i\alpha_1}^R x_i$. Logo $[f_{\alpha_1}^{*L}, f_{\alpha_1}^{*R}] \subseteq [f_\alpha^{*L}, f_\alpha^{*R}]$.

Seja $\bar{x} \in X$ uma solução do Problema 3.8. Isso significa que, pela Definição 3.5.1, $\langle \tilde{c}, \bar{x} \rangle \preceq \langle \tilde{c}, x \rangle, \forall x \in X, x \geq 0$. Sendo assim:

$$R(\tilde{f}(\bar{x})) \leq R(\tilde{f}(x)), \forall x \in X;$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 (f_\alpha^L(\bar{x}) + f_\alpha^R(\bar{x})) d\alpha \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (f_\alpha^L(x) + f_\alpha^R(x)) d\alpha, \forall x \in X;$$

Por outro lado, considere os minimizadores $x_\alpha^L, x_\alpha^R \in \mathbb{R}^n$ soluções dos problemas P_α^L e P_α^R , respectivamente, para cada $\alpha \in [0, 1]$ com $f_\alpha^{*L} = f_\alpha^L(x_\alpha^L)$ e $f_\alpha^{*R} = f_\alpha^R(x_\alpha^R)$. Isso quer dizer que:

$$\langle c_\alpha^L, x_\alpha^L \rangle \leq \langle c_\alpha^L, x \rangle, \forall x \in X, x \geq 0; \quad (3.11)$$

$$\Leftrightarrow f_\alpha^L(x_\alpha^L) \leq f_\alpha^L(x), \forall x \in X, x \geq 0; \quad (3.12)$$

Como esta expressão vale para todo $x \in X, x \geq 0$, vale também para \bar{x} :

$$f_\alpha^L(x_\alpha^L) \leq f_\alpha^L(\bar{x}).$$

Analogamente, para o problema P_α^R :

$$f_\alpha^R(x_\alpha^R) \leq f_\alpha^R(\bar{x});$$

Somando membro a membro estas duas desigualdades, tem-se que:

$$f_\alpha^L(x_\alpha^L) + f_\alpha^R(x_\alpha^R) \leq f_\alpha^L(\bar{x}) + f_\alpha^R(\bar{x}). \quad (3.13)$$

Para o próximo passo, são necessárias algumas justificativas. Considere a função $g_\alpha^L : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g_\alpha^L = \min_{x \in X, x \geq 0} \langle c_\alpha^L, x \rangle. \quad (3.14)$$

Para provar que tal função é monótona, sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, tais que $\alpha_1 < \alpha_2$. Como \tilde{c} é um vetor de números fuzzy, então $c_{\alpha_1}^L \leq c_{\alpha_2}^L$. Consequentemente:

$$\langle c_{\alpha_1}^L, x \rangle \leq \langle c_{\alpha_2}^L, x \rangle \quad \forall x \in X, x \geq 0. \quad (3.15)$$

Considere então $g_{\alpha_1}^L = \langle c_{\alpha_1}^L, x_{\alpha_1}^L \rangle$ com $x_{\alpha_1}^L = \arg \min_{x \in X, x \geq 0} \langle c_{\alpha_1}^L, x \rangle$ e $g_{\alpha_2}^L = \langle c_{\alpha_2}^L, x_{\alpha_2}^L \rangle$ com $x_{\alpha_2}^L = \arg \min_{x \in X, x \geq 0} \langle c_{\alpha_2}^L, x \rangle$. Então, para $\alpha = \alpha_1$ em (3.11):

$$\langle c_{\alpha_1}^L, x_{\alpha_1}^L \rangle \leq \langle c_{\alpha_1}^L, x \rangle \quad \forall x \in X, x \geq 0. \quad (3.16)$$

Em particular, a desigualdade anterior vale para $x = x_{\alpha_2}^L$. Ou seja:

$$\langle c_{\alpha_1}^L, x_{\alpha_1}^L \rangle \leq \langle c_{\alpha_1}^L, x_{\alpha_2}^L \rangle \quad (3.17)$$

Por (3.15) e (3.17), tem-se que a seguinte sequência de desigualdades é verdadeira:

$$\langle c_{\alpha_1}^L, x_{\alpha_1}^L \rangle \leq \langle c_{\alpha_1}^L, x_{\alpha_2}^L \rangle \leq \langle c_{\alpha_2}^L, x_{\alpha_2}^L \rangle \quad (3.18)$$

Com isso, $g_{\alpha_1}^L \leq g_{\alpha_2}^L$. Logo, g_α^L é monótona.

Além disso, a função g_α^L é limitada. Para mostrar isto, considere $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1], \alpha_1 < \alpha_2$.

Ou seja:

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$$

Pela monotonicidade da g_α^L , obtem-se $g_0^L \leq g_{\alpha_1}^L \leq g_{\alpha_2}^L \leq g_1^L$. Logo, g_α^L é limitada.

Com essas duas propriedades (ser limitada e monótona), então pode-se afirmar que g_α^L é integrável (vide Lima (2007)). Argumento análogo pode ser feito para a função g_α^R .

Sendo assim, a soma $g_\alpha^L + g_\alpha^R = f_\alpha^L(x_\alpha^L) + f_\alpha^R(x_\alpha^R)$ é integrável (Observe que $f_\alpha^L(\bar{x}) + f_\alpha^R(\bar{x})$ também é integrável por motivos similares).

Retomando à (3.13), integrando de 0 a 1 e após, multiplicando por 0,5 em ambos os membros, tem-se:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (f_\alpha^L(x_\alpha^L) + f_\alpha^R(x_\alpha^R)) d\alpha \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (f_\alpha^L(\bar{x}) + f_\alpha^R(\bar{x})) d\alpha.$$

Então, $R(\tilde{f}^*) \leq R(\tilde{f}(\bar{x}))$. Como \bar{x} é minimizador do Problema 3.8, então $R(\tilde{f}^*) = R(\tilde{f}(\bar{x}))$. Logo, \tilde{f}^* é um número fuzzy que representa o conjunto ótimo fuzzy do Problema 3.8. ■

3.6 Programação Linear Multiobjetivo Fuzzy

Terol (2008) comenta que na maioria das situações reais de tomada de decisão não é possível a caracterização por uma função objetivo, mas por várias funções objetivo, muitas vezes conflitantes entre si. Neste contexto surgem os métodos de programação multiobjetivo que visam de alguma forma minimizar a "distância" para um ponto ideal ou especificado pelo decisor. Além disso, pode acontecer de os dados para definir os parâmetros do problema a ser resolvido conter imprecisões. Então, a inserção de números Fuzzy para representar esses parâmetros se torna conveniente.

Nesta seção será dissertado sobre um método para resolver problemas multiobjetivo fuzzy conforme proposto em Terol (2008) utilizando uma otimização de distância com a métrica L_1 .

3.6.1 Definição do problema

O problema a ser resolvido é formulado como:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \tilde{f}_k(x) = \sum \tilde{c}_{ki}x_i = \langle \tilde{c}_k, x \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, l \\
 \max \quad & \tilde{f}_r(x) = \sum \tilde{c}_{ri}x_i = \langle \tilde{c}_r, x \rangle, \quad r = l + 1, \dots, m \\
 \text{s. a.} \quad & x \in X \subset \mathbb{R}^n \quad x \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

em que $\tilde{c}_j = (\tilde{c}_{j1}, \tilde{c}_{j2}, \dots, \tilde{c}_{jn})$, $j = 1, \dots, m$ é um vetor de parâmetros que serão assumidos como números fuzzy.

Conforme Terol (2008) a abordagem da distância métrica (*distance metric*) é definida como aquela que minimiza a distância para um ponto ideal ou desejado que pode ser fornecido pelo decisor ou obtido por alguma outra técnica. Neste trabalho, o ponto ideal será obtido através da otimização individual de cada objetivo através da técnica descrita na Seção 3.5. No caso de o decisor fornecer aspirações ou metas imprecisas (vide Jimenez e Terol (2009)) - que é razoável representá-las por números fuzzy - tem-se o que se chama por ponto desejado.

Como em muitos dos casos, as funções objetivo representam grandezas diferentes, é necessário uma normalização destas. Para o caso da minimização da distância para o ponto ideal (ou desejado), que será representado por $(\tilde{f}_1^*, \dots, \tilde{f}_m^*)$, utilizam-se métricas L_p . Por último, é necessário considerar o grau de importância dos objetivos para o decisor no modelo, o que aqui será representado por pesos não-negativos, representados por ω_j .

Sendo assim, a partir das considerações acima, é possível formular o seguinte modelo auxiliar para o Problema 3.19:

$$\min L_p = \left[\sum_{k=1}^l \omega_k^p \left(\frac{\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^*}{r_{\tilde{f}_k}} \right)^p + \sum_{r=l+1}^m \omega_r^p \left(\frac{\tilde{f}_r^* - \tilde{f}_r(x)}{r_{\tilde{f}_r}} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (3.20)$$

$$s. a. \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad x \geq 0$$

3.6.2 Solução baseada na minimização da distância Fuzzy

No Problema 3.20, será considerado $p = 1$ porque preservará a propriedade de ainda ser um problema linear. Terol (2008) comenta que não-linearidades causadas pelo valor de p causam vários problemas, que podem ser indesejáveis em ambientes fuzzy. Com isso, define-se grau de discrepância correspondente ao j -ésimo objetivo como:

$$\tilde{d}_j(x) = \frac{\tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_j^*}{r_{\tilde{f}_j}} \text{ para o } j\text{-ésimo objetivo a ser minimizado}$$

ou,

$$\tilde{d}_j(x) = \frac{\tilde{f}_j^* - \tilde{f}_j(x)}{r_{\tilde{f}_j}} \text{ para o } j\text{-ésimo objetivo a ser maximizado.}$$

Para normalizar tais desvios, são considerados os valores máximos individuais para os objetivos a serem minimizados (representados por $\tilde{f}_{k*}, k = 1, \dots, l$) e os valores mínimos individuais para os objetivos a serem maximizados (representados por $\tilde{f}_{r*}, r = l + 1, \dots, m$). A notação $(\tilde{f}_{1*}, \dots, \tilde{f}_{m*})$ é usada para o que será chamado *ponto anti-ideal*. Com isso, o "range" da função \tilde{f}_j pode ser obtida a partir do maior valor possível da diferença (em módulo) $\tilde{f}_j^* - \tilde{f}_{j*}$, ou seja, $r_{\tilde{f}_j} = f_{j*0}^R - f_{j0}^{*L}$ para as funções que se quer minimizar e $r_{\tilde{f}_j} = f_{j0}^{*R} - f_{j*0}^L$. Verifica-se que estas diferenças são calculadas no 0-nível.

Fazendo $p = 1$ na Equação 3.20 tem-se o seguinte problema:

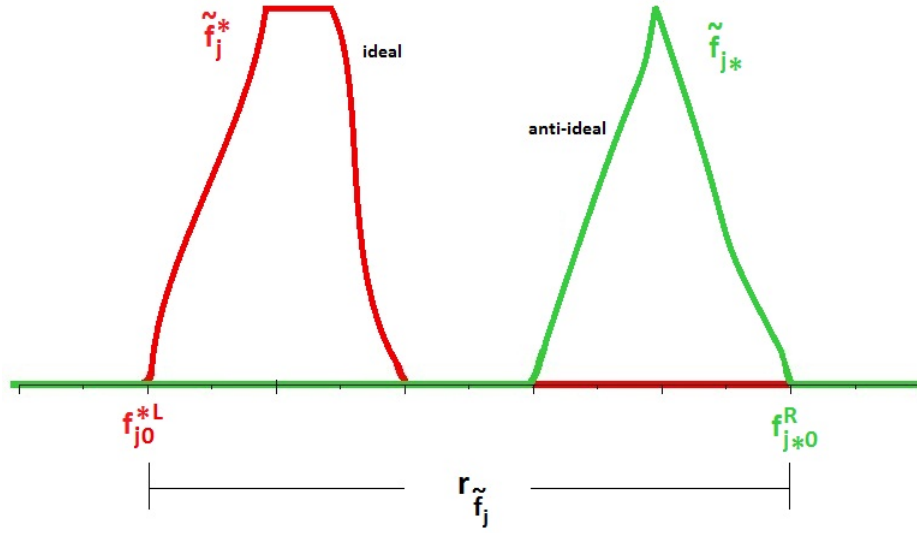


Figura 3.6.4: Determinação $r_{\tilde{f}_j}$ para as funções de minimização.

$$\min \left(\sum_{k=1}^l \omega_k \tilde{d}_k(x) + \sum_{r=l+1}^m \omega_r \tilde{d}_r(x) \right) \quad (3.21)$$

s. a. $x \in X, x \geq 0$

Aplicando aritmética intervalar nos α -níveis de d_j tem-se que, para as funções a serem minimizadas:

$$[d_{j\alpha}^L, d_{j\alpha}^R] = \frac{1}{r_{\tilde{f}_j}} ([f_{j\alpha}^L(x), f_{j\alpha}^R(x)] - [f_{j\alpha}^{*L}, f_{j\alpha}^{*R}]) \quad (3.22)$$

$$= \frac{1}{r_{\tilde{f}_j}} [f_{j\alpha}^L(x) - f_{j\alpha}^{*R}, f_{j\alpha}^R(x) - f_{j\alpha}^{*L}] \quad (3.23)$$

Já para as funções a serem maximizadas:

$$[d_{j\alpha}^L, d_{j\alpha}^R] = \frac{1}{r_{\tilde{f}_j}} ([f_{j\alpha}^{*L}, f_{j\alpha}^{*R}] - [f_{j\alpha}^L(x), f_{j\alpha}^R(x)]) \quad (3.24)$$

$$= \frac{1}{r_{\tilde{f}_j}} [f_{j\alpha}^{*L} - f_{j\alpha}^R(x), f_{j\alpha}^{*R} - f_{j\alpha}^L(x)] \quad (3.25)$$

Então, para resolver o Problema 3.21, para cada $\alpha \in [0, 1]$, dois problemas são introduzidos:

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad d_{\alpha}^L = \sum_{k=1}^l \omega_k d_{k\alpha}^L(x) + \sum_{r=l+1}^m \omega_r d_{r\alpha}^L(x) \\ s. \ a. \quad \frac{f_{k\alpha}^L(x)}{r_{\tilde{f}_k}} - d_{k\alpha}^L = \frac{f_{k\alpha}^{*R}}{r_{\tilde{f}_k}}, \quad k = 1, \dots, l \\ \frac{f_{r\alpha}^R(x)}{r_{\tilde{f}_r}} + d_{r\alpha}^L = \frac{f_{r\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_r}}, \quad r = l+1, \dots, m \\ x \in X, \quad x \geq 0 \end{array} \right\} (P - Esq) \quad (3.26)$$

e

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad d_{\alpha}^R = \sum_{k=1}^l \omega_k d_{k\alpha}^R(x) + \sum_{r=l+1}^m \omega_r d_{r\alpha}^R(x) \\ s. \ a. \quad \frac{f_{k\alpha}^R(x)}{r_{\tilde{f}_k}} - d_{k\alpha}^R = \frac{f_{k\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_k}}, \quad k = 1, \dots, l \\ \frac{f_{r\alpha}^L(x)}{r_{\tilde{f}_r}} + d_{r\alpha}^R = \frac{f_{r\alpha}^{*R}}{r_{\tilde{f}_r}}, \quad r = l+1, \dots, m \\ x \in X, \quad x \geq 0 \end{array} \right\} (P - Dir) \quad (3.27)$$

em que $f_{j\alpha}^L(x)$ denota o valor de x no extremo inferior do α -nível do j -ésimo objetivo e $f_{j\alpha}^R(x)$ para o extremo superior do α -nível em questão.

Para caracterizar as soluções do Problema 3.21 a partir dos Problemas P -Dir e P -Esq, o seguinte teorema é formulado:

Teorema 3.6.1 (Terol (2008)) *Seja \tilde{d} um conjunto fuzzy definido através da seguinte família de intervalos: $\{[d_\alpha^L, d_\alpha^R], \alpha \in [0, 1]\}$ em que d_α^L e d_α^R são soluções dos Problemas **P-Esq** e **P-Dir**, respectivamente. Então \tilde{d} é um número fuzzy que representa a mínima distância L_1 com respeito ao ponto desejado.*

Prova: Considere o seguinte problema de programação linear fuzzy:

$$\left. \begin{array}{l} \min \sum_{k=1}^l \omega_k \frac{\tilde{f}_k(x)}{r_{\tilde{f}_k}} - \sum_{r=l+1}^m \omega_r \frac{\tilde{f}_r(x)}{r_{\tilde{f}_r}} \\ s. a. \quad x \in X, x \geq 0 \end{array} \right\} (P - Aux) \quad (3.28)$$

cujo seu conjunto ótimo fuzzy pode ser obtido pelo método dissertado na Seção 3.5. Para simplificar a notação, considere o vetor de coeficientes das funções objetivo \tilde{c} do Problema *P-Aux*:

$$\tilde{c} = \left(\omega_1 \frac{\tilde{c}_1}{r_{\tilde{f}_1}}, \dots, \omega_l \frac{\tilde{c}_l}{r_{\tilde{f}_l}}, -\omega_{l+1} \frac{\tilde{c}_{l+1}}{r_{\tilde{f}_{l+1}}}, \dots, -\omega_m \frac{\tilde{c}_m}{r_{\tilde{f}_m}} \right) \quad (3.29)$$

Com isso, *P-Aux* torna-se em:

$$\left. \begin{array}{l} \min \tilde{Z} = \langle \tilde{c}, x \rangle \\ s. a. \quad x \in X, x \geq 0. \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

Utilizando a mesma estratégia descrita na Seção 3.5, resolve-se dois problemas a fim de encontrar os α -níveis do número fuzzy \tilde{z} , solução do Problema 3.30:

$$\left. \begin{array}{l} \min \langle c_\alpha^L, x \rangle \\ s. a. \quad x \in X, x \geq 0. \end{array} \right\} (P - cL) \quad (3.31)$$

em que o vetor c_α^L é escrito como:

$$c_\alpha^L = \left(\omega_1 \frac{c_{1\alpha}^L}{r_{\tilde{f}_1}}, \dots, \omega_l \frac{c_{l\alpha}^L}{r_{\tilde{f}_l}}, -\omega_{l+1} \frac{c_{(l+1)\alpha}^R}{r_{\tilde{f}_{l+1}}}, \dots, -\omega_m \frac{c_{m\alpha}^R}{r_{\tilde{f}_m}} \right)$$

e sua solução, z_α^L , é o extremo inferior do α -nível de \tilde{z} . O outro problema é escrito como:

$$\left. \begin{array}{l} \min \langle c_\alpha^R, x \rangle \\ \text{s. a. } x \in X, x \geq 0. \end{array} \right\} (P - cR) \quad (3.32)$$

em que o vetor c_α^R é escrito como:

$$c_\alpha^R = \left(\omega_1 \frac{c_{1\alpha}^R}{r_{\tilde{f}_1}}, \dots, \omega_l \frac{c_{l\alpha}^R}{r_{\tilde{f}_l}}, -\omega_{l+1} \frac{c_{(l+1)\alpha}^L}{r_{\tilde{f}_{l+1}}}, \dots, -\omega_m \frac{c_{m\alpha}^L}{r_{\tilde{f}_m}} \right)$$

e sua solução, z_α^R , é o extremo superior do α -nível de \tilde{z} .

Utilizando o ponto desejado, pode-se escrever que $\tilde{f}^* = \sum_{k=1}^l \omega_k \frac{\tilde{f}_k^*}{r_{\tilde{f}_k}} - \sum_{r=l+1}^m \omega_r \frac{\tilde{f}_r^*}{r_{\tilde{f}_r}}$. O conjunto α -nível de \tilde{f}^* é calculado a seguir:

$$\begin{aligned} [f_\alpha^{*L}, f_\alpha^{*R}] &= \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} [f_{k\alpha}^{*L}, f_{k\alpha}^{*R}] - \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} [f_{r\alpha}^{*L}, f_{r\alpha}^{*R}]; \\ &= \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} [f_{k\alpha}^{*L}, f_{k\alpha}^{*R}] + \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} [-f_{r\alpha}^{*R}, -f_{r\alpha}^{*L}]; \\ &= \left[\sum_{k=1}^l \omega_k \frac{f_{k\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_k}} - \sum_{r=l+1}^m \omega_r \frac{f_{r\alpha}^{*R}}{r_{\tilde{f}_r}}, \sum_{k=1}^l \omega_k \frac{f_{k\alpha}^{*R}}{r_{\tilde{f}_k}} - \sum_{r=l+1}^m \omega_r \frac{f_{r\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_r}} \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sob a métrica L_1 , calcula-se a distância fuzzy de \tilde{z} para o ponto desejado (ou ideal) $\tilde{f}^* = (\tilde{f}_1^*, \dots, \tilde{f}_m^*)$:

$$\tilde{d} = \tilde{z} - \tilde{f}^* \quad (3.34)$$

Para cada $\alpha \in [0, 1]$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
[d_\alpha^L, d_\alpha^R] &= [z_\alpha^L, z_\alpha^R] - [f_\alpha^{*L}, f_\alpha^{*R}]; \\
&= [z_\alpha^L, z_\alpha^R] - \left[\sum_{k=1}^l \omega_k \frac{f_{k\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_k}} - \sum_{r=l+1}^m \omega_r \frac{f_{r\alpha}^{*R}}{r_{\tilde{f}_r}}, \sum_{k=1}^l \omega_k \frac{f_{k\alpha}^{*R}}{r_{\tilde{f}_k}} - \sum_{r=l+1}^m \omega_r \frac{f_{r\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_r}} \right]; \\
&= \left[z_\alpha^L - \sum_{k=1}^l \omega_k \frac{f_{k\alpha}^{*R}}{r_{\tilde{f}_k}} + \sum_{r=l+1}^m \omega_r \frac{f_{r\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_r}}, z_\alpha^R - \sum_{k=1}^l \omega_k \frac{f_{k\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_k}} + \sum_{r=l+1}^m \omega_r \frac{f_{r\alpha}^{*R}}{r_{\tilde{f}_r}} \right] \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Esta expressão é semelhante à obtida em (*P-Esq*) e (*P-Dir*). Como z_α^L e z_α^R são valores ótimos (ou seja, soluções dos Problemas *P-cL* e *P-cR*, respectivamente), então d_α^L e d_α^R representam os α -níveis de \tilde{d} que é a distância mínima L_1 com respeito ao ponto desejado \tilde{f}^* .

Os intervalos $[d_\alpha^L, d_\alpha^R]$, $\alpha \in [0, 1]$ são, de fato, fechados. Para isso, basta verificar que a solução do Problema *P-Aux*, \tilde{z} , é um número fuzzy. Além disso, as componentes do ponto desejado (ou ideal) \tilde{f}_j^* , $j = 1, \dots, m$ também são. Então, as desigualdades abaixo são verdadeiras:

$$\begin{aligned}
z_\alpha^L &\leq z_\alpha^R \\
f_{k\alpha}^{*L} &\leq f_{k\alpha}^{*R}, \quad k = 1, \dots, l \\
f_{r\alpha}^{*L} &\leq f_{r\alpha}^{*R}, \quad r = l + 1, \dots, m \quad (3.36)
\end{aligned}$$

A partir das desigualdades acima, é fácil estabelecer que:

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} f_{k\alpha}^{*R} &\leq -\sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} f_{k\alpha}^{*L}, \\
\sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} f_{r\alpha}^{*L} &\leq \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} f_{r\alpha}^{*R},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Somando estas duas desigualdades e, levando em consideração que $z_\alpha^L \leq z_\alpha^R$, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} f_{k\alpha}^{*R} + \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} f_{r\alpha}^{*L} &\leq -\sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} f_{k\alpha}^{*L} + \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} f_{r\alpha}^{*R}, \\
\Rightarrow z_\alpha^L - \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} f_{k\alpha}^{*R} + \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} f_{r\alpha}^{*L} &\leq z_\alpha^R - \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} f_{k\alpha}^{*L} + \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} f_{r\alpha}^{*R}, \\
\Rightarrow d_\alpha^L &\leq d_\alpha^R.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Falta mostrar que, para $\alpha < \alpha'$, obtém-se $[d_{\alpha'}^L, d_{\alpha'}^R] \subseteq [d_\alpha^L, d_\alpha^R]$. Isto pode ser provado utilizando idéia similar às apresentadas anteriormente. Basta levar em consideração que tanto \tilde{z} , solução do Problema *P-Aux*, quanto as componentes do ponto desejado $\tilde{f}_j^*, j = 1, \dots, m$ são números fuzzy e, para eles, vale a inclusão desejada. Sendo assim,

$$d_\alpha^L = z_\alpha^L - \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} f_{k\alpha}^{*R} + \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} f_{r\alpha}^{*L} \leq z_{\alpha'}^L - \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} f_{k\alpha'}^{*R} + \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} f_{r\alpha'}^{*L} = d_{\alpha'}^L, \tag{3.39}$$

$$d_{\alpha'}^R = z_{\alpha'}^R - \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} f_{k\alpha'}^{*L} + \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} f_{r\alpha'}^{*R} \leq z_\alpha^R - \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} f_{k\alpha}^{*L} + \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} f_{r\alpha}^{*R} = d_\alpha^R. \tag{3.40}$$

Então, $[d_{\alpha'}^L, d_{\alpha'}^R] \subseteq [d_{\alpha}^L, d_{\alpha}^R]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e a prova está concluída. ■

Proposição 3.6.1 (Terol (2008)) *Assuma que o ponto desejado, $(\tilde{f}_1^*, \dots, \tilde{f}_m^*)$, é melhor que ou igual ao ponto ideal em cada α -nível, e seja \tilde{d} definido conforme teorema anterior. Então o Valor Fuzzy de \tilde{d} , $V(\tilde{d})$, é maior ou igual à zero.*

Prova: Sejam x_{α}^L e x_{α}^R soluções dos Problemas (*P-Esq*) e (*P-Dir*), respectivamente. Então, de acordo com as restrições destes Problemas, para os objetivos a serem minimizados, tem-se que:

$$d_{j\alpha}^R(x_{\alpha}^R) = \frac{f_{j\alpha}^R(x_{\alpha}^R) - f_{j\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_j}}$$

$$d_{j\alpha}^L(x_{\alpha}^L) = \frac{f_{j\alpha}^L(x_{\alpha}^L) - f_{j\alpha}^{*R}}{r_{\tilde{f}_j}}$$

e, analogamente para os a serem maximizados:

$$d_{j\alpha}^R(x_{\alpha}^R) = \frac{f_{j\alpha}^{*R} - f_{j\alpha}^L(x_{\alpha}^R)}{r_{\tilde{f}_j}}$$

$$d_{j\alpha}^L(x_{\alpha}^L) = \frac{f_{j\alpha}^{*L} - f_{j\alpha}^R(x_{\alpha}^L)}{r_{\tilde{f}_j}}$$

Para mostrar que o Valor Fuzzy é maior ou igual a zero, basta mostrar que $d_{j\alpha}^L + d_{j\alpha}^R \geq 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $j = 1, \dots, m$. Considerando as funções a serem minimizadas:

$$\begin{aligned}
f_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) - f_{j\alpha}^{*L} &= f_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) - f_{j\alpha}^{*L} + (f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) - f_{j\alpha}^{*R}) - (f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) - f_{j\alpha}^{*R}) \\
&= (f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) - f_{j\alpha}^{*L}) + (f_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) - f_{j\alpha}^{*R}) - (f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) - f_{j\alpha}^{*R}) \\
&= (f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) - f_{j\alpha}^{*L}) + (f_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) - f_{j\alpha}^{*R}) - r_{\tilde{f}_j} d_{j\alpha}^L(x_\alpha^L). \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Ao denotar $l = f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) - f_{j\alpha}^{*L}$ e $m = f_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) - f_{j\alpha}^{*R}$, verifica-se que $l, m \geq 0$ por hipótese. Sabendo que $f_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) - f_{j\alpha}^{*L} = r_{\tilde{f}_j} d_{j\alpha}^R(x_\alpha^R)$, obtem-se:

$$r_{\tilde{f}_j} d_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) + r_{\tilde{f}_j} d_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) = l + m \geq 0 \tag{3.42}$$

De forma análoga é possível fazer para as funções a serem maximizadas. Logo, a proposição está provada. ■

Proposição 3.6.2 (Terol (2008)) *Assuma que o ponto desejado é melhor que ou igual ao ponto ideal em cada α -nível e seja \tilde{d} definido no Teorema 3.6.1. Então, o Valor Fuzzy de \tilde{d} , $V(\tilde{d})$, é igual a zero se, e somente se para todo α -nível cada função objetivo alcança seu nível desejado.*

Prova: Se em cada α -nível, cada objetivo alcança seu nível desejado, então existem x_α^L e x_α^R tais que:

$$f_{k\alpha}^L(x_\alpha^L) = f_{k\alpha}^{*L}$$

$$f_{k\alpha}^R(x_\alpha^L) = f_{k\alpha}^{*R}$$

$$f_{k\alpha}^R(x_\alpha^R) = f_{k\alpha}^{*R}$$

$$f_{k\alpha}^L(x_\alpha^R) = f_{k\alpha}^{*L}$$

Então, tanto para as funções a serem minimizadas quanto para as funções a serem maximizadas tem-se:

$$d_{j\alpha}^L = \frac{f_{j\alpha}^{*L} - f_{j\alpha}^{*R}}{r_{\tilde{f}_j}} \quad e \quad d_{j\alpha}^R = \frac{f_{j\alpha}^{*R} - f_{j\alpha}^{*L}}{r_{\tilde{f}_j}} \quad (3.43)$$

Logo, pela Definição 3.1.2, $V(\tilde{d}) = 0$.

Considere agora que $V(\tilde{d}) = 0$, ou seja, $\sum_{j=1}^m \int_0^1 \alpha(d_{j\alpha}^L + d_{j\alpha}^R) d\alpha = 0$.

Pela proposição anterior $d_{j\alpha}^L + d_{j\alpha}^R \geq 0$ para cada α e cada j . Considerando x_α^L e x_α^R soluções dos Problemas *P-Esq* e *P-Dir*, respectivamente, para o caso das funções de minimização ($j = 1, \dots, l$), tem-se que:

$$f_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) - f_{j\alpha}^{*L} = f_{j\alpha}^{*R} - f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) \quad \Rightarrow \quad \overbrace{f_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) - f_{j\alpha}^{*R}}^{\geq 0} = \underbrace{f_{j\alpha}^{*L} - f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L)}_{\leq 0} \quad (3.44)$$

O que resulta em $f_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) - f_{j\alpha}^{*R} = f_{j\alpha}^{*L} - f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) = 0$.

Sendo assim, $f_{j\alpha}^R(x_\alpha^R) = f_{j\alpha}^{*R}$ e $f_{j\alpha}^L(x_\alpha^L) = f_{j\alpha}^{*L}$, ou seja, alcançam nível desejado. Para as

funções de maximização ($j = l + 1, \dots, m$) pode ser mostrado resultado análogo. Portanto, a prova está concluída. ■

3.6.3 Modelo para obtenção do vetor de decisão ótimo

Como visto na seção anterior, a distância fuzzy \tilde{d} representa a distância mínima em relação ao ponto desejado (ou ideal) de acordo com a métrica L_1 . Após determinar essa distância, é preciso determinar um vetor de decisão tal que a distância de sua imagem pela função vetorial f para o ponto desejado seja a "mais próxima" de \tilde{d} . Para encontrar tal vetor, serão utilizados os critérios encontrados em Delgado *et al* (1998a.) e Delgado *et al* (1998b.): Valor Fuzzy, Ambiguidade e Incerteza.

O problema a ser resolvido para esse propósito é formulado como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Encontrar } x \\
 & \text{s. a.} \quad V \left(\sum_{j=1}^m \omega_j \tilde{d}_j(x) \right) \approx V(\tilde{d}) \\
 & \quad \quad \quad A \left(\sum_{j=1}^m \omega_j \tilde{d}_j(x) \right) \approx A(\tilde{d}) \\
 & \quad \quad \quad F \left(\sum_{j=1}^m \omega_j \tilde{d}_j(x) \right) \approx F(\tilde{d}) \\
 & \quad \quad \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n \quad x \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

O sinal " \approx " significa aproximadamente igual e $V(\tilde{d})$, $A(\tilde{d})$ e $F(\tilde{d})$ representam níveis desejados (ou ideais).

- Cálculo do Valor Fuzzy:

É verdade que:

$$V \left(\sum_{j=1}^m \omega_j \tilde{d}_j(x) \right) = \sum_{k=1}^l \omega_k V \left(\tilde{d}_k(x) \right) + \sum_{r=l+1}^m \omega_r V \left(\tilde{d}_r(x) \right). \quad (3.46)$$

Mas,

$$V \left(\tilde{d}_k(x) \right) = \frac{1}{r_{\tilde{f}_k}} V \left(\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^* \right) \quad (3.47)$$

Note que, para cada α -nível, tem-se que:

$$\left(\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^* \right)_\alpha = \left[\sum x_i c_{ki\alpha}^L - f_{k\alpha}^{*R}, \sum x_i c_{ki\alpha}^R - f_{k\alpha}^{*L} \right] \quad (3.48)$$

Considerando (3.48) e (3.47), segue que:

$$\begin{aligned} V \left(\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^* \right) &= \int_0^1 \alpha \left[\sum x_i c_{ki\alpha}^L - f_{k\alpha}^{*R} + \sum x_i c_{ki\alpha}^R - f_{k\alpha}^{*L} \right] d\alpha \\ &= \sum x_i \int_0^1 \alpha [c_{ki\alpha}^L + c_{ki\alpha}^R] d\alpha - \int_0^1 \alpha [f_{k\alpha}^{*L} + f_{k\alpha}^{*R}] d\alpha \end{aligned} \quad (3.49)$$

Já o Valor Fuzzy para os desvios das funções de maximização:

$$V \left(\tilde{d}_r(x) \right) = \frac{1}{r_{\tilde{f}_r}} V \left(\tilde{f}_r^* - \tilde{f}_r(x) \right) \quad (3.50)$$

Para cada α -nível, tem-se que:

$$\left(\tilde{f}_r^* - \tilde{f}_r(x) \right)_\alpha = \left[f_{r\alpha}^{*L} - \sum x_i c_{ri\alpha}^R, f_{r\alpha}^{*R} - \sum x_i c_{ri\alpha}^L \right] \quad (3.51)$$

Observando (3.51) e (3.50), segue que:

$$V\left(\tilde{f}_r^* - \tilde{f}_r(x)\right) = \int_0^1 \alpha [f_{r\alpha}^{*L} + f_{r\alpha}^{*R}] d\alpha - \sum x_i \int_0^1 \alpha [c_{ri\alpha}^L + c_{ri\alpha}^R] d\alpha \quad (3.52)$$

Então, $V\left(\sum_{j=1}^m \omega_j \tilde{d}_j(x)\right) \approx V(\tilde{d})$ equivale à:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} \left[\sum x_i \int_0^1 \alpha (c_{ki\alpha}^L + c_{ki\alpha}^R) d\alpha \right] - \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} \left[\sum x_i \int_0^1 \alpha (c_{ri\alpha}^L + c_{ri\alpha}^R) d\alpha \right] \approx \\ & V(\tilde{d}) + \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} \left[\int_0^1 \alpha (f_{k\alpha}^{*L} + f_{k\alpha}^{*R}) d\alpha \right] - \sum_{k=1}^l \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} \left[\int_0^1 \alpha (f_{r\alpha}^{*L} + f_{r\alpha}^{*R}) d\alpha \right] \end{aligned}$$

- Cálculo da Ambiguidade:

Com cálculos similares aos feitos para o Valor Fuzzy, calcula-se a Ambiguidade como segue:

$$A\left(\sum_{j=1}^m \omega_j \tilde{d}_j(x)\right) = \sum_{k=1}^l \omega_k A(\tilde{d}_k(x)) + \sum_{r=l+1}^m \omega_r A(\tilde{d}_r(x)). \quad (3.53)$$

Para os desvios correspondentes às funções de minimização:

$$A(\tilde{d}_k(x)) = \frac{1}{r_{\tilde{f}_k}} A(\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^*) \quad (3.54)$$

Levando em consideração (3.48) e (3.54), obtem-se:

$$A(\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^*) = \sum x_i \int_0^1 \alpha [c_{ki\alpha}^R - c_{ki\alpha}^L] d\alpha + \int_0^1 \alpha [f_{k\alpha}^{*R} - f_{k\alpha}^{*L}] d\alpha \quad (3.55)$$

Para as funções de maximização:

$$A\left(\tilde{d}_r(x)\right) = \frac{1}{r_{\tilde{f}_r}} A\left(\tilde{f}_r^* - \tilde{f}_r(x)\right) \quad (3.56)$$

Através de cálculos similares aos já feitos:

$$A\left(\tilde{f}_r^* - \tilde{f}_r(x)\right) = \sum x_i \int_0^1 \alpha \left[c_{ria}^R - c_{ria}^L \right] d\alpha + \int_0^1 \alpha \left[f_{r\alpha}^{*R} - f_{r\alpha}^{*L} \right] d\alpha \quad (3.57)$$

Conseqüentemente, $A\left(\sum_{j=1}^m \omega_j \tilde{d}_j(x)\right) \approx A(\tilde{d})$ equivale à:

$$\sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} \left[\sum x_i \int_0^1 \alpha \left(c_{kia}^R - c_{kia}^L \right) d\alpha \right] + \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} \left[\sum x_i \int_0^1 \alpha \left(c_{ria}^R - c_{ria}^L \right) d\alpha \right] \approx$$

$$A(\tilde{d}) - \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} \left[\int_0^1 \alpha \left(f_{k\alpha}^{*R} - f_{k\alpha}^{*L} \right) d\alpha \right] - \sum_{k=1}^l \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} \left[\int_0^1 \alpha \left(f_{r\alpha}^{*R} - f_{r\alpha}^{*L} \right) d\alpha \right]$$

- Cálculo da Incerteza (*Fuzziness*)

Para o operador Incerteza, tem-se:

$$F\left(\sum_{j=1}^m \omega_j \tilde{d}_j(x)\right) = \sum_{k=1}^l \omega_k F\left(\tilde{d}_k(x)\right) + \sum_{r=l+1}^m \omega_r F\left(\tilde{d}_r(x)\right) \quad (3.58)$$

Os desvios relacionados às funções de minimização são calculados como:

$$F\left(\tilde{d}_k(x)\right) = \frac{1}{r_{\tilde{f}_k}} F\left(\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^*\right) \quad (3.59)$$

Levando em consideração as Equações (3.48) e (3.59), tem-se que:

$$\begin{aligned}
F\left(\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_k^*\right) &= \sum x_i \int_0^{1/2} [c_{ki\alpha}^R - c_{ki\alpha}^L] d\alpha + \int_0^{1/2} [f_{k\alpha}^{*R} - f_{k\alpha}^{*L}] d\alpha \\
&\quad \sum x_i \int_{1/2}^1 [c_{ki\alpha}^L - c_{ki\alpha}^R] d\alpha + \int_{1/2}^1 [f_{k\alpha}^{*L} - f_{k\alpha}^{*R}] d\alpha \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Já os desvios relacionados às funções de maximização são calculados como segue:

$$F\left(\tilde{d}_r(x)\right) = \frac{1}{r_{\tilde{f}_r}} F\left(\tilde{f}_r^* - \tilde{f}_r(x)\right) \quad (3.61)$$

Em que:

$$\begin{aligned}
F\left(\tilde{f}_r^* - \tilde{f}_r(x)\right) &= \sum x_i \int_0^{1/2} [c_{ri\alpha}^R - c_{ri\alpha}^L] d\alpha + \int_0^{1/2} [f_{r\alpha}^{*R} - f_{r\alpha}^{*L}] d\alpha \\
&\quad \sum x_i \int_{1/2}^1 [c_{ri\alpha}^L - c_{ri\alpha}^R] d\alpha + \int_{1/2}^1 [f_{r\alpha}^{*L} - f_{r\alpha}^{*R}] d\alpha \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Consequentemente, $F\left(\sum_{j=1}^m \omega_j \tilde{d}_j(x)\right) \approx F(\tilde{d})$ equivale à:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} \left[\sum x_i \left(\int_0^{1/2} [c_{ki\alpha}^R - c_{ki\alpha}^L] d\alpha + \int_{1/2}^1 [c_{ki\alpha}^L - c_{ki\alpha}^R] d\alpha \right) \right] \\
&+ \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} \left[\sum x_i \left(\int_0^{1/2} [c_{ri\alpha}^R - c_{ri\alpha}^L] d\alpha + \int_{1/2}^1 [c_{ri\alpha}^L - c_{ri\alpha}^R] d\alpha \right) \right] \\
&\approx F(\tilde{d}) - \sum_{k=1}^l \frac{\omega_k}{r_{\tilde{f}_k}} \left[\int_0^{1/2} [f_{k\alpha}^{*R} - f_{k\alpha}^{*L}] d\alpha + \int_{1/2}^1 [f_{k\alpha}^{*L} - f_{k\alpha}^{*R}] d\alpha \right] \\
&\quad - \sum_{r=l+1}^m \frac{\omega_r}{r_{\tilde{f}_r}} \left[\int_0^{1/2} [f_{r\alpha}^{*R} - f_{r\alpha}^{*L}] d\alpha + \int_{1/2}^1 [f_{r\alpha}^{*L} - f_{r\alpha}^{*R}] d\alpha \right]
\end{aligned}$$

3.6.4 Algoritmo para Solução do Problema de PLMO Fuzzy

Considerando o Problema 3.19, propõe-se um algoritmo* para resolvê-lo que é resumido em sete passos a seguir:

- Entrada dos dados sobre região viável, funções objetivo e pesos ω_j ;
- Cálculo do Ponto Ideal;
- Cálculo do 0-nível do Ponto Anti-ideal;
- Cálculo dos $r_{\tilde{f}_j}$;
- Minimização da distância fuzzy \tilde{d}_j sob a métrica L_1 ;
- Obtenção do vetor de decisão (solução) a partir de $V(\tilde{d})$, $A(\tilde{d})$ e $F(\tilde{d})$;
- Apresentação dos resultados.

*O leitor que estiver interessado na rotina para solução do PLMO fuzzy proposto entrar em contato com o autor pelo e-mail: *gustavo_csn@hotmail.com*

Capítulo 4

Aplicação

Para ilustração do modelo de programação linear multiobjetivo fuzzy dissertado na Seção 3.6, será feito neste capítulo um estudo de caso sobre a utilização de biodiesel como insumo para geração de energia elétrica no município de Itacoatiara - AM a partir de dados dos parâmetros referentes às funções objetivo e restrições retirados de Bitar (2009).

Com essas informações obtidas da cadeia de produção energética, modela-se o problema de otimização através do ferramenta dissertada neste trabalho. As simulações são realizadas otimizando custo de geração de energia e impacto social provenientes do uso dessa tecnologia e, por último, o impacto ambiental mensurando a quantidade de CO_2 eliminada com a queima do combustível. Alguns cenários são identificados e analisados com aumentos do consumo de energia para essa cidade.

4.1 Sistema elétrico brasileiro

O sistema elétrico nacional é composto basicamente pelo Sistema Interligado (SIN) e pelos Sistemas Isolados (SI). O sistema interligado abrange as regiões Sul, Sudeste, Nordeste, Centro-Oeste e parte do Norte. Tem como vantagens a possibilidade da troca de energia entre regiões, a operação de hidrelétricas e termelétricas em regime de complementaridade e uma maior facilidade no seu processo de expansão, permitindo tanto a conexão de novas grandes

hidrelétricas quanto a integração de novas regiões, como por exemplo, a concessão leiloada pela ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica) para a construção da linha Tucuruí-Manaus-Macapá (ANEEL, 2008).

Os sistemas isolados, como seu nome já diz, são aqueles formados por usinas elétricas que não estão conectadas ao SIN e não permitem o intercâmbio de energia elétrica com outras regiões devido à dificuldades geográficas da região em que se encontram. Eles são predominantemente abastecidos por usinas térmicas alimentadas a óleo diesel e óleo combustível, embora também abriguem Pequenas Centrais Hidrelétricas (PCH) e Centrais Geradoras Hidrelétricas (CGH) e Termelétricas alimentadas pela biomassa (ANEEL, 2008). Os SI estão principalmente na Região Norte e tem custos elevados se comparados ao SIN.

Os custos de geração elevados dos SI se devem à predominância da utilização de sistemas térmicos (termelétricas). O uso do óleo diesel como insumo juntamente com o problema de localização geográfica podem ser vistos como alguns dos motivos para ter-se um custo relativamente tão alto. Com isso, o Governo Federal criou uma forma de subsidiar o custo de aquisição e transporte destes insumos (combustíveis não renováveis) em aproximadamente 60%, através da Conta de Consumo de Combustível (CCC) com o intuito de tornar compatível as tarifas de energia elétrica cobradas com o poder aquisitivo dos consumidores destas regiões (SOUZA, 2000). Este subsídio é mantido pelos consumidores do sistema interligado e, através da Lei 9.648-98, valerá somente até Maio de 2013. A ANEEL, então, tenta minimizá-los através de incentivos à substituição de geração termelétrica a diesel e redução dos gastos com a CCC.

Segundo Bitar (2009), a utilização da chamada biomassa (material constituído por substâncias de origem orgânica) e outras matérias primas renováveis desperta grande interesse devido às exigências cada vez maiores para preservação do meio ambiente, sem contar com seus custos, que cada vez mais se tornam competitivos.

4.2 Insumos energéticos para os sistemas isolados

A primeira etapa para o funcionamento de uma usina termelétrica é a queima do combustível para aquecimento da água que está numa caldeira (que gerará vapor necessário para movimentar turbinas e acionar o gerador de energia elétrica). Dependendo do combustível (insumo, fonte primária), é possível obter vários tipos de termelétricas com características que podem as favorecer ou não quando submetidas a avaliações de impactos socioeconômicos e ambientais (BITAR, 2009). Nesta dissertação, os insumos a serem utilizados para modelagem serão o óleo diesel e o biodiesel.

O óleo diesel é muito utilizado nas regiões mais distantes dos grandes centros. É uma boa fonte de emergência mesmo para o sistema interligado, quando há altos picos de consumo de energia, pois os geradores a diesel entram em operação (tempo de partida) de forma rápida. No entanto, é considerado poluente atmosférico, pela liberação de resíduos na combustão como monóxido de carbono (CO) - que na atmosfera gerará gás carbônico (CO_2) e compostos sulfídricos, como por exemplo, o dióxido de enxofre (SO_2). Tais compostos são indesejados, pois contribuem com alguns problemas, como o efeito estufa e a chuva ácida.

Referente ao biodiesel, Bitar (2009) comenta há vantagens na geração termelétrica descentralizada de energia com destaque a autonomia das comunidades, além de representarem efetivamente uma possibilidade de geração de renda local. Esse insumo se apresenta como uma boa opção para substituição ao diesel, este muito difundido nos sistemas isolados. É considerado como energia renovável, visto que as emissões de compostos de carbono são baixos em relação ao diesel e estas são capturadas pelas plantas, gerando um ciclo. Sem contar que, no Brasil há muitas terras cultiváveis que podem produzir uma enorme variedade de oleaginosas, principalmente nos solos menos produtivos, com um baixo custo de produção. Um outro ponto muito importante desse insumo é a geração de empregos no setor primário, de suma importância para evitar o êxodo do trabalhador campestre, reduzindo o inchaço das grandes

idades.

4.3 Considerações sobre o local de estudo (Itacoatiara-AM)

O problema a ser aqui modelado segue a linha encontrada em Bitar (2009) em que há a avaliação de fontes renováveis de energia - representada aqui pelo biodiesel - para garantir a expansão do sistema elétrico. Os estudos serão feitos comparativamente às termelétricas a óleo Diesel visto que essas ainda são adotadas em muitos municípios no interior do Amazonas, incluindo o município de Itacoatiara.

Os cenários a serem construídos baseiam-se na variação do consumo de energia visando o estudo da viabilidade de uma possível expansão do sistema ou a simples manutenção da capacidade instalada. Para cada alternativa de insumo, considerou-se quatro unidades termelétricas com potência média de 5,0 MW, cada. Será avaliado custo da geração X impacto social, sendo este último representado pela geração de empregos diretos, similar ao encontrado em Souza (2000).

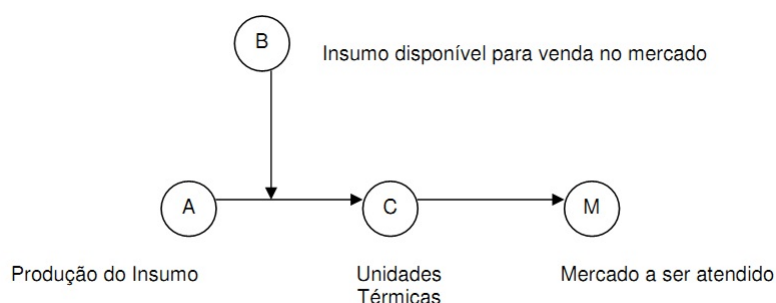


Figura 4.3.1: Esquema básico para cadeia de produção de energia. Fonte: Bitar (2009)

A cadeia produtiva para cada insumo obedece, essencialmente, ao modelo apresentado na Figura 4.3.1, com duas opções de alimentação: O insumo poderá ser adquirido diretamente no mercado disponível (nó B) ou produzido na própria região (nó A). Em qualquer dos casos ocorre o transporte do insumo que é uma característica dos sistemas isolados, seguido da produção

da energia e entrega ao mercado consumidor representado pelo nó M (BITAR, 2009).

O ponto desejado (Capítulo 3) será considerado como sendo o ponto ideal (Definição 2.2.11). Esta é uma idéia coerente, visto que numa situação ideal, essas seriam as soluções que conduziriam a uma política ótima, se forem desconsiderados os conflitos entre os critérios (BITAR, 2009). Os dados restantes para o modelo a ser descrito na próxima seção, como por exemplo as eficiências para cada termelétrica são apresentados na Tabela 4.1 que foi retirada de Bitar (2009) e Souza (2000).

Tabela 4.1: Dados utilizados na confecção dos modelos matemáticos. Fonte: Bitar (2009)

M.P.	Discriminação	Unidade	Valor
DIESEL	Custo de aquisição	US\$/MWh	22,1
	Custo de transporte	US\$/MWh	3,71
	Custo com O&M	US\$/MWh	113,04
	Geração de empregos diretos (Op. e manut.)	Emp./MWh	$2,28 \times 10^{-4}$
	Geração de empregos no transporte	Emp./MWh	$2,83 \times 10^{-3}$
BIODIESEL	Custo de aquisição do biodiesel	US\$/MWh	63,34
	Custo com transporte	US\$/MWh	12,97
	Custo com O&M	US\$/MWh	113,04
	Custo de prod. agríc./manut. planta de extração.	US\$/MWh	6,55
	Custo de O&M da fábrica de biodiesel	US\$/MWh	4
	Geração de empregos diretos (Op. e manut.)	Emp./MWh	$6,35 \times 10^{-4}$
	Geração de empregos no transporte	Emp./MWh	$2,83 \times 10^{-3}$
	Eficiência na produção de óleo		72%
	Eficiência no transporte de óleo		99%
	Eficiência na extração do óleo		72%
Eficiência na colheita da planta		80%	

Os valores para a eficiência das termelétricas serão os mesmos que os utilizados por Souza (2000). São iguais e valem 28% para qualquer dos dois insumos.

4.4 Montagem das Funções Objetivo e Restrições

O problema a ser resolvido pode ser representado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \min \langle \tilde{C}, x \rangle \\
& \max \langle \tilde{E}, x \rangle \\
& \text{s. a. } x \in X \subset \mathbb{R}^n \quad x \geq 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

em que \tilde{C} representa um vetor de custos unitários fuzzy e \tilde{E} , índice de empregos fuzzy (quociente de postos de trabalho por quantidade de energia).

A seguir, tem-se os parâmetros bem como as restrições e coeficientes das funções objetivo que serão utilizados na modelagem conforme Bitar (2009). Vale ressaltar que, para os coeficientes das funções objetivo, serão considerados números triangulares com desvios de $\pm 5\%$ em relação ao valor central (pertinência 1) mostrado nas referentes tabelas. Ou seja, para cada valor (por exemplo, c) nas tabelas desses coeficientes, o número fuzzy triangular associado será $(0,95c ; c ; 1,05c)$. Os pesos utilizados (ω_j) serão 0,4 para a função custo e 0,6 para a função emprego, ou seja, tem-se maior interesse pelo impacto social por parte do decisor. Será considerado que demanda a ser suprida é de 77788,8 MWh.

4.4.1 Insumo Diesel

- Parâmetros

- D_o : Energia associada a quantidade de óleo comprada.
- D_{u_k} : Energia associada ao diesel utilizado na unidade k ($k = 1, 2, 3, 4$).
- D_{tr} : Energia associada ao diesel transportado
- D_u : Energia produzida (útil).
- eft : Eficiência termelétrica.
- $eftr$: Eficiência no transporte para as usinas.

- c_k : Capacidade da unidade k ($k = 1, 2, 3, 4$).
- D : Energia projetada para o horizonte de planejamento.

- Restrições (Espaço de Decisão)

$$D_{u_k} \leq c_k, k = 1, \dots, 4. \quad (\text{limite de capacidade das unidades})$$

$$D_{u_1} + D_{u_2} + D_{u_3} + D_{u_4} = D_u \quad (\text{energia útil produzida pelas unidades})$$

$$D_u - eft * D_{tr} = 0 \quad (\text{eficiência termelétrica})$$

$$D_{tr} - eptr * D_o = 0 \quad (\text{eficiência do transporte})$$

$$D_{u_k} \geq 0, k = 1, \dots, 4. \quad (\text{não negatividade})$$

$$D_u \geq D \quad (\text{atendimento à demanda})$$

- Coeficientes das funções objetivo

<i>Funções</i>	D_o	D_{tr}	D_{u_1}	D_{u_2}	D_{u_3}	D_{u_4}	D_u
Custo	22,1	3,71	113,04	113,04	113,04	113,04	0
Emprego	0	$2,83 \times 10^{-3}$	$2,28 \times 10^{-4}$	$2,28 \times 10^{-4}$	$2,28 \times 10^{-4}$	$2,28 \times 10^{-4}$	0

4.4.2 Insumo Biodiesel

- Parâmetros

- V_p : Energia associada ao biodiesel plantado.
- V_c : Energia associada ao biodiesel colhido.
- V_{tr} : Energia associada ao biodiesel transportado.
- V_e : Energia associada ao biodiesel extraído.
- V_t : Energia associada ao biodiesel tratado.
- V_u : Energia produzida.

- V_{u_k} : Energia associada ao biodiesel fornecido à unidade k ($k = 1, 2, 3, 4$).
- eft : Eficiência termelétrica.
- efc : Eficiência na colheita.
- efe : Eficiência na extração do biodiesel.
- efp : Eficiência na produção (tratamento).
- $eftr$: Eficiência no transporte para as usinas.
- c_k : Capacidade da unidade k ($k = 1, 2, 3, 4$).
- D : Energia projetada para o horizonte de planejamento.

- Restrições (Espaço de Decisão)

- $V_{u_k} \leq c_k, k = 1, \dots, 4.$ (limite de capacidade das unidades)
- $V_{u_1} + V_{u_2} + V_{u_3} + V_{u_4} = V_u$ (energia útil produzida pelas unidades)
- $V_c - efc * V_p = 0$ (eficiência da colheita)
- $V_e - efe * V_c = 0$ (eficiência da extração)
- $V_t - efp * V_e = 0$ (eficiência do tratamento)
- $V_{tr} - eftr * V_t = 0$ (eficiência do transporte)
- $V_u - eft * V_{tr} = 0$ (eficiência termelétrica)
- $V_{u_k} \geq 0, k = 1, \dots, 4.$ (não negatividade)
- $V_u \geq D$ (atendimento à demanda)

- Coeficientes das funções objetivo (primeira etapa - atividade agrícola)

<i>Funções</i>	V_p	V_c	V_e	V_t
Custo	6,55	0	4	38,004
Emprego	$3,29 \times 10^{-3}$	$3,32 \times 10^{-4}$	$2,37 \times 10^{-5}$	0

Vale ressaltar que o custo unitário de V_t avaliado em 38,004 $US\$/MWh$, que representa somente o custo unitário na produção do óleo, é uma aproximação de 60% do encontrado

em Bitar (2009), pois aqui está se considerando toda a cadeia produtiva e o valor do custo encontrado nesta referência já tinha nele embutido todos os custos anteriores (plantio, colheita e extração). Caso a aquisição do biodiesel for realizada diretamente do mercado, o coeficiente de V_t será nulo.

- **Coefficientes das funções objetivo (segunda etapa - produção de energia elétrica)**

<i>Funções</i>	V_{tr}	V_{u_1}	V_{u_2}	V_{u_3}	V_{u_4}	V_u
Custo	12,97	113,04	113,04	113,04	113,04	0
Emprego	$2,83 \times 10^{-3}$	$6,35 \times 10^{-4}$	$6,35 \times 10^{-4}$	$6,35 \times 10^{-4}$	$6,35 \times 10^{-4}$	0

4.5 Obtenção das soluções e análise dos resultados

As tabelas a seguir apresentam os resultados obtidos após simulações feitas a partir do Modelo 3.19 com os dados da seção anterior e considerando previsões de aumentos percentuais sobre consumo de energia (ΔD). As Tabelas 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 apresentam os conjuntos α -níveis dos custos ótimos fuzzy (total e unitário) para diferentes valores de α .

As Tabelas 4.7 e 4.8 apresentam os conjuntos α -níveis dos números de empregos ótimos fuzzy para diferentes valores de α .

Na Tabela 4.9, considera-se o impacto ambiental como sendo somente a emissão de CO_2 na atmosfera. Neste caso, segue-se a modelagem proposta por Bitar (2009), que relaciona a quantidade de CO_2 em toneladas com a total da energia utilizada na produção, em MWh, produzida pelas 4 termelétricas (V_u ou D_u). Ou seja:

$$Q_{CO_2}^D = 0,93D_u \quad (Diesel)$$

$$Q_{CO_2}^V = 0,422V_u \quad (Biodiesel)$$

As Tabelas 4.10 e 4.11 mostram os valores de energia em MWh para cada item de sua cadeia produtiva (variáveis de decisão).

4.5.1 Análise dos resultados

Observando as Tabelas 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, verificam-se algumas peculiaridades que são descritas a seguir observando os custos, impactos sociais, impactos ambientais e utilização da capacidade instalada.

- Quanto aos custos, nas simulações feitas, os valores obtidos para o diesel são menores que os obtidos com o biodiesel. No entanto, vale lembrar que a CCC (Conta de Consumo de Combustível), que subsidia o custo de aquisição e transporte, valerá somente até Maio de 2013, o que resultaria em um aumento significativo nos valores de custo do óleo diesel. Idéia que segue o resultado obtido em Souza (2000), que comenta que o diesel, com o passar do tempo, será cada vez menos competitivo, visto que é um derivado de uma fonte não-renovável de energia.
- Quanto ao impacto social, representado pela geração de empregos diretos, o biodiesel mostra-se em vantagem para esse tipo de política, pois apresenta maiores valores comparados ao diesel. Nessa configuração, os empregos gerados no setor primário, por exemplo, faz com que o trabalhador rural tenha renda em sua própria cidade, evitando migrações para as metrópoles dando espaço a auto-sustentabilidade.
- Quanto aos impactos ao meio ambiente, verifica-se que o biodiesel, nas simulações, emite cerca de 45 mil toneladas de CO_2 a menos que o diesel (em média). Esse resultado colabora com o que estabelece o Protocolo de Quioto, que visa, dentre outras coisas, a diminuição das emissões de gases poluentes na atmosfera. Essa diminuição nas emissões, do ponto de vista do princípio ambiental do "poluidor-pagador", pode ser vista como obtenção de créditos de carbono. Como referência, a empresa Suzano Papel e Celulose vendeu 20 mil toneladas de crédito de carbono na Chicago Climate Exchange (CCX), em pregão online, no final de Fevereiro de 2007 (AMS, 2007). Ou seja, o valor obtido é, de certa forma, bastante significativo.

- Quanto ao horizonte de planejamento, os aumentos percentuais na demanda pouco influenciam na escolha do insumo na utilização da capacidade instalada nas termelétricas. Como se pode ver na Tabela 4.12, tanto o diesel quanto o biodiesel utilizam entre 70% e 90% da capacidade instalada. Vale ressaltar que esses valores são referentes à eficiência termelétrica de 28%. Como se sabe, esses valores depreciam ao longo do tempo, sendo necessária uma substituição ou uma re-engenharia quando essa eficiência chegam a um valor crítico.

Levando em consideração os tópicos analisados, verifica-se que o biodiesel, nestas simulações, é um candidato fortíssimo para a substituição do óleo diesel na geração de energia elétrica para sistemas isolados.

Tabela 4.3: Conjuntos α -níveis da função custo total (US\$) para variações nas demandas (Diesel).

Diesel	$[\tilde{Z}]_{\alpha} = [a, b] * 10^3$					
	$\alpha = 0,25$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,75$	
$\Delta D\%$						
5%	16.624,87	17.920,32	16.840,78	17.704,41	17.056,69	17.488,50
10%	17.395,73	18.751,24	17.621,65	18.525,33	17.847,57	18.299,40
15%	18.165,10	19.580,56	18.401,01	19.344,65	18.636,92	19.108,74

Tabela 4.4: Conjuntos α -níveis da função custo total (US\$) para variações nas demandas (Biodiesel).

Biodiesel	$[\tilde{Z}]_{\alpha} = [a, b] * 10^3$					
	$\alpha = 0,25$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,75$	
$\Delta D\%$						
5%	30.162,20	32.512,50	30.553,92	32.120,79	30.945,64	31.729,07
10%	31.517,54	33.973,45	31.926,86	33.564,13	32.336,18	33.154,82
15%	33.049,63	35.624,93	33.478,85	35.195,71	33.908,06	34.766,49

Tabela 4.5: α -níveis do custo unitário (US\$ / MWh) para variações nas demandas (Diesel).

Diesel	$[\tilde{Z}]_{\alpha} = [a, b]$					
	$\alpha = 0,25$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,75$	
$\Delta D\%$						
5%	213,72	230,37	216,49	227,60	219,27	224,82
10%	223,63	241,05	226,53	238,15	229,44	235,24
15%	233,52	251,71	236,55	248,68	239,58	245,65

Tabela 4.6: α -níveis do custo unitário (US\$ / MWh) para variações nas demandas (Biodiesel).

Biodiesel	$[\tilde{Z}]_{\alpha} = [a, b]$					
$\Delta D\%$	$\alpha = 0,25$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,75$	
5%	387,74	417,96	392,78	412,92	397,82	407,89
10%	405,17	436,74	410,43	431,48	415,69	426,22
15%	424,86	457,97	430,38	452,45	435,9	446,93

Tabela 4.7: α -níveis do número de postos de trabalho (Emp./ MWh) para variações nas demandas (Diesel).

Diesel	$[\tilde{Z}]_{\alpha} = [a, b]$					
$\Delta D\%$	$\alpha = 0,25$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,75$	
5%	834,02	899,00	844,85	888,17	855,68	877,34
10%	872,69	940,69	884,02	929,36	895,35	918,02
15%	911,28	982,29	923,12	970,46	934,95	958,62

Tabela 4.8: α -níveis do número de postos de trabalho (Emp./ MWh) para variações nas demandas (Biodiesel).

Biodiesel	$[\tilde{Z}]_{\alpha} = [a, b]$					
$\Delta D\%$	$\alpha = 0,25$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,75$	
5%	3.374,95	3.637,93	3.418,78	3.594,10	3.462,61	3.550,27
10%	3.526,60	3.801,40	3.572,40	3.755,60	3.618,20	3.709,80
15%	3.698,03	3.986,19	3.746,06	3.938,17	3.794,09	3.890,14

Tabela 4.9: Emissão de CO_2 .

	Diesel	Biodiesel
$\Delta D\%$	CO2	CO2
5%	77.972,22	35.408,60
10%	81.587,62	36.999,69
15%	85.196,02	38.798,27

Tabela 4.10: Valores obtidos para as variáveis de decisão para o Diesel (Energia em MWh).

	5%	10%	15%
D_o	302457,06	316481,33	330478,46
D_{tr}	299432,49	313316,52	327173,67
D_{u_1}	24301,60	25420,01	26530,46
D_{u_2}	14273,16	14947,00	15632,08
D_{u_3}	17441,83	18249,03	19063,10
D_{u_4}	27824,52	29112,59	30382,99
D_u	83841,10	87728,63	91608,63

Tabela 4.11: Valores obtidos para as variáveis de decisão para o Biodiesel (Energia em MWh).

	5%	10%	15%
V_p	729874,37	762671,27	799745,25
V_c	583899,49	610137,02	639796,20
V_e	420407,64	439298,65	460653,27
V_t	302693,50	316295,03	331670,35
V_{tr}	299666,56	313132,08	328353,65
V_{u_1}	23992,37	25064,09	26251,58
V_{u_2}	14961,20	15639,22	16455,49
V_{u_3}	17836,06	18631,02	19558,29
V_{u_4}	27117,01	28342,66	29673,66
V_u	83906,64	87676,98	91939,02

Tabela 4.12: Percentual de utilização da capacidade instalada de cada unidade.

$\Delta D\%$	U.T.	Diesel	Biodiesel
5%	u_1	74,57%	73,63%
	u_2	76,50%	80,18%
	u_3	75,42%	77,12%
	u_4	74,56%	72,67%
10%	u_1	78,01%	76,91%
	u_2	80,11%	83,82%
	u_3	78,91%	80,56%
	u_4	78,01%	75,95%
15%	u_1	81,41%	80,56%
	u_2	83,78%	88,19%
	u_3	82,43%	84,57%
	u_4	81,42%	79,52%

Considerações finais

Conclusão

Os modelos de programação matemática utilizando lógica fuzzy se tornaram muito utilizados devido à uma melhor aproximação na descrição de cenários reais de otimização pois oferece maior fidelidade no armazenamento e na programação de conceitos imprecisos, tornando possível a operação com números que contenham incertezas incorporadas.

O estudo de problemas de otimização multiobjetivo tornou-se aplicável a várias áreas do conhecimento e auxilia na solução de vários problemas práticos, como os processos de decisão que envolvem a consideração de determinado número de objetivos conflitantes entre si. A solução de tais problemas tem sido motivo de investigação dentro da comunidade científica.

Neste trabalho, objetivou-se apresentar um modelo flexível que além de se apropriar da versatilidade de trabalhar com incertezas (lógica Fuzzy), ajuda na busca de um solução ótima para auxílio no processo de decisão. É aplicável a problemas cujos parâmetros estão expressos de forma imprecisa. A abordagem utilizada é a da otimização de distância para um ponto de referência, chamado aqui de Ponto Ideal. Muitos dos métodos de otimização multiobjetivo utilizam essa idéia de distância mínima, como por exemplo a Programação por Metas. A decisão ótima é obtida através do número fuzzy que representa a "melhor" distância a partir dos índices de Valor Fuzzy, Ambiguidade e Incerteza (Fuzziness).

Definido o modelo, simulações foram feitas no contexto do planejamento energético de

sistemas isolados e seus resultados revelam o potencial dessas ferramentas. Desta forma, o modelo proposto pode ser utilizado como ferramenta para previsão de cenários e de apoio à tomada de decisão.

Sugestões para trabalhos futuros

Com o intuito de progredir na pesquisa, abordando aspectos não estudados no presente trabalho ou de melhorar as formulações apresentadas, faz-se, em seguida, algumas sugestões e considerações para trabalhos futuros:

- Verificar a possibilidade de ganho ao se utilizar outras métricas além da L_1 .
- Estender o modelo estudado para abranger incertezas nas restrições.
- Estender os resultados obtidos em Farhadinia (2011) para outras funções de classificação, como por exemplo a do Valor Fuzzy, introduzida por Delgado *et al.* (1998).

Referências Bibliográficas

- [1] AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA - ANEEL. *Atlas de Energia Elétrica do Brasil*. 2. ed. Brasília: 2008. 233p.
- [2] ANDRADE, E.L. *Introdução à pesquisa operacional*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2009.
- [3] ARENAS, M.; TEROL, A.B.; PÉREZ GLADISH, B.; RODRÍGUEZ URÍA, M.V. Solving a multiobjective possibilistic problem through compromise programming. *European Journal of Operational Research*, v. 164, p. 748-759, 2005.
- [4] ARROYO, J.E.C. *Heurísticas e Metaheurísticas para Otimização Combinatória Multiobjetivo*. Campinas, 2002. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação. Universidade Estadual de Campinas.
- [5] ASSOCIAÇÃO MINEIRA DE SILVICULTURA. *Crédito de carbono: sem liderança, mas dentro do mercado*. Minas Gerais: 2007. Ano II. 3.ed. 8p.
- [6] BARROS, L.C.; BASSANEZI, R.C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Campinas. 2006. 2. ed. (Coleção IMECC-Textos Didáticos, 5)
- [7] BECTOR, C.R.; CHANDRA, S.; *Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games*. Springer-Verlag, 2005.
- [8] BITAR, S.D.B. *Modelos de Programação Matemática Fuzzy para auxílio ao Planejamento da Expansão dos Sistemas Elétricos Isolados na Amazônia*. Belém, 2009. Tese de Doutorado. PPGEE - Universidade Federal do Pará.

- [9] CANE, P. *Gigantes da ciência*. Editora Tecnoprint S.A, 1959.
- [10] CHANAS, S.; ZIELINSKI, P. On the Equivalence of Two Optimization Methods for Fuzzy Linear Programming Problems. *European Journal of Operational Research*, v. 121, p. 56-63, 2000.
- [11] CHANGKONG, V.; HAIMES, Y.Y. *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. New York: North-Holland, 1983.
- [12] COHON, J.L. *Multiobjective Programming and Planning*. New York: Academic Press, 1978.
- [13] DELGADO, M.; VILA, M.A.; VOXMAN, W. On a Canonical Representation of Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 93, p. 125-135, 1998a.
- [14] DELGADO, M.; VILA, M.A.; VOXMAN, W. A Fuzziness Measure for Fuzzy Numbers: Applications. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 94. p. 205-216, 1998b.
- [15] DIVERIO, T.A. *Uso efetivo da matemática intevarlar em supercomputadores vetoriais*. Porto Alegre, 1995. Tese de doutorado, UFRGS.
- [16] FARHADINIA, B. Necessary and Sufficient Optimality Conditions for Fuzzy Linear Programming. *Journal of Applied Mathematics and Informatics*. v. 29, n. 1-2, p. 337-349, 2011.
- [17] FERREIRA, P.A.V. *Introdução à Programação Multiobjetivo*. [Campinas], 1999. Disponível em: <<http://www.dt.fee.unicamp.br/~valente/ia527.html>>. Acesso em: 22 abr. 2011.
- [18] FORTEMPS, P.; ROUBENS, M. Ranking and Defuzzification Methods Based on Area Compensation. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 82, p. 319-330, 1996.
- [19] GANDOLPHO, A.A. *Metodologia de Resolução de Problemas de Programação Linear Fuzzy*. Rio de Janeiro, 2005. Tese de Doutorado, PUC-RJ.

- [20] HAIMES, Y. Y.; LASDON, L.S., WISMER, D.A. On a Bicriterion Formulatiomm of the Problems of Integrated System Identification ans System Optimization, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 1, p. 296-297, 1971.
- [21] JIMENEZ, M.; ARENAS, M.; TEROL, A.B.; RODRÍGUEZ URÍA, M.V. Linear programming with fuzzy parameters: An interactive method resolution. *European Journal of Operational Research*, v. 177, p. 1599-1609, 2005.
- [22] JIMENEZ, M.; TEROL, A.B. Pareto-optimal solutions in fuzzy multi-objective linear programming. *Fuzzy sets and systems*, v. 160, p. 2714-2721, 2009.
- [23] KLIR, G.J. *Uncertainty and Information - Foundations of Generalized Information Theory*. New Jersey. John Wiley and Sons, Inc., 2006.
- [24] KREYSZIG, E. *Matemática superior para engenharia*. Tradução de Luís Antônio Fajardo Pontes. Rio de Janeiro: Editora LTC, v.3, 2009.
- [25] KUMAR, A.; SINGH, P.; KAUR, J. Generalized Simplex Algorithm to Solve Fuzzy Linear Programming Problems with Ranking of Generalized Fuzzy Numbers. *Turkish Journal of Fuzzy Systems*. v. 1, n. 2, p. 80-103, 2010.
- [26] LIMA, E.L. *Curso de Análise: Volume 1. (Projeto Euclides)*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007.
- [27] MIETTINEN, K. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Boston, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [28] NAKAYAMA, H.; YUN, Y.; YOON, M. *Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence*. Springer-Verlag. (Serie: Vector Optimization), 2009.
- [29] OLIVEIRA, P.W.; DIVERIO, T.A.; CLAUDIO, D.M. *Fundamentos de matemática intervalar*. SAGRA-Luzzatto, 1997.

- [30] PARETO, V. *Manual de economia política*. Tradução de João Guilherme Vargas Netto. [S.I.]: Editora Nova Cultural, 1996.
- [31] RALESCU, D. A generalization of the representation theorem. *Fuzzy sets and systems*, v. 51, p. 309-311, 1992.
- [32] ROMMELFANGER, H. Fuzzy Linear Programming and Applications. *European Journal of Operational Research*, v. 92, p. 512-527, 1996.
- [33] SILVA, R.C. *Programação Multi-objetivo Fuzzy*. Campinas, 2009. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação. Universidade Estadual de Campinas.
- [34] SOUSA, C.A. *Teoria de conjuntos fuzzy e regressão logística na tomada de decisão para realização de cintilografia das paratiróides*. São Paulo, 2007. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Saúde Pública, USP.
- [35] SOUZA, R.C.R. *Planejamento do Suprimento de Eletricidade dos Sistemas Isolados na Região Amazônica: uma Abordagem Multiobjetivo*. Campinas, 2000. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Mecânica. Universidade Estadual de Campinas.
- [36] TEROL, A.B. A new approach for multiobjective decision making based on fuzzy distance minimization. *Mathematical and computer modelling*, v. 47, p. 808-826, 2008.
- [37] YAGER, R.R. A Procedure for Ordering Fuzzy Subsets of the Unit Interval. *Information Science*, v. 24, p. 143-161, 1981.
- [38] ZADEH, L.A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, v. 8, p. 338-353, 1965.
- [39] ZELENY, M. *Linear Multiobjective Programming*. Berlin and New York: Springer-Verlag, 1974.