

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPLETAS E ESTÁVEIS EM \mathbb{R}^3

Ivana Soares Bandeira

MANAUS - 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Ivana Soares Bandeira

SUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPLETAS E ESTÁVEIS EM \mathbb{R}^3

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 14 de Maio de 2012.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus-Parens por ter me vivificado e concedido forças para persistir.

A todos que de alguma forma colaboraram para o êxito desse trabalho.

À toda minha família, em especial, aos meus pais, Pedro Bandeira de Farias e Iêda Soares da Silva, pelo amor e apoio incondicional que me têm dado.

Aos professores do departamento de Matemática da UFAM que contribuíram na formação na graduação e pós-graduação.

Aos amigos pela companhia, troca de conhecimentos e por toda ajuda.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

SUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPLETAS E ESTÁVEIS EM \mathbb{R}^3

Neste trabalho estamos interessados em responder a seguinte questão: Uma superfície tridimensional mínima, completa e estável é um plano? Para isso precisamos compreender três fatos importantes: os planos são as únicas superfícies mínimas que podem ser obtidas gráficos (Teorema de Bernstein), em seguida, superfícies mínimas que são gráficos de funções diferenciáveis são estáveis (Teorema de J. L. Barbosa e M. Do Carmo), e por fim, temos que as únicas superfícies tridimensionais, mínimas, completas, estáveis e orientáveis são os planos (Teorema de M. do Carmo e C. K. Peng).

ABSTRACT

STABLE COMPLETE MINIMAL SURFACE IN \mathbb{R}^3

In this work we are interested in replying the following question: a tridimensional stable minimal surface is a plane? For this, we need to understand three important facts: in \mathbb{R}^3 minimal graphics are planes (Bernstein's Theorem), next, minimal surfaces which are graphics of differentiable functions are stables (Theorem of J. L. Barbosa and M. Do Carmo), and finally, we have that the only tridimensional stable complete minimal surfaces are planes (Theorem of M. do Carmo and C. K. Peng).

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Conceitos Fundamentais	3
1.2 Função Holomorfa	3
1.3 Alguns Teoremas	4
1.4 Conceitos de Geometria Riemanniana	4
1.4.1 Variedades Diferenciáveis	4
1.4.2 Campos de Vetores	6
1.4.3 Métricas Riemannianas	7
1.4.4 Conexões Afins e Riemanniana	8
1.4.5 Geodésicas	10
1.4.6 Curvatura	11
1.4.7 Curvatura Seccional	12
1.4.8 As Equações Fundamentais de uma Imersão Isométrica	18
1.5 Operadores Diferenciais	22
1.6 Campos de Jacobi	26
1.6.1 Campos de Jacobi em variedades de curvatura constante	27
2 O Teorema de Bernstein	29
2.1 Superfície	29
2.2 Superfície Mínima	31
2.3 Parâmetros Isotérmicos	32
2.4 Exemplos	34
2.5 Equação de Monge-Ampère	37
2.6 Teorema de Jörgens	38
2.7 Todo Gráfico Mínimo em \mathbb{R}^3 é um Plano	40
2.7.1 Lemas Preliminares	40
2.7.2 Teorema de Bernstein	45
3 Estabilidade das Superfícies Tridimensionais	49
3.1 Fórmula da Primeira Variação da Área	49
3.2 Fórmula da Segunda Variação da Área	50
3.3 Estabilidade	51
3.4 Índice de Morse	52
Referências Bibliográficas	62

Introdução

A teoria das superfícies mínimas foi originalmente motivada pela noção de superfícies que minimizam área com o bordo fixo. O atrativo das superfícies mínimas parece estar na combinação da solidez do objeto de estudo, a sua origem e a relação com o mundo físico, e o modo que eles estão na interseção de tantos tópicos diferentes da Matemática. Dois resultados impulsionaram o desenvolvimento das superfícies mínimas no século XX.

O primeiro é o trabalho no Problema de Plateau, o qual nos permite dar um significado mais intuitivo à estabilidade das superfícies mínimas. Imaginemos uma curva fechada \mathcal{C} feita de um arame fino, e mergulhemos \mathcal{C} em uma solução de água com sabão. Retirando cuidadosamente o contorno \mathcal{C} da solução, aparece uma película fina de líquido, que tem em geral a forma de uma superfície regular tendo \mathcal{C} como fronteira e que está em equilíbrio sob a ação da tensão superficial do líquido. É possível provar que esta superfície de equilíbrio tem curvatura média $H \equiv 0$. Isto decorre de uma fórmula devida a Laplace, que diz que a pressão em cada ponto exercida pela superfície sobre o meio ambiente é dirigida na direção normal à superfície e proporcional a H , como toda a superfície está em equilíbrio, H se anula em todos os pontos. As películas de sabão que são superfícies regulares são superfícies mínimas. Além disso, tais películas são estáveis no sentido da mecânica, isto é, uma perturbação pequena dá origem a forças que fazem a película voltar à posição inicial.

O outro resultado interessante foi a inovada aproximação entre superfícies mínimas e as equações diferenciais parciais por Serge Bernstein o qual conduziu ao conhecido Teorema de Bernstein, afirmando que a única solução para a equação das superfícies mínimas sob o plano todo é a solução trivial: uma função linear. Levando em conta a multiplicidade de soluções que possui a equação de Lagrange, é realmente notável que o mero fato da solução estar definida para todo (x, y) exclua todas as soluções menos a trivial. O Teorema de Bernstein se relaciona com uma questão de estabilidade que iremos descrever.

A história subsequente desses dois problemas mostra como resultados, teoricamente, simples podem promover crescimento em diversas direções. Já na década de 70, João Lucas Barbosa e Manfredo do Carmo, se interessaram pelo antigo resultado de Schwarz: seja S uma superfície mínima e $D \subset S$ um domínio limitado. Suponha que $K \neq 0$ em D , que a aplicação normal de Gauss g é biunívoca em D , e que a imagem esférica $g(D)$ de D está contida em um hemisfério \mathbb{S}^2 . Então D é estável. A questão é se era necessário que a imagem esférica estivesse contida em algum hemisfério ou se alguma outra propriedade do hemisfério, por exemplo, a área, é que era relevante. Em 1976, publicaram [1] o seguinte resultado: Seja $D \subset S$ uma região limitada de uma superfície mínima S , e $N(D) \subset S^2(1)$ a imagem esférica de D . Se área $N(D) < 2\pi$, então D é estável. Em 1978, Manfredo do Carmo apresentou seus trabalhos que havia obtido sobre estabilidade de superfícies mínimas e propôs o seguinte problema: o plano é a única superfície mínima completa do \mathbb{R}^3 tal que todo o seu domínio é estável. No ano seguinte publicou [5].

Neste trabalho damos um entendimento razoável sobre a estabilidade de superfícies mín-

imas em \mathbb{R}^3 e uma noção de compo podemos medir a sua não estabilidade. Estudamos também equações, como equação das superfícies na forma não-paramétrica, equação de Monge-Ampère, fórmulas da primeira e segunda variação da área, e teoremas essenciais para o entendimento dos três teoremas: Teorema de Bernstein, Teorema de J. L. Barbosa e M. Do Carmo e Teorema de M. do Carmo e C. K. Peng. Além disso, estabelecemos algumas noções essenciais sobre a teoria das variedades que serão necessárias no decorrer do texto, tais como o conceito de imersão mínima, laplaciano, operador de Weingarten.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conceitos Fundamentais

Em 1851, matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann fez uma apresentação sobre a teoria geral de funções com variável complexa, baseada nas hoje chamadas Equações de Cauchy-Riemann. Nela inventou o instrumento da superfície de Riemann.

Além de ser um importante campo de estudo por si só, as superfícies de Riemann têm sido uma importante fonte de inspiração, intuição e exemplos em vários ramos da Matemáticas. Em particular, as superfícies de Riemann conectam a Análise e a Geometria no campo de variável complexa, de modo que permite relacionar a geometria com certas propriedades das funções analíticas. No decorrer do texto veremos sobre a relação entre superfícies mínimas e funções analíticas de uma variável complexa, para isso precisamos dos seguintes resultados.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto com coordenadas reais (u, v) e coordenada complexa $z = u + iv$; $i = \sqrt{-1}$, $u, v \in \mathbb{R}$. Denotamos por $\bar{z} = u - iv$; o conjugado de z .

Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Se $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$; $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial u} + i \frac{\partial f_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f_1}{\partial v} + i \frac{\partial f_2}{\partial v}.$$

Também observamos que:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} - i \frac{\partial f_2}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + i \frac{\partial f_2}{\partial u} \right)$$

uma vez que podemos escrever $u = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e $v = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

1.2 Função Holomorfa

Lembremos que f é holomorfa se, e somente se, obedece as *Equações de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v} \quad e \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Quando temos uma função holomorfa em todo \mathbb{C} , ela é dita *inteira*. E, dizemos que f é harmônica se

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

Usa-se o termo Laplaciano de U . Em particular,

- f é harmônica se, e só se, $\frac{\partial f}{\partial z}$ é holomorfa;
- As partes real e imaginária de uma função holomorfa são harmônicas.

Diante do exposto acima surge a seguinte questão: vale a recíproca? Ou seja, dada uma função real, $f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes continuamente diferenciável, também dizemos de classe \mathcal{C}^2 , existe uma função holomorfa $f \in \mathcal{C}^2$ tal que a parte real de f é igual a f_1 ? Assim, dada f_1 devemos achar $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica tal que $f = f_1 + if_2$ seja holomorfa. Quando tal função f_2 existir, diremos que uma conjugada harmônica de f_1 .

1.3 Alguns Teoremas

Teorema 1.1. *Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica, então é analítica.*

Temos muitas maneiras de estudar o comportamento de funções analíticas, um dos resultados que nos convém é o seguinte:

Teorema 1.2 (Princípio do Máximo). *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica; Ω é conexo. Se f tem um máximo em Ω , então é constante.*

Em outras palavras, se existir $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo z numa vizinhança de z_0 então f é constante em Ω .

Teorema 1.3 (Picard). *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ contém mais que um ponto, então f é constante.*

Teorema 1.4. *Liouville*

Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ inteira e limitada é constante. Consequentemente, uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica e limitada é constante.

1.4 Conceitos de Geometria Riemanniana

Para superfícies de curvatura média constante, no nosso caso identicamente nula, precisaremos introduzir o funcional volume, e veremos que estas superfícies são pontos críticos da área para variações que preservam o volume. Antes disso, precisamos estabelecer algumas noções essenciais sobre a teoria das variedades que serão necessárias no decorrer do texto.

1.4.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1. Um conjunto M é chamado uma *variedade diferenciável* n -dimensional se existe uma família de aplicações diferenciáveis e biunívocas $\mathbf{X}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M , tais que:

1. $M = \bigcup_{\alpha} \mathbf{X}_\alpha(U_\alpha)$;
2. Para todo par α, β com $\mathbf{X}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{X}_\beta(U_\beta) = V \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{X}_\alpha^{-1}(V)$ e $\mathbf{X}_\beta^{-1}(V)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{X}_\beta^{-1} \circ \mathbf{X}_\alpha$ e $\mathbf{X}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{X}_\beta$ aí definidas são diferenciáveis.

3. A família $\{(U_\alpha, \mathbf{X}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições 1 e 2.

Indicaremos que M tem dimensão n por M^n . O par $(U_\alpha, \mathbf{X}_\alpha)$ ou a aplicação \mathbf{X}_α é chamado uma parametrização ou sistema de coordenadas de N em p , com $p \in \mathbf{X}_\alpha(U_\alpha)$, e $\mathbf{X}_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma vizinhança coordenada em p .

Definição 1.2. Seja $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação entre as variedades diferenciáveis M e N , φ é dita *diferenciável* em $p \in M$, se dada uma parametrização $\chi_1 : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\chi_2 : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em p tal que $\varphi(\chi_1(U)) \subset \chi_2(W)$ e a aplicação

$$\chi_2^{-1} \circ \varphi \circ \chi_1 : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $\chi_1^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável num aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Definição 1.3. Uma *curva diferenciável* em uma variedade diferenciável M é uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja \mathcal{D} o conjunto das funções de N diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 1.4. O conjunto de todos os vetores tangentes às curvas diferenciáveis pertencentes a uma variedade diferenciável M^m passando por p , representado por $T_p M$, é chamado espaço tangente a N^n em p . Mostra-se que o conjunto $T_p M$ é um espaço vetorial de dimensão m e que a escolha de uma parametrização $\chi : U \rightarrow N$ em p determina uma base associada $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\}$ em $T_p N$, e que a estrutura linear nesse espaço, assim definida, não depende da parametrização χ .

Definição 1.5. Seja M^n uma variedade diferenciável. O conjunto $TM = \{(p, v); p \in N, v \in T_p M\}$, munido com a estrutura diferenciável $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha)\}$ sendo $\gamma_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ definida por:

$$\gamma_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) = (\mathbf{x}_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}),$$

$(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, é chamado *fibrado tangente* de M .

Proposição 1.1. Seja $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis M e N . Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p M$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. A aplicação $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ dada por $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α (esta aplicação é chamada diferencial de φ em p).

Definição 1.6. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$, entre as variedades diferenciáveis M e N , é um *difeomorfismo* se ela é bijetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\phi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

Definição 1.7. Um *caminho* em uma variedade M é uma aplicação contínua $f : [0, 1] \rightarrow N$. Se $f(0) = f(1) = p$, f é chamado *caminho fechado* em $p \in N$. Em particular o caminho constante $c_p : [0, 1] \rightarrow M$ definido por $c_p(s) = p$ para todo $s \in [0, 1]$, é um caminho fechado.

Definição 1.8. Uma variedade M é chamada *conexa* quando, dados dois pontos quaisquer $p, q \in M$, existe sempre um caminho ligando p e q , isto é, existe uma aplicação contínua $f : [0, 1] \rightarrow M$, tal que $f(0) = p$ e $f(1) = q$.

Definição 1.9. Sejam $f : [0, 1] \rightarrow M$ e $g : [0, 1] \rightarrow M$ dois caminhos com o mesmo ponto inicial $p \in M$ e o mesmo ponto final $q \in M$. Diz-se que f é *homotópico* a g se existe uma função contínua $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que

$$\begin{aligned} h(s, 0) &= f(s) \text{ e } h(0, t) = p, \\ h(s, 1) &= g(s) \text{ e } h(1, t) = q. \end{aligned}$$

Se um caminho $f : [0, 1] \rightarrow M$ é homotópico ao caminho constante, então ele é dito *contrátil* a um ponto.

Definição 1.10. Uma variedade M é chamada *simplesmente conexa* se M é conexa e se todo caminho fechado em N é contrátil a um ponto. Em outras palavras M é simplesmente conexa se toda curva fechada em M puder ser continuamente deformada em um ponto.

1.4.2 Campos de Vetores

Definição 1.11. Seja M^n uma variedade diferenciável e TM o seu fibrado tangente. A aplicação $X : M \rightarrow TM$, que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$ é chamada um campo de vetores em M . O campo é diferenciável se a aplicação X é diferenciável. Note que é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U . Basta considerar uma parametrização $\chi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N$ e pegar a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ de T_pN associada a esta parametrização. Então X será diferenciável se e só se as funções a_i forem diferenciáveis para qualquer parametrização \mathbf{x} .

Com essa idéia é possível pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$, do anel $\mathcal{D}(M)$ das funções diferenciáveis em N no anel $\mathcal{F}(M)$ das funções em N , definida por

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde f indica, por abuso de notação, a expressão de f na parametrização \mathbf{x} . Neste caso é imediato verificar que X é diferenciável se e só se $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, isto é, $Xf \in \mathcal{D}$ para todo $f \in \mathcal{D}$.

Lema 1.1. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável N . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}(M)$, $Zf = (XY - YX)f$.

Definição 1.12. O campo vetorial Z dado pelo lema anterior é chamado *colchete* $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y ; Z é evidentemente diferenciável.

Proposição 1.2. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em N , a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:

- (i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade),
- (ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade),
- (iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi),
- (iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

O colchete $[X, Y]$ pode também ser interpretado como uma derivação de Y ao longo das "trajetórias" de X .

1.4.3 Métricas Riemannianas

Definição 1.13. Para cada ponto p de uma variedade diferenciável M associe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ definido no espaço tangente T_pM , de modo que ao tomarmos uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de M em p , a função $g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q$ é diferenciável em U , onde $q = \mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$. A função g_{ij} é chamada uma *métrica riemanniana* em M .

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica riemanniana é dizer que a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V , para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M . Uma variedade diferenciável M munida de uma métrica riemanniana é denominada variedade riemanniana.

Exemplo 1.1. Seja $M = \mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. A métrica é dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. \mathbb{R}^n é chamado espaço euclidiano de dimensão n e sua métrica é chamada métrica euclidiana.

Definição 1.14. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$, entre as variedades riemannianas M e N , é chamado uma *isometria* se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_pM.$$

Definição 1.15. Uma aplicação diferenciável $c : I \rightarrow M$, de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em uma variedade diferenciável M , chama-se uma curva (parametrizada).

Definição 1.16. Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ duas métricas em uma variedade diferenciável M , diz-se que essas métricas são conformes se existe uma função positiva diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_pM$ se tenha

$$\langle u, v \rangle_p = f(p)\langle\langle u, v \rangle\rangle_p.$$

Definição 1.17. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Diz-se que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M , a função $t \rightarrow V(t)f$ é uma função diferenciável em I .

Proposição 1.3. Uma variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica riemanniana.

1.4.4 Conexões Afins e Riemanniana

Indicaremos por $\mathcal{H}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ definidos em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.18. Seja M uma variedade diferenciável. Uma conexão afim ∇ em M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, e que para $X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$, satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

Proposição 1.4. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:

- i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c ,
- ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde f é uma função diferenciável em I ,
- iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.

Esta última parte faz sentido, pois $\nabla_X Y(p)$ só depende do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p . De fato seja (x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas em torno de p , então podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^n x_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^n y_j X_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Assim

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^n x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_{j=1}^n y_j X_j \right) = \sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j + \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j \\ &= \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k, \end{aligned}$$

onde $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ e Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis em U . Portanto $\nabla_X Y(p)$ só depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X .

Definição 1.19. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.5. Sejam $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e. $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$; $V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c .

Definição 1.20. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica riemanniana \langle, \rangle . A conexão é dita compatível com a métrica \langle, \rangle , quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos V e W ao longo de c , tivermos $\langle V, W \rangle = \text{constante}$.

Proposição 1.6. Seja M uma variedade riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Definição 1.21. Seja M uma variedade riemanniana. Diz-se que uma conexão afim ∇ em M é:

- a) simétrica, se $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.
- b) compatível com a métrica riemanniana, se $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Em um sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) , a simetria de ∇ implica que $[X_i, X_j] = 0$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Teorema 1.5. (Levi-Civita). Dada uma variedade riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

- i) ∇ é simétrica.
- ii) ∇ é compatível com a métrica riemanniana.

Tal conexão é chamada conexão de Levi-Civita ou conexão riemanniana de M .

Demonstração. Suponhamos que ∇ satisfazendo i) e ii) acima existe. Então

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle,$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle,$$

Somando as duas primeiras, adicionando $\langle \nabla_Y X, Z \rangle - \langle \nabla_Y X, Z \rangle$, subtraindo a terceira e usando a simetria de ∇ , teremos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= \\ &= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}.$$

A equação 1.5 mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica \langle, \rangle . Logo, caso exista, ela será única.

Para mostrar a existência, defina ∇ pela equação 1.5, claramente ∇ está bem definida e satisfaz às propriedades desejadas. ■

Agora, para uso posterior, obteremos um resultado escrevendo parte do que foi feito acima em um sistema de coordenadas.

As funções Γ_{ij}^k definidas em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os coeficientes da conexão ∇ em U ou os símbolos de Christoffel da conexão. Pela equação (1.1) e pela simetria da conexão, temos que

$$\langle X_k, \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l \rangle = \frac{1}{2} \{ X_j \langle X_i, X_k \rangle + X_i \langle X_k, X_j \rangle - X_k \langle X_j, X_i \rangle \}$$

Logo

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\},$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ e lembrando que $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa que denotaremos por (g^{km}) , teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}, \quad (1.2)$$

que é a equação dos símbolos de Christoffel da conexão riemanniana em termos dos g_{ij} . Observe que no caso do \mathbb{R}^n , teremos $\Gamma_{ij}^k = 0$.

1.4.5 Geodésicas

Para o que se segue, M será uma variedade riemanniana munida de sua conexão riemanniana.

Definição 1.22. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 . Diz-se que γ é uma geodésica se γ for geodésica para todo $t \in I$.

O comprimento do vetor tangente de uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ é constante, pois

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

Assim podemos supor que $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = c \neq 0$ (isto é, estamos excluindo as geodésicas que se reduzem a pontos). O comprimento de arco s de γ de $t_0 \in I$ a $t \in I$ é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0).$$

Portanto o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $c = 1$, diremos que γ está normalizada.

Proposição 1.7. Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \quad \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon\},$$

tais que a curva $t \mapsto \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $v \in T_q M$ com $|v| < \varepsilon$.

Exemplo 1.2. Todas as geodésicas do \mathbb{R}^n são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco, pois o espaço tangente a \mathbb{R}^n em p é identificado com \mathbb{R}^n e neste caso a derivada covariante coincide com a derivada usual.

Proposição 1.8. Se uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, tem comprimento menor ou igual ao comprimento de arco de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ então γ é uma geodésica. Em particular γ é regular.

Definição 1.23. Uma variedade riemanniana M é (*geodesicamente*) *completa* se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Observação 1.1. É possível provar que toda variedade riemanniana conexa e compacta é completa (teorema de Hopf e Rinow em 3).

1.4.6 Curvatura

Definição 1.24. Seja M uma variedade riemanniana. A curvatura R de M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{H}(M)$, dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M .

Exemplo 1.3. Seja $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, seja $Z = (z_1, \dots, z_n)$, então $\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n)$ e $\nabla_Y Z = (Yz_1, \dots, Yz_n)$. Logo

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n), \quad \nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, \dots, XYz_n)$$

e

$$\nabla_{[X, Y]} Z = ([X, Y]z_1, \dots, [X, Y]z_n).$$

Portanto

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0.$$

Proposição 1.9. (Primeira Identidade de Bianchi) Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$ é válida a relação

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Proposição 1.10. Para todo $X, Y, Z, T \in \mathcal{H}(M)$ são válidas as relações

a) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle = 0.$

b) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle.$

c) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle.$

$$d) \langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle.$$

Novamente, para uso posterior, obteremos outro resultado escrevendo parte do que foi feito acima em um sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) em torno do ponto p de M . Podemos escrever

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l,$$

onde R_{ijk}^l são as componentes da curvatura R em (U, \mathbf{x}) . Assim teremos

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \langle \sum_l R_{ijk}^l X_l, X_s \rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijks}$$

Agora vamos obter a expressão de R_{ijk}^l em termos dos coeficientes Γ_{ij}^k da conexão riemanniana.

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\ &= \nabla_{X_j} \left(\sum_l \Gamma_{ik}^l X_l \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_l \Gamma_{jk}^l X_l \right) \\ &= \sum_l \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l X_l + \sum_l \Gamma_{ik}^l \nabla_{X_j} X_l - \sum_l \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l X_l \\ &\quad - \sum_l \Gamma_{jk}^l \nabla_{X_i} X_l \end{aligned}$$

donde, obtemos

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s. \quad (1.3)$$

1.4.7 Curvatura Seccional

Definição 1.25. Sejam M uma variedade riemanniana, $p \in M$, $\beta \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e $\{x, y\}$ uma base qualquer de β . A curvatura seccional de β em p , $K(\beta) = K(x, y)$, é por definição

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$, representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $x, y \in \beta$. Esta definição não depende da escolha dos vetores $x, y \in \beta$. De fato, observemos inicialmente que podemos passar da base $\{x, y\}$ de β para qualquer outra base $\{x', y'\}$ por iteração das seguintes transformações elementares:

- a) $\{x, y\} \longrightarrow \{y, x\}$,
- b) $\{x, y\} \longrightarrow \{\lambda x, y\}$,
- c) $\{x, y\} \longrightarrow \{x + \lambda y, y\}$.

Agora veremos que $K(x, y)$ é invariante por tais transformações, o que demonstra o afirmado. Para o que se segue denotaremos $\langle K(x, y)x, y \rangle$ por (x, y, x, y) .

$$\text{Demonstração. } a) K(y, x) = \frac{(y, x, y, x)}{|y \wedge x|^2} = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} = K(x, y)$$

$$b) K(\lambda x, y) = \frac{(\lambda x, y, \lambda x, y)}{|\lambda x \wedge y|^2} = \frac{\lambda^2 (x, y, x, y)}{\lambda^2 |x \wedge y|^2} = K(x, y)$$

$$\begin{aligned} c) K(x + \lambda y, y) &= \frac{(x + \lambda y, y, x + \lambda y, y)}{|(x + \lambda y) \wedge y|^2} \\ &= \frac{(x, y, x, y) + (x, y, \lambda y, y) + (\lambda y, y, x, y) + (\lambda y, y, \lambda y, y)}{|x \wedge y + \lambda y \wedge y|^2} \\ &= \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} \\ &= K(x, y). \end{aligned}$$

A importância da curvatura seccional é que o conhecimento de $K(\beta)$, para todo β , determina completamente a curvatura R de M .

A partir de agora, escreveremos por simplicidade, $\langle R(x, y)z, t \rangle = (x, y, z, t)$.

Lema 1.2. Seja W um espaço vetorial n -dimensional ($n \geq 2$), munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $R : W \times W \times W \rightarrow W$ e $T : W \times W \times W \rightarrow W$ aplicações tri-lineares tais que as condições (a), (b), (c) e (d) da proposição 1.10 sejam satisfeitas para R e T . Se $\{x, y\}$ é uma base de β , escrevamos

$$K(\beta) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(\beta) = \frac{\langle T(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}.$$

Se para todo $\beta \subset W$, $K(\beta) = K'(\beta)$, então $R=T$.

Demonstração. Basta provar que $\langle R(x, y)z, t \rangle = \langle T(x, y)z, t \rangle$ para quaisquer $x, y, z, t \in W$. Escrevendo $(x, y, z, t) = \langle R(x, y)z, t \rangle$ e $(x, y, z, t)' = \langle T(x, y)z, t \rangle$, tem-se, por hipótese, $(x, y, x, y) = (x, y, x, y)' \quad \forall x, y \in W$, logo

$$(x + z, y, x + z, y) = (x + z, y, x + z, y)'$$

o que implica

$$(x, y, x, y) + 2(x, y, z, y) + (z, y, z, y) = (x, y, x, y)' + 2(x, y, z, y)' + (z, y, z, y)'$$

e, portanto

$$(x, y, z, y) = (x, y, z, y)' \quad \forall x, y, z \in W.$$

Assim

$$(x, y + t, z, y + t) = (x, y + t, z, y + t)'$$

o que implica

$$(x, y, z, t) - (x, y, z, t)' = (y, z, x, t) - (y, z, x, t)'$$

e a expressão $(x, y, z, t) - (x, y, z, t)'$ é invariante por permutações cíclicas dos três primeiros elementos. Portanto

$$\begin{aligned} 3[(x, y, z, t) - (x, y, z, t)'] &= (x, y, z, t) - (x, y, z, t)' + (x, y, z, t) \\ &\quad - (x, y, z, t)' + (x, y, z, t) - (x, y, z, t)' \\ &= (x, y, z, t) - (x, y, z, t)' + (y, z, x, t) \\ &\quad - (y, z, x, t)' + (z, x, y, t) - (z, x, y, t)' \\ &= (x, y, z, t) + (y, z, x, t) + (z, x, y, t) \\ &\quad - [(x, y, z, t)' + (y, z, x, t)' + (z, x, y, t)'] \\ &= 0 \quad (\text{por (a) da proposição 1.10}), \end{aligned}$$

logo

$$(x, y, z, t) = (x, y, z, t)'$$

para todo $x, y, z, t \in W$. ■

Proposição 1.11. Sejam M uma variedade riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação trilinear $T : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por

$$\langle T(X, Y)Z, W \rangle = \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle,$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a c se e somente se $R = cT$, onde R é a curvatura de M .

Demonstração. : Suponha que $K(p, \beta) = c \quad \forall \beta \subset T_p M$, então

$$c = K(p, \beta) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)X, Y \rangle &= c(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) \\ &= c(\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle Y, X \rangle \langle X, Y \rangle) \\ &= c\langle T(X, Y)X, Y \rangle \end{aligned}$$

e como T satisfaz as propriedades (a), (b), (c) e (d) da proposição 1.10 podemos utilizar o lema 1.2 para concluir que

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = c\langle T(X, Y)Z, W \rangle$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_p M$. A recíproca é imediata. ■

Corolário 1.1. Seja M uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante c e seja R a curvatura de M , então podemos escrever

$$R(X, Y)Z = c(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X)$$

Demonstração. Pela proposição anterior

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c\langle T(X, Y)Z, W \rangle \\ &= c(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle), \end{aligned}$$

logo

$$\langle R(X, Y)Z - c\langle X, Z \rangle Y + c\langle Y, Z \rangle X, W \rangle = 0,$$

portanto

$$R(X, Y)Z = c\langle X, Z \rangle Y - c\langle Y, Z \rangle X. ■$$

Corolário 1.2. Sejam M^n uma variedade riemanniana n -dimensional, p um ponto de M e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$. Escreva $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$, $i, j, k, l = 1, \dots, n$. Então $K(p, \beta) = c$ para todo $\beta \subset T_p M$, se e somente se

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

onde $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$ ou $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$. Em outras palavras, $K(p, \beta) = c$ para todo $\beta \subset T_p M$ se e somente se $R_{ijij} = -R_{ijji} = c$ para todo $i \neq j$, e $R_{ijkl} = 0$ nos outros casos.

Definição 1.26. Sejam M^n e \overline{M}^{n+m} variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \overline{M}$ é uma *imersão* se a diferencial $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. O número m é chamado a codimensão de f . Se, além disto, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \overline{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por \overline{M} , diz-se que f é um *mergulho*. Se $M \subset \overline{M}$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow \overline{M}$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade* de \overline{M} .

Definição 1.27. Uma imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ entre duas variedades riemannianas com as métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}}$, respectivamente, é chamada *imersão isométrica (ou riemanniana)* se:

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle df_p(X), df_p(Y) \rangle_{\overline{M}}$$

para todo $p \in M$, e todo par $X, Y \in T_p M$.

A métrica riemanniana de \overline{M} induz de maneira natural uma métrica riemanniana em M : se $X, Y \in T_p M$, define-se $\langle X, Y \rangle_M = \langle df_p(X), df_p(Y) \rangle_{\overline{M}}$. Nesta situação, f passa a ser uma imersão isométrica de M em \overline{M} e a métrica de M é então chamada a métrica induzida por f . Em outras palavras, f é isométrica se a métrica induzida coincide com a métrica original.

Um caso interessante é quando $h : \overline{M}^{n+k} \rightarrow M^k$ é diferenciável e $q \in M$ é um valor regular de h (isto é, $dh_p : T_p \overline{M} \rightarrow T_{h(p)} M$ é sobrejetiva para todo $p \in h^{-1}(q)$); é sabido que $h^{-1}(q) \subset \overline{M}$ é então uma subvariedade de \overline{M} de dimensão n ; logo podemos dar-lhe a métrica induzida pela imersão.

Por exemplo, seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$. Note que h é diferenciável e que 0 é um valor regular de h ; e $h^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = S^{n-1}$ é a esfera unitária do \mathbb{R}^n . A métrica induzida por \mathbb{R}^n em S^{n-1} é chamada a métrica canônica de S^{n-1} .

Sabemos que toda imersão, localmente, é um mergulho. Portanto, para todas as questões locais, identificaremos a variedade com sua imagem.

De acordo com a proposição anterior, podemos identificar U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_q M$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)} \overline{M}$. Usaremos essas identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em \overline{U}) de vetores em \overline{M} e também podemos considerar o espaço tangente de M em p como um subespaço do espaço tangente de \overline{M} em p e escrever

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp$$

onde, $T_p M^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial $TM^\perp = \cup_{p \in M} T_p M^\perp$, chamado fibrado normal a M .

Deste modo, o fibrado vetorial

$$T\overline{M}|_{f(M)} = \{X \in T\overline{M} : \pi(X) \in f(M), \text{ onde } \pi : T\overline{M} \rightarrow \overline{M} \text{ é a projeção}\}$$

é a soma direta do fibrado tangente TM com TM^\perp , isto é

$$T\overline{M}|_{f(M)} = TM \oplus TM^\perp.$$

Logo podemos considerar as seguintes projeções:

i) Tangencial $(\cdot)^T : T\overline{M}|_{f(M)} \rightarrow TM$; e

ii) Normal $(\cdot)^\perp : T\overline{M}|_{f(M)} \rightarrow TM^\perp$.

Seja ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões riemannianas de M e \overline{M} , respectivamente. Se X, Y são campos locais de vetores em M , e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a \overline{M} , temos que

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp$$

onde, pela unicidade da conexão riemanniana, $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T = \nabla_X Y$.

Para o que se segue, indicaremos por $\mathcal{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

Definição 1.28. Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. A aplicação $\alpha : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ definida por

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y,$$

onde para todo X, Y, Z em $\mathcal{X}(U)$ e g em $\mathcal{D}(U)$, tem as seguintes propriedades:

- i) $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$;
- ii) $\alpha(X + Z, Y) = \alpha(X, Y) + \alpha(Z, Y)$;
- iii) $\alpha(gX, Y) = g\alpha(X, Y)$.

Isto é, α é simétrica e bilinear sobre $\mathcal{D}(U)$.

Demonstração. Para o que se segue considere $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{g}$, extensões locais a \overline{M} . E observe que em M , $\overline{g} = g$ e $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$.

$$\begin{aligned} i) \alpha(X, Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \\ &= [\overline{X}, \overline{Y}] + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - [X, Y] - \nabla_Y X \\ &= \alpha(Y, X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \alpha(X + Z, Y) &= \overline{\nabla}_{(\overline{X} + \overline{Z})}\overline{Y} - \nabla_{(X+Z)} Y \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} + \overline{\nabla}_{\overline{Z}}\overline{Y} - \nabla_X Y - \nabla_Z Y \\ &= \alpha(X, Y) + \alpha(Z, Y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii) \alpha(gX, Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{g}\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_{gX} Y \\ &= \overline{g} \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - g \nabla_X Y \\ &= g\alpha(X, Y). \end{aligned}$$

Essa aplicação será chamada a *segunda forma fundamental* de f , onde a equação

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$

é denominada *Fórmula de Gauss*.

Note que $\alpha(X, Y)$ é um campo local em \overline{M} normal a M , pois

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^T + (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^\perp - \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^\perp$$

Agora veremos que a aplicação α está bem definida, isto é que $\alpha(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Com efeito, se \overline{W} é uma outra extensão de X (então $\overline{X} - \overline{W} = 0$ em M) e \overline{V} é uma outra extensão de Y (então $\overline{Y} - \overline{V} = 0$ ao longo de uma trajetória de X), teremos

$$(\overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_W \overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{X-W} \overline{Y} = 0, \quad e$$

$$(\overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_X \overline{V} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_X (\overline{Y} - \overline{V}) = 0.$$

Portanto α está bem definida.

Exprimindo α em um sistema de coordenadas, concluímos que, como α é bilinear, o valor de $\alpha(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Consideremos agora campos de vetores X de TM e ξ de TM^\perp , e denotemos por $\mathcal{A}_\xi X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X \xi$, isto é

$$\mathcal{A}_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T.$$

Observe que para todo $Y \in TM$ temos

$$\begin{aligned} X \langle \xi, Y \rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ 0 &= \langle (\overline{\nabla}_X \xi)^T + (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp, Y \rangle + \langle \xi, \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \rangle \\ 0 &= \langle -\mathcal{A}_\xi X, Y \rangle + \langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \mathcal{A}_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.$$

Portanto fica bem definida a aplicação $\mathcal{A} : TM \times TM^\perp \rightarrow TM$ dada por $\mathcal{A}(X, \xi) = \mathcal{A}_\xi X$, que é bilinear sobre $\mathcal{D}(M)$, pois a aplicação α e a métrica são bilineares sobre $\mathcal{D}(M)$. Como α é simétrica a aplicação $\mathcal{A}_\xi : TM \rightarrow TM$ também é simétrica (isto é, $\langle \mathcal{A}_\xi X, Y \rangle = \langle X, \mathcal{A}_\xi Y \rangle$ para todo $X, Y \in TM$) e linear sobre $\mathcal{D}(M)$. A aplicação \mathcal{A}_ξ é chamada *Operador de Weingarten* ou, por um abuso de linguagem, segunda forma fundamental na direção de ξ .

Seja $p \in M$ e $\xi \in T_p M^\perp, |\xi| = 1$. Já que $\mathcal{A}_\xi : T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica, pelo teorema espectral existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ com valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ou seja $\mathcal{A}_\xi(e_i) = \lambda_i e_i, i = 1, \dots, n$. Se M e \overline{M} são ambas orientáveis, podemos escolher orientações para M e \overline{M} , então o vetor ξ fica univocamente determinado se exigirmos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ seja uma base na orientação de M e $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$ seja uma base na orientação de \overline{M} . Neste caso, denominamos os e_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais de f . As funções simétricas de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são invariantes da imersão. Por exemplo: $\det(\mathcal{A}_\xi) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ é denominada a curvatura de Gauss-Kronecker de f e $\frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ é denominada a curvatura média de f .

No caso em que o espaço ambiente $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$, \mathcal{A}_ξ tem uma interpretação geométrica interessante. Sejam N uma extensão local de ξ , unitária e normal a M ; S^n a esfera unitária centrada na origem de \mathbb{R}^{n+1} ; e defina a aplicação normal de Gauss, $g : M^n \rightarrow S^n$ trasladando a origem do campo N para a origem de \mathbb{R}^{n+1} e fazendo $g(q) =$ ponto final

do transladado de $N(q)$. Como T_qM e $T_{g(q)}S^n$ são paralelos, podemos identificá-los, então $dg_q : T_qM \rightarrow T_{g(q)}S^n$ é dada por

$$dg_q(X) = \frac{d}{dt}(N \circ \gamma(t)) \Big|_{t=0} = \bar{\nabla}_X N = (\bar{\nabla}_X N)^T = -\mathcal{A}_\xi X,$$

onde $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é uma curva diferenciável com $\gamma(0) = q$, $\gamma'(0) = X$, e onde usamos o fato que $\langle N, N \rangle = 1$ para garantir que $\bar{\nabla}_X N = (\bar{\nabla}_X N)^T$. Segue-se que $-\mathcal{A}_\xi$ é a derivada da aplicação norma Gauss.

A componente normal de $\bar{\nabla}_X \xi$, que denotamos por $\nabla_X^\perp \xi$, define uma conexão compatível sobre o fibrado normal TM^\perp . Dizemos que ∇^\perp é a conexão normal de f e assim obtemos a Fórmula de Weingarten

$$\bar{\nabla}_X \xi = -\mathcal{A}_\xi X + \nabla_X^\perp \xi.$$

Uma imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$ é geodésica em um ponto $p \in M$ se para todo $\xi \in T_pM^\perp$ a segunda forma fundamental \mathcal{A}_ξ é identicamente nula em p . A imersão f é totalmente geodésica se ela é geodésica em todo $p \in M$.

Proposição 1.12. Uma imersão $f : M \rightarrow \bar{M}$ é geodésica em $p \in M$ se e somente se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de \bar{M} em p .

Demonstração. Sejam $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x$. Sejam ξ uma extensão local, normal a M , de um vetor normal e em p e X uma extensão local, tangente a M de $\gamma'(t)$. Assim tem-se em p

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_e x, x \rangle &= \langle \alpha(X, X), \xi \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X X - \nabla_X X, \xi \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X X, \xi \rangle \\ &= \langle (\bar{\nabla}_X X)^T + (\bar{\nabla}_X X)^\perp, \xi \rangle \\ &= \langle (\bar{\nabla}_X X)^\perp, \xi \rangle, \end{aligned}$$

logo f é geodésica em p se e somente se, para todo $X \in T_pM$, a geodésica γ de M que é tangente a X em p satisfaz a condição: $\bar{\nabla}_X X(p)$ não tem componente normal. Portanto f é geodésica em p se e só se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de \bar{M} em p . ■

O vetor curvatura média de uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$ no ponto p de M é o vetor normal a M em p , definido por $H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(X_i, X_i)$, onde $\{X_1, \dots, X_n\}$ é um referencial ortonormal tangente a M em p e α é a segunda forma fundamental de f . Dizemos que uma subvariedade é mínima se $H_p \equiv 0$ para todo ponto p da subvariedade.

1.4.8 As Equações Fundamentais de uma Imersão Isométrica

Proposição 1.13. Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica, são válidas as seguintes equações:

i) Equação de Gauss

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle,$$

onde $K(X, Y)$ e $\bar{K}(X, Y)$ denotam as curvaturas seccionais em M e \bar{M} do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_pM$.

ii) Equação de Codazzi

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) - (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z),$$

para todo $X, Y, Z \in TM$.

iii) Equação de Ricci

$$\langle \bar{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle + \langle [\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta]X, Y \rangle,$$

$\forall X, Y \in TM$ e $\xi, \eta \in TM^\perp$, onde $[\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta] = \mathcal{A}_\xi \mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}_\eta \mathcal{A}_\xi$; e R, \bar{R} e R^\perp são os tensores curvatura de M, \bar{M} e TM^\perp , respectivamente.

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in TM$, então

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \bar{\nabla}_X (\alpha(Y, Z) + \nabla_Y Z) \\ &= \bar{\nabla}_X \alpha(Y, Z) + \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z \end{aligned}$$

Pelas fórmulas de Gauss e Weingarten, temos

$$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z = -\mathcal{A}_{\alpha(Y, Z)}X + \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z).$$

Analogamente,

$$\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z = -\mathcal{A}_{\alpha(X, Z)}Y + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) + \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Novamente pela fórmula de Gauss, temos

$$\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z = \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z).$$

Substituindo esses resultados em

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z. \text{ Fica}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \alpha(X, \nabla_Y Z) + \alpha(Y, \nabla_X Z) + \alpha([X, Y], Z) + \mathcal{A}_{\alpha(Y, Z)}X \\ &\quad - \mathcal{A}_{\alpha(X, Z)}Y - \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z), \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde R e \bar{R} são os tensores curvatura de M e \bar{M} , respectivamente.

Tomando a componente tangencial, de \bar{R} em 1.1, temos

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle \mathcal{A}_{\alpha(Y, Z)}X, W \rangle - \langle \mathcal{A}_{\alpha(X, Z)}Y, W \rangle,$$

obtendo assim, a *Equação de Gauss*,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle.$$

Em particular, se $K(X, Y) = \langle R(X, Y)X, Y \rangle$ e $\bar{K}(X, Y) = \langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e \bar{M} do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_p M$, a

equação de Gauss torna-se

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle.$$

Agora tomando a componente normal de \bar{R} em 1.1, obtemos

$$\begin{aligned} (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp &= (R(X, Y)Z)^\perp - \alpha(X, \nabla_Y Z) + \alpha(Y, \nabla_X Z) + \alpha([X, Y], Z) \\ &\quad - \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) \\ &= -\alpha(X, \nabla_Y Z) + \alpha(Y, \nabla_X Z) + \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\ &\quad - \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) \\ &= -\alpha(X, \nabla_Y Z) + \alpha(Y, \nabla_X Z) + \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) \\ &\quad - \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) \\ &= -(\nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)) + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) \\ &\quad - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z), \end{aligned}$$

o que implica na *Equação de Codazzi*

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) - (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z),$$

onde por definição

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Observe que $\nabla^\perp \alpha$ é multilinear sobre $\mathcal{D}(M)$. ∇^\perp pode ser vista como uma conexão no fibrado vetorial $\mathcal{L}_2(TM \times TM, TM^\perp)$.

Denotaremos por R^\perp o tensor curvatura do fibrado normal TM^\perp , que é

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi + \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi,$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$.

Novamente, utilizando as fórmulas de Gauss e Weingarten temos

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)\xi &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \xi - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \xi + \bar{\nabla}_{[X, Y]} \xi \\ &= \bar{\nabla}_Y(-\mathcal{A}_\xi X) + \bar{\nabla}_Y \nabla_X^\perp \xi - \bar{\nabla}_X(-\mathcal{A}_\xi Y) - \bar{\nabla}_X \nabla_Y^\perp \xi - \mathcal{A}_\xi[X, Y] \\ &\quad + \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi \\ &= \alpha(Y, -\mathcal{A}_\xi X) + \nabla_Y(-\mathcal{A}_\xi X) - \mathcal{A}_{\nabla_X^\perp \xi} Y + \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi + \alpha(X, \mathcal{A}_\xi Y) \\ &\quad + \nabla_X(\mathcal{A}_\xi Y) + \mathcal{A}_{\nabla_Y^\perp \xi} X - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \mathcal{A}_\xi[X, Y] + \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)\xi &= R^\perp(X, Y)\xi + \alpha(X, \mathcal{A}_\xi Y) + \nabla_X(\mathcal{A}_\xi Y) + \mathcal{A}_{\nabla_Y^\perp \xi} X \\ &\quad - \alpha(Y, \mathcal{A}_\xi X) - \nabla_Y(\mathcal{A}_\xi X) - \mathcal{A}_{\nabla_X^\perp \xi} Y - \mathcal{A}_\xi[X, Y] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Tomando a componente normal de $\bar{R}(X, Y)\xi$ em 1.2 temos, a *Equação de Ricci*

$$(\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi + \alpha(X, \mathcal{A}_\xi Y) - \alpha(Y, \mathcal{A}_\xi X).$$

Agora tomando em 1.2 o produto interno por $\eta \in TM^\perp$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle &= \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle + \langle \alpha(X, \mathcal{A}_\xi Y), \eta \rangle - \langle \alpha(Y, \mathcal{A}_\xi X), \eta \rangle \\
&= \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle + \langle \mathcal{A}_\eta X, \mathcal{A}_\xi Y \rangle - \langle \mathcal{A}_\eta Y, \mathcal{A}_\xi X \rangle \\
&= \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle + \langle \mathcal{A}_\xi \mathcal{A}_\eta X, Y \rangle - \langle Y, \mathcal{A}_\eta \mathcal{A}_\xi X \rangle \\
&= \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle + \langle [\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta]X, Y \rangle,
\end{aligned}$$

e a equação de Ricci pode ser escrita na forma

$$\langle \bar{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle + \langle [\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta]X, Y \rangle,$$

onde $[\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta] = \mathcal{A}_\xi \mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}_\eta \mathcal{A}_\xi$. ■

Observação 1.2. No caso em que o espaço ambiente \bar{M} , tem curvatura seccional constante, para $X, Y, Z \in TM$ e $\xi, \eta \in TM^\perp$, as equações de Codazzi e Ricci se resumem, respectivamente, a:

$$i) (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z);$$

$$ii) \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = -\langle [\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta]X, Y \rangle.$$

Segue-se de (ii) que $R^\perp = 0$ se, e somente se $[\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta] = 0$ para todo ξ, η , isto é, se e só se para todo $p \in M$ existe uma base ortogonal de $T_p M$ que diagonaliza simultaneamente todos os \mathcal{A}_ξ , $\xi \in T_p M^\perp$.

Observação 1.3. No caso de hipersuperfícies $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$, a equação de Gauss se expressa de forma mais simples. Sejam $p \in M$ e $\xi \in T_p M^\perp$, $|\xi| = 1$, e $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base ortonormal de $T_p M^n$ que diagonaliza o operador de Weingarten $\mathcal{A}_\xi = \mathcal{A}$, isto é, $\mathcal{A}(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os valores próprios de \mathcal{A} . Então se $i \neq j$

$$K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

De fato

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}(e_i), e_j \rangle &= \langle \alpha(e_i, e_j), \xi \rangle \\
\langle \lambda_i e_i, e_j \rangle &= \langle \alpha(e_i, e_j), \xi \rangle \\
0 &= \langle \alpha(e_i, e_j), \xi \rangle, \text{ logo } \alpha(e_i, e_j) = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(e_i, e_i), \alpha(e_j, e_j) \rangle &= \langle \langle \alpha(e_i, e_i), \xi \rangle \xi, \langle \alpha(e_j, e_j), \xi \rangle \xi \rangle \\
&= \langle \alpha(e_i, e_i), \xi \rangle \langle \alpha(e_j, e_j), \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle \\
&= \lambda_i \lambda_j.
\end{aligned}$$

Definição 1.29. Uma superfície de Riemann \mathcal{M} é uma superfície diferenciável conexa e como um atlas holomorfo, equivalentemente, uma variedade complexa conexa de dimensão um.

Definição 1.30. Uma aplicação contínua entre superfícies de Riemann $f : M \rightarrow N$ se diz holomorfa quando ao escrevê-la em coordenadas locais obtemos uma função holomorfa entre abertos do plano complexo.

Definição 1.31. Uma aplicação de uma superfície de Riemann em $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $f : \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, se diz meromorfa quando é holomorfa e não constantemente ∞ . Neste caso, as pré-imagens por f de ∞ se denomina os pólos de f .

Os exemplos mais simples de superfície de Riemann são o plano complexo \mathbb{C} , o disco unitário aberto \mathbb{D} e a esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$. É surpreendente o fato de que toda superfície de Riemann simplesmente conexa seja conformemente equivalente a alguma destas três (isto é, existe um biholomorfismo entre elas q identifica as estruturas correspondentes a cada uma).

Teorema 1.6. (Teorema da Uniformização de Koebe) *Toda superfície de Riemann simplesmente conexa é conformemente equivalente a \mathbb{C} , \mathbb{D} , ou $\overline{\mathbb{C}}$.*

1.5 Operadores Diferenciais

Apresentaremos uma generalização dos conceitos dos operadores gradiente, divergente e laplaciano para uma variedade riemanniana que serão utilizados posteriormente. Para mais detalhes, veja 12.

Definição 1.32. *Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional, $p \in M$ e $\Omega \subset M$ uma vizinhança de p . Uma família $\{e_i\}_{i=1}^n$ de campos de vetores em $\mathcal{H}(\Omega)$ é chamada um referencial geodésico em p se:*

(i) *Para cada ponto $q \in U$, tem-se que $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ são ortonormais;*

(ii) *Para todos $i, j = 1, \dots, n$, tem-se $\nabla_{e_i} e_j(m) = 0$.*

Observação 1.4. *Dada uma variedade riemanniana M e um ponto $p \in M$ qualquer. Existe uma vizinhança $\Omega \subset M$ de p na qual podemos definir um referencial geodésico.*

Definição 1.33. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathcal{H}(M)$. Definimos a divergência de X como sendo uma função $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\operatorname{div} X(p) = \text{traço da aplicação linear } [Y(p) \mapsto \nabla_Y X(m)], \quad m \in M$$

Definição 1.34. *Seja M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$, onde $\mathcal{D}(M)$ é o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M . Definimos o gradiente de f como sendo o campo de vetores $\operatorname{grad} f$ em M definido por*

$$\operatorname{grad} f(p) = \langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, v \in T_p M.$$

Em um sistema de coordenadas local (x_1, \dots, x_n) em um vizinhança $U \subset M$ de m , o divergente é escrito da seguinte maneira

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{|g|} X_i),$$

onde $|g| = \det g_{ij}$, $0 \leq i, j \leq n$ e $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Observação 1.5. *Considere um referencial geodésico $\{e_1, \dots, e_n\}$ em uma vizinhança $\Omega \subset M$ de $p \in M$. Como $\nabla f(p) \in T_p M$ podemos expressá-lo como $\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n \langle \operatorname{grad} f(p), e_i \rangle e_i$.*

Desta forma, segue que

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n (e_i(f)) e_i.$$

Além disso, seja $X = \sum_{j=1}^n f_j e_j$, por definição, temos que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X(m) &= \text{traço da aplicação } [Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)] \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X(p), e_i \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{e_i} \left(\sum_{j=1}^n f_j e_j \right), e_i \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \left\langle \left(\sum_{j=1}^n f_j \nabla_{e_i} e_j \right) (m) + \sum_{j=1}^n [e_i(f_j) e_j](m), e_i \right\rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n e_i(f_j)(p) \langle e_j, e_i \rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n e_i(f_j)(p)
 \end{aligned}$$

Observe que, quando $M = \mathbb{R}^n$, com coordenadas x_1, \dots, x_n e $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$, temos que

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$$

e

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Definição 1.35. Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos o Laplaciano Δ de M como sendo um operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ definido por

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

Observação 1.6. Em um sistema de coordenadas local (x_1, \dots, x_n) em uma vizinhança $\Omega \subset M$ de $m \in M$, temos que o laplaciano é dado por

$$-\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right),$$

onde $|g| = \det(g_{ij})$, $0 \leq i, j \leq n$. Agora, considerando um referencial geodésico $\{e_1, \dots, e_n\}$ em uma vizinhança $U \subset M$ de $m \in M$, temos que

$$\begin{aligned}
 \Delta f(m) &= \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\
 &= \left\langle \nabla_{e_i} \left(\sum_{j=1}^n (e_j(f)) e_j \right) (m), e_i \right\rangle \\
 &= \langle (e_j(f) \nabla_{e_i} e_j + e_i(e_j(f)) e_j)(m), e_i \rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n e_i(e_j(f))(m) \langle e_j, e_i \rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n e_i(e_j(f))(m)
 \end{aligned}$$

Portanto, se $M = \mathbb{R}^n$, com coordenadas (x_1, \dots, x_n) e $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$ obtemos que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Além disso, se $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \sum_{i=1}^n e_i(e_i(fg)) = \sum_{i=1}^n e_i \left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) + e_i \left(g \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= f \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + g \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Em outros termos,

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= f(-\Delta g) + g(-\Delta f) + 2 \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } f, e_i \rangle \langle \text{grad } g, e_i \rangle \\ &= f(-\Delta g) + g(-\Delta f) + 2 \left\langle \text{grad } f, \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } g, e_i \rangle e_i \right\rangle \\ &= f(-\Delta g) + g(-\Delta f) + 2 \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\frac{1}{2} \Delta f^2 = f \Delta f + |\text{grad } f|^2$$

$$\text{grad}(fg) = f \text{grad } g + g \text{grad } f.$$

Teorema 1.7 (Teorema da Divergência). *Seja X um campo de vetores de classe C^1 com suporte compacto sobre uma variedade Riemanniana M então,*

$$\int_M (\text{div } X) dV = 0,$$

onde dV é o elemento de volume de M .

Teorema 1.8 (Fórmula de Green). *Sejam h, g funções, respectivamente, de classe C^1 e de classe C^2 em M tais que $h(\text{grad } f)$ tem suporte compacto. Então*

$$\int_M \left(h \Delta f + \langle \text{grad } h, \text{grad } f \rangle \right) dV = 0$$

Teorema 1.9. *Seja M uma variedade riemanniana compacta n -dimensional, com fronteira e orientável. Seja ω uma $(n-1)$ -forma sobre M , logo*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega. \quad (1.3)$$

Proposição 1.14. Sendo $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização conforme, temos

$$\Delta_M f = \frac{1}{\lambda^2} \Delta f$$

e

$$\text{grad}_M f = \frac{1}{\lambda} \text{grad } f,$$

onde grad e f são, respectivamente, os operadores usuais do gradiente e laplaciano.

Proposição 1.15. Dado um sistema de coordenadas isotérmicas, a curvatura Gaussiana é dada por

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta_M \log \lambda. \quad (1.4)$$

Em particular, se $K < 0$, obtemos a seguinte igualdade

$$\Delta_M \log(-K) = 4K. \quad (1.5)$$

Teorema 1.10. Seja M uma variedade bidimensional completa e Riemanniana tal que sua curvatura Gaussiana satisfaz

$$K < 0 \quad \text{e} \quad \int_M |K| < \infty.$$

Então existe uma variedade bidimensional compacta \overline{M} , um número finito de pontos $\{p_1, \dots, p_k\}$ em \overline{M} e uma isometria entre M e $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$. Além disso, a aplicação de Gauss $g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ estende-se a uma aplicação meromorfa $g : \overline{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Uma demonstração para tal teorema pode ser encontrada em 11.

Definição 1.36. Seja M uma variedade Riemanniana munida de uma conexão Riemanniana. Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$, $\forall t \in I$.

Definição 1.37. Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se para todo $v \in (T_p M)^\perp$ a segunda forma fundamental II_v é identicamente nula em p . Dizemos que a imersão f é **totalmente geodésica** se ela é geodésica para todo ponto $p \in M$.

Definição 1.38. Uma subvariedade será dita **totalmente geodésica** se suas geodésicas são geodésicas do espaço ambiente, ou seja, segmentos de retas.

Uma condição necessária e suficiente para que uma subvariedade $M^n \subset R^k$ seja totalmente geodésica é que a segunda forma fundamental é identicamente nula.

Definição 1.39. Seja $q \in M$ a aplicação $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$, $\exp_q(v) = \exp(q, v)$ é a aplicação exponencial em $T_p M$ onde

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \left(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|} \right).$$

Definição 1.40. Uma superfície parametrizada em M é uma aplicação diferenciável $s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$.

Definição 1.41. Um campo de vetores ao longo de s é uma aplicação $q \in A \mapsto V(q) \in T_{s(q)}M$ diferenciável no seguinte sentido: se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então $q \mapsto V(q)f$ é diferenciável.

Definição 1.42. Se (u, v) são coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^2 , as aplicações $u \mapsto s(u, v_0)$, $v \mapsto s(u_0, v)$ são curvas coordenadas em M e os campos coordenados $\frac{\partial s}{\partial u}$, $\frac{\partial s}{\partial v}$ são campos de vetores ao longo de s .

Definição 1.43. Se $B_\varepsilon(0) \subset V$, a $\exp_p(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(p)$ é denominada bola geodésica.

Lema 1.3 (da Simetria). Se M é uma variedade Riemanianna diferenciável com uma conexão simétrica e $s : A \rightarrow M$ é uma superfície parametrizada então

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v}.$$

Lema 1.4 (de Gauss). Seja $p \in M$ e seja $v \in T_pM$ tal que $\exp_p v$ esteja definida. Seja $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$. Então

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

1.6 Campos de Jacobi

Se \exp_p está definida para $v \in T_pM$ e $w \in T_v(T_pM)$, podemos considerar a superfície parametrizada

$$f(t, s) = \exp_p tv(s) \quad (t, s) \in [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

onde $v(s)$ é um curva em T_pM com $v(0) = v$ e $v'(0) = w$

A curva $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $t \in [0, 1]$ é uma geodésica, ou seja, o campo $\gamma'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, 0)$ é paralelo.

Observação 1.7. Se $f : A \rightarrow M$ é uma superfície parametrizada em M , (s, t) coordenadas em \mathbb{R}^2 e $V = V(s, t)$ um campo de vetores ao longo de f , para cada (s, t) podemos definir:

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V := R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

Como γ é uma geodésica, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial s} \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} - R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} + R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Fazendo $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$, obtemos a *Equação de Jacobi*:

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0. \quad (1.6)$$

Definição 1.44. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica de M . Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se satisfaz a **equação de Jacobi 1.6**, para $t \in [0, a]$.

Observação 1.8. Um campo de Jacobi é determinado pelas condições iniciais $J(0)$ e $\frac{DJ}{dt}(0)$.

1.6.1 Campos de Jacobi em variedades de curvatura constante

Sejam M uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante K , $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ um geodésica, $\|\gamma'\| = 1$ e J um campo de Jacobi ao longo de γ normal a γ' . M tem curvatura seccional constante K , e só se $R = KR'$, onde R é a curvatura de M e R' é uma aplicação trilinear dada por

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle.$$

Para todo T tem-se

$$\begin{aligned} \langle R(\gamma', T)\gamma', T \rangle &= K \{ \langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle \} \\ &= K \langle J, T \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + KJ = 0. \quad (1.7)$$

é a equação de Jacobi para variedade de curvatura constante.

Se $w(t)$ é um campo paralelo ao longo de γ , com $\langle \gamma'(t), w(t) \rangle = 0$ e $\|w(t)\| = 1$ então

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t), & \text{se } K > 0, \\ tw(t), & \text{se } K = 0, \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} w(t), & \text{se } K < 0, \end{cases}$$

é a solução de (1.7) com $J(0) = 0$ e $J'(0) = w(0)$

Corolário 1.3. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ então um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$ é dado por*

$$J(t) = (\text{dexp}_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0, a]$$

Proposição 1.16. *Seja $p \in M$ e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Seja $w \in T_v(T_p M)$ com $\|w\| = 1$ e seja J o campo de Jacobi ao longo de γ dado por:*

$$J(t) = (\text{dexp}_p)_{tv}(tw), \quad 0 \leq t \leq a$$

Então o desenvolvimento de Taylor de $\|J(t)\|^2$ em torno de $t = 0$ é dado por

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3} \langle R(v, w)v, w \rangle t^4 + R(t)$$

onde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t^4} = 0$

Demonstração. Temos $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$

$$\langle J, J \rangle(0) = 0$$

$$\langle J, J \rangle'(0) = 2 \langle J, J' \rangle(0) = 0$$

$$\langle J, J \rangle''(0) = 2 \langle J', J' \rangle(0) + 2 \langle J, J'' \rangle(0) = 2$$

$J''(0) = -R(\gamma', J)\gamma'(0) = 0$. Com efeito, como $J = \frac{\partial f}{\partial s}$ e $\gamma' = \frac{\partial f}{\partial t}$ temos

$$R(\gamma', J)\gamma' = \frac{D}{dt} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Vamos mostrar que $\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', J)\gamma')(0) = R(\gamma', J')\gamma'$. Temos,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D}{dt}(R(\gamma', J)\gamma'), W \right\rangle &= \frac{d}{dt} \langle R(\gamma', W)\gamma', J \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', W' \rangle \\ &= \langle R(\gamma', W)\gamma', J' \rangle \\ &= \langle R(\gamma', J')\gamma', W \rangle \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{D}{dt}(R(\gamma', J)\gamma') = R(\gamma', J')\gamma'$.

Derivando $J''(0) = -R(\gamma', J)\gamma'(0) = 0$, obtemos que

$$J'''(0) = -R(\gamma', J')\gamma'(0) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle J, J \rangle'''(0) &= 8 \langle J', J''' \rangle(0) + 6 \langle J'', J'' \rangle(0) \\ &+ 2 \langle J'''' , J \rangle(0) \\ &= \langle J', R(\gamma', J')\gamma' \rangle(0) \\ &= \langle R(v, w)v, w \rangle(0). \end{aligned}$$

■

Capítulo 2

O Teorema de Bernstein

2.1 Superfície

Neste capítulo, estamos interessados em abordar a questão das superfícies mínimas. A terminologia *mínima* foi introduzida, em 1760, pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange juntamente com a questão: Se um simples arame fechado é desenhado em um espaço tridimensional, existe uma superfície de área minimizante delimitada pelo arame? Ou seja, o estudo desse problema: determinar, dentre todas as superfícies com o mesmo contorno, aquela que possui a menor área.

Seja $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio. Em cada ponto de D as seguintes condições são equivalentes:

1. os vetores $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}$ são linearmente independentes,
2. a matriz Jacobiana $M = (m_{ij}); m_{ij} = \frac{\partial x_{ij}}{\partial u_j}, i = 1, \dots, n; j = 1, 2$ tem posto 2,
3. existe $i, j; 1 \leq i < j \leq n$ tal que $\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$,
4. $\frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \neq 0$,
5. seja $G(g_{ij}) = \frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}, \det G > 0$.

Definição 2.1 (Superfície). Denotaremos por $x = (x_1, \dots, x_n)$ um ponto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Seja D um domínio do u -plano, $u = (u_1, u_2)$. Definimos provisoriamente uma superfície em \mathbb{R}^n como uma transformação diferenciável $x(u)$ de algum domínio D em \mathbb{R}^n .

Definição 2.2 (Superfície Regular). Uma superfície S dada por $x(u)$ é regular se os vetores $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}$ são linearmente independentes.

Lema 2.1. Sejam S uma superfície dada por $x(u)$ e a um ponto no qual S é regular. Então existe uma vizinhança Δ de a tal que a superfície Σ obtida pela restrição de $x(u)$ a Δ tem uma reparametrização $\widetilde{\Sigma}$ na forma não-paramétrica.

Demonstração. Como $x(u)$ é uma aplicação diferenciável, sabemos que em cada ponto existem $i, j; 1 \leq i < j \leq n$ tal que $\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$. Podemos deduzir que existe uma vizinhança Δ de a na qual a aplicação $(u_1, u_2) \rightarrow (x_i, x_j)$ é um difeomorfismo. Mas ainda, se $x(u) \in C^r$, a aplicação inversa $(x_i, x_j) \rightarrow (u_1, u_2)$ também é C^r , e o mesmo é verdade para a composição

$(x_i, x_j) \rightarrow (u_1, u_2) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ que define $\widetilde{\Sigma}$. ■

Para cada curva $u(t)$ em D com $u(t_0) = a$ corresponde a uma curva $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(t) = x(u(t))$ em S , com $\phi(t_0) = x(a) = b$. Para o vetor tangente a curva, temos:

$$x'(t_0) = u'_1(t_0) \frac{\partial x}{\partial u_1} + u'_2(t_0) \frac{\partial x}{\partial u_2}.$$

Para o comprimento de um vetor tangente temos:

$$|x'(t_0)|^2 = \langle x'(t_0), x'(t_0) \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} u'_i(t_0) u'_j(t_0),$$

onde $g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j} = \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_j}$.

Seja Π o plano tangente a S no ponto $b = x(a)$, vamos denotar Π^\perp seu complemento ortogonal, um espaço $(n - 2)$ dimensional chamado o espaço normal a S no ponto b .

Um vetor arbitrário $N \in \Pi^\perp$ é chamado normal a S . Como tal vetor é ortogonal a $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}$, podemos calcular:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \sum_i \frac{du_i}{ds} \frac{\partial x}{\partial u_i}, & \frac{d^2x}{ds^2} &= \sum_i \frac{d^2u_i}{ds^2} \frac{\partial x}{\partial u_i} + \sum \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} \\ \frac{d^2x}{ds^2} \cdot N &= \sum b_{ij}(N) \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde introduzimos a notação

$$b_{ij}(N) = \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} N,$$

o vetor $\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$ sendo avaliado no ponto a . Observando que

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = |x'(t)|^2 = \sum g_{ij} u'_i(t) u'_j(t) \text{ e } \frac{du_i}{ds} = \left(\frac{du_i}{dt}\right) \left(\frac{ds}{dt}\right).$$

Podemos reescrever 2.1 na seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{ds^2} N = \frac{\sum b_{ij}(N) u'_i(t_0) u'_j(t_0)}{\sum g_{ij} u'_i(t_0) u'_j(t_0)}.$$

É possível expressarmos a equação anterior na forma

$$\frac{d^2x}{ds^2} N = K(N, T),$$

sendo $N \in \Pi^\perp$ vetor normal, $T \in \Pi$ vetor tangente unitário e K chamada de curvatura normal. Se fixarmos N , e fizermos T variar, obtemos as quantidades

$$k_1(N) = \max_T K(N, T), \quad k_2 = \min_T K(N, T)$$

chamadas as curvaturas principais de S .

Finalmente introduziremos o valor médio

$$H(N) = \frac{k_1(N) + k_2(N)}{2}$$

chamada a *curvatura média* de S . Podemos obter uma expressão explícita para $H(N)$:

$$H(N) = \frac{g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N)}{2\det(g_{ij})}.$$

2.2 Superfície Mínima

Definição 2.3 (Superfície Mínima). *Uma superfície S é uma superfície mínima se o seu vetor curvatura média H se anula em qualquer ponto.*

$$H(N) = \frac{g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N)}{2\det(g_{ij})} = 0,$$

isto é,

$$g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N) = 0$$

Neste caso em que a superfície é gráfico de uma função diferenciável, podemos mostrar que o fato de $H \equiv 0$ equivale a seguinte equação

Definição 2.4 (Superfície Mínima na Forma Não-Paramétrica). *A partir de agora, consideraremos superfícies que são gráficos de funções diferenciáveis de classe C^2 . A equação de um gráfico mínimo, ou também dizemos para uma superfície mínima na forma não-paramétrica em \mathbb{R}^n é dada por:*

$$\left(1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2.2)$$

onde $f(x_1, x_2) = (f_3(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, x_2))$.

Observação 2.1. *Não existem superfícies mínimas fechadas em \mathbb{R}^3 .*

Basta observarmos que, pela definição superfície mínima, $k_1 + k_2 = 0$. Daí, $k_1 = -k_2$, assim as superfícies com curvatura média nula são tais que em cada um de seus pontos os dois raios da curvatura principal são iguais e de sinais contrários; em outras palavras, se, em um ponto qualquer de uma superfície similar, imaginemos as duas seções normais que têm nesse ponto as curvaturas principais, seções que formam um ângulo reto entre elas, uma dessas curvas será convexas, e a outra será igual porém, concava. O plano é uma exceção, porque todas as suas curvaturas são zero. Dessa forma, essas superfícies têm curvatura gaussiana $K \leq 0$. Uma superfície fechada sempre possui um ponto $K > 0$. Portanto, não existem superfícies mínimas fechadas em \mathbb{R}^3 .

2.3 Parâmetros Isotérmicos

Definição 2.5. Os parâmetros u_1, u_2 que satisfazem as seguintes condições

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} \quad \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} = 0$$

ou

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}, \quad \lambda = \lambda(u) > 0$$

são chamados de parâmetros isotérmicos.

Lema 2.2. Seja $x(u) \in C^2$ uma superfície S definida em parâmetros isotérmicos. Para que S seja uma superfície mínima é necessário e suficiente que as funções coordenadas $x_k(u_1, u_2)$ sejam harmônicas.

Em uma parametrização $x(u)$ da superfície, definiremos funções complexas auxiliares

$$\phi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}; \quad \zeta = u_1 + iu_2 \quad (2.3)$$

Observamos as identidades:

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2(\zeta) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} =$$

$$\left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \right|^2 - \left| \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|^2 - 2i \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12}$$

$$\sum_{k=1}^n |\phi_k(\zeta)|^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 = g_{11} + g_{22}$$

Temos aqui, algumas propriedades das funções $\phi_k(\zeta)$:

1. $\phi_k(\zeta)$ é analítica em ζ se, e somente se, x_k harmônica em u_1, u_2 ;
2. u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos se, e somente se,

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2(\zeta) \equiv 0 \quad (2.4)$$

3. Se u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos, então S é regular se, e somente se,

$$\sum_{k=1}^n |\phi_k(\zeta)|^2 \neq 0 \quad (2.5)$$

4. Se além disso, $\phi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$; Ω é simplesmente conexo,

$$x_k(\zeta) = 2\Re \int \phi_k(\zeta) d\zeta.$$

Lema 2.3. *Em uma superfície mínima regular com parâmetro isotérmico $x(u_1, u_2)$, as $\phi_k(\zeta)$ definidas anteriormente são analíticas e satisfazem 2.4 e 2.5. Reciprocamente, sejam $\phi_1(\zeta), \dots, \phi_n(\zeta)$ funções analíticas de ζ que satisfazem 2.4 e 2.5 em um domínio simplesmente conexo D . Então existe uma superfície mínima regular $x(u)$ definida sob D tal que as equações em 2.3 são válidas.*

Demonstração. Primeiramente, considerando $x(u)$ uma superfície mínima regular, com u_1, u_2 parâmetros isotérmicos, temos que as funções coordenadas são harmônicas, pelo Lema 2.2. Então, pelo item 1, ϕ_k é analítica. Como u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos e S é regular, vale valem:

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2(\zeta) \equiv 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^n |\phi_k(\zeta)|^2 \neq 0.$$

Reciprocamente, se definirmos $x_k(\zeta) = \Re \int \phi_k(\zeta) d\zeta$, então x_k são harmônicas, satisfazendo:

$$\frac{dx_k(\zeta)}{d\zeta} = \phi_k(\zeta)$$

$$\phi_k(\zeta) = \frac{dx_k(\zeta)}{d\zeta} = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$$

então as x_k são harmônicas satisfazendo as propriedades anteriores. Por hipótese vale a propriedade (3), a qual garante que os parâmetros são isotérmicos, sendo as x_k harmônicas e u_1, u_2 parâmetros isotérmicos, pelo Lema 2.2, temos que existe uma superfície mínima S definida sob D onde as equações 2.3 são válidas.

E por hipótese vale a propriedade (4), $\sum_{k=1}^n |\phi_k(\zeta)|^2 \neq 0$, a qual nos garante que S é regular. ■

Lema 2.4. *Seja S uma superfície mínima. Todo ponto regular de S tem uma vizinhança na qual existe uma reparametrização de S em termos de parâmetros isotérmicos.*

Particularmente, podemos dizer que $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular é superfície mínima se:

1. χ é isotérmica;

2. $\Delta\chi = 0$

Observação 2.2. *Com esta definição incluímos superfícies com singularidades isoladas, chamadas de pontos de ramificação.*

2.4 Exemplos

Encontrar exemplos de superfícies mínimas, não é uma tarefa fácil. Mesmo para o caso mais simples em que a superfície é gráfico de uma função diferenciável $z = f(x; y)$. Neste caso pode-se mostrar que a condição $H = 0$ é equivalente à equação 2.2.

Somente alguns anos depois de Lagrange ter obtido a equação acima, Meusnier mostrou que ela era equivalente ao fato que $k_1 + k_2 = 0$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais, e obteve duas soluções não triviais desta equação, mostrou que, além do plano, a única superfície mínima de rotação, a menos de movimentos rígidos de \mathbb{R}^3 , era o catenóide, obtido pela rotação de uma curva chamada catenária; e Meusnier também encontrou outro tipo de solução, por exemplo, adicionando à equação 2.2, a condição que as "curvas de nível" $f(x, y) = k$ sejam retas, obteve uma outra solução, que neste caso, é um helicóide, eles são gerados por um movimento helicoidal atuando sobre uma reta paralela ao plano de rotação do movimento. Portanto, o helicóide é um exemplo de uma superfície regrada, Catalan mostrou que esta é a única superfície mínima regrada além do plano. Somente cerca de sessenta anos depois da prova da minimalidade do catenóide e helicóide, Scherk enunciou equações explícitas para cinco superfícies mínimas.

A condição acima nos ajuda a verificar que tais superfícies são mínimas. Vejamos:

- Seja $\chi(u, v) = (u, v, 0)$ a equação de um **plano**. Podemos observar que:

$$\frac{\partial \chi}{\partial u} = (1, 0, 0), \quad \frac{\partial \chi}{\partial v} = (0, 1, 0)$$

Verificando que o parâmetro é isotérmico, temos:

$$\left\langle \frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial v}, \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\rangle = 1 \text{ e } \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

E,

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} = (0, 0, 0), \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} = (0, 0, 0),$$

assim

$$\Delta \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} = 0$$

- O **catenóide** é a superfície de revolução obtida girando a catenária

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= a \cosh \frac{z}{a} \end{aligned}$$

em torno do eixo Oz , $a > 0$.

Então $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$, é uma parametrização do catenóide. Como,

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0) \text{ e } \frac{\partial X}{\partial v} = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a),$$

obtemos

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = a^2 \cosh^2 v \text{ e } \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

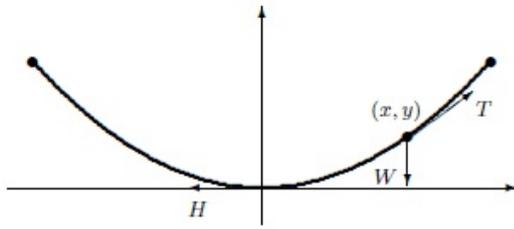


Figura 2.1: Catenária

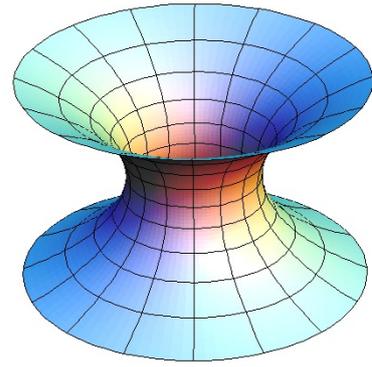


Figura 2.2: Catenóide

Além disso,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = (-a \cosh v \cos u, -a \cosh v \sin u, 0) \text{ e } \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0).$$

Logo,

$$\Delta X = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = 0.$$

- Seja $f(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au)$ uma parametrização que cobre todo o helicóide. Sendo,

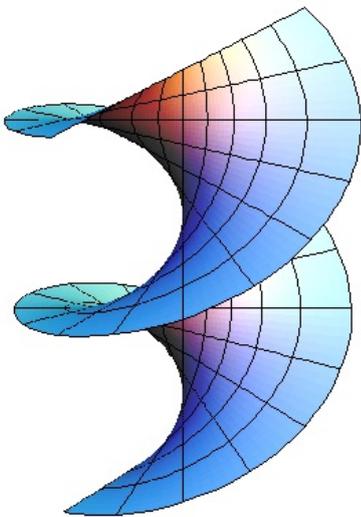


Figura 2.3: Helicóide 1

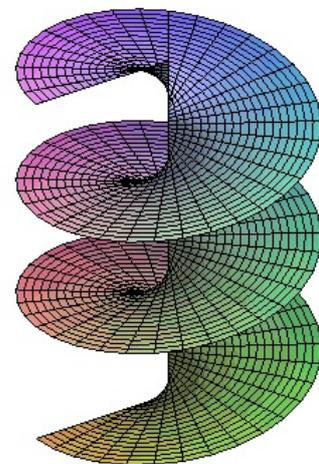


Figura 2.4: Helicóide 2

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, a) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial v} = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0),$$

temos

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = a^2(\sinh^2 v + 1) = a^2 \cosh^2 v = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \text{ e } \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

Além disso, como $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = (-a \sinh v \cos u, -a \sinh v \sin u, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, 0)$ temos

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

Representação de Weierstrass

Uma solução satisfatória para a equação de Lagrange só foi obtida por Weierstrass em 1866. O resultado fundamental dele é o seguinte: Sejam \mathcal{M} uma superfície mínima, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ diferenciáveis holomorfas em \mathcal{M} tais que

1. $\sum \alpha_i^2 \equiv 0$ onde, $\sum \phi_k \equiv 0$;
2. $\sum |\alpha_i|^2 > 0$
3. cada α_i não tem período real em \mathcal{M} .

Então, a aplicação $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $x = (x_1, x_2, x_3)$ com $x_k = \operatorname{Re} \int^z (\alpha_k)$ é uma imersão mínima.

A condição 3 é necessária para garantir que $\operatorname{Re} \int_{p_0}^z (\alpha_k)$ depende apenas do ponto final z . Assim, cada x_k é bem definida independentemente do caminho. A condição 2 que x é uma imersão.

Então existem um domínio aberto e simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$ e duas funções, f holomorfa 1.30 e g meromorfa 1.31, definidas em D , com $f(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in D$ de modo que um domínio de \mathcal{M} pode ser representado parametricamente por

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \alpha_1 \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\xi_0}^{\xi} (1 - g^2) f d\xi, \\ y &= \operatorname{Re} \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \alpha_2 \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\xi_0}^{\xi} i(1 + g^2) f d\xi, \\ z &= \operatorname{Re} \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \alpha_3 \right) = \operatorname{Re} \int_{\xi_0}^{\xi} g f d\xi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

É possível dar uma descrição simples de todas as soluções da equação $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$ em M . Em termos de f e g as formas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ podem ser obtidas como

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(1 - g^2)f \\ \alpha_2 &= \frac{i}{2}(1 + g^2)f \\ \alpha_3 &= gf \end{aligned} \quad (2.7)$$

Reciprocamente, dadas f e g , e se as integrais acima estão bem definidas, 2.6 representam parametricamente uma superfície mínima. A parametrização dada por 2.7 é denominada de *representação de Weierstrass*. Com esta representação podemos obter outras superfícies mínimas. Como por exemplo temos:

Superfície de Scherk: Considere o disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Tome $M = \mathbb{D}$, $g(z) = z$ e $\xi = \frac{4}{(1-z^4)}$. De , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2}{1+z^2} dz = \left(\frac{i}{z+i} - \frac{i}{z-i} \right) dz \\ \alpha_2 &= \frac{2i}{1-z^2} dz = \left(\frac{i}{z+1} - \frac{i}{z-1} \right) dz \\ \alpha_3 &= \frac{4z}{1-z^4} dz = \left(\frac{2z}{z^2+1} - \frac{2z}{z^2-1} \right) dz \end{aligned} \tag{2.8}$$

Claramente, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ não têm período em D . De 2.6, obtemos

$$x = \operatorname{Re} \left(i \log \frac{z+i}{z-i} \right) = -\arg \frac{z+i}{z-i}, \tag{2.9}$$

$$y = \operatorname{Re} \left(i \log \frac{z+1}{z-1} \right) = -\arg \frac{z+1}{z-1}, \tag{2.10}$$

$$z = \operatorname{Re} \left(\log \frac{z^2+i}{z^2-i} \right) = \log \left| \frac{z^2+i}{z^2-i} \right|. \tag{2.11}$$

onde $\xi_0 \in D$ e as integrais são calculadas ao longo de qualquer curva ligando ξ_0 a $\xi \in D$.

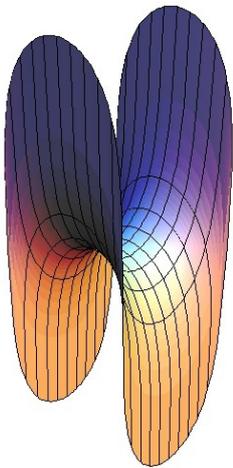


Figura 2.5: Scherk 1

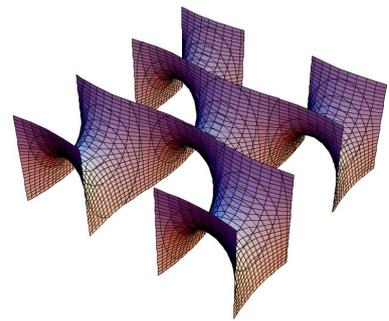


Figura 2.6: Scherk 2

2.5 Equação de Monge-Ampère

Pelo Lema (2.1), sabemos que dada uma superfície S podemos encontrar uma reparametrização na forma não-paramétrica. Assim, sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima dada por $(x_1, x_2, f(x_1, x_2)); (x_1, x_2) \in U$. escrever S na forma não-paramétrica

$$(1+q^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2pq \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + (1+p^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0,$$

onde $p = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ e $q = \frac{\partial f}{\partial x_2}$.

Se f satisfaz a equação acima, p e q satisfazem as seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1+q^2}{w} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p \cdot q}{w} \right) \quad (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p \cdot q}{w} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1+p^2}{w} \right) \quad (**),$$

onde $w = \sqrt{1+p^2+q^2}$.

E podemos ver que tais equações são equivalentes à da superfícies mínimas.

Como o plano é simplesmente conexo, a equação (*) implica que existe uma função ξ satisfazendo:

$$\xi_x = \frac{1+p^2}{w}, \quad \xi_y = \frac{p \cdot q}{w}$$

e a equação (**) implica que existe uma função η satisfazendo:

$$\eta_x = \frac{p \cdot q}{w}, \quad \eta_y = \frac{1+q^2}{w}.$$

Além disso, $\xi_{x_2} = \eta_{x_1}$, portanto, existe uma função h tal que $h_{x_1} = \xi$ e $h_{x_2} = \eta$.

A Matriz Hessiana da função h é

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+p^2}{w} & \frac{p \cdot q}{w} \\ \frac{p \cdot q}{w} & \frac{1+q^2}{w} \end{pmatrix}$$

Daí, temos:

$$\det \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$$

$$\det \frac{\partial^2 h}{\partial (x_1, x_2)} = \frac{1+p^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \frac{1+q^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{p \cdot q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \frac{p \cdot q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{1+q^2+p^2+p^2q^2}{(\sqrt{1+p^2+q^2})^2} - \frac{p^2q^2}{(\sqrt{1+p^2+q^2})^2} = 1.$$

2.6 Teorema de Jörgens

Teorema 2.1. *Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ solução da equação*

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 1.$$

Então, ϕ é um polinômio quadrático em x e y .

Introduziremos a seguinte notação:

$$p = \phi_x \quad q = \phi_y \quad r = \phi_{xx} \quad s = \phi_{xy} \quad t = \phi_{yy}.$$

Assim, podemos reescrever a equação

$$rt - s^2 = 1.$$

Em particular, $rt = 1 + s^2$, dessa forma r e s têm o mesmo sinal. Sem perda de generalidade, vamos considerar ambos positivos.

Consideraremos a *Transformação de Lewy*:

$$T(x, y) := (\xi(x, y), \eta(x, y)) := (x + \phi_x, y + \phi_y).$$

A matriz Jacobiana de T é:

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix}$$

com determinante

$$(1+r)(1+t) - s^2 = 1+t+r+rt-s^2 = 2+r+t \geq 2.$$

Portanto, T é localmente invertível.

Assumimos por enquanto que T é um difeomorfismo. Tal afirmação será demonstrada no *Lema 2.7*. Consideremos a inversa da transformação de Lewy

$$L(\xi, \eta) = T^{-1}(\xi, \eta) := (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

A matriz Jacobiana de L é dada por

$$\begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{2+r+t} \begin{pmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+r \end{pmatrix}$$

e assim, poderemos determinar x_ξ , x_η , y_ξ , y_η em função de r , s , t .

Definimos agora a função:

$$F(\xi, \eta) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) = (x - p, -y + q) = (x(\xi, \eta) - p(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), -y(\xi, \eta) + q(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))).$$

Temos

$$u_\xi = x_\xi - p_x x_\xi - p_y y_\xi = \frac{t-r}{2+r+t} = v_\eta.$$

De forma análoga,

$$v_\xi = \frac{2s}{2+r+t} = -u_\eta.$$

Logo,

$$F(\xi + i\eta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$$

é holomorfa.

Derivando F , temos

$$F'(\xi + i\eta) = u_\xi + iv_\xi = \frac{t-r+2is}{2+r+t}.$$

Assim,

$$|F'(\xi + i\eta)| = \frac{(t-r)^2 + 4s^2}{(2+r+t)^2} = \frac{(t-r)^2 + 4rt - 4}{(2+r+t)^2} = 1 - \frac{4}{2+r+t} < 1.$$

Logo, F' é limitada e portanto constante pelo Teorema de Liouville.

Das equações anteriores, temos as seguintes relações:

$$r = \frac{|1 - F'|^2}{1 - |F'|^2} \quad s = \frac{-i(F' - \overline{F}')'}{1 - |F'|^2} \quad t = \frac{|1 + F'|^2}{1 - |F'|^2}$$

portanto, r , s , t são constantes. E o teorema está provado.

Antes passarmos para a próxima seção, relembremos alguns conceitos.

Uma forma quadrática $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função cujo valor num vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é dado por $\sum_{i,j=1}^n x_{ij}\alpha_i\alpha_j$, onde x_{ij} é uma matriz simétrica $n \times n$. Indicamos o valor da forma quadrática no vetor v por

$$E \cdot v = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}\alpha_i\alpha_j.$$

A forma hessiana da função duas vezes diferenciável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $p \in \Omega$ será denotada por $E(p)$. Sabemos que $E(p) = d^2f(p)$, portanto

$$E(p) \cdot v^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\alpha_i\alpha_j$$

A matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$ é chamada *matriz hessiana* de f no ponto p . Diremos que a forma E é *positiva* quando tivermos $E \cdot v^2 > 0$ para todo $v \neq 0$.

2.7 Todo Gráfico Mínimo em \mathbb{R}^3 é um Plano

Queremos exibir uma demonstração do teorema que Bernstein solucionou no início do século XX. Este é um resultado interessante, porque considerando a multiplicidade de soluções da Equação das Superfícies Mínimas, o fato dela estar definida em todo plano nos garante que não existe outra solução, além da trivial. Antes disso, vejamos algumas preliminares.

2.7.1 Lemas Preliminares

Lema 2.5. *Seja $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^2 em um domínio convexo D , e suponha que a matriz Hessiana $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ avaliada em qualquer ponto é positiva definida. Defina a aplicação $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ por*

$$\phi(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial E}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right)$$

com $\frac{\partial E}{\partial x_i} : D \rightarrow \mathbb{R}$. *Sejam a e b pontos distintos de D , então $(b - a)(\phi(b) - \phi(a)) > 0$.*

Demonstração. Seja $G(t) = E(tb + (1-t)a) = E(tb_1 + (1-t)a_1, tb_2 + (1-t)a_2)$ para $t \in [0, 1]$. Então,

$$G'(t) = E'(tb + (1-t)a) \cdot (b - a) = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial E}{\partial x_i}(tb + (1-t)a) \right] (b_i - a_i)$$

e

$$G''(t) = \sum_{i,j=1}^2 \left[\frac{\partial^2 E^2}{\partial x_i \partial x_j} (tb + (1-t)a) \right] (b_i - a_i)(b_j - a_j)$$

Mas esta é apenas a forma quadrática de $(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j})$ avaliada no ponto $tb + (1-t)a$ aplicada no vetor não-nulo $b - a$. Por ser definida positiva, sabemos que $G''(t) > 0$ para $t \in [0, 1]$. Assim,

$$G'(1) = E'.b(b - a) > E'.a(b - a) = G'(0)$$

que é equivalente a dizer que

$$\sum_{i=1}^2 \phi(b_i)(b_i - a_i) > \sum_{i=1}^2 \phi(a_i)(b_i - a_i),$$

ou seja,

$$(\phi(b) - \phi(a))(b - a) > 0.$$

■

Lema 2.6. *Admita as hipóteses do Lema 2.5. Defina a aplicação $z : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ por*

$$z_i(x_1, x_2) = x_i + \phi_i(x_1, x_2).$$

Então dados pontos distintos $a, b \in D$, temos que

$$\begin{aligned} (z(b) - z(a)) \cdot (b - a) &> |b - a|^2 \\ &e \\ |z(b) - z(a)| &> |b - a|. \end{aligned}$$

Demonstração. Como

$$z(b) - z(a) = (b - a) + (\phi(b) - \phi(a))$$

multiplicando $(b - a)$ em ambos os lados da igualdade, temos:

$$(z(b) - z(a))(b - a) = (b - a)^2 + (\phi(b) - \phi(a))(b - a) > 0.$$

Dessa forma,

$$|b - a|^2 < |(z(b) - z(a))(b - a)| \leq |z(b) - z(a)| \cdot |b - a|$$

e $|b - a| < |z(b) - z(a)|$. ■

Lema 2.7. *Se D é o disco $x_1^2 + x_2^2 < R^2$, então a aplicação z é um difeomorfismo de D sobre um domínio Δ o qual inclui um disco de raio R em torno de $z(0)$.*

Demonstração. Sabemos que z é continuamente diferenciável, uma vez que $E \in C^2$, $(z_i(x_1, x_2) = x_i + \phi_i(x_1, x_2))$, onde $\phi_i(x_1, x_2) = \frac{\partial E}{\partial x_i}$. Se $x(t)$ é qualquer curva diferenciável em D e $z(t)$ é sua imagem sob z , então segue do lema anterior que $|z'(t)| > |x'(t)|$. Assim, o determinante da matriz dz é maior que 1, a matriz Jacobiana é

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} & 1 + \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

com determinante $(1+r)(1+t) - s^2 = 1+t+r+rt - s^2 = 2+t+r \geq 2$. Portanto, z é localmente invertível e temos que a aplicação é um difeomorfismo local.

z é injetiva: pois se $z(a) = z(b)$, pelo Lema (2.6), $a = b$.

z é sobrejetiva: z é uma aplicação aberta, pelo fato de ser um difeomorfismo local.

z tem imagem fechada: se $z(x_n) \rightarrow \bar{r}$, então $z(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. Pelo Lema 2.6, x_n também será uma sequência de Cauchy e assim, $x_n \rightarrow r$, para algum $r \in D$. Por continuidade, $z(r) = \bar{r}$.

Segue-se que z é injetiva, sobrejetiva e localmente diferenciavelmente invertível, pelo Teorema da Função Inversa. Portanto, a inversa é diferenciável e temos o difeomorfismo em Δ .

Devemos mostrar que Δ inclui todos os pontos z tais que $z - z(0) < R$.

Ou seja, que a distância entre z e Δ é 0.

A distância entre um ponto e um conjunto é dada por

$$d(z, A) = \inf\{|z - a|; a \in A\}$$

O ínfimo de um conjunto de números não-negativos é igual a zero se, e somente se, tal conjunto contém números arbitrariamente pequenos. Assim, $d(z, A) = 0$ então $z \in \bar{A}$ e se A é fechado temos $z \in A$.

Se Δ é o plano todo é óbvio. Caso contrário, tomemos $P \in \partial\Delta$. Sabemos que $\partial\Delta = \bar{\Delta} \cap \overline{\mathbb{R}^2 - \Delta}$, logo, $P \in \overline{\mathbb{R}^2 - \Delta}$, como $\mathbb{R}^2 - \Delta$ é fechado, vale que $P \in \mathbb{R}^2 - \Delta$.

Uma vez que $P \in \bar{\Delta}$, existe uma sequência P_n em Δ tal que $\lim P_n = P$. Se (x_k) tivesse ponto de acumulação em D , existiria em subsequência $(x_{n_k}) \subset D$ convergente para um ponto de D ,

$$\lim(x_{n_k}) = x_0 \in D.$$

Como z é um difeomorfismo, teríamos $z(x_k) \rightarrow z(x_0) \in \Delta$. E, $z(x_0) = P \in \Delta$. Mas, estamos supondo que $P \notin \Delta$.

Assim os pontos x_k não podem ter um ponto de acumulação em D , mas devem ter em \mathbb{R}^2 para que suas imagens o tenham. Logo, $|x_k| \rightarrow R$ quando $k \rightarrow \infty$.

Pelo lema anterior, temos

$$|z(x_n) - z(0)| > |x_n - 0| \geq R.$$

De onde obtemos:

$$|P - z(0)| \geq R.$$

Isso é suficiente para mostrar que todo ponto no interior do disco de raio R centrado em $z(0)$ está em Δ .

Pois caso contrário, tomemos

$$y \in B(z(0), R) \setminus \Delta.$$

Desse modo,

$$y \in B(z(0), R) \cap \mathbb{R}^2 - \Delta.$$

Diante disso, temos as seguintes desigualdades:

$$d(P, z(0)) \leq d(y, z(0)) < R,$$

contrariando o fato de $|P - z(0)| \geq R$. Portanto, $B(z(0), R) \subset \Delta$. ■

Lema 2.8. *Seja $f(x_1, x_2)$ uma solução da equação da superfície mínima na forma não-paramétrica*

$$(1 + |q|^2)r - 2.(p.q)s + (1 + |p|^2)t = 0;$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x_1}, q = \frac{\partial f}{\partial x_2}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \text{ para } x_1^2 + x_2^2 < R.$$

Então a aplicação ξ definida por $\xi(x_1, x_2) = (x_1 + F(x_1, x_2), x_2 + G(x_1, x_2))$, onde as funções $F(x_1, x_2)$ e $G(x_1, x_2)$ são tais que

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1 + |p|^2}{W}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{p.q}{W}, \quad \frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{p.q}{W} \text{ e } \frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{1 + |q|^2}{W},$$

$$W = \sqrt{1 + |p|^2 + |q|^2 + |p|^2|q|^2 - (p.q)^2},$$

é um difeomorfismo sobre um domínio Δ que inclui um disco de raio R em torno de $\xi(0)$.

Demonstração. Segue das equações

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1 + |p|^2}{W}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{p.q}{W}, \quad \frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{p.q}{W} \text{ e } \frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{1 + |q|^2}{W}$$

que existe uma função $E(x_1, x_2)$ em $x_1^2 + x_2^2 < R^2$ satisfazendo

$$(\star) \quad \frac{\partial E}{\partial x_1} = F \text{ e } \frac{\partial E}{\partial x_2} = G.$$

Então, $E(x_1, x_2) \in C^2$ e $\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} = \frac{1 + |p|^2}{W} > 0$,

$$\det\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x_1, x_2)} \equiv 1$$

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial^2 E}{\partial(x_1, x_2)}\right) &= \frac{1 + |p|^2}{W} \cdot \left(\frac{1 + |q|^2}{W}\right) - \left(\frac{p \cdot q}{W}\right)^2 \\ &= \frac{1 + |q|^2 + |p|^2 + |p|^2|q|^2 - (p \cdot q)^2}{1 + |p|^2 + |q|^2 + |p|^2|q|^2 - (p \cdot q)^2} = 1 \end{aligned}$$

Assim, a função $E(x_1, x_2)$ tem matriz Hessiana positiva-definida, dessa forma, podemos aplicar os lemas 2.5 e 2.7 a ela.

Mas por (\star) , a aplicação

$$(z_1 = x_1 + F(x_1, x_2), z_2 = x_2 + G(x_1, x_2)),$$

é na verdade a aplicação

$$z_i(x_1, x_2) = x_i + \phi_i(x_1, x_2)$$

aplicada a esta função. A prova deste lema segue imediatamente pelo lema anterior. \blacksquare

Lema 2.9. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então a superfície S em \mathbb{R}^3 definida na forma não-paramétrica por $x_3 = f(x_1, x_2)$ encontra-se sobre um plano se, e somente se, existe uma transformação linear não-singular $\psi : U \rightarrow D$ de algum domínio tal que u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos em S .*

Demonstração. Suponha que os parâmetros u_1, u_2 existem. Fazendo

$$\phi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2};$$

$\zeta = u_1 + iu_2$ para $1 \leq k \leq 3$. Vemos que ϕ_1 e ϕ_2 são constantes porque x_1 e x_2 são lineares em u_1 e u_2 .

Sabemos que u_1 e u_2 são parâmetros isotérmicos se, e só se, $\sum_{k=1}^3 \phi_k^2(\zeta)$ é zero $\forall \zeta$, então ϕ_3 é constante também. (Isto implica que ϕ_3 é constante, fato que o restringe a no máximo dois valores, e como ϕ_3 deve ser contínua, também tem que ser constante).

Isto significa que x_3 tem gradiente constante com respeito a u_1, u_2 e assim com respeito a x_1, x_2 também. Ou seja, devemos ter $f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 + C$, mas isso é a equação de um plano.

Reciprocamente, se $f(x_1, x_2)$ é uma parte de um plano, então é igual a $Ax_1 + Bx_2 + C$ para algumas constantes A, B, C . Logo a aplicação

$$x(u_1, u_2) = (\lambda Au_1 + Bu_2, \lambda Bu_1 - Au_2)$$

com $\lambda^2 = \frac{1}{1+A+B}$ é isotérmica.

Para checar isto, vejamos que

$$\phi_1 = \lambda A - iB, \quad \phi_2 = \lambda B + iA, \quad \phi_1^2 = \lambda^2 A^2 - B^2 - 2\lambda ABi, \quad \phi_2^2 = \lambda^2 B^2 - A^2 + 2\lambda ABi$$

$$x_3 = Ax_1 + Bx_2 + C = A(\lambda Au_1 + Bu_2) + B(\lambda Bu_1 - Au_2) + C$$

então

$$\phi_3 = \lambda(A^2 + B^2) \quad e \quad \phi_3^2 = \lambda^2(A^2 + B^2)^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= \lambda^2 A^2 - B^2 - 2\lambda ABi + \lambda^2 B^2 - A^2 + 2\lambda ABi + \lambda^2(A^2 + B^2)^2 \\ &= \lambda^2(A^2 + B^2) - (A^2 + B^2) + \lambda^2(A^2 + B^2)^2 = (A^2 + B^2)(\lambda^2 - 1 + \lambda^2(A^2 + B^2)) \\ &= (A^2 + B^2)(\lambda^2(1 + A^2 + B^2) - 1) = (A^2 + B^2)(1 - 1) = 0, \end{aligned}$$

lembrando que: $\lambda^2 = \frac{1}{1+A+B}$. ■

2.7.2 Teorema de Bernstein

Teorema 2.2 (Teorema de Bernstein). *Seja $f(x_1, x_2)$ uma solução da equação de uma superfície mínima na forma não-paramétrica*

$$\left(1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$$

definida no plano (x_1, x_2) todo. Então existe uma transformação linear não-singular

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1, \\ x_2 &= au_1 + bu_2 \quad \text{com } b > 0 \end{aligned}$$

tais que u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos no u -plano inteiro para a superfície mínima S definida por $x_k = f_k(x_1, x_2)$; ($3 \leq k \leq n$).

Demonstração. Defina a aplicação ξ tal que

$$\xi(x_1, x_2) = (x_1 + F(x_1, x_2), x_2 + G(x_1, x_2))$$

onde

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1 + |p|^2}{W}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{p \cdot q}{W} = \frac{\partial G}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{1 + |q|^2}{W}$$

que agora é definida no x_1, x_2 -plano inteiro.

O Lema 2.8 mostra que isto é um difeomorfismo do x -plano inteiro sobre o ξ -plano inteiro. Sabemos que ξ é uma configuração de parâmetros isotérmicos em S definida por $x_k = f_k(x_1, x_2)$.

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right|^2 = \frac{W^2}{2W + 2 + |p|^2 + |q|^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = 0$$

Pelo Lema (2.3), as funções

$$\phi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

são funções analíticas de ζ . Podemos ver que

$$\mathfrak{J}(\bar{\phi}_1 \phi_2) = - \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)}$$

$$\phi_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}$$

assim

$$\bar{\phi}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + i \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \quad \phi_2 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}$$

$$\bar{\phi}_1 \phi_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) + i \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right),$$

portanto,

$$\mathfrak{J}(\bar{\phi}_1 \phi_2) = - \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}$$

como o Jacobiano é sempre positivo, podemos ver que $\phi_1 \neq 0$, $\phi_2 \neq 0$ e, além disso,

$$\mathfrak{J} \left\{ \begin{array}{c} \phi_2 \\ \phi_1 \end{array} \right\} = \frac{1}{|\phi_1|^2} \mathfrak{J}(\bar{\phi}_1, \phi_2) < 0.$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + i \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + i \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \right) + i \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right)$$

$$\mathfrak{J} \left\{ \begin{array}{c} \phi_2 \\ \phi_1 \end{array} \right\} = \frac{1}{|\phi_1|^2} \mathfrak{J}(\bar{\phi}_1 \phi_2).$$

Então a função $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ é analítica no ζ -plano inteiro e tem parte imaginária negativa e deve ser uma constante. Pelo Teorema de Picard, uma função analítica que não atinge mais de um valor é constante, então $\frac{\phi_2}{\phi_1} = C$ onde $C = a - ib$; $b > 0$. Isto é, $\phi_2 = (a - ib)\phi_1$. A parte real desta equação é

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = a \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - b \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}$$

e a parte imaginária

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = b \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + a \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}.$$

Se introduzirmos a transformação linear da hipótese do teorema ($x_1 = u_1$, $x_2 = au_1 + bu_2$, $b > 0$) usando a e b temos que

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \quad e \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}$$

as equações de Cauchy-Riemann, expressando a condição que $u_1 + iu_2$ é uma função analítica-complexa de $\xi_1 + i\xi_2$, isto implica que u_1, u_2 também são parâmetros isotérmicos, o que prova o teorema. ■

Corolário 2.1. *No caso $n = 3$, a única solução da equação das superfícies mínimas é a trivial, ou seja, uma função linear de x_1, x_2 . Isto é, se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação das superfícies mínimas*

$$(1 + |q|^2)r - 2.(p.q)s + (1 + |p|^2)t = 0;$$

então $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Como vimos anteriormente, as duas equações a seguir são equivalentes à equação das superfícies mínimas:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1 + q^2}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p.q}{w} \right) = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p.q}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1 + p^2}{w} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Sendo \mathbb{R}^2 simplesmente conexo, existem funções $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_{x_1} = \frac{1 + p^2}{w} \quad (2.14)$$

$$\alpha_{x_2} = \frac{p \cdot q}{w} \quad (2.15)$$

$$\beta_{x_1} = \frac{p \cdot q}{w} \quad (2.16)$$

$$\beta_{x_2} = \frac{1 + q^2}{w} \quad (2.17)$$

De 2.15 e 2.16 usando mais vez a conectividade simples de \mathbb{R}^2 , segue que existe uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $\phi_{x_1} = \alpha$ e $\phi_{x_2} = \beta$. De onde temos,

$$\phi_{x_1 x_1} = \frac{1 + p^2}{w}, \quad \phi_{x_1 x_2} = \frac{p \cdot q}{w}, \quad e \quad \phi_{x_2 x_2} = \frac{1 + q^2}{w}.$$

Isso implica que

$$\phi_{x_1 x_1} \phi_{x_2 x_2} - (\phi_{x_1 x_2})^2 = 1.$$

Pelo Teorema de Jörgens 2.1 $\frac{1+p^2}{w}$, $\frac{p \cdot q}{w}$, $\frac{1+q^2}{w}$ são constantes. Resolvendo para p e q , segue-se que também p e q são constantes e isso demonstra o Teorema. ■

O Teorema de Bernstein se relaciona com uma questão de estabilidade que passaremos a descrever. Seja D um domínio limitado de uma superfície mínima S . Se D for suficientemente pequeno (por exemplo, se a área da imagem esférica de D for menor do que 2π), D é estável. Suponha que expandimos D por meio de uma família de domínios D_t , $t \in [0, \infty)$, que começa em D , $D_0 = D$, e é crescente, isto é, $D_{t_1} \supset D_{t_2}$ se $t_1 > t_2$. Vamos admitir que a família D_t é uma *exaustão* de S , isto é, que $\bigcup_t D_t = S$. Se efetuarmos este processo para o plano, veremos facilmente que todo D é estável. A questão é se **existe outra superfície mínima além do plano, para qual D_t é estável, ou se, pelo contrário, toda superfície mínima completa deixa de ser estável para algum t** . Não é difícil mostrar que se um domínio $D \subset S$ não é estável então todo domínio que contém D também não é estável. Portanto, a maneira como expandimos D é irrelevante para a resposta da questão.

Capítulo 3

Estabilidade das Superfícies Tridimensionais

3.1 Fórmula da Primeira Variação da Área

Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional orientada, $\{E_i\}$ uma base positiva de campos ortonormais definidos em um aberto $\Omega \subseteq M$ e $\{\phi_i\}$, tal que

$$\phi_i(E_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Consideremos em Ω a n -forma

$$dM = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$$

definida em toda M , denominada *forma volume*, para $n = 2$ a chamaremos de *forma área*.

O volume de uma região $D \subseteq M$ é dado por

$$\text{Vol}(D) = \int_D dM$$

onde a integral é a usual n -formas em variedades n -dimensionais.

Lema 3.1. *Se $\Omega \subseteq M$ é um aberto com coordenadas $\{x_i\}$, temos em Ω*

$$dM = [\det(g)]^{\frac{1}{2}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

onde $g = (g_{ij})$ tal que $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$

Definição 3.1. *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão e $D \subseteq M$ um domínio com fronteira diferenciável. Uma variação de f em D é uma função diferenciável $F : \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que sendo $F^t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $F^t(x) := F(x, t)$, temos*

1. $F^{(0)} = f$;
2. F^t é uma imersão.

Quando tivermos $F^t(y) = f(y)$ para todo $y \in \partial D$ e todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, teremos uma variação própria.

Lema 3.2. *Sejam $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $f : \mathbb{R}$ uma função suave por partes tal que $\int_M f dM = 0$. Então existe uma variação normal de F que preserva o volume e cujo campo variacional é fN . Além disso, se $f|_{\partial M} \equiv 0$, a variação pode ser escolhida de modo que fixe o bordo ∂M .*

Teorema 3.1. *(Primeira Variação da Área) Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização de M e $F : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma variação normal de x , ou seja, $F(p, t) = x(p) + tf(p)\eta(p)$ onde $p = (u, v) \in \overline{D}$ e $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Sendo $A(t)$ a área de F^t , logo,*

$$A'(0) = \left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=0} = -2 \int_{\overline{D}} f H dM$$

Proposição 3.1. *Dada uma superfície M , dizemos que M é mínima se, e somente se, $A'(0) = 0$ para toda variação normal.*

Demonstração. Se $H \equiv 0$, pela fórmula da primeira variação da área, temos que

$$A'(0) = -2 \int_{\overline{D}} f H dM = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que $A'(0) = 0$ para toda f , e que existe um certo $p \in M$ tal que $H(p) > 0$. Escolhamos f tal que $f(p) = H(p)$, $f \geq 0$, e que f é identicamente nula fora de um pequeno domínio $\Omega \in M$ em torno de p . Para tal f temos

$$A'(0) = \int_{\overline{D}} f H dM < 0.$$

O que é uma contradição, pois estávamos supondo que $A'(0) = 0$. Logo, devemos ter $H \equiv 0$ para todos os pontos de M . ■

Definição 3.2. *$f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão mínima ou uma subvariedade mínima se $H \equiv 0$.*

Assim, dados $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e D um domínio limitado tal que $\overline{D} \subset U$, então dizemos que χ é mínima em D se, e somente se, $A'(0) = 0$ para toda variação normal de $\chi(\overline{D})$.

Logo, qualquer região limitada $X(\overline{D})$ de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de $X(\overline{D})$. Devemos ressaltar que a condição $H \equiv 0$ não garante que a área seja ponto de mínimo, somente que D é um ponto crítico da função área. Precisamos analisar o que acontece com a segunda derivada. Para isso, temos o seguinte resultado

3.2 Fórmula da Segunda Variação da Área

Seja \mathcal{M} uma superfície mínima, $D \subset \mathcal{M}$ um domínio limitado de \mathcal{M} , e $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em \overline{D} , tal que $f|_{\partial D} \equiv 0$. Considere a variação normal dada por f . Então

$$A''(0) = \frac{d^2 A}{dt^2}(0) = - \int_{\overline{D}} (f \Delta f - 2K f^2) d\mathcal{M} \quad (3.1)$$

onde K é a curvatura Gaussiana de \mathcal{M} , Δf é o laplaciano e $d\mathcal{M}$ é o elemento de área.

Ao leitor interessado em uma boa demonstração, mesmo em um contexto mais geral, pode ser encontrada em 9.

3.3 Estabilidade

Passaremos agora a uma extensão recente do teorema de estabilidade. Inicialmente, precisamos de uma definição geral sobre superfícies.

Definição 3.3. *Uma superfície regular, conexa S é chamada estendível se existe uma superfície regular \tilde{S} tal que $\tilde{S} \subset S$ como um subconjunto próprio. Se não existe tal \tilde{S} , S é dita não-estendível.*

Definição 3.4. *Uma superfície regular S é denominada completa quando, para qualquer ponto $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada, $\gamma : [0; \epsilon) \rightarrow S$ de S , começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$, definida sobre \mathbb{R} .*

De outro modo, uma superfície S é chamada completa se ela não tem pontos na fronteira que possam ser atingidos por uma curva em S de comprimento finito.

As superfícies fechadas são completas, mas existem superfícies completas que não são limitadas e, portanto, não são fechadas. Exemplos de superfícies completas não-limitadas são o plano, o cilindro, o catenóide e o helicóide. Intuitivamente, uma superfície completa é aquela na qual se pode percorrer qualquer distância em qualquer direção sem sair da superfície.

Um exemplo importante de superfície completa é dado pelo gráfico $z = f(x, y)$ de uma função diferenciável onde f está definida em todos os pontos do plano (x, y) . Chamaremos tais superfícies *gráficos completos*.

Definição 3.5. *Seja S uma superfície mínima, e seja $D \subset S$ um domínio limitado de S . Dizemos que D é estável se $A''(0) > 0$ para toda variação normal de S que fixa a fronteira ∂D de D ; isto significa que D é um ponto de mínimo relativo para toda tal variação.*

Definição 3.6. *Dizemos que D é minimizante se a área de D é a menor ou igual a área de qualquer outra superfície que tenha a mesma fronteira que D .*

Observação 3.1. *Não existem superfícies mínimas fechadas em \mathbb{R}^3 .*

Basta observarmos que, pela definição de superfície mínima, $k_1 + k_2 = 0$. Dessa forma, essas superfícies têm curvatura gaussiana $K \leq 0$. Uma superfície fechada sempre possui um ponto $K > 0$. Portanto, não existem superfícies mínimas fechadas em \mathbb{R}^3 .

Vamos nos basear nos resultados de Cálculo Variacional, e mostraremos que superfícies satisfazendo a equação 2.2 tem área mínima. De acordo com este princípio, que consideraremos novamente, quando a constante H tem valor finito, a superfície da forma deveria sempre ser menor do que todas as superfícies próximas com o mesmo volume e com a mesma fronteira, e quando H é nula, a superfície seria sempre, absolutamente, isto é sem levar em conta o volume contido, a menor de todas as superfícies com a mesma fronteira; neste último caso, tais superfícies são frequentemente chamadas de superfícies mínimas.

Então, podemos fazer os seguintes questionamentos:

1. Quando é que um domínio limitado de uma superfície mínima é estável?
2. Uma superfície mínima completa e estável é um plano?

Definição 3.7. *Seja M uma superfície orientada e \mathbb{S}^2 uma esfera de raio um e centro zero. A aplicação normal de Gauss, ou aplicação esférica, $g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ é a aplicação que toma seus valores na esfera unitária.*

Com o intuito de responder as questões acima, veremos uma condição para que uma superfície mínima seja estável, o Teorema de J.L Barbosa, M. do Carmo, em anteriormen demonstramos o Teorema de Bernstein o qual nos garantiu que se uma superfície mínima é um gráfico mínimo completo então ela é um plano, por fim exibiremos uma generalização deste teorema, a qual afirma que superfícies mínimas completas e estáveis em \mathbb{R}^3 são planos, o Teorema de M. do Carmo, C. K. Peng.

É fundamental ressaltar que as superfícies mínimas, mesmo estáveis, podem não ser orientáveis, como por exemplo a faixa de Möbius. Desse modo, as superfícies mínimas que consideraremos serão sempre orientáveis.

Os teoremas 3.3 e 3.4 que serão mostrados a seguir nos dão um entendimento razoável da estabilidade de superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 e levantam a seguinte questão: suponha que uma superfície mínima não é estável. Como fazer para medir a sua não estabilidade?

3.4 Índice de Morse

Sendo \mathcal{F} o espaço vetorial das funções reais diferenciáveis por partes sobre \mathcal{M} , ou seja

$$\mathcal{F} := \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}; f \in C^\infty\}.$$

Observe que a equação da Fórmula da Segunda Variação da Área define uma função de f

$$\begin{aligned} I : \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto - \int_D (f \Delta f - 2K f^2) dA \end{aligned}$$

a qual denotaremos por $I(f) = A''(0)f$ e denominaremos a Forma do Índice.

A dimensão do maior subespaço de \mathcal{F} no qual I é negativa definida fornece uma medida da não-estabilidade de \mathcal{M} . Tal índice é chamado o *Índice de Morse*, $Ind(\mathcal{M})$, da superfície mínima \mathcal{M} .

Considere em \mathcal{F} o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{M}} f g dM$$

e consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} L : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} \\ f &\mapsto L(f) = \Delta f - 2K f. \end{aligned}$$

A aplicação linear L é chamada de *operador de Jacobi*. Então $I(f) = -\langle Lf, f \rangle$. Seja λ dado por $Lf + \lambda f = 0$, λ é um autovalor de L .

L é uma aplicação linear simétrica cuja forma quadrática associada é exatamente a aplicação $I : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$.

Nessas condições, podemos diagonalizar L com uma sequência de autovalores reais:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \dots \rightarrow +\infty$$

cujos subespaços de autovetores têm dimensão finita. O primeiro autovalor λ_1 do operador estabilidade L em um domínio limitado $\Omega \subset \mathcal{M}$ é dado por

$$\lambda_1(\Omega) = \inf\{I(f); f \in \mathcal{C}_0^\infty, \int_\Omega f^2 = 1\}$$

onde I é a forma quadrática associada ao operador L . Assim,

$$I(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(f_i, f_i)$$

onde f_i pertence ao subespaço de λ_i . Segue que $Ind(\mathcal{M})$ é o número de autovalores negativos de L . Consequentemente, temos que $I(f)$ o índice de uma superfície mínima compacta com bordo é finito. Além disso, se $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$, então $\lambda_i \geq \widetilde{\lambda}_i$ e $Ind(\mathcal{M}) \geq Ind(\widetilde{\mathcal{M}})$.

Até então, definimos o índice para uma superfície mínima compacta com bordo. Agora, definiremos o índice de uma superfície mínima completa \mathcal{M} . Para isso, consideremos uma *exaustão* de \mathcal{M} , isto é, uma sequência crescente de conjuntos limitados de \mathcal{M} com fronteiras regulares $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n \subset \dots$ e tais que $\bigcup M_n = \mathcal{M}$. Definimos então

$$Ind(\mathcal{M}) = \sup Ind(M_n).$$

Donde segue que: seja $f : \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima e $\Omega \subset \mathcal{M}$ um domínio relativamente compacto.

1. Diremos que Ω é estável se a forma do índice $I(f)$ é definida positiva.
2. Diremos que a superfície \mathcal{M} é estável se todos os domínios relativamente compactos em \mathcal{M} são estáveis.

Observação 3.2. *Sejam $p \in M$ um ponto de M e $B_R(p)$ a bola geodésica em M de raio R e centrada em p . Seja também W um subespaço de dimensão finita de funções seccionalmente suaves em $B_R(0)$. I é uma forma negativa definida em W se $I(f) < 0$ para toda $f \in W$, $f \neq 0$.*

Definição 3.8. *Seja $D \subset M$ um subconjunto aberto, conexo com fecho compacto \overline{D} e tal que a fronteira ∂D é uma união finita de curvas suaves por partes. Um campo de Jacobi em \overline{D} é um campo normal fN , onde $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave que satisfaz:*

$$-\Delta f + 2fK = 0,$$

onde Δ e K denotam o Laplaciano, e a Curvatura Gaussiana, respectivamente.

Observação 3.3. *Sejam M uma superfície mínima, $D \subset M$ um domínio limitado e estável; e $f : g(D) \subset \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. É uma consequência do teorema de Stokes para superfícies que*

$$-\int_D f \widehat{\Delta} f d\widehat{M} = \int_D |\widehat{\text{grad}} f|^2 d\widehat{M},$$

onde indicamos por

$$d\widehat{M} = -K dM \quad \text{e} \quad \widehat{\Delta} f = -\frac{1}{K} \Delta f,$$

o elemento de área e o Laplaciano da esfera \mathbb{S}^2 , respectivamente.

Em princípio, o índice de uma superfície mínima pode ser infinito, mas temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *(D. Fischer-Colbrie) Seja \mathcal{M} uma superfície mínima orientável e completa em \mathbb{R}^3 . Então,*

$$\text{Ind}(\mathcal{M}) < \infty, \quad \text{se, e somente se,} \quad \int_{\mathcal{M}} |K| dM < \infty$$

onde $C(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} K dM$ é a curvatura total de \mathcal{M} .

Demonstração. Vamos denotar a segunda forma fundamental de M por \mathcal{A} . Primeiramente, suponhamos que M tenha índice finito no \mathbb{R}^3 . Neste caso, sabemos que em $|\mathcal{A}|^2 = -2K$ e $\int |\mathcal{A}|^2 dM$, logo,

$$\int_{\mathcal{M}} |K| dM < \infty.$$

Agora, suponhamos que M tem curvatura total finita, assim temos que, pelo teorema, M é conformemente uma superfície de Riemann \overline{M} com furos $\{p_1, \dots, p_k\}$ e a aplicação de Gauss $g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ se estende holomorficamente à aplicação $g : \overline{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$. Mostraremos que o índice de M é independente da métrica escolhida, e depende somente da aplicação de Gauss em M . Seja $ds^2 = \lambda|dz|^2$ a métrica de M . Logo, de 1.4 temos

$$\Delta_M f = \frac{1}{\lambda^2} \Delta f.$$

Seja $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal em M e v um vetor normal unitário. Então $h_{ij} = \langle \nabla_{e_i} e_j, v \rangle$ define a segunda forma fundamental de M e

$$|\text{grad } g|^2 = \sum_{ij} \langle h_{ij} e_i, e_j \rangle^2 = \sum h_{ij}^2 = -2K.$$

Lembrando que

$$\delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \neq j \\ 1 & , \text{ se } i = j \end{cases}$$

Denotaremos o operador L na métrica $ds^2 = \lambda|dz|^2$ por L_M .

$$L_M = \Delta - 2K = \Delta - |\text{grad } g|^2 = \frac{1}{\lambda} \Delta_M + \frac{1}{\lambda} |\text{grad}_M g|^2$$

e

$$\begin{aligned}
I_M(f) &= - \int f L_M f ds = - \int_M f \left(\frac{1}{\lambda} \Delta_M + \frac{1}{\lambda} |\text{grad}_M g|^2 \right) \lambda dx dy \\
&= \int_M \left(\frac{1}{\lambda} |\text{grad}_M f|^2 - \frac{1}{\lambda} |\text{grad}_M g|^2 f^2 \right) \lambda dx dy \\
&= \int_M |\text{grad}_M f|^2 - |\text{grad}_M g|^2 f^2 dx dy
\end{aligned}$$

para toda f com suporte compacto em M . Assim, para uma outra métrica $\widehat{\lambda}|dz|^2$ em M temos que

$$I_\lambda(f) = I_{\widehat{\lambda}}(f).$$

Se $\widehat{\lambda}|dz|^2$ é uma função suave em M então

$$L_\lambda = \frac{1}{\lambda} (\Delta_M + |\text{grad}_M g|^2) = \frac{1}{\lambda} (\widehat{\lambda} L_{\widehat{\lambda}}) = \frac{\widehat{\lambda}}{\lambda} L_{\widehat{\lambda}}.$$

Como g se estende suavemente para p_1, \dots, p_k , em é suave no infinito e $|\text{grad}_M g|^2$ é uma função suave limitada em M , então, o conjunto dos autovalores de $L_{\widehat{\lambda}}$ é discreto e, assim, índice finito na superfície de Riemann compacta \overline{M} . Portanto,

$$\text{Ind } L_\lambda(M) = \text{Ind } L_{\widehat{\lambda}}(M) \leq \text{Ind } L_{\widehat{\lambda}}(\overline{M}) < \infty.$$

De fato, M tem índice finito. ■

Definição 3.9. *A fronteira ∂D de um domínio $D \subset M$ é uma fronteira conjugada se existe um campo de Jacobi não-nulo em \overline{D} se anulando em ∂D , se além disso, não existe um subdomínio $D' \subset D$, $D' \neq D$ tal que $\partial D'$ é uma fronteira conjugada, ∂D é chamada de primeira fronteira conjugada.*

A multiplicidade de uma fronteira conjugada ∂D é o número de campos de Jacobi linearmente independentes em \overline{D} que se anulam em ∂D .

Nesta seção listaremos os fatos que nos auxiliam responder ao questionamento: Uma superfície mínima completa e estável é um plano? O primeiro é um resultado que nos dá uma condição para estabilidade de superfícies mínimas compactas.

Lema 3.3. *Para toda $f \in \mathcal{H}(D)$,*

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{\overline{D}} \|\text{grad } f\|^2 dM}{\int_{\overline{D}} f^2 dM}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $f \in P_{\lambda_1}(D) = \{f \in \mathcal{H}(D); \Delta_M f + \lambda_1 f = 0\}$.

A prova pode ser encontrada em 2.

Teorema 3.3. *(J. L. Barbosa e M. do Carmo) Se a área da imagem esférica $g(D) \subset \mathbb{S}^2$ de um domínio $D \subset M$ for menor que 2π , então D é estável.*

Esse teorema nos garante que gráficos mínimos são estáveis. Pois podemos encontrar exemplos de domínios instáveis cuja imagem esférica tem área maior que 2π . Daremos apenas um esboço da demonstração, para maior detalhes consulte 1.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que D não é estável.

Se D não é estável, a forma do índice é negativa, isto é, $I(V) \leq 0$ para algum $V = a.\eta$, onde $a : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave por partes se anulando em ∂D .

Pelo Teorema do Índice de Morse, isto significa que D contém um domínio D' tal que $\partial D'$ é uma fronteira primeira conjugada. Dessa forma, existe um campo de Jacobi $J = f\eta$ se anulando em $\partial D'$, isto é, $f \in C^\infty$ em \bar{D}' , que satisfaz $-\Delta f + 2fK = 0$, $f > 0$ em D' e $f \equiv 0$ em $\partial D'$.

Sob essas condições, seja ¹ $\varphi : g(\bar{D}') \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi \in \mathcal{H}(g(D'))$ e

$$\int_{g(\bar{D}')} \|\text{grad } \varphi\|^2 dM \leq 2 \int_{g(\bar{D}')} f^2 dM \quad (3.2)$$

Pelo lema anterior, a existência de tal função implica que $\lambda_1(g(\bar{D}')) \leq 2$.

Por outro lado, sabemos que dentre todos os domínios esféricos com a mesma área, a calota esférica minimiza o primeiro autovalor pelo Laplaciano.⁸ Seja C uma calota esférica com

$$\text{area } C = \text{area } g(\bar{D}') < 2\pi.$$

Assim, $C \not\subseteq \mathbb{H}$ onde \mathbb{H} é um hemisfério de \mathbb{S}^2 . Como $D' \subset D$, temos $\lambda_1' \geq \lambda_1$ e pelo fato de $\lambda_1(\mathbb{H}) = 2$ temos que $\lambda_1(C) > 2$. Usando o fato referido acima, concluímos que

$$\lambda_1(g(\bar{D}')) \geq \lambda_1(C) > 2.$$

Isto contradiz a desigualdade da nossa hipótese. Portanto, D deve ser estável. ■

Como aplicação desse teorema temos que gráficos mínimos são estáveis. Lembremos o Teorema de Bersntein demonstrado no capítulo anterior, o qual nos diz que se um gráfico mínimo está definido em todo plano xy , então tal gráfico é um plano. Nosso próximo objetivo é mostrar que as superfícies mínimas estáveis e completas são os planos.

Teorema 3.4. (*M. do Carmo, C. K. Peng*) *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa estável. Então $x(M) \subset \mathbb{R}^3$ é um plano.*

Sendo uma superfície de Riemann equivalente a uma variedade complexa de dimensão um, pelo Teorema da Uniformização de Koebe, ou ela é conformemente equivalente ao plano complexo, ou ao disco unitário, ou a esfera unitária. Assim, prova será dada em três partes. Na primeira, mostraremos que podemos nos restringir ao recobrimento universal conforme $\pi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, fato que nos garantirá a conexidade simples. Em seguida analisaremos outros dois casos em que M é conformemente equivalente ao plano complexo ou ao disco unitário, pois como imersões mínimas em \mathbb{R}^3 não podem ser compactas, não consideraremos o caso da esfera.

Lema 3.4. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima, completa e estável e $\pi : \tilde{M} \rightarrow M^2$ o recobrimento universal de M . Se f é estável, então $f \circ \pi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é estável.*

¹veja construção da φ em 1

Demonstração. Suponhamos que $f \circ \pi$ não seja estável. Existe então um domínio relativamente compacto $\tilde{D} \subseteq \tilde{M}$ que é instável. Isto significa que a forma do índice é negativa definida, em particular, existe uma função $\psi : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi \equiv 0$ em $\partial\tilde{D}$ e $I(\psi) \leq 0$.

Seja $D = \pi(\tilde{D})$. Consideremos uma decomposição de D em subdomínios D_i uniformemente recobertos cujos fechos se intersectam somente em conjuntos de medida nula. Pela compacidade relativa de D podemos assumir um número finito de tais subdomínios.

Pela compacidade relativa, existe uma cobertura finita de \tilde{D} , digamos em n subdomínios. Seja $\tilde{D}_1 = \bigcup\{\pi^{-1}(D_i); \pi^{-1}(D_i) \cap \tilde{D} \neq \emptyset\}$. Então $\tilde{D} \subset \tilde{D}_1$ e portanto \tilde{D}_1 é instável. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\tilde{D}_1 = \tilde{D}$. Vamos definir a seguinte função:

$$\phi : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(p) = \sum_{q \in \pi^{-1}(p) \cap \tilde{D}} \psi(q).$$

A soma acima faz sentido, pois é finita, e é uma função diferenciável, nula em ∂D . E:

$$\int_{\tilde{D}} \|\text{grad } \varphi\|^2 dM \leq 2 \int_{\tilde{D}} \varphi^2 dM$$

Segue que D contém uma fronteira conjugada. Portanto, D é instável, uma contradição.

Assim, podemos assumir que M é simplesmente conexa. Com a estrutura complexa natural dada pela imersão, vamos verificar os casos $M = \mathbb{C}$ e $M = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$. ■

Vamos considerar primeiro o caso do disco unitário. Antes disso, observemos as seguintes desigualdades que serão utilizadas nas próximas demonstrações.

Proposição 3.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Para todo $\epsilon > 0$, obtemos*

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2.$$

Demonstração. Sabemos que

$$\left(\sqrt{\epsilon}a - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}b \right)^2 \geq 0.$$

Logo,

$$\epsilon a^2 - 2 \cdot \sqrt{\epsilon}a \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}b + \frac{1}{\epsilon}b^2 \geq 0.$$

Portanto,

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2. \quad \blacksquare$$

Proposição 3.3 (Desigualdade de Young). *Dados números reais positivos p e q tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então para todo par de números reais a e b não-negativos vale a desigualdade:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 3.5. *Não existe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão conforme mínima completa e estável.*

Demonstração. Seja $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$, com $\lambda \neq 0$, a métrica induzida. Assumindo, por absurdo, que cada subdomínio relativamente compacto $D \subset M$ é estável, pela definição estabilidade, devemos ter a forma quadrática associada ao índice definida-positiva, ou seja, $I(\psi) \geq 0$. Isto implica que

$$I(\psi) = -(\Delta\psi^2 - 2K\psi^2) \geq 0$$

de onde temos que

$$\int_M (\psi\Delta\psi - 2K\psi^2)dM \leq 0 \quad (3.3)$$

para toda função suave por partes ψ que têm suporte compacto em M .

Denotaremos o Laplaciano por Δ e dA o elemento de área em uma métrica plana. Então,

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\Delta\log\lambda, \quad dM = \lambda^2 dA, \quad \Delta_M = \frac{1}{\lambda^2}\Delta$$

substituindo na equação acima, esta pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_M (\psi\Delta\psi - 2K\psi^2)dM &= \int_{\mathbb{D}} (\psi\Delta\psi - 2(-\frac{1}{\lambda^2}\Delta\log\lambda^2)\frac{1}{\lambda^2}dA \\ &= \int_{\mathbb{D}} (\psi\Delta\psi + \psi^2\Delta\log\lambda^2)dA \leq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Fazendo $\lambda^{-1} = \mu$ e substituindo na equação anterior ψ por $\mu\psi$ em 3.3, e utilizando as propriedades 1.3 e 1.6 e sabendo que pela definição de K , vemos $\Delta\log\mu = K$, ou seja, $\frac{\Delta\mu}{\mu} - \frac{|\text{grad}\mu|^2}{\mu^2}$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} (\mu\psi\Delta(\mu\psi)) dA &\leq -2 \int_{\mathbb{D}} (\mu\psi)^2 K dA = -2(\mu\psi)^2 \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{\Delta\mu}{\mu} - \frac{|\text{grad}\mu|^2}{\mu^2} \right) dA \\ \int_{\mathbb{D}} \mu\psi (\mu\Delta\psi + \psi\Delta\mu + 2\langle \text{grad}\mu, \text{grad}\psi \rangle) dA &\leq -2(\mu\psi)^2 \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{\Delta\mu}{\mu} - \frac{|\text{grad}\mu|^2}{\mu^2} \right) dA \\ \int_{\mathbb{D}} (\mu^2\psi\Delta\psi + \psi^2\mu\Delta\mu + 2\mu\psi\langle \text{grad}\mu, \text{grad}\psi \rangle) dA &\leq -2 \int_{\mathbb{D}} (\psi^2\mu\Delta\mu + 2\psi^2|\text{grad}\mu|^2) dA \\ \int_{\mathbb{D}} \left[-\mu^2|\text{grad}\psi|^2 - \psi^2|\text{grad}\mu|^2 - 2\mu\psi\langle \text{grad}\mu, \text{grad}\psi \rangle + \frac{1}{2}(\mu^2\Delta\psi^2 + \psi^2\Delta\mu^2) \right] dA \\ &\leq -2 \int_{\mathbb{D}} (\psi^2\mu\Delta\mu + 2\psi^2|\text{grad}\mu|^2) dA \\ \int_{\mathbb{D}} (-\mu^2|\text{grad}\psi|^2 + \psi^2|\text{grad}\mu|^2 - 2\mu\psi\langle \text{grad}\mu, \text{grad}\psi \rangle + 2\psi^2|\text{grad}\mu|^2) dA &\leq 0 \\ 3 \int_{\mathbb{D}} |\text{grad}\mu|^2\psi^2 dA &\leq \int_{\mathbb{D}} \mu^2|\text{grad}\psi|^2 dA - 2 \int_{\mathbb{D}} \mu\psi\langle \text{grad}\psi, \text{grad}\mu \rangle dA. \quad (*) \end{aligned}$$

Como para qualquer $\epsilon > 0$ 3.2,

$$|\mu\psi\langle grad\psi, grad\mu\rangle| \leq 2|\mu grad\psi| \cdot |\psi grad\mu| \leq \epsilon|grad\mu|^2\psi^2 + \frac{1}{\epsilon}\mu^2|grad\psi|^2,$$

a equação (*) implica que existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |grad\mu|^2\psi^2 dA \leq \beta \int_{\mathbb{D}} \mu^2|grad\psi|^2 dA$$

como $grad_M = \frac{1}{\lambda}grad$, finalmente

$$\int_M |grad_M\mu|^2\psi^2 dM \leq \beta \int_M \mu^2|grad_M\psi|^2 dM. \quad (3.5)$$

Agora escolhamos uma família de bolas geodésicas B_R de raio R que exausta M , ou seja, B_R é uma família de subconjuntos de M dada por $B_R = \{p \in M; \rho(p, p_0) \leq R\}$ onde $\rho(p, p_0)$ é a distância geodésica em M de p até um ponto fixado p_0 . Por completude, B_R é $\bigcup B_R = M$. É conhecido que $|grad\rho| \leq 1$ em quase toda parte de M , ou seja, exceto em conjunto de medida nula. Agora, fixando R e $0 < \theta < 1$, tomaremos μ dada por

$$\mu(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho(p) \leq \theta R; \\ \frac{R-\rho(p)}{(1-\theta)R} & \text{se } \theta R \leq \rho(p) \leq R; \\ 0 & \text{se } \rho(p) \geq R. \end{cases}$$

uma função contínua que vale um em $B_R(\theta)$, zero fora de B_R e linear em $B_R - B_R(\theta)$. Então, μ define uma função Lipschitziana em M com suporte compacto em B_R . Da equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |grad_M\mu|^2 dM &\leq \frac{\beta}{(1-\theta)^2 R^2} \int_M \mu^2 dM \\ &= \frac{\beta}{(1-\theta)^2 R^2} \int_{\mathbb{D}} dA = \frac{\pi\beta}{(1-\theta)^2 R^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$, podemos concluir que $|grad\mu| \equiv 0$, uma vez que μ ter suporte compacto implica que $\mu \rightarrow 0$, ou seja, $\lambda = \text{constante}$, e isso contradiz a completude de $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$. Portanto, o subdomínio D não pode ser estável e não pode existir tal imersão. ■

Agora vamos considerar o caso em que M é conformemente equivalente ao plano complexo \mathbb{C} .

Lema 3.6. *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa estável. Então $f(\mathbb{C})$ é um plano.*

Demonstração. Pela estabilidade e de 3.4, temos que

$$\int_{\mathbb{C}} \psi^2 \Delta \log \lambda^2 dA \leq - \int_{\mathbb{C}} \psi \Delta \psi dA$$

Fazendo $\Upsilon = \Delta \log \lambda^2$ na equação anterior e admitindo que vale a 3.3, obtemos

$$\int_{\mathbb{C}} \Upsilon \psi^2 dA \leq \int_{\mathbb{C}} |grad\psi|^2 dA. \quad (3.7)$$

Trocando ψ por $\Upsilon\psi$ na equação anterior, obtemos

$$\int_{\mathbb{C}} \Upsilon^3 \psi^2 dA \leq \int_{\mathbb{C}} |\text{grad } \psi \Upsilon|^2 dA$$

Lembrando 1.6,

$$\int_{\mathbb{C}} \Upsilon^3 \psi^2 dA \leq \int_{\mathbb{C}} \langle \psi \text{grad } \Upsilon + \Upsilon \text{grad } \psi, \psi \text{grad } \Upsilon + \Upsilon \text{grad } \psi \rangle dA,$$

pela linearidade do produto interno podemos ver que

$$\int_{\mathbb{C}} \Upsilon^3 \psi^2 dA \leq \int_{\mathbb{C}} \Upsilon^2 |\text{grad } \psi|^2 dA + \int_{\mathbb{C}} \psi^2 |\text{grad } \Upsilon|^2 dA + 2 \int_{\mathbb{C}} \Upsilon \psi \langle \text{grad } \Upsilon, \text{grad } \psi \rangle dA. \quad (3.8)$$

Por outro lado, se K não é identicamente nula, isso significa que existe algum ponto no qual $K < 0$, uma vez que estamos considerando uma imersão mínima. Supondo isso, chegaremos a uma contradição. Neste caso, de 1.5 sabemos que

$$\Delta_M \log(-K) = 4K.$$

Das relações anteriores, podemos ver que $-2K = \Delta \log \lambda^2 = \Upsilon$.

Isso implica que

$$\Delta \log \Upsilon + \Upsilon = 0,$$

portanto reescrevendo $\Delta \Upsilon = K\Upsilon + \frac{|\text{grad } \Upsilon|^2}{\Upsilon}$,

$$\Upsilon \Delta \Upsilon + \Upsilon^3 = |\text{grad } \Upsilon|^2. \quad (3.9)$$

Agora, multiplicando a equação 3.9 por ψ^2 , e adicionando o resultado acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{C}} |\text{grad } \Upsilon|^2 \psi^2 \leq \int_{\mathbb{C}} \Upsilon^2 |\text{grad } \psi|^2 dA \quad (3.10)$$

Usando no último somando de 3.8 a proposição 3.2, e substituindo 3.9 em 3.10, obtemos

$$\int_{\mathbb{C}} \Upsilon^3 \psi^2 dA \leq \delta_1 \int_{\mathbb{C}} \Upsilon^2 |\text{grad } \psi|^2 dA, \quad \delta_1 = \text{constante} \quad (3.11)$$

Usando a desigualdade de Young em 3.11, segue-se que

$$\Upsilon^2 |\text{grad } \psi|^2 = \psi^2 \left(\Upsilon^2 \frac{|\text{grad } \psi|^2}{\psi^2} \right) \leq \psi^2 \left(\frac{\alpha^2}{s} \Upsilon^{2s} + \frac{\alpha^{-t}}{t} \left(\frac{|\text{grad } \psi|}{\psi} \right)^{2t} \right), \quad (3.12)$$

que vale para todo $\alpha > 0$ e todo $s, t > 1$, com $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$. Se escolhermos $s = \frac{3}{2}$, $t = 3$ e α pequeno obtém-se uma constante δ_2 tal que

$$\int_{\mathbb{C}} \Upsilon^3 \psi^2 dA \leq \delta_2 \int_{\mathbb{C}} \frac{|\text{grad } \psi|^6}{\psi^4} dA. \quad (3.13)$$

Trocando ψ por ψ^3 na desigualdade acima, chegamos a

$$\int_{\mathbb{C}} \Upsilon^3 \psi^6 dA \leq \delta_3 \int_{\mathbb{C}} |\text{grad } \psi|^6 dA, \quad \delta_3 = \text{constante}. \quad (3.14)$$

A desigualdade 3.14 implica em, escolhendo ψ na bola $B_R \in \mathbb{C}$, do mesmo modo que na equação anterior, temos que $\Upsilon^3 \equiv 0$. Portanto $K \equiv 0$. Contradição! Assim, só temos o caso em que $K \equiv 0$ e, assim, $x(M)$ é um plano. Isso conclui a prova do Teorema. ■

Nesta seção vamos ver como o Teorema de Bernstein é consequência do Teorema de do Carmo-Peng demonstrado anteriormente. Demonstraremos o seguinte fato:

Teorema 3.5. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, solução da equação das superfícies mínimas. Então o gráfico de f é uma superfície mínima estável. Em particular, se $\Omega = \mathbb{R}^2$ o gráfico é uma superfície mínima completa estável, e portanto, um plano pelo Teorema de do Carmo-Peng.*

Demonstração. Considere o domínio Ω , a função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 e a superfície M definida pela função $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

E Considere uma variação $f + th$, $t \in (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$, $h(x, y) \in \mathcal{C}^2$ em Ω e $h|_{\partial\Omega} = 0$. Temos

$$A(t) = \int \int_{\Omega} \sqrt{at^2 + bt + c}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= h_x^2 + h_y^2 \\ b &= 2(f_x h_x + f_y h_y) \\ c &= 1 + f_x^2 + f_y^2. \end{aligned}$$

A série de Taylor de $\sqrt{at^2 + bt + c}$ em $t = 0$ é dada por

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{c} + \frac{bt}{2\sqrt{c}} - \frac{(b^2 - 4ac)t^2}{8\sqrt{c}} + Mt^3,$$

onde M é uma função de classe C^∞ de a, b, c e t . Portanto, a segunda variação de $A(t)$ escreve-se

$$A''(0) = \frac{1}{4} \int \int_{\Omega} \frac{4ac - b^2}{\sqrt{c}} dx dy,$$

onde $4ac - b^2 = 4(f_x h_x + f_y h_y)^2 + 4h_x^2 + 4h_y^2 \geq 0$. Mas $4ac - b^2 = 0$ se e somente se $h_x = h_y = 0$, ou seja, $h \equiv 0$. Logo, é ponto de mínimo local, como queríamos demonstrar. ■

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J. L. AND CARMO, M. DO, *On the Size of a Stable Minimal Surface in \mathbb{R}^3* , American Journal of Mathematics, Vol. 98, No. 2 (Summer, 1976).
- [2] BERGER, M., GAUDUCHON, P., MAZET, E., *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lecture Notes in Math. No. 194, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [3] CARMO, M.P. DO, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008 - quarta edição.(Projeto Euclides).
- [4] CARMO, M.P. DO, *O Índice de Morse das Superfícies Mínimas*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1989.
- [5] CARMO, M.P. DO, PENG, C. K. , *Stable Complete Minimal Surface in \mathbb{R}^3 are Planes*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008 - quarta edição.(Projeto Euclides).
- [6] CARMO, M.P. DO, *Superfícies Mínimas*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- [7] COLDING, TOBIAS. H., MINICOZZI II, WILLIAM P. , *A Course in Minimal Surface*
- [8] HAYMAN, W. K., FRIEDLAND S., *Eigenvalue inequalities for the Dirichlet problem on the sphere and the growth of subharmonic functions.*
- [9] LAWSON, H. BLAINE, *Lectures on Minimal Submanifolds*, Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1980.
- [10] LINS NETO, ALCIDES, *Funções de Uma Variável Complexa*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008- segunda edição. (Projeto Euclides).
- [11] OSSERMAN, ROBERT, *A Survey of Minimal Surfaces.*
- [12] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol.4*, Boston, Mass.Publish or Perish, 1970 – 1975.