UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VARIEDADES KÄHLERIANAS COM PLURI-CURVATURA MÉDIA PARALELA

JULIANA FERREIRA RIBEIRO DE MIRANDA

MANAUS

2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JULIANA FERREIRA RIBEIRO DE MIRANDA

VARIEDADES KÄHLERIANAS COM PLURI-CURVATURA MÉDIA PARALELA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof^o. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

MANAUS
2006

JULIANA FERREIRA RIBEIRO DE MIRANDA

VARIEDADES KÄHLERIANAS COM PLURI-CURVATURA MÉDIA PARALELA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 1.° de dezembro de 2006.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof^o Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, Presidente
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof^o Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy,
Universidade Federal do Amazonas

....

Prof^o Dr. Rosa Maria S. B. Chaves,
Universidade de São Paulo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela vida.

Ao meu esposo e filho pelo amor, pela paciência e compreensão.

Ao meu pai e minha mãe pela minha existência e eterno apoio indispensável para conclusão deste trabalho.

As minhas irmãs mesmo que por um pensamento.

Aos meus companheiros de mestrado, parceiros de conquista.

RESUMO

VARIEDADES KÄHLERIANAS COM PLURI-CURVATURA MÉDIA PARALELA

Orientador: Renato de Azevedo Tribuzy
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Este trabalho apresenta uma demonstração detalhada do teorema que caracteriza a existência de famílias associadas a imersões isométricas de variedades Kählerianas no espaço euclidiano. Além disso, demonstra-se também a decomposição ortogonal e paralela do fibrado normal, para o caso em que a família associada é trivial. Ambos os resultados se devem a F.E. Burstall, J.H. Eschenburg, M.J. Ferreira e R. Tribuzy.

ABSTRACT

KÄHLERIAN MANIFOLDS WITH PARALLEL PLURI-MEAN CURVATURE

This dissertation is concerned with the existence of an associated family of isometric immersions from Kählerian manifolds into Euclidean spaces wherein the main theorem is proved in detail. In addition, when the associated family is trivial, it is demonstrated that the normal bundle admits a parallel and orthogonal decomposition. Both results are due to F.E. Burstall, J.H. Eschenburg, M.J. Ferreira and R. Tribuzy.

Sumário

INTRODUÇÃO

Algumas superfícies em um espaço tridimensional admitem deformações que alteram a forma da superfície preservando a métrica intrínseca, preservando as curvaturas principais e rotacionando as direções principais; isto acontece com as superfícies de curvatura média constante. Estudos sobre a existência dessas deformações, tomando como espaço ambiente espaços de curvatura constante, foram feitos por Bonnet [1], Hoffman [10], Tribuzy [13] e Lawson [12].

Um caso particular, conhecido desde o último século, é o das superfícies mínimas, que admitem uma família a 1 - parâmetro de deformações isométricas, com a característica mencionada, chamada *família associada*. A deformação do catenóide no helicóide é o exemplo mais conhecido; as superfícies mínimas localmente isométricas da *família catenóide-helicóide* podem ser encontradas em termos da representação de Weierstrass em Earp [8].

Este trabalho apresenta uma generalização das famílias associadas para dimensões e codimensões maiores. As superfícies foram substituídas por variedades Kählerianas, isto é, variedades Riemannianas munidas de uma estrutura complexa J em TM, paralela na conexão Riemanniana, e o espaço ambiente é o espaço euclidiano.

Se $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+m}$ é uma imersão isométrica de uma variedade Kähleriana M, podemos estender J a $T^{\mathbb{C}}M = \{X + iY; X, Y \in TM\}$ e diagonalizá-lo; então, teremos a decomposição paralela de $T^{\mathbb{C}}M$ como soma direta dos subfibrados próprios de J, $T^{(1,0)}M = \{X \in T^{\mathbb{C}}M; JX = iX\}$ e $T^{(0,1)}M = \{X \in T^{\mathbb{C}}M; JX = -iX\}$, e os campos de $T^{\mathbb{C}}M$ serão do tipo (1,0), se pertencerem $T^{(1,0)}M$, e do tipo (0,1), se pertencerem a $T^{(0,1)}M$. Decompondo a extensão ao $T^{\mathbb{C}}M$ da segunda forma fundamental α, de acordo com os tipos [9], teremos a (1,1)- componente da segunda forma fundamental de f, $\alpha^{(1,1)}$, dada por $\alpha^{(1,1)}(X,Y) = [\alpha(X', Y'') + \alpha(X'', Y')]$. Se $\{e_1, Je_1, ..., e_n, Je_n\}$, para $k = 1, ..., n$, é um referencial ortonormal em um aberto de M, então $\{E_1, ..., E_n\}$ e $\{\overline{E_1}, ..., \overline{E_n}\}$ são referenciais ortonormais, e perpendiculares, dos respectivos subfibrados $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$, onde, $E_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - iJe_k)$, $\overline{E_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + iJe_k)$. O vetor curvatura média H, dado por $H = \frac{1}{2n}$traço(α), pode ser obtido por $H = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha(E_k, \overline{E_k})$. Segue da equação de Gauss que $H = 0 \Leftrightarrow \alpha^{(1,1)} = 0$ [6]. Observe que o resultado não é válido em qualquer espaço ambiente. No caso de uma superfície, tomando $n = 1$, temos $\alpha^{(1,1)}(X,Y) = \langle X, Y\rangle H$, e $\alpha^{(1,1)}$ é paralela se, e somente se, o vetor curvatura média H é paralelo. Isto é o que motiva chamar $\alpha^{(1,1)}$ de pluri-curvatura média de f; de fato, para qualquer curva complexa $C \subset M$ a restrição de $\alpha^{(1,1)}$ a TC é novamente a métrica multiplicada pelo vetor curvatura média da superfície $f|_C$.

Assim, as superfícies de curvatura média constante em espaço tridimensional são generalizadas pelas subvariedades Kählerianas cujas (1,1)-componentes da segunda forma fundamental são paralelas, uma vez que o teorema principal caracteriza a existência de famílias associadas pelo paralelismo da pluri-curvatura média; tal imersão, em que a pluri-curvatura média é paralela, é designada abreviadamente por *ppmc*.

No caso em que a família associada é trivial, $f \cong f_\theta$, para todo θ, ou seja, para cada θ, existe uma isometria τ_θ tal que $f = \tau_\theta \circ f_\theta$, a imersão *ppmc* é chamada isótropica, e temos uma decomposição paralela e ortogonal do fibrado normal complexificado, onde cada um dos três subfibrados paralelos contém a imagem de uma das componentes de α. Para superfícies em espaços tridimensionais, isotropia implica que cada vetor tangente é uma direção principal, a superfície será uma esfera ou um plano.

Estudos mais gerais, em que o espaço ambiente é um espaço simétrico, encontram-se em [7] e [14].

O Trabalho está dividido em quatro capítulos: no primeiro, apresentamos a teoria básica necessária de variedades Riemannianas; no segundo, introduzimos os conceitos de fibrados vetoriais Riemannianos, imersões isométricas e o Teorema Fundamental das Subvariedades, que é essencial para a demonstração do teorema principal. No terceiro capítulo, tanto definimos algumas estruturas em espaços vetoriais que serão aplicadas nos fibrados das variedades Kählerianas, bem como a definição dessas variedades e propriedades pertinentes ao desenvolvimento do quarto e último capítulo no qual aparecem os resultados principais.

Capítulo 1

Variedades Riemannianas

Para trabalharmos com variedades Kählerianas, objeto de estudo desta dissertação, necessitamos da teoria das variedades Riemannianas. Neste capítulo apresentaremos as definições e resultados dessa teoria, necessários ao desenvolvimento do trabalho, e fixaremos a notação a ser utilizada nos capítulos posteriores. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [3].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1.1. Uma Variedade Diferenciável de dimensão real n é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas:

$$x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$

de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tal que

1. $M = \cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)$;
2. Para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são diferenciáveis.

Indicaremos que M têm dimensão n por M^n. O par (U_α, x_α) ou a aplicação x_α com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ são chamados de parametrização ou sistema de coordenadas de M em p; $x_\alpha(U_\alpha)$ é uma vizinhança coordenada.

Definição 1.1.2. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis reais. Uma aplicação $\phi : M_1^n \to M_2^m$ é diferenciável em $p \in M_1^n$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\phi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\phi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \phi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. ϕ é diferenciável num aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Definição 1.1.3. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \tfrac{d(f\circ\alpha)}{dt}|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 1.1.4. O Espaço Tangente a uma variedade M^n em um ponto p, representado por T_pM é o conjunto de todos os vetores tangentes às curvas diferenciáveis pertencentes a M passando por p. Mostra-se que o T_pM é um espaço vetorial de dimensão n e que a escolha de uma parametrização $x : U \to M$ em p determina uma base associada $\left\{(\tfrac{\partial}{\partial x_1})_0, ..., (\tfrac{\partial}{\partial x_n})_0\right\}$ em T_pM, e que a estrutura linear nesse espaço, assim definida, não depende da parametrização x.

Definição 1.1.5. (O Fibrado Tangente). Seja M^n uma variedade diferenciável real e seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$. Este espaço munido com a estrutura diferenciável $\{U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha\}$ onde $\gamma_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ definida por:

$$\gamma_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, u_1, ..., u_n) = (x_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}),$$

$(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, é definido como o fibrado tangente de M.

Proposição 1.1.1. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\phi : M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$ com $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \phi \circ \alpha$. A aplicação $d\phi_p : T_pM_1 \to T_{\phi(p)}M_2$ dada por $d\phi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.

Definição 1.1.6. A aplicação linear $d\phi_p$ dada pela proposição anterior é chamada diferencial de ϕ em p.

Definição 1.1.7. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\phi : M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo se ela é bijetiva, diferenciável e sua inversa ϕ^{-1} é diferenciável. ϕ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\phi(p)$ tais que $\phi(U) \to V$ é um difeomorfismo.

Definição 1.1.8. Um caminho em uma variedade M é uma aplicação contínua $f : [0,1] \to M$. Se $f(0) = f(1) = p$, f é chamado caminho fechado em $p \in M$. Em particular o caminho constante $c_p : [0,1] \to M$ definido por $c_p(s) = p$ é um caminho fechado.

Definição 1.1.9. Uma variedade M é chamada conexa quando, dados dois pontos quaisquer $p, q \in M$, existe sempre um caminho $f : [0,1] \to M$, com $f(0) = p$ e $f(1) = q$.

Definição 1.1.10. Sejam $f : [0,1] \to M$ e $g : [0,1] \to M$ dois caminhos com o mesmo ponto inicial $p \in M$ e o mesmo ponto final $q \in M$. Diz-se que f é homotópico a g se existe uma função contínua $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ tal que

$$\begin{aligned} H(s,0) = f(s) \text{ e } H(0,t) = p, \\ H(s,1) = g(s) \text{ e } H(1,t) = q. \end{aligned}$$

Definição 1.1.11. Um caminho $f : [0,1] \to M$ é contrátil a um ponto se ele é homotópico ao caminho constante.

Definição 1.1.12. Uma variedade M é chamada simplesmente conexa se M é conexa e se todo caminho fechado em M é contrátil a um ponto.

Definição 1.1.13. Uma Variedade Complexa de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas:

$$x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow M$$

de abertos U_α de $\mathbb{C}^n$ em M tal que

1. $M = \cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)$;

2. Para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são holomorfas.

As definições feitas para variedades reais são válidas para as variedades complexas desde que sejam substituídos, quando necessário, o n-espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ pelo n-dimensional espaço complexo $\mathbb{C}^n$, e a condição de ser diferenciável pela de ser holomorfa.

1.2 Campos de Vetores

Definição 1.2.1. Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base associada a x, $i = 1, \ldots, n$. X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, para qualquer) parametrização.

Às vezes é conveniente utilizar a idéia sugerida acima e pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, do anel $\mathcal{D}(M)$ das funções diferenciáveis em M no anel $\mathcal{F}(M)$ das funções em M, definida por:

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde f indica, por abuso de notação, a expressão de f na parametrização x.

Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ definidos em M.

Lema 1.2.1. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}(M)$, $Zf = (XY - YX)f$.

Definição 1.2.2. O campo vetorial Z dado pelo Lema anterior é chamado colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y; Z é evidentemente diferenciável.

Proposição 1.2.1. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M, a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$(anticomutatividade),
(ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade),
(iii) $[[X, Y]Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$(identidade de Jacobi),
(iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.3 Métricas Riemannianas

Definição 1.3.1. Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle\ \rangle_p$ (isto é uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, \ldots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\rangle = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ é uma função diferenciável em U. Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M, a função $\langle X\ \ , Y\rangle$ é diferenciável em V. Uma variedade diferenciável M munida de uma métrica Riemanniana é denominada Variedade Riemanniana.

Definição 1.3.2. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é chamado uma isometria se:

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)} \text{para todo } p \in M,\ u, v \in T_pM.$$

1.4 Conexões Afins e Riemannianas

Definição 1.4.1. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, e que satisfaz as seguintes propriedades:

$i)$ $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$
$ii)$ $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$
$iii)$ $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$ onde$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.4.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:

i) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.
iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Definição 1.4.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.4.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ ($V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$; $V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c.

Definição 1.4.3. Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma conexão afim ∇ em M é:
a) simétrica, se $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
b) compatível com a métrica Riemanniana, se $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 1.4.1. (Levi-Cevita) Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:
i) ∇ é simétrica;
ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.
Tal conexão é chamada conexão de Levi-Cevita ou conexão Riemanniana.

1.5 Curvaturas

Definição 1.5.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, dada por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.5.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana satifaz:
$i)$ R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$
$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(M),\ X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.
$ii)$ Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear, ou seja,

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$
$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M),\ Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.5.2. (Identidade de Biachi)

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Proposição 1.5.3. $i)\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0;$
$ii)\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle;$
$iii)\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle;$
$iv)\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle.$

Definição 1.5.2. Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$, σ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e $\{X, Y\}$ base qualquer de σ. A curvatura seccional de σ em p, $K(\sigma) = K(X,Y)$, é por definição

$$K(X,Y) = -\frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X \wedge Y|^2},$$

onde $|X \wedge Y| = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$, representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $X, Y \in T_pM$.

1.6 Tensores em Variedades Riemannianas

Definição 1.6.1. Um tensor T em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{r fatores} \to \mathcal{D}(M).$$

Definição 1.6.2. Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dado por

$$\nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z) = Z(T(Y_1, ..., Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ..., \nabla_Z Y_r).$$

Definição 1.6.3. Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_z T(Y_1, ...Y_r) = \nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z).$$

Capítulo 2

Imersões Isométricas e o Teorema Fundamental para Subvariedades

Este capítulo é dedicado ao entendimento do Teorema Fundamental para Subvariedades, que é essencial para a demonstração do teorema principal. Para isso, faz-se necessário um estudo dos fibrados vetoriais Riemannianos, e das imersões isométricas. Maiores detalhes podem ser encontrados em [5].

2.1 Fibrados Vetoriais Riemannianos

Definição 2.1.1. Sejam E e M variedades diferenciáveis e seja $\pi : E \to M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial de dimensão k quando, para cada ponto $p \in M$,

(i) $\pi^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão k.

(ii) existe uma vizinhança aberta U de p em M e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a $\pi^{-1}(q)$ é um isomorfismo sobre $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, para cada $q \in U$.

Dado um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ e um subconjunto $F \subset E$ tal que a restrição $\pi|_F : F \to M$ é também um fibrado vetorial, dizemos que F é um subfibrado vetorial de E se a inclusão leva $(\pi|_F)^{-1}(p)$ linearmente sobre $\pi^{-1}(p)$, para todo $p \in M$.

Definição 2.1.2. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial. Para cada $p \in M$ chamamos o espaço $E_p = \pi^{-1}(p)$ a fibra de π sobre p. Uma seção local sobre um conjunto aberto $U \subset M$ é uma aplicação diferenciável $\varepsilon : U \to E$ tal que $\pi \circ \varepsilon = id_U$; se $U = M$ dizemos que $\varepsilon : M \to E$ é uma seção global ou simplesmente seção de π. É possível mostrar que para todo $e \in E$ existe uma seção ε tal que $\varepsilon(\pi(e)) = e$, em particular, isto mostra que o conjunto das seções de π, $\Gamma(\pi)$, é não vazio.

Definição 2.1.3. Sejam $\pi_1 : E^1 \to M$ e $\pi_2 : E^2 \to M$ fibrados vetoriais. Definimos a projeção $\pi : \mathcal{L}(E^1, E^2) \to M$ por $\pi^{-1}(p) = \mathcal{L}(E^1_p, E^2_p)$, onde o conjunto $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ é a união dos espaços das aplicações lineares de E^1_p sobre E^2_p, $p \in M$. Dotando $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ com a estrutura diferenciável natural induzida pela projeção ele torna-se um fibrado vetorial, chamado fibrado das aplicações lineares. A soma $\pi_1 \oplus \pi_2$ dos fibrados vetoriais $\pi_1 : E^1 \to M$ e $\pi_2 : E^2 \to M$ é definida como a projeção

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : E^1 \oplus E^2 \to M,$$

dada por $\pi_1 \oplus \pi_2((e_1, e_2)) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)$, onde

$$E^1 \oplus E^2 = \{(e_1, e_2) \in E^1 \times E^2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}.$$

Definição 2.1.4. Sejam $\pi_1 : E^1 \times E^2 \to M$ e $\pi_2 : E^3 \to M$ fibrados vetoriais. Definimos a projeção $\pi : \mathcal{L}_2(E^1 \times E^2, E^3) \to M$ colocando $\pi^{-1}(p) = \mathcal{L}_2(E^1_p \times E^2_p, E^3_p)$, onde o conjunto $\mathcal{L}_2(E^1 \times E^2, E^3)$ é a união dos espaços das aplicações bilineares de $E^1_p \times E^2_p$ sobre E^3_p, $p \in M$. Dotando $\mathcal{L}_2(E^1 \times E^2, E^3)$ com a estrutura diferenciável natural induzida pela projeção, ele torna-se um fibrado vetorial, chamado fibrado das aplicações bilineares. A soma $\pi_1 \oplus \pi_2$ dos fibrados vetoriais $\pi_1 : E^1 \times E^2 \to M$ e $\pi_2 : E^3 \to M$ é definida como a projeção

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : (E^1 \times E^2) \oplus E^3 \to M,$$

dada por $\pi_1 \oplus \pi_2((e_1, e_2), e_3) = \pi_1((e_1, e_2)) = \pi_2(e_3)$, onde

$$(E^1 \times E^2) \oplus E^3 = \{((e_1, e_2), e_3) \in E^1 \times E^2 \times E^3 : \pi_1((e_1, e_2)) = \pi_2(e_3)\}.$$

De acordo com as definições anteriores, podemos transferir para fibrados vetoriais certas operações realizadas entre espaços vetoriais e entre aplicações linares.

Definição 2.1.5. Dados dois fibrados vetoriais $\pi_1 : E^1 \to M_1$ e $\pi_2 : E^2 \to M_2$ e um difeomorfismo $\Phi : M_1 \to M_2$, dizemos que a aplicação diferenciável $\widetilde{\Phi} : E^1 \to E^2$ é um isomorfismo de fibrados vetoriais ao longo de Φ se, para todo $p \in M_1$, temos

(i) $\pi_2 \circ \widetilde{\Phi} = \Phi \circ \pi_1$ e $\widetilde{\Phi}(\pi_1^{-1}(p)) = \pi_2^{-1}(\Phi(p))$,

(ii) a restrição $\widetilde{\Phi}_p : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(\Phi(p))$ de $\widetilde{\Phi}$ à fibra $\pi_1^{-1}(p)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Segue da definição que $\widetilde{\Phi}$ é um difeomorfismo. Além disso, para cada seção ε de π_1 obtemos a seção $\widetilde{\Phi}(\varepsilon) = \widetilde{\Phi} \circ \varepsilon \circ \Phi^{-1}$ de π_2.

Definição 2.1.6. Uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ sobre um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ é uma aplicação

$$\langle\ ,\ \rangle : \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to \mathcal{D}(M),$$

bilinear sobre $\mathcal{D}(M)$, simétrica e positiva definida.

Definição 2.1.7. Um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ munido de uma métrica Riemanniana fixa é chamado fibrado vetorial Riemanniano.

Definição 2.1.8. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial. Uma conexão linear é uma aplicação $\mathbb{R}-$bilinear

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$$

$$(X, \varepsilon) \to \nabla_X \varepsilon$$

satisfazendo, para cada $f \in \mathcal{D}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varepsilon \in \Gamma(\pi)$, as propriedades

$$\begin{array}{ll} i) & \nabla_{fX}\varepsilon = f\nabla_X\varepsilon, \\ ii) & \nabla_X(f\varepsilon) = X(f)\varepsilon + f\nabla_X\varepsilon. \end{array}$$

Definição 2.1.9. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial com uma conexão linear ∇. Dizemos que a seção $\varepsilon \in \Gamma(\pi)$ é paralela quando $\nabla_X \varepsilon = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Um subfibrado vetorial F de E é dito paralelo se, para toda seção η de F e todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que $\nabla_X \eta$ é uma seção paralela de F.

Definição 2.1.10. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial Riemanniano. Uma conexão linear ∇ é dita compatível com a métrica $\langle\ \rangle$ quando

$$X\langle \varepsilon, \eta \rangle = \langle \nabla_X \varepsilon, \eta \rangle + \langle \varepsilon, \nabla_X \eta \rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varepsilon, \eta \in \Gamma(\pi)$.

Definição 2.1.11. O tensor curvatura de um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ com conexão linear ∇ é a aplicação $\mathbb{R}-$trilinear

$$R: \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$$

definida por

$$R(X,Y)\varepsilon = \nabla_X \nabla_Y \varepsilon - \nabla_Y \nabla_X \varepsilon - \nabla_{[X,Y]}\varepsilon.$$

É facilmente visto que R é trilinear sobre $\mathcal{D}(M)$. Quando o fibrado vetorial é Riemanniano, podemos associar a R outro tensor

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to \mathbb{R}$$

dado por $R(X,Y,\varepsilon,\eta) = \langle R(X,Y)\varepsilon, \eta\rangle$, onde $\langle\ \rangle$ é a métrica em E.

Por um abuso de linguagem é comum não nos referirmos à aplicação $\pi : E \to M$ quando estamos trabalhando com fibrados cuja aplicação é natural, mas sim às variedades E e M.

2.2 Imersões Isométricas

Definição 2.2.1. Sejam M^n e $\overline{M}^{\,n+m=k}$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \to \overline{M}$ é uma imersão se a diferencial $f_* : T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. O número m é chamado codimensão de f. Se, além disso, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \overline{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}$, diz-se que f é um mergulho. Se $M \subset \overline{M}$ e a inclusão $i : M \subset \overline{M}$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de $\overline{M}$.

Definição 2.2.2. Uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ entre duas variedades Riemannianas com as métricas $\langle\ ,\ \rangle_M$ e $\langle\ ,\ \rangle_{\overline{M}}$ respectivamente, é chamada imersão isométrica se:

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle f_*X, f_*Y\rangle_{\overline{M}}$$

para todo $p \in M,$ e $X, Y \in T_pM$.

Se $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ é uma imersão, e $\langle\ ,\ \rangle_{\overline{M}}$ é uma métrica Riemanniana em $\overline{M}$, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle X,\ Y\rangle_M = \langle f_*X,\ f_*Y\rangle_{\overline{M}},\ X, Y \in T_pM$. A métrica de M é chamada então a métrica induzida por f, e f passa a ser uma imersão isométrica.

Proposição 2.2.1. Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão. Para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição de f a U é um mergulho sobre $f(U)$.

De acordo com a proposição anterior, podemos identificar U com $f(U)$, e considerar o espaço tangente de M em p como um subespaço do espaço tangente a $\overline{M}$ em p e escrever

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

onde $T_pM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial $TM^{\perp} = \cup_{p\in M} T_pM^{\perp}$, chamado fibrado normal a M.

Deste modo, o fibrado vetorial

$$T\overline{M}|_{f(M)} = \{X \in T\overline{M} : \pi(X) \in f(M), \text{ onde } \pi : T\overline{M} \to \overline{M} \text{ é a projeção}\}$$

é a soma do fibrado tangente TM com $TM^{\perp}$, que é

$$T\overline{M}|_{f(M)} = TM \oplus TM^{\perp}.$$

Com respeito a esta decomposição temos as projeções

$$\begin{aligned} (\ )^T &: T\overline{M} \mid_{f(M)} \to TM \\ (\ )^{\perp} &: T\overline{M} \mid_{f(M)} \to TM^{\perp}. \end{aligned}$$

que são chamadas tangencial e normal, respectivamente.

Seja $\overline{M}^{\,n+m}$ uma variedade Riemanniana com conexão Riemanniana $\overline{\nabla}$, e seja $f : M^n \to \overline{M}^{\,n+m}$ uma imersão isométrica. Dados campos de vetores $X, Y \in TM$, temos que

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T + (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}.$$

Segue da unicidade da conexão Riemanniana que $(\overline{\nabla}_X Y)^T$ é a conexão Riemanniana de M, que será denotada por ∇.

Definição 2.2.3. Seja $\alpha : TM \times TM \to TM^{\perp}$ definida por

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

A aplicação α é chamada a segunda forma fundamental de f, e a equação

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$

é denominada *Fórmula de Gauss* .

Das propriedades das conexões Riemannianas $\overline{\nabla}$ e ∇ temos que α é bilinear e simétrica sobre $\mathcal{D}(M)$.

Consideremos campos de vetores X de TM e ξ de $TM^{\perp}$, e denotemos por $\mathcal{A}_{\xi}X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X\xi$, isto é

$$\mathcal{A}_{\xi}X = -(\overline{\nabla}_X\xi)^T.$$

Desde que para todo $Y \in TM$ temos

$$\begin{array}{rcl} 0 \;=\; X\langle\xi, Y\rangle & = & \langle\overline{\nabla}_X\xi, Y\rangle + \langle\xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle \\ 0 & = & \langle -\mathcal{A}_{\xi}X, Y\rangle + \langle\xi, \alpha(X,Y) + \nabla_X Y\rangle \end{array}$$

assim,

$$\langle\mathcal{A}_{\xi}X, Y\rangle = \langle\alpha(X,Y), \xi\rangle.$$

Em particular, a aplicação $\mathcal{A} : TM \times TM^{\perp} \to TM$ dada por $\mathcal{A}(X,\xi) = \mathcal{A}_{\xi}X$ é bilinear sobre $\mathcal{D}(M)$, e a aplicação $\mathcal{A}_{\xi} : TM \to TM$ é linear sobre $\mathcal{D}(M)$ e também simétrica, ou seja, $\langle\mathcal{A}_{\xi}X, Y\rangle = \langle X, \mathcal{A}_{\xi}Y\rangle$ para todo $X, Y \in TM$. A aplicação $\mathcal{A}_{\xi}$ é chamada *Operador de Weingarten* ou, por um abuso de linguagem, segunda forma fundamental na direção de ξ.

A componente normal de $\overline{\nabla}_X\xi$, que denotamos por $\nabla^{\perp}_X\xi$, define uma conexão compatível sobre o fibrado normal $TM^{\perp}$. Dizemos que $\nabla^{\perp}$ é a conexão normal de f assim obtemos a *Fórmula de Weingarten*

$$\overline{\nabla}_X\xi = -\mathcal{A}_{\xi}X + \nabla^{\perp}_X\xi.$$

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten obteremos as equações básicas de uma imersão isométrica, denominadas as equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

Sejam $X, Y, Z \in TM$, então

$$\begin{array}{rcl} \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z & = & \overline{\nabla}_X(\alpha(Y,Z) + \nabla_Y Z) \\ & = & \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z) + \overline{\nabla}_X\nabla_Y Z \\ & = & \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z), \end{array}$$

ou seja,

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z), \qquad (2.1)$$

onde a segunda igualdade vem das fórmulas de Gauss e Weingarten.

Similarmente,

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) - \mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) \tag{2.2}$$

Novamente pela fórmula de Gauss, temos

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z) \tag{2.3}$$

Subtraindo (2.2) e (2.3) de (2.1) obtemos

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z &+ \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \alpha([X,Y],Z)\\ &-\mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X + \mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z),\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde R e $\overline{R}$ são os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente.

Tomando a componente tangencial, de $\overline{R}$ em (2.4) temos

$$\langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle - \langle\mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle + \langle\mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle,$$

obtendo assim, a *Equação de Gauss*,

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle +\\ &\quad -\langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Em particular, se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle$ e $\overline{K}(X,Y) = \langle\overline{R}(X,Y)Y,X\rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\overline{M}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X,Y \in T_pM$, a equação de Gauss torna-se

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle - \langle\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle.$$

Por outro lado, tomando a componente normal de $\overline{R}$ em (2.4) otemos

$$\begin{aligned}(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} &= (R(X,Y)Z)^{\perp} + \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)\\ &\quad -\alpha([X,Y],Z) + \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z)\\ &= \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z)\\ &\quad +\nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z)\\ &= \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z)\\ &\quad \alpha(\nabla_Y X, Z) + \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z)\\ &= \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z)\\ &\quad -(\nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X,\nabla_Y Z))\end{aligned}$$

e temos a *Equação de Codazzi*,

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z), \tag{2.6}$$

onde por definição

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Observe que $\nabla^{\perp}\alpha$ é $\mathcal{D}(M)$ multilinear. $\nabla^{\perp}$ pode ser vista como uma conexão no fibrado vetorial $\mathcal{L}_2(TM \times TM, TM^{\perp})$.

Denotaremos por $R^{\perp}$o tensor curvatura do fibrado normal $TM^{\perp}$, que é

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^{\perp}$.

Novamente, utilizando as fórmulas de Gauss e Weingartein temos:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{R}(X,Y)\xi & = & \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \xi - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \xi - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi \\
 & = & \overline{\nabla}_X(-\mathcal{A}_\xi Y) + \overline{\nabla}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \overline{\nabla}_Y(-\mathcal{A}_\xi X) \\
 & & -\overline{\nabla}_Y \nabla^{\perp}_X \xi + \mathcal{A}_\xi [X,Y] - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi \\
 & = & \alpha(X, -\mathcal{A}_\xi Y) + \nabla_X(-\mathcal{A}_\xi Y) - \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X + \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi \\
 & & -\alpha(Y, -\mathcal{A}_\xi X) - \nabla_Y(-\mathcal{A}_\xi X) + \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_X \xi} Y - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi \\
 & & \mathcal{A}_\xi [X,Y] - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,
\end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{l}
\overline{R}(X,Y)\xi = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(X, -\mathcal{A}_\xi Y) + \nabla_X(-\mathcal{A}_\xi Y) - \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X \\
\qquad -\alpha(Y, -\mathcal{A}_\xi X) - \nabla_Y(-\mathcal{A}_\xi X) + \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_X \xi} Y + \mathcal{A}_\xi [X,Y],
\end{array} \tag{2.7}$$

e assim, a componente normal de $\overline{R}(X,Y)\xi$ nos dá a *Equação de Ricci*:

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(\mathcal{A}_\xi X, Y) - \alpha(X, \mathcal{A}_\xi Y). \tag{2.8}$$

Tomando em (2.7) o produto interno por $\eta \in TM^{\perp}$,

$$\begin{array}{rcl}
\langle \overline{R}(X,Y)\xi, \eta \rangle & = & \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \rangle - \langle \alpha(X, \mathcal{A}_\xi Y), \eta \rangle + \langle \alpha(Y, \mathcal{A}_\xi X), \eta \rangle \\
 & = & \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \rangle - \langle \mathcal{A}_\eta X, \mathcal{A}_\xi Y \rangle + \langle \mathcal{A}_\eta Y, \mathcal{A}_\xi X \rangle \\
 & = & \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \rangle - \langle \mathcal{A}_\xi \mathcal{A}_\eta X, Y \rangle + \langle Y, \mathcal{A}_\eta \mathcal{A}_\xi X \rangle \\
 & = & \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \rangle - \langle [\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta] X, Y \rangle
\end{array}$$

onde $[\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta] = \mathcal{A}_\xi \mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}_\eta \mathcal{A}_\xi$, e podemos escrever a equação de Ricci como:

$$\langle \overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle \;=\; \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle [\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta]X,Y\rangle.$$

A componente tangencial de $\overline{R}(X,Y)\xi$ em (2.7) é essencialmente a equação de Codazzi:

$$\begin{aligned}
(\overline{R}(X,Y)\xi)^T &= \nabla_X(-\mathcal{A}_\xi Y) - \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_Y\xi}X - \nabla_Y(-\mathcal{A}_\xi X) + \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_X\xi}Y \\
&\quad +\mathcal{A}_\xi[X,Y] \\
&= \nabla_Y\mathcal{A}_\xi X - \nabla_X\mathcal{A}_\xi Y + \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_X\xi}Y - \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_Y\xi}X \\
&\quad +\mathcal{A}_\xi[\nabla_X Y - \nabla_Y X] \\
&= \nabla_Y\mathcal{A}_\xi X - \mathcal{A}_\xi\nabla_Y X - \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_Y\xi}X - \nabla_X\mathcal{A}_\xi Y + \mathcal{A}_\xi\nabla_X Y \\
&\quad +\mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_X\xi}Y \\
&= (\nabla_Y\mathcal{A})(X,\xi) - (\nabla_X\mathcal{A})(Y,\xi),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^T = (\nabla_Y\mathcal{A})(X,\xi) - (\nabla_X\mathcal{A})(Y,\xi),$$

onde, por definição, $(\nabla_Y\mathcal{A})(X,\xi) = \nabla_Y\mathcal{A}_\xi X - \mathcal{A}_\xi\nabla_Y X - \mathcal{A}_{\nabla^{\perp}_Y\xi}X$.

Tomemos agora uma imersão isométrica $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+m}$. Assim, para $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{n+m}(= T\overline{M})$, e indicando $Z = (z_1, ..., z_n)$ como as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^{n+m}$,então

$$\nabla_Y Z = (Yz_1, ..., Yz_{n+m}),$$

$$\nabla_X\nabla_Y Z = (XYz_1, ..., XYz_{n+m}),$$

e o tensor curvatura $\overline{R}$ de $\mathbb{R}^{n+m}$ é

$$\overline{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = 0.$$

Então, para $X, Y, Z, W \in TM$ e $\xi, \eta \in TM^{\perp}$, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são respectivamente:

i) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle$;

ii) $(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z)$, ou equivalentemente,
$(\nabla_X\mathcal{A})(Y,\xi) = (\nabla_Y\mathcal{A})(X,\xi)$,

desde que,
$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = 0$; e
$(\overline{R}(X,Y)\xi)^T = 0$;

$$\begin{array}{rcl} iii)\ R^{\perp}(X,Y)\xi & = & \alpha(X,\mathcal{A}_\xi Y)-\alpha(\mathcal{A}_\xi X,Y), \text{ ou equivalentemente,} \\ \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle & = & \langle[\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta]X,Y\rangle. \end{array}$$

Segue de (*iii*) que $R^{\perp}=0$ se, e somente se, existe uma base ortogonal para T_pM que diagonaliza simultaneamente todo $\mathcal{A}_\xi$, $\xi\in T_pM^{\perp}$.

O teorema a seguir é válido para o caso em que o espaço ambiente é do tipo $\mathbb{Q}_c^r$, que denota uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa (r)-dimensional com curvatura seccional constante c, isto é, a esfera Euclidiana $\mathbb{S}_c^r$, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^r$, ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}_c^r$. Enunciaremos o teorema no caso em que o ambiente é $\mathbb{R}^{2n+m}$, que será o caso utilizado neste trabalho. Veja maiores detalhes em [2].

Teorema 2.2.1. *Teorema Fundamental para Subvariedades*

1. Sejam M^{2n} uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, $\pi: E\to M$ um fibrado vetorial Riemanniano de posto m com uma conexão ∇' compatível com a métrica, e seja α uma seção simétrica do fibrado $\mathcal{L}_2\,(TM\times TM,E)$. Defina, para cada seção local ξ de E, uma aplicação $\mathcal{A}_\xi: TM\to TM$ por $\langle\mathcal{A}_\xi X,Y\rangle=\langle\alpha(X,Y),\xi\rangle\ X,Y\in TM.$

Se α e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso do $\mathbb{R}^{2n+m}$ então existe uma imersão isométrica $f: M^{2n}\to\mathbb{R}^{2n+m}$, e um isomorfismo de fibrados vetoriais $\widetilde{f}: E\to TM^{\perp}$ ao longo de f, tal que para todo $X,Y\in TM$ e toda seção normal ξ,η de E

$$\begin{array}{l} (i)\ \langle\widetilde{f}(\xi),\widetilde{f}(\eta)\rangle=\langle\xi,\eta\rangle; \\ (ii)\ \widetilde{f}\,\alpha(X,Y)=\widetilde{\alpha}(X,Y); \\ (iii)\ \widetilde{f}\,\nabla'_X\xi=\nabla^{\perp}_X\widetilde{f}(\xi), \end{array}$$

onde $\widetilde{\alpha}$ e $\nabla^{\perp}$ são a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente.

2. Suponha que f e g sejam imersões isométricas de uma variedade conexa M^{2n} sobre $\mathbb{R}^{2n+m}$. Sejam $TM_f^{\perp}$, α_f e $\nabla_f^{\perp}$ o fibrado normal, a segunda forma fundamental e conexão normal de f, respectivamente e sejam $TM_g^{\perp}$, α_g e $\nabla_g^{\perp}$ os correspondentes objetos para g. Se existe um isomorfismo de fibrados $\widetilde{\Phi}: TM_f^{\perp}\to TM_g^{\perp}$ tal que, para todo $X,Y\in TM$ e todo $\xi,\eta\in TM_f^{\perp}$

$$\begin{array}{l} (i)\ \langle\widetilde{\Phi}(\xi),\widetilde{\Phi}(\eta)\rangle=\langle\xi,\eta\rangle; \\ (ii)\ \widetilde{\Phi}\alpha_f(X,Y)=\alpha_g(X,Y); \\ (iii)\ \widetilde{\Phi}\nabla^{\perp}_{fX}\xi=\nabla^{\perp}_{gX}\widetilde{\Phi}(\xi), \end{array}$$

então existe uma isometria $\tau : \mathbb{R}^{2n+m} \to \mathbb{R}^{2n+m}$ tal que $g = \tau \circ f$ e $d\tau|_{TMf^{\perp}} = \widetilde{\Phi}$.

Capítulo 3

Variedades Kählerianas

Neste capítulo desenvolvemos um estudo sobre variedades Kählerianas, e suas estruturas, destacando as propriedades importantes a serem utilizadas durante as demonstrações dos resultados pricipais. Detalhes podem ser encontrados em [9], [11] e [15].

3.1 Complexificação de Espaços Vetoriais

Definição 3.1.1. Seja V um espaço vetorial real. A complexificação $V^{\mathbb{C}}$ de V é o conjunto cujos elementos são da forma $X + iY$ $(i = \sqrt{-1})$, $X, Y \in V$ satisfazendo as condições:

i) $X_1 + iY_1 = X_2 + iY_2$ se, e só se, $X_1 = X_2$ e $Y_1 = Y_2$;

ii) $(X_1 + iY_1) + (X_2 + iY_2) = (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2)$;

iii)$(a + ib)(X + iY) = (aX - bY) + i(bX + aY)$, para $a + ib \in \mathbb{C}$.

Temos que $V^{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, e $V \subset V^{\mathbb{C}}$.

Definição 3.1.2. Se $Z = X + iY \in V^{\mathbb{C}}$ chamaremos $\overline{Z} = X - iY$ o conjugado de Z. A conjugação complexa é uma aplicação linear.

Assumindo que $dimV = n$, seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de V sobre $\mathbb{R}$. Considerando os elementos de tal base como vetores de $V^{\mathbb{C}}$ temos que $\{e_1, ..., e_n\}$ é também base de $V^{\mathbb{C}}$. Com efeito, para qualquer $X + iY \in V^{\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned} X + iY &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_j e_j + i \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} (a_j + ib_j) e_j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j, \text{ onde } \quad \lambda_j = a_j + ib_j, \end{aligned}$$

e além disso,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j e_j + i \sum_{j=1}^n b_j e_j = 0\\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j e_j = 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n b_j e_j = 0\\ &\Rightarrow a_j = b_j = 0, \text{ para todo } j\\ &\Rightarrow \lambda_j = 0, \text{ para todo } j.\end{aligned}$$

3.2 Estrutura Complexa em Espaços Vetoriais

Definição 3.2.1. Um homomorfismo linear $J : V \to V$, onde V é um espaço vetorial real, satisfazendo $J^2 = -I$, onde I é a aplicação identidade em V, é chamado uma estrutura complexa em V.

Seja V um espaço vetorial real com uma estrutura complexa J. Podemos definir o produto λX de um número complexo $\lambda = a + ib$ e um elemento X de V por

$$\lambda X = (a + ib)X = aX + bJX.$$

Então podemos considerar V como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

A dimensão real de V deve ser par. Com efeito, se $\{e_1, ..., e_n\}$ é base do espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$, então $\{e_1, ..., e_n, ie_1, ..., ie_n\}$ é base de V sobre $\mathbb{R}$, pois

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_j e_j + \sum_{j=1}^n b_j i e_j = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^n (a_j + ib_j) e_j = 0\\ &\Rightarrow a_j + ib_j = 0, \text{ para todo } j\\ &\Rightarrow a_j = b_j = 0, \text{ para todo } j.\end{aligned}$$

Logo, $dim_{\mathbb{C}}\, V = n$, então $dim_{\mathbb{R}}\, V = 2n$.

Dado um espaço vetorial complexo de dimensão complexa n, seja J o endomorfismo linear definido por $JX = iX$, para todo $X \in V$. Considerando V como espaço vetorial real de dimensão $2n$, então J é a estrutura complexa de V.

Seja V um espaço vetorial real com uma estrutura complexa J. Então podemos estender J a um endomorfismo linear complexo de $V^{\mathbb{C}}$, também denotado por J, dado por:

$$J(X + iY) = JX + iJY.$$

Segue que, em um espaço vetorial real $2n$-dimensional com estrutura complexa J, existem elementos $X_1, ..., X_n$ de V tal que $\{X_1, ..., X_n, JX_1, ..., JX_n\}$ é uma base de V.

Consideremos $Z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k - iJX_k)$ e $\overline{Z_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k + iJX_k)$, $k = 1, ..., n$. Então $\{Z_1, ..., Z_n, \overline{Z_1}, ..., \overline{Z_n}\}$ é uma base de $V^{\mathbb{C}}$, desde que, $dimV^{\mathbb{C}} = dim_{\mathbb{R}} V = 2n$, e dado que o conjunto acima é linearmente independente.

Além disso,

$$\begin{aligned} J(Z_k) &= J(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(X_k - iJX_k)) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(JX_k - iJ^2X_k) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(JX_k + iX_k) \\ &= iZ_k, \text{ para todo } k; \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} J(\overline{Z_k}) &= J(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(X_k + iJX_k)) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(JX_k + iJ^2X_k) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(JX_k - iX_k) \\ &= -i\overline{Z_k}, \text{ para todo } k. \end{aligned}$$

Assim i e $-i$ são os autovalores de J, correspondentes aos autovetores Z_k, e $\overline{Z_k}$, respectivamente, $k = 1, ..., n$, e portanto J é diagonalizável (i e $-i$ têm multiplicidade n).

Sejam $V^{(1,0)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}$, e $V^{(0,1)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = -iZ\}$, os autoespaços correspondentes aos autovalores i e $-i$, respectivamente.

Proposição 3.2.1. Temos os seguintes fatos:
(i) $V^{(1,0)} = \{X - iJX; X \in V\}$ e $V^{(0,1)} = \{X + iJX; X \in V\}$;
(ii) $V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$.

Demonstração.
(i) Para todo $X - iJX \in \{X - iJX; X \in V\}$ temos que,

$$\begin{aligned} J(X - iJX) &= JX - iJ^2X \\ &= JX + iX \\ &= i(X - iJX), \end{aligned}$$

então $X - iJX \in \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}$, e

$$\{X - iJX; X \in V\} \subset \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}.$$

Seja $Z \in \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\}$, qualquer. Então $Z \in V^{\mathbb{C}}$ e $JZ = iZ$, ou seja, $Z = X + iY$ e $J(X + iY) = i(X + iY) \Rightarrow JX + iJY - iX + Y = 0 \Rightarrow -JX = Y$ e $X = JY$.
Assim,
$Z = X + iY = X + i(-JX) = X - iJX$, isto é, $Z \in \{X - iJX; X \in V\}$ e

$$\{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\} \subset \{X - iJX; X \in V\}.$$

Logo, $V^{(1,0)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\} = \{X - iJX; X \in V\}$.

De maneira análoga temos também,

$$V^{(0,1)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = -iZ\} = \{X + iJX; X \in V\},$$

o que conclui a demonstração de (i).

(ii) Observemos primeiramente, que para qualquer $Z \in V^{\mathbb{C}}$,

$$Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ) + \frac{1}{2}(Z + iJZ),$$

com $\frac{1}{2}(Z - iJZ) \in V^{(1,0)}$ e $\frac{1}{2}(Z + iJZ) \in V^{(0,1)}$. De fato,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(Z - iJZ) &= \tfrac{1}{2}(X + iY - iJ(X + iY)) \\ &= \tfrac{1}{2}(X + iY - iJX + JY)) \\ &= \tfrac{1}{2}((X + JY) - i(JX - Y)) \\ &= \tfrac{1}{2}((X + X) - i(JX + JX)) \\ &= X - iJX, \end{aligned}$$

e também,

$$\frac{1}{2}(Z + iJZ) = X + iJX.$$

Além disso, se $Z \in V^{(1,0)} \cap V^{(0,1)}$ então $JZ = iZ$ e $JZ = -iZ$, o que implica que $iZ = -iZ \Leftrightarrow Z = 0$. Portanto $Z \in V^{(1,0)} \cap V^{(0,1)} = \{0\}$, logo, $V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$.

■

Definição 3.2.2. Seja M uma variedade diferenciável real. Um campo de tensores J em M é chamado uma estrutura quase complexa em M, se para cada ponto $p \in M$, J é um endomorfismo do espaço tangente T_pM tal que $J^2 = -I$.

Definição 3.2.3. Uma variedade M com uma estrutura quase complexa J é chamada uma variedade quase complexa.

Observamos que toda variedade quase complexa tem dimensão par; e, toda variedade complexa M possui uma estrutura quase complexa natural.

3.3 Variedades Kählerianas

Definição 3.3.1. Uma variedade quase complexa M^n, com estrutura quase complexa J em TM, tal que J é um operador ortogonal, paralelo na conexão Riemanniana ($\nabla_X(JY) = J\nabla_X Y$) é chamada variedade quase Kähleriana.

Definição 3.3.2. Uma variedade complexa M^n, com estrutura quase complexa J em TM, tal que J é um operador ortogonal, paralelo na conexão Riemanniana ($\nabla_X(JY) = J\nabla_X Y$) é chamada variedade Kähleriana.

Indicaremos por $T^{\mathbb{C}}M$ a complexificação do fibrado tangente, ou seja, $T^{\mathbb{C}}M = \{X + iY; X, Y \in TM\}$. Como foi visto anteriormente, a extensão de J ao fibrado tangente complexificado pode ser diagonalizada tendo i e $-i$ como autovalores.

Definição 3.3.3. Os autoespaços associados aos autovalores i e $-i$ serão denotados por $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$, respectivamente.

Segue também que $T_p^{\mathbb{C}}M = T_p^{(1,0)}M \oplus T_p^{(0,1)}M$, onde, $T^{(1,0)}M = \{X - iJX; X \in TM\}$ e $T^{(0,1)}M = \{X + iJX; X \in TM\}$.

Proposição 3.3.1. Sendo o operador J paralelo na conexão Riemanniana ∇, então $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$ são paralelos, ou seja, $\nabla_Y T^{(1,0)}M \subset T^{(1,0)}M$ e $\nabla_Y T^{(0,1)}M \subset T^{(0,1)}M$, para todo campo tangente Y de M.

Demonstração.

Seja $Z = X - iJX \in T^{(1,0)M}$, qualquer. Então,

$$\nabla_Y Z = \nabla_Y(X - iJX) = \nabla_Y X - i\nabla_Y JX = \nabla_Y X - iJ\nabla_Y X,$$

onde $\nabla_Y X \in TM$, e portanto, $\nabla_Y Z \in T^{(1,0)}M$. Analogamente, para qualquer $W = X + iJX \in T^{(0,1)}$, temos que $\nabla_Y W \in T^{(0,1)}M$, logo $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$ são paralelos.

■

Definição 3.3.4. Um conjunto S é dito isotrópico se $\langle U, V\rangle = 0$, para todo $U, V \in S$.

Proposição 3.3.2. Os subfibrados $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$ são isotrópicos.

Demonstração.

$\langle , \rangle$ denota também a extensão bilinear complexa da métrica

Riemanniana. Sejam $X - iJX$ e $Y - iJY \in T^{(1,0)}M$. Então,

$$\langle X - iJX, Y - iJY\rangle = \langle X, Y\rangle - i\langle X, JY\rangle - i\langle JX, Y\rangle - \langle JX, JY\rangle.$$

Como J é isométrico, $\langle X, Y\rangle = \langle JX, JY\rangle$, e tomando $X = JX$, temos

$$\begin{aligned}\langle JX, Y\rangle &= \langle J(JX), JY\rangle \\ &= \langle J^2X, JY\rangle \\ &= -\langle X, JY\rangle.\end{aligned}$$

Logo $\langle X - iJX, Y - iJY\rangle = 0$. Da mesma maneira, verifica-se que $T^{(0,1)}M$ é isotrópico.

■

Em $T^{\mathbb{C}}M$ consideramos também o produto hermitiano $(X, Y) = \langle X, \overline{Y}\rangle$, onde $\overline{U + iJV} = U - iJV$ para todoU,V $\in TM$.

Proposição 3.3.3. $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$ são ortogonais em relação ao produto interno hermitiano.

Demonstração.
Sejam $X - iJX \in T^{(1,0)}M$ e $Y + iJY \in T^{(0,1)}M$. Então

$$\begin{aligned}(X - iJX, Y + iJY) &= \langle X - iJX, \overline{Y + iJY}\rangle \\ &= \langle X - iJX, Y - iJY\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Para $X \in TM$ denotaremos por X' metade da projeção de X em $T^{(1,0)}M$ e, portanto, X' é do tipo (1,0). Analogamente, metade da projeção de X em $T^{(0,1)}M$ será denotado por X'' ; ou seja, $X' = \frac{1}{2}(X - iJX)$ e $X'' = \frac{1}{2}(X + iJX)$.
Seja $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+m}$ uma imersão isométrica de uma variedade Kähleriana M de dimensão real $2n$. Denotaremos por ∇ a conexão Riemanniana, e por α a segunda forma fundamental de f, bem como sua extensão bilinear, simétrica complexa a $T^{\mathbb{C}}M \times T^{\mathbb{C}}M$,

$$\alpha : T^{\mathbb{C}}M \times T^{\mathbb{C}}M \to (TM^{\perp})^{\mathbb{C}},$$

onde $(TM^{\perp})^{\mathbb{C}} = \{X + iY; X, Y \in (TM)^{\perp}\}$ é o complexificado do fibrado normal, ou seja, para cada $p \in M$ temos

$$(\mathbb{R}^{\mathbb{C}})^{2n+m} = T_p^{\mathbb{C}}M \oplus (T_p^{\mathbb{C}}M)^{\perp}.$$

Decompondo α de acordo com tipos, temos:

$$\alpha = \alpha^{(2,0)} + \alpha^{(1,1)} + \alpha^{(0,2)},$$

onde

$$\alpha^{(2,0)}(X,Y) = \alpha(X',Y'),$$

$$\alpha^{(1,1)}(X,Y) = [\alpha(X',Y'') + \alpha(X'',Y')],$$

$$\alpha^{(0,2)}(X,Y) = \overline{\alpha^{(2,0)}(X,Y)} = \alpha(X'',Y'').$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\alpha^{(1,1)}(X,Y) &= \alpha(\tfrac{1}{2}(X - iJX), \tfrac{1}{2}(Y + iJY)) + \alpha(\tfrac{1}{2}(X + iJX), \tfrac{1}{2}(Y - iJY)) \\ &= \tfrac{1}{4}[\alpha(X,Y) + \alpha(X,iJY) + \alpha(-iJX,Y) + \alpha(-iJX,iJY) \\ &+\alpha(X,Y) + \alpha(X,-iJY) + \alpha(iJX,Y) + \alpha(iJX,-iJY)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha(X,Y) + \alpha(JX,JY)],\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\alpha^{(2,0)}(X,Y) + \alpha^{(0,2)}(X,Y) &= \alpha(\tfrac{1}{2}(X - iJX), \tfrac{1}{2}(Y - iJY)) \\ &+\alpha(\tfrac{1}{2}(X + iJX), \tfrac{1}{2}(Y + iJY)) \\ &= \tfrac{1}{4}[\alpha(X,Y) + \alpha(X,iJX) + \alpha(-iJX,Y) \\ &+\alpha(-iJX,iJY) + \alpha(X,Y) + \alpha(X,-iJY) \\ &+\alpha(iJX,Y) + \alpha(iJX,-iJY)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha(X,Y) + \alpha(JX,JY)],\end{aligned}$$

portanto, $\alpha = \alpha^{(2,0)} + \alpha^{(1,1)} + \alpha^{(0,2)}$.

Seja $\{e_i, Je_i\}$ um referencial ortonormal definido em um aberto $\mathcal{U}$ de M, ou seja, para cada $q \in \mathcal{U}$, os vetores $\{e_i(q), Je_i(q)\}, i = 1,...,n$, formam uma base ortonormal de T_qM. Então, $E_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - iJe_k)$, $E_k \in T^{(1,0)}M$ e $\overline{E_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + iJe_k)$, $\overline{E_k} \in T^{(0,1)}M$, $k = 1,...,n$, formam uma base unitária de $T^{\mathbb{C}}M$.

Definição 3.3.5. Seja $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+m}$ uma imersão isométrica de uma variedade Kähleriana M, de dimensão real $2n$. Definiremos o vetor curvatura média H como sendo $\frac{1}{2n}$traço(α).

Proposição 3.3.4. Seja $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+m}$ uma imersão isométrica de uma variedade Kähleriana M, de dimensão real $2n$. O vetor curvatura média H

de f é dado por:

$$H = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha(E_k, \overline{E_k}).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \alpha(E_k, \overline{E_k}) &= \alpha(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_k - iJe_k), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_k + iJe_k)) \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha(e_k, e_k) + \alpha(e_k, -iJe_k) + \alpha(iJe_k, e_k) + \alpha(iJe_k, -iJe_k)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha(e_k, e_k) + \alpha(Je_k, Je_k)], \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha(E_k, \overline{E_k}) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^{n}[\alpha(e_k, e_k) + \alpha(Je_k, Je_k)] \\ &= \tfrac{1}{2}\text{traço}(\alpha). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha(E_k, \overline{E_k}) = \frac{1}{2n}\text{traço}(\alpha) = H.$$

■

No caso de uma superfície, isto é, tomando $n = 1$, temos $\alpha^{(1,1)}(X, Y) = \langle X, Y\rangle H$, e $\alpha^{(1,1)}$ é paralela se, e somente se, o vetor curvatura média H paralelo. Isto é o que motiva a seguinte definição:

Definição 3.3.6. A componente $\alpha^{(1,1)}$ da segunda forma fundamental da imersão isomética $f : M \to \mathbb{R}^{2n+m}$ é denominada pluri-curvatura média de f. Uma imersão em que este operador é paralelo é denominada *ppmc* (parallel pluri-mean curvature).

Definição 3.3.7. Uma família $f_\theta : M \to \mathbb{R}^{2n+m}$,$f_0 = f$, de imersões isométricas é chamada família associada a f, se suas segundas formas satisfazem

$$\psi_\theta(\alpha_{f_\theta}(X, Y)) = \alpha_\theta(X, Y) = \alpha(R_\theta X, R_\theta Y),$$

para algum isomorfismo paralelo de fibrados $\psi_\theta : f_\theta N \to fN$, onde $fN = df(TM)^\perp$, e R_θ é a rotação do ângulo θ em cada plano complexo, ou seja, $R_\theta X = \cos\theta X + sen\theta JX$.

Definição 3.3.8. Se f é uma imersão *ppmc* e possui a família associada de imersões isométricas trivial, isto é, $f_\theta \cong f$ para todo θ, f é dita isotrópica.

Se f é isotrópica temos alguma simetria da segunda forma. De fato, por definição $f_\theta \cong f$ para todo θ, se, e somente se, existe uma família de automorfismos de fibrados vetoriais paralelos $\psi_\theta : N \to N$ com $\psi_\theta \circ \alpha = \alpha_\theta$.

Observemos que se X é um autovetor de J associado ao autovalor i, então $JX = iX$, e

$$\begin{aligned} R_\theta X &= cos\theta X + sen\theta JX \\ &= cos\theta X + sen\theta iX \\ &= X(cos\theta + isen\theta) \\ &= Xe^{i\theta}, \end{aligned}$$

ou seja, X é autovetor de R_θ associado ao autovalor $e^{i\theta}$, e portanto, $T^{(1,0)}M$ é subfibrado característico de R_θ associado a esse autovalor. Procedendo da mesma maneira para um autovetor Y de J associado ao autovalor $-i$, então $JY = -iY$, e

$$\begin{aligned} R_\theta Y &= cos\theta Y + sen\theta JY \\ &= cos\theta Y + sen\theta(-iY) \\ &= Y(cos\theta + (-i)sen\theta) \\ &= Ye^{-i\theta}, \end{aligned}$$

e assim, $T^{(0,1)}M$ é também subfibrado característico de R_θ, associado ao autovalor $e^{-i\theta}$.

Capítulo 4

Resultados Principais

Utilizando os resultados obtidos anteriormente, apresentaremos, neste capítulo, os teoremas principais; para tanto, necessitamos de dois Lemas que serão demonstrados a seguir.

Lema 4.0.1. Se U e V são do mesmo tipo, então $R(U,V) \equiv 0$, onde R denota o tensor curvatura de M.

Demonstração.
Desde que

$$R(X,Y)U = \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X,Y]} U,$$

para $X, Y \in TM$, pelo paralelismo de $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$, $R(X,Y)U$ tem o mesmo tipo que U e pela isotropia desses subfibrados $\langle R(X,Y)U, V\rangle = 0$. Usando a identidade de Bianchi concluímos que

$$\langle R(U,V)X, Y\rangle = \langle R(X,Y)U, V\rangle = 0.$$

Conseqüentemente, se três ou quatro vetores forem do mesmo tipo $\langle R(U,V)X, Y\rangle = 0$.

■

Lema 4.0.2. Sejam $R^{\perp}$ o tensor curvatura normal de uma imersão *ppmc* e X, Y vetores tangentes do mesmo tipo. Então $R^{\perp}(X,Y) = 0$.

Demonstração.
Sejam $N^0 \subset N$ a imagem de $\alpha^{(1,1)}$, e $(N^0)^{\perp} \subset N$ o complemento ortogonal de N^0 em N. Desde que $\alpha^{(1,1)}$ é paralela, N^0 é um subfibrado paralelo de N. Para qualquer $\xi \in (N^0)^{\perp}$ e X, Y $T^{(1,0)}M$ temos $\overline{Y} \in T^{(0,1)}M$ e

$$\langle \mathcal{A}_{\xi} X, \overline{Y}\rangle = \langle \alpha(X, \overline{Y}), \xi\rangle = \langle \alpha^{(1,1)}(X, \overline{Y}), \xi\rangle = 0,$$

pois, $\langle N^0, (N^0)^\perp \rangle = 0$. Desde que $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$ são isotrópicos, teremos então que $\mathcal{A}_\xi(T^{(1,0)}M) \subset T^{(0,1)}M$, e também, $\mathcal{A}_\xi(T^{(0,1)}M) \subset T^{(1,0)}M$.

Temos que mostrar que $\langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta \rangle = \langle [\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta]X, Y \rangle$ se anula, para todo X, Y do mesmo tipo, e $\xi, \eta \in N$.

Se $\xi, \eta \in (N^0)^\perp$ temos que $\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta$ revertem os subfibrados $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$, e então, $[\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta] = \mathcal{A}_\xi\mathcal{A}_\eta - \mathcal{A}_\eta\mathcal{A}_\xi$ preserva o campo no mesmo fibrado. Usando a isotropia dos fibrados, $\langle [\mathcal{A}_\xi, \mathcal{A}_\eta]X, Y \rangle = 0$, para X, Y nas condições do lema, e tem-se o que se queria.

Se $\xi \in (N^0)$ e $\eta \in N$, e tomando $\xi = \alpha(U, \overline{V})$, $U, V \in T^{(1,0)}M$, queremos calcular $R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi$. Temos que:

$$0 = (\nabla^\perp_Y\alpha)(U, \overline{V}) = \nabla^\perp_Y\alpha(U, \overline{V}) - \alpha(\nabla_Y U, \overline{V}) - \alpha(U, \nabla_Y \overline{V}),$$

então,

$$\nabla^\perp_Y\alpha(U, \overline{V}) = \alpha(\nabla_Y U, \overline{V}) + \alpha(U, \nabla_Y \overline{V}),$$

e, da mesma maneira,

$$\nabla^\perp_X\alpha(U, \overline{V}) = \alpha(\nabla_X U, \overline{V}) + \alpha(U, \nabla_X \overline{V}).$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\alpha(U, \overline{V}) &= \nabla^\perp_X[\alpha(\nabla_Y U, \overline{V}) + \alpha(U, \nabla_Y \overline{V})] \\
&= \nabla^\perp_X\alpha(\nabla_Y U, \overline{V}) + \nabla^\perp_X\alpha(U, \nabla_Y \overline{V}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$0 = (\nabla^\perp_X\alpha)(\nabla_Y U, \overline{V}) = \nabla^\perp_X\alpha(\nabla_Y U, \overline{V}) - \alpha(\nabla_X\nabla_Y U, \overline{V}) - \alpha(\nabla_Y U, \nabla_X \overline{V}),$$

e portanto,

$$\nabla^\perp_X\alpha(\nabla_Y U, \overline{V}) = \alpha(\nabla_X\nabla_Y U, \overline{V}) + \alpha(\nabla_Y U, \nabla_X \overline{V}).$$

Analogamente,

$$\nabla^\perp_X\alpha(U, \nabla_Y \overline{V}) = \alpha(\nabla_X U, \nabla_Y \overline{V}) + \alpha(U, \nabla_X\nabla_Y \overline{V}).$$

Logo,

$$\nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\alpha(U, \overline{V}) = \alpha(\nabla_X\nabla_Y U, \overline{V}) + \alpha(\nabla_Y U, \nabla_X \overline{V}) + \alpha(\nabla_X U, \nabla_Y \overline{V}) + \alpha(U, \nabla_X\nabla_Y \overline{V}),$$

e, do mesmo modo,

$$\nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\alpha(U, \overline{V}) = \alpha(\nabla_Y\nabla_X U, \overline{V}) + \alpha(\nabla_X U, \nabla_Y \overline{V}) + \alpha(\nabla_Y U, \nabla_X \overline{V}) + \alpha(U, \nabla_Y\nabla_X \overline{V}).$$

Além disso,

$$0 = (\nabla^{\perp}_{[X,Y]}\alpha)(U,\overline{V}) = \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\alpha(U,\overline{V}) - \alpha(\nabla_{[X,Y]}U,\overline{V}) - \alpha(U,\nabla_{[X,Y]}\overline{V}),$$

ou seja,

$$\nabla^{\perp}_{[X,Y]}\alpha(U,\overline{V}) = \alpha(\nabla_{[X,Y]}U,\overline{V}) + \alpha(U,\nabla_{[X,Y]}\overline{V}).$$

Concluímos então, que

$$R^{\perp}(X,Y)\alpha(U,\overline{V}) = \alpha(R(X,Y)U,\overline{V}) + \alpha(U,R(X,Y)\overline{V}).$$

Desde que X,Y são do mesmo tipo, pelo Lema (4.0.1), $R^{\perp}(X,Y) = 0$, e portanto, temos o que queríamos demonstrar.

■

Teorema 4.0.1. *Seja $f : M \to \mathbb{R}^{2n+m}$ uma imersão isométrica, onde M uma variedade Kähleriana. Então f possui uma família associada se, e somente se, f possui pluri-curvatura média paralela.*

Demonstração.
Supondo que a imersão isométrica $f : M \to \mathbb{R}^{2n+m}$ possua pluri-curvatura média paralela, temos que mostrar a existência de uma família f_θ. Para isso usaremos o Teorema Fundamental para Subvariedades 2.2.1, demonstrando que a seção simétrica α_θ do fibrado $\mathcal{L}_2\ (TM \times TM, (TM)^{\perp})$, satisfaz as equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

Definimos então α_θ por:

$$\alpha_\theta(X,Y) = \alpha(R_\theta X, R_\theta Y),$$

onde $R_\theta X = \cos\theta X + sen\theta JX$.

Temos que a equação de Gauss é válida para $\alpha = \alpha_0$, ou seja,

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle.$$

Verifiquemos então a validade da equação de Gauss para α_θ. Queremos mostrar que

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \alpha_\theta(X,W),\alpha_\theta(Y,Z)\rangle - \langle \alpha_\theta(X,Z),\alpha_\theta(Y,W)\rangle\\ &= \langle \alpha(R_\theta X,R_\theta W),\alpha(R_\theta Y,R_\theta Z)\rangle\\ &\quad -\langle \alpha(R_\theta X,R_\theta Z),\alpha(R_\theta Y,R_\theta W)\rangle.\end{aligned}$$

Consideremos, primeiramente, que os quatro vetores são do mesmo tipo. Supondo que $X,Y,Z,W \in T^{(1,0)}M$:

$$
\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \alpha(e^{i\theta}X, e^{i\theta}W), \alpha(e^{i\theta}Y, e^{i\theta}Z)\rangle \\
&-\langle \alpha(e^{i\theta}X, e^{i\theta}Z), \alpha(e^{i\theta}Y, e^{i\theta}W)\rangle \\
&= \langle e^{2i\theta}\alpha(X,W), e^{2i\theta}\alpha(Y,Z)\rangle \\
&-\langle e^{2i\theta}\alpha(X,Z), e^{2i\theta}\alpha(Y,W)\rangle \\
&= e^{4i\theta}(\langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle).
\end{aligned}
$$

Analogamente, se $X, Y, Z, W \in T^{(0,1)}M$, teremos

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = e^{-4i\theta}(\langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle).$$

Assim, para ambos os casos, a equação de Gauss para α_θ segue da equação de Gauss para α, se e somente se, o primeiro membro da equação se anula. Isto é dado pelo Lema 4.0.1.

Consideremos, agora, que três vetores são do mesmo tipo. Supondo que $X, Y, Z \in T^{(1,0)}M$ e $W \in T^{(0,1)}M$:

$$
\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \alpha(e^{i\theta}X, e^{-i\theta}W), \alpha(e^{i\theta}Y, e^{i\theta}Z)\rangle \\
&-\langle \alpha(e^{i\theta}X, e^{i\theta}Z), \alpha(e^{i\theta}Y, e^{-i\theta}W)\rangle \\
&= \langle \alpha(X,W), e^{2i\theta}\alpha(Y,Z)\rangle \\
&-\langle e^{2i\theta}\alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle \\
&= e^{2i\theta}(\langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Do mesmo modo, se $X, Y, Z \in T^{(0,1)}M$ e $W \in T^{(1,0)}M$, teremos a mesma equação (4.1) a menos de um sinal negativo no expoente da função exponencial, ou seja,

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = e^{-2i\theta}(\langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle). \tag{4.2}$$

Para os casos em que $X, Z, W \in T^{(1,0)}M$ e $Y \in T^{(0,1)}M$, e vice-versa, bem como para $Y, Z, W \in T^{(1,0)}M$ e $X \in T^{(0,1)}M$,e vice-versa, tem-se novamente as equações (4.1) e (4.2).

Portanto a equação de Gauss para α_θ, para o caso em que apenas três vetores são do mesmo tipo, segue novamente do Lema 4.0.1 e da equação de Gauss para α.

Para o último caso devemos considerar, que dois vetores são do mesmo tipo. Supondo que $X, Y \in T^{(1,0)}M$ e $Z, W \in T^{(0,1)}M$:

$$
\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \alpha(e^{i\theta}X, e^{-i\theta}W), \alpha(e^{i\theta}Y, e^{-i\theta}Z)\rangle \\
&-\langle \alpha(e^{i\theta}X, e^{-i\theta}Z), \alpha(e^{i\theta}Y, e^{-i\theta}W)\rangle \\
&= (\langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle)
\end{aligned}
$$

e, usando o Lema (4.0.1), $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = 0$, ou seja,

$$\langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle = 0,$$

e temos a equação de Gauss para α, neste caso.

Para $X, Y \in T^{(0,1)}M$ e $Z, W \in T^{(1,0)}M$, do mesmo modo, também teremos a equação de Gauss para α de imediato.

Se $X, Z \in T^{(1,0)}M$ e $Y, W \in T^{(0,1)}M$, teremos

$$\begin{array}{rcl}\langle R(X,Y)Z, W\rangle & = & \langle \alpha(e^{i\theta}X, e^{-i\theta}W), \alpha(e^{-i\theta}Y, e^{i\theta}Z)\rangle \\ & & -\langle \alpha(e^{i\theta}X, e^{i\theta}Z), \alpha(e^{-i\theta}Y, e^{-i\theta}W)\rangle,\end{array}$$

e portanto, segue a equação de Gauss. Analogamente ocorre se $X, Z \in T^{(0,1)}M$ e $Y, W \in T^{(1,0)}M$:

$$\begin{array}{rcl}\langle R(X,Y)Z, W\rangle & = & \langle \alpha(e^{-i\theta}X, e^{i\theta}W), \alpha(e^{i\theta}Y, e^{-i\theta}Z)\rangle \\ & & -\langle \alpha(e^{-i\theta}X, e^{-i\theta}Z), \alpha(e^{i\theta}Y, e^{i\theta}W)\rangle,\end{array}$$

e a equação de Gauss é imediata.

Finalmente, os dois últimos casos, $Y, Z \in T^{(1,0)}M$ e $X, W \in T^{(0,1)}M$, e vice-versa, resultam diretamente na equação de Gauss, como no caso antecedente.

Portanto podemos concluir que α_θ satisfaz a equação de Gauss.

Verifiquemos agora, se α_θ satisfaz a equação de Codazzi. Lembramos que para $\alpha = \alpha_0$ vale a equação de Codazzi,

$$(\nabla^\perp_X \alpha)(Y, Z) = (\nabla^\perp_Y \alpha)(X, Z),$$

e temos que mostrar que,

$$(\nabla^\perp_X \alpha_\theta)(Y, Z) = (\nabla^\perp_Y \alpha_\theta)(X, Z).$$

Temos que,

$$\begin{array}{rcl}(\nabla^\perp_X \alpha_\theta)(Y, Z) & = & \nabla^\perp_X \alpha_\theta(Y, Z) - \alpha_\theta(\nabla_X Y, Z) - \alpha_\theta(Y, \nabla_X Z) \\ & = & \nabla^\perp_X \alpha(R_\theta Y, R_\theta Z) - \alpha(R_\theta \nabla_X Y, R_\theta Z) - \alpha(R_\theta Y, R_\theta \nabla_X Z),\end{array}$$

e também,
$(\nabla^\perp_Y \alpha_\theta)(X, Z) = \nabla^\perp_Y \alpha(R_\theta X, R_\theta Z) - \alpha(R_\theta \nabla_Y X, R_\theta Z) - \alpha(R_\theta X, R_\theta \nabla_Y Z)$.

Consideremos inicialmente que os três vetores são do mesmo tipo. Lembramos que $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$ são paralelos, pela proposição 3.3.1. Se $X, Y, Z \in T^{(1,0)}M$,

$$\begin{array}{rcl}(\nabla^\perp_X \alpha_\theta)(Y, Z) & = & \nabla^\perp_X \alpha(R_\theta Y, R_\theta Z) - \alpha(R_\theta \nabla_X Y, R_\theta Z) - \alpha(R_\theta Y, R_\theta \nabla_X Z) \\ & = & \nabla^\perp_X \alpha(e^{i\theta}Y, e^{i\theta}Z) - \alpha(e^{i\theta}\nabla_X Y, e^{i\theta}Z) - \alpha(e^{i\theta}Y, e^{i\theta}\nabla_X Z) \\ & = & e^{2i\theta}\nabla^\perp_Y \alpha(X, Z) - e^{2i\theta}\alpha(\nabla_Y X, Z) - e^{2i\theta}\alpha(X, \nabla_Y Z), \quad (4.3)\end{array}$$

e, analogamente,

$$(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha_\theta)(X,Z) = e^{2i\theta}[\nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z)], \qquad (4.4)$$

e portanto, igualando as equações (4.3) e (4.4)

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha_\theta)(X,Z) = e^{2i\theta}(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = e^{2i\theta}(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha_\theta)(X,Z),$$

e α_θ satisfaz Codazzi nestas condições. Se $X, Y, Z \in T^{(0,1)}M$ teremos novamente as equações (4.3) e (4.4) a menos de um sinal negativo no expoente da função exponencial em ambas, isto é, teremos

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha_\theta)(X,Z) = e^{-2i\theta}(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = e^{-2i\theta}(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha_\theta)(X,Z),$$

logo, segue a equação de Codazzi neste caso.

Considerando agora dois vetores do mesmo tipo. Se $X, Y \in T^{(1,0)}M$ e $Z \in T^{(0,1)}M$ teremos:

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\perp}_{X}\alpha_\theta)(Y,Z) &= \nabla^{\perp}_{X}\alpha(R_\theta Y, R_\theta Z) - \alpha(R_\theta \nabla_X Y, R_\theta Z) - \alpha(R_\theta Y, R_\theta \nabla_X Z)\\
&= \nabla^{\perp}_{X}\alpha(e^{i\theta}Y, e^{-i\theta}Z) - \alpha(e^{i\theta}\nabla_X Y, e^{-i\theta}Z) - \alpha(e^{i\theta}Y, e^{-i\theta}\nabla_X Z)\\
&= \nabla^{\perp}_{X}\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)\\
&= (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z),
\end{aligned}$$

e, também,

$(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha_\theta)(X,Z) = \nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z)$, e temos a equação de Codazzi de imediato. O mesmo acontece se $X, Y \in T^{(0,1)}M$ e $Z \in T^{(1,0)}M$.

Se $X, Z \in T^{(1,0)}M$ e $Y \in T^{(0,1)}M$ teremos:

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\perp}_{X}\alpha_\theta)(Y,Z) &= \nabla^{\perp}_{X}\alpha(R_\theta Y, R_\theta Z) - \alpha(R_\theta \nabla_X Y, R_\theta Z) - \alpha(R_\theta Y, R_\theta \nabla_X Z)\\
&= \nabla^{\perp}_{X}\alpha(-e^{i\theta}Y, e^{i\theta}Z) - \alpha(e^{-i\theta}\nabla_X Y, e^{i\theta}Z) - \alpha(e^{-i\theta}Y, e^{i\theta}\nabla_X Z)\\
&= \nabla^{\perp}_{X}\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)\\
&= (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z), \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha_\theta)(X,Z) &= e^{2i\theta}\nabla^{\perp}_{Y}\alpha(X,Z) - e^{2i\theta}\alpha(\nabla_Y X, Z) - e^{2i\theta}\alpha(X, \nabla_Y Z)\\
&= e^{i\theta}(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z). \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Neste caso, comparando as equações (4.5) e (4.6), encontramos fatores diferentes em cada lado da equação de Codazzi, isto é,

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha_{\theta})(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) \neq e^{i\theta}(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha_{\theta})(X,Z). \quad (4.7)$$

Analogamente, se $X, Z \in T^{(0,1)}M$ e $Y \in T^{(1,0)}M$, e equação teria a forma:

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha_{\theta})(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) \neq e^{-i\theta}(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha_{\theta})(X,Z). \quad (4.8)$$

O mesmo ocorre para os dois últimos casos, em que $Y, Z \in T^{(1,0)}M$ e $X \in T^{(0,1)}M$ e vice-versa; encontraríamos equações semelhantes às equações (4.7) e (4.8).

Para esses quatro casos podemos concluir que a equação de Codazzi se verifica se $(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = 0$ para $X \in T^{(1,0)}M$, $Y \in T^{(0,1)}M$ e Z qualquer. Mas, $(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Z,Y)$, e usando Codazzi para α, $(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Z,Y) = (\nabla^{\perp}_{Z}\alpha)(X,Y)$, e assim α_{θ} satisfaz Codazzi se, e somente se, $(\nabla^{\perp}_{Z}\alpha)(X,Y) = 0$, ou seja, se, e somente se $\alpha^{(1,1)}$ é paralela.

Nos resta verificar a equação de Ricci. Para qualquer $\xi \in N$ seja $\mathcal{A}^{\theta}_{\xi}$ o operador de Weingarten de f_{θ} definido por:

$$\langle \mathcal{A}^{\theta}_{\xi}X, Y\rangle = \langle \alpha_{\theta}(X,Y), \xi\rangle = \langle \alpha(R_{\theta}X, R_{\theta}Y), \xi\rangle = \langle \mathcal{A}_{\xi}R_{\theta}X, R_{\theta}Y\rangle,$$

ou seja,

$$\langle \mathcal{A}^{\theta}_{\xi}X, Y\rangle = \langle \mathcal{A}_{\xi}R_{\theta}X, R_{\theta}Y\rangle,$$

e portanto, $\mathcal{A}^{\theta}_{\xi} = R_{\theta}^{-1}\mathcal{A}_{\xi}R_{\theta}$. Então, teremos a equação de Ricci para f_{θ}:

$$\begin{aligned}\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle &= \langle [\mathcal{A}^{\theta}_{\xi}, \mathcal{A}^{\theta}_{\eta}]X, Y\rangle \\ &= \langle [\mathcal{A}_{\xi}, \mathcal{A}_{\eta}]R_{\theta}X, R_{\theta}Y\rangle.\end{aligned}$$

Se $X \in T^{(1,0)}M$ e $Y \in T^{(0,1)}M$, então:

$$\begin{aligned}\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle &= \langle [\mathcal{A}_{\xi}, \mathcal{A}_{\eta}]R_{\theta}X, R_{\theta}Y\rangle \\ &= \langle [\mathcal{A}_{\xi}, \mathcal{A}_{\eta}]e^{i\theta}X, e^{-i\theta}Y\rangle \\ &= e^{i\theta}.e^{-i\theta}\langle [\mathcal{A}_{\xi}, \mathcal{A}_{\eta}]X, Y\rangle \\ &= \langle [\mathcal{A}_{\xi}, \mathcal{A}_{\eta}]X, Y\rangle,\end{aligned}$$

que é a equação de Ricci para f. De maneira análoga, para $X \in T^{(0,1)}M$ e $Y \in T^{(1,0)}M$ obtemos:

$$\begin{aligned}\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle &= \langle [\mathcal{A}_{\xi}, \mathcal{A}_{\eta}]e^{-i\theta}X, e^{i\theta}Y\rangle \\ &= \langle [\mathcal{A}_{\xi}, \mathcal{A}_{\eta}]X, Y\rangle,\end{aligned}$$

ou seja, novamente a equação de Ricci para f.

Considerando agora, $X, Y \in T^{(1,0)}M$,

$$\begin{aligned}\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle &= \langle[\mathcal{A}_{\xi},\mathcal{A}_{\eta}]R_{\theta}X, R_{\theta}Y\rangle\\ &= \langle[\mathcal{A}_{\xi},\mathcal{A}_{\eta}]e^{i\theta}X, e^{i\theta}Y\rangle\\ &= e^{2i\theta}\langle[\mathcal{A}_{\xi},\mathcal{A}_{\eta}]X, Y\rangle,\end{aligned}$$

e, para $X, Y \in T^{(0,1)}M$,

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = e^{-2i\theta}\langle[\mathcal{A}_{\xi},\mathcal{A}_{\eta}]X, Y\rangle,$$

Então, para os dois últimos casos, a equação de Ricci é satisfeita, e segue da equação de Ricci para f, se e somente se, $R^{\perp}(X,Y) = 0$, para X, Y do mesmo tipo. Isto segue do Lema 4.0.2.

Reciprocamente se f possui uma família associada, então para todo θ os operadores α_{θ} satisfazem as equações de Codazzi:

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha_{\theta})(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha_{\theta})(X,Z),$$

para todo $X, Y, Z \in T^{\mathbb{C}}M$, ou seja,

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(R_{\theta}Y, R_{\theta}Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(R_{\theta}X, R_{\theta}Z).$$

Tomando $X, Z \in T^{(1,0)M}$ e $Y \in T^{(0,1)}M$ teremos:

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = e^{2i\theta}(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z).$$

Concluímos então que $(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = 0$, pois α satisfaz a equação de Codazzi, mas pelo argumento anterior

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Z}\alpha)(X,Y) = 0, \text{ para } \quad Z \in T^{(1,0)}M. \tag{4.9}$$

Considerando agora, $X \in T^{(1,0)}M$ e $Y, Z \in T^{(0,1)}M$ teremos:

$$e^{-2i\theta}(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z),$$

e concluímos também que $(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = 0$, como anteriormente, da mesma forma

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Z}\alpha)(X,Y) = 0, \text{ para } \quad Z \in T^{(0,1)}M. \tag{4.10}$$

Logo por (4.9) e (4.10) f é *ppmc*. ∎

Teorema 4.0.2. *Uma imersão ppmc, $f : M \to \mathbb{R}^{2n+m}$, de uma variedade Kähleriana, é isotrópica se, e somente se, existe uma decomposição ortogonal e paralela do complexificado do fibrado normal $N^{\mathbb{C}} = N' \oplus N^0 \oplus N''$ tais que os subfibrados paralelos N', N^0, N'' contém os valores de $\alpha^{(2,0)}$, $\alpha^{(1,1)}$, $\alpha^{(0,2)}$, respectivamente.*

Demonstração.

Se f é *ppmc* isotrópica e $\psi_\theta : N \to N$ são os automorfismos de fibrados vetoriais paralelos, com $\psi_\theta \circ \alpha = \alpha_\theta$, então, para $X, Y \in T^{(1,0)}M$:

$$\psi_\theta(\alpha(X,Y)) = \alpha_\theta(X,Y) = \alpha(R_\theta X, R_\theta Y) = e^{2i\theta}\alpha(X,Y);$$

e $\alpha^{(2,0)}$ toma valores em N', subfibrado próprio de ψ_θ associado ao autovalor $e^{2i\theta}$. Para $X \in T^{(1,0)}M$ e $Y \in T^{(0,1)}M$:

$$\psi_\theta(\alpha(X,Y)) = \alpha_\theta(X,Y) = \alpha(R_\theta X, R_\theta Y) = \alpha(X,Y);$$

e $\alpha^{(1,1)}$ toma valores em N^0, subfibrado próprio de ψ_θ associado ao autovalor 1. Para e $X, Y \in T^{(0,1)}M$:

$$\psi_\theta(\alpha(X,Y)) = \alpha_\theta(X,Y) = \alpha(R_\theta X, R_\theta Y) = e^{-2i\theta}\alpha(X,Y);$$

e $\alpha^{(0,2)}$ toma valores em N'', subfibrado próprio de ψ_θ associado ao autovalor $e^{-2i\theta}$.

Além disso, sabemos que $\alpha = \alpha^{(2,0)} + \alpha^{(1,1)} + \alpha^{(0,2)}$, e como ψ_θ é automorfismo, $N' \bigcap N^0 \bigcap N'' = \{0\}$, temos a decomposição ortogonal $N^{\mathbb{C}} = N' \oplus N^0 \oplus N''$.

Para concluir basta observar que ψ_θ é paralelo, e portanto, os subfibrados são paralelos.

Reciprocamente, para uma tal decomposição de $N^{\mathbb{C}}$, podemos definir um automorfismo de fibrados paralelos $\psi_\theta : N \to N$, definindo por $\psi_\theta = e^{2i\theta}I$ em N', $\psi_\theta = I$ em N^0, e $\psi_\theta = e^{-2i\theta}I$ em N''. Assim, se $\alpha(X,Y) \in N'$,

$$\begin{aligned}\psi_\theta(\alpha(X,Y)) &= e^{2i\theta}\alpha(X,Y) = e^{i\theta}.e^{i\theta}\alpha(X,Y) = \alpha(e^{i\theta}X, e^{i\theta}Y)\\ &= \alpha(R_\theta X, R_\theta Y) = \alpha_\theta(X,Y);\end{aligned}$$

se $\alpha(X,Y) \in N^0$,

$$\begin{aligned}\psi_\theta(\alpha(X,Y)) &= \alpha(X,Y) = e^{i\theta}.e^{-i\theta}\alpha(X,Y) = \alpha(e^{i\theta}X, e^{-i\theta}Y)\\ &= \alpha(R_\theta X, R_\theta Y) = \alpha_\theta(X,Y);\end{aligned}$$

se $\alpha(X,Y) \in N''$,

$$\begin{aligned} \psi_\theta(\alpha(X,Y)) &= e^{-2i_\theta}\alpha(X,Y) = e^{-i_\theta}.e^{-i_\theta}\alpha(X,Y) = \alpha(e^{-i_\theta}X, e^{-i_\theta}Y) \\ &= \alpha(R_\theta X, R_\theta Y) = \alpha_\theta(X,Y), \end{aligned}$$

ou seja, f é *ppmc* isotrópica.

■

Referências Bibliográficas

[1] BONNET, O., *Mémoire sur la theorie des surfaces applicables*, J. Éc. Polyt., 42(1867),72-92.

[2] BURSTALL , F.E., ESCHENBURG J.H., FERREIRA, M.J.; TRIBUZY R., *Kähler submanifolds with parallel pluri-mean curvature*, Differential Geometry and its Applications 20, 47-66, 2004.

[3] CARMO, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro:Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - segunda edição.(Projeto Euclides)

[4] CARMO, M.P., *O Método do Referencial Móvel*, Rio de Janeiro: Escola Latino Americana de Matemática, 1976.

[5] DAJCZER, M., *Submanifolds and isometric immersion*, Houston, Publish or Perish, 1990.

[6] DAJCZER, M., RODRIGUES L., *Rigidity of Real Kähler Submanifolds*, DukeMath. J. 53, 211-220, 1986.

[7] ESCHENBURG J.H., TRIBUZY, R., *Associated Families of Pluriarmonic Maps and Isotropy.* Manuscripta Math. 1995,295 - 310, 1998.

[8] EARP R.S.,*Análise Complexa e Geometria Diferencial de certas Superfícies do Espaço Hiperbólico*, Bol. Soc. Paran. Mat. v.21, 2003.

[9] FERREIRA, M.J., TRIBUZY, R., *On the type decomposition of the second fundamental form of a Kähler submanifold*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 94, 17-23, 1995.

[10] HOFFMAN D., *Surfaces in constant curvature manifolds with paralel mean curvature vector field*, Bull. Amer. Math. Soc. 78, 1972, 247-250.

[11] KOBAYASHI, S. and NOMIZU,K., *Foundations of Differential Geometry.*Wiley Clasics Library Edition Published, 1996,v.2.

[12] LAWSON, H.B., Jr., *Complete minimal surfaces in S3*, Ann. of Math., (2) 92, 335-375, (1970).

[13] TRIBUZY, R., *Deformações de Superfícies preservando a curvatura média*, Tese de Doutorado , IMPA, Rio de Janeiro, 1978.

[14] TRIBUZY, R., *Pluriminimalidade de Subvariedades Kählerianas e Tópicos Relacionados*, preprint.

[15] YANO, K. and KON, M., *Structures on Manifolds*, Series in Pure Mathematics, World Scientific,v.3, 1984.