UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Método de Newton: Um estudo sobre estimativas exatas do raio de convergência e unicidade de solução.

Manoel Ricardo Sampaio Pinheiro

MANAUS - 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Manoel Ricardo Sampaio Pinheiro

Método de Newton: Um estudo sobre estimativas exatas do raio de convergência e unicidade de solução.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Otimização.

Orientador: Prof^{o}. Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva

MANAUS - 2011

Manoel Ricardo Sampaio Pinheiro

Método de Newton: Um estudo sobre estimativas exatas do raio de convergência e unicidade de solução.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Otimização.

Manaus, 03 de Junho de 2011.

BANCA EXAMINADORA

....

Prof^o Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva, Presidente

Universidade Federal do Amazonas

....

Prof^o Dr. Mário Salvatierra Junior, Membro

Universidade Federal do Amazonas

....

Prof^o Dr. Orizon Pereira Ferreira, Membro

Universidade Federal de Goiás

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado força e determinação para enfrentar e superar os obstáculos encontrados e por me conceder mais esta conquista.

A minha família e colegas de trabalho do turno vespertino da Escola Municipal Anastácio Assunção, que acreditaram e torceram para o meu sucesso neste curso de Mestrado.

Aos meus professores do curso, por todo o conhecimento a mim concedido, em especial ao professor Mário Salvatierra pela ajuda pontual na dissertação.

Aos meus colegas de curso: Emerson, Yashiko e Gustavo, pela ajuda e incentivo durante o curso.

Ao meu orientador professor Roberto Cristóvão Mesquita Silva, que conduziu o desenvolvimento de minha dissertação com seriedade e responsabilidade e ao professor Orizon Pereira Ferreira por ter aceitado estar na banca examinadora de minha defesa.

RESUMO

Método de Newton: Um estudo sobre estimativas exatas do raio de convergência e unicidade de solução.

Nesta dissertação é feito um estudo detalhado das estimativas exatas para o raio da bola de convergência do método de Newton e da bola de unicidade de solução de equações em espaços de Banach, acrescentamos ainda uma estimativa para o raio da bola do teorema da função inversa. Este estudo segue as idéias abordadas nos trabalhos de Wang [30, 31]

ABSTRACT

Newton's Method: A study on accurate estimates of the radius of convergence and uniqueness of solution.

In this paper a detailed study is made of accurate estimates for the radius of the ball of convergence of Newton's method and ball uniqueness of solution of equations in Banach spaces, we added an estimate for the radius of the ball of the inverse function theorem. This study follows the ideas discussed in the work of Wang [30, 31].

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O método de Newton é um método iterativo designado a aproximar as raízes de equações não-lineares. Desde quando foi proposto por Newton (1669) (Poliak [24]), tal método foi e ainda é um importante tema de pesquisa de grandes matemáticos, no que diz respeito a melhorias (modificações) do método com o objetivo de torná-lo mais eficiente, principalmente com relação a questões sobre: a análise de convergência (local) da sequência gerada pelo método, a prova da existência e unicidade de raízes da equação e procedimentos para se obter uma aproximação adequada da solução para que o método convirja. Este método, assim como suas suas modificações, é um dos instrumentos fundamentais em áreas como análise numérica, pesquisa operacional, otimização e teoria de controle. O método de Newton tem inúmeras aplicações nas ciências da administração, indústria e pesquisa financeira. Além disto, o método de Newton é também uma ferramenta teórica poderosa tendo um vasto domínio de aplicações em matemática pura, como pode se visto em Blum e outros [3, 4], Krantz and Parks [14] e Moser [18]. Na área de Otimização tem papel importante: o método é a base para os processos mais eficazes de resolução de problemas de programação linear e não-linear. Por exemplo, o desenvolvimento de algoritmos de tempo polinomial em programação convexa, é baseado no método de Newton, veja Nesterov e Nemirovskii [19]. Há duas questões importantes a considerar quando se trata do método de Newton. A primeira diz respeito a análise de convergência da sequência gerada pelo método e a segunda é quanto à unicidade de solução da equação, as duas situações sendo avaliadas numa bola centrada na solução. Assim, o raio desta bola deve ser o melhor possível para que a sequência de Newton esteja bem definida, convirja e que ocorra a unicidade de solução.

Na análise de convergência clássica é necessário que o ponto inicial esteja suficientemente próximo da solução. Logo, supor a existência de solução é uma hipótese muito natural e a vantagem desta hipótese é que ela pode nos dar uma estimativa exata para o raio de convergência da bola em estudo. Por exemplo, sob a hipótese de que a derivada da função satisfaz a condição de Lipschitz, Traub e Wozniakowsky [29] e Wang [32] independentemente, deram uma estimativa exata $r = \dfrac{2}{3L}$ para o raio de convergência da bola centrada na solução da equação e sob a hipótese de que a função é analítica Smale [26] deu uma estimativa exata $r = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4\gamma}$ para o raio de convergência desta bola. Dedieu [6] provou que a equação dada pelo operador não linear tem uma única solução na bola centrada na solução, outros trabalhos relacionados a esta questão podem ser encontrados em Blum e outros [3, 4] e Smale, [26]. Tomando como hipóteses condições de Lipschits mais gerais, Wang [30] estabelece uma forma de obter o raio ótimo da bola de convergência do método de Newton e da bola de unicidade de solução de equações.

Esta dissertação é baseada em dois artigos de Xinghua Wang [30, 31], onde se faz um estudo sobre, o domínio de convergência do método de Newton, o domínio de unicidade de solução de equações e um estudo sobre a menor estimativa exata do raio da bola no teorema da função inversa. O ambiente para estas três situações é um espaço de Banach.

O objetivo deste trabalho é apresentar um método uniforme para lidar em condições mais gerais com a questão da análise do domínio de convergência do método de Newton e do domínio de unicidade de solução de equações, assim como estudar a menor estimativa exata do raio da bola no teorema da função inversa.

Esta dissertação está organizada como segue. O capítulo II é destinado aos tópicos complementares utilizados no desenvolvimento dos principais resultados como, espaços de Banach, derivada de Fréchet, norma de operadores, teorema da função inversa, integral dupla, teorema fundamental do cálculo e zero aproximado. No capítulo III, definimos o Método de Newton para equações e para otimização irrestrita e citamos o teorema de análise convergência (local) clássica deste método e apresentamos um breve histórico sobre o método em questão. No capítulo IV estudaremos o domínio de convergência do método de Newton; no capítulo V fazemos um estudo do domínio de unicidade de solução de equações e da otimalidade da estimativa do raio; no capítulo VI apresentamos Corolários relevantes relacionados aos teoremas principais vistos nos capítulos IV e V e no capítulo VII é feito um estudo sobre a menor estimativa do raio da bola no teorema da função inversa (local). Finalmente, destacamos as considerações finais e pesquisas futuras.

Capítulo 2

Generalidades

Com a finalidade de deixar esta dissertação mais completa, apresentaremos neste capítulo os conteúdos preliminares que serão utilizados direta ou indiretamente no desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Espaço de Banach

Nesta seção, apresentamos tópicos relacionados aos espaços de Banach como a convergência de sequências e definições de: espaço de Banach, norma de operadores e a (Fréchet-)derivada de operadores. Abordamos também, resultados relevantes como o lema de Banach e o Teorema da função inversa (local) e estabelecemos algumas notações. Estes tópicos estão baseados nas referências bibliográficas de Ambrosetti [1], Kolmogorov e Fomin [15] e Lima [16].

Definição 2.1.1. *Uma sequência* $\{x_n\}$ *em um espaço vetorial normado* X

converge para $\overline{x} \in X$ *se dado* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\|x_n - \overline{x}\| < \epsilon, \quad \forall \quad n \geq n_0.$$

Uma sequência $\{x_n\}$ *contida em um espaço vetorial normado é de Cauchy se: dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in N$ *tal que*

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon, \quad \forall \quad m, n \geq n_0.$$

Uma sequência $\{x_n\}$ é crescente se $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$, isto é, $x_n < x_{n+1}$ para todo n. Se $x_n \leq x_{n+1}$, então diremos que a sequência é não-decrescente. Similarmente, podemos definir sequências decrescente e não-crescente. As sequências crescentes ou decrescentes, são chamadas sequências monótonas.

Definição 2.1.2. *Um espaço vetorial normado X é chamado espaço de Banach, se toda sequência de Cauchy em X for convergente.*

Lema 2.1.1. *Sejam X um espaço de Banach e* t_k *uma sequência de números reais monótona crescente e convergente para* t_**. Consideremos uma sequência* $\{x_k\} \subset X$ *que satisfaça a condição*

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq t_{k+1} - t_k, \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N}.$$

Então a sequência x_k *é de Cauchy. Em particular,* x_k *converge, digamos para* $x_* \in X$*. Além disso, vale a desigualdade*

$$\|x_* - x_k\| \leq t_* - t_k, \forall \quad k \in \mathbb{N}$$

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$. Usando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \|x_{k+n} - x_k\| &\leq \|x_{k+n} - x_{k+n-1}\| + \|x_{k+n-1} - x_{k+n-2}\| + \ldots + \|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq (t_{k+n} - t_{k+n-1}) + (t_{k+n-1} - t_{k+n-2}) + \ldots + (t_{k+1} - t_k) \\ &= t_{k+n} - t_k \leq t_* - t_k. \end{aligned}$$

Como t_k é uma sequência convergente para t_*, segue-se que $t_* - t_k$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno para k suficientemente grande. Logo a equação acima implica que x_k é uma sequência de Cauchy.
Agora, para obtermos a desigualdade requerida pelo Lema, é suficiente fazer $n \to \infty$ na inequação acima. $\square$

Sejam $x, y \in X$ onde X é um espaço de Banach. O segmento de reta de extremos x, y é o conjunto

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Definição 2.1.3. *Um subconjunto $C \subset X$ diz-se convexo quando contém qualquer segmento de reta cujos extremos pertençam a C, ou seja: $x, y \in C \Rightarrow [x, y] \subset C$. O ponto $(1-t)x + ty$, se chama combinação convexa de x e y (com parâmetro t).* Toda bola $B \subset X$ aberta ou fechada é convexa.

Definição 2.1.4. *Sejam X, Y espaços Banach, $L(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares de X em Y e $T \in L(X, Y)$. Definimos a norma $\|.\|$ de aplicações lineares como sendo o número,*

$$\|T\| := sup\{\|Tx\|; \|x\| \leq 1\}.$$

Observe que valem as seguintes propriedades:
1. $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, para todo $T \in L(X, Y)$ e $x \in X$.
2. $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$ e $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$, para todo $S, T \in L(X, Y)$.

Observação 2.1.1. . *É possível mostrar que, o espaço das aplicações lineares $L(X, Y)$ com a norma dada na definição* (2.1.3)*, é um espaço de Banach, veja Kolmogorov e Fomin [15], pg. 215.*

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos as bolas aberta e fechada com centro em x e raio r, respectivamente por:

$B(x,r) = \{y \in X | \|x-y\| < r\}$ e $B[x,r] = \{y \in X | \|x-y\| \leq r\}$
e o fecho de $B(x,r)$ denotado por $\overline{B(x,r)}$.

Definição 2.1.5. *Sejam X e Y espaços de Banach, U um subconjunto aberto de X, $F : U \longrightarrow Y$ uma aplicação e $u \in U$. Dizemos que F é (Fréchet-) diferenciável em u, se para todo $h \in X$ tal que $u+h \in U$, existe $A \in L(X,Y)$ de modo que,*

$$R(h) = F(u+h) - F(u) - A(h),$$

onde $R(h) = o(\|h\|)$ e $\lim \dfrac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0$ com $\|h\| \to 0$. A aplicação A é unicamente determinada e será chamada a (Fréchet-) diferencial de F em u e denotado por $A = F'(u)$. Se F é (Fréchet-) diferenciável em todo $x \in U$, dizemos que F é (Fréchet-)diferenciável em U. Assim $F'(x) \in L(X,Y)$, isto é, $F'(x)$ é uma aplicação linear de U no espaço das aplicações lineares $L(X,Y)$, como está definido abaixo.

Definição 2.1.6. *Seja $F : U \longrightarrow Y$ diferenciável em U. A aplicação,*

$$F' : U \longrightarrow L(X,Y)$$

$$u \longrightarrow F'(u)$$

é chamada a (Fréchet) derivada de F. Se F' é contínua, diremos que F é de classe C^1 e escrevemos $F \in C^1(U,Y)$.

Observação 2.1.2. *Como $F'(x) \in L(X,Y)$, temos que:*

$$\|F'(x)\| := sup\{\|F'(x)u\|; \|u\| \leq 1\}$$

Seja $A \in L(X,Y)$. A é invertível se existe $B \in L(X,Y)$ tal que,

$$B \circ A = I_X$$

$$A \circ B = I_Y$$

A aplicação B é única e será denotada por A^{-1}. Estabelecemos também o conjunto das aplicações lineares invertíveis como,

$$Inv(X,Y) = \{A \in L(X,Y); A \text{ é invertível}\}.$$

O Lema abaixo tem grande importância para que os resultados principais deste trabalho sejam demonstrados.

Lema 2.1.2. *(Lema de Banach). Sejam T um operador linear e I o operador identidade em um espaço de Banach X. Se $\|T - I\| < 1$, então T é não-singular e satisfaz a desigualdade*

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T - I\|}. \tag{2.1}$$

Demonstração: Para provar que vale a desigualdade 2.1, vamos primeiro mostrar que se $B \in L(X,X)$ é tal que $\|B\| < 1$ então $I - B$ é inversível e vale

$$\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}. \tag{2.2}$$

Considere as sequências $\{S_k\}$ e $\{t_k\}$ definidas respectivamente por:

$$S_k = I + B + \ldots + B^k, \quad t_k = 1 + \|B\| + \|B\|^2 + \ldots + \|B\|^k.$$

Note que,

$$\|S_{k+1} - S_k\| = \|(I + B + \ldots + B^{k+1}) - (I + B + \ldots + B^k)\| \leq \|B\|^{k+1}.$$

Observe também que,

$$S_k(I - B) = (I + B + \ldots + B^k)(I - B) = I - B^{k+1}. \quad (I)$$

Por outro lado, temos que $\lim_{k\to\infty}(I - B^k) = I$, pois

$$\|I - (I - B^k)\| = \|B^k\| \leq \|B\|^k \quad e \quad \lim_{k\to\infty} \|B\|^k = 0.$$

Assim, pela equação (I) temos que

$$\lim_{k\to\infty} S_k = (I - B)^{-1}$$

Note ainda que,

$$\|(I-B)^{-1}\| = \|\lim_{k\to\infty} S_k\| \leq \lim_{k\to\infty}(1+\|B\|+\|B\|^2+\ldots+\|B\|^k) = \lim_{k\to\infty} t_k = \frac{1}{1-\|B\|}.$$

Isto prova 2.2. Agora tomando $B = I - T$ e observando a hipótese de que $\|T - I\| < 1$, temos que $(I - B) = T$ é inversível e vale a estimativa para a norma da inversa T^{-1} $\square$

Definição 2.1.7. *Seja U (respec. V) um subconjunto aberto de um espaço de Banach X (respec. Y) e $H(U, V)$ o conjunto das aplicações homeomorfas de U em V. Dizemos que $F \in H(U, V)$, se existe uma aplicação $G : V \longrightarrow U$ tal que,*

$$G(F(u)) = u, \quad \forall u \in U$$

$$F(G(u)) = v, \quad \forall v \in V$$

Uma aplicação $F \in C(X, Y)$ é localmente invertível em $\overline{x} \in X$ se existe uma vizinhança U de $\overline{x}$ e V de $\overline{v} = F(\overline{u}) \in Y$ tal que $F \in H(U, V)$.
Em outras palavras F é localmente invertível em $\overline{u}$ se existem vizinhanças U e V de $\overline{u}$ e $\overline{v}$, respectivamente, e uma aplicação $G : V \longrightarrow U$ satisfazendo as igualdades da definição acima. A aplicação G é chamada a inversa (local) de F e denotada por F^{-1}.

Teorema 2.1.1. *(Teorema da Inversão Local) Suponha $F \in C^1(X, Y)$ e $F'(\overline{u}) \in Inv(X, Y)$. Então F é localmente invertível em $\overline{u}$ com inversa C^1. Mias precisamente, existem vizinhanças U de $\overline{u}$ e V de $\overline{v} = F(\overline{u})$ tal que:*

(i) $F \in H(U, V)$*;*

(ii) $F^{-1} \in C^1(U, X)$ *e para todo* $v \in V$ *resulta*

$$dF^{-1}(v) = (F'(u))^{-1}, \quad u = F^{-1}(v);$$

(iii) se $F \in C^k(X, Y), \ \ k > 1,$ *então* $F^{-1} \in C^k(V, X)$*.*

Demonstração:. Veja Ambrosetti [1], pg. 32.

2.2 Função analítica e Integral

Nesta seção, utilizamos as referências bibliográficas de Kolmogorov e Fomin [15] e Lima [16], para fazer uma abordagem sobre alguns resultados e definições relevantes sobre integral dupla, teorema fundamental do cálculo para caminhos e sobre função analítica em espaços de Banach, que serão necessários para o desenvolvimento desta dissertação.

2.2.1 Integral Dupla e Teorema Fundamental do Cálculo para Caminhos

Definição 2.2.1. *Sejam* $f(x, y)$ *uma função definida num conjunto limitado* B *e* L *um número real. Dizemos que a soma de Riemann*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

tende a L*, quando* Δ *tende a zero, e escrevemos*

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = L$$

se para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ que só dependa de ϵ mas não da escolha de X_{ij}, tal que

$$\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - L \| < \epsilon$$

para toda partição P, com $\Delta < \delta$.

Tal número L, que quando existe é único, denomina-se integral dupla(segundo Riemann) de f sobre B e indica-se por $\int \int_B f(x,y)dxdy$. Assim

$$\int \int_B f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

Se $\int \int_B f(x,y)dxdy$ existe, então diremos que f é integrável (segundo Riemann) em B.

Teorema 2.2.1. *(Teotrema da Inversão da Ordem nas Integrais Repetidas). Para toda função contínua $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, vale*

$$\int_a^b ds \int_c^d f(s,t)dt = \int_c^d dt \int_a^b f(s,t)ds.$$

Demonstração: Veja Lima [16], página 145.

Lema 2.2.1. *Suponha que $f : [0,b] \times [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seja contínua, então*

$$\int_0^b dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^b dy \int_y^b f(x,y)dx. \tag{2.3}$$

Em particular, se $g : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então

$$\int_0^t dx \int_0^x g(y)dy = \int_0^t (t-y)g(y)dy. \tag{2.4}$$

Demonstração: Considere as seguintes funções

$$\gamma(t) = \int_0^t dx \int_0^x f(x,y)dy$$

$$\lambda(t) = \int_0^t dy \int_y^t f(x,y)dx$$

observe que $\gamma(0) = 0$ e $\lambda(0) = 0$. Queremos mostrar que $\gamma(b) = \lambda(b)$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) temos que

$$\gamma'(t) = \int_0^t f(t, y)dy.$$

Para derivarmos a função λ precisamos da regra de derivação apresentada no exemplo 12.a, pag. 146 do livro do Elon [16]. De fato, definindo $h(t, y) = \int_y^t f(x, y)dx$ temos $\lambda(t) = \int_0^t h(t, y)dy$, então pelo exemplo 12.a temos

$$\lambda'(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} h(t, y)dy + h(t, t).$$

Note que $h(t, t) = \displaystyle\int_t^t f(x, t)dx = 0$ e pelo TFC, $\dfrac{\partial}{\partial t} h(t, y) = f(t, y)$.

Com isso, obtemos

$$\lambda'(t) = \int_0^t f(t, y)dy.$$

Assim, $\gamma'(t) = \lambda'(t)$ para todo $t \geq 0$.

Novamente aplicando o TFC, temos

$$\gamma(b) - \gamma(0) = \int_0^b \gamma'(t)dt = \int_0^b \lambda'(t)dt = \lambda(b) - \lambda(0).$$

Portanto $\gamma(b) = \lambda(b)$.

Para o caso particular, observe que

$$\int_0^t (t - y)g(y)dy = \int_0^t \int_y^t 1g(y)dxdy = \int_0^t dy \int_y^t 1g(y)dx$$

Assim por (2.3) e sendo g contínua, temos que

$$\int_0^t (t - y)g(y)dy = \int_0^t dy \int_y^t 1g(y)dx = \int_0^t dx \int_0^x g(y)dy$$

Isto mostra que a igualdade (2.4) é válida. □

Teorema 2.2.2. *(Teorema Fundamental do Cálculo para Caminhos). Seja $F : [a, a + h] \longrightarrow R^n$ um caminho com derivada integrável. Então*

$$F(a + h) - F(a) = \int_a^{a+h} F'(t)dt = h \int_0^1 F'(a + th)dt.$$

2.2.2 Função Analítica em espaços de Banach

Nesta subseção apresentamos as definições de função analítica definida em $\mathbb{R}$ e função analítica em espaços de Banach.

Definição 2.2.2. *Uma função $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto I, chama-se analítica quando, para cada $x_0 \in I$, existe um $\epsilon > 0$ tal que a série de Taylor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} h^n,$$

converge para $F(x_0 + h)$ desde que $|h| < \epsilon$.

Observação 2.2.1. *Se $F : I \longrightarrow R$ é analítica, a sua derivada é também uma função analítica. De fato, se F é representada em uma vizinhança $x_0 \in I$ por uma série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} h^n,$$

a sua derivada será representada na mesma vizinhança pela série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n+1)}(x_0)}{n!} h^n.$$

Decorre daí que F é na verdade de classe C^{∞} e as suas derivadas sucessivas $F', F'', \ldots$ são também funções analíticas.

Lema 2.2.2. *Se $0 \leq t < 1$, então $\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)t^i = \dfrac{2}{(1-t^3)}$.*

Demonstração: Faça $k = 2$ no Lema 3 de Blum e outros [4] p.161, apud Ferreira [8]. $\square$

Definição 2.2.3. *Sejam X, Y espaços de Banach e $U \subset X$. Dizemos que uma função*

$$F : U \longrightarrow Y$$

é analítica, se para cada ponto $a \in U$ existe uma série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} h^n,$$

com raio de convergência $\delta > 0$, isto é,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n, \qquad \|x-a\| < \delta.$$

2.3 Zero Aproximado

Na análise de convergência local do Método de Newton é necessário que o ponto inicial esteja suficientemente próximo da solução. Nesta seção apresentamos a definição de zero aproximado, dada por Smale [26], afim de que a sequência gerada pelo método de Newton convirja para a solução da equação não-linear em questão.

Sejam $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação analítica de um espaço de Banach em outro , $F' : X \longrightarrow Y$ a derivada de f em $z \in X$. Se $F'(z)$ é invertível, o método de Newton determina um novo vetor z' a partir de z por

$$z' = z - F'(z)^{-1}F(z).$$

Seja β a norma de $z' - z$ dada como segue,

$$\beta(z, F) = \beta(z) = \|F'(z)^{-1}F(z)\|.$$

Definição 2.3.1. *Para um ponto $z_0 \in X$ considere a sequência gerada por $z_n = z_{n-1} - F'(z_{n-1})^{-1}F(z_{n-1})$. Diremos que z_0 é um zero aproximado de F se z_n está definida para todo n e satisfaz*

$$\|z_n - z_{n-1}\| \leq (\frac{1}{2})^{2^{n-1}-1}\|z_1 - z_0\|, \quad \forall n.$$

Observe que claramente, isto implica que z_n é uma sequência de Cauchy que converge, digamos para $\alpha \in X$. Mostremos em seguida que $F(\alpha) = 0$. Desde que, $z_{n+1} - z_n = -F'(z_n)^{-1}F(z_n)$,

$$\|F(z_n)\| = \|F'(z_n)(z_{n+1} - z_n)\| \leq \|F'(z_n)\|\|z_{n+1} - z_n.\|$$

Tome o limite com $n \to \infty$, assim

$$\|F(\alpha)\| \leq \|F'(\alpha)\| \lim \|z_{n+1} - z_n\| = 0.$$

Observação 2.3.1. *Note que para um zero aproximado, o método de Newton é superlinear começando com a primeira iteração.*
O resultado seguinte é muito simples de ser obtido.

Proposição 2.3.1. *Se z_0 é um zero aproximado e $z_n \to \alpha$ com $n \to \infty$, então*

$$\|z_n - \alpha\| \leq (\frac{1}{2})^{2^{n-1}} \|z_1 - z_0\| K,$$

onde

$$K \leq \frac{7}{4}, \qquad K = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots$$

2.4 Ordem de Convergência

Se a sequência $\{x_n\}$ gerada pela iteração de Newton 3.3 é convergente, podemos nos perguntar sobre a rapidez da convergência. Nesta seção, fazemos uma abordagem deste aspecto introduzindo o conceito de ordem de convergência, baseado nas referências bibliográficas de Friedlander [11].
Observe que, se $\lim_{k\to\infty} x_n = x_*$, então $\lim_{k\to\infty} \|x_n - x_*\| = 0$ e podemos considerar que $\|x_n - x_*\|$ é o erro cometido na aproximação x_n. Quanto

mais "rápido"o erro se aproximar de zero, melhor. Uma forma de medir este progresso é comparar os erros cometidos em duas aproximações sucessivas,

$$e_{k+1} = \|x_{k+1} - x_*\| \quad e \quad e_k = \|x_k - x_*\|.$$

Obviamente é desejável que a partir de algum índice k_0, seja verdade que

$$e_{k+1} \leq re_k \tag{2.5}$$

para algum $r \in [0, 1[$.

Definição 2.4.1. *Se (2.5) se verifica para algum $r \in (0, 1)$, diremos que a sequência $\{x_n\}$ converge com ordem linear e taxa não superior a r.*

Definição 2.4.2. *Se*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 0,$$

diremos que a sequência $\{x_n\}$ converge com ordem superlinear.

Definição 2.4.3. *Se $e_{k+1} \leq a(e_k)^p$, onde $a > 0$ e $p > 1$, diremos que a sequência $\{x_n\}$ converge a x_* com ordem não inferior a p. Se $p = 2$, diremos que a convergência é quadrática.*

Capítulo 3

Método de Newton

O método de Newton e suas variações são os mais eficientes métodos conhecidos para resolver sistemas de equações não lineares quando elas são continuamente diferenciáveis, incluindo busca por mínimo local de funções e muitas outras aplicações, é um método iterativo designado a aproximar as raízes de equações não-lineares. Neste capítulo faremos uma breve abordagem sobre o histórico do método, apresentaremos as definições do método de Newton para equações de operadores não-lineares e para a Otimização Irrestrita. O conteúdo deste capítulo é baseado nas referências bibliográficas de Polyak [23] e nas referências de Solodov e Izmailov [28].

3.1 Breve Resumo Histórico

Nesta seção, fazemos uma abordagem sobre o histórico do método de Newton, viabilizando assim, fontes de pesquisa para que o leitor desta dissertação possa se aprofundar mais sobre este assunto. As informações históricas abaixo são baseadas na referência bibliográfica de Polyak [23].

O método definido conforme seção (3.2) foi proposto por Newton em 1669, tratando inicialmente com polinômios. Em 1690 J. Raphson propôs a forma geral do método e é por este fato que o método é conhecido e chamado por Método de Newton-Raphson.(veja Polyak [23]) Segundo Polyak, quando trata em seu artigo sobre o histórico deste método, relata o seguinte:

O progresso no desenvolvimento do método está relacionado a matemáticos famosos como Fourier, Cauchy e outros. Em se tratando de Fourier, ele provou em 1818 que o método converge de forma quadrática na vizinhança de uma raiz, enquanto que Cauchy $(1829, 1847)$ forneceu a extensão multidimensional do método e usou para provar a existência de uma raiz de uma equação. Importantes contribuições para a investigação do método também são devidas a Fine [10] e Bennet [2] que tiveram seus trabalhos publicados em um volume da Proccedings of National Academy of Sciences USA em 1916. Fine mostrou a convergência no caso n-dimensional sem usar a hipótese sobre a existência uma solução. Bennet extendeu este resultado para o caso infinito-dimensional; um fato surpreendente pois os fundamentos de análise funcional ainda não tinham sido criados naquele momento. Em 1948, L.V. Kantorovich [13] publicou um artigo onde foi fornecido uma extensão do método de Newton para espaços de função, este resultado ficou conhecido como, método de Newton-Kantorovich.

Para conhecer mais sobre resultados básicos e outras referências sobre o método de Newton, o leitor desta dissertação pode encontrar nos livros de Ostrowsky [20], Ortega e Rheinboldt [21], Kantorovich e Akylov [12]. Para saber sobre o método de Newton a partir de uma fonte bibliográfica mais recente pode-se encontrar nos livros [7, 22, 24] e nas pesquisas [8, 33] e na internet a partir de um site especial dedicado ao método de Newton [17].

3.2 O Método de Newton

Esta seção tem como finalidade apresentar a definição do método de Newton, analisando seu comportamento a partir de alguns exemplos. Como a convergência do Método de Newton é de natureza local citaremos nesta seção o Teorema de convergência clássica (local) deste método, para funções continuamente diferenciáveis definidas no $\mathbb{R}^n$.

A idéia básica do método de Newton é bastante simples, tal método é introduzido para o problema de achar um $x \in R^n$ tal que

$$F(x) = 0 \tag{3.1}$$

onde $F : R^n \longrightarrow R^n$ é uma função diferenciável não-linear. Seja $x_n \in R^n$ uma aproximação para alguma solução $\overline{x}$ da equação 3.1. Em torno de x_n podemos aproximar (3.1) pela sua linearização $F(x) \approx F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n)$, assim em vez de resolver a equação não-linear (3.1), resolvemos a equação linear

$$F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n) = 0. \tag{3.2}$$

onde $F'(x_n)$ é a matriz Jacobiana. A relação (3.2) chama-se a equação de iteração do método de Newton.

Supondo que $F'(x_n)$ seja não-singular (neste caso, naturalmente, a solução da equação de Newton é única), o método de Newton pode ser escrito em forma do esquema iterativo

$$x_{n+1} = x_n - (F'(x_n))^{-1}F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.3}$$

Observação 3.2.1. *Note que o método de Newton consiste em aproximar o zero da função não-linear por zeros de aproximações lineares sucessivas em uma vizinhança apropriada. Observe também que, para que o método convirja é necessário que o ponto inicial seja tomado próximo da solução do problema em consideração.*
Abaixo, ilustramos o método de Newton no caso unidimensional.

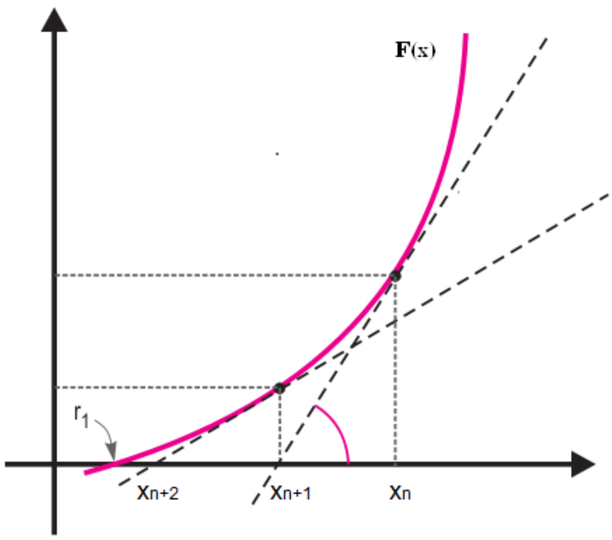

Figura 3.1: Ilustração do Método de Newton a partir de um ponto inicial x_n.

Vejamos alguns exemplos no caso real, para analisar o comportamento do método de Newton para estes casos específicos:

Exemplo 1. *Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = x^3$. Observe que $x_* = 0$ é o único zero de F, a derivada $F'(x) = 3x^2 \neq 0$ se $x \neq 0$ e que para $x_0 \neq 0$*

a sequência de Newton $\{x_n\}$ é dada por

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

ou equivalentemente,

$$x_n = (\frac{2}{3})^n x_0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo, independente da escolha do ponto inicial, a sequência de Newton para resolver $F(x) = 0$ está bem definida e converge para o único zero da função.

Exemplo 2. *Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = x^{1/3}$. Observe que $x_* = 0$ é o único zero de F, F é uma função contínuamente diferenciável em $\mathbb{R} - 0$ e contínua em $\mathbb{R}$. Note também que $F'(x) = (1/3)x^{-2/3} \neq 0$ se $x \neq 0$ e que para $x_0 \neq 0$ a sequência de Newton $\{x_n\}$ é dada por*

$$x_{n+1} = -2x_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

ou equivalentemente,

$$x_n = (-2)^n x_0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo, para todo ponto inicial $x_0 \neq 0$ temos que a sequência de Newton está bem definida e não converge.

Exemplo 3. *Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Observe que $x_* = 0$ é o único zero de F, a derivada de F é*

$$F'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para todo ponto inicial $x_0 \neq 0$, a sequência de Newton $\{x_n\}$ está bem definida e vale

$$x_{n+1} = (-x_n)^3, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

ou equivalentemente,

$$x_n = (-1)^n (x_0)^{3^n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Assim, é fácil ver que: (i) se $\|x_0\| = 1$*, então a sequência de Newton oscila entre os valores* 1 *e* -1*;*

(ii) se $\|x_0\| < 1$*, então a sequência de Newton converge para* $x^* = 0$ *com taxa cúbica;*

(iii) se $\|x_0\| > 1$*, então a sequência de Newton não converge e* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$*.*

Isto mostra que a escolha do ponto inicial é importante para garantir a convergência da sequência de Newton. Se o ponto inicial não for escolhido adequadamente a sequência de Newton pode oscilar ou divergir.

Exemplo 4. *Considere a função* $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$*. Observe que* $x_* = 1$ *é o único zero de* F *e que* $F'(x) = \dfrac{1}{x^2} \neq 0$ *para todo* $x \in (0, +\infty)$*. A sequência de Newton* $\{x_n\}$ *para enontrar a raiz da equação* $F(x) = 0$ *é dada por*

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Neste caso, podemos verificar que:

(i) se $x_0 \geq 2$*, então* $x_1 \notin (0, +\infty)$*. Assim, a sequência de Newton não está bem definida. Neste caso, a boa definição falha porque o método de Newton gera um ponto fora do domínio da função.*

(ii) se $0 < x_0 < 2$*, então a sequência está bem definida e converge para* $x_* = 1$*.*

Portanto, temos que a boa definição da sequência de Newton, bem como sua convergência está condicionada ao ponto inicial ser tomado em um intervalo adequado.

Há casos em que o método de Newton gera um ponto singular da derivada, desta forma, a sequência de Newton $\{x_n\}$ não está bem definida, tome por exemplo a função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^3 - x$.

O teorema seguinte prova de forma satisfatória a convergência da sequência x_n.

Teorema 3.2.1. *(Convergência Local do Método de Newton) Seja* $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *diferenciável numa vizinhança do ponto* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$*, com derivada contínua neste ponto. Seja* $\overline{x}$ *uma solução da equação* (3.1)*, tal que* $detF'(\overline{x}) \neq 0$ *(i.e., a matriz* $F'(\overline{x})$ *é não-singular).*
Então para qualquer ponto inicial $x_0 \in R^n$ *suficientemente próximo a* $\overline{x}$*, o algoritmo do método Newton gera uma sequência* $\{x_n\}$ *bem definida que converge a* $\overline{x}$ *com taxa de convergência superlinear. Se a derivada de* F *é Lipschitz-contínua numa vizinhança de* $\overline{x}$*, então a taxa de convergência é quadrática.*
Demonstração:. Veja Solodov e Izmailov [28] pg. 100.

3.2.1 Método de Newton para Otimização Irrestrita

Nesta subseção faremos uma abordagem sobre o método de Newton em problemas de otimização irrestrita, como segue.
Considere o problema de minimização irrestrita

$$min \;\; f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.4}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável no $\mathbb{R}^n$. Os pontos críticos deste problema são caracterizados pela equação (3.1), onde

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x) = f'(x).$$

Portanto, podemos tentar encontrar pontos críticos de (3.4) aplicando o método de Newton à equação $f'(x) = 0$.
Seja $x_n \in \mathbb{R}^n$ uma aproximação a um ponto crítico $\overline{x}$ do problema (3.4). A aproximação seguinte x_{n+1} é encontrada como solução do sistema de equações lineares

$$f'(x_n) + f''(x_n)(x - x_n) = 0,$$

em relação a $x \in \mathbb{R}^n$. Supondo que $f''(x_n)$ seja não singular para todo n, obtemos o seguinte esquema iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - (f''(x_n))^{-1} f'(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

A principal vantagem do método de Newton é a convergência superlinear. Quanto as desvantagens, citamos dois fatos: o método de Newton tem apenas convergência local e a solução da equação deve ser conhecida ou dada a priori, no entanto este tem a vantagem de dar o raio ótimo da bola de convergência com relação à constante de Likpschitz como poderá ser visto no primeiro resultado principal desta dissertação.
Quando f é uma função quadrática, o método de Newton encontra o único ponto crítico de f em uma iteração.

Capítulo 4

Convergência do Método de Newton em Espaços de Banach

Neste capítulo faremos uma abordagem sobre as condições de Lipschitz tradicional e generalizada e desenvolveremos o primeiro Teorema principal que trata de um método para lidar em condições mais gerais, com o problema de estimar o raio do domínio (bola) de convergência do Método de Newton.
Para isto, daqui em diante, considere o problema de aproximar a solução da equação

$$F(x) = 0 \tag{4.1}$$

do operador linear $F : D \subset X \longrightarrow Y$ onde X e Y são espaços de Banach, utilizando o método de Newton definido por (3.3).

4.1 Condições de Lipschitz

Uma das hipóteses utilizadas nos teoremas principais desta dissertação é que a derivada do operador seja Lipschitz contínua. Nesta seção faremos uma abordagem sobre estas condições presentes nestes resultados.
Sejam X e Y espaços de Banach real ou complexo, $D \subset X$ e $F : D \longrightarrow Y$ um operador. Se o operador $F : D \longrightarrow Y$ satisfaz,

$$\|F(x) - F(x')\| \leq L\|x - x'\|, \qquad \forall x, x' \in D$$

então ele satisfaz a condição (tradicional) de Lipschitz no domínio D com constante L positiva. Para algum tipo de domínio com centro como a bola $B(x_0, r)$ às vezes não é necessário para manter a desigualdade qualquer x, x' no domínio: é apenas necessário manter a desigualdade para qualquer x e para pontos situados no segmento $x^\tau = x_0 + \tau(x - x_0)$ entre x e x_0, onde $(0 \leq \tau \leq 1)$. Vamos nos referir a esta condição especial de Lipschitz, ou seja,

$$\|F(x) - F(x^\tau)\| \leq L\|x - x^\tau\|, \quad \forall x \in B(x_0, r), \quad (0 \leq \tau \leq 1), \tag{4.2}$$

como a condição radial de Lipschitz na bola $B(x_0, r)$ com constante L. Às vezes, se for necessário apenas satisfazer

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq L\|x - x_0\|, \quad \forall x \in B(x_0, r), \tag{4.3}$$

chamaremos de condição central de Lipschitz na bola $B(x_0, r)$ com constante L. Além disso, o L na condição de Lipschitz não precisa ser uma constante, mas uma função integrável positiva. Se este é o caso, então (4.2) e (4.3) serão substituídas respectivamente por

$$\|F(x) - F(x^\tau)\| \leq \int_{\tau\rho(x)}^{\rho(x)} L(u)du, \quad \forall x \in B(x_0, r), \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

e

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq \int_0^{\rho(x)} L(u)du, \quad \forall x \in B(x_0, r),$$

onde $\rho(x) = \|x - x_0\|$ e $L(u)$ é uma função integrável positiva.

O lema abaixo, é obtido diretamente pelo Lema de Banach.

Lema 4.1.1. *Suponha que F tem derivada contínua em $B(\overline{x}, r)$, $F'(\overline{x})^{-1}$ existe e $F'(\overline{x})^{-1}F'$ satisfaz a condição central de Lipschitz com taxa L:*

$$\|F'(\overline{x})^{-1}F'(x) - I\| \leq \int_0^{\rho(x)} L(u)du, \quad \forall x \in B(\overline{x}, r), \tag{4.4}$$

onde L é uma função integrável positiva. Seja r satisfazendo

$$\int_0^r L(u)du \leq 1. \tag{4.5}$$

Então $F'(x)$ é invertível nesta bola e

$$\|F'(x)^{-1}F'(\overline{x})\| \leq \left(1 - \int_0^{\rho(x)} L(u)du\right)^{-1}. \tag{4.6}$$

Demonstração: Observe que de (4.5) e do fato de $\rho(x) < r$ temos, $\|F'(\overline{x})^{-1}F'(x) - I\| \leq \int_0^{\rho(x)} L(u)du < \int_0^r L(u)du \leq 1$,
isto implica que

$$\|F'(\overline{x})^{-1}F'(x) - I\| < 1,$$

Agora, fazendo $T = F'(\overline{x})^{-1}F'(x)$ em (2.1) temos que $[F'(\overline{x})^{-1}F'(x)]^{-1}$ existe e é igual $F'(x)^{-1}F'(\overline{x})$ provando assim a existência de $F'(x)^{-1}$. Como $[\|F'(\overline{x})^{-1}F'(x)\|]^{-1}$ existe, então novamente por (2.1) e por (4.4) temos,

$$\begin{aligned}\|F'(x)^{-1}F'(\overline{x})\| &\leq \frac{1}{1 - \|F'(\overline{x})^{-1}F'(x) - I\|} \leq \frac{1}{1 - \int_0^{\rho(x)} L(u)du} \\ &= \left(1 - \int_0^{\rho(x)} L(u)du\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Portanto vale a desigualdade (4.6). □

Nas aplicações do Lema (4.1.1), frequentemente tomamos $\overline{x} = x^*$, onde x^* é um zero de F.

4.2 Domínio de Convergência do Método de Newton

Nesta seção apresentaremos o primeiro resultado principal desta dissertação que consiste em dar condições mais gerais para estimar o raio ótimo da bola de convergência do método de Newton, conforme Wang [30]. Este resultado é obtido a partir do teorema que segue

Teorema 4.2.1. *Suponha que $F(x^*) = 0$, F tem derivada contínua na bola $B(x^*, r)$, $F'(x^*)^{-1}$ existe e $F'(x^*)^{-1}F'$ satisfaz a condição radial de Lipschitz com taxa L:*

$$\|F'(x^*)^{-1}[F'(x) - F'(x^\tau)]\| \leq \int_{\tau\rho(x)}^{\rho(x)} L(u)du, \tag{4.7}$$

$$\forall x \in B(x^*, r), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

onde $x^\tau = x^* + \tau(x - x^*)$, $\rho(x) = \|x - x^*\|$ e L é não-decrescente. Seja r satisfazendo

$$\frac{\displaystyle\int_0^r L(u)udu}{r\left(1 - \displaystyle\int_0^r L(u)du\right)} \leq 1. \tag{4.8}$$

Então o método de Newton é convergente para todo $x_0 \in B(x^*, r)$ e

$$\|x_n - x^*\| \leq q^{2^n - 1}\|x_0 - x^*\|, \quad n = 1, 2, ..., \tag{4.9}$$

onde

$$q = \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)udu}{\rho(x_0)\left(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)du\right)} \tag{4.10}$$

é menor que 1.

Demonstração: Seja $x_0 \in B(x^*, r)$ arbitrário, onde r satisfaz (4.8). Vamos mostrar que q determinado por (4.10) é menor que 1.
Para este propósito considere a seguinte função real, $\psi(t) = \dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t L(u)udu$, tal função é não-decrescente em relação a t. De fato, para $0 < t_1 < t_2$, temos:

$$\begin{aligned}
\psi(t_2) - \psi(t_1) &= \frac{1}{t_2^2}\int_0^{t_2} L(u)udu - \frac{1}{t_1^2}\int_0^{t_1} L(u)udu \\
&= \left(\frac{1}{t_2^2}\int_0^{t_2} - \frac{1}{t_1^2}\int_0^{t_1}\right) L(u)udu \\
&= \left[\left(\frac{1}{t_2^2}\int_0^{t_1} + \frac{1}{t_2^2}\int_{t_1}^{t_2}\right) - \frac{1}{t_1^2}\int_0^{t_1}\right] L(u)udu \\
&= \left[\frac{1}{t_2^2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2}\right)\int_0^{t_1}\right] L(u)udu
\end{aligned}$$

pela monotonicidade da L,

$$\begin{aligned}
\psi(t_2) - \psi(t_1) &= \left[\frac{1}{t_2^2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2}\right)\int_0^{t_1}\right] L(u)udu \\
&\geq L(t_1)\left[\frac{1}{t_2^2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2}\right)\int_0^{t_1}\right] udu \\
&= L(t_1)\left[\frac{1}{t_2^2}\int_{t_1}^{t_2} udu + \left(\frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2}\right)\int_0^{t_1} udu\right] = 0
\end{aligned}$$

Logo $\psi(t_2) \geq \psi(t_1)$, o que mostra que ψ é não-decrescente. Como $x_0 \in B(x^*, r) \Rightarrow 0 < \rho(x_0) < r$ e por ψ temos

$$\psi(\rho(x_0)) \leq \psi(r) \Rightarrow \frac{1}{(\rho(x_0))^2}\int_0^{\rho(x_0)} L(u)udu \leq \frac{1}{r^2}\int_0^r L(u)udu \quad (I)$$

Observe que, pela condição (4.5) obtemos

$$\frac{1}{1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)du} \leq \frac{1}{1 - \displaystyle\int_0^r L(u)du} \quad (II).$$

Assim de (I) e (II), temos

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)udu}{(\rho(x_0))^2\left(1-\displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)du\right)} \leq \frac{\displaystyle\int_0^{r} L(u)udu}{r^2\left(1-\displaystyle\int_0^{r} L(u)du\right)},$$

e multiplicando por $\rho(x_0)$ ambos os membros da desigualdade anterior, obtemos $q = \frac{\int_0^{\rho(x_0)} L(u)udu}{\rho(x_0)\left(1-\int_0^{\rho(x_0)} L(u)du\right)} \leq \frac{\int_0^{r} L(u)udu}{r^2\left(1-\int_0^{r} L(u)du\right)}\rho(x_0) = \frac{\int_0^{r} L(u)udu}{r\left(1-\int_0^{r} L(u)du\right)}\frac{\rho(x_0)}{r}$
$\leq \frac{\rho(x_0)}{r} < \frac{r}{r} = 1$

Agora, supondo que $x_n \in B(x^*, r)$ e tomando $x^\tau = x^* + \tau(x_n - x^*)$, então por (3.3)

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x^* &= x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n) - x^* = -F'(x_n)^{-1}F(x_n) + x_n - x^* \\
&= F'(x_n)^{-1}[F(x^*) - F(x_n) + F'(x_n)(x_n - x^*))] \\
&= F'(x_n)^{-1}[-(F(x_n) - F(x^*)) + F'(x_n)(x_n - x^*)]
\end{aligned}$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo para caminhos, temos

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x^* &= F'(x_n)^{-1}[-\int_0^1 F'(x^\tau)(x_n - x^*)d\tau + F'(x_n)(x_n - x^*)] \\
&= F'(x_n)^{-1}\int_0^1 -F'(x^\tau)(x_n - x^*)d\tau + F'(x_n)^{-1}F'(x_n)(x_n - x^*)
\end{aligned}$$

Substituindo $F'(x_n)^{-1}F'(x_n)(x_n - x^*)$ por $\int_0^1 F'(x_n)^{-1}F'(x_n)(x_n - x^*)d\tau$, temos

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x^* &= F'(x_n)^{-1}\int_0^1 -F'(x^\tau)(x_n - x^*)d\tau + \int_0^1 F'(x_n)^{-1}F'(x_n)(x_n - x^*)d\tau \\
&= F'(x_n)^{-1}\int_0^1 [F'(x_n) - F'(x^\tau)](x_n - x^*)d\tau \\
&= F'(x_n)^{-1}F'(x^*)\int_0^1 F'(x^*)^{-1}[F'(x_n) - F'(x^\tau)](x_n - x^*)d\tau.
\end{aligned}$$

passando a norma na igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
||x_{n+1} - x^*|| &= ||F'(x_n)^{-1}F'(x^*)\int_0^1 F'(x^*)^{-1}[F'(x_n) - F'(x^\tau)](x_n - x^*)d\tau|| \\
&\leq ||F'(x_n)^{-1}F'(x^*)|| \int_0^1 ||F'(x^*)^{-1}[F'(x_n) - F'(x^\tau)]|| \, ||(x_n - x^*)||d\tau
\end{aligned}$$

Assim por (4.6), condição (4.7) e resolvendo a integral dupla que segue usando a expressão (2.4) do Lema (2.2.1), fica

$$\begin{aligned}
||x_{n+1} - x^*|| &\leq \frac{1}{1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_n)} L(u)du} \int_0^1 \int_{\tau\rho(x_n)}^{\rho(x_n)} L(u)du\rho(x_n)d\tau \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_n)} L(u)udu}{1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_n)} L(u)du}.
\end{aligned}$$

Tomando $n = 0$,
$||x_1 - x^*|| \leq \dfrac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)udu}{1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)du} = q\rho(x_0) = q||x_0 - x^*|| < ||x_0 - x^*|| < r$. Logo $x_1 \in B(x^*, r)$.

Para $n = 1$,

$$\begin{aligned}
||x_2 - x^*|| &\leq \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_1)} L(u)udu}{(\rho(x_1)^2)\left(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_1)} L(u)du\right)}(\rho(x_1))^2 \\
&< \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)udu}{(\rho(x_0)^2)\left(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)du\right)}(\rho(x_1))^2 \\
&= q\frac{(\rho(x_1))^2}{\rho(x_0)} \leq q\frac{q^2(\rho(x_0))^2}{\rho(x_0)} \\
&= q^3||x_0 - x^*|| < ||x_0 - x^*|| < r,
\end{aligned}$$

logo $x_2 \in B(x^*, r)$.

Suponha que seja verdade para $n = k-1$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\|x_k - x^*\| &\leq \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_{k-1})} L(u)udu}{(\rho(x_{k-1}))^2\left(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_{k-1})} L(u)du\right)}(\rho(x_{k-1}))^2 \\
< \cdots &< \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_1)} L(u)udu}{(\rho(x_1)^2)\left(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_1)} L(u)du\right)}(\rho(x_{k-1}))^2 \\
&< \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)udu}{(\rho(x_0)^2)\left(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)du\right)}(\rho(x_{k-1}))^2 \\
&= q\frac{\rho(x_{k-1})^2}{\rho(x_0)} \leq q\frac{(q^{2^{k-1}}\rho(x_0))^2}{\rho(x_0)} \\
&= q\frac{q^{2^k-2}(\rho(x_0))^2}{\rho(x_0)} = q^{2^k-1}\rho(x_0) < \rho(x_0) < r \Rightarrow x_k \in B(x^*, r).
\end{aligned}$$

Para $n = k$ temos, usando a hipótese de indução acima

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\| &\leq \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_k)} L(u)udu}{(\rho(x_k))^2\left(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_k)} L(u)du\right)}(\rho(x_k))^2 \\
&< \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_{k-1})} L(u)udu}{(\rho(x_{k-1}))^2\left(1 - \displaystyle\int_0^{\rho(x_{k-1})} L(u)du\right)}(\rho(x_k))^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)udu}{(\rho(x_0))^2\left(1-\displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)du\right)}(\rho(x_k))^2 \\
&= \frac{q}{\rho(x_0)}(\|x_k - x^*\|)^2
\end{aligned}
$$

Isto implica que

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\| &< \frac{q}{\rho(x_0)}(\|x_k - x^*\|)^2 \leq \frac{q}{\rho(x_0)}(q^{2^k-1}\rho(x_0))^2 \\
&= qq^{2^{k+1}-2}\rho(x_0) = q^{2^{k+1}-1}\rho(x_0) \\
&< \rho(x_0) < r \Rightarrow x_{k+1} \in B(x^*, r).
\end{aligned}
$$

Assim, temos que (3.3) pode ser mantida um número infinito de vezes e por indução matemática, como foi mostrado acima, todos x_n pertencem a $B(x^*, r)$ e a função real $\rho(x_n) = ||x_n - x^*||$ é monótona decrescente.
Portanto para todo $n = 0, 1, 2, ...$ a sequência de iteração do método de Newton está bem definida e temos,

$$
\begin{aligned}
||x_{n+1} - x^*|| &\leq \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_n)} L(u)udu}{1-\displaystyle\int_0^{\rho(x_n)} L(u)du} = \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_n)} L(u)udu}{\rho(x_n)^2\left(1-\displaystyle\int_0^{\rho(x_n)} L(u)du\right)}\rho(x_n)^2 \\
&\leq \frac{\displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)udu}{\rho(x_0)^2\left(1-\displaystyle\int_0^{\rho(x_0)} L(u)du\right)}\rho(x_n)^2 = \frac{q}{\rho(x_0)}\rho(x_n)^2 \\
&= \frac{q}{\rho(x_0)}||x_n - x^*||^2.
\end{aligned}
$$

Desta forma (4.9) segue. □

Capítulo 5

Unicidade de solução de equações em Espaços de Banach

Neste capítulo desenvolveremos o segundo resultado principal desta dissertação que consiste em estimar o raio da bola de unicidade de solução de equações de operadores, apresentaremos também resultados que tratam da otimalidade da estimativa do raio da bola de convergência e da bola de unicidade de solução.

5.1 Domínio de unicidade de solução de equações

Apresentaremos nesta seção, por meio do segundo Teorema principal desta dissertação, uma forma mais geral de lidar com o problema de obter a bola de unicidade de solução de equações, conforme Wang [30].

Teorema 5.1.1. *Suponha que $F(x^*) = 0$, F tem derivada contínua na bola*

$B(x^*, r)$, $F'(x^*)^{-1}$ existe e $F'(x^*)^{-1}F'$ satisfaz a condição central de Lipschitz com taxa L:

$$\|F'(x^*)^{-1}F'(x) - I\| \leq \int_0^{\rho(x)} L(u)du, \ \forall x \in B(x^*, r), \tag{5.1}$$

onde $\rho(x) = \|x - x^*\|$ e L é uma função integrável positiva. Seja r satisfazendo,

$$\frac{1}{r}\int_0^r L(u)(r-u)du \leq 1. \tag{5.2}$$

Então a equação $F(x) = 0$ tem uma única solução x^* na bola $B(x^*, r)$.

Demonstração: Seja $x_0 \in B(x^*, r)$ arbitrário, e considerando a iteração

$$x_{n+1} = x_n - F'(x^*)^{-1}F(x_n), n = 0, 1, 2, ... \tag{5.3}$$

temos,

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= x_0 - F'(x^*)^{-1}F(x_0) - x^* = -F'(x^*)^{-1}F(x_0) + x_0 - x^* \\ &= -F'(x^*)^{-1}[F(x_0) - F(x^*) - F'(x^*)(x_0 - x^*)] \end{aligned}$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo para caminhos, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= -\int_0^1 F'(x^*)^{-1}F'(x^\tau)(x_0 - x^*)d\tau - \int_0^1 I(x_0 - x^*)d\tau \\ &= -\int_0^1 [F'(x^*)^{-1}F'(x^\tau) - I](x_0 - x^*)d\tau, \end{aligned}$$

onde $x^\tau = x^* + \tau(x_0 - x^*)$.

Assim pela condição (5.1) obtemos,

$$\begin{aligned} \|x_1 - x^*\| &\leq \int_0^1 \|[F'(x^*)^{-1}F'(x^\tau) - I]\| \, \|(x_0 - x^*)\|d\tau \\ &\leq \int_0^1 \int_0^{\rho(x^\tau)} L(u)du\|(x_0 - x^*)\|d\tau \\ &= \int_0^1 \int_0^{\rho(x^\tau)} L(u)du\rho(x_0)d\tau. \end{aligned}$$

Observe que $\rho(x^\tau) = \tau\rho(x_0)$,

Então, calculando a integral dupla que segue utilizando a expressão (2.4) do Lema (2.2.1), temos

$$\|x_1 - x^*\| \leq \int_0^1 \int_0^{\tau\rho(x_0)} L(u)du\rho(x_0)d\tau = \int_0^{\rho(x_0)} L(u)(\rho(x_0) - u)du \quad (5.4)$$

Como $L(u) > 0$ temos que a função $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t L(u)(t-u)du$ é monótona crescente em relação a t. De fato para $0 < t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}
\varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} L(u)(t_2-u)du - \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} L(u)(t_1-u)du \\
&= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} L(u)(t_2-u)du + \frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} L(u)(t_2-u)du - \\
&- \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} L(u)(t_1-u)du
\end{aligned}$$

desenvolvendo algebricamente as integrais e colocando $L(u)udu$ em evidência, temos

$$\begin{aligned}
\varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \int_0^{t_1} L(u)du - \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} L(u)udu + \int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \\
&- \frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \int_0^{t_1} L(u)du + \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} L(u)udu \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \left[\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right] L(u)udu
\end{aligned}$$

Pelo fato de $-\dfrac{1}{t_2}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} L(u)udu \geq -\int_{t_1}^{t_2} L(u)du$ e $(\dfrac{1}{t_1} - \dfrac{1}{t_2}) > 0$, temos que.

$$\begin{aligned}
\varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \left[\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right] L(u)udu \\
&\geq \int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1} L(u)udu \\
&= \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\int_0^{t_1} L(u)udu > 0
\end{aligned}$$

Logo, por (5.2),e do fato de $\rho(x_0) < r \Rightarrow \varphi(\rho(x_0)) < \varphi(r)$ obtemos

$$\varphi(\rho(x_0)) = q_0 := \frac{1}{\rho(x_0)} \int_0^{\rho(x_0)} L(u)(\rho(x_0) - u)du$$
$$< \frac{1}{r} \int_0^{r} L(u)(r - u)du \leq 1$$

Assim, por (5.4)

$$q_0\rho(x_0) = \int_0^{\rho(x_0)} L(u)(\rho(x_0) - u)du \geq ||x_1 - x^*||, \text{ que implica}$$

$$\|x_1 - x^*\| \leq q_0\|x_0 - x^*\| \leq \|x_0 - x^*\| \ < r,$$

logo $x_1 \in B(x^*, r)$. Desta forma a iteração 5.3 pode ser mantida infinitamente, e

$$\|x_n - x^*\| \leq {q_0}^n\|x_0 - x^*\|, \quad n = 1, 2, ...$$

Observe que para $n \to \infty$ temos que $\lim {q_0}^n\|x_0 - x^*\| = 0 \Rightarrow \lim \|x_n - x^*\| = 0$. Portanto, $\lim x_n = x^*$. Agora, se x_0 satisfaz $F(x_0) = 0$, temos que $x_n = x_0 \Rightarrow \lim x_n = x_0$. Assim, pela unicidade de limite de sequências temos que $x_0 = x^*$. □

5.2 A otimalidade da estimativa do raio

Nesta seção apresentamos dois teoremas que garantem a otimalidade da estimativa do raio tanto da bola de convergência do método de Newton como o raio da bola em que ocorre unicidade de solução de equações, provado nos Teoremas (4.2.1) e (5.1.1).

Teorema 5.2.1. *Suponha que a igualdade ocorre em (4.8) no Teorema* (4.2.1). *Então o valor de r dado na bola de convergência é o melhor possível. Além* *disso, r depende somente de L, mas é independente de F.*

Demonstração: No Teorema (4.2.1) se r satisfaz a desigualdade (4.8), então para todo $x_0 \in B(x^*, r)$ o método de Newton converge. Agora, quando r é determinado pela igualdade

$$\frac{\displaystyle\int_0^r L(u)udu}{r\left(1 - \displaystyle\int_0^r L(u)du\right)} = 1,$$

e para algum x_0 na fronteira da bola $B[x^*, r]$, podemos observar que existe F satisfazendo (4.7) em $B(x^*, r)$ tal que a iteração de Newton falha. De fato, tomemos como exemplo a seguinte função,

$$F(x) = \begin{cases} x^* - x + \displaystyle\int_0^{x-x^*} (x - x^* - u)L(u)du, & x^* \leq x < x^* + r; \\ x^* - x + \displaystyle\int_0^{x-x^*} (x - x^* + u)L(u)du, & x^* - r \leq x < x^* \end{cases}$$

Supondo $x^* = 0$ e tomando $x_0 = r$, a sequência de Newton $\{x_n\}$ para encontrar o zero da equação $F(x) = 0$ é dada por $x_n = (-1)^n r$ que é uma sequência oscilante entre r e $-r$, mostrando assim que a sequência de Newton falha.

Portanto, a estimativa dada para o valor de r no teorema (4.2.1) é uma estimativa ótima para que o método de Newton convirja qualquer que seja x_0 na bola aberta $B(x^*, r)$ e como pode ser observado pela desigualdade (4.8), r depende somente de L. □

Teorema 5.2.2. *Suponha que a igualdade ocorre em (5.2) do Teorema* (5.1.1)*. Então o valor de r da bola de unicidade é o melhor possível. Além disso, r depende somente de L, mas é independente de F.*

Demonstração: Da mesma forma que foi demonstrado no teorema anterior, quando r é determinado pela igualdade

$$\frac{1}{r}\int_0^r L(u)(r - u)du = 1,$$

existem x' na fronteira da bola $B[x^*, r]$ e F satisfazendo (5.1) em $B(x^*, r)$ tal que $F(x') = 0$. De fato, um exemplo disto é a função utilizada na demonstração do teorema anterior em que $x' = r$ e $x^* = 0$. Logo, a estimativa dada para o valor de r no teorema (5.1.1) é uma estimativa ótima para que se tenha unicidade de solução e como pode ser observado pela desigualdade (5.2), r depende somente de L. $\square$

Capítulo 6

Consequências dos resultados principais

Neste capítulo faremos uma abordagem sobre importantes corolários que estão relacionados aos Teoremas (4.2.1) e (5.1.1), apresentaremos também um estudo sobre a determinação de um zero aproximado.

Antes de apresentar os corolários, observe que:

(i) quando consideramos L uma constante em (4.7) e em (5.1) podemos obter, a partir do cálculo integral, que $r = \dfrac{2}{3L}$ e $r = \dfrac{2}{L}$;

(ii) quando consideramos a função $L(u) = \dfrac{2\gamma}{(1-\gamma u)^3}$ em (4.7) e em (5.1) podemos obter, pelo cálculo integral, que $r = \dfrac{(5-\sqrt{17})}{4\gamma}$ e $r = \dfrac{1}{2\gamma}$.

6.1 Corolários

No estudo do método de Newton a hipótese de que a derivada é Lipschitz-contínua é considerada tradicional. Smale (1997) tem introduzido, em seus últimos trabalhos, a hipótese de analiticidade. Nesta seção veremos como estender a estes dois tipos de hipóteses e trazê-las juntas em uma hipótese uniforme.

Primeiramente, combinaremos os Teoremas (4.2.1) e (5.1.1) com os Teoremas (5.2.1) e (5.2.2) e tomando L como uma constante, os dois seguintes corolários são obtidos diretamente.

Corolário 6.1.1. *Suponha que $F(x^*) = 0$, F tem derivada contínua na bola $B(x^*, r)$, $F'(x^*)^{-1}$ existe e $F'(x^*)^{-1}F'$ satisfaz a condição radial de Lipschitz :*

$$\|F'(x^*)^{-1}[F'(x) - F'(x^\tau)]\| \leq (1-\tau)L\|x - x^*\|,$$

$$\forall x \in B(x^*, r),\ 0 \leq \tau \leq 1,$$

onde L é um número positivo, $x^\tau = x^* + \tau(x - x^*)$ e $r = \dfrac{2}{3L}$. Então o método de Newton é convergente para todo $x_0 \in B(x^*, r)$ e para

$$q = \frac{L\|x_0 - x^*\|}{2(1 - L\|x_0 - x^*\|)}, \tag{6.1}$$

a desigualdade (4.9) segue. Além disso, o valor de r é o melhor possível.'

Demonstração: Para provar este corolário, basta mostrar que

$$q = \frac{L\|x_0 - x^*\|}{2(1 - L\|x_0 - x^*\|)},$$

é menor que 1. Vejamos,

Observe que, utilizando (4.10) no teorema (4.2.1), temos

$$q = \frac{L\|x_0 - x^*\|}{2(1 - L\|x_0 - x^*\|)} \leq \frac{L\displaystyle\int_0^r udu}{r^2\left(1 - L\displaystyle\int_0^r du\right)}\rho(x_0) = \frac{L\dfrac{r^2}{2}}{r^2(1 - Lr)}\rho(x_0) =$$

$$\frac{L}{2(1 - Lr)}\rho(x_0) = \frac{\dfrac{2}{3r}}{2(1 - \dfrac{2}{3r}r)}\rho(x_0) = \frac{\rho(x_0)}{r} < \frac{r}{r} = 1.$$

Assim a desigualdade 4.9 segue e o método de Newton converge, qualquer que seja $x_0 \in B(x^*, r)$. $\square$

Corolário 6.1.2. *Suponha que* $F(x^*) = 0$, *F tem derivada contínua em* $B(x^*, r)$, $F'(x^*)^{-1}$ *existe e* $F'(x^*)^{-1}F'$ *satisfaz a condição central de Lipschitz:*

$$\|F'(x^*)^{-1}F'(x) - I\| \leq L\|x - x^*\|, \qquad \forall x \in B(x^*, r),$$

onde L umé número positivo e $r = \dfrac{2}{L}$. *Então a equação* $F(x) = 0$ *tem uma única solução* x^* *na bola aberta* $B(x^*, r)$. *Além disso o valor de r é o melhor possível e independe de F.*

Observação 6.1.1. *Utilizando a condição de Lipschitz tradicional, o Corolário* (6.1.1) *foi obtido por Traub e Wozniakowski [29] e Wang [32], no entanto o Corolário* (6.1.2) *não é mencionado pela literatura que trata sobre o método de Newton.*

Para os Corolários seguintes, combinaremos os Teoremas (4.2.1) e (5.1.1) com os Teoremas (5.2.1) e (5.2.2), tomando

$$L(u) = \frac{2\gamma}{(1 - \gamma u)^3}$$

Corolário 6.1.3. *Suponha que* $F(x^*) = 0$, *F tem derivada contínua na bola* $B(x^*, r)$, $F'(x^*)^{-1}$ *existe e* $F'(x^*)^{-1}F'$ *satisfaz a condição radial de Lipschitz,* *isto é:*

$$\|F'(x^*)^{-1}[F'(x) - F'(x^* + \tau(x - x^*))]\| \leq \frac{1}{(1-\gamma\|x-x^*\|)^2} - \frac{1}{(1-\tau\gamma\|x-x^*\|)^2}, \quad (6.2)$$

$$\forall x \in B(x^*, r),\ 0 \leq \tau \leq 1,$$

onde γ *é um número positivo e* $r = \dfrac{(5-\sqrt{17})}{4\gamma}$. *Então a sequência gerada pelo método de Newton em (3.3) é convergente para todo* $x_0 \in B(x^*, r)$ *e para*

$$q = \frac{\gamma\|x_0 - x^*\|}{1 - 4\gamma\|x_0 - x^*\| + 2(\gamma\|x_0 - x^*\|)^2},$$

a desigualdade (4.9) segue. Além disso, o valo de r *é o melhor possível e independe de* F.

Demonstração: Como foi feito no Corolário (6.1.1), devemos mostrar que $q = \dfrac{\gamma||x_0 - x^*||}{1 - 4\gamma||x_0 - x^*|| + 2(\gamma||x_0 - x^*||)^2}$ é menor que 1, vejamos.

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\gamma\|x_0 - x^*\|}{1 - 4\gamma\|x_0 - x^*\| + 2(\gamma\|x_0 - x^*\|)^2} \leq \frac{\displaystyle\int_0^r L(u)u\,du}{r^2\left(1 - \displaystyle\int_0^r L(u)du\right)}\rho(x_0) \\
&= \frac{2\gamma\displaystyle\int_0^r \frac{u}{(1-\gamma u)^3}du}{r^2\left(1 - 2\gamma\displaystyle\int_0^r \frac{1}{(1-\gamma u)^3}du\right)}\rho(x_0) = \frac{\dfrac{\gamma r^2}{(1-\gamma r)^2}}{r^2(1 - (\dfrac{1}{(1-\gamma r)^2}))}\rho(x_0) \\
&= \frac{\dfrac{5-\sqrt{17}}{4r}}{\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}}\rho(x_0) = \frac{\rho(x_0)}{r} < \frac{r}{r} = 1.
\end{aligned}$$

Portanto a desigualdade (4.9) segue e o método de Newton converge, qualquer que seja $x_0 \in B(x^*, r)$. □

Corolário 6.1.4. *Suponha que* $F(x^*) = 0$, F *tem derivada contínua na bola* $B(x^*, r)$, $F'(x^*)^{-1}$ *existe e* $F'(x^*)^{-1}F'$ *satisfaz:*

$$\|F'(x^*)^{-1}F'(x) - I\| \leq \frac{1}{(1-\gamma\|x-x^*\|)^2} - 1, \quad \forall x \in B(x^*, r), \quad (6.3)$$

onde γ é um número positivo e $r = \dfrac{1}{2\gamma}$. Então a equação $F(x) = 0$ tem uma única solução x^* na bola berta $B(x^*, r)$. Além disso, o valor de r é o melhor possível e independe de F.

Observação 6.1.2. *Utilizando a hipótese de que F é analítica e satisfaz $\|F'(x^*)^{-1}F^{(k)}(x^*)\| \leq k!\gamma^{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots,$ o Corolário (6.1.3) é provado por Smale [26] e o Corolário (6.1.4) é provado por Dedieu [6] para o valor de $r = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{4\gamma}$, no entanto este r não é melhor raio possível.*

Observação 6.1.3. *Usando os Teoremas (4.2.1) e (5.1.1), obtemos também algumas novas propriedades essenciais sobre a convergencia do método de Newton e a unicidade de soluções de equações. Nos seguintes exemplos, considere c uma constante positiva arbitrária.*

Exemplo 5. *Tomando*

$$L(u) = 2c\gamma(1 - \gamma u)^{-3},$$

obtemos que se o lado direito em (6.2) é substituído por

$$\frac{c}{(1 - \gamma||x - x^*||)^2} - \frac{c}{(1 - \tau\gamma||x - x^*||)^2},$$

temos que

$$r = \frac{3c + 2 - \sqrt{c(9c + 8)}}{2(c + 1)\gamma}$$

e

$$q = \frac{c\gamma||x_0 - x^*||}{1 - 2(c + 1)\gamma||x_0 - x^*|| + (c + 1)(\gamma||x_0 - x^*||)^2}.$$

Se o lado direito em (6.3) é substituído por

$$\frac{c}{(1 - \gamma||x - x^*||)^2} - c,$$

então

$$r = \frac{1}{(c + 1)\gamma}.$$

Exemplo 6. *Tomando*

$$L(u) = 2c\gamma(1-\gamma u)^{-3/2},$$

obtemos que se o lado direito em (6.2) é substituído por

$$\frac{c}{\sqrt{1-\gamma||x-x^*||}} - \frac{c}{\sqrt{1-\tau\gamma||x-x^*||}},$$

Então

$$r = \frac{\sqrt{3(c-1)^2+16c}-(3c-1)}{2(c+1)\gamma}$$

e

$$q = \frac{c\gamma||x_0-x^*||}{2-(c+2)\gamma||x_0-x^*||+(2-(c+1)\gamma||x_0-x^*||)\sqrt{1-\gamma||x_0-x^*||}}.$$

Se o lado direito em (6.3) é substituído por

$$\frac{c}{\sqrt{1-\gamma||x-x^*||}} - c,$$

então

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}, & se \quad c \leq 1 \\ \\ \dfrac{4c}{(c+1)^2}, & se \quad c > 1. \end{cases}$$

Exemplo 7. *Tomando*

$$L(u) = \frac{c\gamma}{2}(1-\gamma u)^{-1/2},$$

obtemos que se o lado direito em (6.2) é substituído por

$$c\sqrt{1-\tau\gamma||x-x^*||} - c\sqrt{1-\gamma||x-x^*||},$$

então

$$r = \frac{1}{2\gamma}\left\{\sqrt{\frac{3}{c}+\left(\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{c}\right)\right)^4} - \left(\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{c}\right)\right)^2\right\}$$

e

$$q = \frac{c}{3}\frac{1-\sqrt{1-\gamma||x_0-x^*||}+\gamma||x_0-x^*||}{1+\sqrt{1-\gamma||x_0-x^*||}-c\gamma||x_0-x^*||}.$$

Se o lado direito em (6.3) é substituído por $c(1-\sqrt{1-\gamma||x-x^*||})$, *então*

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}, & se \quad c \leq 3, \\ \dfrac{1}{\gamma}\left\{\dfrac{3}{8}+\dfrac{9}{4c}-\dfrac{9}{8c^2}-\sqrt{\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{9}{4c}-\dfrac{9}{8c^2}\right)^2-\dfrac{3}{c}}\right\}. & se \quad c > 3. \end{cases}$$

6.2 Aplicações para a determinação de um zero aproximado

Smale [25] primeiramente propôs a definição de um zero aproximado do método de Newton. Posteriormente verificou-se que tal propriedade, não abrangia a propriedade de convergência quadrática do Método de Newton e não foi conveniente aplicar no estudo de zeros da complexidade computacional. Assim, ele propôs novas definições de aproximação de zeros de dois tipos(Smale [26]), o segundo tipo de definição para aproximação de zeros é dado em suas novas obras(Blum e outros, [3]; Smale [27]). A definição que segue é baseada na definição da seção (2.3).

Definição 6.2.1. *Se $x_0 \in X$ tal que a iteração de Newton (3.3) para $F : D \subset X \longrightarrow Y$ está bem definida e (4.9) é satisfeita para $q = \frac{1}{2}$, então x_0 é chamado de zero aproximado do zero adjunto x^* de F.*

Pelo exemplo 5 da seção (6.4), calculando δ a partir da equação

$$q = \frac{c\delta}{1-2(c+1)\delta+(c+1)\delta^2}$$

encontramos

$$\delta = \frac{(2q+1)(c+1) - 1 - \sqrt{c(2q+1)^2(c+1) - 1}}{2q(c+1)}. \tag{6.4}$$

Assim, temos o seguinte Teorema,

Teorema 6.2.1. *Suponha que* $F(x^*) = 0$, *F tem derivada contínua em* $B(x^*, \frac{\delta}{\gamma})$, $F'(x^*)^{-1}$ *existe e* $F'(x^*)^{-1}F'$ *satisfaz:*

$$\|F'(x^*)^{-1}[F'(x) - F'(x^* + \tau(x - x^*))]\| \leq \frac{c}{(1-\gamma\|x-x^*\|)^2} - \frac{c}{(1-\tau\gamma||x-x^*||)^2},$$

$$\forall x \in B(x^*, \frac{\delta}{\gamma}),\ 0 \leq \tau \leq 1, \tag{6.5}$$

onde c, γ *e q são números positivos com* $0 < q < 1$ *e* δ *é determinado por (6.4). Se* x_0 *satisfaz*

$$\gamma||x_0 - x^*|| < \delta, \tag{6.6}$$

então o método de Newton (3.3) está bem definido e (4.9) é satisfeita. Em particular, se

$$\gamma||x_0 - x^*|| < \frac{2c + 1 - \sqrt{c(4c+3)}}{c+1},$$

x_0 *é um zero aproximado do zero adjunto* x^*.

Quando F é analítica em $B(x^*, \frac{\delta}{\gamma})$, a condição (6.5) é satisfeita por F tal que,

$$\|\frac{1}{n!}F'(x^*)^{-1}F^n(x^*)\| \leq c\gamma^{n-1}, \quad n \leq 2. \tag{6.7}$$

Na verdade, usando (6.7) temos

$$\|F'(x^*)^{-1}F''(x^*)\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c\gamma^{n-1}\|x-x^*\|^{n-2} = \frac{2c\gamma}{(1-\gamma\|x-x^*\|)^3}.$$

Assim (6.5) segue.

Tomando $c = 1$, então para $q = \frac{1}{2}$, (6.4) dá o valor

$$\delta = \frac{3 - \sqrt{7}}{2},$$

que foi obtido por Smale [26].

Além de $q = \frac{1}{2}$, há outras opções para q (veja Chen [5]). Mas q deve ser fixado caso contrário a convergência quadrática uniforme desparece e a definição é a mesma que a de Smale [25].

Além de $c = 1$, há também outras opções para c. Uma combinação interessante entre c e q pode dar um resultado muito simples. Na verdade, se c é tomado como

$$c = \frac{1 - 2q + q^2}{1 + 2q - q^2}$$

na condição (6.5) ou (6.7) no Teorema (6.2.1), então o δ no lado direito de (6.6), que é determinado por (6.4), pode ser tomado como

$$\delta = q.$$

Desta forma, temos o seguinte corolário,

Corolário 6.2.1. *Suponha que $f(x^*) = 0$, F é analítica em $B(x^*, 1/\gamma), F'(x^*)^{-1}$ existe e para algum $q \in (0,1)$ temos*

$$\|\frac{1}{n!}F'(x^*)^{-1}F^n(x^*)\| \leq \frac{1 - 2q + q^2}{1 + 2q - q^2}\gamma^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Se x_0 satisfaz

$$\gamma\|x_0 - x^*\| < \gamma\|x_0 - x^*\| < q,$$

então o método de Newton (3.3) está bem definido e (4.9) é satisfeita. Em particular, se

$$\|\frac{1}{n!}F'(x^*)^{-1}f^n(x^*)\| \leq \frac{\gamma^{n-1}}{7}$$

e

$$\gamma\|x_0 - x^*\| < \frac{1}{2},$$

x_0 é um zero aproximado do zero adjunto x^*.

Os exemplos 6 e 7 da seção (6.4) também dão outras formas para o limite no lado direito de (6.7) que pode ser aplicado ao estudo de complexidade computacional. Por exemplo, o exemplo 6 dá uma bola de convergência do método de Newton sob a condição

$$\|\frac{1}{n!}F'(x^*)^{-1}F^n(x^*)\| \leq 2\frac{(2n-3)!}{2n!}c\gamma^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Capítulo 7

Teorema da Função Inversa em Espaço de Banach

Na única seção deste capítulo, faremos um estudo da menor estimativa exata para o raio da bola $B(F(x_0), \varepsilon) \subset Y$ (domínio) onde o Teorema da função inversa (local) para o operador linear F é verificado. O conteúdo deste capítulo é baseado em Wang [31].

7.1 O domínio da Função Inversa

De acordo com o Teorema da Inversão Local citado na seção (2.1), existe uma função inversa $F_{x_0}^{-1}$ definida em alguma bola aberta $B(F(x_0), \varepsilon) \subset Y$ com as seguintes propriedades:

(i) $F_{x_0}^{-1}(F(x_0)) = x_0$, $F(F_{x_0}^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B(F(x_0), \varepsilon) \subset Y$;

(ii) $F_{x_0}^{-1}$ é diferenciável.

Para desenvolver os resultados desta seção, assumiremos que F tem derivada contínua na bola $B(x_0, r)$, $F'(x_0)^{-1}$ existe e $F'(x_0)^{-1}F'$ satisfaz a condição central de Lipschitz com taxa L,

$$\|F'(x_0)^{-1}F'(x) - I\| \leq \int_0^{\rho(x)} L(u)du, \quad \forall x \in B(x_0, r), \tag{7.1}$$

onde $\rho(x) = \|x - x_0\|$ e L é uma função integrável positiva no intervalo $(0, r)$. Pelo Lema de Banach, quando $r_0 \leq r$, para todo $x \in B(x_0, r_0)$, $F'(x)^{-1}$ existe e

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\| \leq \frac{1}{1 - \int_0^{\rho(x)} L(u)du}, \tag{7.2}$$

onde r_0 satisfaz

$$\int_0^{r_0} L(u)du = 1.$$

Teorema 7.1.1. *Suponha que $r \geq r_0$ e $b = \int_0^{r_0} L(u)udu$. Então sob as hipóteses da condição (7.1), temos*

$$B\left(F(x_0), \frac{b}{\|F'(x_0)^{-1}\|}\right) \subset F(B(x_0, r_0)),$$

e na bola aberta à esquerda, $F_{x_0}^{-1}$ existe e é diferenciável. Além disso, o raio da bola é o melhor possível.

O teorema anterior será provado a partir dos seguintes resultados:

Lema 7.1.1. *Seja*

$$h(t) = \beta - t + \int_0^t L(u)(t - u)du, \quad 0 \geq t \geq R,$$

onde R satisfaz

$$\frac{1}{R}\int_0^R L(u)(R - u)du = 1.$$

Então quando $0 < \beta < b$, h é monótona decrescente em $[0, r_0]$, e monótona crescente em $[r_0, R]$ e

$$h(\beta) > 0, \; h(r_0) = \beta - b < 0, \; h(R) = \beta > 0.$$

Além disso, h tem um único zero em cada intervalo, denotados por r_1 e r_2. Eles satisfazem

$$\beta < r_1 < \frac{r_0}{b}\beta < r_0 < r_2 < R. \tag{7.3}$$

Demonstração: É óbvio pelo sinal de $h'(t) = -1 + \int_0^t L(u)du$ que h(t) é monótona por partes. Pela positividade de L, vemos que em relação a t $\varphi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t L(u)(t-u)du$ é monótona crescente. De fato, para $0 < t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned}
\varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} L(u)(t_2-u)du - \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} L(u)(t_1-u)du \\
&= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} L(u)(t_2-u)du + \frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} L(u)(t_2-u)du - \\
&- \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} L(u)(t_1-u)du \\
&= \int_0^{t_1} L(u)du - \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} L(u)udu + \int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \\
&- \frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \int_0^{t_1} L(u)du + \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} L(u)udu \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \left[\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right] L(u)udu.
\end{aligned}$$

Pelo fato de $-\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} L(u)udu \geq -\int_{t_1}^{t_2} L(u)du$ e $(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}) > 0$, temos que.

$$\begin{aligned}
\varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \left[\frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1}\right] L(u)udu \\
&\geq \int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \int_{t_1}^{t_2} L(u)du - \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)\int_0^{t_1} L(u)udu \\
&= \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\int_0^{t_1} L(u)udu > 0
\end{aligned}$$

Assim temos, $\beta < r_1 = h(r_1) + r_1 = \beta + \varphi(r_1)r_1 < \beta + \varphi(r_0)r_1 = \beta + \frac{1}{r_0}\int_0^{r_0} L(u)(r_0-u)du.r_1 = \beta + r_1 - \frac{b}{r_0}r_1$. □

Por este lema, o teorema (7.1.1) implica em uma proposição mais precisa, como segue abaixo. Para este propósito, vamos supor que a desigualdade (7.1) pode ser estendida para a fronteira, isto é,

$$\|F'(x_0)^{-1}F'(x) - I\| \leq \int_0^{\rho(x)} L(u)du, \ \forall x \in \overline{B(x_0, r)}. \tag{7.4}$$

Proposição 7.1.1. *Suponha que $r \geq r_1$ e $0 < \beta < b = \int_0^{r_0} L(u)udu$, onde r_1 é determinado pelo lema* (7.1.1). *Então, sob as hipóteses da condição (7.4),*

$$\overline{B\left(F(x_0), \frac{\beta}{\|F'(x_0)^{-1}\|}\right)} \subset F(\overline{B(x_0, r_0)}),$$

e na bola fechada à esquerda $F_{x_0}^{-1}$ existe, é diferenciável e suas derivadas $F_{x_0}^{-1}(y) = F'(x)^{-1}$ em $y = F(x)$ satisfaz (7.2). Além disso, na bola fechada da imagem, o raio r_1 é o menor possível.

Demonstração: Escolha arbitrariamente

$$y \in \overline{B\left(F(x_0), \frac{\beta}{\|F'(x_0)^{-1}\|}\right)}, \tag{7.5}$$

consideremos duas sequências $x_n \subset X$ e $t_n) \subset R$, dadas respectivamente por

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_0)^{-1}(F(x_n) - y), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{7.6}$$

e

$$t_{n+1} = t_n + h(t_n), \quad t_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Primeiramente, pelo fato de que $h(t) + t$ é monótona crescente com relação a t e $t_0 = 0 < t_1 = \beta < r_1$, temos por indução que t_n é monótona crescente em relação a t e é menor que r_1. Assim t_n converge para r_1.

Então por indução, para todo n provaremos que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n. \tag{7.7}$$

Por (7.3) e (7.5),

$$\|x_1 - x_0\| = \|x_0 - (F'(x_0))^{-1}(F(x_0) - y) - x_0\| \leq \|(F'(x_0))^{-1}\|.\|F(x_0) - y\| \leq \beta = t_1 - t_0 < r_1.$$

Assim (7.7) é verdade para $n = 0$. Agora suponha que (7.7) seja válida até algum $n-1$. Para $0 \leq \tau \leq 1$, defina

$$x_{n-1+\tau} = x_{n-1} + \tau(x_n - x_{n-1}) \ \ e \ \ t_{n-1+\tau} = t_{n-1} + \tau(t_n - t_{n-1}).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} x_{n-1+\tau} - x_0 &\leq \|x_1 - x_0\| + \|x_2 - x_1\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \tau\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \ldots + (t_{n-1} - t_{n-2}) + \tau(t_n - t_{n-1}) \\ &= t_{n-1+\tau} - t_0 = t_{n-1+\tau} < r_1 \leq r. \end{aligned}$$

Deste modo, pela igualdade

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= -F'(x_0)^{-1}(F(x_n) - y) = -F'(x_0)^{-1}F(x_n) + F'(x_0)^{-1}y \\ &= -F'(x_0)^{-1}F(x_n) + F'(x_0)^{-1}(F(x_{n-1}) + F'(x_0)(x_n - x_{n-1})) \\ &= -F'(x_0)^{-1}[F(x_n) + F(x_{n-1})] - F'(x_0)^{-1}F'(x_0)(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo para caminhos, temos

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= -F'(x_0)^{-1}\int_0^1 F'(x_{n-1} + \tau(x_n - x_{n-1}))(x_n - x_{n-1})d\tau - I(x_n - x_{n-1}) \\ &= -\int_0^1 [F'(x_0)^{-1}F'(x_{n-1+\tau}) - I](x_n - x_{n-1})d\tau \end{aligned}$$

passando a norma na igualdade anterior, fica

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \| - \int_0^1 [F'(x_0)^{-1}F'(x_{n-1+\tau}) - I](x_n - x_{n-1})d\tau\| \\ &\leq \|\int_0^1 F'(x_0)^{-1}F'(x_{n-1+\tau}) - I\|\|(x_n - x_{n-1})\|d\tau \end{aligned}$$

e por (7.1), obtemos

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \int_0^1 \int_0^{\rho(x_{n-1+\tau})} L(u)du\|(x_n - x_{n-1})\|d\tau \\ &= \int_0^1 \int_0^{\|x_{n-1+\tau} - x_0\|)} L(u)du\|(x_n - x_{n-1})\|d\tau \\ &\leq \int_0^1 \int_0^{t_{n-1+\tau}} L(u)du(t_n - t_{n-1})d\tau \end{aligned}$$

resolvendo a integral dupla que segue usando a expressão (2.4) do Lema (2.2.1), temos

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &\leq \int_0^1 \int_0^{t_{n-1+\tau}} L(u)du(t_n - t_{n-1})d\tau \\
&= \int_0^{t_n} L(u)(t_n - u)du - \int_0^{t_{n-1}} L(u)(t_{n-1} - u)du \\
&= t_{n+1} - t_n.
\end{aligned}$$

Isto mostra que (7.7) vale para todo n. □

A desigualdade (7.7) indica que a sequência x_n é de Cauchy, conforme o lema (2.1.1), e portanto é convergente. Tomando o limite com $n \to \infty$ em ambos os lados de (7.6), vemos que $\lim x_n = x$ satisfaz

$$F(x) = y \tag{7.8}$$

Também, já que $\|x_n - x_0\| < r_1$, temos

$$x = F_{x_0}^{-1}(y) \in F(\overline{B(x_0, r_1)}).$$

Por esta razão temos que provar que x satisfazendo (7.8) é único na bola fechada. Isto será mostrado com a prova da próxima proposição. Finalmente, a diferenciabilidade da função inversa segue por (7.2).

Observação 7.1.1. *Exceto para a diferenciabilidade da função inversa, a proposição acima é também verdade para $\beta = b$.*

Além da proposição (7.1.1), temos a seguinte proposição, que é chamada de o teorema da separação de ramo.

Proposição 7.1.2. *Suponha que $r_1 \leq r < r_2$ e $0 < \beta < b$, onde r_1, r_2 e b são determinados pelo lema* (7.1.1) *e teorema* (7.1.1)*. Então sob a condição (7.4),*

$$\overline{B\left(F(x_0), \frac{\beta}{\|F'(x_0)^{-1}\|}\right)} \bigcap F(B(x_0, r_0) \setminus \overline{B(x_0, r_1)}) = \emptyset.$$

Demonstração: Escolha arbitrariamente

$$y \in B\left(F(x_0), \frac{\beta}{\|F'(x_0)^{-1}\|}\right), \quad x'_0 \in B(x_0, r), \tag{7.9}$$

isto implica que $\|F(x_0) - y\| < \dfrac{\beta}{\|F'(x_0)^{-1}\|}$.

Seja

$$x'_{n+1} = x'_n - F'(x_0)^{-1}(F(x'_n) - y), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$t'_{n+1} = t'_n + h(t'_n), \quad t'_0 = \|x'_0 - x_0\|, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Assim

$$\begin{aligned} x'_{n+1} - x_{n+1} &= x'_n - F'(x_0)^{-1}(F(x'_n) - y) - x_n - F'(x_0)^{-1}(F(x_n) - y) \\ &= x'_n - x_n - F'(x_0)^{-1}F(x'_n) + F'(x_0)^{-1}y + F'(x_0)^{-1}F(x_n) - F'(x_0)^{-1}y \\ &= x'_n - x_n - F'(x_0)^{-1}(F(x'_n) - F(x_n)) \end{aligned}$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo para caminhos, temos

$$\begin{aligned} x'_{n+1} - x_{n+1} &= I(x'_n - x_n) - \int_0^1 F'(x_0)^{-1}(F'(x_n + \tau(x'_n - x_n))(x'_n - x_n)d\tau \\ &= \int_0^1 I(x'_n - x_n)d\tau - \int_0^1 F'(x_0)^{-1}(F'(x_n + \tau(x'_n - x_n))(x'_n - x_n)d\tau \\ &= -\int_0^1 (F'(x_0)^{-1}F'(x_n + \tau(x'_n - x_n)) - I)(x'_n - x_n)d\tau. \end{aligned}$$

Assim, procedendo como na prova de (7.7) temos que

$$\|x'_n - x_n\| \le t'_n - t_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Consequentemente, x'_n também é convergente e $\lim x'_n = x = \lim x_n$. Portanto, existe somente um $x \in \overline{B(x_0, r_1)}$ na bola aberta $B(x_0, r)$ que satisfaz (7.8). $\square$

Observação 7.1.2. *A prova das Proposições* (7.1.1) *e* (7.1.2) *podem ser vistas como provas dos teoremas de existência e unicidade sobre a solução da equação $F(x) = y$, e as hipóteses (7.5) e (7.9) podem ser substituídas por*

$$\|F'(x_0)^{-1}(F(x_0) - y)\| \leq \beta.$$

Consequentemente, juntando $y = 0$ e $\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| = \beta$, temos o seguinte teorema

Teorema 7.1.2. *Seja $\beta = \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq b$. Assuma que $r_1 \leq r < r_2$ se $\beta < b$, ou $r = r_1$ se $\beta = b$, onde r_1, r_2 e b são determinados pelo Lema* (7.1.1) *e Teorema* (7.1.1). *Então sob a condição (7.4), a equação (4.1) tem uma única solução*

$$x^* \in \overline{B(x_0 - F'(x_0)^{-1}F(x_0), r_1 - \beta)} \subset \overline{B(x_0, r_1)}$$

na bola fechada $\overline{B(x_0, r)}$.

Considerações Finais

Esta dissertação faz um estudo detalhado das estimativas exatas para o raio da bola de convergência do método de Newton e da bola de unicidade de solução de equações em espaços de Banach, acrescentamos ainda um estudo sobre uma estimativa para o raio da bola em que o teorema da função inversa se aplica. Este estudo segue as idéias abordadas nos trabalhos de Wang [30, 31]. A partir dos resultados desenvolvidos neste estudo, foi apresentada condições mais gerais para lidar com estas questões. Observamos que a estimativa para o raio $r = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4\gamma}$ obtida por Smale [26], e a estimativa do raio $r = 2/(3L)$ obtida, independentemente, por Traub e Wozniakowsky [29] e Wang [32] são garantidas como consequências dos principais Teoremas apresentados nesta dissertação.

Além de ser útil na análise do domínio de convergência do método de Newton e do domínio de unicidade de solução, os resultados apresentados nesta dissertação e suas consequências são também úteis no estudo da Teoria de Complexidade Computacional [27] e melhoram importantes resultados relacionados às premissas de Kantorovich [12, 13] e Smale [26].

Concluímos esta dissertação enfatizando sua importância no sentido de que os resultados obtidos por Wang na referência [30] unificam resultados anteriormente obtidos por Traub e Wozniakowsky [29], Wang [32], Smale [26] e

Dedieu [6] tornando-os assim casos particulares deste trabalho. Outro fato relevante, é que o artigo de Wang [30] desenvolvido nesta dissertação serve de base para que o estudo sobre a análise de convergência do método de Newton e suas modificações e o estudo da unicidade de solução de equações de operadores se estendessem para outros espaços, como é o caso da pesquisa de Ferreira e Svaiter [9] que faz uma análise de convergência do método de Newton em variedades Riemanniana

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti, A. e Prodi, G., A Primer of Nonlinear Analysis. Published by the Press Syndicate of the University of Cambridge, 1993.

[2] Bennet, A.A. Newton's method in general analysis, Proceedings of National Academy of Sciences, USA 2 (10), pp. 592-598, 1916.

[3] Blum, L., Cucker, F., Shub, M. and Smale, S. Complexity and real computation, part II: some geometry of numerical algorithms.Preprint, City University of Hong Kong, 1996.

[4] Blum, L., Cucker, F., Shub, M. and Smale, S. Complexity and real computation. New York: Springer, 1997.

[5] Chen Pengyuan, Approximate zeros of quadratically convergent algorithms. Math. Comput. 63, pp. 247-270, 1994.

[6] Dedieu, J. P. Estimations for the separation number of a polynomial system. J. Simbolic Comput 24, pp. 683-693, 1999.

[7] Deulfhard, P. Newton Methods for Nonlinear Problems: Affine Invariant and Adaptive Algorithms, Springer, Berlin, 2004.

[8] Ferreira O. P. Local convergence of Newton's mathod in space Banach from the viewpoint of the majorant principle. IMA Journal of Numerical Analysis 29, pp. 746-759, 2008.

[9] Ferreira O. P., Svaiter, B. F. Kantorovich's Theorem on Newton's Method in Riemannian Manifolds. Journal of Complexity, vol 18, 1. pp. 304-329, 2002.

[10] Fine, H. , On Newton's method of approximation, Proceedings of National Academy of Sciences, USA 2 (9), pp. 546-552, 1916.

[11] Friedlander, A., Elementos de Programação Não-Linear. Ed. UNICAMP, Campinas-SP, 1994.

[12] Kantorovich, L. V., Akilov, G. P., Functional Analysis, Nauka, Moscou, 1977.

[13] Kantorovich, L. V., On Newton's method for functional equations, Doklady AN SSSR 59 (7), pp. 1237-1240, 1948.

[14] Krantz, S. G., Parks, H. R., The impliciti function theorem: history, theory and applications, Boston, Birkhauser, 2002.

[15] Kolmogorov, A. N. e Fomin, S. V., Elementos da teoria das funções e de análise funcional, Moscou, 1982.

[16] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, vol. 2, 11. ed., Rio de Janeiro, 2009.

[17] Mathews, J. M., Bibliography for Newton's Method. Available from: <http://math.fullerton.edu/mathews/newtons-method/Newton'sMethodBib/Links/Newton'sMethodBib_lnk_3.html>

[18] Moser, J., A new techniques for the construction of solutions of nonlinear differential equations, Proc. Nat. Acad. sci. USA, 47 , pp. 1824-1831, 1961

[19] Nesterov, Y. and Nemirovskii, A. Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, SIAM Studies in Applied Mathematics, 13, Philadelphia, (1994).

[20] Ostrowski, A. M., Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press, Basel, 1960.

[21] Ortega, J. M., Rheinboldt, W. C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York-London, 1970.

[22] Peitgen, H. O., (Ed.), Newton's Method and Dynamical Systems, Springer, Berlim, 1989.

[23] Polyak, B.T., Newton's method and its use in optimization, European Journal of Operational Research 181, pp. 1086-1096 2007.

[24] Rheinboldt, W. C., Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations, SIAM, Philadelphia, 1998.

[25] Smale, S. The fundamental theorem of algebra and complexity theory. Bull. AMS 4, pp. 1-36, 1981.

[26] Smale, S. Newton's method estimates from data at one point. The Merging of Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics (R. Ewin, K. Gross and C. Martin, eds). New York: Springer, pp 185-196, 1986.

[27] Smale, S. Complexity theory and numerical analysis. Acta Numer. 6, 523-551, 1997.

[28] Solodov, M., e Izmailov,A., *Otimização : Métodos Computacionais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada , vol. 2, Rio de Janeiro, 2007.

[29] Traub, J. F. and Wozniakowki, H. Convergence and Complexity of Newton iteration, J. Assoc. Comput. Math. 29, pp. 250-258, 1979.

[30] Wang Xinghua. Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space, IMA Journal of Numerical Analysis. 20, pp. 123-134, 2000.

[31] Wang Xinghua. Convergence of Newton's method and inverse function theorem in Banach space. Math. Comput. 68, pp. 169-186, 1999.

[32] Wang Xinghua. The convergence on Newton's method. KeXue Tong-Bao(A Special Issue of Mathematics, Physics and Chemistry) 25, pp. 36-37, 1980

[33] Ypma, T. J., Historical Development of the Newton-Raphson method, SIAM Review 37 (4) , pp. 531-551, 1995.