



Universidade Federal do Amazonas
Faculdade de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**Equalização Adaptativa Utilizando Seleção de Dados
em Transceptores em Bloco com Redundância
Reduzida**

Mauro Lopes de Freitas

Manaus – Amazonas
Setembro de 2014

Mauro Lopes de Freitas

**Equalização Adaptativa Utilizando Seleção de Dados
em Transceptores em Bloco com Redundância
Reduzida**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Controle e Automação de Sistemas.

Orientador: D. Sc. Eddie Batista de Lima Filho

Co-orientador: D. Sc. Wallace Alves Martins

Mauro Lopes de Freitas

**Equalização Adaptativa Utilizando Seleção de Dados
em Transceptores em Bloco com Redundância
Reduzida**

Banca Examinadora

Prof. Dr. Wallace Alves Martins – Presidente e Co-orientador
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Jozias Parente de Oliveira
Universidade Estadual do Amazonas

Prof. Dr. Celso Barbosa Carvalho
Universidade Federal do Amazonas

Manaus – Amazonas

Setembro de 2014

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

L864e Lopes de Freitas, Mauro
 Equalização Adaptativa Utilizando Seleção de Dados em
 Transceptores em Bloco com Redundância Reduzida / Mauro
 Lopes de Freitas. 2014
 108 f.: il. color; 29,7 cm.

 Orientador: D. Sc. Eddie Batista de Lima Filho
 Coorientador: D. Sc. Wallace Alves Martins
 Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade
 Federal do Amazonas.

 1. Transceptores multicanais. 2. redundância reduzida. 3. Set-
 membership affine projection. 4. equalização adaptativa. I. Lima
 Filho, D. Sc. Eddie Batista de II. Universidade Federal do
 Amazonas III. Título

Aos meus pais e minha esposa.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me ajudar a conseguir todas as minhas vitórias.

Agradeço à minha mãe, Lucimar Lopes de Freitas, por estar sempre do meu lado, nos momentos de vitória e derrota, e cujo amor é incondicional. Ao meu pai, Mauro Marques de Freitas, por ter me acompanhado nessa jornada e à minha esposa, Izabel de Oliveira Fernandes, por sua paciência, compreensão, ajuda e pelo seu amor.

Agradeço aos meus amigos e colegas de mestrado da UFAM e da COPPE/UFRJ, pela amizade e pela força nas longas horas de estudo.

Agradeço aos amigos e ex-colegas de graduação da UFAM, pela amizade e companheirismo.

Agradeço aos Profs. Waldir Sabino, Eddie Batista e Lucas Cordeiro, pelo suporte, direcionamento, encorajamento e amizade essenciais para a realização desse trabalho. Agradeço ao Prof. Wallace Martins pela oportunidade em fazer parte desta pesquisa, pelos ótimos conselhos e direcionamentos durante minha estadia na UFRJ.

*“Magic is just science that we don’t
understand yet”.*

Arthur C. Clarke (1917-2008)

Resumo

Atualmente, os transceptores multicanais baseados em blocos são largamente utilizados em sistemas de comunicação sem fio, muito devido a sua estrutura bem definida e ao *blockwise encoding*. A respeito dos principais problemas encontrados em aplicações móveis, podemos destacar a interferência entre blocos, em decorrência da superposição de cópias atrasadas do sinal, a qual é usualmente eliminada com a adição de uma quantidade de redundância entre blocos de dados adjacentes. Adicionalmente, a equalização é comumente aplicada para mitigar o efeito do canal. Entretanto, a quantidade de redundância pode estar superestimada, abrindo oportunidade para a utilização de transceptores multicanais super-rápidos e com redundância reduzida, que possuem como característica uma alta eficiência espectral e baixa complexidade computacional. Entretanto, a abordagem super-rápida ainda possui uma alta complexidade para atualizar os coeficientes de equalização e a maioria das arquiteturas propostas não utilizam metodologias visando à redução do número de operações. O trabalho atual trata este problema e propõe uma nova arquitetura para transceptores multicanais com transmissão em blocos, que se utiliza de uma equalização semi-cega com seleção de dados, além da abordagem generalizada, baseadas em transformadas rápidas de Fourier e matrizes diagonais. Os resultados das simulações demonstram que a abordagem permite atualizar menos de 60% dos coeficientes de equalização durante o período supervisionado e não supervisionado de equalização e manter a taxa de saída competitiva para sistemas monoportadora e multiportadora.

Palavras-chave: Transceptores multicanais, redundância reduzida, *Set-membership affine projection*, equalização adaptativa.

Abstract

Currently, block-based transceivers are widely used in wireless communication systems, mostly due to their welldefined structure and blockwise encoding. Among the main challenges encountered by mobile applications, there is an inherent interblock interference, due to superpositions of delayed signal copies, which is commonly eliminated with the addition of redundancy between adjacent data blocks. In addition to that, channel equalization is also usually employed, in order to further mitigate channel interferences. However, the amount of redundancy may be overestimated, which opens an opportunity for reduced-redundancy superfast transceivers, whose features include high spectral efficiency and low computational cost. Although the superfast approach aims at achieving low complexity, equalizer-coefficient updates are still very complex tasks due to channel variations, and most designs do not employ methodologies for computational-effort reduction. The present work addresses this problem and proposes a new design strategy for block-based transceivers, which provides semi-blind equalization with data-selective update, besides the possibility of a generalized approach, based on the fast Fourier transform and diagonal matrices. Simulation results show that our approach updates less than 60% of the equalizer coefficients during supervised and blind period and maintain a competitive throughput for single-carrier and multicarrier transmissions.

Keywords: transceivers, reduced redundancy, set-membership affine projection, adaptive semi-blind equalization.

Conteúdo

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Motivação	4
1.2 Propósito do Trabalho	5
1.3 Organização da Dissertação	6
2 Tranceptores como banco de filtros	8
2.1 Processamento Multitaxa e Multicanais	8
2.2 Banco de Filtros	11
2.3 Transceptores Multicanais	13
2.4 Representação Polifásica	15
2.5 Transceptores em Bloco	24
2.5.1 Sistemas <i>Zero-Padded</i>	26
2.5.2 Transceptores em Bloco com Redundância Reduzida	26
2.6 Considerações Finais	31
3 Processamento Adaptativo de Sinais	32
3.1 Teoria de Estimação de Conjunto	32
3.2 <i>Set-Membership Affine Projection</i> (SM-AP)	33
3.2.1 <i>Set-Membership Filtering</i>	33
3.2.2 Algoritmo SM-AP Complexo	37
4 Transceptores Super-Rápidos em Bloco com Redundância Reduzida	42

4.1	Sistemas com Redundância Reduzida	42
4.2	Representação de Matrizes Estruturadas	43
4.3	Abordagem por <i>Displacement-Rank</i>	47
4.4	Desenvolvendo as Matrizes de Recepção	50
4.5	Sistemas Multiportadoras baseados em DFT	56
4.6	Sistemas Monoportadora Baseados em DFT	57
4.7	Equalização Semi-Cega	57
4.8	Aplicando a Equalização Semi-Cega com seleção de dados em transceptores em blocos com redundância reduzida	59
4.9	Generalização do Número de Ramos do Transceptor	66
4.10	Análise de Complexidade	70
5	Simulações de Sistemas Transceptores com Equalização Adaptativa Proposta	72
5.1	Simulação Monoportadora	75
5.2	Simulação Multiportadora	81
6	Conclusões	85
6.1	Sugestões de Trabalhos Futuros	86
	Bibliografia	87
A	Publicações	93
A.1	Referentes a outras Pesquisas	93

Lista de Figuras

2.1	(a) Operador interpolação; (b) Operador decimação.	9
2.2	(a) Módulo do sinal no domínio da frequência; (b) representação do sinal após operação de decimação. (c) após a interpolação.	11
2.3	Mudança de taxa de amostragem.	11
2.4	(a) Identidade nobre para o interpolador e (b) para o decimador no domínio do tempo.	12
2.5	Banco de Análise e Síntese.	13
2.6	(a) Sem sobreposição; (b) sobreposição marginal; (c) com sobreposição ou <i>aliasing</i>	14
2.7	Transceptor Multicanal segmentado pelos bancos de síntese e análise.	14
2.8	Transceptor multicanal no domínio do tempo.	15
2.9	(a) Processo de convolução do filtro de síntese com sinal de entrada interpolado no instante $n = 0$; (b) $n = 1$; (c) $n = 2$; (d) $n = M$	17
2.10	Chave seletora e sua equivalência utilizando atrasos e mudança de taxa de amostragem.	18
2.11	Transceptor Multicanal.	20
2.12	Transceptor Multicanal com canal pseudocirculante.	21
2.13	Efeito da interferência sobre o sinal transmitido.	24
2.14	(a) Diagrama em blocos da operação de <i>zero padding</i> ; (b) representação do sinal de entrada $s(n)$, separado em dois blocos de tamanho M ; (c) sinal $w(n)$ com redundância nula; (d) representação da saída $x(n)$ demonstrando a interferência sofrida nos elementos referentes a redundância, após a operação de filtragem.	27
3.1	Sistema de filtragem adaptativa.	34

3.2	Conjunto de restrições para a variável $\mathbf{w}(k)$ no caso bidimensional.	36
3.3	Interpretação geométrica do conjunto Ψ_0^k	36
3.4	Interpretação geométrica de $\Psi_{k-1}^{k-1} \cap \Psi_{k'}^k$, onde a atualização do coeficiente não pertence a essa interseção.	37
3.5	Interpretação geométrica de $\Psi_{k-1}^{k-1} \cap \Psi_{k'}^k$, onde a atualização do coeficiente do erro a posteriori é constante.	41
4.1	Sistema em blocos da equalização semi-cega.	59
4.2	Arquitetura proposta com 4 ramos do transceptor com redundância reduzida e seletividade de dados.	66
4.3	Arquitetura do transceptor multicanal generalizada.	69
5.1	Canal original e modificado após 200 transmissões de blocos.	74
5.2	Taxa de bits [Mbps] \times SNR [dB] do cenário 1; (a) utilizando uma taxa de atualização para quando mais de 10% dos equalizadores de \mathbf{X}_1 são atualizados e (b) quando esse valor é 20%.	77
5.3	Taxa de atualização \times SNR [dB] para o cenário 1: (a) e (b) representam a taxa de atualização durante o período supervisionado, (c) e (d) são os resultados para o período não supervisionado dos equalizadores \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 , respectivamente.	78
5.4	<i>Throughput</i> [Mbps] \times SNR [dB] of Scenario 1: transmissão monoportadora utilizando 4 ramos e com uma taxa de atualização entre os banco de equalizadores de 10% e com pequenas variações no canal.	79
5.5	<i>Throughput</i> [Mbps] \times SNR [dB] para o cenário 2: Transmissão monoportadora utilizando solução generalizada com 6 ramos e taxa de atualização entre os banco de equalizadores de 10%.	79
5.6	MSE [dB] \times número de blocos: demonstração da taxa de convergência através do uso de 6 ramos, uma taxa de atualização entre os bancos de equalizadores de 10%, $K = 27$ and SNR igual a 16 dB.	80
5.7	<i>Throughput</i> [Mbps] \times SNR [dB] para o cenário 2: monoportadora utilizando 6 ramos e taxa de atualização de 10% para os equalizadores e o canal com pequenas variações.	80

5.8	<i>Throughput</i> [Mbps] \times SNR [dB] no cenário 3: (a) e (b) representam os resultados de um sistema monoportadora utilizando o fato que 10% dos coeficientes do equalizador externo precisam ser modificados para atualizarmos o banco externo. É utilizado $P_k = 1$; 4 e 6 ramos, respectively.	82
5.9	<i>Throughput</i> [Mbps] \times SNR [dB] no cenário 4: Simulação para multiportadora utilizando 12 ramos e uma taxa de 20% para a relação entre os equalizadores. (a) $P_k = 0$ e (b) $P_k = 1$	83
5.10	Taxa de atualização \times SNR [dB] no cenário 4: Simulação com transmissão multiportadora utilizando 12 ramos e $P_k = 1$. (a) e (b) representam a taxa de atualização durante o período supervisionado. (c) e (d) representam a taxa de atualização durante o período não supervisionado do banco de equalizadores X_1 e X_2 , respectivamente.	84
5.11	<i>Throughput</i> [Mbps] \times SNR [dB] do cenário 4: Transceptor multicanal generalizado com 12 ramos, $P_k = 1$ utilizando pequenas variações no canal. . . .	84

Lista de Tabelas

4.1	Número de operações complexas relacionadas ao processo de equalização, durante o estágio de recepção.	70
4.2	Número de operações complexas relacionadas ao procedimento de atualização, durante o estágio de recepção.	71

Capítulo 1

Introdução

Análises de mercado [1] estimam um crescimento no número de usuários e do tráfego de dados em comunicações móveis nos próximos anos. Esta tendência se deve, entre outros fatores, à nova geração de sistemas móveis, à proliferação de sistemas de alta velocidade e ao aumento da comunicação entre máquinas [1, 2]. Melhorias nos sistemas de comunicação modernos tornam-se cada vez mais necessárias com o intuito de transportar o máximo de informação possível por um meio físico de forma confiável.

Em sistemas sem fio, que irradiam a energia eletromagnética no ar através de antenas, podemos destacar como fator limitante da capacidade do sistema o próprio espectro eletromagnético. O espectro é um recurso finito regulado pelos governos [3], em sua maioria, com o intuito de que vários serviços possam coexistir sem interferências. Logo, busca-se uma melhor eficiência ao se utilizar esse recurso, pois deve-se evitar o aumento da alocação de faixas de frequências a medida que os sistemas necessitem de mais capacidade. Esta necessidade provém, muitas vezes, da incapacidade de incorporar novas faixas espectrais sem causar interferência com os serviços já existentes.

Manter a complexidade computacional baixa é fator determinante no custo de um novo sistema, logo, visando uma menor complexidade computacional, a capacidade de verificar a importância dos dados em um mundo com cada vez mais informação tem se tornado essencial, fato conhecido como *seleção de dados*. Essa metodologia posteriormente gerou *filtros com seleção de dados* [4, 5], sendo responsáveis por selecio-

nar quais informações são mais relevantes a partir do estado atual do sistema, o que possibilita o descarte de informações caso se tenha atingido um nível em que o ganho com a utilização da nova informação seja pequeno para os parâmetros de projeto. Essa propriedade reduz os custos computacionais, energéticos e geram consequente barateamento dos sistemas, pois o sistema não precisa processar tais informações, mas mantendo o desempenho do sistema satisfatório.

Podemos adicionar a esses filtros com seleção de dados a capacidade de ajuste durante o tempo, conhecido como processo de aprendizagem e assim criar *filtros adaptativos com seleção de dados*. Essa nova categoria de filtros é um meio efetivo para a melhoria da camada física de sistemas de comunicações. É também interessante por ser flexível, o que permite seu emprego em sistemas de comunicações, a fim de torná-los robustos a erros ou retirar a necessidade de reprojeter o sistema a cada variação ocorrida, mantendo a complexidade computacional reduzida.

Interferências e distorções geradas pelo meio de transmissão são um dos principais problemas enfrentados para se melhorar a eficiência espectral [6, 7]. A degradação do sinal ocorre devido à superposição dos sinais transmitidos, que são agrupados em blocos. Há dois principais efeitos que causam interferência: a interferência entre símbolos (do inglês, *intersymbol interference*) e a interferência entre blocos (IBI, do inglês, *interblock interference*). Objetivando a eliminação ou a redução do efeito de superposição dos blocos, técnicas como OFDM (do inglês, *orthogonal frequency-division multiplex*) [8, 6] e SC-FD (do inglês, *single-carrier frequency-domain equalizer*) [9, 6] foram desenvolvidas e constituem os transceptores multicanais (do inglês, *transmultiplexer*) em blocos sem memória LTI (do inglês, *linear time-invariant*) mais conhecidos.

Os transceptores multicanais, OFDM e SC-FD, enquadram-se como ótimos exemplos de sistemas de transmissão digitais pois são utilizados amplamente. O OFDM se destaca em transmissões digitais de rádio como o sistema europeu DAB (sigla do inglês, *digital audio broadcasting*) [10, 11], em redes sem fio baseados no padrão IEEE 802.11x [12, 13]. Ele é utilizado em muitos sistemas de transmissões de televisão digital, em especial podemos destacar o Sistema Brasileiro de Televisão Digital (SBTVD) e em sistemas de transmissão com fio xDSL (do inglês, *high-speed digital subscriber line*) [14, 15]. Está presente em sistemas 3G-LTE na conexão direta (do inglês, *downlink con-*

nection) enquanto que sistemas SC-FD são representados, por exemplo, na conexão reversa (em inglês, *uplink connection*).

Porém, em sistemas OFDM são conhecidas algumas desvantagens como a sensibilidade ao CFO (sigla do inglês, *carrier-frequency offset*) e um alto PAPR (sigla do inglês, *peak-to-average power ratio*) e por isso SC-FD tem recebido atenção dos pesquisadores ao remediar os problemas citados sem aumentar consideravelmente a complexidade computacional, e por utilizar a mesma quantidade de banda para transmissão de dados [16, 17, 18]. Ambos os sistemas inserem uma quantidade de redundância na transmissão, a qual permite a diminuição dos efeitos do canal, entretanto, reduz a transmissão efetiva de dados. Por este motivo, deve-se diminuir ao máximo esta redundância inserida, mantendo a taxa de transmissão dentro dos parâmetros de projeto. Em um modelo de canal com memória $L \in \mathbb{N}$, foi mostrado em [19, 20, 21] que a mínima redundância para que se obtenha reconstrução perfeita do sinal transmitido é $\lceil L/2 \rceil$. Vários tipos de redundâncias podem ser inseridas, como a inclusão de zeros (do inglês, *zero padding*) ou suas derivações, como o ZP-ZJ (sigla do inglês, *zero padding zero-jamming*).

Em conjunto com os transceptores multicanais com redução da redundância, é possível a realização da equalização adaptativa com seleção de dados, aquela que emprega algoritmos adaptativos com seleção de dados. Entretanto, estes algoritmos normalmente necessitam de um período de treinamento, o que reduz o número de símbolos contendo dados efetivamente, em decorrência da necessidade de símbolos piloto ou de referência. Outra possibilidade consiste em uma equalização cega, mas esta possui uma complexidade maior e uma pior convergência em geral [22]. Percebeu-se que é possível fazer a combinação da equalização cega e do período de treinamento gerando uma solução que representa o compromisso entre a complexidade computacional e a eficiência espectral desejada, gerando a equalização semi-cega [23, 24].

Apenas alguns trabalhos adotaram algoritmos super-rápidos, ou seja, aqueles que empregam algoritmos que requerem $\mathcal{O}(m \log^d m)$ computações, sendo $d \leq 3$ [25], enquanto reduzem a quantidade de redundância [26, 27], se utilizando do fato de que um menor número de redundância tem o potencial de ser benéfico para a taxa de transmissão e que a quantidade desta redundância pode estar superestimada. Devemos

destacar o trabalho [28] que apresenta transceptores multiportadoras em bloco com redundância reduzida (MCRRBT, do inglês, *multicarrier reduced-redundancy block transceivers*) e transceptores monoportadoras em bloco com redundância reduzida (SCRRBT, do inglês, *singlecarrier reduced-redundancy block transceivers*) sendo considerado o estado da arte neste tema. Isoladamente, a seleção de dados também já foi utilizada na equalização de modulações QAM [29], e na utilização de sistemas subotimos (aqueles que utilizam somente parte de suas estruturas objetivando redução computacional) [30, 6].

1.1 Motivação

Algoritmos adaptativos são empregados em diversos aparelhos eletrônicos, desde brinquedos, celulares a microfones modernos, sendo sua implementação mais conhecida o cancelamento de ruído. Este tipo de algoritmo pode ser utilizado em diversas outras soluções de problemas modernos, como redução de ruído, predição de sinal e equalização, sendo esta última a qual focaremos.

A equalização possui um importante papel em qualquer sistema de comunicação moderno. Transceptores super-rápidos, monoportadora e multiportadora com redundância reduzida possuem um papel importante na melhoria da eficiência espectral ao tentar reduzir a quantidade de informação extra inserida durante a transmissão, porém estes possuem equalização com complexidade assintótica total igual a $\mathcal{O}(M \log_2^2 M)$ [31, 32]. Apesar dos avanços, essa complexidade pode ser proibitiva para a implementação desses sistemas, além da estimação do canal, que é anterior ao processo de equalização em si, a qual degrada a eficiência da transmissão.

Durante muito tempo, equalizadores lineares foram os mais utilizados devido a sua simplicidade computacional. Com o advento de sistemas computacionais cada vez mais rápidos, equalizadores não lineares tem ganhado força, sendo um desses os equalizadores adaptativos. Equalizadores baseados em algoritmos adaptativos possuem instruções para que os coeficientes dos filtros sejam atualizados, mas diferentemente dos problemas de otimização, eles não possuem condição de parada [4, 33, 29]. Com o advento de sistemas móveis dependentes do baixo consumo de energia, realizarmos a redução da energia para a atualização dos coeficientes. A atualização tem

um valor fixo de energia gasto a cada iteração, o que deve ser evitado. É esperado que, com o passar das iterações, o sistema ganhe conhecimento e necessite de uma menor quantidade de iterações futuras. É exatamente isso que sistemas com seleção de dados fazem, realizam uma verificação se a entrada oferece informações suficientes para uma atualização e salvam energia que seria despendida quando julgam não ser necessário uma atualização, sem falar na redução de complexidade obtida.

Como exemplo, o transceptor multicanal proposto com equalização possuindo seleção de dados consegue uma redução de mais de 50% após um período que consideramos de estado estacionário, em que a entrada do sistema já possui uma menor influência sobre as atualizações como será visto durante este trabalho. Resumindo, a utilização da seletividade de dados com sistemas de comunicação baseados em redundância reduzida tem enorme apelo prático pela baixa complexidade.

1.2 Propósito do Trabalho

Esse trabalho tem por objetivo a utilização de transceptores super-rápidos MCR-RBT e SCRRBT com equalização adaptativa e seleção de dados. Os transceptores utilizados possuem como característica o emprego, em sua estrutura, de algoritmos baseados em FFT (do inglês, *fast Fourier transform*) [34, 35], considerados menos complexos que tradicionais transceptores em bloco sem memória lineares e invariantes no tempo, objetivando a melhoria da taxa de transmissão. Mas estes algoritmos, que possuem equalizadores baseados em ZF (do inglês, *zero forcing*) [6, 7] e MMSE (do inglês, *minimum mean squared error*) [6, 7] estão limitados por possuírem um custo computacional relativamente alto para a estimação do canal, necessária ao problema de equalização, o que restringe sua aplicação. Quando comparados aos sistemas MCRRBT e SCRRBT anteriores, os transceptores propostos possuem as seguintes características:

- Complexidade computacional menor para o projeto dos equalizadores;
- Taxa de erro de bits similar;
- *Throughput* competitivo para canais com resposta ao impulso longa.

Logo, para atingir esses objetivos este trabalho possui duas contribuições principais: Primeiramente, a proposta de um transceptor multicanal com redundância reduzida com baixo custo computacional para a etapa de cálculo dos coeficientes do equalizador. Para isso, utilizou-se algoritmos adaptativos com seleção de dados na equalização, tais como SM-AP (do inglês, *set-membership affine projection*) e suas derivações. A importância desse algoritmo está em sua baixa complexidade computacional inerente à atualização dos coeficientes, mas que possuam a capacidade de acompanhar variações ocorridas no canal e retirar o efeito proveniente dele na degradação dos símbolos transmitidos. Esta abordagem permite que os coeficientes sejam atualizados tanto no período supervisionado, ou seja, quando os símbolos recebidos são símbolos pilotos, quanto durante o período de equalização cega e se beneficiando das características de baixa complexidade computacional e, conseqüentemente, menor consumo de energia, conforme ficará mais claro durante a dissertação.

A segunda mudança proposta consiste de uma nova estrutura de transceptor com redundância reduzida e que utiliza *zero-padding zero-jamming*. A estrutura permite o aumento dos ramos de equalização, em relação ao que foi proposto em [61]. Esta proposta permite a utilização das estruturas super-rápidas originais que são constituídas por FFT e IFFT (sigla do inglês, *inverse fast Fourier transform*), além de matrizes diagonais, com a vantagem de aumentar a velocidade de convergência e permitir uma melhora na taxa efetiva de dados, além da possibilidade de distribuir a carga computacional através da arquitetura em paralelo que o sistema possui.

1.3 Organização da Dissertação

A introdução apresenta os objetivos e motivações da pesquisa feita durante a realização desse trabalho. O restante dos capítulos estão divididos da seguinte forma:

O Capítulo 2, *Transceptores como Banco de Filtros*, apresenta uma revisão dos conceitos básicos necessários a utilização de transceptores multicanais, tais como operações de mudanças de taxas, blocos de síntese e análise, e representação polifásica.

O Capítulo 3, *Processamento de Adaptativo de Sinais*, introduz ao leitor uma visão geral do funcionamento de algoritmos adaptativos, em seguida, aborda a teoria de es-

timação de conjunto e o algoritmo SM-AP, principal algoritmo utilizado na equalização adaptativa desta dissertação.

O Capítulo 4, *Transceptores Super-Rápidos em Bloco com Redundância Reduzida*, apresenta o processo de criação dos transceptores lineares e invariantes no tempo super-rápidos que utilizam uma menor quantidade de redundância em sua transmissão [6, 28]. São demonstradas as mudanças realizadas nesse sistema com o intuito de utilizar a abordagem de equalização adaptativa com seleção de dados, ao fazer uso de equalização semi-cega. Também é demonstrada uma nova abordagem, em que a quantidade de ramos dos transceptores é incrementada e é feita uma análise comparativa entre as complexidades de sistemas.

O Capítulo 5, *Simulações de Sistemas Transceptores com Equalização Adaptativa*, apresenta as simulações realizadas para comprovar o funcionamento da abordagem proposta para sistemas monoportadora e multiportadora.

Por fim, o Capítulo 6, *Conclusões*, apresenta as contribuições do trabalho, além de apresentar sugestões de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Tranceptores como banco de filtros

2.1 Processamento Multitaxa e Multicanais

Alguns sistemas operam em diferentes taxas. Note que, nestes casos, os sinais são gerados por meio do incremento ou da diminuição da taxa de amostragem. Normalmente, esta mudança na taxa de amostragem é realizada por meio da inserção de elementos nulos ou eliminação de amostras dos sinais. Matematicamente, isto pode ser feito da seguinte maneira: considere as amostras de um sinal de entrada analógico $x_a(n_1T_1)$, onde $n_1 \in \mathbb{N}$ e $T_1 \in \mathbb{R}$ é o período de amostragem. O operador mudança de taxa, denominado \mathcal{T} , produz o sinal de saída analógico $y_a(n_2T_2) = \mathcal{T}\{x(n_1T_1)\}$, sendo $n_2 \in \mathbb{N}$ e $T_2 \in \mathbb{R}$ o novo período de amostragem. Usualmente, o fator de mudança de taxa $M = T_1/T_2$ é um número racional [34, 36, 37, 38].

Os operadores de decimação e interpolação são comumente utilizados na mudança da taxa de amostragem. Em uma breve descrição, podemos comentar que a interpolação consiste na inserção de $M - 1$ valores nulos entre as amostras, o que resulta em um sinal M vezes maior e a decimação, por um fator M , produz a redução da taxa de amostragem, criando um sinal M vezes menor que o original ao eliminar $M - 1$ amostras. Os diagramas em blocos para decimação e interpolação estão representado na Figura 2.1.

O operador de decimação pode ser descrito matematicamente como segue: podemos considerar um sinal digital $x_a(nT_s) = x(n)$, sendo T_s o período de amostragem, da seguinte forma:

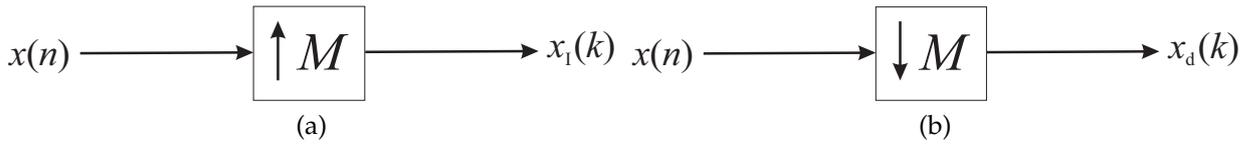


Figura 2.1: (a) Operador interpolação; (b) Operador decimação.

$$x(n) = \{ x_0 \ x_1 \ \dots \ x_M \ x_{M+1} \ x_{M+2} \ \dots \} \quad (2.1)$$

posteriormente, podemos representar matematicamente a operação de decimação como $x_d(n) = x(Mn)$, de forma que a operação de decimação sobre esse sinal utilizando um fator M resulta em

$$x_d(n) = \{ x_0 \ x_M \ x_{2M} \ x_{3M} \ x_{4M} \ \dots \} \quad (2.2)$$

Perceba que esta operação seleciona os M -ésimos elementos do sinal $x(n)$. Vale ressaltar que a decimação é variante no tempo [34, 39]. Assim considerando \mathcal{D} o operador de deslocamento, temos $\mathcal{D}_M\{x(m)\} = x_d(n)$, logo $\mathcal{D}_M\{x(m-k)\} \neq x_d(n-l)$.

A descrição matemática do operador interpolação pode ser feita, analogamente, da seguinte maneira: supondo que o mesmo sinal de entrada $x(n)$ seja interpolado por um fator M , temos que o sinal interpolado resultante, denominado $x_I(n)$, é igual a:

$$x_I(n) = \{ x_0 \ \mathbf{0}_{1 \times (M-1)} \ x_1 \ \mathbf{0}_{1 \times (M-1)} \ x_2 \ \dots \} \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{0}_{1 \times (M-1)}$ representa um vetor de tamanho $M-1$ contendo valores nulos. Perceba que o sinal $x_I(n)$ possui as amostras de $x(n)$ em instantes múltiplos de M . Dessa forma, podemos escrever matematicamente que $x_I(n) = x(n/M)$. Em outras palavras, caso a divisão n/M seja um valor inteiro, $x_I(n)$ terá o valor de $x(n/M)$ ou 0 caso contrário.

Sinais com mudanças em sua taxa de amostragem podem ser analisados no domínio da frequência. Para representar estes sinais neste domínio, podemos usar a transformada de *Fourier* de tempo discreto (DFTF), representada pelo operador \mathcal{F} . Considerando um sinal qualquer $x(n)$, sua transformada será igual a: $\mathcal{F}\{x(n)\} = X(e^{j\omega})$. Portanto, um sinal decimado no tempo $x_d(n)$ resulta na seguinte relação na frequência [34, 40]:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega-2i\pi)/M}) \quad (2.4)$$

Adicionalmente, a interpolação de um sinal $x(n)$ no tempo produz, no domínio da frequência, a seguinte representação:

$$X_I(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega M}) \quad (2.5)$$

As mudanças que os sinais originais sofrem após as operações de mudanças de taxa podem ser percebidas se considerarmos as representações gráficas das equações (2.4) e (2.5) ilustradas pela Figura 2.2. Pode ser visto que a interpolação resulta em uma contração e na geração de um número maior de repetições espectrais, enquanto a decimação cria uma expansão espectral no domínio da frequência. Esta expansão pode causar a sobreposição das imagens espectrais ou *aliasing* [35, 34], que está indicado por uma seta na Figura 2.2(b). É um efeito indesejado ocasionado devido a perda de amostras no tempo em decorrência da decimação e que pode originar a impossibilidade de recuperação dessas informações se a quantidade de amostras suprimidas for suficientemente grande.

A recuperação de sinais decimados e interpolados pode ser feita se considerarmos alguns aspectos. Primeramente, com relação a decimação, note que os sinais passa-baixa devem ser limitados a banda de $\frac{\pi}{M}$ antes de usar a técnica de decimação para que seja possível sua recuperação, como pode ser visto na Figura 2.3. Isso evita que o sinal ultrapasse a frequência digital π após a decimação e assim ocorra sobreposição entre os espectros adjacentes. Com relação a interpolação, é sempre possível recuperar esses sinais e os filtros são utilizados para eliminar as imagens espectrais do sinal repetidas na frequência.

Para implementação de sistemas que utilizam a mudança de taxa é vantajoso que as operações não ocorram em altas taxas, o que obriga os sistemas a realizarem um maior número de operações em um menor tempo. Propriedades que comutam a filtragem e a mudança de taxa de amostragem tem sido utilizadas com esse objetivo, conhecidas como identidades nobres [34, 36] e seus diagramas em bloco podem ser observados na Figura 2.4. Veja que esta propriedade comuta os blocos de forma que a interpolação seja realizada após a filtragem, ou seja, o aumento da taxa de amostra-

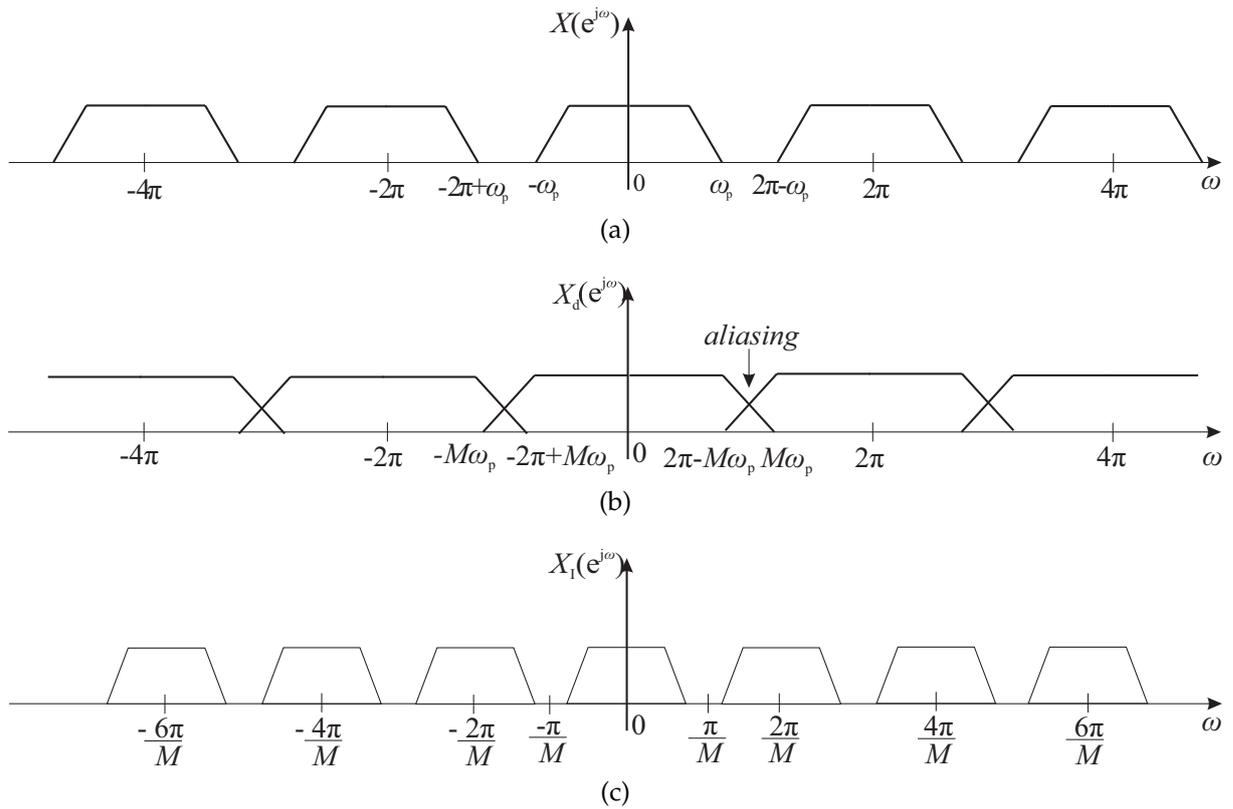


Figura 2.2: (a) Módulo do sinal no domínio da frequência; (b) representação do sinal após operação de decimação. (c) após a interpolação.

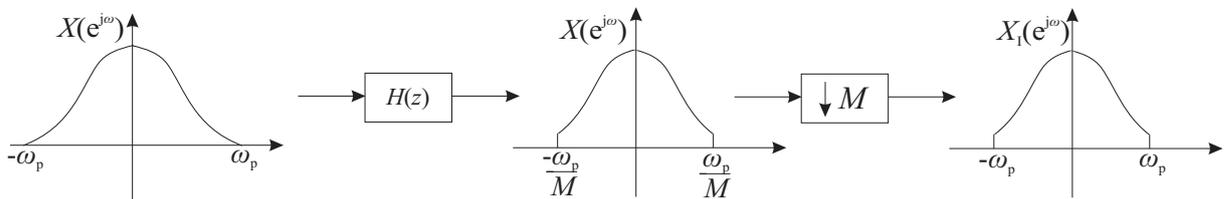


Figura 2.3: Mudança de taxa de amostragem.

gem é realizado após as operações. Analogamente, a identidade nobre permite que a filtragem ocorra após a diminuição da taxa de amostragem na operação de decimação, características consideradas vantajosas.

2.2 Banco de Filtros

A estrutura em banco de filtro, foi proposta primeiramente por Portnoff [41] ao usar a técnica STFT (do inglês, *short time Fourier transform*), um caso específico de sistemas tempo-frequência baseado em banco de filtros. Se desconsiderarmos este caso, podemos dizer que os primeiros banco de filtros foram sistemas TDM/FDM (do inglês,

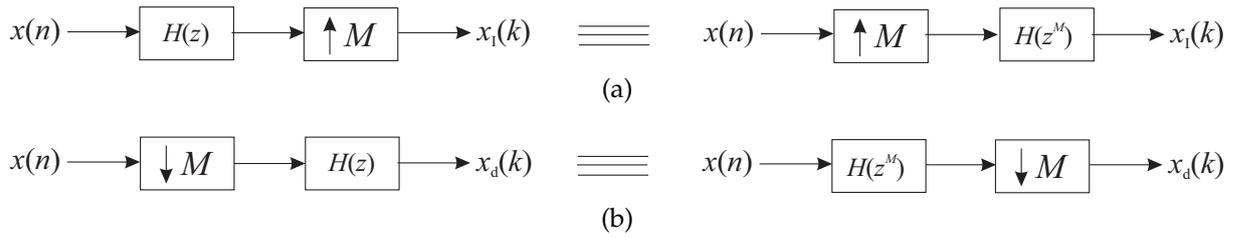


Figura 2.4: (a) Identidade nobre para o interpolador e (b) para o decimador no domínio do tempo.

time domain multiplexing/frequency domain multiplexing) [42] e os primeiros trabalhos de processamento de voz na frequência [43].

Uma estrutura em banco de filtros é formada por blocos de interpolação e decimação em conjunto com filtros de subbandas, resultando no sistema apresentado na Figura 2.5. Este sistema é composto por duas estruturas básicas denominadas por banco de análise e síntese. O banco de análise é o sistema que decompõe o sinal através da série de filtros $g_m(n)$ onde $m = \{0, 1, \dots, M - 1\}$ e $M \in \mathbb{N}$. O sistema aplica cada filtro em uma parcela do espectro do sinal $x(n)$ e, em seguida, decima o sinal para uma taxa M vezes mais baixa, gerando os sinais $x_m(n)$ que, em conjunto, formam a subbanda do sinal $x(n)$. Esses filtros possuem sua importância ao retirarem o efeito de *aliasing*.

O banco de síntese é formado pela série de filtros $f_m(n)$. Esses filtros somam os sinais $x_m(n)$ para formar uma única saída, ou multiplexar o sinal. Primeiramente, cada $x_m(n)$ sofre um aumento na sua taxa de amostragem e as repetições do espectro são eliminadas. Filtros de síntese selecionam quais subbandas estão contribuindo para a formação do sinal $\hat{x}(n)$. Caso o sinal de saída $\hat{x}(n)$ seja idêntico ao sinal de entrada $x(n)$, a não ser por um atraso constante n_0 ou um fator de escala, é dito que o banco de filtros possui reconstrução perfeita [34, 44, 45, 46]. Vale ressaltar que ambos os processamentos ocorrem em taxas de amostragem maiores, o que deve ser evitado se possível [36, 34].

Conforme apresentada na Figura 2.6, temos três casos para a sobreposição espectral, após os filtros de análise. Primeiramente, conforme a Figura 2.6(a), temos um espectro sem sobreposição, neste as imagens no espectro estão separadas, ou seja, não há interseção. Em um segundo caso, representado pela Figura 2.6(b), ocorre a sobre-

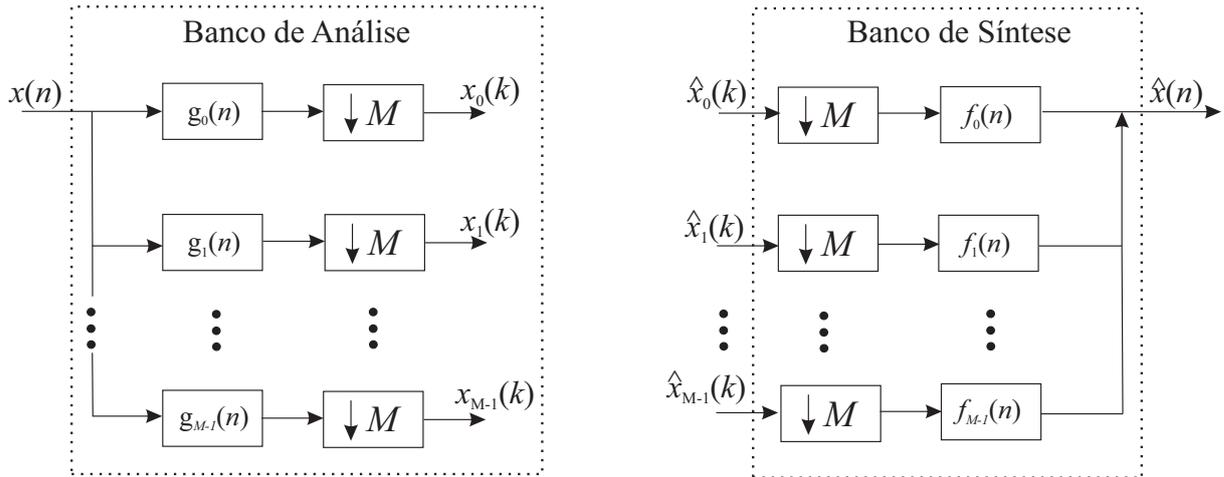


Figura 2.5: Banco de Análise e Síntese.

posição marginal. Note que a subbanda gerada pelo filtro $G_1(z)$ sobrepõe parcialmente os espectros gerados por $G_0(z)$ e $G_2(z)$. Sistemas OFDM são os maiores exemplos de sistemas projetados com esta característica, utilizando-se da ortogonalidade entre as imagens espectrais adjacentes e assim evitando interferências entre as imagens, o que resulta em um ganho de eficiência espectral. Por fim, o caso que desejamos evitar está representado na Figura 2.6(c). Há elevada sobreposição entre a subbanda gerada pelo filtro $G_1(z)$, impossibilitando a recuperação da informação.

2.3 Transceptores Multicanais

Podemos criar um sistema especial com múltiplas entradas [34], denominado Transceptor Multicanal, se fizermos a utilização do banco de síntese como entrada do banco de análise, conforme apresentado na Figura 2.7.

Podemos definir esse sistema da seguinte forma: suponha uma entrada $s_m(n) \in \mathcal{C} \subset \mathbb{C}$, onde cada entrada pode ser proveniente de um usuário distinto, sendo \mathcal{C} o conjunto de símbolos da modulação e $m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$. Os sinais a serem transmitidos são processados por interpoladores e filtros de interpolação para, posteriormente, serem somadas todas as subbandas geradas e temos como resultado o sinal $w(k)$. Note a diferença das variáveis temporais n e k , antes e após a mudança de taxa. Para a recuperação do sinal original $s_m(n)$, se faz necessário o processo inverso no banco de análise, ou seja, primeiramente é realizada a operação por meio dos filtros $g_m(n)$, em seguida

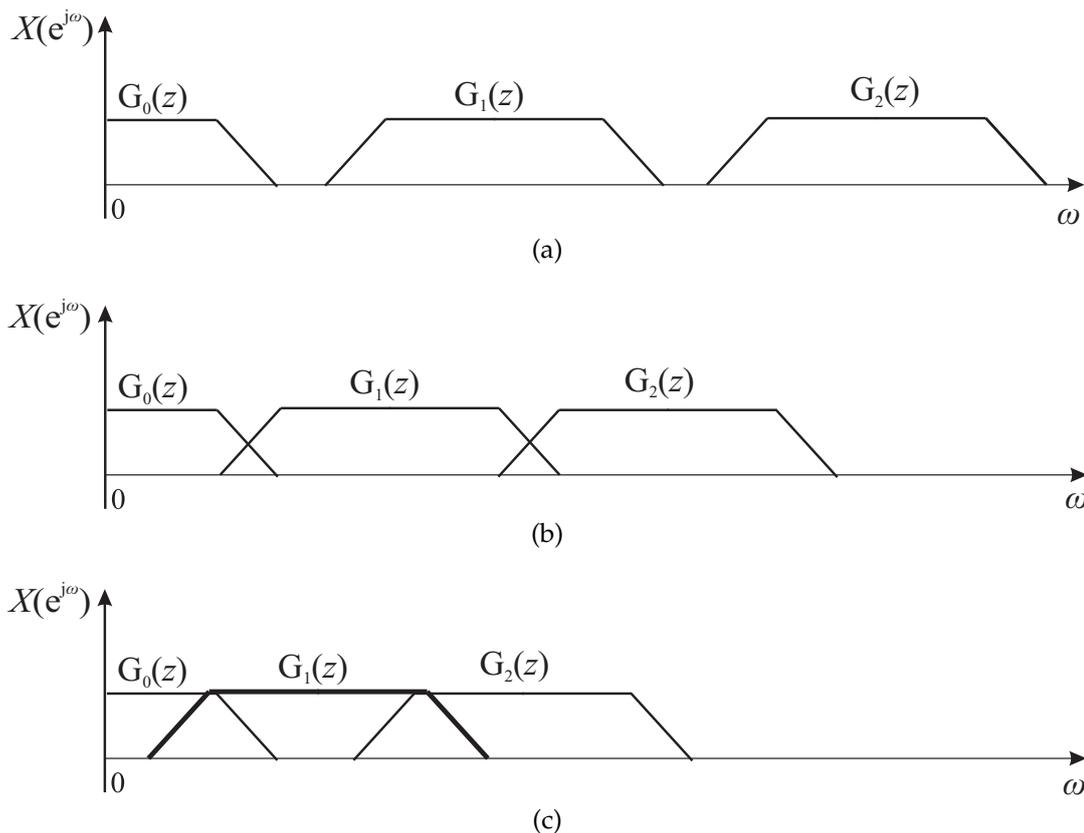


Figura 2.6: (a) Sem sobreposição; (b) sobreposição marginal; (c) com sobreposição ou aliasing.

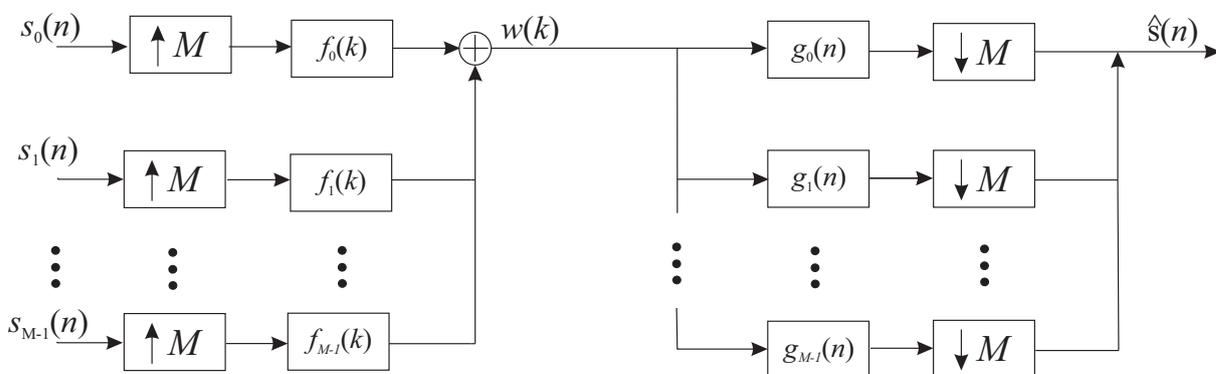


Figura 2.7: Transceptor Multicanal segmentado pelos bancos de síntese e análise.

uma decimação buscando obter o sinal de saída $\hat{s}_m(n)$.

Entretando, o sinal sofre distorções ao ser transmitido. Logo, o sistema apresentado ainda carece de informações a respeito dos efeito de canal. A Figura 2.8 representa um modelo mais abrangente, em que as distorções do canal são representadas pelos filtros FIR $h(n) \in \mathbb{C}$ de ordem $L \in \mathbb{N}$, além da inclusão do ruído aditivo $v(k) \in \mathbb{C}$ [6]. O primeiro representa, por exemplo, distorções no espectro de frequência e, o segundo,

ruídos térmicos no sistema.

Se faz necessária a eliminação dessas interferências, assim os filtros invariantes no tempo $f_m(n)$ e $g_m(n)$ procuram mitigar alguma medida, como BER, para que $\hat{s}_m(n)$ se torne o mais próximo possível do símbolo transmitido. Esses filtros podem gerar subbandas que não preservam individualmente a informação dos usuários, mas que em conjunto possam reconstruir o sinal após os filtros de análise. Se analisarmos cada saída individualmente, podemos definir matematicamente como $\hat{s}_m(n - n_0) = s_m(n)$, sendo $n_0 \in \mathbb{N}$ o atraso na transmissão.

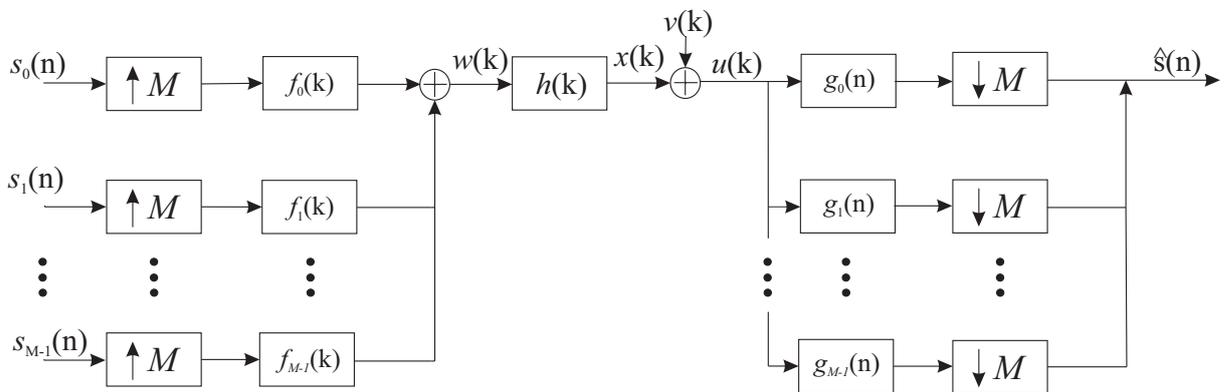


Figura 2.8: Transceptor multicanal no domínio do tempo.

A relação entre o número de canais e a taxa de amostragem pode resultar na perda de informações ou adição de redundância ao sistema. Perceba que se o número de canais é M e a taxa de alteração das amostras é M , ou seja, são iguais, então as bandas de cada sinal são incrementadas de M vezes. Assim, é esperado que se divida o sinal em M subbandas iguais para manter o sinal sem interferência entre usuários. Por outro lado, caso a taxa de amostragem seja menor que M , haverá perda de informações. Em contrapartida, um número maior da taxa permite que sejam inseridas mais informações, funcionando como uma espécie de redundância sem interferir na transmissão original.

2.4 Representação Polifásica

Em um sistema transceptor busca-se a relação entre a informação transmitida e recebida, no nosso caso, a relação do sinal de saída $\hat{s}(n)$ com a entrada $s(n)$. Para isso,

primeiramente, devemos analisar a Figura 2.8 em blocos com o intuito de descrever matematicamente esta relação no domínio do tempo. Se olharmos, primeiramente, a saída do bloco de síntese, notamos a alteração da variável temporal n para $k = Mn$. Isso ocorre devido a necessidade de sincronia dos sinais de entrada e dos interpoladores, o que proporciona uma correta realização das operações envolvidas. Ou seja, os interpoladores só devem amostrar em instantes múltiplos n , o que transforma o sinal de entrada em $s'_m(n) \in \mathbb{C}$, como a seguir:

$$s'_m(n) = \{s_m(0), 0, 0, \dots, s_m(1), 0, 0, \dots, s_m(2), 0, 0, \dots\} \quad (2.6)$$

Desta forma, a convolução dos símbolos no tempo entre $s'_m(n)$ com cada filtro $f_m(n)$ é descrita na Figura 2.9. Nota-se a representação dos instantes $n = \{0, 1, 2, \dots, M\}$ desta operação, sendo o fator de interpolação M , evidenciando que existem $M - 1$ amostras nulas entre cada valor da resposta impulsiva $w(k)$.

Como somente há operações em instantes múltiplos de M , podemos descrever a soma das saídas dos filtros de síntese $f_m(k)$ como a seguinte convolução:

$$w(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_m(j) f_m(k - jM) \quad (2.7)$$

Analisando o bloco de análise, a entrada é constituída pela conjunção da saída do filtro de síntese e interferências causadas a este sinal na transmissão. Por isso, podemos descrever a entrada do filtro de análise $u(k)$ como:

$$u(k) = h(k) * w(k) + v(k) \quad (2.8)$$

sendo $h(k) \in \mathbb{C}$ o filtro FIR representando o canal e $v(k) \in \mathbb{C}$ o ruído aditivo. Da mesma forma, $u(k)$ possui valores nulos em instantes não múltiplos de M . Logo, a saída do filtro de análise é constuída como:

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_m(j) u(nM - j) \quad (2.9)$$

sendo $m \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$.

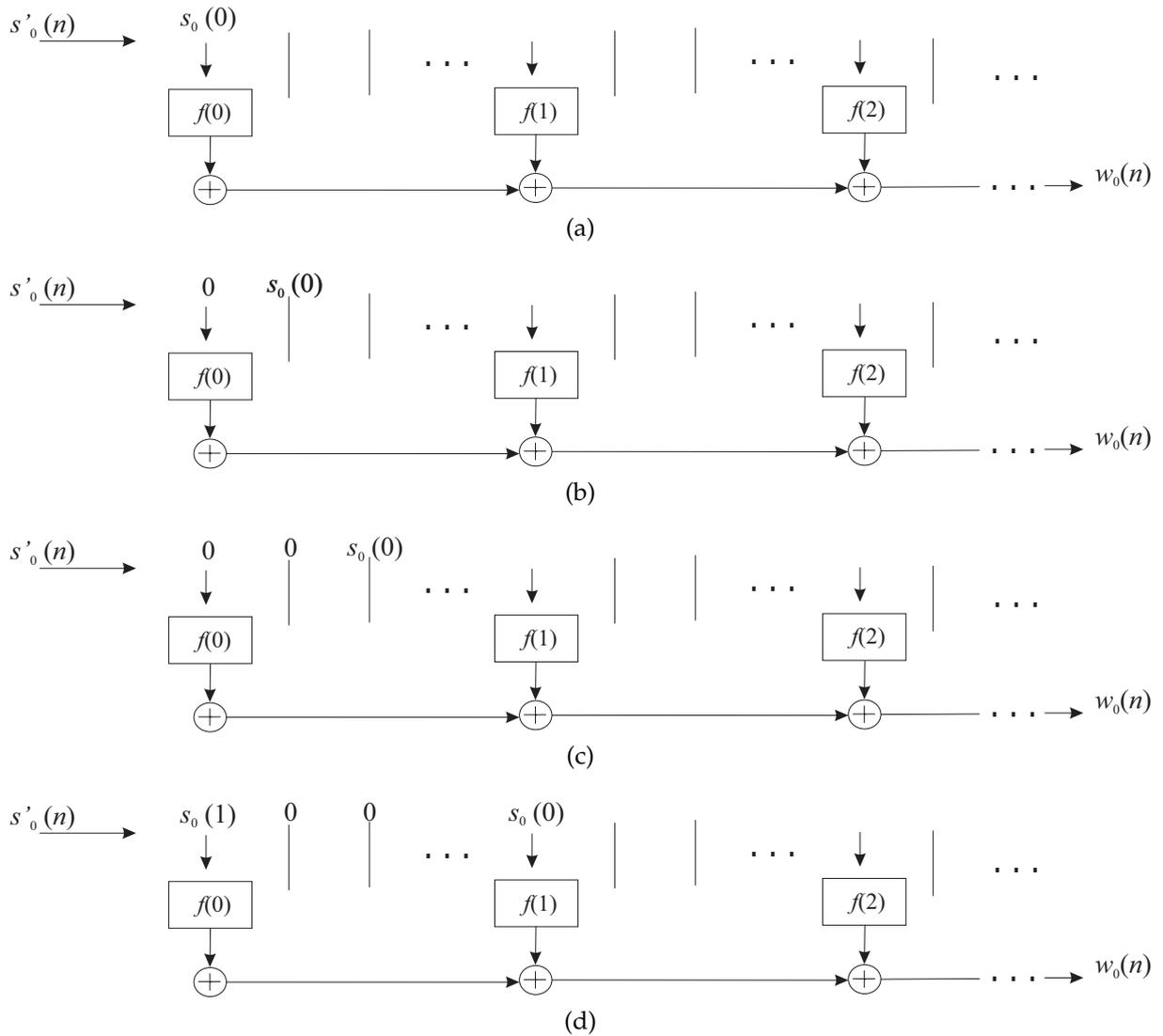


Figura 2.9: (a) Processo de convolução do filtro de síntese com sinal de entrada interpolado no instante $n = 0$; (b) $n = 1$; (c) $n = 2$; (d) $n = M$.

Substituindo as equações (2.10) e (2.8) em (2.9), encontramos a relação entrada-saída desejada:

$$\hat{s}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_m(j)h(l)s_m(i)f_m(nM - j - l - iM) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_m(j)v(nM - j) \quad (2.10)$$

A análise no tempo pode se tornar complexa devido ao elevado número de operações envolvidas e sua complexidade. Procurando simplificar esta operação, é comum a utilização de outras ferramentas alternativamente, como a representação poli-fásica. Esta representação se utiliza da propriedade que um sistema pode se comportar como um seletor de dados por meio da utilização de operadores de mudança de taxa e deslocadores temporais. Para isso, podemos supor o sinal de entrada $s(n)$:

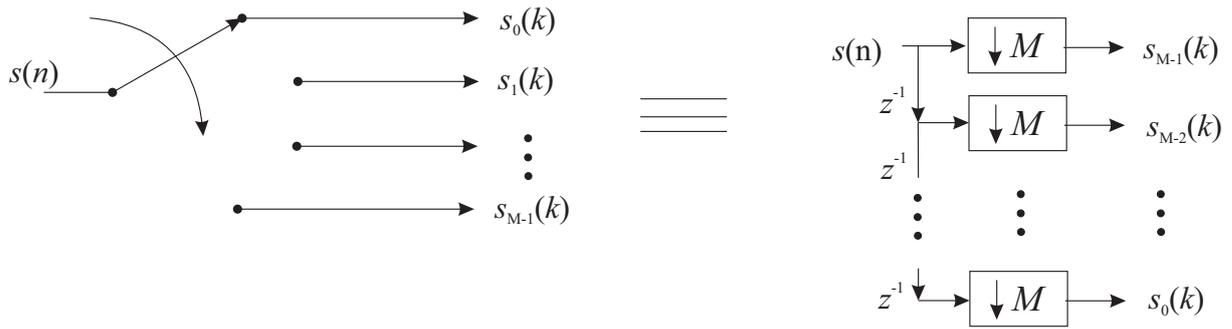


Figura 2.10: Chave seletora e sua equivalência utilizando atrasos e mudança de taxa de amostragem.

$$s(n) = \{s_0 \ s_1 \ s_2 \ \dots \} \quad (2.11)$$

sendo este a entrada do sistema polifásico, que é formado por atrasos e decimações pela taxa M , como ilustrado na Figura 2.10. A representação polifásica deste sinal, gera um sinal de saída $s_m(n)$ descrito, matematicamente, como:

$$s_m(n) = \{s_m \ s_{M+m} \ s_{2M+m} \ \dots \} \quad (2.12)$$

em que $m \in \{0, 1, 2 \dots M\}$. Note que, a seleção de dados tem a função de uma chave seletora com periodicidade M .

Além disso, a representação dos componentes polifásicos [34, 40] do filtro $f_m(k)$ pode ser representada no domínio \mathcal{Z} como:

$$F_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_m(k)z^{-k} \quad (2.13)$$

$$F_{i,m}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_m(jN + i)z^{-j} \quad (2.14)$$

Ao substituirmos $k = jN + i$ na equação (2.14), geramos o resultado:

$$F_m(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} F_{i,m}(z^N)z^{-i} \quad (2.15)$$

De forma análoga aos filtros de síntese, o banco de filtros $g_m(k)$ pode ser descrito no, domínio \mathcal{Z} , como:

$$G_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_m(k)z^{-k} \quad (2.16)$$

$$G_{i,m}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_m(jN + i)z^{-j} \quad (2.17)$$

ao substituírmos $k = jN + i$ na equação (2.17), encontramos a expressão polifásica desejada para o banco de filtros $G_m(z)$ sendo igual a:

$$G_m(z) = \sum_{i=0}^{N-1} G_{i,m}(z^N)z^{-i} \quad (2.18)$$

onde $m = \{0, 1, \dots, M-1\}$. Lembrando que as variáveis N e M , respectivamente, o número de decomposições polifásicas e o número de coeficientes do filtro, podem ser distintas. Neste caso, são inseridos coeficientes com valor 0 a sequência, o que resulta em decomposições polifásicas com diferentes quantidades de coeficientes com valores nulos.

A representação polifásica pode ser vista também em sua forma matricial [6, 48]. Para isso, podemos reescrever a equação (2.15). A parcela referente aos atrasos z^{-i} pode ser redefinida como o vetor \mathbf{d}^T a seguir:

$$\mathbf{d}^T(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Adicionalmente, os filtros representados por $F_{i,m}(z^N)$ podem ser definidos como:

$$\mathbf{F}_{m \in \mathbb{N}}(z) = \begin{bmatrix} F_{0,m}(z) & F_{1,m}(z) & F_{2,m}(z) & \dots & F_{N-1,m}(z) \end{bmatrix}^T \quad (2.20)$$

os elementos da (2.20) podem ser agrupados, matricialmente, para formarem:

$$\mathbf{F}(z^N) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0(z) & \mathbf{F}_1(z) & \dots & \mathbf{F}_{M-1}(z) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Finalmente, podemos definir a representação matricial da equação (2.15) que estamos procurando, ao agruparmos as equações (2.21) e (2.19), formando:

$$\mathbf{F}_m(z) = \mathbf{d}^T(z)\mathbf{F}(z^N) \quad (2.22)$$

Analogamente ao banco de síntese, temos a representação polifásica para o banco de análise. O vetor de deslocamento temporal, diferentemente do banco de síntese, é

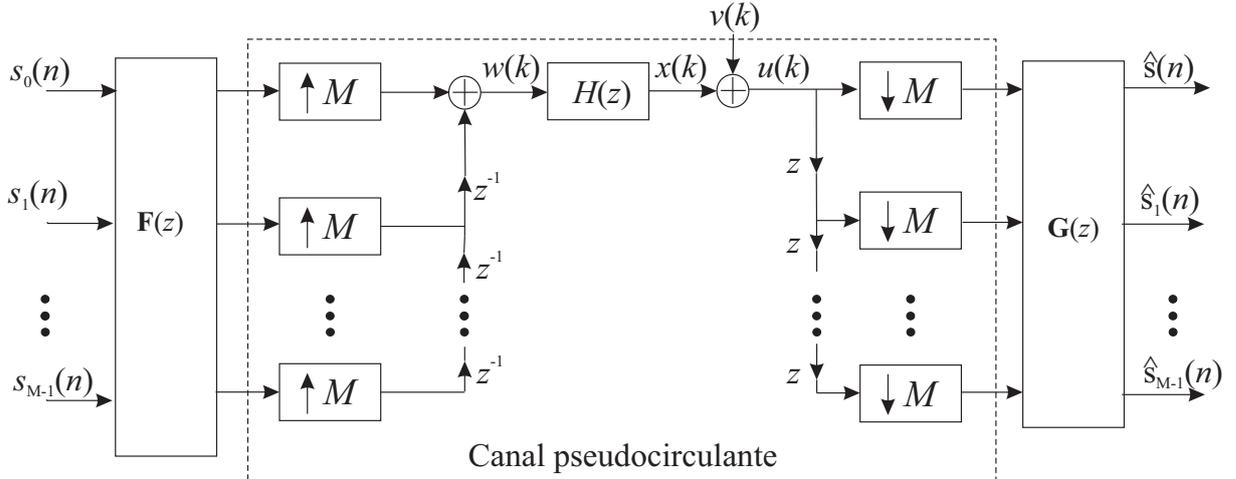


Figura 2.12: Transceptor Multicanal com canal pseudocirculante.

Na Figura 2.12, os blocos destacados em tracejado, constituídos pelo filtro $H(z)$, os vetores de deslocamento (atraso e avanço), decimadores e interpoladores podem ser agrupados para formar uma matriz pseudocirculante $\mathbf{H}(z)$. Isto pode ser realizado ao supormos o filtro FIR do canal como:

$$h(k) = \{h_0 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_L\} \quad (2.27)$$

em seguida, este sinal pode ser representado no domínio \mathcal{Z} em sua forma polifásica, de forma que:

$$\begin{aligned} H_j(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(j + nN)z^{-n} \\ H(z) &= \sum_{j=0}^{N-1} H_j(z^M)z^{-j} \end{aligned} \quad (2.28)$$

sendo $0 \leq j + nN \leq L$ e N o fator de mudança de taxa.

Podemos representar os outros sinais da Figura 2.12 no domínio \mathcal{Z} da seguinte

forma^{1,2}:

$$\begin{aligned}
 S_m(z) &\triangleq \mathcal{Z}\{s_m(n)\} \\
 W(z) &\triangleq \mathcal{Z}\{w(k)\} \\
 U(z) &\triangleq \mathcal{Z}\{u(k)\} \\
 V(z) &\triangleq \mathcal{Z}\{v(k)\} \\
 Y(z) &\triangleq \mathcal{Z}\{y(k)\} \\
 \hat{S}_m(z) &\triangleq \mathcal{Z}\{\hat{s}_m(k)\}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Assim, se desconsiderarmos o ruído aditivo $v(k)$, podemos inferir a entrada do filtro de análise se supormos que l é a variável referente a l -ésima entrada do transceptor, m é referente a m -ésima saída e sendo ambos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, assim podemos inferir a relação:

$$\begin{aligned}
 U_m(z) &= \left[z^{-l} H(z) W_l(z^N) z^m \right] \\
 U_m(z) &= W_l(z) \left[z^{m-l} H(z) \right]
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

sendo $U_m(z)$ a m -ésima saída da área tracejada e $W_l(z)$ refere-se à l -ésima entrada. Caso suponhamos que esta área em destaque da Figura 2.12 tem como matriz de transferência $[\mathbf{H}(z)]_{ml}$, podemos desenvolver a relação a seguir:

$$[\mathbf{H}(z)]_{ml} = \frac{U_m(z)}{W_l(z)} = [z^{m-l} H(z)]_{\text{dec}(N)} \tag{2.31}$$

onde $\text{dec}(N)$ refere-se ao operador de decimação por um fator N . Assim, esta equação pode ser reescrita, se utilizarmos o resultado da equação (2.28) para formar:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{H}(z)]_{ml} &= [z^{m-l} \sum_i H_i(z^N) z^{-i}]_{\text{dec}(N)} \\
 &= \left[\sum_i H_i(z^N) z^{m-l-i} \right]_{\text{dec}(N)}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

em que $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Esta equação ainda pode ser simplificada. Sabendo que somente valores múltiplos de N ou, no domínio \mathcal{Z} , aqueles que são potência de z^N não serão anulados pela operação de decimação e que $m-l$ está restrito ao intervalo $-(N-1) \leq m-l \leq$

¹O símbolo \triangleq significa equivalente

²O operador $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ equivale a transformada \mathcal{Z} aplicado a um sinal. Logo, $\mathcal{Z}\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$(N - 1)$, podemos separar o resultado da equação 2.32 em dois casos. No primeiro, quando $m - l \geq 0$, os valores não nulos ocorrem quando $m - l - i$ for igual a 0, já que nenhum outro múltiplo de N respeita as restrições. Esse fato resulta em:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}(z)]_{ml} &= \left[H_{(m-l)}(z^N) \right]_{dec(N)} \\ &= H_{(m-l)}(z) \end{aligned} \quad (2.33)$$

O segundo caso ocorre quando $m - l < 0$. Assim $m - l - i$ deve ser igual a $-N$, pois é a única condição que satisfaz as restrições, de modo que, obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}(z)]_{ml} &= \left[z^{-N} H_{(N-(m-l))}(z^N) \right]_{dec(N)} \\ &= z^{-1} H_{(N-(m-l))}(z) \end{aligned} \quad (2.34)$$

As equações (2.33) e (2.34) podem ser agrupadas em suas respectivas linhas e colunas para formarmos a matriz pseudocirculante que procuramos:

$$\mathbf{H}(z) \triangleq \begin{bmatrix} H_0(z) & z^{-1}H_{N-1}(z) & z^{-1}H_{N-2}(z) & \dots & z^{-1}H_1(z) \\ H_1(z) & H_0(z) & z^{-1}H_{N-1}(z) & \dots & z^{-1}H_2(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{N-1}(z) & H_{N-2}(z) & H_{N-3}(z) & \dots & H_0(z) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Ainda a partir desse resultado, podemos inferir que a matrix de transferência $\mathbf{T}(z)$, que representa a relação entrada-saída entre os vetores $\mathbf{s}(n)$ e $\hat{\mathbf{s}}(n)$, pode ser descrita como:

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)\mathbf{F}(z) \quad (2.36)$$

A partir desta matriz $\mathbf{T}(z)$, podemos analisar se o sistema insere ou não interferências. O sinal ideal requer que os elementos da matriz diagonal sejam somente atrasos e os outros elementos sejam nulos, originando a propriedade conhecida como *zero-forcing* [48].

Adicionalmente, podemos considerar neste modelo o erro aditivo, de forma que a relação entre o sinal transmitido e o recebido se torne:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}(z) &= \mathbf{G}(z)(\mathbf{H}(z)\mathbf{F}(z)\mathbf{S}(z) + \mathbf{V}(z)) \\ \hat{\mathbf{S}}(z) &= \mathbf{T}(z)\mathbf{S}(z) + \mathbf{G}(z)\mathbf{V}(z) \end{aligned}$$

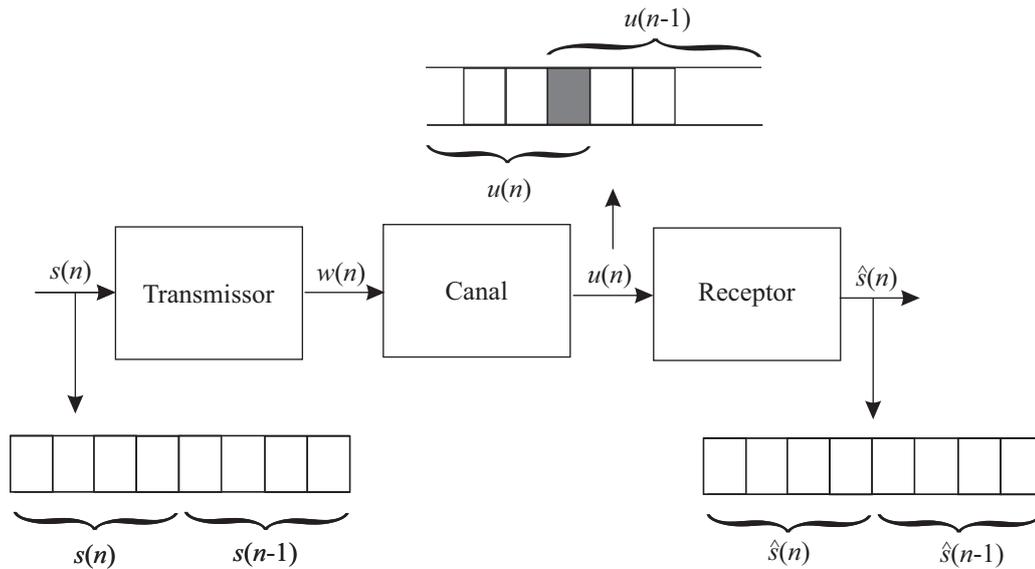


Figura 2.13: Efeito da interferência sobre o sinal transmitido.

O sinal transmitido irá sofrer interferências do canal caso o canal possua memória, fato bem comum em transmissões sem fio. Seu efeito pode ser visto na Figura 2.13, onde está demonstrado que o sinal $u(n)$ após o bloco do canal, sofre uma sobreposição do bloco anterior $u(n - 1)$. É esperado que estas interferências sejam eliminadas após o bloco de recepção.

Podemos reescrever a matriz pseudocircular do canal $\mathbf{H}(z)$ de forma que os efeitos das interferências entre símbolos (ISI, do inglês *intersymbol interference*), bem como entre blocos (IBI, do inglês *interblock interference*) fiquem separados em duas matrizes distintas. Suponha o caso em que $N > L$, sendo L a ordem do canal. Assim, ao analisarmos a equação (2.27), notamos que o valor de n está limitado a inequação $0 \leq nM + j \leq L$, portanto o único valor que respeita esta inequação é $n = 0$, produzindo assim $H_j(z) = h(j)$. Podemos então representar a equação (2.35) como a matriz FIR, da seguinte maneira:

$$\mathbf{H}(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(L) & h(L-1) & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & h(L) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h(L) & \dots & h(0) \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{H}_{\text{ISI}}} + z^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & h(L) & \dots & h(1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & h(L) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{H}_{\text{IBI}}} \quad (2.37)$$

2.5 Transceptores em Bloco

Nesta seção, iremos apresentar os transceptores em bloco. Este tipo de transceptor é caracterizado por realizar transmissões sem a necessidade de informações de blocos anteriormente transmitidos ou recebidos, ou seja, para este transceptor é necessário somente informações dos blocos do instante atual. Matematicamente, são então definidos por $\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}$ e $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}$, sendo as matrizes de transmissão e recepção, respectivamente, por serem considerados transceptores sem memória. Há a restrição dos filtros $\{f_m(k)\}_m$ e $\{g_m(k)\}_m$ terem seu comprimento menor que N para que não possuam memória.

Uma característica desejada em transceptores em bloco consiste na eliminação de interferências sofridas durante a transmissão. Para tal, podemos analisar três casos de escolha entre a quantidade de símbolos M em um bloco e o fator de mudança de taxa N :

- $N < M$, neste caso, a informação não consegue ser recuperada, independentemente do canal utilizado em razão da própria estrutura do transceptor, pois são eliminadas informações durante a mudança de taxa.
- $N = M$, temos um sistema conhecido como minimamente interpolado [49, 48]. Neste caso, também ocorre a impossibilidade de recuperação. Na pesquisa de-

envolvida por Lin [48], foi demonstrado para diversos tipos de transceptores (tais como FIR ortogonais, não-ortogonais e IIR) as condições de recuperação.

Este fato pode ser verificado ao analisarmos a equação (2.36). Esta matriz de transferência $\mathbf{T}(z)$ não gera interferência quando possui a propriedade de *zero-forcing*, ou seja, quando gera uma matriz diagonal, o que torna a saída igual a entrada, a despeito de atrasos e escalares. Para percebermos a impossibilidade de recuperação, supomos que $\mathcal{Z}\{h(n)\}$ é FIR, o que produz $\det(\mathbf{H}(z))$ também como FIR. Posteriormente, podemos calcular o determinante de $\mathbf{T}(z)$, tal que:

$$\det(\mathbf{T}(z)) = \det(\mathbf{G}(z)\mathbf{F}(z))\det(\mathbf{H}(z)) \quad (2.38)$$

Suponha um transceptor FIR, logo $\det(\mathbf{G}(z)\mathbf{F}(z))$ também será FIR e consequentemente $\det(\mathbf{T}(z))$ se torna FIR, entretanto queremos que $\det(\mathbf{T}(z))$ gere atrasos. Logo, o transceptor não pode ser FIR com $N = M$, a não ser que $\det(\mathbf{H}(z))$ seja composto de atrasos, em outras palavras, o canal deve ser ideal.

- Como alternativa surge o terceiro caso, conhecido como sobreinterpolação, caracterizado pela relação $N > M$. Esta relação permite a inserção de redundância na transmissão, informações que não fazem parte efetiva do sinal, mas que ajudam a combater efeitos de canal.

2.5.1 Sistemas *Zero-Padded*

Existem vários métodos para introduzir redundância nas mensagens, entre eles os mais conhecidos são o *zero padding* (ZP) e o prefixo cíclico (CP) [50]. Esses sistemas são similares, mas se diferenciam no tipo da redundância que é introduzido. Para o método *zero padding* primeiro é inserido uma quantidade de zeros e, no segundo, uma cópia dos últimos $K = L$ elementos são inseridos. Iremos nos ater ao *zero padding* pois há algumas vantagens relacionadas com a equalização de canal, como a maior capacidade de acompanhar variações no canal durante a estimação de canal. Também por possibilitar a redução da potência de transmissão em comparação ao prefixo cíclico [50].

O processo de inserção do ZP pode ser visualizado na Figura 2.14. Suponha que temos um sinal $s(n)$ separado em blocos de M símbolos (Figura 2.14(b)). Em seguida, em cada bloco da sequência $s(n)$ é inserido K elementos nulos ao final do sinal formando um novo sinal $w(n)$, de forma que o tamanho do novo bloco se torne $N = M + K$, como pode ser visto na Figura 2.14(c). Esse sinal é transmitido através do canal $H(z)$ transformando-se na sequência recebida $x(n)$. Perceba, na Figura 2.14(d), que os K elementos redundantes inseridos sofreram alterações durante a transmissão e não são mais nulos devido ao processo de filtragem com o canal $H(z)$. Se este canal tem no máximo ordem K , o sinal $x(n)$ será somente dependente dos M símbolos transmitidos no bloco atual $s(n)$. Dessa forma, a parte do sinal que foi corrompida pode ser eliminada, juntamente com a interferência IBI, independente de qual seja a resposta ao impulso $h(n)$.

2.5.2 Transceptores em Bloco com Redundância Reduzida

Os sistemas *zero padding* usualmente evitam os efeitos de ISI e IBI ao inserir uma quantidade de amostras ao menos igual a ordem do canal L com elementos nulos. Uma alternativa para diminuir a redundância e, mesmo assim, permitir a eliminação da interferência no sinal transmitido pode ser encontrada na pesquisa desenvolvida por Lin e Phoong [48] o qual demonstrou-se a existência de uma quantidade mínima de símbolos extras $K \triangleq N - M \in \mathbb{N}$ transmitidos utilizando transceptores multicanais em blocos e sem memória, sendo N o tamanho total da mensagem transmitida e M a quantidade de símbolos, tal que:

$$K_{\min} \triangleq \begin{cases} \frac{L}{2}, & \text{se } L \text{ é par} \\ \frac{L+1}{2}, & \text{se } L \text{ é ímpar} \end{cases} = \left\lceil \frac{L}{2} \right\rceil \quad (2.39)$$

onde $\lceil a \rceil$ é uma operação que forma o menor inteiro maior que a .

Adicionalmente, Lin e Phoong [19, 51] propuseram uma família de transceptores DMT (do inglês, *Discrete Multitone Transceivers*) utilizando uma quantidade reduzida de redundância, ou seja, $K \geq \lceil \frac{L}{2} \rceil$. Entre eles há o sistema *zero-padding zero-jamming*, composto da seguinte matriz de transmissão:

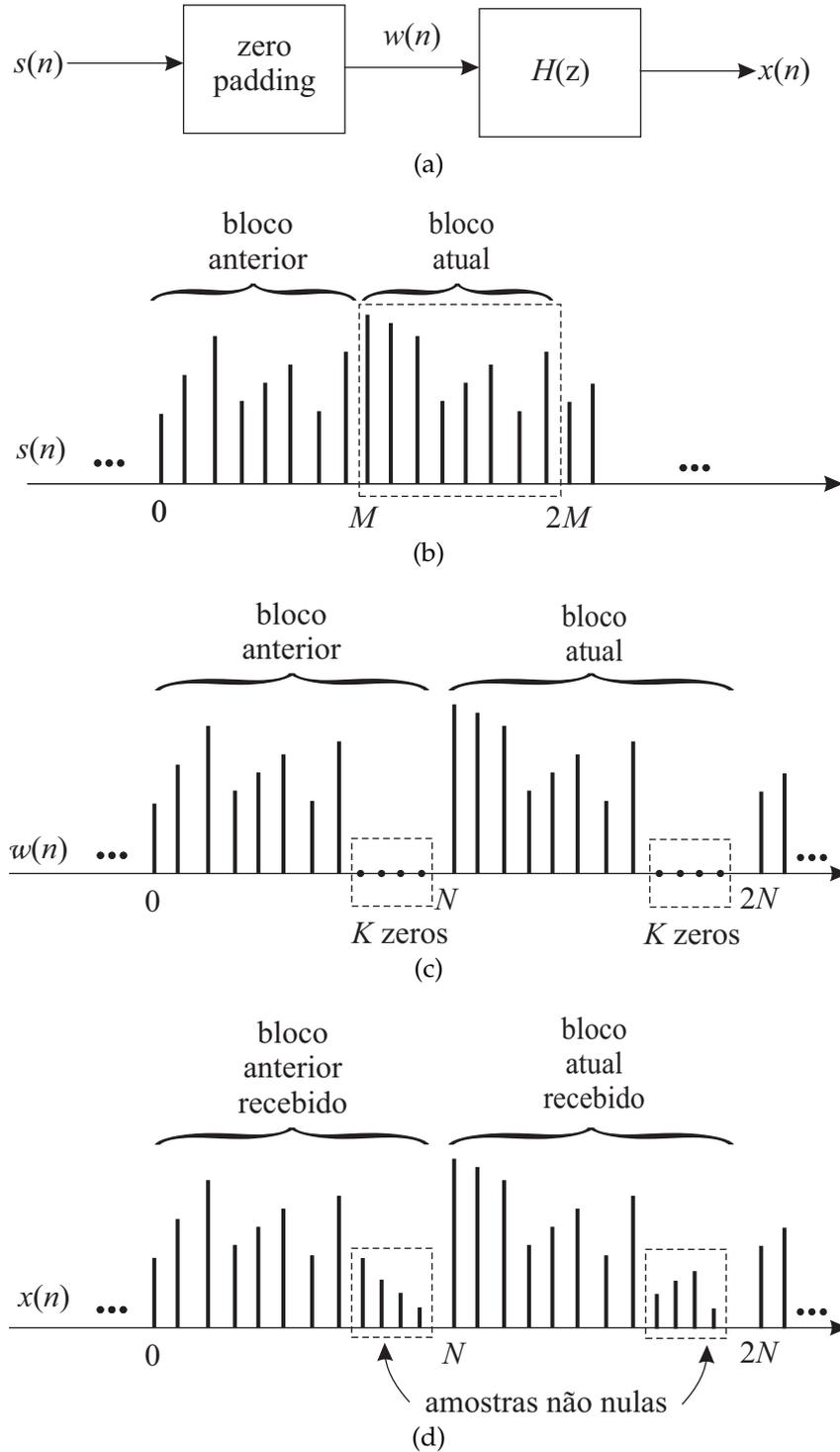


Figura 2.14: (a) Diagrama em blocos da operação de *zero padding*; (b) representação do sinal de entrada $s(n)$, separado em dois blocos de tamanho M ; (c) sinal $w(n)$ com redundância nula; (d) representação da saída $x(n)$ demonstrando a interferência sofrida nos elementos referentes a redundância, após a operação de filtragem.

$$\mathbf{F} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0}_{K \times M} \end{bmatrix}_{N \times M} \quad (2.40)$$

onde $\mathbf{F}_0 \in \mathbb{C}^{M \times M}$ é a matriz de transmissão atual, encarregada de processar linearmente o sinal transmitido $\mathbf{s}(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1} \subset \mathbb{C}$, em que \mathcal{C} é o conjunto de símbolos digitais e n o índice temporal. O projeto da matriz de transmissão tem como objetivo preparar a transmissão antes do efeito do canal FIR. A matriz $\mathbf{0}_{K \times M}$ é responsável por adicionar os elementos nulos redundantes.

Para estimar o vetor de saída $\hat{\mathbf{s}}(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ no receptor, é aplicado uma nova transformação linear através da matriz de recepção, expressa por:

$$\mathbf{G} \triangleq \left[\mathbf{0}_{M \times (L-K)} \quad \mathbf{G}_0 \right]_{M \times N} \quad (2.41)$$

sendo $\mathbf{G}_0 \in \mathbb{C}^{M \times (M+2K-L)}$ o vetor de recepção atual e $\mathbf{0}_{M \times (L-K)}$ é o responsável por eliminar a *inter-block interference* (IBI). Assim, a matriz de transferência, dada pela equação (2.36), é transformada em:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(z) &= \mathbf{G} \mathbf{H}(z) \mathbf{F} \\ &= \mathbf{G}_0 \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_0 \\ &= \mathbf{T} \end{aligned} \quad (2.42)$$

em que a matriz efetiva do canal é definida como a matriz complexa Toeplitz a seguir:

$$\mathbf{H}_0 \triangleq \begin{bmatrix} h(L-K) & \cdots & h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & h(L-K) & & & & & \vdots \\ h(K) & & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & h(K) & & & & & h(0) \\ h(L) & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & h(L) & & & & & h(L-K) \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & h(L) & \cdots & h(K) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(M+2K-L) \times M} \quad (2.43)$$

A adição e remoção de zeros que resultam na matriz de transferência, dada pela equação (2.42), eliminam os efeitos do canal. Suponha que desejamos recuperar o sinal recebido $\hat{\mathbf{s}}(n)$ de forma que:

$$\hat{\mathbf{s}}(n) \triangleq \mathbf{G} \mathbf{H}_{\text{ISI}} \mathbf{F} \mathbf{s}(n) + \underbrace{\mathbf{G} \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} \mathbf{s}(n-1)}_{\triangleq \mathbf{v}_0(n)} + \mathbf{G} \mathbf{v}(n) \quad (2.44)$$

Para isso, podemos analisar a eliminação do efeito de IBI utilizando uma redundância $K = L$. A matriz efetiva do canal $\mathbf{H}(z)$, que pode ser visualizada por meio da equação (2.37), evidenciando o efeito de IBI através da matriz \mathbf{H}_{IBI} . A eliminação desse efeito de canal, parte da necessidade de anular essa matriz. É possível perceber a influência da matriz \mathbf{H}_{IBI} em $\mathbf{H}(z)$ se restringe a submatriz triangular, de tamanho L , cujos vértices são formados por $h(L), h(1)$ e $h(L)$, localizada no canto superior direito da matriz efetiva de canal $\mathbf{H}(z)$. Logo, sabendo que há $N = M + L$ símbolos recebidos, é realizada a retirada dos L primeiros elementos, eliminando assim a distorção IBI causada aos símbolos transmitidos, e, em contrapartida, reduzindo a eficiência espectral devido à redundância inserida.

Essa abordagem pode ser estendida para o caso da transmissão contendo redundância reduzida em que $N = M + K > L$. Observando na equação (2.44) a parcela dependente de $\mathbf{s}(n - 1)$, percebemos que a matriz efetiva de canal, dada na equação (2.37), quando multiplicada pela matriz de transmissão \mathbf{F} , resulta em $L - K$ elementos dependentes de z^{-1} , ao invés de L como anteriormente. Isso acontece em razão da redundância menor e da matriz $\mathbf{0}_{K \times M}$, que elimina a dependência das últimas K linhas da matriz $\mathbf{H}(z)$. Assim, somente os $L - K$ elementos necessitam ser eliminados, o que resulta em $L - (L - K) = K$ elementos afetados pela interferência. Porém, esses elementos são justamente os inseridos como redundância durante a transmissão, resultando na eliminação do IBI. Sem o efeito de IBI, o sinal de saída estimado $\hat{\mathbf{s}}(n)$ na equação (2.44) se torna:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{s}}(n) &\triangleq \mathbf{G} \mathbf{H}_{\text{ISI}} \mathbf{F} \mathbf{s}(n) + \mathbf{v}_0(n) \\
 &= [\mathbf{0}_{M \times (L-K)} \mathbf{G}_0] \mathbf{H}_{\text{ISI}} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0}_{K \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(n) + \mathbf{v}_0(n) \\
 &= \mathbf{G}_0 \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n) + \mathbf{v}_0(n) \\
 &= \mathbf{T}_0 \mathbf{s}(n) + \mathbf{v}_0(n) \\
 \hat{\mathbf{s}} &\triangleq \mathbf{T}_0 \mathbf{s} + \mathbf{v}_0
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

de forma que o índice temporal n é suprimido para enfatizar a dependência de informações somente ao instante atual.

A quantidade de redundância não pode ser reduzida de forma arbitrária, como

representada na equação (2.39). Para entendermos isso, suponha a tentativa de eliminação do efeito de ISI. Na equação (2.45), a matriz \mathbf{T}_0 deve ser inversível para que haja uma solução *zero forcing*. Este caso será possível se, e somente se, a matriz \mathbf{T}_0 possuir posto completo. Assim, ocorre a necessidade de $\text{posto}(\mathbf{T}_0) = \min\{M + 2K - L, M\}$, implicando em $M \leq M + 2K - L$, de modo que $2K - L \geq 0$, resultando na equação (2.39) que procuramos.

O projeto do transceptor multicanal com redução na quantidade de redundância não está completo sem a definição das matrizes atuais de transmissão e recepção. Supondo que a matriz de transmissão \mathbf{F}_0 é unitária, ou seja, $\mathbf{F}_0^{-1} = \mathbf{F}_0^H$, e independente do canal, a matriz de recepção atual \mathbf{G}_0 , fica a cargo do projetista, que usualmente tenta diminuir o ISI ou o erro médio quadrático, resultando nas soluções *zero-forcing* e o MMSE (do inglês, *minimum mean square error*), respectivamente [52, 53, 28]. Essas soluções podem ser expressas como [53, 52]:

$$\mathbf{G}_{0ZF} = \mathbf{F}_0^H \mathbf{H}_0^\dagger \quad (2.46)$$

$$\mathbf{G}_{0MMSE} = \mathbf{F}_0^H \left(\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0 + \rho \mathbf{I}_M \right)^{-1} \mathbf{H}_0^H \quad (2.47)$$

sendo $\rho \triangleq \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2}$, onde σ_v^2 é referente a variância do ruído e σ_s^2 a variância do sinal de entrada. Os sinais de entrada e o ruído são considerados não correlacionados e estacionários em sentido amplo, provenientes de um processo estocástico branco e média zero [52].

2.6 Considerações Finais

Neste capítulo, apresentamos as teorias fundamentais para a transmissão utilizando transceptores multicanais em blocos. Primeiramente, foram explicitadas as estruturas de operações básicas de mudança de taxa tais como, decimadores, interpoladores e identidades nobres. A seguir, foi demonstrado o comportamento dos transceptores multicanais, além dos seus blocos fundamentais: banco de síntese e de análise. Posteriormente, foi apresentada a representação polifásica, ferramenta matemática que simplifica a análise dos transceptores. Ela nos permitiu representar a matriz do canal

em uma forma pseudocirculante, formada por duas matrizes distintas referentes aos efeitos de IBI e ISI e, conseqüentemente, a representação da matriz de transferência do transceptor multicanal. Também foram apresentados os transceptores em bloco, além da inserção de redundância para eliminação das interferências como o sistema *zero padding*, responsável pela inserção de elementos redundantes nulos. Por fim, foi realizada a apresentação de sistemas com redundância reduzida por meio da utilização do *zero-padding zero-jamming*.

Capítulo 3

Processamento Adaptativo de Sinais

3.1 Teoria de Estimação de Conjunto

Podemos destacar duas vertentes da teoria filtragem adaptativa. A primeira, consiste a teoria clássica de estimação dos pontos, que constitui a maior parte dos métodos, como o *least-mean-square* (LMS), o *normalized-mean-square* (NLMS), o *binormalized LMS* (BNLMS) e o *affine projection* (AP). Nesta abordagem, os métodos propõem uma solução única de uma função objetivo. A segunda, consiste em um paradigma de estimação de conjunto com pesquisas intensificadas nas últimas duas décadas. Esta se baseia na busca de uma região que otimiza parâmetros da função objetivo. Alguns métodos que utilizam esta abordagem denominam-se *set-membership NLMS* (SM-NLMS), *set-membership BNLMS* (SM-BNLMS) e *set-membership AP* (SM-AP). Os algoritmos destes métodos possuem ganhos em relação aos algoritmos dos métodos por teoria clássica de estimação de pontos.

Uma importante vantagem do paradigma de estimação de conjunto reside no fato que um processo é otimizado para uma região, o que gera maior confiabilidade comparativamente a quando se busca um único ponto, em razão de imprecisões nas medidas, modelagens ou interferências. Adicionalmente, é comum algum conhecimento sobre os fenômenos estudados, dessa forma, podemos estimar os erros no sistema e utilizar esse conhecimento no conjunto de soluções durante o projeto de algoritmos que utilizam o paradigma de estimação de conjunto.

3.2 *Set-Membership Affine Projection (SM-AP)*

O SM-AP é um algoritmo que busca a minimização do *mean squared error* (MSE). Isto é realizado utilizando algoritmos baseados em gradiente estocástico de modo que seus vetores de coeficientes tentam seguir a direção oposta ao gradiente da função MSE. Possui como característica a redução do custo computacional em relação ao *affine projection*, robustez contra ruído, apesar de ser ainda relativamente pouco explorado.

Se comparado a outros algoritmos clássicos baseados em gradiente, como NLMS, BNLMS e AP, ele possui baixa complexidade e rápida convergência. Muito dessa velocidade rápida de convergência se deve a característica em comum dos algoritmos AP, o reuso de informação, criado originalmente para resolver o problema dos algoritmos NLMS quando o sinal de entrada é colorido. Em contrapartida, ocorre um aumento da complexidade e um erro em estado estacionário maior do AP em relação ao NLMS.

Adicionalmente, o algoritmo se destaca por combinar o reuso de informação com a seleção de dados, compensando a maior complexidade ao se utilizar informações de estados anteriores com o uso mais eficiente das atualizações, principalmente quando o sistema entra em estado estacionário, onde essas atualizações tendem a diminuir.

3.2.1 *Set-Membership Filtering*

Um dos fatores que gera os ganhos do SM-AP se baseia em processos denominados *set-membership filtering* (SMF). Este conceito é utilizado em filtros adaptativos com parâmetros lineares e sua notável vantagem na junção da teoria de estimação de conjunto com a seleção de dados, que avalia a inovação da informação antes de realizar a atualização. Assim, pode operar em um estado de economia, em que em grande parte do tempo não está atualizando os coeficientes dos filtros. Como consequência, temos uma redução energética, menor complexidade computacional, robustez contra ruídos, que pode ser acrescida da propriedade de atualização parcial dos coeficientes.

Suponha que tenhamos um vetor de coeficientes $\mathbf{w}(k) \in \mathbb{C}^{N+1}$ que constitui o filtro adaptativo que queremos projetar, definido como:

$$\mathbf{w}(k) \triangleq [w_0(k) \ w_1(k) \ \dots \ w_N(k)]^T$$

sendo $N \in \mathbb{N}$ a ordem do filtro adaptativo. O sinal desejado é constituído por $d(k) \in \mathbb{C}$ e o vetor de entrada $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{C}^{N+1}$, de tal forma que:

$$\mathbf{x}(k) \triangleq [x(k) \ x(k-1) \ \dots \ x(k-N)]^T$$

formando uma estrutura chamada *tapped-delay line* [4, 54]. Considerando $\mathbf{w}(k)$ e $\mathbf{x}(k)$, podemos definir o sistema que compõe a filtragem adaptativa, apresentado na Figura 3.1. O vetor de saída $y(k) \in \mathbb{C}$ é definido como:

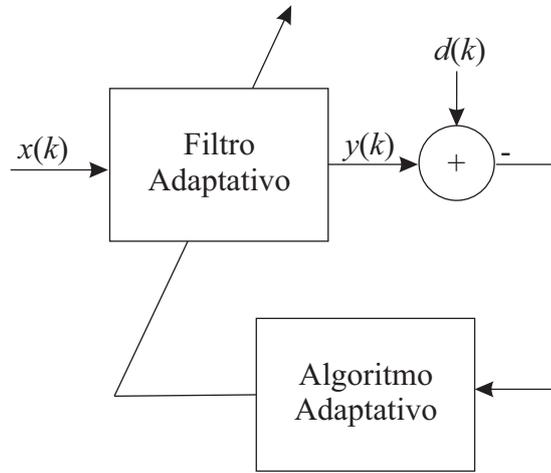


Figura 3.1: Sistema de filtragem adaptativa.

$$y(k) \triangleq \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k)$$

Este sistema opera de forma que, a cada iteração, os valores de $y(k)$ e $d(k)$ se tornem mais próximos. O sinal de erro $e(k) \in \mathbb{C}$ é definido como:

$$e(k) \triangleq d(k) - y(k) = \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k). \quad (3.1)$$

e espera-se que esse erro se aproxime do valor nulo a medida que k é incrementado.

Após estas definições, podemos analisar a estimação do vetor de coeficientes $\mathbf{w}(k)$ em sistemas SMF. O erro gerado na equação (3.1), pode ser relacionado a uma variável $\gamma \in \mathbb{R}^+$, sendo este último o erro máximo aceitável no sistema sem que seja

necessária uma atualização dos coeficientes. O valor de γ está normalmente relacionado a incerteza do sistema, que usualmente é referente ao ruído de medida, interferências ou erros no modelo. Sua definição pode ser feita em função de estimativas dessas incertezas, como a variância do ruído.

Matematicamente, o vetor $\mathbf{w}(k)$ está limitado a soluções que pertençam ao conjunto de soluções aceitáveis Θ , definido por:

$$\Theta \triangleq \bigcap_{(\mathbf{x}, d)} \left\{ \mathbf{w}(k) \in \mathbb{C}^{N+1} : |d(k) - \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k)| \leq \gamma \right\} \quad (3.2)$$

de maneira que $(\mathbf{x}, d) \in \bar{\mathcal{S}}$, sendo este o conjunto de todos os pares gerados possíveis da combinação do vetor de entradas e de valores desejados. Logo, a função do SMF é encontrar um valor de $\mathbf{w}(k) \in \Theta$.

Infelizmente, encontrar essa solução aceitável Θ não é uma tarefa simples, principalmente sem possuir as informações do conjunto $\bar{\mathcal{S}}$ para estimar seus pontos. Para isso, foram criados métodos iterativos que procuram utilizar variáveis conhecidas para este fim. Buscando encontrar estas soluções, suponha que:

$$\mathcal{H}(k) \triangleq \left\{ \mathbf{w}(k) \in \mathbb{C}^{N+1} : |d(k) - \mathbf{w}^H(k)\mathbf{x}(k)| \leq \gamma \right\} \quad (3.3)$$

Assim, $\mathcal{H}(k)$ representa o conjunto de restrições, onde o caso para duas dimensões está representado pela Figura 3.2. Como cada par de informações gera um novo conjunto de restrições, podemos utilizar a interseção destes conjuntos para gerar um novo conjunto:

$$\Psi_{k_1}^{k_2} \triangleq \bigcap_{k=k_1}^{k_2} \mathcal{H}(k), \quad (3.4)$$

Como consequência, este conjunto, quando definido como Ψ_0^k , é conhecido como *exact membership set*. Um dos principais objetivos do SMF é fazer com que $\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_0^k = \Theta$, sendo $\Theta \subset \Psi_0^k$, ou seja, a medida o número de iterações aumenta, espera-se que o conjunto de restrições se aproxime do conjunto de soluções que procuramos.

Seu funcionamento se baseia na quantidade de informação útil gerada pelo par de entrada (\mathbf{x}, d) ao sistema. Se analisarmos a equação (3.4), vemos que a região formada por Ψ_0^k tende a diminuir caso $\mathcal{H}(k)$ não esteja contida na mesma. Logo, a medida

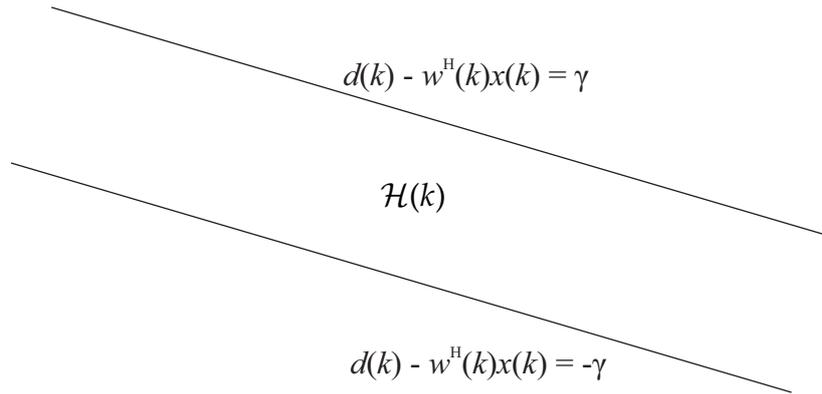


Figura 3.2: Conjunto de restrições para a variável $\mathbf{w}(k)$ no caso bidimensional.

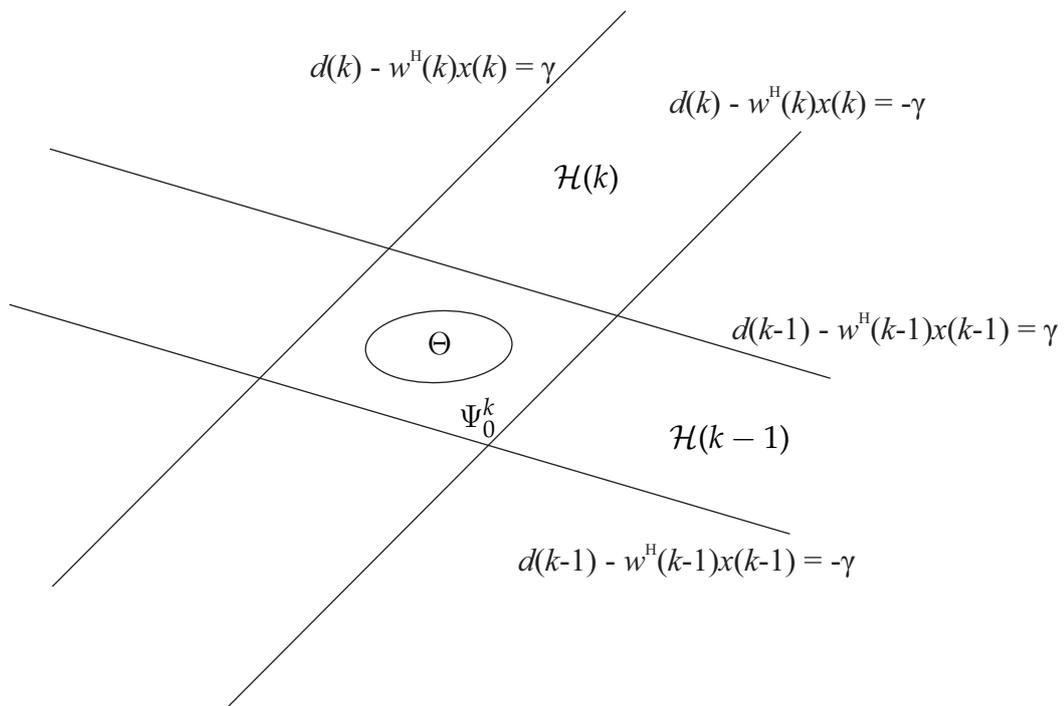


Figura 3.3: Interpretação geométrica do conjunto Ψ_0^k .

que o número de iterações aumenta, espera-se um estreitamento do polígono formado por essa região ao ponto de se aproximar do conjunto Θ , como pode ser visto em Figura 3.3.

A região do conjunto formado por Ψ_0^k que esteja contida totalmente por $\mathcal{H}(k)$, não necessita de atualização dos coeficientes, pois não existe informação nova para o sistema. Isso gera a possibilidade de redução de consumo de energia e de operações computacionais.

O SM-AP se enquadra nos algoritmos que utilizam o conceito SMF utilizando uma quantidade finita do conjunto de restrições $\mathcal{H}(k)$ para aproximar o conjunto Ψ_0^k .

Além disso, este algoritmo generaliza outros conhecidos, como o SM-NLMS e o SM-BNLMS [4], sendo que o primeiro considera Ψ_k^k e o último utiliza o conjunto Ψ_{k-1}^k .

O SM-AP generaliza o efeito de memória presente nos algoritmos SM-NLMS e SM-BNLMS ao estender a reutilização de $L + 1$ conjuntos anteriores na atualização do vetor de coeficientes. O objetivo é que a atualização dos coeficientes pertença aos últimos $L + 1$ conjuntos de restrições anteriores, ou $\mathbf{w}(k+1) \in \Psi_{k-L}^k$. Além disso, o SM-AP engloba os algoritmos clássicos baseados em gradiente estocástico, como o NLMS, BNLMS e AP [4, 5].

3.2.2 Algoritmo SM-AP Complexo

Esta seção visa apresentar o algoritmo SM-AP complexo. Para isso, deve-se notar que a atualização dos coeficientes do SM-AP pode gerar um vetor de parâmetros onde $\mathbf{w}(k+1) \notin \Psi_{k-L-1}^{k-1}$. Este comportamento pode ser visto geometricamente através da Figura 3.4.

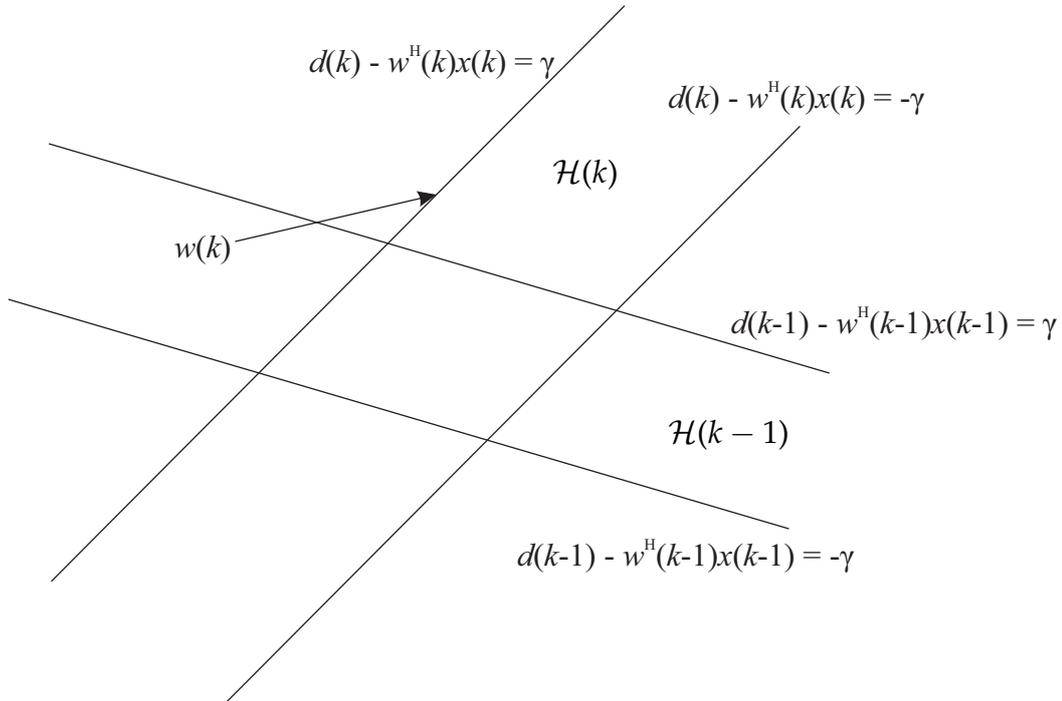


Figura 3.4: Interpretação geométrica de $\Psi_{k-1}^{k-1} \cap \Psi_k^k$, onde a atualização do coeficiente não pertence a essa interseção.

Para que a probabilidade deste evento seja minimizada, a atualização do vetor de coeficientes segue o princípio da mínima perturbação, ou seja, $\|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2$

deve ser minimizado. Portanto, para obtermos o algoritmo SM-AP, é necessário que os seguintes objetivos sejam alcançados:

$$\text{minimizar } \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2 \quad (3.5)$$

$$\text{de modo que } \mathbf{d}(k) - \mathbf{X}^T(k)\mathbf{w}^*(k+1) = \gamma(k).$$

supondo que o vetor de entradas $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ é definido por:

$$\mathbf{x}(k) \triangleq [x(k) \quad x(k-1) \quad \dots \quad x(k-N)]^T$$

Assim como no caso dos algoritmos AP, esses sinais são agrupados de forma a manter os últimos $L+1$ sinais de entrada:

$$\mathbf{X}(k) \triangleq [\mathbf{x}(k) \quad \mathbf{x}(k-1) \quad \dots \quad \mathbf{x}(k-L)]^T$$

resultando em $\mathbf{X}(k) \in \mathbb{C}^{(N+1) \times (L+1)}$. Além disso, o vetor de coeficientes é denotado por:

$$\mathbf{w}(k) \triangleq [w_0(k) \quad w_1(k) \quad \dots \quad w_N(k)]^T$$

enquanto o vetor de valores desejados se torna:

$$\mathbf{d}(k) \triangleq [d(k) \quad d(k-1) \quad \dots \quad d(k-L)]^T$$

onde $\mathbf{d}(k) \in \mathbb{C}^{(L+1) \times 1}$ refere-se aos $L+1$ instantes anteriores. O erro é definido como:

$$\mathbf{e}(k) \triangleq [e_0(k) \quad e_1(k) \quad \dots \quad e_L(k)]^T$$

onde $e_i = \epsilon(k-i) = d(k-i) - \mathbf{x}^T(k-i)\mathbf{w}(k)$, para $i \in \{1, \dots, L\}$, constitui o erro a posteriori.

Adicionalmente, o vetor de restrições $\gamma(k)$ que limita o valor dos erros aceitáveis após a atualização dos coeficientes é definido por:

$$\gamma(k) \triangleq [\gamma_0(k) \quad \gamma_1(k) \quad \dots \quad \gamma_L(k)]^T$$

A solução da função objetivo que queremos minimizar, dada pela equação (3.5), passa pela utilização do método dos multiplicadores de Lagrange [55], com o objetivo de transformar uma minimização com restrições em uma sem restrições. Isso resulta na seguinte função objetivo:

$$\mathbf{F}[\mathbf{w}(k+1)] = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\| + \Re \left\{ \boldsymbol{\lambda}^T(k) \left[\mathbf{d}(k) - \mathbf{X}^T(k) \mathbf{w}^*(k+1) - \gamma(k) \right] \right\} \quad (3.6)$$

sendo o termo referente a parte real \Re utilizado de forma que toda a função objetivo $\mathbf{F}[\mathbf{w}(k+1)]$ se torne real. Adicionalmente, deve-se notar que o vetor de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(k) \in \mathbb{C}^{(L+1) \times 1}$.

Se realizarmos a operação de gradiente em $\mathbf{F}[\mathbf{w}(k+1)]$ com relação a $\mathbf{w}^*(k+1)$ e sabendo que $\Re\{v\} = \frac{1}{2}(v + v^*)$, sendo v complexo, obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{F}[\mathbf{w}(k+1)]}{\partial \mathbf{w}^*(k+1)} = \frac{1}{2} [\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)] - \frac{1}{2} \mathbf{X}(k) \boldsymbol{\lambda}(k) \quad (3.7)$$

vale ressaltar que, neste caso, derivadas em relação a $\mathbf{w}(k+1)$ são consideradas constantes. Posteriormente, podemos igualar a equação (3.7) a zero, de forma a encontrarmos um ponto crítico, o que resulta em:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}(k) \boldsymbol{\lambda}(k) \quad (3.8)$$

Se utilizarmos a restrição imposta pela equação (3.5), podemos reescrevê-la utilizando a equação (3.8), como segue:

$$\mathbf{d}^*(k) - \mathbf{X}^H(k) [\mathbf{w}(k) + \mathbf{X}(k) \boldsymbol{\lambda}(k)] = \gamma^* \quad (3.9)$$

e partindo do princípio que $\mathbf{e}^*(k) \triangleq \mathbf{d}^*(k) - \mathbf{X}^H(k) \mathbf{w}(k)$, podemos reescrever a equação (3.9), tornando-a:

$$\mathbf{e}^*(k) - \gamma^* = \mathbf{X}^H(k) \mathbf{X}(k) \boldsymbol{\lambda}(k)$$

Por fim, podemos resolver para o vetor dos multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(k)$, resultando em:

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \left[\mathbf{X}^H(k) \mathbf{X}(k) \right]^{-1} (\mathbf{e}^*(k) - \gamma^*) \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.10) na equação (3.8), obtemos o valor do vetor de coeficientes, tal que:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}(k)\boldsymbol{\lambda}(k) \\ \mathbf{w}(k+1) &\triangleq \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}(k) \left[\mathbf{X}^H(k)\mathbf{X}(k) \right]^{-1} [\mathbf{e}^*(k) - \boldsymbol{\gamma}^*]\end{aligned}\quad (3.11)$$

onde obtemos o algoritmo recursivo que forma o SM-AP complexo a seguir:

$$\mathbf{w}(k+1) \triangleq \begin{cases} \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}(k) \left[\mathbf{X}^H(k)\mathbf{X}(k) + \delta\mathbf{I} \right]^{-1} [\mathbf{e}(k)^* - \boldsymbol{\gamma}^*] & \text{se } |e_0(k)| > \gamma, \\ \mathbf{w}(k) & \text{caso contrário,} \end{cases}\quad (3.12)$$

que demonstra que erros menores que γ são aceitáveis e não geram informações importantes para atualizar o sistema. A variável $\delta \ll 1$ é adicionada buscando evitar singularidades.

Até este momento não foi definido um valor para os elementos do vetor $\boldsymbol{\gamma}$. Esta escolha é arbitrária, porém restrita a $|\gamma_i| \leq \gamma$. Um modo simples de definir esta variável é utilizar o fato que os L erros anteriores já estão contidos no conjunto formado por Ψ_{k-L}^{k-1} e não necessitam ser alterados. Desta maneira, podemos definir:

$$\gamma_0^*(k) = \gamma \frac{e_0^*(k)}{|e_0(k)|}$$

enquanto que, para anular os outros elementos do vetor $\mathbf{e}(k)$, é realizada a definição:

$$\gamma_i(k) = e_i(k)$$

de modo que as L últimas componentes do vetor de erro $\mathbf{e}(k)$ são mantidas inalteradas. Esta atualização pode ser vista de forma geométrica através da Figura 3.5, onde o vetor $\mathbf{w}(k+1)$ será posicionado na borda do conjunto de restrições $\mathcal{H}(k)$.

Em resumo, essa mudança permite que a equação (3.12) seja reescrita como:

$$\mathbf{w}(k+1) \triangleq \mathbf{w}(k) + \mathbf{X}(k) \left[\mathbf{X}^H(k)\mathbf{X}(k) + \delta\mathbf{I} \right]^{-1} \mu(k)e^*(k)\mathbf{u}_1\quad (3.13)$$

onde:

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 - \frac{\gamma}{|e(k)|} & \text{se } |e_0(k)| > \gamma \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}\quad (3.14)$$

que representa o algoritmo para atualizar o vetor de coeficientes $\mathbf{w}(k+1)$ do SM-AP.

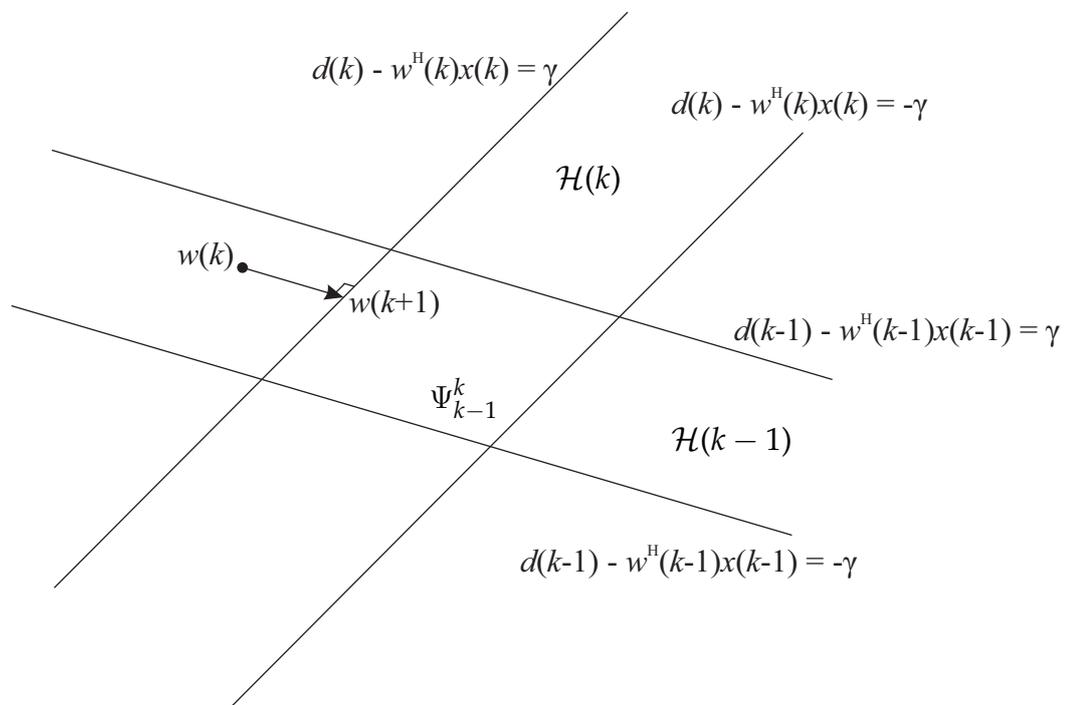


Figura 3.5: Interpretação geométrica de $\Psi_{k-1}^k \cap \Psi_k^k$, onde a atualização do coeficiente do erro a posteriori é constante.

Capítulo 4

Transceptores Super-Rápidos em Bloco com Redundância Reduzida

Em [28] os autores desenvolveram transceptores super-rápidos com redundância reduzida utilizando sistemas baseados em ZP-ZJ. Neste capítulo, serão apresentados tais sistemas. A seguir, descreveremos as modificações, que constituem a proposta desta dissertação, em sistemas multiportadoras e monoportadoras, com o objetivo de permitir a inserção de algoritmos com seleção de dados no processo de equalização, bem como a generalização em torno do número de ramos do equalizador.

4.1 Sistemas com Redundância Reduzida

A complexidade em transceptores necessita ser reduzida sempre que possível, pois possibilita a diminuição do consumo de energia e a implementação em sistemas que dispõem de poucos recursos. Podemos destacar a complexidade em dois estágios durante a recepção dos símbolos. Primeiramente, durante o estágio de equalização, após o processo de ZP-ZJ, por meio da multiplicação pela matriz de recepção \mathbf{G}_0 . Essa operação requer uma complexidade $\mathcal{O}(M^2)$, ao considerarmos matrizes não estruturadas. O segundo momento ocorre quando se faz necessário definir cada um dos coeficientes que compõem a matriz \mathbf{G}_0 . Isto eleva a complexidade do estágio de recepção para $\mathcal{O}(M^3)$ operações complexas.

A utilização de transceptores baseados em DFT tem obtido sucesso em sistemas

OFDM e SC-FD, pois tal inclusão viabiliza o desacoplamento entre os sinais recebidos [6]. Busca-se que esse desacoplamento e as operações de pseudo-inversas (necessárias para a equalização) possam ser realizadas com um baixo número de operações computacionais. A matriz \mathbf{H}_0 é uma matriz estruturada, ou seja, segue um padrão pré-definido de formação dos seus elementos. Esta característica pode ser utilizada para reduzir o número de operações. Essas estruturas estão naturalmente presentes nas matrizes ou podem ser induzidas a apresentar esse padrão através de transformações matriciais [56].

4.2 Representação de Matrizes Estruturadas

Uma matriz estruturada permite a redução da quantidade de parâmetros necessários para descrevê-la. Além disso, podem explorar a forma estruturada para simplificar a computação das operações. Logo, iremos apresentar algumas matrizes estruturadas, como diagonal, circulante, pseudo-circulante, Toeplitz, Vandermonde, Cauchy e Bezoutiano, que formam a base para a criação dos transceptores super-rápidos apresentados.

A matriz λ -circulante é um caso específico de uma matriz de Toeplitz dada por:

$$\mathbf{Z}_\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_{M-1} & \lambda \mathbf{e}_0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & & & \lambda \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

sendo $\lambda \in \mathbb{C}$ uma constante e \mathbf{e}_m um vetor de tamanho $M \times 1$ em que todos seus elementos são nulos, exceto pelo m -ésimo elemento, que possui o valor 1, ou seja, \mathbf{Z}_λ em que a diagonal, abaixo da diagonal principal, é formada por valores iguais a 1 e uma constante no último elemento da primeira linha.

Adicionalmente, a matriz diagonal pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v &= \begin{bmatrix} v_0 \mathbf{e}_0 & v_1 \mathbf{e}_1 & \dots & v_{(M-1)} \mathbf{e}_{(M-1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_0 & & & \\ & v_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & v_{M-1} \end{bmatrix} \\ &\triangleq \text{diag}\{\mathbf{v}\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

A fim de representar a matriz diagonal, podemos utilizar a notação $\text{diag}\{v_0\}_x$ para os elementos da matriz, que equivale a uma matriz complexa possuir o valor $v_0 \in \mathbb{C}$ em sua linha x e coluna x , sendo este um número natural.

Algumas propriedades em relação às inversas das matrizes \mathbf{Z}_λ e \mathbf{D}_v podem ser demonstradas. A inversa da matriz λ -circulante é dada por:

$$\mathbf{Z}_\lambda \mathbf{Z}_\lambda^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \lambda \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

De forma adicional, é possível afirmar a igualdade:

$$\mathbf{Z}_\lambda^{-1} = \mathbf{Z}_{\frac{1}{\lambda}}^T \tag{4.3}$$

Esta matriz pode ser modificada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\frac{1}{\lambda}}^T &= \mathbf{Z}_{\frac{1}{(\lambda^*)^*}}^T \\ &= \left(\mathbf{Z}_{\frac{1}{\lambda^*}}^T \right)^* \\ &= \mathbf{Z}_{\frac{1}{\lambda^*}}^H \end{aligned} \tag{4.4}$$

Em relação à matriz diagonal, sabe-se que a inversa desta matriz é representada pela inversa de cada elemento da diagonal principal, de modo que:

$$\mathbf{D}_v^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\mathbf{v}} \right\}$$

onde o vetor $\mathbf{v} \triangleq \{v_0 v_1 \dots v_{M-1}\}^T$, supondo que não há elementos nulos neste vetor.

As matrizes Toeplitz \mathbf{T} são aquelas que possuem seus elementos fixos em suas diagonais. Suponha que $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{M_2 \times M_1}$, logo essa matriz pode ser visualizada por meio da seguinte definição:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{1-M_1} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & t_{2-M_1} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \dots & t_{3-M_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{M_2-1} & t_{M_2-2} & t_{M_2-3} & \dots & t_{M_2-M_1} \end{bmatrix} \\ &= \text{toeplitz} \left\{ \left[t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{M_2-1} \right], \left[t_0 \ t_{-1} \ t_{-2} \ \dots \ t_{1-M_1} \right]^T \right\} \\ &\triangleq \text{toeplitz} \left\{ \mathbf{c}, \mathbf{r}^T \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

sendo \mathbf{c} o vetor contendo a primeira coluna da matriz e \mathbf{r} o vetor da primeira linha. Note que esses vetores são suficientes para representar a matriz, pois podemos replicar os elementos destes vetores em suas respectivas diagonais.

Vamos introduzir outro importante tipo de matriz, as matrizes Vandermonde. Suponha a existência de um vetor $\mathbf{v} \triangleq \{v_0 v_1 \dots v_{M-1}\}^T$ complexo de tamanho $M \times 1$, podemos gerar uma matriz Vandermonde de tamanho $M \times M$, como segue:

$$\mathbf{V}_v = \begin{bmatrix} v_0^0 & v_0^1 & \dots & v_0^{M-1} \\ v_1^0 & v_1^1 & \dots & v_1^{M-1} \\ v_{M-2}^0 & v_{M-2}^1 & \dots & v_{M-2}^{M-1} \\ v_{M-1}^0 & v_{M-1}^1 & \dots & v_{M-1}^{M-1} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Perceba que os elementos que formam as linhas são provenientes de uma progressão geométrica. Esta matriz estruturada possui uma relação com matrizes DFT. Para evidenciar este fato, suponha que um número complexo ζ e que desejamos encontrar as M raízes de ζ . Partindo da igualdade $\epsilon^M = \zeta$, onde $\epsilon \in \mathbb{C}$, podemos reescrever ζ em

sua forma polar, gerando:

$$\begin{aligned}
 e^M &= |\zeta| e^{j\angle\zeta} \\
 e^M &= |\zeta| e^{j\angle\zeta} e^{-j2\pi m} \\
 \epsilon_m &= \underbrace{|\zeta|^{\frac{1}{M}} e^{\frac{j\angle\zeta}{M}}}_{\epsilon_0} e^{-\frac{j2\pi m}{M}} \\
 \epsilon_m &= \epsilon_0 W_M^m
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

deve-se perceber que ϵ_m representa cada um das M raízes complexas, sendo $m \in \{0, \dots, M-1\}$. Vale notar que a fase do número complexo ϵ está limitada a fase principal, ou seja, possui valores entre $-\pi$ e π .

Posteriormente, podemos definir o vetor ϵ como a seguir:

$$\epsilon \triangleq [\epsilon_0 \ \epsilon_1 \ \dots \ \epsilon_{M-1}]^T$$

isso nos permite criar a relação da matriz Vandermonde com a DFT, como segue:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_\epsilon &= \begin{bmatrix} \epsilon_0^0 & \epsilon_0^1 & \dots & \epsilon_0^{M-1} \\ \epsilon_1^0 & \epsilon_1^1 & \dots & \epsilon_1^{M-1} \\ \epsilon_2^0 & \epsilon_2^1 & \dots & \epsilon_2^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_{M-1}^0 & \epsilon_{M-1}^1 & \dots & \epsilon_{M-1}^{M-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (\epsilon_0 W_M^0)^0 & (\epsilon_0 W_M^0)^1 & \dots & (\epsilon_0 W_M^0)^{M-1} \\ (\epsilon_0 W_M^0)^0 & (\epsilon_0 W_M^1)^1 & \dots & (\epsilon_0 W_M^1)^{M-1} \\ (\epsilon_0 W_M^0)^0 & (\epsilon_0 W_M^2)^1 & \dots & (\epsilon_0 W_M^2)^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\epsilon_0 W_M^0)^0 & (\epsilon_0 W_M^{M-1})^1 & \dots & (\epsilon_0 W_M^{M-1})^{M-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} W_M^0 & W_M^0 & \dots & W_M^0 \\ W_M^0 & W_M^1 & \dots & W_M^{M-1} \\ W_M^0 & W_M^2 & \dots & W_M^{2M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_M^0 & W_M^{M-1} & \dots & W_M^{(M-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_0^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon_0^1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon_0^{M-1} \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{M} \mathbf{W}_M \text{diag}\{\epsilon_0^m\}
 \end{aligned}$$

sendo $m = \{1, \dots, M-1\}$, \mathbf{W}_m a matriz de DFT unitária [34].

Outra matriz estruturada é a de Cauchy. Ela é formada a partir de dois vetores complexos:

$$\mathbf{v} \triangleq [v_0 \ v_1 \ \dots \ v_{M-1}]^T$$

e

$$\boldsymbol{\lambda} \triangleq [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \dots \ \lambda_{M-1}]^T$$

sendo o primeiro de dimensões $M_1 \times 1$ e o segundo de tamanho $M_2 \times 1$. A matriz Cauchy complexa pode ser descrita como:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-v_0\lambda_0} & \frac{1}{1-v_0\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{1-v_0\lambda_{(M_2-1)}} \\ \frac{1}{1-v_1\lambda_0} & \frac{1}{1-v_1\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{1-v_1\lambda_{(M_2-1)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1-v_{(M_1-1)}\lambda_0} & \frac{1}{1-v_{(M_1-1)}\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{1-v_{(M_1-1)}\lambda_{(M_2-1)}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\triangleq \left[\frac{1}{1-v_{m_1}\lambda_{m_2}} \right]_{(m_1, m_2)}$$

sendo $m_1 \in \{0, 1, \dots, M_1 - 1\}$ e $m_2 \in \{0, 1, \dots, M_2 - 1\}$.

A última matriz estruturada é a Bezoutiana. Esta matriz se difere das demais por não possuir uma regra de formação para seus elementos. Entretanto, existem formas de representá-la através dos operadores de *displacement-rank*, que será visto na próxima seção.

4.3 Abordagem por *Displacement-Rank*

Foram criados vários métodos visando medir o quanto uma matriz é estruturada, sendo o mais promissor a abordagem utilizando *displacement-rank* [57]. Sua simplicidade se deve à análise do posto da matriz após esta operação, sendo o suficiente para indicar o quanto esta matriz é estruturada. A quantidade reduzida de elementos para representar uma matriz pode ser utilizada na diminuição das operações envolvendo estas matrizes.

Para definir os operadores de *displacement-rank*, vamos assumir duas matrizes quadradas $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_1}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M_2 \times M_2}$, sendo $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$. Assim, podemos definir os operadores de Sylvester e Stein [58, 59], respectivamente, como:

$$\nabla_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C}) \triangleq \mathbf{AC} - \mathbf{CB} \quad (4.9)$$

$$\Delta_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C}) \triangleq \mathbf{C} - \mathbf{ACB} \quad (4.10)$$

em que $\nabla_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C})$ e $\Delta_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C})$ transformam uma matriz complexa \mathbf{C} de tamanho $M_1 \times M_2$ em outra matriz $\mathbf{C}^{M_1 \times M_2}$. Além disso, o posto da matriz \mathbf{C} é indicado por $R \in \mathbb{N}$. As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} devem ser escolhidas de forma a reduzir este posto, o que consequentemente diminui o número de elementos distintos necessários para representar as matrizes.

Deve-se ressaltar que o posto da matriz, definida por R , deve ser muito menor em relação a cada dimensão das matrizes. No caso da matriz \mathbf{C} , é reduzido de $M_1 M_2$ para até $R(M_1 + M_2)$ elementos. Este fato indica que quanto maior essa diferença, menor será o número de elementos necessários para representar a matriz.

As equações (4.9) e (4.10) podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C}) &= \sum_{r=0}^{R-1} \mathbf{p}_r \mathbf{q}_r^H \\ &= \mathbf{PQ}^H \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C}) &= \sum_{r=0}^{R-1} \mathbf{p}_r \mathbf{q}_r^H \\ &= \mathbf{PQ}^H \end{aligned} \quad (4.11)$$

em que o par de matrizes (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) é conhecido como *displacement-generator pair of matrices* e é definido para os operadores de Sylvester e Stein como:

$$\mathbf{P} \triangleq \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,(R-1)} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,(R-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{(M_1-1),0} & p_{(M_1-1),1} & \cdots & p_{(M_1-1),(R-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & \cdots & q_{0,(R-1)} \\ q_{1,0} & q_{1,1} & \cdots & q_{1,(R-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{(M_2-1),0} & q_{(M_2-1),1} & \cdots & q_{(M_2-1),(R-1)} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{M_1 \times R}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{M_2 \times R}$. Note que $\mathbf{p}_r \in \mathbb{C}^{M_1 \times 1}$ e $\mathbf{q}_r \in \mathbb{C}^{M_2 \times 1}$ são os vetores que formam a r -ésima linha destas matrizes, respectivamente.

Podemos mostrar como as matrizes estruturadas são comprimidas usando estes operadores. Primeiramente, iremos utilizar o operador Sylvester em uma matriz de Toeplitz \mathbf{T} , apresentada na equação (4.5), utilizando a matriz λ -circulante que pode ser vista na equação (4.1), tal que:

$$\nabla_{\mathbf{Z}_\eta, \mathbf{Z}_\epsilon}(\mathbf{T}) = \mathbf{Z}_\eta \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{Z}_\epsilon \quad (4.12)$$

esta expressão, apresentada na equação (4.12), gera uma submatrix nula de dimensões $M_2 - 1 \times M_1 - 1$, que somente não engloba a primeira linha e a última coluna da matriz gerada por $\nabla_{\mathbf{Z}_\eta, \mathbf{Z}_\epsilon}(\mathbf{T})$. Este resultado faz sentido, pois uma matriz Toeplitz pode ser representada somente por dois vetores, como visto na equação (4.5). Logo, podemos reescrever a equação (4.12) como:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{Z}_\eta, \mathbf{Z}_\epsilon}(\mathbf{T}) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta t_{M_2-1} - t_{-1} & \eta t_{M_2-2} - t_{-2} & \dots & \eta t_{M_2-(M_1-1)} - t_{-(M_1-1)} & \eta t_{M_2-M_1} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \eta t_0 \\ t_{-(M_1-1)} - \eta t_1 \\ \vdots \\ t_{M_2-M_1-2} - \eta t_{M_2-2} \\ t_{M_2-M_1-1} - \eta t_{M_2-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1^H + \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2^H \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^H \\ \mathbf{q}_2^H \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P} \mathbf{Q}^H \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde as matrizes $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{M_2 \times 2}$ e $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{M_1 \times 2}$.

O mesmo pode ser feito para matrizes Vandermonde. Se aplicarmos o operador Sylvester a uma matriz Vandermonde $M \times M$, representada pela equação (4.6), teremos:

$$\nabla_{\mathbf{D}_v, \mathbf{Z}_0}(\mathbf{V}_v) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & v_0^M \\ 0 & \dots & 0 & v_1^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & v_{M-1}^M \end{bmatrix}$$

que gera uma matriz de posto 1 e que necessita somente de M elementos para ser representada.

A matriz de Cauchy, definida na equação (4.8), pode ser transformada utilizando o operador de Stein em:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{D}_v, \mathbf{D}_\lambda}(\mathbf{C}_{v, \lambda}) &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{1}_{M_1 \times M_2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

considerando que $\mathbf{1}_{M_1 \times M_2}$ é uma matriz de tamanho $M_1 \times M_2$ formada por elementos 1. Esta matriz gerada possui posto 1.

Com as ferramentas matemáticas definidas nessa seção, podemos encontrar a matriz Bezoutiana \mathbf{B} que, apesar de não possuir uma regra de formação entre seus elementos, pode ser descrita através dos operadores *displacement-rank*. Utilizando o operador de Sylvester, obtemos:

$$\nabla_{\mathbf{Z}_v, \mathbf{Z}_\lambda}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}\mathbf{Q}^H \quad (4.15)$$

para $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{M_1 \times R}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{M_2 \times R}$ e $v, \lambda \in \mathbb{C}$. Isso demonstra que outras matrizes, como Toeplitz, são na verdade matrizes Bezoutianas.

4.4 Desenvolvendo as Matrizes de Recepção

Nesta seção, apresentamos os receptores que utilizam estruturas super-rápidas desenvolvidos em [28]. O canal efetivo modelado pela matriz \mathbf{H}_0 , apresentada na equa-

ção (2.35), é uma matriz Toeplitz retangular e, assim como nos equalizadores MMSE e ZF obtidos em sistemas OFDM e SC-FD, é esperado que se possa utilizar tal estrutura na criação de novos equalizadores baseados em sistemas ZP-ZJ, de preferência utilizando estruturas que necessitem de um número baixo de operações.

A matriz estruturada do canal efetivo $\mathbf{G}_{0\text{MMSE}}$, apresentada na equação (2.47), pode ser comprimida. Com esse objetivo, podemos analisar o termo:

$$(\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0 + \rho \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{H}_0^H \quad (4.16)$$

Esta parcela constitui uma matriz pseudo-inversa regularizada, ou seja, é formada pela pseudo-inversa Moore-Penrose \mathbf{H}_0^\dagger , dada por:

$$\mathbf{H}_0^\dagger = (\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0)^{-1} \mathbf{H}_0^H$$

acrescida de um fator de regularização $\rho \mathbf{I}_M$.

Como percebemos por meio da equação (4.5), a matriz \mathbf{H}_0 é de Toeplitz. Portanto, suponha que há uma matriz de Toeplitz complexa $\mathbf{H}_0 = \mathbf{T}$ de tamanho $M_2 \times M_1$, a fim de redefinir a equação (4.16) como:

$$\mathbf{T}_\rho^\dagger \triangleq (\mathbf{T}^H \mathbf{T} + \rho \mathbf{I}_{M_1}) \mathbf{T}^H \quad (4.17)$$

Esta mesma equação (4.17) pode ser descrita de forma equivalente. Basta aplicarmos a seguinte identidade:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD}^H)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D}^H \mathbf{A}^{-1}$$

sendo $\mathbf{A} = \rho \mathbf{I}_{M_1}$, $\mathbf{B} = \mathbf{T}^H$, $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}_{M_2}$ e $\mathbf{D}^H = \mathbf{T}$ e assumindo que as operações entre as matrizes são possíveis, temos como resultado:

$$\mathbf{T}_\rho^\dagger \triangleq \mathbf{T}^H (\mathbf{T} \mathbf{T}^H + \rho \mathbf{I}_{M_2})^{-1} \quad (4.18)$$

Continuando, a matriz \mathbf{T}_ρ^\dagger pode ser comprimida utilizando o operador de Sylvester, tal que:

$$\nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta} (\mathbf{T}_\rho^\dagger) = \mathbf{Z}_\epsilon \mathbf{T}_\rho^\dagger - \mathbf{T}_\rho^\dagger \mathbf{Z}_\eta$$

posteriormente, as duas parcelas em que existem a matriz \mathbf{T}_ρ^\dagger podem ser substituídas, respectivamente, pelas equações (4.18) e (4.17), formando:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{T}_\rho^\dagger) &= \mathbf{Z}_\epsilon \mathbf{T}^H (\mathbf{T} \mathbf{T}^H + \rho \mathbf{I}_{M_2})^{-1} - (\mathbf{T}^H \mathbf{T} + \rho \mathbf{I}_{M_1})^{-1} \mathbf{T}^H \mathbf{Z}_\eta \\
 &= \left(\mathbf{T}^H \mathbf{T} + \rho \mathbf{I}_{M_1} \right)^{-1} \left[\left(\mathbf{T}^H \mathbf{T} + \rho \mathbf{I}_{M_1} \right) \mathbf{Z}_\epsilon \mathbf{T}^H - \mathbf{T}^H \mathbf{Z}_\eta (\mathbf{T} \mathbf{T}^H + \rho \mathbf{I}_{M_2}) \right] (\mathbf{T} \mathbf{T}^H + \rho \mathbf{I}_{M_2})^{-1} \\
 &= \left(\mathbf{T}^H \mathbf{T} + \rho \mathbf{I}_{M_1} \right)^{-1} \left[-\mathbf{T}^H \nabla_{\mathbf{Z}_\eta, \mathbf{Z}_\epsilon}(\mathbf{T}) \mathbf{T}^H + \rho \nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{T}^H) \right] (\mathbf{T} \mathbf{T}^H + \rho \mathbf{I}_{M_2})^{-1}
 \end{aligned}$$

em que $\nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{T})$ é definida na equação (4.12).

Agora podemos substituir $\nabla_{\mathbf{Z}_\eta, \mathbf{Z}_\epsilon}(\mathbf{T})$ pelo par de matrizes geradoras $\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{Q}}^H$ e $\nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{T}^H)$ por $\check{\mathbf{P}}\check{\mathbf{Q}}^H$, de modo que obtemos:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{T}_\rho^\dagger) &= \left[(\mathbf{T}^H \mathbf{T} + \rho \mathbf{I}_{M_1})^{-1} \check{\mathbf{P}} \quad -\mathbf{T}_\rho^\dagger \hat{\mathbf{P}} \right] \begin{bmatrix} \check{\mathbf{Q}}^H \rho (\mathbf{T} \mathbf{T}^H + \rho \mathbf{I}_{M_2})^{-1} \\ \hat{\mathbf{Q}}^H \mathbf{T}_\rho^\dagger \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{P}\mathbf{Q}^H
 \end{aligned}$$

sendo $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{M_1 \times R}$ e $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{M_2 \times R}$ e $R = 4$. Conseqüentemente, é possível afirmar que a matriz pseudo-inversa regularizada \mathbf{T}_ρ^\dagger é Bezoutiana.

A matriz estruturada de Cauchy foi a matriz com a menor representação encontrada até o momento, como pode ser visto em (4.8). Sabemos que \mathbf{T}_ρ^\dagger é Bezoutiana e, conseqüentemente, $\mathbf{G}_{0_{\text{MMSE}}}$ se aproxima dessa matriz estruturada.

É possível transformar uma matriz Bezoutiana em uma matriz de Cauchy, a fim de diminuir a complexidade computacional. Suponha uma matriz retangular Bezoutiana $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2}$, sendo $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ em que o número de colunas é maior que o de linhas. Em busca desta transformação entre matrizes estruturadas, podemos escrever a matriz Bezoutiana \mathbf{B} como:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{B}) &= \mathbf{P}\mathbf{Q}^H \\
 &= \mathbf{Z}_\epsilon \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{Z}_\eta
 \end{aligned}$$

Como visto na equação (4.15), matrizes Bezoutianas são comprimidas pelo operador de Sylvester, enquanto matrizes Cauchy pelo de Stein, como pode ser visto em (4.14). Para que possa haver a transformação matricial que procuramos, é esperado que ocorra uma relação entre estes operadores. Em busca dessa relação, podemos re-

escrever $\nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{B})$ como:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{B}) &= (\mathbf{Z}_\epsilon \mathbf{B} \mathbf{Z}_\eta^{-1} - \mathbf{B}) \mathbf{Z}_\eta \\ &= -(\mathbf{B} - \mathbf{Z}_\epsilon \mathbf{B} \mathbf{Z}_\eta^{-1}) \mathbf{Z}_\eta\end{aligned}$$

e posteriormente utilizamos a equação (4.3) para gerar:

$$\nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{B}) = -(\mathbf{B} - \mathbf{Z}_\epsilon \mathbf{B} \mathbf{Z}_{1/\eta}^T) \mathbf{Z}_\eta$$

e utilizando o fato de $\mathbf{Z}_v = \mathbf{V}_v^{-1} \mathbf{D}_v \mathbf{V}_v$ para as M raízes $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$, temos que:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{B}) &= -(\mathbf{B} - \mathbf{V}_\epsilon^{-1} \mathbf{D}_\epsilon \mathbf{V}_\epsilon \mathbf{B} \mathbf{V}_{1/\eta}^T \mathbf{D}_{1/\eta} \mathbf{V}_{1/\eta}^{-T}) \mathbf{Z}_\eta \\ &= -\mathbf{V}_\epsilon^{-1} \Delta_{\mathbf{D}_\epsilon, \mathbf{D}_{1/\eta}}(\mathbf{V}_\epsilon \mathbf{B} \mathbf{V}_{1/\eta}^T) \mathbf{V}_{1/\eta}^{-T} \mathbf{Z}_\eta\end{aligned}$$

podemos assim deixar em evidência o operador de Stein e utilizar a equação (4.4) para chegarmos a relação entre os operadores que estamos procurando:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbf{D}_\epsilon, \mathbf{D}_{1/\eta}}(\mathbf{V}_\epsilon \mathbf{B} \mathbf{V}_{1/\eta}^T) &= -\mathbf{V}_\epsilon \nabla_{\mathbf{Z}_\epsilon, \mathbf{Z}_\eta}(\mathbf{B}) \mathbf{Z}_{1/\eta}^H \mathbf{V}_{1/\eta}^T \\ &= -\mathbf{V}_\epsilon \mathbf{P} \mathbf{Q}^H \mathbf{Z}_{1/\eta}^H \mathbf{V}_{1/\eta}^T \\ &= \overline{\mathbf{P} \mathbf{Q}}^H\end{aligned}\tag{4.19}$$

sendo

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{P}} &= -\mathbf{V}_\epsilon \mathbf{P} \\ \overline{\mathbf{Q}}^H &= (\mathbf{V}_{1/\eta}^* \mathbf{Z}_{1/\eta} \mathbf{Q})^H\end{aligned}\tag{4.20}$$

Vale ressaltar que M_1 deve ser muito maior que o posto da matriz após o operador de Stein.

A equação (4.19) é na verdade uma matriz generalizada de Cauchy. Esta matriz estruturada é definida por:

$$\Delta_{\mathbf{D}_\epsilon, \mathbf{D}_\eta}(\mathbf{Y}_{v, \eta}) = \sum_{r=0}^{R-1} \mathbf{p}_r \mathbf{q}_r^H$$

Continuando o raciocínio, precisamos fazer a relação entre a matriz generalizada de Cauchy e a matriz de Cauchy $\mathbf{C}_{v, \lambda}$. Isso pode ser realizado utilizando a igualdade ??:

$$[\mathbf{Y}_{v, \lambda}]_{m_1 m_2} = \left[\sum_{r=0}^{R-1} \mathbf{D}_{\mathbf{p}_r} \mathbf{C}_{v, \lambda} \mathbf{D}_{\mathbf{q}_r}^* \right]_{m_1 m_2}\tag{4.21}$$

sendo \mathbf{D}_{p_r} uma matriz complexa diagonal de tamanho e $M_1 \times M_1$ e \mathbf{D}_{q_r} de tamanho $M_2 \times M_2$.

Se utilizarmos dois vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{M_1 \times 1}$ e $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{M_2 \times 1}$ com seus respectivos elementos v e λ sendo suas raízes complexas, podemos reescrever a matriz de Cauchy de tal forma que:

$$\mathbf{C}_{v,\lambda} = \mathbf{W}_{M_1} \left[\text{diag} \left\{ (v_0 \lambda_0)^{m_1} \right\}_{m_1} \mathbf{0}_{M_1 \times (M_2 - M_1)} \right] \mathbf{W}_{M_2} \text{diag} \left\{ \frac{\sqrt{M_2 M_1}}{1 - v \lambda_{m_2}^{M_1}} \right\}_{m_2} \quad (4.22)$$

onde $m_1 = \{0, \dots, M_1 - 1\}$ e $m_2 = \{0, \dots, M_2 - 1\}$.

Podemos então reescrever a matriz de Cauchy generalizada $\mathbf{Y}_{v,\lambda}$, ao substituímos a equação (4.22) na equação (4.21), para formar:

$$\mathbf{Y}_{v,\lambda} = \sum_{r=0}^{R-1} \mathbf{D}_{p_r} \mathbf{W}_{M_1} \left[\text{diag} \left\{ (v_0 \lambda_0)^{m_1} \right\}_{m_1} \mathbf{0}_{M_1 \times (M_2 - M_1)} \right] \mathbf{W}_{M_2} \mathbf{D}_{q_r}^* \text{diag} \left\{ \frac{\sqrt{M_2 M_1}}{1 - v \lambda_{m_2}^{M_1}} \right\}_{m_2} \quad (4.23)$$

Finalmente, podemos fazer a relação entre a matriz Bezoutiana e a de Cauchy, se substituímos v por ϵ e λ por $1/\eta$, obtendo:

$$\mathbf{V}_\epsilon \mathbf{B} \mathbf{V}_{1/\eta}^T = \sum_{r=0}^{R-1} \mathbf{D}_{p_r} \mathbf{W}_{M_1} \left[\text{diag} \left\{ \left(\epsilon_0 \frac{1}{\eta_0} \right)^{m_1} \right\}_{m_1} \mathbf{0}_{M_1 \times (M_2 - M_1)} \right] \times \mathbf{W}_{M_2} \mathbf{D}_{q_r}^* \text{diag} \left\{ \frac{\sqrt{M_2 M_1}}{1 - \epsilon (1/\eta_{m_2})^{M_1}} \right\}_{m_2}$$

e deixando a matriz \mathbf{B} em evidência, temos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}_\epsilon^{-1} \left[\sum_{r=0}^{R-1} \mathbf{D}_{p_r} \mathbf{W}_{M_1} \left[\text{diag} \left\{ \left(\epsilon_0 \frac{1}{\eta_0} \right)^{m_1} \right\}_{m_1} \mathbf{0}_{M_1 \times (M_2 - M_1)} \right] \times \mathbf{W}_{M_2} \mathbf{D}_{q_r}^* \text{diag} \left\{ \frac{\sqrt{M_2 M_1}}{1 - \epsilon (1/\eta_{m_2})^{M_1}} \right\}_{m_2} \right] \mathbf{V}_{1/\eta}^{-T} \quad (4.24)$$

Como visto, a matriz de pseudo-inversa regularizada também é uma matriz Bezoutiana. Assim, podemos utilizar o resultado obtido em (4.20) que substitui os vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} , respectivamente, por $\bar{\mathbf{P}}$ e $\bar{\mathbf{Q}}$; transformando a equação (4.4) em:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_\rho^+ = \mathbf{V}_\epsilon^{-1} \left[\sum_{r=0}^{R-1} \mathbf{D}_{\bar{p}_r} \mathbf{W}_{M_1} \left[\text{diag} \left\{ \left(\epsilon_0 \frac{1}{\eta_0} \right)^{m_1} \right\}_{m_1} \mathbf{0}_{M_1 \times (M_2 - M_1)} \right] \times \mathbf{W}_{M_2} \mathbf{D}_{\bar{q}_r}^* \text{diag} \left\{ \frac{\sqrt{M_2 M_1}}{1 - \epsilon (1/\eta_{m_2})^{M_1}} \right\}_{m_2} \right] \mathbf{V}_{1/\eta}^{-T} \quad (4.25)$$

Obtemos, até então, a relação entre uma matriz Bezoutiana e uma matriz de Cauchy. Entretanto, a matriz de recepção $\mathbf{G}_{0_{\text{MMSE}}}$ não é Bezoutiana. Para que ela se torne, devemos multiplicá-la por \mathbf{F}_0 pela esquerda, gerando a matriz \mathbf{K} definida a seguir:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0 \\ &= (\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0 + \rho \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{H}_0^H \in \mathbb{C}^{M \times (M+2K-L)}\end{aligned}$$

A matriz \mathbf{K} pode ser decomposta em matrizes diagonais, DFT e IDFT utilizando a equação (4.25). Os valores de ϵ e η são arbitrários. Se escolhermos os valores como $\epsilon = 1$ e $1/\eta = e^{-j\frac{\pi}{M}}$ a matriz \mathbf{K} torna-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \mathbf{W}_M^H \left[\sum_{r=0}^3 \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{p}}_r} \mathbf{W}_M [\mathbf{D}_M \mathbf{0}_{M \times (2K-L)}] \right. \\ &\quad \left. \mathbf{W}_{M+2K-L} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{q}}_r}^* \right] \mathbf{W}_{M+2K-L}^H \mathbf{D}_{(M+2K-L)}^H\end{aligned}\quad (4.26)$$

sendo $\mathbf{D}_M \triangleq \text{diag} \left\{ e^{\frac{-j\pi m_1}{M(M+2K-L)}} \right\}_{m_1}$, onde $m_1 = \{0, \dots, M-1\}$ e $\mathbf{D}_{M+2K-L} \triangleq \text{diag} \left\{ e^{\frac{-j\pi m_2}{M(M+2K-L)}} \right\}_{m_2}$, sendo $m_2 = \{0, \dots, M+2K-L-1\}$. Deve-se notar que para a definição das matrizes de Vandermonde, a equação (4.2) é utilizada gerando:

$$\mathbf{V}_\epsilon = \sqrt{M} \mathbf{W}_M$$

$$\mathbf{V}_{1/\eta} = \sqrt{M+2K-L} \mathbf{W}_{M+2K-L} \text{diag} \left\{ e^{\frac{-j\pi m}{M(M+2K-L)}} \right\}_m$$

Adicionalmente, analisando a equação (4.20), as matrizes $\bar{\mathbf{P}}$ e $\bar{\mathbf{Q}}$ podem ser definidas como:

$$\bar{\mathbf{P}} = -\mathbf{V}_\epsilon \mathbf{P} \quad (4.27)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \left(\text{diag} \left\{ \frac{1}{1 - \epsilon * (1/\eta_m^*)^M} \right\}_m \right) \mathbf{V}_{1/\eta}^* \mathbf{Z}_{1/\eta} \mathbf{Q} \quad (4.28)$$

onde $m = \{0, \dots, M+2K-L-1\}$.

Para a completa definição das equações (4.27) e (4.28), vemos que há a necessidade de construir o par gerador (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) . Supondo:

$$\nabla_{\mathbf{Z}_\eta, \mathbf{Z}_\epsilon}(\mathbf{H}_0) = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{Q}}^H \quad (4.29)$$

sendo a matriz $\hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{C}^{(M+2K-L) \times 2}$ e $\hat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{C}^{M \times 2}$ e

$$\nabla_{\mathbf{z}_e, \mathbf{z}_\eta}(\mathbf{H}_0^H) = \check{\mathbf{P}}\check{\mathbf{Q}}^H$$

onde $\check{\mathbf{P}} \in \mathbb{C}^{M \times 2}$ e $\check{\mathbf{Q}} \in \mathbb{C}^{(M+2K-L) \times 2}$ e

$$\nabla_{\mathbf{z}_e, \mathbf{z}_\eta}(\mathbf{K}) = \mathbf{P}\mathbf{Q}^H$$

sendo $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{M \times 4}$ e $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{(M+2K-L) \times 4}$, chegamos ao par gerador que procuramos:

$$\mathbf{P} = \left[(\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0 + \rho \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{H}_0^H \quad -\mathbf{K}\hat{\mathbf{P}} \right], \quad (4.30)$$

$$\mathbf{Q} = \left[\rho(\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \rho \mathbf{I}_{(M+2K-L)})^{-H} \check{\mathbf{Q}} \quad \mathbf{K}^H \hat{\mathbf{Q}} \right]. \quad (4.31)$$

4.5 Sistemas Multiportadoras baseados em DFT

Como visto na equação (4.4), a matriz $\mathbf{K} \triangleq \mathbf{F}_0 \mathbf{G}_0$. A matriz de transmissão \mathbf{F}_0 é uma escolha do projetista, logo podemos definir esta matriz para um sistema multiportadora como:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{W}_M^H$$

e, conseqüentemente, a matriz de recepção pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0 &= \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{K} \\ &= \mathbf{W}_M \mathbf{K} \\ &= \left[\sum_{r=0}^3 \mathbf{D}_{\check{\mathbf{P}}_r} \mathbf{W}_M [\mathbf{D}_M \mathbf{0}_{M \times (2K-L)}] \mathbf{W}_{M+2K-L} \mathbf{D}_{\check{\mathbf{Q}}_r}^* \right] \mathbf{W}_{M+2K-L}^H \mathbf{D}_{(M+2K-L)}^H \end{aligned} \quad (4.32)$$

O receptor \mathbf{G}_0 é constituído de matrizes diagonais, DFT e IDFT. Há DFTs de dois tamanhos, M e $M - 2K - L$, logo deve-se ter cuidado com o tamanho destas matrizes, pois em implementações clássicas de FFT, necessita-se de dimensão múltipla de 2. As multiplicações por diagonais constituem mudanças de fase, pois são multiplicações por $e^{j \frac{\pi m}{M(M+2K-L)}}$. Adicionalmente, cada iteração que forma o somatório pode ser realizada em paralelo, o que distribui a carga computacional. Assim, podemos formar $N_b = 4$ ramos em paralelo.

Nota-se que todas as estruturas apresentadas não são dependentes do canal utilizado. Na verdade, toda a informação do canal está contida nos vetores $\bar{\mathbf{p}}_r$ e $\bar{\mathbf{q}}_r$, sendo $r = 0, \dots, 3$, que posteriormente formam os vetores diagonais $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{p}}_r}$ e $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{q}}_r}^*$.

4.6 Sistemas Monoportadora Baseados em DFT

Para o caso monoportadora, podemos definir a matriz de transmissão como:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{I}_M$$

como consequência, a matriz de recepção se torna:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0 &= \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{K} \\ &= \mathbf{K} \\ &= \mathbf{W}_M^H \left[\sum_{r=0}^3 \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{p}}_r} \mathbf{W}_M [\mathbf{D}_M \mathbf{0}_{M \times (2K-L)}] \mathbf{W}_{M+2K-L} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{q}}_r}^* \right] \mathbf{W}_{M+2K-L}^H \mathbf{D}_{(M+2K-L)}^H \end{aligned} \quad (4.33)$$

Percebe-se as matrizes de recepção, formadas pelas equações (4.32) e (4.33), são dependentes da matriz de transmissão \mathbf{F}_0 escolhida. Essa escolha resulta na diferença de uma IDFT na matriz de recepção, o que possibilita a reutilização de grande parte da arquitetura caso seja necessária a troca entre transmissão multiportadora e monoportadora.

4.7 Equalização Semi-Cega

A interferência intersimbólica é a interferência entre símbolos adjacentes em uma transmissão. É causada por efeitos como multi-propagação ou não linearidades inerentes a resposta ao impulso do canal que acabam se comportando como um ruído no símbolo atual.

Para tentar corrigir esses erros, a equalização de canal visa compensar as mudanças sofridas após o canal. Podemos classificar a equalização adaptativa em supervisionada e não supervisionada, ou cega. A equalização supervisionada estima as mudanças de canal com uma sequência de treinamento, ou seja, são enviados símbolos pilotos que servem como sinais de referência e que não são efetivamente dados, mas

que têm a funcionalidade de ajudar na estimação de canal. Os canais normalmente são variantes no tempo, o que acarreta uma retransmissão periódica de símbolos pilotos.

Mas há uma grande quantidade de situações em que o treinamento não é possível por inviabilidade ou devido ao seu uso ser evitado por questões de projeto, como em redes com muitos pontos de acesso. A desvantagem reside na redução da banda efetiva de transmissão ocasionada, pois faz-se necessária a transmissão da sequência de treinamento que não são realmente dados. Assim, foram propostas equalizações cegas que simplificam a sinalização e o gerenciamento das transmissões. São equalizações que não utilizam pilotos e assim podem aumentar a taxa de dados dos sistemas. Porém, esses sistemas possuem uma taxa de convergência pior e são computacionalmente mais despendiosos, além de serem menos robustos em sistemas com ambiente não estacionário.

Como alternativa, surgiu a equalização semi-cega, que combina o período de treinamento com a equalização cega em períodos distintos. Esta é uma boa maneira de diminuir a quantidade de pilotos transmitidos e ainda tornar efetiva a equalização de canal. A equalização semi-cega utiliza os pilotos transmitidos como seu estado inicial durante o período supervisionado e, com o fim da transmissão dos pilotos, começa a estimar variações no canal. Como vantagem pode estimar o canal com uma menor quantidade de símbolos piloto, aumentando o número de dados efetivos transmitidos.

A Figura 4.1 é a representação em blocos de uma equalização semi-cega. Nela estão representados os dois estados de equalização. Suponha que todas as variáveis são complexas, sendo $x(k)$ a entrada, $y(k)$ a saída dos coeficientes, $e(k)$ o erro e $y_d(k)$ o símbolo que possui maior probabilidade de ter sido transmitido. Isso nos permite dizer que quando a chave seletora está conectada a $d(k)$, ou o sinal de referência, a equalização encontra-se no estado supervisionado. Assim que ela comuta para a posição contendo $y_d(k)$, não mais recebe informações de amostras piloto, logo está operando no estado de equalização cega e tenta diminuir o erro baseado na saída após os coeficientes do processo adaptativo.

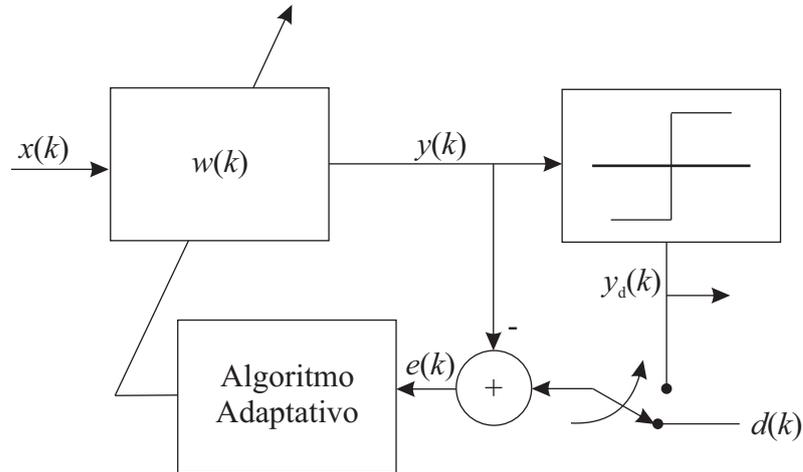


Figura 4.1: Sistema em blocos da equalização semi-cega.

4.8 Aplicando a Equalização Semi-Cega com seleção de dados em transceptores em blocos com redundância reduzida

Nesta seção iremos demonstrar a equalização semi-cega proposta para transceptores multicanais com redundância reduzida. Normalmente a utilização de filtros adaptativos ocorre quando as especificações são desconhecidas ou não podem ser satisfeitas por um filtro invariante no tempo. Assim um filtro adaptativo considera as estruturas de filtragem e o algoritmo escolhido para melhorar um critério de eficiência desejado.

Como visto nas equações (4.32) e (4.33), as únicas estruturas dependentes do canal são as duas diagonais que constituem $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{p}}_r}$ e $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{q}}_r}^*$. Essas estruturas podem representar soluções *zero-forcing* ou MMSE, por exemplo. Infelizmente, em canais variantes no tempo essas propostas podem se tornar muito custosas para a estimação destas estruturas.

A medida que o canal muda, os coeficientes que formam os equalizadores devem ser atualizados para refletir o atual estado da transmissão. Durante a fase de recepção, estamos assumindo até o momento que o par gerador $(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$ é conhecido. Na verdade, para calcular este par é necessária uma carga computacional de até $\mathcal{O}(M \log_2^2 M)$ operações [60] se utilizado o algoritmo *Pan's divide-and-conquer algorithm*. Essa necessi-

dade de atualização é indispensável em sistemas sem fio, pois os canais são usualmente variantes no tempo.

Baseado nisso, este trabalho propõe dois algoritmos para estimar os novos coeficientes dos equalizadores: o SM-AP e o SM-NLMS, sendo este último um caso específico do primeiro. São os responsáveis pela estimação das matrizes $(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$. Para isso, devemos revisitar os transceptores multicanais apresentados nas equações (4.33) e (4.32), mas em uma forma matricial:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_0 &= \mathbf{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\bar{p}_1} & \mathbf{D}_{\bar{p}_2} & \mathbf{D}_{\bar{p}_3} & \mathbf{D}_{\bar{p}_4} \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{X}_1} \times \\
 &\quad \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{W}_M \bar{\mathbf{D}} \mathbf{W}_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_M \bar{\mathbf{D}} \mathbf{W}_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_M \bar{\mathbf{D}} \mathbf{W}_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{W}_M \bar{\mathbf{D}} \mathbf{W}_N \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\bar{q}_1} \\ \mathbf{D}_{\bar{q}_2} \\ \mathbf{D}_{\bar{q}_3} \\ \mathbf{D}_{\bar{q}_4} \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{X}_2} \mathbf{B} \quad (4.34) \\
 &= \mathbf{A} \mathbf{X}_1 \mathbf{C} \mathbf{X}_2 \mathbf{B},
 \end{aligned}$$

considerando $\bar{\mathbf{D}} = [\mathbf{D}_M \mathbf{0}_{M \times (2K-L)}]$ e $N = M + 2K - L$. Para sistemas multiportadora, devemos definir $\mathbf{A} = \mathbf{I}_M$ e, para sistemas monoportadora, essa igualdade é alterada para $\mathbf{A} = \mathbf{W}_M^H$. Além disso, $\mathbf{B} \triangleq \mathbf{W}_N^H \mathbf{D}_N^H$.

Uma análise rápida revela que as matrizes \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 compreendem os bancos de equalização e por isso são as matrizes consideradas dependentes do canal, logo, a cada variação do canal esses coeficientes devem ser atualizados para tentar minimizar o erro médio quadrático $E \left[\|\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}\|_2^2 \right]$ e refletir o estado atual do meio de transmissão, enquanto as outras matrizes são constantes.

A partir da representação matricial representado em (4.34), o transceptor multicanal proposto que inclui a equalização adaptativa pode ser apresentado. Primeiramente, devemos realizar mudanças nas estruturas dos bancos de equalização. Suponha a equação (2.45) de forma que:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{s}} &= \mathbf{G}_0 \underbrace{(\mathbf{H}_0(z) \mathbf{F}_0 \mathbf{s} + \mathbf{v}_0)}_{\mathbf{y}'} \\
 &= \mathbf{G}_0 \mathbf{y}'
 \end{aligned}$$

assim \mathbf{y}' representa a entrada do receptor. Note que a variável temporal está sendo suprimida por simplificação.

Para facilitar a análise das modificações no banco de equalização representado pela matrix \mathbf{X}_2 , podemos inferir que a saída após a matrix \mathbf{B} é composta por $\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{y}'$. Dessa maneira, a equação matricial (4.34) pode ser transformada da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{X}}_2^{\text{new}} \triangleq \text{diag} \left\{ \left[\bar{\mathbf{q}}_1^T \bar{\mathbf{q}}_2^T \bar{\mathbf{q}}_3^T \bar{\mathbf{q}}_4^T \right] \right\} \quad (4.35)$$

e

$$\mathbf{t}^{\text{new}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

onde $\bar{\mathbf{X}}_2^{\text{new}} \in \mathbb{C}^{4N \times 4N}$ refere-se ao novo banco de equalização \mathbf{X}_2 e $\mathbf{t}^{\text{new}} \in \mathbb{C}^{4N \times 1}$ à nova entrada deste equalizador.

Estas modificações, apesar de aumentarem o número de elementos da matriz de entrada através de replicações e da matriz em relação ao equalizador \mathbf{X}_2 original, ao transformar as 4 diagonais em apenas uma diagonal principal de tamanho $4N$ elementos, não alteram as operações entre as matrizes. Essa mudança é realizada para nos mostrar que as operações são feitas elemento a elemento entre os coeficientes da matriz de equalização e a matriz de entrada \mathbf{t}^{new} , o que facilitará nossa análise quando adicionarmos o algoritmo adaptativo ao equalizador.

Mudando o foco para o banco de equalizadores \mathbf{X}_1 , estamos em busca de modificar a estrutura deste banco para agrupar os coeficientes deste equalizador que alteram cada saída do transceptor. Com isso em mente, a entrada desse equalizador pode ser reescrita primeiramente como:

$$\mathbf{y}'' = \mathbf{C}\bar{\mathbf{X}}_2^{\text{new}} \mathbf{t}^{\text{new}}$$

sendo $\mathbf{y}'' \in \mathbb{C}^{4M \times 1}$.

Em seguida, como \mathbf{X}_1 é formada por diagonais, podemos reescrever a relação entre esta matriz de equalização e sua entrada \mathbf{y}'' para cada saída k . Devemos definir

o novo vetor de entrada como:

$$\mathbf{y}_k^{\text{new}} = \begin{bmatrix} y''_{(k)} \\ y''_{(k+M)} \\ y''_{(k+2M)} \\ y''_{(k+3M)} \end{bmatrix}$$

onde $[y'']_k = y''_{(k)}$. Para os elementos não nulos de cada linha k da matriz \mathbf{X}_1 , podemos agrupá-los em um vetor, formando:

$$\mathbf{x}_k^{\text{new}} = [\hat{p}_{(k)} \quad \hat{p}_{(k+M)} \quad \hat{p}_{(k+2M)} \quad \hat{p}_{(k+3M)}],$$

onde os elementos $\hat{p}_{(k)}$ são na verdade os elementos da linha k do vetor $\hat{\mathbf{p}}$ a seguir:

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_{(k)} \\ \hat{\mathbf{p}}_{(k+M)} \\ \hat{\mathbf{p}}_{(k+2M)} \\ \hat{\mathbf{p}}_{(k+3M)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4M \times 1}$$

Assim, a saída de cada símbolo do novo equalizador \mathbf{X}_1 , pode ser calculado como um produto interno entre os vetores $\mathbf{x}_k^{\text{new}}$ e $\mathbf{y}_k^{\text{new}}$, formando:

$$o_k = \mathbf{x}_k^{\text{new}} \mathbf{y}_k^{\text{new}}$$

Estendendo este resultado, pode-se agrupar estas saídas o_k em um vetor \mathbf{o} . Para isso, suponha que k é a linha do vetor \mathbf{o} , então, matematicamente, $[\mathbf{o}]_k = o_k$. Após esta definição, a saída do transceptor $\hat{\mathbf{s}}$ se transforma em:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &\triangleq \mathbf{A} \underbrace{\mathbf{X}_1^{\text{new}} \mathbf{C} \bar{\mathbf{X}}_2^{\text{new}} \mathbf{t}^{\text{new}}}_{\mathbf{o}} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{o} \end{aligned} \tag{4.37}$$

em que $\mathbf{X}_1^{\text{new}}$, refere-se ao novo equalizador \mathbf{X}_1 e está relacionado ao vetor $\mathbf{x}_k^{\text{new}}$ de forma que $[\mathbf{X}_1^{\text{new}}]_{kj} \triangleq [\mathbf{x}_k^{\text{new}}]_l$, sendo $j = k + lM$ e $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. O valor de l está limitado a 4 elementos, pois esta é a quantidade de ramos quando se implementa as estruturas das matrizes de recepção \mathbf{G}_0 nos casos de multiportadora e monoportadora. E sendo a matriz $\bar{\mathbf{X}}_2^{\text{new}}$ a definida na equação (4.8).

Após esta nova estrutura entre os bancos de equalizadores e as outras estruturas do sistema que formam os tranceptores multicanais, podemos aplicar aos bancos de filtros os algoritmos desenvolvidos na Seção 3. Dessa forma, o SM-AP e seus algoritmos derivados podem ser utilizados para a atualização dos coeficientes dos equalizadores $\mathbf{X}_1^{\text{new}}$ e $\bar{\mathbf{X}}_2^{\text{new}}$.

Com este intuito, podemos analisar as equações (3.13) e (3.14) e relacionar suas variáveis aos bancos de equalizadores. Para o banco mais externo, ou seja, referente ao antigo banco de equalização \mathbf{X}_1 , podemos definir para cada instante:

$$\mathbf{w}_k^{X_1} \triangleq (\mathbf{x}_k^{\text{new}})^H$$

para $k = \{0, 1, \dots, M - 1\}$. Lembrando que o vetor $\mathbf{x}_k^{\text{new}}$ é formado por elementos da matriz $\mathbf{X}_1^{\text{new}}$.

Para produzir os novos coeficientes referentes ao novo banco interno de equalização $\bar{\mathbf{X}}_2$, podemos relacionar os coeficientes do algoritmo SM-AP a matriz de equalização do tranceptor de forma a produzir:

$$w_j^{X_2} \triangleq [\bar{\mathbf{X}}_2^{\text{new}}]_{jj}^*$$

onde $j \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$.

Agora que já possuímos a relação entre os coeficientes do algoritmo adaptativo e a matriz de equalização, podemos desfazer as operações criadas nas equações (4.8) e (4.36) que exigem um número maior de elementos. Desta maneira, criamos as matrizes $\bar{\mathbf{X}}_2^{\text{new}}$ e \mathbf{t} a seguir:

atualizar os coeficientes baseados no símbolo transmitido estimado $\hat{\mathbf{s}}$, de forma que o vetor desejado torna-se:

$$\mathbf{d}^{X_1} = \mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{s}}$$

De forma análoga, devemos definir os vetores desejados para o equalizador $\mathbf{X}_2^{\text{new}}$. Para o estado supervisionado de atualização dos vetores, temos:

$$\mathbf{d}^{X_2} = (\mathbf{A}\mathbf{X}_1^{\text{new}}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{s}$$

e, durante o período de equalização cega, obtemos:

$$\mathbf{d}^{X_2} = (\mathbf{A}\mathbf{X}_1^{\text{new}}\mathbf{C})^{-1}\hat{\mathbf{s}}$$

Percebe-se que diferença para determinar o vetor de sinais desejados entre os períodos, quando comparando o mesmo equalizador, reside na troca do símbolo de saída \mathbf{s} e $\hat{\mathbf{s}}$.

Vale ressaltar que a complexidade em encontrar o valor de \mathbf{d}^{X_2} é maior que encontrar \mathbf{d}^{X_1} . Analisando o sistema multiportadora, percebemos que para encontrar o valor de \mathbf{d}^{X_1} precisamos usar até $\mathcal{O}(M\log M)$ operações, referente a DFT. Para \mathbf{d}^{X_2} , temos a mesma complexidade para a matriz \mathbf{A} anterior. Adicionalmente, temos de calcular $\mathbf{X}_1^{\text{new}}$ que é considerada simples computacionalmente por ser formada por diagonais. Temos também a matriz \mathbf{C} formada por DFTs e mudanças de fases, além da operação de inversa. A maior complexidade também ocorre em sistemas monoportadora.

Essa diferença de complexidade permite a criação de prioridade de atualização entre os bancos de equalizadores, em que atualizar os coeficientes de \mathbf{X}_1 deve possuir maior prioridade por necessitar de menos carga computacional.

Neste ponto, devemos definir as entradas dos filtros adaptativos. Devido à técnica *affine projection*, podemos ter na matriz de entradas elementos referentes a instantes anteriores. Assim, para o equalizador \mathbf{X}_2 sua matriz de entrada será:

$$\mathbf{Y}^{X_2}(i) \triangleq [\mathbf{t}^{\text{new}}(i) \dots \mathbf{t}^{\text{new}}(i - P_k + 1)]$$

Da mesma forma para \mathbf{X}_1 , devemos definir cada matriz de equalização referente a saída k como $\mathbf{Y}_k^{X_1}[i]$, que é definido por:

$$\mathbf{Y}_k^{X_1}(i) \triangleq [y_k^{\text{new}}(i) \quad y_k^{\text{new}}(i - 1) \quad \dots \quad y_k^{\text{new}}(i - P_k + 1)]$$

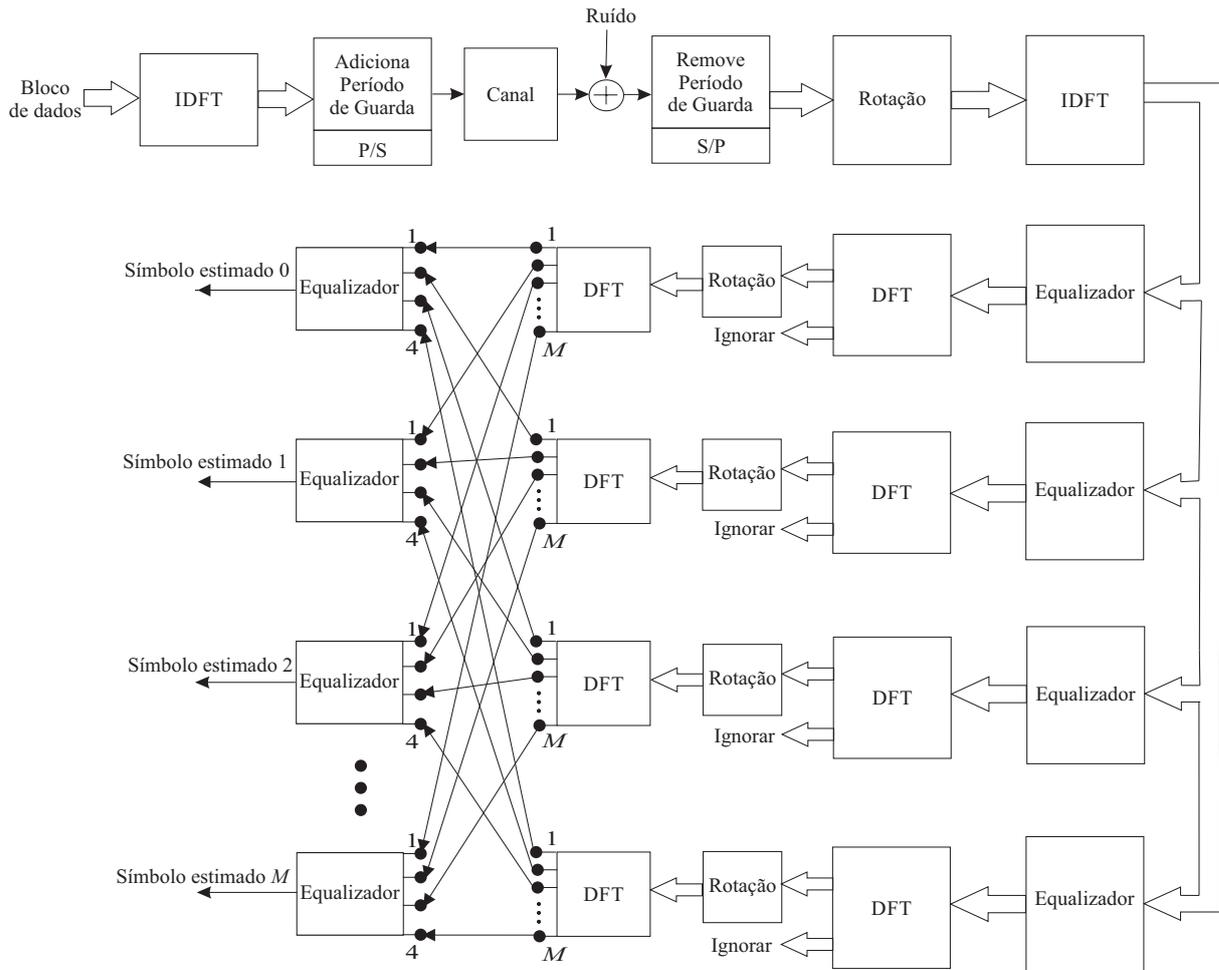


Figura 4.2: Arquitetura proposta com 4 ramos do transceptor com redundância reduzida e seletividade de dados.

A Figura 4.2 demonstra a arquitetura proposta para o caso multiportadora. Note que os coeficientes dos equalizadores $\mathbf{X}_1^{\text{new}}$ estão agrupados para cada saída do transceptor multicanal. Perceba que há 4 coeficientes a serem atualizados por bloco de equalização deste banco. No caso do equalizador $\mathbf{X}_2^{\text{new}}$, há $4N$ saídas e um coeficiente de equalização para cada saída. Portanto, em cada bloco de equalização há algoritmos SM-AP operando, equivalentes ao apresentado na Figura 4.1 sem levar em conta suas dimensões apropriadas.

4.9 Generalização do Número de Ramos do Transceptor

Trabalhos recentes, tais como [30], propõem transceptores multicanais com redundância reduzida com um número reduzido de ramos em sua arquitetura. Neste

Continuando com a redefinição de tamanho das matrizes, devemos modificar \mathbf{C} para formar:

$$\mathbf{C}^{\text{sup}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{W}_M \bar{\mathbf{D}} \mathbf{W}_N & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{W}_M \bar{\mathbf{D}} \mathbf{W}_N \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{(N_b M) \times (N_b N)}$$

Portanto, a entrada do equalizador $\mathbf{X}_1^{\text{sup}}$, que é a versão com mais ramos do equalizador \mathbf{X}_1 pode ser definida por $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{\text{sup}} \mathbf{X}_2^{\text{sup}} \mathbf{t}$. Posteriormente, a saída do novo equalizador \mathbf{X}_1 pode ser definida como:

$$\mathbf{o}_k^{\text{sup}} = \begin{bmatrix} w_k^{X_1} & w_{(k+N)}^{X_1} & \cdots & w_{(k+(N_b-1)N)}^{X_1} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+M) \\ \vdots \\ y(k+(N_b-1)M) \end{bmatrix}$$

ou seja, o novo equalizador $\mathbf{X}_1^{\text{sup}}$ é formado por elementos do vetor $\mathbf{x}_k^{\text{sup}}$ através da relação $[\mathbf{X}_1^{\text{sup}}]_{kj} \triangleq [\mathbf{x}_k^{\text{sup}}]_l$, para $j \triangleq k + lM$ e $l \in \{0, \dots, (N_b - 1)\}$.

Devemos agora definir as matrizes de entrada dos algoritmos adaptativos para essas novas estruturas. Podemos definir para $\mathbf{X}_1^{\text{sup}}$ sua entrada como:

$$\mathbf{Y}_k^{X_1}(i) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k(i) & \cdots & \mathbf{y}_{(k-(N_b-1)M)}(i - P_k + 1) \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{N_b \times P_k}$$

sendo $k \in \{0, \dots, M - 1\}$.

Estes resultados geram um novo transceptor generalizado, definido como:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{A} \mathbf{X}_1^{\text{sup}} \mathbf{C}^{\text{sup}} \mathbf{X}_2^{\text{sup}} \mathbf{B}$$

A nova arquitetura está demonstrada pela Figura 4.3. De fato, uma análise rápida nos permite ver que em $\mathbf{X}_2^{\text{sup}}$ o número de coeficientes é incrementado em $N = M + 2K - L$ elementos para cada ramo adicionado. Para a matriz referente ao outro equalizador, $\mathbf{X}_1^{\text{sup}}$, o número de coeficientes de equalização para cada saída é proporcional ao número de ramos N_b .

A vantagem dessa arquitetura reside na forma paralela de computação, pois a carga computacional pode ser compartilhada. Esta vantagem pode ser utilizada para modificar a quantidade de ramos N_b dependendo da situação. Por exemplo, N_b pode

4.10 Análise de Complexidade

Nas seções anteriores, os fundamentos que demonstram nossa abordagem foram explicitados. Entretanto, como em qualquer desenvolvimento, é interessante prover análises de complexidade, de modo que o futuro projetista possa criar um sistema sabendo das suas vantagens e desvantagens em relação ao custo computacional.

Primeiramente, o processo de equalização de fato é considerado. Suponha que uma multiplicação complexa genérica necessite de T_m segundos e T_a segundos para uma operação de adição. Considere o número de ramos originalmente como 4. Desse modo, uma operação de FFT necessitará de $\frac{M}{2}\log_2 M - \frac{3M}{2} + 2$ multiplicações complexas. Consequentemente, a Tabela 4.1 pode ser gerada [28]:

Tabela 4.1: Número de operações complexas relacionadas ao processo de equalização, durante o estágio de recepção.

Sistema	Multiplicações ($T_m s$)	Adições ($T_a s$)
MCRRBT	$7M\log_2 M - 3M + 18 + 5(2K - L)$	$10M + 14M\log_2 M$
SCRRBT	$15M/2\log_2 M - 9M/2 + 20 + 5(2K - L)$	$10M + 15M\log_2 M$
MCRRBT Paralela	$5/2M\log_2 M - 3/2M + 6 - 2(2K + L)$	$4M + 5M\log_2 M$
SCRRBT Paralela	$3M\log_2 M - 3M + 8 - 2(2K + L)$	$4M + 6M\log_2 M$

Pode-se perceber que a quantidade de operações necessárias são distribuídas quando se utiliza das estruturas em paralelo na arquitetura, o que reduz o tempo despendido.

O par gerador $(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$ que define os equalizadores do transceptor com redundância reduzida, possui a informação do canal, mas sua estimação não foi levada em conta até o momento na análise de complexidade. Sendo assim, é sabido que o algoritmo SM-NLMS requer $2M + 4$ multiplicações e $2M + 6$ adições, assim como o SM-BNLMS necessita de $3M + 4$ multiplicações e $3M + 7$ adições [4]. Assim, é possível fazer a seguinte tabela comparativa das complexidades por iteração:

relembrando que M é o número de símbolos e $N = M + 2K - L$. A Tabela 4.2 demonstra a complexidade quando todos os coeficientes são atualizados. Vale notar que a abordagem utilizada se vale da seletividade de dados presente no SM-AP o que permite reduzir a quantidade dessas operações, já que nem todos os coeficientes serão atualizados ao mesmo instante. O parâmetro γ presente na equação (3.12) que controlará

Tabela 4.2: Número de operações complexas relacionadas ao procedimento de atualização, durante o estágio de recepção.

Algoritmo adaptativo	Multiplicações	Adições
\mathbf{X}_1 SM-NLMS	$(2N_b + 4)M$	$(2N_b + 6)M$
\mathbf{X}_1 SM-BNLMS	$(3N_b + 4)M$	$(3N_b + 7)M$
\mathbf{X}_2 SM-NLMS	$2N_b N + 4$	$2N_b N + 6$
\mathbf{X}_2 SM-BNLMS	$3N_b N + 4$	$3N_b N + 7$

esse procedimento de atualização quando o erro a priori permanecer em um intervalo aceitável definido pelo projetista.

Além disso, a possível relação de atualização entre os bancos de equalizadores relacionados às matrizes \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 , visa reduzir a complexidade, pois permite que um banco atualize enquanto o outro permanece em seu estado anterior se o erro de símbolo é considerado pequeno o suficiente.

Em resumo, para verificarmos a complexidade do sistema, podemos analisar o caso da transmissão envolvendo multiportadora. A presente proposta reduz a complexidade computacional de $\mathcal{O}(M \log_2^2 M)$ para uma complexidade linear $\mathcal{O}(M)$ quando somente o banco de equalização externo \mathbf{X}_1 é atualizado ou $\mathcal{O}(M \log_2 M)$ quando a atualização necessita de ambos bancos de equalizadores. Tal diferença reside na complexidade em se calcular o vetor desejado maior para \mathbf{X}_2 , como já foi apresentado. Ou seja, tal abordagem continua mantendo uma baixa complexidade total.

Capítulo 5

Simulações de Sistemas Transceptores com Equalização Adaptativa Proposta

Esta seção apresenta a avaliação da eficiência dos transceptores com redundância reduzida e a inclusão da equalização adaptativa por meio do algoritmo SM-AP. Esta abordagem se utiliza da seletividade de dados que diminui o número de operações por controlar a quantidade de atualizações dos coeficientes de equalização. Além disso, é utilizada uma prioridade entre os bancos de filtros para atualizar ambos somente quando uma medida de erro é superada, o que possibilita economia de energia pelo número menor de atualizações.

As figuras de mérito escolhidas são a taxa de bits de saída e o número de coeficientes do equalizador que estão sendo atualizados, durante a transmissão dos blocos. A taxa de bits (do inglês, *throughput*) é definida por:

$$b \frac{M}{M+K} (1 - \text{BLER}) f_s r_c$$

onde b é a quantidade de bits que representam a constelação utilizada na transmissão, M representa o tamanho do bloco de dados utilizado, K é a quantidade de redundância, f_s é a frequência de amostragem e os modelos dos canais usam essa mesma frequência de amostragem, r_c representa a taxa de código, referente a codificação de canal e, por último, o BLER indica o *block-error rate*, ou seja, a quantidade de blocos descartados se ao menos um bit deste bloco é incorretamente decodificado no receptor.

Dentre os fatores que alteram a taxa de bits transmitidos podemos destacar o ruído que este sistema sofre. Para medir esta quantidade de ruído é usualmente utilizada a razão sinal ruído (SNR, do inglês *signal-to-noise ratio*), que por definição é a média de energia dos símbolos transmitidos na entrada do canal e a densidade espectral do ruído aditivo no receptor.

Pesquisas têm demonstrado que transceptores com redundância mínima ou reduzida podem aumentar a eficiência da taxa de dados em transmissões monoprotadora e multiportadora [56, 28]. Entretanto, diversos trabalhos na área, tais como [28, 61], dependem de um perfeito conhecimento das matrizes referentes ao canal de transmissão durante o processo de equalização.

Foi proposto a utilização de um algoritmo adaptativo para mitigar os efeitos desse canal sem a necessidade de se conhecê-lo previamente. Considerou-se um modelo de canal que opera na mesma frequência dos símbolos e com um canal com resposta ao impulso longo da ordem $L = 30$ [60]. Os coeficientes do canal foram criados aleatoriamente através de uma distribuição gaussiana com $\sigma = 1$, $\mu = 0$.

Utilizando este cenário, nós transmitimos 10000 blocos carregando $M = 32$ símbolos e uma constelação QPSK ($b = 2$). Os primeiros 200 blocos são utilizados para treinamento, desta maneira, o restante dos blocos são utilizados na transmissão efetivamente, o que identifica o processo semi-cego de equalização. A taxa de código escolhida foi $r_c = \frac{1}{2}$ e a codificação de canal com tamanho 7 [60]. Os geradores octais são $\mathbf{g}_0 = [133]$ e $\mathbf{g}_1 = [165]$, valores adaptados da especificação do LTE [62] e o mesmo utilizado nos trabalhos [28, 61], para fins comparativos. Foi escolhido como frequência de amostragem $f_s = 1000$ MHz. Como estado inicial para a equalização adaptativa definimos $\bar{\mathbf{p}}_r$ composta por elementos nulos e $\bar{\mathbf{q}}_r \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$.

Em relação às transmissões simuladas, diferentes cenários foram utilizados para sistemas multiportadora e monoportadora. As simulações foram divididas em grandes e pequenas mudanças no canal $\mathbf{h}(k) \in \mathbb{C}^{(L+1) \times 1}$, durante a transmissão dos blocos de dados. Nós assumimos um ruído gaussiano branco $\mathbf{h}_x(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \in \mathbb{C}^{(L+1) \times 1}$ que altera o valor da resposta ao impulso do canal durante a transmissão. Matematicamente isso é apresentado como:

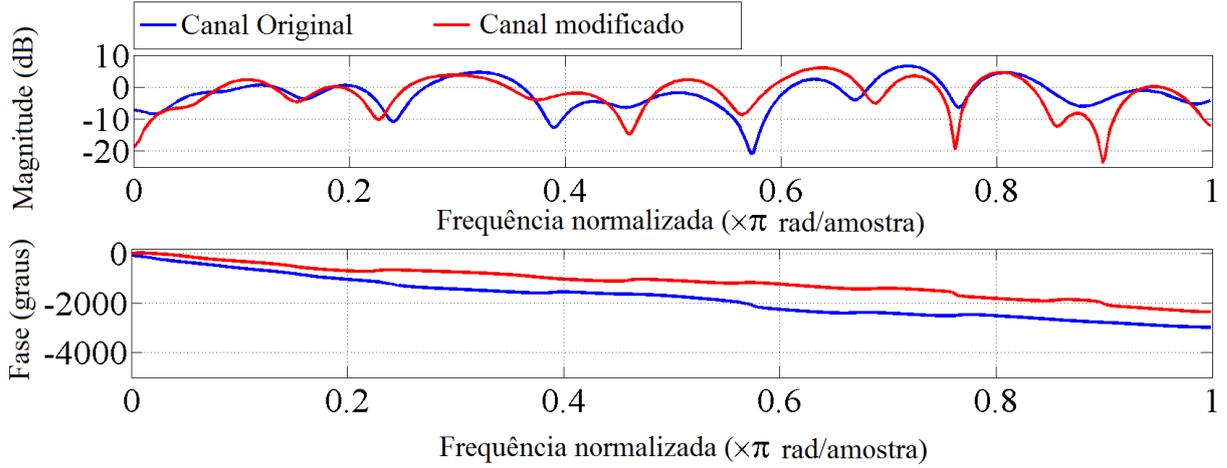


Figura 5.1: Canal original e modificado após 200 transmissões de blocos.

$$\mathbf{h}(k+1) = \mathbf{h}_x(k) + \Re \{ \mathbf{h}(k) \} + i\mathbf{h}_x(k) + i\Im \{ \mathbf{h}(k) \} \quad (5.1)$$

onde, para pequenas variações no canal, foi assumido $\sigma_1 = 0.0005$ a cada 10 blocos. Adicionalmente, σ_1 cresce em 10 vezes para o valor 0.005 e altera o canal a cada 201 blocos. A diferença entre a resposta ao impulso do canal original e a modificada, devido ao ruído, pode ser vista na Figura 5.1.

Com relação ao algoritmo adaptativo SM-AP, foram determinados os valores de γ_1 e γ_2 como 0.575 e 0.9, respectivamente quando se utiliza transmissões monoportadora. Para sistemas multiportadora, alterou-se seus valores para 0.7 e 0.8 respectivamente. Esses valores foram obtidos por método de busca exaustiva no intervalo de $(0, 1]$ [4] com um passo de 0.025 entre os valores verificados.

Nas simulações desenvolvidas, foram utilizados 6 valores de redundância, tais que fossem respeitadas a inequação $\lceil \frac{L}{2} \rceil \leq K \leq L$. Os valores de K escolhidos pertencem ao conjunto $\{15, 18, 21, 24, 27, 30\}$. Os valores de P_k foram utilizados 0 e 1, respectivamente, para formar os algoritmos SM-NLMS e SM-BNLMS. Os valores de SNR utilizados para as simulações foram de 10 a 40, com passo de 3.

Adicionalmente, foram definidas relações de atualização entre os bancos representados pelas matrizes \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 . Esta propriedade se baseia no custo computacional maior de atualização dos coeficientes do banco de equalizadores \mathbf{X}_2 em comparação ao \mathbf{X}_1 .

5.1 Simulação Monoportadora

- *Cenário 1:* A Figura 5.2(a) demonstra a taxa de bits de saída ao utilizar os 4 ramos originais da estrutura com a nova abordagem de equalização adaptativa. Nesta simulação são verificados os sistemas com o cenário de mudanças grandes no canal. Além disso, a taxa de reuso $P_k = 0$, o que define o algoritmo SM-NLMS. Foi utilizado uma relação entre as atualizações dos dois bancos de filtros representados por \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 , de tal forma que o equalizador externo \mathbf{X}_1 é sempre atualizado, enquanto o externo é atualizado somente quando mais de 10% dos coeficientes pertencentes ao primeiro são alterados, o que diminui a quantidade de operações que envolvem as atualizações e diminui o consumo de energia quando as mudanças nos canais conseguem ser suportadas somente pelo equalizador externo e quando não são, o segundo começa a operar em conjunto.

O sistema transceptor multicanal em blocos monoportadora com redundância reduzida e seletividade de dados, para este cenário, utilizando redundância $K = 15$ não produz estimativas confiáveis para os bits transmitidos para a faixa SNR de 10 dB a 40 dB verificados. O mesmo ocorre para redundâncias um pouco maiores, como $K = 18$ e $K = 21$. Entretanto, o incremento para uma quantidade de redundância reduzida $K = 24$ é suficiente para superar os resultados de taxa de saída de dados no MMSE-SC-FD com a redundância máxima. Isso pode ser visto a medida que o valor de SNR cresce, onde um ganho de 6% é obtido com valor de SNR igual a 16 dB, como exemplo. Quando analisamos $K = 27$, vemos um ganho maior na taxa de dados em valores menores de SNR, alcançando um aumento de 3% para SNR 16 dB em comparação a nossa medida de comparação MMSE-SC-FD.

Esse cenário ocorre devido ao menor número de redundância reduzido inserido que, conseqüentemente, aumenta o número efetivo de dados úteis da transmissão, mas mantém o compromisso com a quantidade mínima necessária para haver redundância suficiente que mitigue os efeitos do canal. Isso pode ser visto quando $K = 24$, onde há um ganho na taxa em comparação com $K = 27$ a medida que o SNR aumenta, justamente no cenário em que uma proteção devido aos

efeitos do canal podem ser menores. A medida que o número de redundância aumenta, os resultados tornam-se similares aos encontrados por MMSE-SC-FD.

A Figura 5.2(b) representa o mesmo cenário para a taxa de bits, mas com uma taxa de atualização (do inglês, *update rate*) entre os bancos de equalizadores aumentada para 20% dos coeficientes do equalizador X_1 . Os resultados obtidos para a taxa de bits são similares para as três primeiras redundâncias utilizadas: 15, 18 e 21. Quando analisamos as outras redundâncias, vemos que para os valores de SNR maiores são obtidas medidas similares ao cenário com 10% de atualizações. Isso ocorre pois como há uma menor quantidade de ruído, onde necessita-se menos dos processos de equalização.

A quantidade de coeficientes atualizados são analisadas durante o período de equalização supervisionada e não supervisionada. Primeiramente, quando analisamos para o período supervisionado, obtemos a Figura 5.3(a). Quando verificamos as redundâncias de $K = 24$ a $K = 30$, quando 10% dos coeficientes do banco de equalização externo não são suficientes para lidar com as mudanças do canal. Perceba, que neste período, a atualização dos coeficientes do equalizador externo X_1 possui um máximo de 45% dos número de saídas dos coeficientes quando analisamos 10 dB de SNR, mas logo esse valor é reduzido para próximo de 35% a medida que esse valor de SNR cresce para $K = 24$ e menos de 20% para $K = 27$. Quando olhamos o número de atualizações, para o equalizador X_2 na Figura 5.3(b), é visto um número muito baixo de atualizações. Como esperado, grande parte do esforço computacional é transferido para o banco de equalizadores mais externo.

Posteriormente são mostrados dois resultados da quantidade de coeficientes atualizados durante o período não supervisionado. A Figura 5.3(c) representa o número de atualizações para o equalizador X_1 , onde percebe-se um número maior de atualizações em comparação com o período não supervisionado para SNR 10 dB, mas essa quantidade fica abaixo comparativamente a medida que a quantidade de ruído diminui. A Figura 5.3(d) apresenta uma quantidade pequena de atualizações em todos os casos para o banco de equalização X_2 , mostrando que grande parte da aprendizagem do sistema ocorreu no período supervisionado.

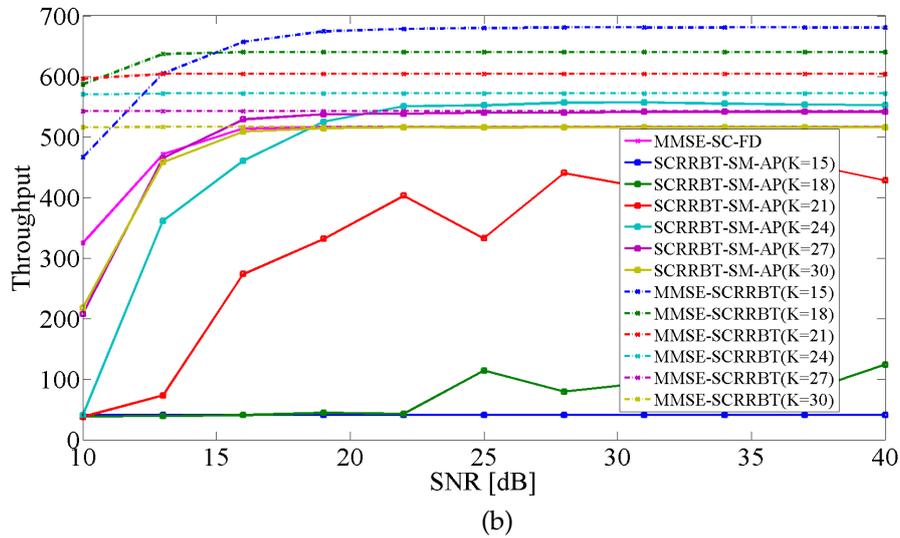
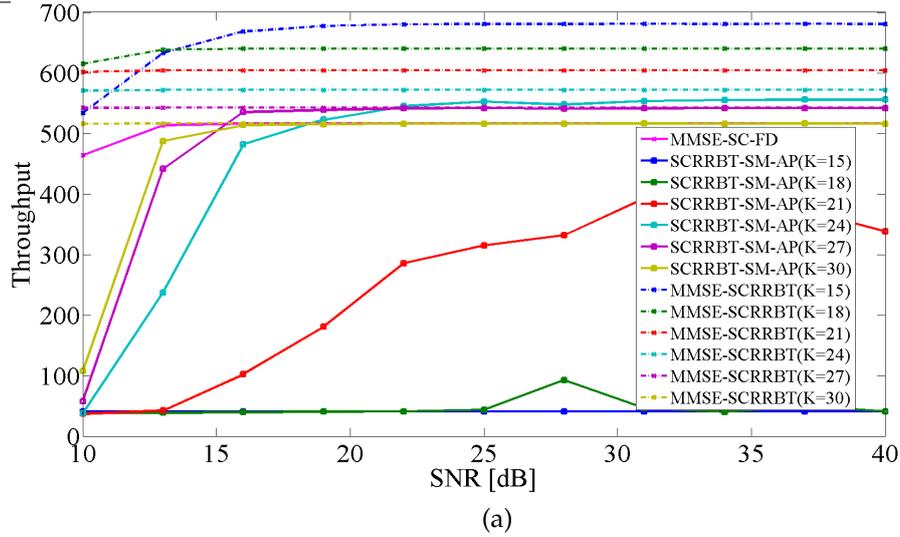


Figura 5.2: Taxa de bits [Mbps] \times SNR [dB] do cenário 1; (a) utilizando uma taxa de atualização para quando mais de 10% dos equalizadores de \mathbf{X}_1 são atualizados e (b) quando esse valor é 20%.

A Figura 5.4 representa o mesmo cenário, com 4 ramos, 10% de atualização, SM-NLMS, mas com uma variação diferente do canal. Desta vez, somente pequenas variações são sofridas pelo canal, ou seja, a variância de \mathbf{h}_x , pertencente a equação (5.1), é limitada a $\sigma_1 = 0.0005$ e o canal sofre variação a cada 10 blocos transmitidos. Podemos destacar que, apesar das simulações envolvendo as outras redundâncias terem um comportamento similar, $K = 24$ conseguiu superar o MMSE-SC-FD logo a 16 dB, além de um incremento em torno de 9% na taxa de bits para SNRs maiores.

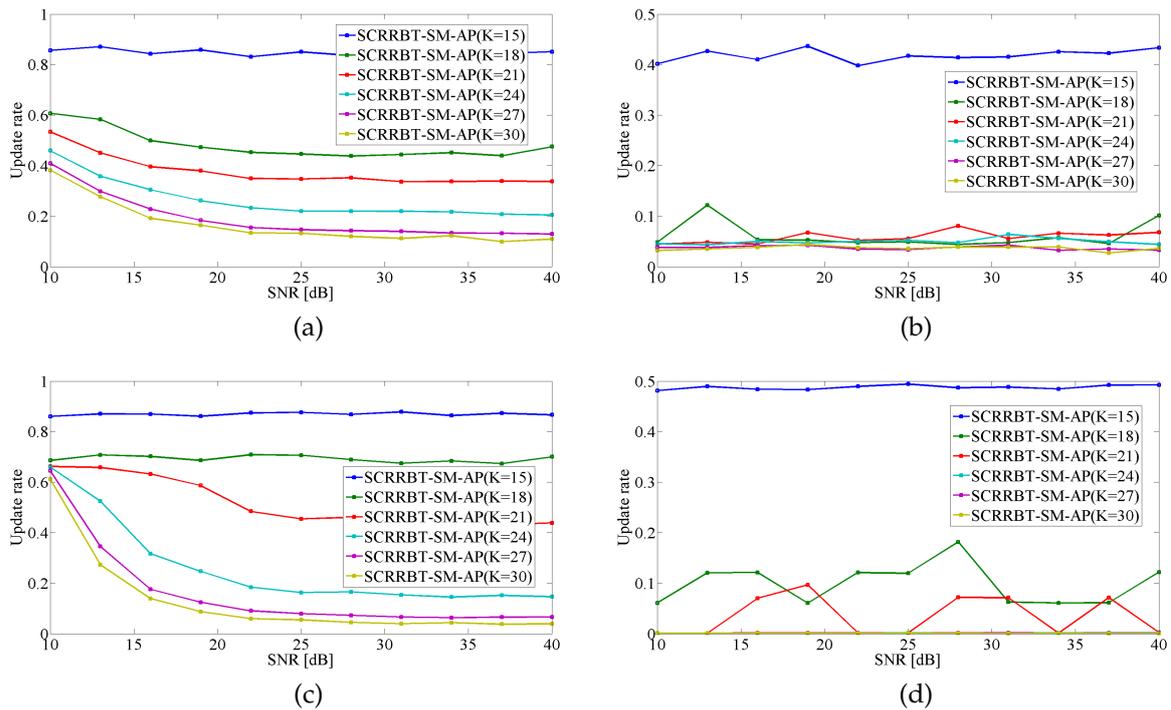


Figura 5.3: Taxa de atualização \times SNR [dB] para o cenário 1: (a) e (b) representam a taxa de atualização durante o período supervisionado, (c) e (d) são os resultados para o período não supervisionado dos equalizadores X_1 e X_2 , respectivamente.

- Cenário 2:** A Figura 5.5 demonstra a taxa de bits para uma solução generalizada, ou seja, com um número maior de ramos que o original, neste caso, 6 ramos. Os equalizadores de X_2 são atualizados somente quando mais de 10% dos coeficientes do equalizador X_1 são modificados e o canal é longo de ordem 30. Do mesmo modo, as duas menores redundâncias não conseguem resultar em uma boa estimação dos símbolos transmitidos, principalmente quando o SNR é próximo a 10 dB. Entretanto, para as quatro maiores redundâncias, há ganhos com o aumento dos ramos, pois isso permite um maior uso de coeficientes no processo de equalização. Analisando quando $K = 21$, percebe-se que houve uma melhora em relação a sua eficiência quando comparado com um número menor de ramos, principalmente quando olhamos valores de SNR maiores que superam o MMSE-SC-FD em até 7%. Continuando a análise, quando a quantidade de redundância é $K = 24$, atinge valores maiores que a nossa medida de comparação já em 16 dB, onde percebe-se uma estabilização em uma taxa de bits 8% maior. No caso de $K = 27$, o aumento dos números de ramos cresce significativamente a taxa de bits

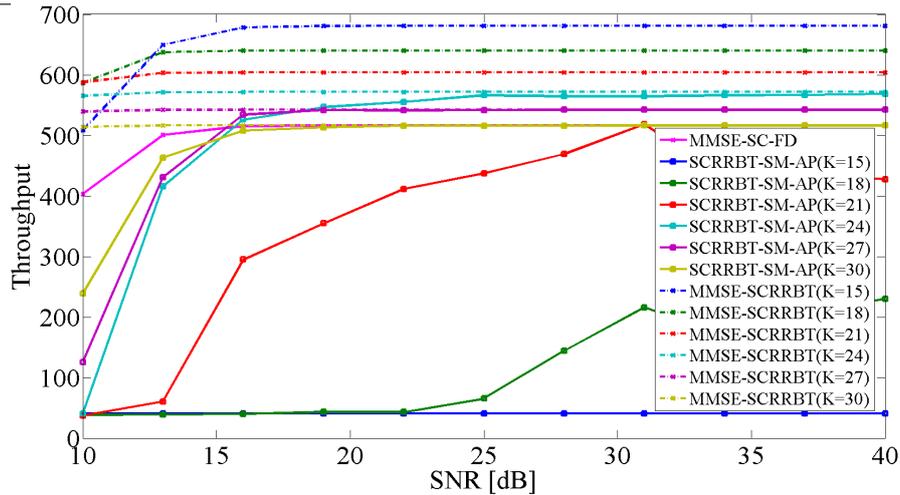


Figura 5.4: *Throughput* [Mbps] \times SNR [dB] of Scenario 1: transmissão monoportadora utilizando 4 ramos e com uma taxa de atualização entre os banco de equalizadores de 10% e com pequenas variações no canal.

quando analisamos os valores de SNR mais baixos, como em 10 dB que aumenta de valores próximos a 100 Mbps a próximo de 400 Mbps. Além disso, com 13 dB há uma diferença de apenas 4% em comparação a nossa referência.

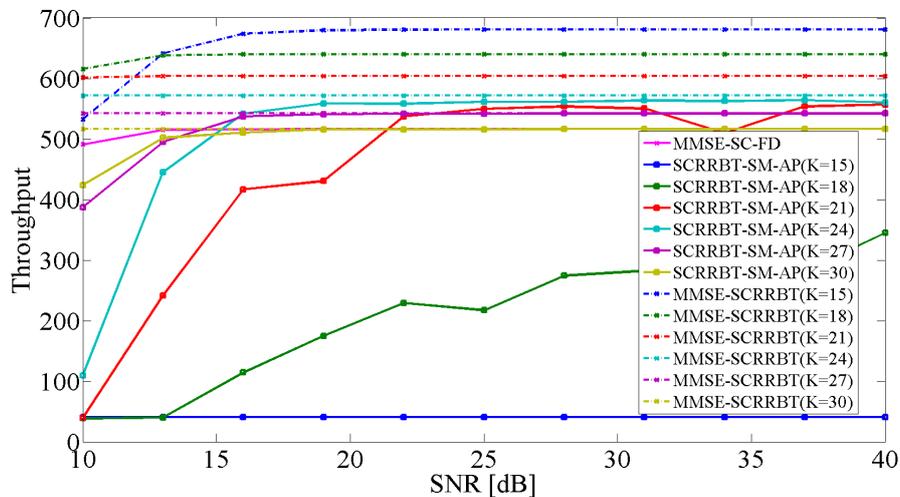


Figura 5.5: *Throughput* [Mbps] \times SNR [dB] para o cenário 2: Transmissão monoportadora utilizando solução generalizada com 6 ramos e taxa de atualização entre os banco de equalizadores de 10%.

Outra medida que podemos analisar é a MSE para este cenário. A Figura 5.6 mostra esse resultado para $K = 27$ e 16 dB de SNR, demonstrando uma rápida convergência em menos de 15 símbolos até alcançar o estado estacionário.

Além disso, a Figura 5.7 mostra a taxa de bits quando o canal varia somente

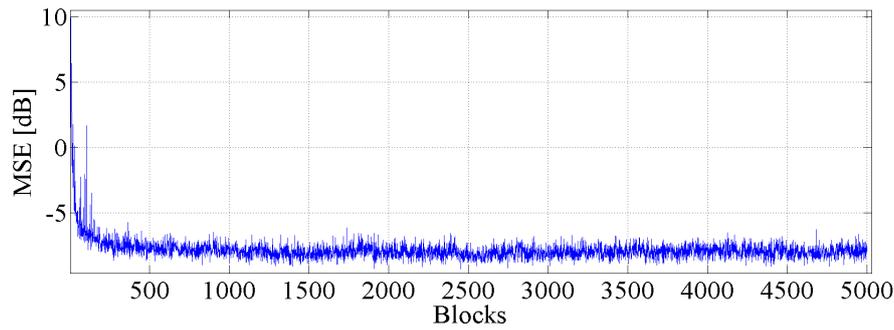


Figura 5.6: MSE [dB] \times número de blocos: demonstração da taxa de convergência através do uso de 6 ramos, uma taxa de atualização entre os bancos de equalizadores de 10%, $K = 27$ and SNR igual a 16 dB.

em pequenas taxas e percebe-se, por exemplo em $K = 27$, que se atinge valores mais altos de *throughput*, principalmente quando se analisa em 10 e 13 dB quando comparados com o cenário 1 para pequenas mudanças no canal.

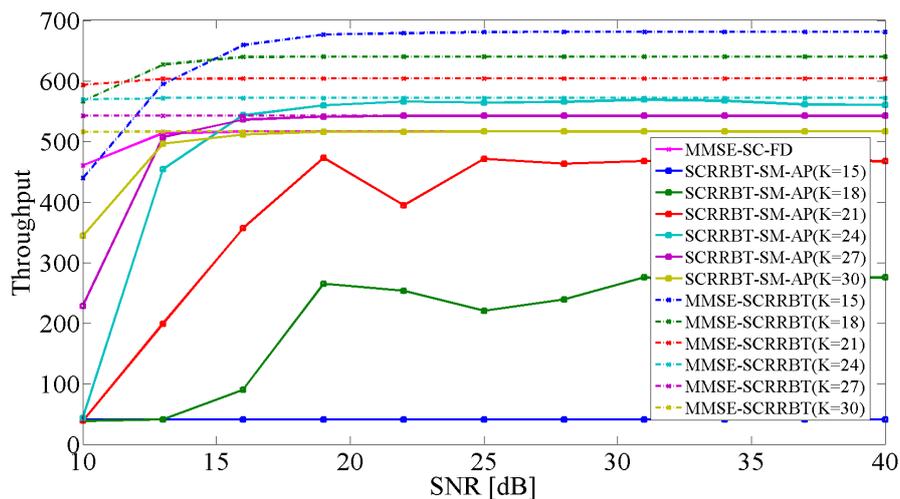


Figura 5.7: *Throughput* [Mbps] \times SNR [dB] para o cenário 2: monoportadora utilizando 6 ramos e taxa de atualização de 10% para os equalizadores e o canal com pequenas variações.

- *Cenário 3*: Nestas simulações são utilizados um valor de reuso $P_k = 1$, o que transforma o SM-AP no caso específico SM-BNLMS, com o ruído que modifica o canal possuindo um desvio padrão de $\sigma_1 = 0.0005$ a cada 201 blocos e $\sigma_1 = 5 \times 10^{-4}$ a cada 10 blocos. A Figura 5.8(a) demonstra que para $K = 27$ e $K = 30$ obtemos valores similares quando olhamos valores de SNR maiores que 20 dB. Entretanto quando analisamos os outros valores de SNR e também para os demais valores de redundância percebe-se uma deteriorização da taxa de saída geral. Buscando

uma melhoria dos resultados, analisamos as simulações por meio da Figura 5.8(b) que representa um transceptor generalizado de 6 ramos. Assim, analisamos as redundâncias maiores que $K = 24$, e observamos resultados similares aos do *cenário 1*. Apesar da utilização de informações de instantes anteriores, não houve uma maior eficiência e estes resultados podem ser atribuídos à rápida mudança da resposta ao impulso do canal em um curto intervalo, o que limita a velocidade de convergência e, conseqüentemente, a eficiência do algoritmo SM-BNLMS. Também é sabido que apesar da convergência mais rápida o valor em estado estacionário, em algoritmos derivados do *affine projection*, também aumenta [4, 63].

5.2 Simulação Multiportadora

- *Cenário 4*: Nesta seção, analisamos as simulações de sistemas multiportadora utilizando 12 ramos e um fator de 20% dos coeficientes do equalizador externo para atualizar o interno. As Figuras 5.9(a) e 5.9(b) ilustram a taxa de bits de saída utilizando-se de $\sigma_1 = 0.0005$ a cada 10 blocos e $\sigma_1 = 5 \times 10^{-4}$ a cada 201 blocos para simular as mudanças do canal. As redundâncias $K = 27$ e $K = 30$ demonstram um resultado que, apesar de não superar a nossa medida de referência, possui uma diferença de menos de 4% e 1% quando olhamos o valores maiores que 20 dB de SNR, respectivamente. Entretanto, para SNR menores, não se consegue uma estimação de símbolo com resultados significativos.

Quando analisamos as atualizações referentes a esse cenário com $P_k = 1$, devemos destacar que a quantidade de atualizações para este cenário são significativamente baixas para as redundâncias $K = \{24, 27, 30\}$. Na 5.9(b), o equalizador \mathbf{X}_1 para o período supervisionado tem uma taxa de atualização de menos de 30% e, para \mathbf{X}_2 , menos de 10% de atualizações dos coeficientes.

A Figura 5.10(c) representa as taxas de atualização dos coeficientes do equalizador \mathbf{X}_1 durante o período não supervisionado. Assim, verificamos uma taxa de atualização de menos de 30% para as redundâncias $K = \{24, 27, 30\}$. Para este mesmo cenário, a Figura 5.10(d) demonstra uma taxa atualização também de menos de 30% do total de coeficientes. Com isso percebemos que há grande

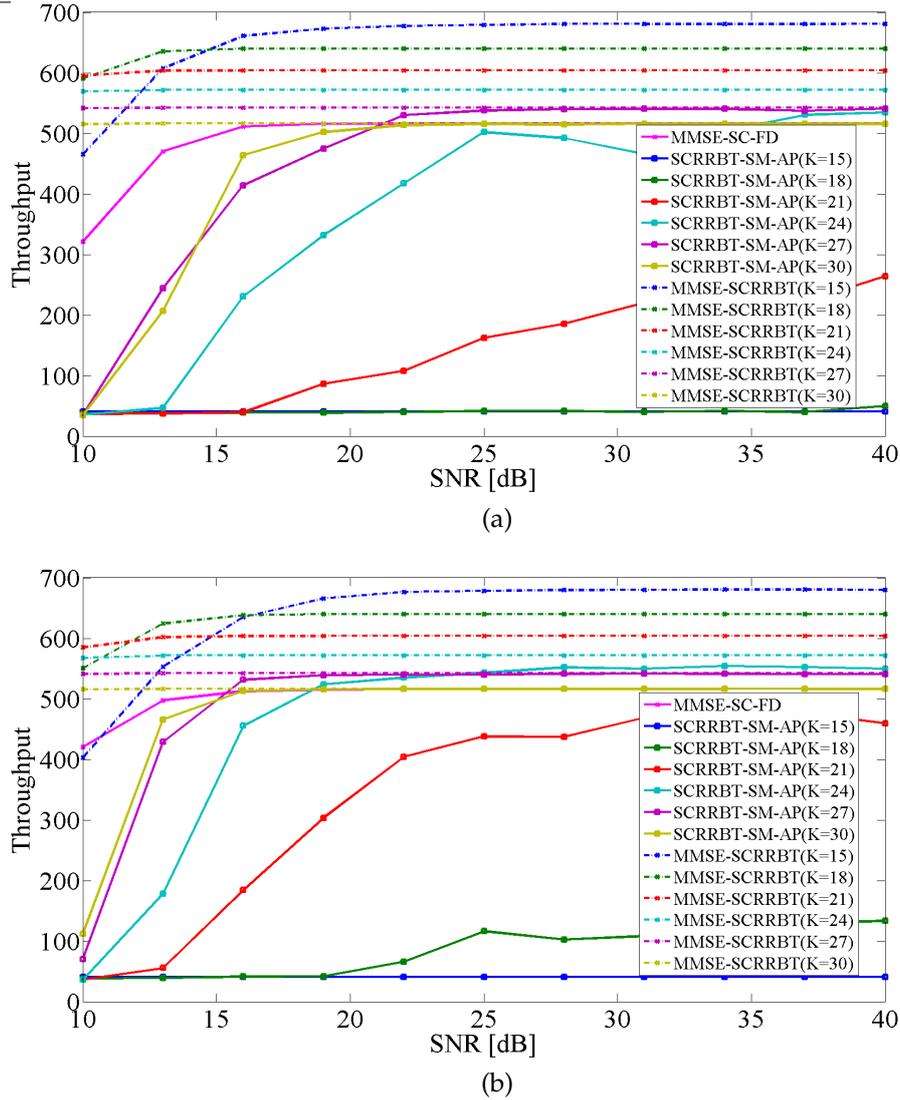
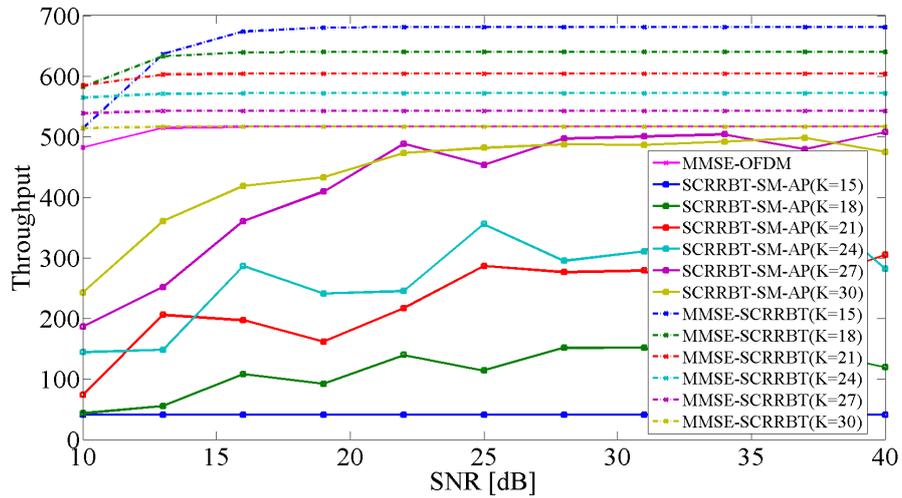


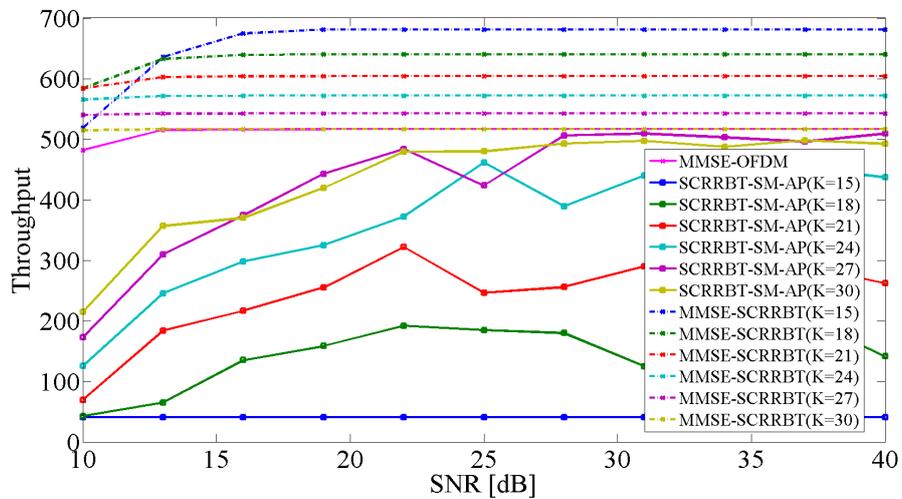
Figura 5.8: *Throughput* [Mbps] \times SNR [dB] no cenário 3: (a) e (b) representam os resultados de um sistema monoportadora utilizando o fato que 10% dos coeficientes do equalizador externo precisam ser modificados para atualizarmos o banco externo. É utilizado $P_k = 1; 4$ e 6 ramos, respectively.

economia de recursos pela baixa quantidade de atualizações neste cenário.

Procurando um melhor cenário, mantivemos os parâmetros anteriores, mas fizemos a análise da transmissão utilizando transceptor multicanal com multiportadora com uma variação do canal menor, somente com $\sigma_1 = 0.0005$ a cada 10 blocos. A representação das taxas de dados pode ser vista na Figura 5.11. Nele verificamos que são obtidos resultados maiores que a nossa medida de referência para a redundância reduzida $K = 27$.



(a)



(b)

Figura 5.9: *Throughput* [Mbps] \times SNR [dB] no cenário 4: Simulação para multiportadora utilizando 12 ramos e uma taxa de 20% para a relação entre os equalizadores. (a) $P_k = 0$ e (b) $P_k = 1$.

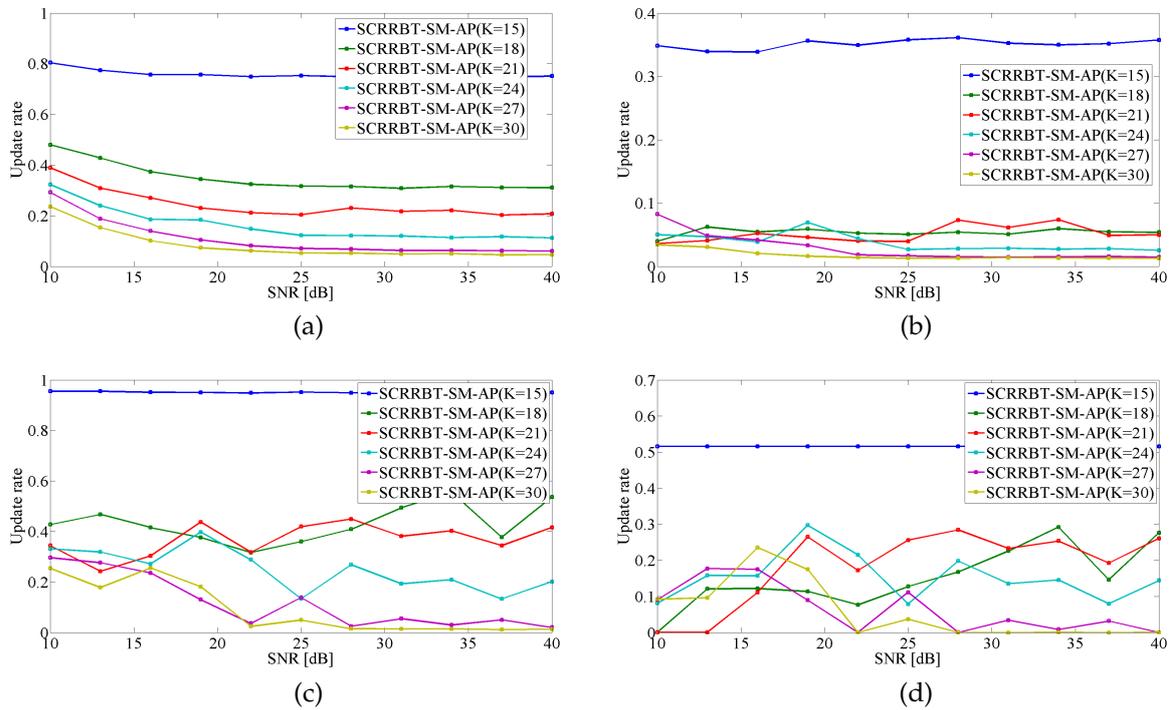


Figura 5.10: Taxa de atualização \times SNR [dB] no cenário 4: Simulação com transmissão multiportadora utilizando 12 ramos e $P_k = 1$. (a) e (b) representam a taxa de atualização durante o período supervisionado. (c) e (d) representam a taxa de atualização durante o período não supervisionado do banco de equalizadores X_1 e X_2 , respectivamente.

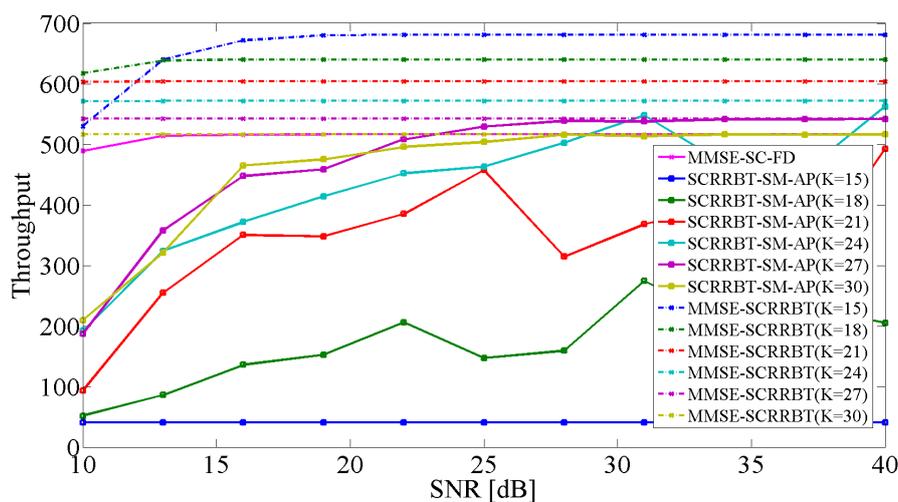


Figura 5.11: *Throughput* [Mbps] \times SNR [dB] do cenário 4: Transceptor multicanal generalizado com 12 ramos, $P_k = 1$ utilizando pequenas variações no canal.

Capítulo 6

Conclusões

Nesse trabalho, pesquisamos transceptores multicanais para sistemas monoprotadora e multiportadora utilizando redundância reduzida com uma arquitetura que envolve DFTs, DFTs inversas, matrizes diagonais e equalização semi-cega adaptativa. Isto nos permite criar transceptores que são computacionalmente econômicos, derivados de matrizes estruturadas como Toeplitz, Vandermonde, Bezoutianas e Bezoutianas generalizadas. A equalização adaptativa utilizou o algoritmo *set-membership affine projection*, que permitiu mitigar os efeitos do canal, além de acompanhar variações deste durante a transmissão, com um baixo número de operações. Esta arquitetura permite a generalização para utilizar informações de instantes anteriores para o processo de equalização, como a utilização do algoritmo SM-BNLMS. Foi proposta uma nova arquitetura em que o número de ramos é incrementado, alcançando um crescimento no número de coeficientes de equalização, o que possibilita uma convergência mais rápida dos algoritmos adaptativos, gerando melhores taxas de saída sem aumentar de forma considerável a complexidade devido à possibilidade de distribuir a carga computacional por conta do paralelismo inerente à arquitetura do transceptor. Foi utilizada uma relação de atualização entre os bancos de equalização, que cria prioridade maior para os equalizadores que possuem menor complexidade computacional, sem prejudicar a eficiência do sistema.

Simulações demonstraram que as taxas de saídas superam as medidas de comparação em determinados cenários com canais longos. Mesmos os cenários que não conseguiram taxas de saídas relevantes, obtiveram uma grande redução no número de

operações no processo de equalização e se tornaram mais robustas a variações.

6.1 Sugestões de Trabalhos Futuros

Segue a lista de possíveis trabalhos futuros:

- Realizar um estudo para encontrar os valores ótimos de γ que determinam a região de erro admissível dos algoritmos SM-AP, no contexto dos transceptores apresentados.
- Utilizar outros algoritmos adaptativos nos banco de equalizadores.
- Aumentar o controle da quantidade de operações ao utilizar algoritmos com atualização parcial (do inglês, *partial-update algorithms*), o que permitiria compensar o aumento da complexidade devido ao maior número de ramos nos transceptores generalizados.
- Desenvolver uma abordagem adaptativa para otimizar a quantidade de coeficientes atualizados máxima no banco de equalizadores X_1 mais externo, para somente assim atualizar o banco de equalização mais interno X_2 .
- Realizar a transmissão variando a quantidade de redundância utilizada dependendo das características do cenário no instante da transmissão.
- Estudar a quantidade de reuso de dados no SM-AP entre os períodos de equalização, a fim de diminuir a quantidade de símbolos-piloto necessários.

Bibliografia

- [1] CHUANG, J.; SOLLENBERGER, N. Beyond 3g: wideband wireless data access based on ofdm and dynamic packet assignment. *IEEE Communications Magazine*, v. 38, n. 7, p. 78–87, Jul 2000.
- [2] LAWTON, G. Machine-to-machine technology gears up for growth. *Computer*, v. 37, n. 9, p. 12–15, Sep 2004.
- [3] POSTAL, E. C. C. E. within the European Conference of; (CEPT), T. A. *THE EUROPEAN TABLE OF FREQUENCY ALLOCATIONS AND APLICATIONS IN THE FREQUENCY RANGE 8.3 kHz to 3000 GHz (ECA TABLE)*. 2014.
- [4] DINIZ, P. S. R. *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*. [S.l.]: Springer, 2008. (Kluwer International Series in Engineering and Computer Science).
- [5] WERNER, S.; DINIZ, P. S. R. Set-membership affine projection algorithm. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 8, n. 8, p. 231–235, Aug 2001.
- [6] DINIZ, P. S. R.; MARTINS, W. A.; LIMA, M. V. S. *Block Transceivers: OFDM and Beyond*. [S.l.]: Morgan & Claypool, 2012. (Synthesis Digital Library of Engineering and Computer Science).
- [7] LIN, Y.; PHOONG, S.; VAIDYANATHAN, P. *Filter Bank Transceivers for OFDM and DMT Systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- [8] CIMINI, L. Analysis and simulation of a digital mobile channel using orthogonal frequency division multiplexing. *IEEE Transactions on Communications*, v. 33, n. 7, p. 665–675, Jul 1985.

- [9] FALCONER, D. et al. Frequency domain equalization for single-carrier broadband wireless systems. *IEEE Communications Magazine*, v. 40, n. 4, p. 58–66, Apr 2002.
- [10] HOEG, W.; LAUTERBACH, T. *Digital Audio Broadcasting: Principles and Applications of Digital Radio*. [S.l.]: Wiley, 2004.
- [11] SHELSWELL, P. The cofdm modulation system: the heart of digital audio broadcasting. *Electronics & Communication Engineering Journal*, v. 7, p. 127–136, June 1995.
- [12] IEEE Standard for Information technology–Telecommunications and information exchange between systems Local and metropolitan area networks–Specific requirements Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications. *IEEE Std 802.11-2012 (Revision of IEEE Std 802.11-2007)*, p. 1–2793, March 2012.
- [13] XIAO, Y. Ieee 802.11n: enhancements for higher throughput in wireless lans. *Wireless Communications, IEEE*, v. 12, n. 6, p. 82–91, Dec 2005.
- [14] CONSORTIUM, I. E. *Digital Subscriber Line 2001*. [S.l.]: International Engineering Consortium, 2001.
- [15] GOLDEN, P.; DEDIEU, H.; JACOBSEN, K. *Implementation and Applications of DSL Technology*. [S.l.]: Taylor & Francis, 2007.
- [16] BENVENUTO, N.; TOMASIN, S. On the comparison between OFDM and single carrier modulation with a DFE using a frequency-domain feedforward filter. *IEEE Transactions on Communications*, v. 50, n. 6, p. 947–955, Jun 2002.
- [17] PANCALDI, F. et al. Single-carrier frequency domain equalization. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 25, n. 5, p. 37–56, Sep 2008.
- [18] WANG, Z.; MA, X.; GIANNAKIS, G. B. OFDM or single-carrier block transmissions? *IEEE Transactions on Communications*, v. 52, n. 3, p. 380–394, March 2004.
- [19] LIN, Y.-P.; PHOONG, S.-M. Perfect discrete multitone modulation with optimal transceivers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, n. 6, p. 1702–1711, Jun 2000.

- [20] LIN, Y.-P.; PHOONG, S.-M. ISI-free FIR filterbank transceivers for frequency-selective channels. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 49, n. 11, p. 2648–2658, Nov 2001.
- [21] LIN, Y.-P.; PHOONG, S.-M. BER minimized OFDM systems with channel independent precoders. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE Press, Piscataway, NJ, USA, v. 51, n. 9, p. 2369–2380, set. 2003.
- [22] CARVALHO, E. D.; SLOCK, D. T. M. Cramer-rao bounds for semi-blind, blind and training sequence based channel estimation. In: *IEEE Signal Processing Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*. [S.l.: s.n.], 1997. p. 129–132.
- [23] MUQUET, B.; COURVILLE, M. de; DUHAMEL, P. Subspace-based blind and semi-blind channel estimation for OFDM systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 50, n. 7, p. 1699–1712, Jul 2002.
- [24] AYADI, J.; CARVALHO, E. D.; SLOCK, D. T. M. Blind and semi-blind maximum likelihood methods for FIR multichannel identification. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 6, p. 3185–3188.
- [25] PAN, V. Y.; WANG, X. Inversion of displacement operators. *Journal on Matrix Analysis and Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 24, n. 3, p. 660–677, mar. 2002. ISSN 0895-4798.
- [26] TRAUTMANN, S.; FLIEGE, N. Perfect equalization for DMT systems without guard interval. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 20, n. 5, p. 987–996, Jun 2002.
- [27] VEGA, L. R.; GALARZA, C. G. Capacity-approaching block-based transceivers with reduced redundancy. *Digital Signal Processing*, v. 19, n. 2, p. 340–359, 2009.
- [28] MARTINS, W. A.; DINIZ, P. S. R. LTI transceivers with reduced redundancy. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 60, n. 2, p. 766–780, Feb 2012.

- [29] MARTINS, W. A.; LIMA, M. V. S.; DINIZ, P. S. R. Semi-blind data-selective equalizers for QAM. In: *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 501–505.
- [30] MARTINS, W. A.; DINIZ, P. S. R. Suboptimal linear MMSE equalizers with minimum redundancy. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 17, n. 4, p. 387–390, April 2010.
- [31] M., W. A.; D., P. S. R. Memoryless block transceivers with minimum redundancy based on hartley transforms. *Signal Processing*, v. 91, n. 2, p. 240 – 251, 2011.
- [32] PAN, V. Y. *A Unified Superfast Divide-and-conquer Algorithm for Structured Matrices over Fields*. 1999.
- [33] D., P. S. R.; L., M. V. S.; M., W. A. Semi-blind data-selective algorithms for channel equalization. In: *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. [S.l.: s.n.], 2008.
- [34] DINIZ, P.; NETTO, S.; SILVA, E. *Digital Signal Processing: System Analysis and Design*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0521781752.
- [35] OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W.; BUCK, J. R. *Discrete-time Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1999. ISBN 0-13-754920-2.
- [36] VAIDYANATHAN, P. P. *Multirate Systems and Filter Banks*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1993. ISBN 0-13-605718-7.
- [37] CROCHIERE, R.; RABINER, L. Interpolation and decimation of digital signals: A tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, v. 69, n. 3, p. 300–331, March 1981.
- [38] AZAD, E.; AGHVAMI, A. Multirate spread spectrum direct sequence CDMA techniques. In: *IEE Colloquium on Spread Spectrum Techniques for Radio Communication Systems*. [S.l.: s.n.], 1994. p. 4/1–4/5.
- [39] CROCHIERE, R.; RABINER, L. *Multirate Digital Signal Processing*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1983. (Prentice-Hall Signal Processing Series: Advanced monographs). ISBN 9780136051626.

- [40] PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. G. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN 0-13-373762-4.
- [41] PORTNOFF, M. R. Time-frequency representation of digital signals and systems based on short-time fourier analysis. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 28, n. 1, p. 55–69, Feb 1980.
- [42] PUCKETTE, C. M.; MARSHALL, T. G. *Special Issue on Transmultiplexers*. [S.l.]: IEEE, 1982. (IEEE Transactions on Communications).
- [43] RABINER, L. R.; SCHAFER, R. W. *Digital Processing of Speech Signals*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1978. (Prentice-Hall Signal Processing Series).
- [44] SMITH, M. J. T.; BARNWELL T.P., I. Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 34, n. 3, p. 434–441, Jun 1986.
- [45] VETTERLI, M.; HERLEY, C. Wavelets and filter banks: Theory and design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 40, n. 9, p. 2207–2232, Sep 1992.
- [46] VETTERLI, M. A theory of multirate filter banks. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 35, n. 3, p. 356–372, Mar 1987.
- [47] VETTERLI, M.; GALL, D. L. Perfect reconstruction FIR filter banks: Some properties and factorizations. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 37, n. 7, p. 1057–1071, Jul 1989.
- [48] LIN, Y.-P.; PHOONG, S.-M. Minimum redundancy for ISI free FIR filterbank transceivers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 50, n. 4, p. 842–853, Apr 2002.
- [49] RIBEIRO, C. B. *Sistemas de Comunicações MIMO com Reconstrução Perfeita*. Tese (Doutorado), 2007.
- [50] MUQUET, B. et al. Cyclic prefixing or zero padding for wireless multicarrier transmissions? *IEEE Transactions on Communications*, v. 50, n. 12, p. 2136–2148, Dec 2002.

- [51] LIN, Y.-P.; PHOONG, S.-M. Perfect discrete multitone modulation with optimal transceivers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, n. 6, p. 1702–1711, Jun 2000.
- [52] ZHANG, W. et al. Designing low-complexity equalizers for wireless systems. *Communication Magazine*, v. 47, n. 1, p. 56–62, Jan 2009.
- [53] SAYED, A. H. *Adaptive Filters*. [S.l.]: Wiley, 2008.
- [54] FLORIAN, S.; FEUER, A. Performance analysis of the lms algorithm with a tapped delay line (two-dimensional case). *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 34, n. 6, p. 1542–1549, Dec 1986.
- [55] BERTSEKAS, D. P. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. [S.l.]: Academic Press, 1996.
- [56] MARTINS, W. A. *Transceptores em bloco com redundância mínima*. 2009.
- [57] KAILATH, T.; KUNG, S. Y.; MORF, M. Displacement ranks of a matrix. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 1, n. 5, p. 769–773, Sep 1979.
- [58] KAILATH, T.; SAYED, A. H. Displacement structure: Theory and applications. *SIAM Rev.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 37, n. 3, p. 297–386, set. 1995. ISSN 0036-1445.
- [59] PAN, V. Y. *Structured Matrices and Polynomials: Unified Superfast Algorithms*. New York, NY, USA: Springer-Verlag New York Inc., 2001.
- [60] MARTINS, W. A. *Transceptores em bloco com redundância reduzida*. Tese (Doutorado), 2011.
- [61] MARTINS, W.; DINIZ, P. S. R. Lti transceivers with reduced redundancy. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, v. 60, n. 2, p. 766–780, Feb 2012.
- [62] MULTIPLEXING E., C. C. U. T. R. A. E.-U. *3rd Generation Partnership Project. 3GPP TS 36212, v8.7.0*. 2009.
- [63] SHIN, H.-C.; SAYED, A. Mean-square performance of a family of affine projection algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 52, n. 1, p. 90–102, Jan 2004.

Apêndice A

Publicações

A.1 Referentes a outras Pesquisas

- **Mauro L. de Freitas**, Mikhail Y. R. Gadelha, Lucas C. Cordeiro, Waldir S. S. Júnior e Eddie B. L. Filho. *Verificação de Propriedades de Filtros Digitais Implementados com Aritmética de Ponto Fixo*. **XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT**, 2013.
- Mikhail Ramalho, **Mauro L. de Freitas**, Felipe Sousa, Hendrio Marques, Lucas Cordeiro e Bernd Fischer. *SMT-Based Bounded Model Checking of C++ Programs*. **20th IEEE International Conference and Workshops on the Engineering of Computer Based Systems**, Phoenix, 2013. p. 147–156.
- **Mauro L. de Freitas**, Victor E. L. Valenzuela, Mikhail Y. R. Gadelha, Waldir S. S. Júnior, Lucas Cordeiro, Vicente F. Lucena Jr. *A Distributed Extension of the Hybrid PRS System using Video Processing to Command a Robot via Bluetooth*. **International Journal of Computer Science and Network Security**. Vol. 12, No. 7, 2012, p. 29–35.
- Thiago Brito Bezerra, **Mauro L. de Freitas**, Waldir Sabino da Silva Júnior, *Sigma-Delta ADCs Converter a Study Case*. **ICEEE 2014 : XII International Conference on Electrical and Electronics Engineering**. [aprovado e esperando publicação].