Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação
Ampla UFPA-UFAM

Imersões isométricas em grupos de Lie métricos com aplicação de Gauss prescrita

por

João Batista Ponciano

Manaus-Am
Fevereiro/2015

Imersões isométricas em grupos de Lie métricos com aplicação de Gauss prescrita

por

João Batista Ponciano

sob orientação do

Professor Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-Am
Fevereiro/2015

João Batista Ponciano

Imersões isométricas em grupos de Lie métricos com aplicação de Gauss prescrita

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus, 14 de fevereiro de 2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy (orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Dragomir Mitkov Tsonev (membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Prof. Dr. Gudlaugur Thorbergsson (membro externo)
Universität zu Köln

Profa. Dra. Maria João Ferreira (membro externo)
Universidade de Lisboa

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Ponciano, João Batista

P795i Imersões isométricas em grupos de Lie métricos com aplicação de Gauss prescrita / João Batista Ponciano. 2015

58 f.: 31 cm.

Orientador: Renato de Azevedo Tribuzy

Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Imersões isométricas em grupos de Lie. 2. grupos de Lie métricos. 3. aplicação de Gauss prescrita. 4. hipersuperfícies em grupos de Lie. I. Tribuzy, Renato de Azevedo II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Para Dani e as Anas da minha vida

Agradecimentos

A Ele, meu Deus Fiel! E a Ela, Senhora minha e Nossa Senhora, por todos os milagres em minha vida;

Ao Professor Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, por sugerir e orientar todos os resultados deste trabalho, minha mais profunda gratidão;

Ao Professores Doutores José Nazareno Vieira Gomes, Dragomir Mitkov Tsonev, Gudlaugur Thorbergsson e a Professora Doutora Maria João Ferreira, por toda disponibilidade e boa vontade;

A todos os professores do doutorado, por compartilharem o conhecimento;

Aos colegas do doutorado, por compartilharem as dúvidas. Ao Henrique e Raul, por mais que isso: por tudo;

Às kellys, Kelly K. e Kelly M. por dividirem a sala, os risos e as lágrimas;

À FAPEAM, pelo apoio financeiro;

À Universidade do Estado do Amazonas pela liberação parcial para a realização deste doutorado.

Resumo

Neste trabalho consideramos uma variedade Riemanniana (M^n, g) um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda G^{n+k}, uma aplicação diferenciável $N : M \to \mathbb{S}^n \subset T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$ e apresentamos condições necessárias e suficientes para que exista uma imersão isométrica $f : M \looparrowright \mathrm{G}$ de tal forma que N seja a aplicação de Gauss da imersão f.

Palavras-chave: Imersões isométricas em grupos de Lie, grupos de Lie métricos, aplicação de Gauss prescrita, hipersuperfícies em grupos de Lie.

Abstract

In this work we consider a Riemannian manifold (M^n, g) a Lie group G^{n+k} with left invariant metric and a smooth map $N : M \to \mathbb{S}^n \subset T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$. We give necessary and sufficient conditions for the existence of an isometric immersion $f : M \looparrowright \mathrm{G}$ such that N is the Gauss map of f.

Keywords: Isometric immersions into Lie Groups, metric Lie groups, prescribed Gauss map, hypersurfaces on Lie groups.

Conteúdo

Introdução

Hipersuperfícies de variedades Riemannianas (M^n, g) isometricamente imersas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ são caracterizadas por sua *primeira e segunda formas fundamentais* g e h. Um clássico teorema, devido a O. Bonnet, garante que a imersão existe e é única, a menos de movimentos Euclidianos, desde que o par (g, h) satisfaça as equações de Gauss e Codazzi.

Mas, o que acontece quando a segunda forma fundamental for substituída pela aplicação de Gauss?

No artigo indicado na referência [8] os autores consideraram uma variedade Riemanniana (M^n, g), uma aplicação suave $\nu : M^n \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e obtiveram uma solução para a seguinte questão:

"Quando é que os dados (g, ν) são a *primeira forma fundamental* e a *aplicação de Gauss* para uma imersão $u : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$?"

Nesse caso dizemos que os dados (g, ν) são *admissíveis* e u será chamada uma *solução* para (g, ν).

O principal resultado do referido artigo, é um teorema que pressupõe que a derivada de ν seja não degenerada.

No presente trabalho, consideramos a questão acima para o caso em que temos o espaço ambiente como sendo um grupo de Lie G^{n+1} com métrica invariante à esquerda e a aplicação suave $N : M^n \to \mathbb{S}^n \subset T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$, definida em M e tomando valores na esfera unitária do espaço tangente a G em seu elemento identidade.

No Teorema a seguir, encontramos as condições necessárias e suficientes para que os dados (g, N) sejam admissíveis para o problema que nos propusemos.

Teorema 1 *(i) Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com métrica g, G^{n+1} um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G.*

Seja $N : M^n \to \mathbb{S}^n \subset T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$ e seja $[\ ,\ ]_0$ o produto da álgebra de Lie de G, definido em $T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$.

Denote por E o fibrado vetorial $M^n \times \mathfrak{R}^{n+1}$ sobre M, onde $\mathfrak{R}^{n+1} = (T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}, [\ ,\ ]_0)$ e considere em E a conexão D, tal que $D_X\xi = 0$ para todo $\xi = (p, w)$ com w=constante e $X \in TM$.

Então, os dados são admissíveis se, e somente se, existe uma isometria $V : TM \to E$ ortogonal a N, satisfazendo

$$(1) \qquad (D_X V)(Y) - (D_Y V)(X) = -[\, V(X), V(Y)\,]_0$$

Neste caso, a imersão isométrica $f : M \looparrowright \mathrm{G}$ satisfaz

$$(2) \qquad \Phi \circ df = V$$

onde $\Phi : f^*T\mathrm{G} \to E$ é uma isometria paralela.

(ii) Além disso, se a isometria V existe, então satisfaz as equações diferenciais

$$(3) \qquad \begin{aligned} (D_X V(Y))^{Im(V)} &= V(\nabla_X Y) - \frac{1}{2}\{[\, V(X), V(Y)\,]_0 \\ &- \mathrm{L}_0(V(X), V(Y))\}^{Im(V)} \end{aligned}$$

onde, se X, Y são campos quaisquer em G e $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ são campos invariantes à esquerda em G que, no ponto, coincidem com X e Y, então

$$\mathrm{L}_0(X, Y) = ad^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + ad^*_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}$$

Ao longo de geodésicas de M estas equações podem ser escritas como as equações diferenciais ordinárias

$$(4) \qquad \begin{aligned} (D_{\gamma'}V)(Y) = &-\frac{1}{2}\{[\, V(\gamma'), V(Y)\,]_0 - \mathrm{L}_0(V(\gamma'), V(Y))\} \\ &+\frac{1}{2}\{\langle\, [\, V(\gamma'), V(Y)\,]_0, N\,\rangle - \langle\, [\, V(\gamma'), N\,]_0, V(Y)\,\rangle \\ &- \langle\, [\, V(Y), N\,]_0, V(\gamma')\,\rangle - 2\,\langle\, V(Y), D_{\gamma'}N\,\rangle\}N \end{aligned}$$

satisfazendo as condições iniciais em um ponto p de M

(5) $\langle\, V(Y), D_X N \,\rangle - \langle\, V(X), D_Y N \,\rangle = \langle\, [\, V(X), V(Y)\,]_0, N \,\rangle$

onde γ' é o vetor tangente à geodésica γ de M.

No caso em que a métrica de G *no item (i) é biinvariante, as equações diferenciais serão dadas por*

(6) $$(D_X V(Y))^{Im(V)} = V(\nabla_X Y) - \frac{1}{2}[\, V(X), V(Y)\,]_0^{Im(V)}$$

e as equações diferenciais ordinárias se reduzem a

(7) $$\begin{aligned}(D_{\gamma'}V)(Y) \;\; = \;\; & -\frac{1}{2}[\, V(\gamma'), V(Y)\,]_0 + \frac{1}{2}\{\langle\, [\, V(\gamma'), V(Y)\,]_0, N \,\rangle \\ & -2\,\langle\, V(Y), D_{\gamma'}N \,\rangle\}\, N\end{aligned}$$

com as condições iniciais (5).

Por este resultado, se considerarmos $\mathrm{G}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ obteremos uma solução para a questão resolvida no artigo citado acima, sem a necessidade da condição imposta. Nesse sentido, obtivemos para o $\mathbb{R}^{n+1}$ um resultado mais geral que o conhecido anteriormente.

Nossa proposta inicial era encontrar uma solução para o caso de hipersuperfícies imersas em grupos de Lie com métrica invariante à esquerda. Entretanto, obtivemos um resultado para a admissibilidade dos dados, mesmo em codimensão arbitrária, de acordo com o

Teorema 2 *(i) Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com métrica g,* G^{n+k} *um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de* G.

Considere $\mathfrak{R}^{n+k}$ e o fibrado E sobre M definidos como no Teorema 1.

Seja a aplicação suave $N : M^n \to G_k\left(\mathfrak{R}^{n+k}\right)$ tomando valores no Grassmanniano de k-planos em $\mathfrak{R}^{n+k}$.

Então, os dados são admissíveis se, e somente se, existe uma isometria $V : TM \to E$, satisfazendo (1).

Neste caso, a imersão isométrica $f : M \looparrowright \mathrm{G}$ satisfaz (2), *onde $\Phi : f^*T\mathrm{G} \to E$ é uma isometria paralela.*

(ii) Além disso, se a isometria V existe, então satisfaz as equações diferenciais (3)*, que podem ser escritas, ao longo de geodésicas de M, passando por p, como as equações diferenciais ordinárias*

$$(8) \qquad (D_{\gamma'}V)(Y) = -\frac{1}{2}\{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0 - ad^*_{V(\gamma')}V(Y) - ad^*_{V(Y)}V(\gamma')\}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\{\langle\,[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0, N^\alpha\,\rangle - \langle\,[\,V(\gamma'), N^\alpha\,]_0, V(Y)\,\rangle$$
$$-\langle\,[\,V(Y), N^\alpha\,]_0, V(\gamma')\,\rangle - 2\,\langle\,V(Y), D_{\gamma'}N^\alpha\,\rangle\}N^\alpha$$

com as condições iniciais

$$(9) \qquad \sum_{\alpha=1}^{k}(\langle\,V(Y), D_X N^\alpha\,\rangle - \langle\,V(X), D_Y N^\alpha\,\rangle) =$$
$$\sum_{\alpha=1}^{k}\langle\,[\,V(X), V(Y)\,]_0, N^\alpha\,\rangle$$

onde $(N^\alpha)_{\alpha=1,\ldots,k}$ é uma base ortonormal de $N(p)$.

No caso em que a métrica de G *no item (i) é biinvariante, as equações diferenciais serão dadas por* (6)*, e as equações diferenciais ordinárias se reduzem a*

$$(10) \qquad (D_{\gamma'}V)(Y) = -\frac{1}{2}[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\{\langle\,[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0, N^\alpha\,\rangle - 2\,\langle\,V(Y), D_{\gamma'}N^\alpha\,\rangle\}\,N^\alpha$$

com as condições iniciais (9)*.*

Os teoremas citados até agora, utilizam técnicas bem distintas daquelas que foram utilizadas pelos autores do artigo ao qual nos referimos anteriormente. Mas, em alguns outros resultados, utilizamos diretamente as ferramentas que foram disponibilizadas por aqueles autores. Ou ainda, propusemos algumas alterações a essas ferramentas para a obtenção de resultados.

Nosso trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro capítulo contem as generalidades e a notação que estaremos utilizando. Nesse capítulo, as demonstrações serão omitidas, uma vez que os assuntos abordados são de uso corrente na literatura e podem ser encontrados, por exemplo, nas referências indicadas.

No segundo capítulo estão os resultados que consideramos mais robustos, que são os teoremas citados acima. O Teorema 1 é, certamente, nosso principal resultado. Ele está dividido em dois itens. No primeiro item estão as condições necessárias e suficientes para obtermos uma imersão de uma n-dimensional variedade Riemanniana em um $(n+1)$-dimensional grupo de Lie métrico com aplicação de Gauss prescrita, i.e., condições necessárias e suficientes para que tenhamos dados (g, N) admissíveis. Isso será conseguido através da existência de uma isometria, entre fibrados sobre M, com a qual estaremos lidando ao longo de todo nosso trabalho. Uma vez assegurada a existência dessa isometria, o item (ii) do teorema disponibilizará meios de consegui-la, através de equações diferenciais, que foram transformadas em equações diferenciais ordinárias ao longo de geodésicas de M, com uma dada condição inicial.

Ainda nesse capítulo está o Teorema 2, que aponta uma solução para que tenhamos dados (g, N) admissíveis, para uma imersão isométrica de uma n-dimensional variedade Riemanniana em um $(n+k)$-dimensional grupo de Lie com métrica invariante à esquerda.

Finalmente, no terceiro capítulo, mostraremos que, em certos casos, é possível obtermos solução para o problema abordado, sem o uso das equações diferenciais mencionadas anteriormente. Nesse sentido, alguns resultados serão conseguidos usando o mesmo instrumento que solucionou o problema no $\mathbb{R}^{n+1}$, ainda que sob outras hipóteses.

É nesse capítulo que faremos uma abordagem mais detalhada para o caso da imersão de superfícies regulares do $\mathbb{R}^3$ em 3-dimensionais grupos de Lie métricos, com a mesma aplicação de Gauss, e provamos, como aplicação de nossos resultados, o

Teorema 3 *Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$ com aplicação de Gauss N e curvatura média H. Então, existe uma imersão isométrica $f : M^2 \looparrowright \mathbb{S}^3$ de M^2 no grupo de Lie $\mathbb{S}^3$ com a mesma aplicação de Gauss N se, e somente se, H for constante e $|H| \geq 1$.*

Alguns exemplos serão mostrados, a partir dos resultados obtidos ao longo do capítulo. Terminamos considerando hipóteses para a solução do problema, sem o uso das equações diferenciais ordinárias, no caso de imersões isométricas de n-dimensionais variedades Riemannianas em $n+1$-dimensionais grupos de Lie munidos de uma métrica invariante à esquerda, com aplicação de Gauss prescrita.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo fixaremos notações que serão utilizadas ao longo do trabalho e disponibilizaremos algumas definições e resultados gerais relacionados às variedades diferenciáveis.

1.1 Fibrados Vetoriais

Para detalhes desta seção, veja o *Apêndice* na página 14 da referência [5].

Sejam E e M variedades diferenciáveis e seja $\pi : E \to M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que $\pi : E \to M$ é um **fibrado vetorial** de dimensão k quando para cada ponto $q \in M$ tem-se:

1. $\pi^{-1}(q)$ é um espaço vetorial real de dimensão k;

2. existe uma vizinhança aberta U de q em M e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ para cada $y \in U$.

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial. Para cada $p \in M$ chamamos o espaço $E_p = \pi^{-1}(p)$ a **fibra** de π sobre p. Uma **seção local** sobre um conjunto aberto $U \subset M$ é uma aplicação diferenciável $\varepsilon : U \to E$ tal que $\pi \circ \varepsilon = id_U$; se $U = M$ dizemos que $\varepsilon : M \to E$ é uma **seção global** ou simplesmente seção de π.

É possível mostrar que para todo $e \in E$ existe uma seção ε tal que $\varepsilon(\pi(e)) = e$, em particular isto mostra que o conjunto $\Gamma(\pi)$ das seções de π é não vazio.

Exemplo 1.1 (Fibrado tangente) *O fibrado tangente de uma variedade diferenciável M^n, dado por $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$ é um fibrado vetorial de posto n sobre M e os campos diferenciáveis de M são seções de TM, ou seja $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$.*

Consideremos $\pi_1 : E^1 \to M$ e $\pi_2 : E^2 \to M$ fibrados vetoriais. Definimos uma projeção $\pi : Hom(E^1, E^2) \to M$ pondo $\pi^{-1}(p) = Hom(E^1_p, E^2_p)$, de modo que o conjunto $Hom(E^1, E^2)$ é a união disjunta dos espaços das aplicação lineares de E^1_p em $E^2_p, \quad p \in M$. Munindo $Hom(E^1, E^2)$ com a natural estrutura diferenciável induzida pela projeção, ele torna-se um fibrado vetorial, chamado **fibrado de homomorfismos**.

Dados os fibrados vetoriais $\pi_E : E \to M$ e $\pi_F : F \to M$ sobre M, um **homomorfismo** de E para F é uma aplicação diferenciável $\Phi : E \to F$ tal que $\pi_F \circ \Phi = \pi_E$ e $\Phi_{|E_p} : E_p \to F_p$ é uma transformação linear, para todo $p \in M$.

Dois fibrados vetoriais E e F sobre M, são ditos **isomorfos** se existir um homomorfismo $\Phi : E \to F$ que é um difeomorfismo. Nesse caso, um tal Φ é um **isomorfismo** entre os fibrados em questão.

Se M e S são variedades diferenciáveis, dados $x \in M$ e $f : M \to S$ uma aplicação diferenciável, chamamos **fibrado pull-back** (ou **fibrado induzido**) de TS, e representamos por f^*TS ou $f^{-1}TS$ ao conjunto

$$E = f^*TS = \{(m, v)\,; m \in M, v \in T_{f(m)}S\}$$

Uma **métrica Riemanniana** $\langle , \rangle$ sobre um fibrado vetorial $E \to M$ é uma aplicação

$$\langle , \rangle : \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to \mathcal{D}(M),$$

bilinear sobre o anel $\mathcal{D}(M)$ de funções diferenciáveis sobre M, que é simétrica e positiva definida.

1.2 Conexões lineares

Para detalhes do conteúdo desta seção, referimos [6] capítulo II.

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial e seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis sobre M. Uma **conexão linear** é uma aplicação $\mathbb{R}-$bilinear

$$\begin{aligned}\nabla : \mathfrak{X}(M) \quad \times \quad & \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi) \\ & (X, \varepsilon) \mapsto \nabla_X \varepsilon\end{aligned}$$

satisfazendo, para cada $f \in \mathcal{D}(M),\ X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varepsilon \in \Gamma(\pi)$, as propriedades

(i) $\quad \nabla_{fX}\varepsilon = f\nabla_X\varepsilon,$

(ii) $\quad \nabla_X(f\varepsilon) = X(f)\varepsilon + f\nabla_X\varepsilon.$

Seja M uma variedade diferenciável com fibrado tangente TM, a **conexão de Levi-Civita** de M é uma conexão linear ∇ no fibrado tangente TM com as seguintes propriedades:

i. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [\, X, Y\,]$,

ii. $X \langle\, Y, Z\,\rangle = \langle\, \nabla_X Y, Z\,\rangle + \langle\, Y, \nabla_X Z\,\rangle$.

para todo $X, Y, Z \in TM$.

Se $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial com uma conexão linear ∇, dizemos que a seção $\varepsilon \in \Gamma(\pi)$ é **paralela** quando $\nabla_X\varepsilon = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

1.3 Tensores em Variedades

Para detalhes do conteúdo desta seção, referimos [6] capítulo IV seção 5.

Os tensores generalizam a idéia de campos de vetores. Assim como os campos de vetores, os tensores podem ser derivados covariantemente.

Um **tensor** T de ordem r em uma variedade diferenciável M é uma aplicação multilinear

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M).$$

Com r fatores. Isto significa que, dados $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, $T(Y_1, \ldots, Y_r)$ é uma aplicação diferenciável em M e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1,\dots,fX+gY,\dots,Y_r)=fT(Y_1,\dots,X,\dots,Y_r)+gT(Y_1,\dots,Y,\dots,Y_r)$$

Para todo $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, $f,g\in\mathcal{D}(M)$

Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $r+1$ dado por

$$(\nabla T)(Y_1,\dots,Y_r,Z)=\nabla_Z T(Y_1,\dots,Y_r)-T(\nabla_Z Y_1,\dots,Y_r)-T(Y_1,\dots,\nabla_Z Y_r)$$

Um tensor T é um objeto pontual em um sentido que passamos a explicar. Fixe um ponto $p\in M$ e seja U uma vizinhaça de p em M onde é possível definir campos $E_1,\dots,E_n\in\mathfrak{X}(M)$, de modo que em cada $p\in U$, os vetores $E_1(q),\dots,E_n(q)$ formam uma base de T_qM. Neste caso, diremos que $\{E_i\}$ é um referencial móvel em U.

Sejam $Y_1=\sum\limits_{i_1}y_{i_1}E_{i_1}$, $Y_r=\sum\limits_{i_r}y_{i_r}E_{i_r}$ com $i_1,\dots,i_r\in\{1,\dots,n\}$ as restrições a U dos campos $Y_1,\dots,Y_r$ expressas no referencial móvel $\{E_i\}$.

Por linearidade, temos

$$T(Y_{i_1},\dots Y_{i_r})=\sum_{i_1,\dots,i_r}y_{i_1}\dots y_{i_r}T(E_{i_1},\dots,E_{i_r}).$$

As aplicações $T(E_{i_1},\dots,E_{i_r})=T_{i_1,\dots,i_r}$ são chamadas as componentes de T no referencial $\{E_i\}$.

Da expressão acima, decorre que o valor de $T(Y_1,\dots,Y_r)$ em um ponto $p\in M$ depende apenas dos valores em p das componentes de T e dos valores de $Y_1,\dots,Y_r$ em p. É neste sentido que dizemos que T é pontual.

O **tensor curvatura** de um fibrado vetorial $\pi:E\to M$ com conexão linear ∇ é a aplicação $\mathbb{R}-$trilinear

$$R:\quad \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi)$$

definida por $R(X,Y)\varepsilon=\nabla_X\nabla_Y\varepsilon-\nabla_Y\nabla_X\varepsilon-\nabla_{[X,Y]}\varepsilon$.

É bem conhecido que R é trilinear sobre $\mathcal{D}$.

Seja M uma variedade diferenciável e ∇ uma derivada covariante em TM. Então a expressão $T:TM\times TM\to TM$,

$$T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[\,X,Y\,]$$

para todos campos vetoriais $X, Y \in TM$, é um tensor chamado **tensor torção**. Uma derivada covariante ∇ é chamada **torção livre** se $T = 0$.

1.4 Grupos e Álgebras de Lie

As demonstrações, bem como os detalhes sobre o conteúdo desta seção, podem ser encontradas, dentre outras, nas referências [12], [21], [22], [23], [24] e [25].

Um **grupo de Lie** é um grupo abstrato G com uma estrutura diferenciável tal que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G} \to \mathrm{G} & \qquad e \qquad & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G} \\ g \mapsto g^{-1} & & (g,h) \mapsto g.h \end{array}$$

são diferenciáveis. Decorre da definição de grupo de Lie que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} L_a : \mathrm{G} \to \mathrm{G} & \qquad e \qquad & R_a : \mathrm{G} \to \mathrm{G} \\ g \mapsto ag & & g \mapsto ga \end{array}$$

são difeomorfismos, para cada $a \in \mathrm{G}$

Estas aplicações são chamadas respectivamente **translação à esquerda** por a e **translação à direita** por a.

O elemento identidade de G será indicado por **e**.

Exemplos de grupos de Lie

- $\mathbb{R}^n$ com a operação adição
- $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ com o produto dos complexos
- $\mathbb{H}$ o grupo dos quatérnios com a estrutura quaterniônica.
- $GL(n, \mathbb{R})$, o **grupo linear geral** das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ que são não singulares,

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}); det(A) \neq 0\}$$

- $SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}); A^\top = A^{-1},\ det(A) = 1\}$, o **grupo ortogonal especial**

- $\mathcal{H}_3$, o grupo de Heisenberg de dimensão 3 formado pelo conjunto das matrizes triangulares superiores com entradas reais e 1 na diagonal, onde o produto do grupo é o produto usual das matrizes 3×3.

- Se G e H são grupos de Lie, então a variedade produto $G \times H$ munida da estrutura de produto direto de grupos, também é um grupo de Lie.

- Se G é um grupo de Lie e H é um subgrupo fechado de G então H também é um grupo de Lie.

- $\mathbb{S}^3$ como um subgrupo fechado de $\mathbb{H}$.

1.4.1 Campos invariantes

Seja G um grupo de Lie. Um campo de vetores X em G é dito

- **invariante à esquerda** se para todo $g \in$ G, $\quad d(L_g)_h(X(h)) = X(gh)$ para todo $g, h \in$ G

- **invariante à direita** se para todo $g \in$ G, $\quad d(R_g)_h(X(h)) = X(hg)$ para todo $g, h \in$ G

Os campos invariantes à esquerda ficam inteiramente determinados por seus valores no elemento identidade $\mathbf{e} \in$ G, uma vez que, para todo $g \in$ G temos $X(g) = d(L_g)_{\mathbf{e}}X(\mathbf{e})$. Portanto, cada elemento do espaço tangente $T_{\mathbf{e}}$G determina um único campo invariante à esquerda.
Na verdade, vale a seguinte

Proposição 1.1 *Se denotarmos por $\mathfrak{g}$ o conjunto de todos os campos vetoriais invariantes à esquerda, então a aplicação linear $L : \mathfrak{g} \to T_{\mathbf{e}}G$ com $L(X) = X(\mathbf{e})$ é um isomorfismo.*

Em particular, isso implica que um grupo de Lie é **paralelizável**, i.e., seu fibrado tangente é trivial.
Temos que $dim\,\mathfrak{g} = dim\,T_{\mathbf{e}}\mathrm{G} = dim\,\mathrm{G}$

1.4.2 Álgebra de Lie

Uma **Álgebra de Lie** é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete) $[\,\cdot,\cdot\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz as propriedades:

1. O colchete $[\,\cdot,\cdot\,]$ é bilinear
2. Anti-simetria, isto é $[\,X, Y\,] = -\,[\,Y, X\,]$
3. Identidade de Jacobi:
$$[\,[\,X, Y\,], Z\,] + [\,[\,Y, Z\,], X\,] + [\,[\,Z, X\,], Y\,] = 0$$
para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é **abeliana** quando a operação colchete é trivial, isto é, quando $[\,X, Y\,] = 0$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Um subespaço H de $\mathfrak{g}$ é denominado **subálgebra** de Lie de $\mathfrak{g}$ quando H for fechado em relação ao colchete, ou seja, $[\,X, Y\,] \in H$ para todo $X, Y \in H$

Se G é um grupo de Lie, a **álgebra de Lie de** G é a subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$ formada pelos campos invariantes à esquerda.

Exemplo 1.2 (Álgebras de Lie)

- *Se M é uma variedade diferenciável, então $\mathfrak{X}(M)$, munido com o colchete de campos de vetores, é uma álgebra de Lie, uma vez que $\mathfrak{X}(M)$ é um espaço vetorial e o colchete de campos de vetores satisfaz a identidade de Jacobi.*

Para os grupos exemplificados acima temos,

- *A álgebra de Lie de $(\mathbb{R}^n, +)$ é dada pelo campo de vetores constantes.*
- *Para $\mathbb{S}^1$ temos que sua álgebra de Lie é isomorfa a $\mathbb{R}$, i.e., $\mathfrak{s}^1 \cong \mathbb{R}$*
- *A álgebra de Lie do grupo $GL(n, \mathbb{R})$ é o próprio espaço vetorial $M(n, \mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ com entradas reais com o comutador de matrizes $[\,A, B\,] = AB - BA$.*
- *$SO(n)$ tem como álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}); A^\top = -A,\ trA = 0\}$*

- $\mathfrak{h}$, *a álgebra de Lie do grupo de Heisenberg de dimensão* 3 *é dada pelo conjunto das matrizes triangulares superiores com entradas reais e* 0 *na diagonal, com o comutador de matrizes* $[\,A, B\,] = AB - BA$.

- $\mathfrak{s}^3$, *a álgebra de Lie do grupo* $\mathbb{S}^3$ *é isomorfa ao* $\mathbb{R}^3$ *com o produto dado por* $[\,X, Y\,] = 2(X \times Y)$, *onde* $\times$ *representa o produto vetorial do* $\mathbb{R}^3$.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, definimos indutivamente sua **série decrescente central** como sendo

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^1 = [\,\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\,], \quad \mathfrak{g}^2 = [\,[\,\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\,], \mathfrak{g}\,] \quad \cdots \quad \mathfrak{g}^k = \left[\,\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^{k-1}\,\right]$$

onde, para quaisquer dois subespaços lineares $A, B \subset \mathfrak{g}$, a notação $[\,A, B\,]$ refere-se à subálgebra **gerada** pelos colchetes de Lie $[\,a, b\,]$, onde $a \in A$ e $b \in B$.

Definição 1.4.1 *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é chamada nilpotente a k-passos se* $\mathfrak{g}^k = 0$ *e* $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$

Um grupo de Lie G conexo é chamado **nilpotente** se sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é nilpotente.
Desse modo, uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita é **nilpotente a 2-passos** se $\mathfrak{g}$ é não abeliana e $[\,[\,\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\,], \mathfrak{g}\,] = 0$

1.4.3 Métricas invariantes em grupos de Lie

Uma métrica Riemanniana $\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle$ em um grupo de Lie G é **invariante à esquerda** se $L_g : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ for uma isometria para todo $g \in \mathrm{G}$, i.e,

$$\langle\, u, v \,\rangle_h = \langle\, (dL_g)_h\, u, (dL_g)_h\, v \,\rangle_{L_g h}$$

para todo $g, h \in \mathrm{G}, \quad u, v \in T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$

Analogamente, uma métrica Riemanniana em G é **invariante à direita** se $R_g : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ for uma isometria para todo $g \in \mathrm{G}$.

Para introduzir em G uma métrica invariante à esquerda, tome um produto interno qualquer $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{e}}$ em $\mathfrak{g}$ e defina

$$\langle\, u, v\,\rangle_g = \langle\, (dL_{g^{-1}})_g\,(u), (dL_{g^{-1}})_g\,(v)\,\rangle_{\mathbf{e}}\,, \quad g \in \mathrm{G}, \quad u, v \in T_g\mathrm{G}$$

Como L_g depende diferenciavelmente de g isto fornece uma métrica Riemanniana invariante à esquerda.

Às vezes nos referiremos a um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda, como sendo um **grupo de Lie métrico** e com métrica biinvariante como sendo um **grupo Riemanniano.**

Uma métrica Riemanniana invariante à esquerda e à direita é chamada **biinvariante**.

Relacionadas às métricas biinvariantes, são bem conhecidos os seguintes resultados:

Teorema 4 (Weyl) *Todo grupo de Lie compacto e conexo pode ser munido de uma métrica biinvariante.*

Proposição 1 (Weyl) *Se* G *é um grupo de Lie munido de uma métrica biinvariante* $\langle\, \cdot, \cdot\,\rangle$*, então*

$$\langle\, [\, X, Y\,], Z\,\rangle = \langle\, X, [\, Y, Z\,]\,\rangle$$

para campos invariantes à esquerda.

1.4.4 Conexões invariantes à esquerda em um grupo de Lie

Para mais detalhes sobre conexões em grupos de Lie, indicamos o Capítulo 6 de [20].

Uma conexão ∇ em um grupo de Lie G é dita ser **invariante à esquerda** se para quaisquer dois campos de vetores invariantes à esquerda X e Y, o campo $\nabla_X Y$ é também invariante à esquerda.

Um **subgrupo a 1-parâmetro** em um grupo de Lie G é um homomorfismo diferenciável $\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{G}$

Para uma dada conexão em G e para cada vetor $v \in T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$ temos duas curvas passando por **e** que têm vetor tangente v em **e**: são o subgrupo a 1-parâmetro β_v e a geodésica γ_v.

Uma conexão invariante à esquerda ∇ em um grupo de Lie G é chamada uma **conexão de Cartan** se para qualquer vetor $v \in T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$, as curvas β_v e γ_v coincidem

$$\beta_v = \gamma_v, \qquad v \in T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$$

Em qualquer grupo de Lie, existem duas conexões de Cartan invariantes à esquerda cujo tensor curvatura é identicamente nulo, $R = 0$, que são

i. $(+)$-conexão definida como sendo $\nabla_X Y = [\,X, Y\,] \quad X, Y \in \mathfrak{g}$

ii. $(-)$-conexão definida como sendo $\nabla_X Y = 0 \quad X, Y \in \mathfrak{g}$

Existe, também, uma conexão invariante à esquerda cujo tensor curvatura é $R(X,Y)Z = -\dfrac{1}{4}[\,[\,X, Y\,], Z\,]$, para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, que é a

iii. (0)-conexão definida como sendo $\nabla_X Y = \dfrac{1}{2}[\,X, Y\,] \quad X, Y \in \mathfrak{g}$

Seus nomes estão relacionados ao fato que seus tensores torção são

i. $T(X,Y) = [\,X, Y\,]$ para a $(+)$-conexão

ii. $T(X,Y) = -[\,X, Y\,]$ para a $(-)$-conexão

iii. $T(X,Y) = 0$ para a (0)-conexão

Podemos ver que a conexão do item (iii.)

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[\,X, Y\,] \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

é a conexão Riemanniana do grupo de Lie.

1.4.5 Aplicação de Gauss em grupos de Lie métricos

Dado um grupo de Lie (n+1)-dimensional G^{n+1} com uma métrica invariante à esquerda e uma hypersuperfície orientável M de G, definimos a **aplicação de Gauss de** M como sendo a aplicação $N : M^n \to \mathbb{S}^n$, onde $\mathbb{S}^n$ denota a esfera unitária centrada na origem de $T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$ dada por

$$N(p) = d(L_p^{-1})_p(\eta(p)),\ p \in M$$

onde L_p é a translação à esquerda em G, $L_p(q) = pq$, e η um campo vetorial unitário em G que é normal a M, escolhido continuamente.

Capítulo 2

Resultados principais

No artigo indicado na referência [9], os autores consideraram uma variedade Riemanniana (M^m, g), uma aplicação suave $\nu : M^m \to \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ e apresentaram uma solução para a seguinte questão:

"Quando é que os dados (g, ν) são a *primeira forma fundamental* e a *aplicação de Gauss* para uma imersão $u : M^m \to \mathbb{R}^{m+1}$?"

Nesse caso dizemos que os dados (g, ν) são *admissíveis* e u será chamada uma *solução* para (g, ν).

Na primeira seção deste capítulo, estaremos considerando uma variedade Riemanniana simplesmente conexa (M^m, g), uma aplicação suave $N : M^m \to \mathbb{S}^n \subset \mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie do grupo de Lie (n+1)-dimensional G^{n+1} munido de uma métrica invariante à esquerda, e propondo uma solução para o problema:

"Quando é que os dados (g, N) são admissíveis com solução f, onde $f : M^n \looparrowright \mathrm{G}^{n+1}$?"

Na segunda seção do capítulo, mostraremos um resultado para o caso de imersões $f : M^n \looparrowright \mathrm{G}^{n+k}, k \geq 2$.

2.1 Hipersuperfícies imersas em grupos de Lie métricos com aplicação de Gauss prescrita

Se considerarmos uma variedade Riemanniana simplesmente conexa (M^m, g) e uma aplicação suave $N : M^m \to \mathbb{S}^n \subset \mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie do grupo de Lie (n+1)-dimensional G^{n+1} munido de uma métrica invariante à esquerda, o próximo teorema fornecerá condições necessárias e suficientes para para que N seja a aplicação de Gauss de uma imersão isométrica $f : M \looparrowright \mathrm{G}$.

Teorema 2.1 *(i) Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com métrica g, G^{n+1} um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G.*

Seja $N : M^n \to \mathbb{S}^n \subset T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$ e seja $[\ ,\ ]_0$ o produto da álgebra de Lie de G, definido em $T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$.

Denote por E o fibrado vetorial $M^n \times \mathfrak{R}^{n+1}$ sobre M, onde $\mathfrak{R}^{n+1} = (T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}, [\ ,\ ]_0)$ e considere em E a conexão D, tal que $D_X\xi = 0$ para todo $\xi = (p, w)$ com w=constante e $X \in TM$.

Então, os dados são admissíveis se, e somente se, existe uma isometria $V : TM \to E$ ortogonal a N, satisfazendo

$$(D_X V)(Y) - (D_Y V)(X) = -[\, V(X), V(Y)\,]_0 \tag{2.1}$$

Neste caso, a imersão isométrica $f : M \looparrowright \mathrm{G}$ satisfaz

$$\Phi \circ df = V \tag{2.2}$$

onde $\Phi : f^*T\mathrm{G} \to E$ é uma isometria paralela.

(ii) Além disso, se a isometria V existe, então satisfaz as equações diferenciais

$$\begin{aligned}(D_X V(Y))^{Im(V)} &= V(\nabla_X Y) - \frac{1}{2}\{[\, V(X), V(Y)\,]_0 \\ &- \mathrm{L}_0(V(X), V(Y))\}^{Im(V)}\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde, se X, Y são campos quaisquer em G e $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ são campos invariantes à esquerda em G que, no ponto, coincidem com X e Y, então

$$\mathrm{L}_0(X, Y) = ad^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + ad^*_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}$$

Ao longo de geodésicas de M estas equações podem ser escritas como as equações diferenciais ordinárias

$$(2.4)\quad (D_{\gamma'}V)(Y) = -\frac{1}{2}\{[\,V(\gamma'),V(Y)\,]_0 - \mathrm{L}_0(V(\gamma'),V(Y))\}$$
$$+\frac{1}{2}\{\langle\,[\,V(\gamma'),V(Y)\,]_0,N\,\rangle - \langle\,[\,V(\gamma'),N\,]_0,V(Y)\,\rangle$$
$$-\langle\,[\,V(Y),N\,]_0,V(\gamma')\,\rangle - 2\,\langle\,V(Y),D_{\gamma'}N\,\rangle\}N$$

satisfazendo as condições iniciais em um ponto p de M

$$(2.5)\,\langle\,V(Y),D_XN\,\rangle - \langle\,V(X),D_YN\,\rangle = \langle\,[\,V(X),V(Y)\,]_0,N\,\rangle$$

onde γ' é o vetor tangente à geodésica γ de M.

No caso em que a métrica de G *no item (i) é biinvariante, as equações diferenciais serão dadas por*

$$(2.6)\qquad (D_XV(Y))^{Im(V)} = V\,(\nabla_XY) - \frac{1}{2}\,[\,V(X),V(Y)\,]_0^{Im(V)}$$

e as equações diferenciais ordinárias se reduzem a

$$(2.7)\,(D_{\gamma'}V)\,(Y) \;=\; -\frac{1}{2}\,[\,V(\gamma'),V(Y)\,]_0 + \frac{1}{2}\,\{\langle\,[\,V(\gamma'),V(Y)\,]_0,N\,\rangle$$
$$-2\,\langle\,V(Y),D_{\gamma'}N\,\rangle\}\,N$$

com as condições iniciais (2.5).

Demonstração:

(i) Para provar o itm (i) será usado o seguinte teorema, obtido por J. Eschenburg e R. Tribuzy no artigo ([9])

Teorema 2.2 (Eschenburg-Tribuzy) *Seja S uma variedade diferenciável com conexão ∇^S, com tensor torção T^S e tensor curvatura R^S paralelos. Seja M uma variedade diferenciável simplesmente conexa e seja E um fibrado vetorial sobre M, equipado com uma conexão D tendo a estrutura algébrica $\left(T^S,R^S\right)$ de S.*

Seja $F: TM \to E$ um homomorfismo de fibrados vetoriais satisfazendo as equações

$$(2.8)\quad D_VF(W) - D_WF(V) - F([\,V,W\,]) \;=\; T(F(V),F(W))$$
$$(2.9)\qquad D_VD_W\xi - D_WD_V\xi - D_{[\,V,W\,]}\xi \;=\; R(F(V),F(W))\xi$$

onde V, W são seções de TM e ξ é seção de E.

Então existem uma aplicação suave $f : M \to S$ e um homomorfismo paralelo de fibrados $\Phi : f^*TS \to E$ preservando T e R tal que

$$\Phi \circ df = F \tag{2.10}$$

Se S é simplesmente conexa, então F é única a menos de difeomorfismos afim de S [1].

Como o Teorema 2.2 será nossa ferramenta, faremos um detalhamento do seu significado.

A variedade S tem uma conexão ∇^S que dá origem a uma curvatura R^S e uma torção T^S que são paralelos com respeito a ∇^S, ou seja,

$$\left(\nabla^S R^S\right) = 0 = \left(\nabla^S T^S\right).$$

O fibrado E, sobre M, tem uma conexão, que chamaremos de $\mathcal{D}$ que dá origem a uma curvatura, que chamaremos de R^E. Além disso, E tem a estrutura algébrica de S $\left(T^S, R^S\right)$ significando que existem os tensores

$$\mathcal{R} : E \times E \times E \to E, \qquad (A, B, C) \mapsto \mathcal{R}(A, B, C)$$

$$e$$

$$\mathcal{T} : E \times E \to E, \qquad (A, B) \mapsto \mathcal{T}(A, B) \qquad A, B \in E$$

que são paralelos com respeito à conexão $\mathcal{D}$, i.e., $(\mathcal{D}\mathcal{R}) = 0$ e $(\mathcal{D}\mathcal{T}) = 0$ e que existe, também, um isomorfismo $\Phi_p : E_p \to T_qS$ para algum $p \in M$, $q \in S$, com p, q pontos fixados, que preserva $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$. Ou seja, se X, Y, Z são campos diferenciáveis em M, então em $q \in S$,

$$\begin{aligned} \Phi_q(\mathcal{R}(X, Y)Z) &= R^S_q(\Phi_q(X), \Phi_q(Y))\Phi_q(Z) \\ &e \\ \Phi_q(\mathcal{T}(X, Y)) &= T^S_q(\Phi_q(X), \Phi_q(Y)) \end{aligned}$$

Nessas condições, se $F : TM \to E$ satisfaz, para $X, Y \in TM$ e $\xi \in E$

[1] Os difeomorfismos afim de S são definidos por $g : S \to S$ com $g^*D = D$

- $R^E(X,Y)\xi = \mathcal{R}(F(X),F(Y))\xi$, com

$$\mathcal{D}_X\mathcal{D}_Y\xi - \mathcal{D}_Y\mathcal{D}_X\xi - \mathcal{D}_{[\,X,\,Y\,]}\xi = R^E(X,Y)\xi$$

- $\mathcal{D}_X F(Y) - \mathcal{D}_Y F(X) - F([\,X, Y\,]) = \mathcal{T}(F(X),F(Y))$

então, existem uma aplicação diferenciável $f : M \to S$ e um homomorfismo paralelo de fibrados $\Phi : f^*TS \to E$ preservando T e R tal que

$$\Phi \circ df = F$$

Verificaremos, agora, que nossas hipóteses satisfazem as condições do Teorema 2.2.

Para isso, consideraremos em G a $(-)$-conexão de Cartan, que é a conexão invariante à esquerda dada por $\overset{G}{D}_X Y = 0$, Y campo invariante à esquerda em G e começaremos mostrando que os tensores curvatura R^G e torção T^G de G são paralelos com respeito a essa conexão. De fato, para X, Y, Z campos invariantes à esquerda em G, temos, evidentemente,

$$R^G(X,Y)Z = \overset{G}{D}_X\overset{G}{D}_Y Z - \overset{G}{D}_Y\overset{G}{D}_X Z - \overset{G}{D}_{[\,X,\,Y\,]}Z = 0$$

Segue da definição de derivada tensorial, que $\left(\overset{G}{D} R^G\right) = 0$ e, consequentemente, R^G é paralelo com respeito à conexão $\overset{G}{D}$.

Para verificarmos o paralelismo da torção T^G com respeito a $\overset{G}{D}$, lembremos que

$$T^G(X,Y) = \overset{G}{D}_X Y - \overset{G}{D}_Y X - [\,X, Y\,] = -[\,X, Y\,]$$

para X, Y campos invariantes à esquerda.

Assim,

$$\begin{aligned}\left(\overset{G}{D}_X T^G\right)(Y,Z) &= \overset{G}{D}_X T^G(Y,Z) - T(\overset{G}{D}_X Y, Z) - T(Y, \overset{G}{D}_X Z)\\ &= -\overset{G}{D}_X [\,X, Y\,] = 0\end{aligned}$$

pois $[\,X, Y\,]$ é invariante à esquerda. Isso mostra o paralelismo de T^G com respeito a $\overset{G}{D}$.

Em seguida, consideraremos os tensores

$$\mathcal{R} : E \times E \times E \to E, \qquad (\zeta, \vartheta, \varrho) \mapsto \mathcal{R}(\zeta, \vartheta, \varrho) = 0$$

$$e$$

$$\mathcal{T} : E \times E \to E, \qquad (\zeta, \vartheta) \mapsto \mathcal{T}(\zeta, \vartheta) = -\,[\,\zeta, \vartheta\,]_0$$

Verificaremos que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$ são paralelos com respeito a conexão D do fibrado E.

Pelas definição de $\mathcal{R}$ e de derivada tensorial, temos que $(D\mathcal{R}) = 0$.

Para o tensor $\mathcal{T}$, seja $p \in M$, $X \in T_pM$ e $\zeta, \vartheta \in E$, constantes. Segue que

$$\begin{aligned} (D_X\mathcal{T})\,(\zeta,\vartheta) &= D_X\mathcal{T}(\zeta,\vartheta) - \mathcal{T}(D_X\zeta,\vartheta) - T(\zeta, D_X\vartheta) \\ &= -D_X\,[\,\zeta,\vartheta\,]_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois o produto $([\ ,\ ]_0)$ de vetores constantes é constante. Isso mostra o paralelismo de $\mathcal{T}$ com respeito à conexão D.

Para concluirmos que D tem a *estrutura algébrica* $\left(R^G, T^G\right)$ de G, sejam $p \in M$ e $\mathbf{e} \in$ G pontos fixados, onde $\mathbf{e}$ é o elemento identidade de G. Desse modo, considere o isomorfismo trivial $\Phi_{\mathbf{e}} : E_p \to T_{\mathbf{e}}G$ tal que $\Phi_{\mathbf{e}}(p, X) = (\mathbf{e}, X)$, que identifica a fibra E_p, $p \in M$ com $T_{\mathbf{e}}$G e observe que a curvatura R^G e $\mathcal{R}$ são tensores nulos.

Por outro lado, a torção de D foi definida como $-[\ ,\ ]_0$, onde $[\ ,\ ]_0$ é o produto da álgebra de Lie em $T_{\mathbf{e}}$G, ou seja, $\Phi_{\mathbf{e}}$ preserva $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$. Com isso concluimos o que queríamos.

Logo, se existir a isometria V satisfazendo a condição (2.1), o Teorema (2.2) garante a existência da imersão isométrica $f : M^n \looparrowright \mathrm{G}^{n+1}$.

Para finalizarmos a demonstração do item (i), é preciso justificar porque os dados (g, N) são admissíveis. Para isso, verificaremos antes que as conexões D^{G} e D são compatíveis com as métricas de G e M, respectivamente, as quais estaremos representando pelo mesmo símbolo $\langle\ ,\ \rangle$.

De fato, se X, Y, Z são campos invariantes à esquerda em G então, derivando $\langle\, Y, Z\,\rangle$, com respeito a X,

$$X\,\langle\, Y, Z\,\rangle = 0$$

pois a métrica de G é invariante à esquerda, e nesse caso, a aplicação $h \mapsto \langle\ ,\ \rangle_h$, $h \in$ G é constante.

Por outro lado, pela definição de D^G

$$\left\langle\, D^G_X Y, Z\,\right\rangle + \left\langle\, Y, D^G_X Z\,\right\rangle = 0$$

Assim, temos que

$$X\,\langle\, Y, Z\,\rangle = \left\langle\, D^G_X Y, Z\,\right\rangle + \left\langle\, Y, D^G_X Z\,\right\rangle$$

o que mostra que D^G é compatível com a métrica.

Para a conexão D, sejam $X \in T_pM$ e $\zeta, \vartheta \in E$ seções triviais, ou seja, seções do tipo (p, X), onde X é constante. Então,

$$X\,\langle\, \zeta, \vartheta\,\rangle = 0$$

Além disso,

$$\langle\, D_X\zeta, \vartheta\,\rangle + \langle\, \zeta, D_X\vartheta\,\rangle = 0$$

pela definição de D. Logo, D também é compatível com a métrica.

Observe ainda que o isomorfismo $\Phi_{\mathbf{e}}$, que preserva as estruturas algébricas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$, assim como V, são isometrias. Com isso, temos que o homomorfismo Φ em (2.10) também será uma isometria. Portanto, leva a aplicação normal de Gauss da imersão f, em N, uma vez que V chega em E perpendicular a N.

Desse modo, temos que os dados são admissíveis, e o item (i) está provado.

Passaremos, em seguida, para a demonstração do item

(ii) Vamos recordar que as conexões D e D^{G} são compatíveis com a métrica, ou seja a métrica é paralela. Pela observação que $\Phi_{\mathbf{e}}$ e V são isometrias, temos que $f : M^n \to \mathrm{G}^{n+1}$ é uma **imersão isométrica**. Por este motivo, a conexão ∇ de M é a projeção tangente da conexão de Levi-Civita ∇^{G} de G. Como $f^*T\mathrm{G}$ é um fibrado sobre M, então as derivação usando ∇^{G} serão feitas com respeito a X tangente a M.

Dessa forma, temos que

$$df\nabla_X Y \;=\; \left\{\nabla^{G}_X df Y\right\}^{\top} \tag{2.11}$$

Afirmação 2.1 *Se* G *está munido com uma métrica invariante à esquerda, temos que* ∇^{G} *é dada por*

$$\nabla^{G}_X Y = D^{G}_X Y + \frac{1}{2}\{[\,X\,,Y\,]_0 - \mathrm{L}_0(X,Y)\} \tag{2.12}$$

onde

$$\langle\, \mathrm{L}_0(X,Y)\,,Z\,\rangle = \langle\,[\,X\,,Z\,]_0, Y\,\rangle + \langle\,[\,Y\,,Z\,]_0, X\,\rangle \tag{2.13}$$

Ver Observação **??** *no final do capítulo.*

Demonstração:[Da afirmação] Dado $p \in \mathrm{G}$ considere a base ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ de campos invariantes à esquerda em p. Seja $Y = \sum_i Y^i(p)E_i$. Derivando Y com respeito a campos de M, temos que,

$$\begin{aligned} \nabla^{G}_X Y &= \nabla^{G}_X\left(\sum_i Y^i(p)E_i\right) \\ &= \sum_i X\left(Y^i(p)\right)E_i + \sum_i Y^i(p)\nabla_X E_i \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como

$$D^{G}_X Y \;=\; \sum_i X\left(Y^i(p)\right)E_i + \sum_i Y^i(p)D^{G}_X E_i$$

a expressão 2.14 torna-se

$$\begin{aligned}\nabla^{G}_{X} Y &= D^{G}_{X} Y + \frac{1}{2}\sum_i Y^i(p)\{[\,X, E_i\,]_0 - \mathrm{L}_0(X, E_i)\} \\ &= D^{G}_{X} Y + \frac{1}{2}\left\{\left[\,X, \sum_i Y^i(p)E_i\,\right]_0 - \mathrm{L}_0(X, \sum_i Y^i(p)E_i)\right\} \\ &= D^{G}_{X} Y + \frac{1}{2}\{[\,X, Y\,]_0 - \mathrm{L}_0(X, Y)\}\end{aligned}$$

o que prova a Afirmação 2.1.

Pelo item (i), temos que $\Phi \circ df = V$, o que nos permite escrever

$$\Phi(df\nabla_X Y) = V(\nabla_X Y) \tag{2.15}$$

Como $f : M \looparrowright \mathrm{G}$ é uma imersão isométrica, segue da Afirmação 2.1 que

$$\begin{aligned}df\nabla_X Y &= \left\{\nabla^{G}_{X} df Y\right\}^{\top} \\ &= \left\{D^{G}_{X} df Y + \frac{1}{2}\{[\,X, Y\,]_0 - \mathrm{L}_0(X, Y)\}\right\}^{\top}\end{aligned} \tag{2.16}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Phi(df\nabla_X Y) &= \Phi\left\{D^{G}_{X} df Y + \frac{1}{2}\{[\,X, Y\,]_0 - \mathrm{L}_0(X, Y)\}\right\}^{\top} \\ &= \Big\{D_X\Phi(dfY) + \frac{1}{2}\{[\,\Phi(dfX), \Phi(dfY)\,]_0 \\ &\quad -\mathrm{L}_0(\Phi(dfX), \Phi(dfY))\}\Big\}^{Im(V)} \\ &= \Big\{D_X V(Y) + \frac{1}{2}\{[\,V(X), V(Y)\,]_0 \\ &\quad -\mathrm{L}_0(V(X), V(Y))\}\Big\}^{Im(V)}\end{aligned} \tag{2.17}$$

De (2.15) e (2.17) temos

$$\begin{aligned}(D_X V(Y))^{Im(V)} &= V(\nabla_X Y) - \frac{1}{2}\{[\,V(X), V(Y)\,]_0 \\ &- \mathrm{L}_0(V(X), V(Y))\}^{Im(V)}\end{aligned}$$

que são as equações diferenciais (2.3).

Agora, seja γ uma geodésica em M passando por $p \in M$ com vetor tangente $\gamma'(t)$ em p. Consideremos $X = \gamma'(t)$, então as equações diferenciais

(2.3) tornam-se

$$
\begin{aligned}
(2.18)\qquad (D_{\gamma'}V(Y))^{Im(V)} &= V(\nabla_{\gamma'}Y) - \frac{1}{2}\{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0 \\
&- \mathrm{L}_0(V(\gamma'), V(Y))\}^{Im(V)}
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(2.19)(D_{\gamma'}V(Y))^{Im(V)} - V(\nabla_{\gamma'}Y) &= (D_{\gamma'}V(Y)) - V(\nabla_{\gamma'}Y) \\
&+ \langle\, D_{\gamma'}V(Y), N\,\rangle \\
&= (D_{\gamma'}V)(Y) + \langle\, D_{\gamma'}V(Y), N\,\rangle
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(2.20)\qquad & \{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0 - \mathrm{L}_0(V(\gamma'), V(Y))\}^{Im(V)} = \\
& \{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0 - \mathrm{L}_0(V(\gamma'), V(Y))\} \\
& -\langle\,[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0 - \mathrm{L}_0(V(\gamma'), V(Y)), N\,\rangle
\end{aligned}
$$

Por (2.13), temos que

$$
\begin{aligned}
(2.21)\qquad \langle\, \mathrm{L}_0(V(\gamma'), V(Y)), N\,\rangle &= \langle\, V(Y), [\,V(\gamma'), N\,]_0\,\rangle \\
&+ \langle\, V(\gamma'), [\,V(Y), N\,]_0\,\rangle
\end{aligned}
$$

Se substituirmos (2.21) em (2.20) e o resultado for levado para (2.18) juntamente com (2.19) obteremos as equações diferenciais ordinárias (2.4).

No caso em que a métrica de G é biinvariante, a conexão de Levi-Civita ∇^{G} de G é dada por

$$
(2.22)\qquad \nabla^{G}_{X}Y = \frac{1}{2}[\,X, Y\,]
$$

Y campo invariante à esquerda em G. Entretanto, se Y é um campo não invariante à esquerda, então de acordo com a Afirmação 2.1

$$
\nabla^{G}_{X}Y = D^{G}_{X}Y + \frac{1}{2}[\,X, Y\,]_0
$$

pois, nesse caso $\mathrm{L}_0 = 0$.

Portanto,

$$
(2.23)\quad df\nabla_X Y = \left\{\nabla^{G}_{X}dfY\right\}^{\top} = \left\{D^{G}_{X}dfY + \frac{1}{2}[\,dfX, dfY\,]_0\right\}^{\top}
$$

de onde segue que,

$$\Phi\left\{\nabla^{G}_{X} dfY\right\}^{\top} = \Phi\left\{D^{G}_{X} dfY + \frac{1}{2}\left[\, dfX, dfY \,\right]_0\right\}^{\top} \tag{2.24}$$
$$= \left\{D_X\Phi(dfY) + \frac{1}{2}\left[\, \Phi(dfX), \Phi(dfY) \,\right]_0\right\}^{Im(V)}$$
$$= \left\{D_X V(Y) + \frac{1}{2}\left[\, V(X)), V(Y)) \,\right]_0\right\}^{Im(V)}$$

Logo, de (2.15), (2.23) e (2.24), temos (2.6).

Para completarmos a demonstração do item (ii), precisamos mostrar que, se γ é uma geodésica em M passando por $p \in M$ com vetor tangente $\gamma'(t)$ em p, então, considerando $X = \gamma'(t)$, as equações diferenciais (2.6) podem ser escritas como (2.7).

De fato, com estas hipótese, as equações diferenciais (2.6) tornam-se

$$\left(D_{\gamma'}V(Y)\right)^{Im(V)} = V\left(\nabla_{\gamma'}Y\right) - \frac{1}{2}\left[\, V(\gamma'), V(Y) \,\right]_0^{Im(V)} \tag{2.25}$$

de onde temos que,

$$\begin{aligned} D_{\gamma'}V(Y) - \langle\, D_{\gamma'}V(Y), N \,\rangle\, N &= V\left(\nabla_{\gamma'}Y\right) - \frac{1}{2}\left[\, V(\gamma'), V(Y) \,\right]_0 \\ &+ \frac{1}{2}\langle\, \left[\, V(\gamma'), V(Y) \,\right]_0, N \,\rangle\, N \end{aligned}$$

que podemos escrever como

$$\begin{aligned} \left(D_{\gamma'}V\right)(Y) - \langle\, D_{\gamma'}V(Y), N \,\rangle\, N &= -\frac{1}{2}\left[\, V(\gamma'), V(Y) \,\right]_0 \\ &+ \frac{1}{2}\langle\, \left[\, V(\gamma'), V(Y) \,\right]_0, N \,\rangle\, N \\ \left(D_{\gamma'}V\right)(Y) + \langle\, V(Y), D_{\gamma'}N \,\rangle\, N &= -\frac{1}{2}\left[\, V(\gamma'), V(Y) \,\right]_0 \\ &+ \frac{1}{2}\langle\, \left[\, V(\gamma'), V(Y) \,\right]_0, N \,\rangle\, N \end{aligned}$$

de onde obtemos as equações diferenciais ordinárias (2.7).

Com isso, concluimos a demonstração do item (ii) e, consequentemente, fica provado o Teorema. $\square$

No artigo citado no início do capítulo, onde o espaço ambiente é o $\mathbb{R}^{n+1}$, o resultado apresentado pressupõe que a diferencial da aplicação ν seja não-degenerada. Nesse sentido, se considerarmos G^{n+1} como sendo $\mathbb{R}^{n+1}$, obtemos com o Teorema 2.1, um resultado mais geral.

2.2 Imersões em grupos de Lie métricos com aplicação de Gauss prescrita

Como mencionamos no início do capítulo, nesta seção estaremos apresentando um resultado para imersões com codimensão maior que 1. Nesse caso, as condições necessárias e suficientes para que os dados (g, N) sejam admissíveis, são obtidas da mesma forma que no Teorema 2.1. Uma vez obtida a imersão que é solução para (g, N), as equações que não envolvem componentes nas direções do complemento ortogonal $N(p)$ dessa imersão, também não sofrem alterações. A diferença, com relação às hipersuperfícies, será na complexidade das equações diferenciais ordinárias obtidas ao longo de geodésicas de M, pois envolvem termos nas várias direções dadas por uma base ortonormal desse complemento ortogonal.

Teorema 2.3 *(i) Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com métrica g, G^{n+k} um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G.*

Considere $\mathfrak{R}^{n+k}$ e o fibrado E sobre M definidos como no Teorema 2.1.

Seja a aplicação suave $N : M^n \to G_k\left(\mathfrak{R}^{n+k}\right)$ tomando valores no Grassmanniano de k-planos em $\mathfrak{R}^{n+k}$.

Então, os dados são admissíveis se, e somente se, existe uma isometria $V : TM \to E$, satisfazendo (2.1).

Neste caso, a imersão isométrica $f : M \looparrowright \mathrm{G}$ satisfaz (2.2)*, onde $\Phi : f^*T\mathrm{G} \to E$ é uma isometria paralela.*

(ii) Além disso, se a isometria V existe, então satisfaz as equações diferenciais (2.3)*, que podem ser escritas, ao longo de geodésicas de M, passando por p, como as equações diferenciais ordinárias*

$$(2.26)\ (D_{\gamma'}V)(Y) = -\frac{1}{2}\{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0 - ad^*_{V(\gamma')}V(Y) - ad^*_{V(Y)}V(\gamma')\} \\ +\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\{\langle\,[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0, N^\alpha\,\rangle - \langle\,[\,V(\gamma'), N^\alpha\,]_0, V(Y)\,\rangle \\ - \langle\,[\,V(Y), N^\alpha\,]_0, V(\gamma')\,\rangle - 2\,\langle\,V(Y), D_{\gamma'}N^\alpha\,\rangle\}N^\alpha$$

com as condições iniciais

$$(2.27) \qquad \sum_{\alpha=1}^{k}(\langle\, V(Y), D_X N^\alpha \,\rangle - \langle\, V(X), D_Y N^\alpha \,\rangle) = \sum_{\alpha=1}^{k}\langle\, [\, V(X), V(Y)\,]_0, N^\alpha \,\rangle$$

onde $(N^\alpha)_{\alpha=1,\ldots,k}$ *é uma base ortonormal de* $N(p)$.

No caso em que a métrica de G *no item (i) é biinvariante, as equações diferenciais serão dadas por* (2.6)*, e as equações diferenciais ordinárias se reduzem a*

$$(2.28) \quad (D_{\gamma'}V)\,(Y) = -\frac{1}{2}\,[\, V(\gamma'), V(Y)\,]_0 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\{\langle\, [\, V(\gamma'), V(Y)\,]_0, N^\alpha \,\rangle - 2\,\langle\, V(Y), D_{\gamma'}N^\alpha \,\rangle\}\, N^\alpha$$

com as condições iniciais (2.27).

Demonstração:

(i) As condições necessárias e suficientes para que os dados (g, N) sejam admissíveis, pela existência da isometria V e da isometria paralela Φ tal que $\Phi \circ df = V$, são obtidas da mesma forma que no item (i) do Teorema 2.1.

(ii) Seja G^{n+k} um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda, as equações diferenciais (2.3) são obtidas das mesmas expressões e pelos mesmos argumentos usados na demonstração correspondente no Teorema 2.1. Por esse motivo, nossas considerações recairão sobre as equações diferenciais ordinárias (2.26) ao longo de geodésicas de$M$ por $p \in M$ com condições iniciais (2.27).

Seja γ uma geodésica em M passando por $p \in M$ com vetor tangente $\gamma'(t)$ em p. Consideremos $X = \gamma'(t)$, então as equações diferenciais (2.3) tornam-se (2.18) que escreveremos como

$$(2.29) \qquad (D_{\gamma'}V(Y))^{Im(V)} - V\,(\nabla_{\gamma'}Y) = -\frac{1}{2}\{[\, V(\gamma'), V(Y)\,]_0 - ad^*_{V(\gamma')}V(Y) - ad^*_{V(Y)}V(\gamma')\}^{Im(V)}$$

A imagem de V, agora, tem como complemento ortogonal $N(p)$, com dim $N(p) = k$. Então, se considerarmos $(N^\alpha)_{\alpha=1,\ldots,k}$ uma base ortonormal de $N(p)$, teremos que $(D_{\gamma'}V(Y))^{N(p)}$ será a combinação linear das projeções de $(D_{\gamma'}V(Y))$ sobre cada N^α. Isto é,

$$(D_{\gamma'}V(Y))^{N(p)} = \sum_{\alpha=1}^{k} \langle\, D_{\gamma'}V(Y),\, N^\alpha \,\rangle\, N^\alpha$$

Pelo mesmo motivo temos que

$$\begin{aligned}(2.30)\qquad & \{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0 - ad^*_{V(\gamma')}V(Y) - ad^*_{V(Y)}V(\gamma')\}^{N(p)} = \\ & \sum_{\alpha=1}^{k}\{\langle\,[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0, N^\alpha\,\rangle - \langle\,[\,V(\gamma'), N^\alpha\,]_0, V(Y)\,\rangle \\ & -\langle\,[\,V(Y), N^\alpha\,]_0, V(\gamma')\,\rangle\}N^\alpha\end{aligned}$$

Desse modo, o lado esquerdo da expressão (2.29) será escrito do seguinte modo,

$$\begin{aligned}(2.31)\qquad (D_{\gamma'}V(Y))^{Im(V)} - V\,(\nabla_{\gamma'}Y) \;&=\; (D_{\gamma'}V)\,(Y) \\ &-\; \sum_{\alpha=1}^{k}\langle\, V(Y), D_{\gamma'}N^\alpha \,\rangle\, N^\alpha\end{aligned}$$

e o lado direito ficará

$$\begin{aligned}(2.32)\qquad & -\frac{1}{2}\{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0 - ad^*_{V(\gamma')}V(Y) - ad^*_{V(Y)}V(\gamma')\}^{Im(V)} = \\ & -\frac{1}{2}\{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0 - ad^*_{V(\gamma')}V(Y) - ad^*_{V(Y)}V(\gamma')\} \\ & +\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\{\langle\,[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0, N^\alpha\,\rangle - \langle\,[\,V(\gamma'), N^\alpha\,]_0, V(Y)\,\rangle \\ & -\langle\,[\,V(Y), N^\alpha\,]_0, V(\gamma')\,\rangle\}N^\alpha\end{aligned}$$

Substituindo (2.32) e (2.31) em (2.29), obtemos (2.26).

No caso em que a métrica de G^{n+k} no item (i) é biinvariante, as equações diferenciais (2.6) serão obtidas das mesmas expressões e pelos mesmos argumentos usados na demonstração correspondente no Teorema 2.1. Por isso, iremos considerar apenas as equações diferenciais ordinárias (2.28) com condições iniciais (2.27).

Seja γ uma geodésica em M passando por $p \in M$ com vetor tangente $\gamma'(t)$. Consideremos $X = \gamma'(t)$, então as equações diferenciais (2.6) tornam-se (2.25) que podemos escrever da seguinte maneira,

$$(2.33) \qquad (D_{\gamma'}V(Y))^{Im(V)} - V\,(\nabla_{\gamma'}Y) = -\frac{1}{2}\{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0^{Im(V)}$$

Como

$$\begin{aligned}(2.34) - \frac{1}{2}\{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0^{Im(V)} \quad &= \quad -\frac{1}{2}\{[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0 \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}\langle\,[\,V(\gamma'), V(Y)\,]_0, N^\alpha\,\rangle\,N^\alpha\end{aligned}$$

então, substituindo (2.34) e (2.31) em (2.33) obtemos (2.28). $\square$

Capítulo 3

Observações e exemplos

No capítulo anterior, foram dadas condições necessárias e suficientes para que os dados (g, N) fossem admissíveis, no item (i) do Teorema 2.1. Além disso, supondo a existência da isometria V, no item (ii) daquele teorema, foram dadas as ferramentas para se obter V através de equações diferenciais.

Neste capítulo, mostraremos que, em alguns casos, existem alternativas para a obtenção de V sem usar aquelas equações diferenciais.

Nossa primeira abordagem será feita a partir do resultado apresentado pelos autores no artigo citado em [8], onde foram consideradas condições para que os dados (g, ν) fossem admissíveis, com solução $u : M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$, principalmente através do seguinte teorema.

Teorema 3.1 (Eschenburg-Kruglikov-Metveev-Tribuzy) *Sejam* (M^m, g) *uma variedade Riemanniana e* $\nu : M^m \to \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ *uma aplicação suave. Seja* $A = d\nu : TM^m \to \nu^\perp$*. Assuma que* A *seja invertível, e seja* k *definida por* $k(v, w) = \langle Av, Aw \rangle = \langle A^*Av, w \rangle$*, para todos* $v, w \in TM$*. Então, os dados* (g, ν) *são admissíveis se, e somente se existe* $h \in S^2T^*M$ *com*

$$h^2 = k.$$

tal que o homomorfismo de fibrados vetoriais

$$U = -(A^*)^{-1}h : TM \to \nu^\perp$$

é isométrico e paralelo com respeito à conexão de Levi-Civita em TM *e a conexão projeção em* $\nu^\perp$*. Na verdade, a imersão correspondente* $u : M^m \to$

$\mathbb{R}^{m+1}$ *é determinada por* $du = U$, *e* h *é a segunda forma fundamental de* u, *i.e.* $h_{ij} = \langle u_{ij}, \nu \rangle$.

3.1 A isometria U

Nessa seção, mostraremos um resultado para imersões em grupos de Lie com métrica invariante à esquerda, análogo ao obtido no Teorema 3.1. A analogia refere-se ao fato de estarmos usando o homomorfismo isométrico U do Teorema 3.1, ainda que sem a exigência de seu paralelismo.

Proposição 3.1 *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana simplesmente conexa,* G^{n+1} *um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda e* $\mathfrak{g}$ *a álgebra de Lie de* G. *Seja a aplicação suave* $N : M^n \to \mathbb{S}^n \subset T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$.
Suponha que $\langle\, [\, u, v\,]_0, N \,\rangle = 0\ \forall u, v \in TM$ *e que existe raiz quadrada simétrica* h *de* $dNdN^*$, *não degenerada. Denote por* E *o fibrado* $M \times \mathfrak{R}^{n+1}$ *e considere em* E *a conexão flat* D *tal que* $D_X\xi = 0$ *para todo* $\xi = (p, v)$ *com* $v =$ *constante. Então, existe uma imersão isométrica* $f : M^n \to \mathrm{G}^{n+1}$ *tal que*

$$df = U,$$

a menos de isomorfismos paralelos de G, *onde* $U = -(dN^*)^{-1}h$ *se, e somente se,*

$$(3.1) \qquad \left(D_X U(Y) - D_Y U(X) + [\, U(X), U(Y)\,]_0\right)^{N^\perp} = U([\, X, Y\,])$$

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que U é de fato uma isometria, ou seja,

$$(3.2) \qquad \langle\, U(X), U(Y)\,\rangle = \langle\, X, Y\,\rangle$$

Para isso, substituiremos $U = -(dN^*)^{-1}h$ no lado esquerdo desta expressão, usaremos a definição de adjunta e consideraremos que h é auto-adjunta,

$$\begin{aligned}
\langle\, U(X), U(Y)\,\rangle &= \left\langle\, -(dN^*)^{-1}h(X), -(dN^*)^{-1}h(Y)\,\right\rangle \\
&= \left\langle\, h^*(dN)^{-1}(dN^*)^{-1}h(X), Y\,\right\rangle \\
&= \left\langle\, h^*(dN^*dN)^{-1}h(X), Y\,\right\rangle \\
&= \left\langle\, h(hh)^{-1}h(X), Y\,\right\rangle \\
&= \left\langle\, hh^{-1}h^{-1}h(X), Y\,\right\rangle \\
&= \langle\, X, Y\,\rangle
\end{aligned}$$

Em seguida, mostraremos que

$$\langle\, D_X U(Y), N\,\rangle = \langle\, D_Y U(X), N\,\rangle \tag{3.3}$$

Para isso, além da definição de U usaremos o fato que $\langle\, U(X), N\,\rangle = 0$, $D_X N = dN(X)$ e h é simétrica,

$$\begin{aligned}
\langle\, D_X U(Y), N\,\rangle - \langle\, D_Y U(X), N\,\rangle &= -\langle\, U(Y), D_X N\,\rangle + \langle\, U(X), D_Y N\,\rangle \\
&= -\left\langle\, -(dN^*)^{-1}h(Y), D_X N\,\right\rangle + \left\langle\, -(dN^*)^{-1}h(X), D_Y N\,\right\rangle \\
&= \left\langle\, (dN^*)^{-1}h(Y), dN(X)\,\right\rangle - \left\langle\, (dN^*)^{-1}h(X), dN(Y)\,\right\rangle \\
&= \left\langle\, dN^*(dN^*)^{-1}h(Y), X\,\right\rangle - \left\langle\, dN^*(dN^*)^{-1}h(X), Y\,\right\rangle \\
&= \langle\, h(Y), X\,\rangle - \langle\, h(X), Y\,\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

o que mostra a igualdade (3.3).
A partir dessa igualdade, temos que

$$\langle\, D_X U(Y), N\,\rangle - \langle\, D_Y U(X), N\,\rangle = 0$$

Como U toma valores em $N^{\perp}$, então $\langle\, U([\,X, Y\,]), N\,\rangle = 0$. Além disso, por hipótese,
$\langle\, [\,U(X), U(Y)\,]_0, N\,\rangle = 0$, o que nos permite escrever

$$\langle\, D_X U(Y), N\,\rangle - \langle\, D_Y U(X), N\,\rangle + \langle\, [\,U(X), U(Y)\,]_0, N\,\rangle = \langle\, U([\,X, Y\,]), N\,\rangle$$

ou seja,

$$\langle\, D_X U(Y) - D_Y U(X) + [\, U(X), U(Y)\,]_0, N\,\rangle = \langle\, U([\, X, Y\,]), N\,\rangle$$

Mas isso significa que

$$(3.4)\quad (D_X U(Y) - D_Y U(X) + [\, U(X), U(Y)\,]_0)^{\perp} = U([\, X, Y\,])^{\perp} = 0$$

Portanto, se tivermos

$$(3.5)\qquad (D_X U(Y) - D_Y U(X) + [\, U(X), U(Y)\,]_0)^{N^{\perp}} = U([\, X, Y\,])$$

a soma das igualdades acima, (3.4) + (3.5), resulta em

$$D_X U(Y) - D_Y U(X) - U([\, X, Y\,]) \;\; = \;\; -[\, U(X), U(Y)\,]_0$$

que é a equação de compatibilidade (2.1) para o homomorfismo U. □

3.2 A isometria V

De um modo geral não será possível encontrar a imersão a partir do homomorfismo isométrico U dado no Teorema3.1. Nesse caso, recorreremos a um operador ortogonal $O : T_pM \to T_pM$, $p \in M$, que deverá "arrumar"os vetores de T_pM para obtermos a solução.

Assim, teremos uma nova isometria $V : TM \to E$ dada por

$$(3.6)\qquad V = U \circ O$$

que irá satisfazer a condição de integrabilidade (2.1).

Como é necessário que $V([\, X, Y\,]) \in Im(V)$, então a condição para que os dados sejam admissíveis no Teorema 2.1 nos permite considerar que uma condição necessária sobre V é que

$$(3.7)\qquad \langle\, D_X V(Y) - D_Y V(X), N\,\rangle = -\langle\, [\, V(X), V(Y)\,]_0, N\,\rangle$$

$X, Y \in TM$.

Dessa forma, temos o seguinte

Teorema 3.2 *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana simplesmente conexa,* G^{n+1} *um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda e* $\mathfrak{g}$ *a álgebra de Lie de* G. *Seja a aplicação suave* $N : M^n \to \mathbb{S}^n \subset T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$.

Denote por E *o fibrado* $M \times \mathfrak{R}^{n+1}$ *e considere em* E *a conexão flat* D *tal que* $D_X\xi = 0$ *para todo* $\xi = (p, v)$ *com* $v =$ *constante.*

Uma condição necessária para que exista uma isometria f *é que exista um operador ortogonal* $O : T_pM \to T_pM$, $p \in M$ *tal que*

$$V = U \circ O \tag{3.8}$$

onde U *é como na Proposição 3.1, satisfaz*

$$\langle\, D_XV(Y) - D_YV(X), N \,\rangle = -\langle\, [\, V(X), V(Y)\,]_0, N \,\rangle \tag{3.9}$$

$X, Y \in TM$.

Além disso, a condição é também suficiente se V *satisfaz*

$$(D_XV(Y) - D_YV(X) - V\,[\, X, Y\,])^{N^\perp} = ([\, V(X), V(Y)\,]_0)^{N^\perp} \tag{3.10}$$

Neste caso,

$$df = V,$$

a menos de isomorfismo paralelo de G.

3.3 Imersões em 3-dimensionais grupos de Lie com aplicação de Gauss prescrita

Nesta seção estaremos utilizando os resultados da seção anterior para obtermos condições necessárias e suficientes para que a segunda forma fundamental de uma superfície regular $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, seja a mesma segunda forma fundamental da imersão de M^2 em um grupo de Lie G de dimensão 3. Inicialmente demonstraremos um teorema geral para esta situação. Em seguida faremos uma abordagem para alguns grupos de Lie específicos. Abordaremos mais detalhadamente o grupo de Lie $\mathbb{S}^3$ com alguns resultados e exemplos e finalizaremos a seção mostrando um exemplo no 3-dimensional grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$, também conhecido na literatura como Nil_3.

3.3.1 Imersões $M^2 \looparrowright \mathrm{G}^3$ com aplicação de Gauss prescrita

Conforme mencionamos acima, iniciaremos os resultados obtidos para esta seção, com o seguinte corolário do Teorema 2.1

Corolário 3.1 *Sejam (M^2, g) uma 2-variedade Riemanniana e G^3 um grupo de Lie tri-dimensional com métrica invariante à esquerda. Seja $N : M^2 \to \mathbb{S}^2 \subset T_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$ uma aplicação suave. Denote por E o fibrado vetorial $M^2 \times \mathfrak{R}^3$ sobre M e considere em E a conexão flat D tal que $D_X\xi = 0$, para todo $\xi = (p, v)$, com $v =$constante e $X \in TM$. Suponha a existência de U como na Proposição 3.1. Então, uma condição necessária para os dados (g, N) sejam admissíveis, preservando a orientação dada por U, é que exista θ tal que*

$$\text{(3.11)} \qquad \operatorname{sen}\theta = -\frac{\langle\, [\,\mathrm{U(X)}, \mathrm{U(Y)}\,]_0, \mathrm{N}\,\rangle}{\langle\, \mathrm{D_X U(X)} + \mathrm{D_Y U(Y)}, \mathrm{N}\,\rangle},$$

X, Y base ortonormal de T_pM, $p \in M$, e U é como no Teorema3.1.

Além disso, a condição é também suficiente se

$$\text{(3.12)} \qquad V = U \circ R_\theta$$

onde R_θ é a rotação de um ângulo θ em T_pM, satisfaz

$$\text{(3.13)} \quad (D_XV(Y) - D_YV(X) - V([\,X, Y\,]))^{N^\perp} = [\,V(X), V(Y)\,]_0^{N^\perp}$$

Neste caso,

$$df = V,$$

a menos de isomorfismo paralelo de G.

Demonstração: Seja (M^2, g) uma variedade Riemaniana de dimensão 2 e G um grupo de Lie de dimensão 3 com uma métrica invariante à esquerda.

Dado $p \in M$, seja f_1, f_2 um referencial ortonormal em $W \subset M$ contendo p e $R_\theta : T_pM \to T_pM$ a rotação de um ângulo θ,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

A condição (3.9) agora significa

$$(3.14) \qquad \langle\, D_{f_1}V(f_2) - D_{f_2}V(f_1), N\,\rangle = \langle\, [\, V(f_1), V(f_2)\,]_0, N\,\rangle$$

Temos,

$R_\theta(f_1) = \cos\theta f_1 + \mathrm{sen}\,\theta \mathrm{f}_2$

$R_\theta(f_2) = -\mathrm{sen}\,\theta \mathrm{f}_1 + \cos\theta \mathrm{f}_2$

$V(f_1) = U \circ R_\theta(f_1) = \cos\theta U(f_1) + \mathrm{sen}\,\theta \mathrm{U(f_2)}$

$V(f_2) = -\mathrm{sen}\,\theta \mathrm{U(f_1)} + \cos\theta \mathrm{U(f_2)}$

Mas,

$$\begin{aligned}
D_{f_1}V(f_2) &= D_{f_1}(-\mathrm{sen}\,\theta \mathrm{U(f_1)} + \cos\theta \mathrm{U(f_2)})\\
&= -\mathrm{sen}\,\theta \mathrm{D_{f_1}U(f_1)} - \cos\theta \mathrm{d}\theta(\mathrm{f_1})\mathrm{U(f_1)} + \cos\theta \mathrm{D_{f_1}U(f_2)} - \mathrm{sen}\,\theta \mathrm{d}\theta(\mathrm{f_1})\mathrm{U(f_2)}\\
D_{f_2}V(f_1) &= D_{f_2}(\cos\theta U(f_1) + \mathrm{sen}\,\theta \mathrm{U(f_2)})\\
&= \cos\theta D_{f_2}U(f_1) - \mathrm{sen}\,\theta \mathrm{d}\theta(\mathrm{f_2})\mathrm{U(f_1)} + \mathrm{sen}\,\theta \mathrm{D_{f_2}U(f_2)} + \cos\theta \mathrm{d}\theta(\mathrm{f_2})\mathrm{U(f_2)}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle\, D_{f_1}V(f_2) - D_{f_2}V(f_1), N\,\rangle &= -\mathrm{sen}\,\theta\,\langle\, \mathrm{D_{f_1}U(f_1), N}\,\rangle + \cos\theta\,\langle\, \mathrm{D_{f_1}U(f_2), N}\,\rangle\\
&- \cos\theta\,\langle\, D_{f_2}U(f_1), N\,\rangle - \mathrm{sen}\,\theta\,\langle\, \mathrm{D_{f_2}U(f_2), N}\,\rangle
\end{aligned}$$

uma vez que $\langle\, U(f_i), N\,\rangle = 0$.

Como de (3.3), $\langle\, D_{f_1}U(f_2), N\,\rangle = \langle\, D_{f_2}U(f_1), N\,\rangle$, temos que

$$(3.15)\ \langle\, D_{f_1}V(f_2) - D_{f_2}V(f_1), N\,\rangle \;=\; -\mathrm{sen}\,\theta\,\langle\, \mathrm{D_{f_1}U(f_1) + D_{f_2}U(f_2), N}\,\rangle$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\, V(f_1), V(f_2)\,]_0 &= [\, \cos\theta U(f_1) + \mathrm{sen}\,\theta \mathrm{U(f_2)}, -\mathrm{sen}\,\theta \mathrm{U(f_1)} + \cos\theta \mathrm{U(f_2)}\,]_0\\
&= \cos^2\theta\,[\, U(f_1), U(f_2)\,]_0 + \mathrm{sen}^2\theta\,[\, \mathrm{U(f_1), U(f_2)}\,]_0\\
&= (\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)\,[\, \mathrm{U(f_1), U(f_2)}\,]_0\\
(3.16) \qquad &= [\, U(f_1), U(f_2)\,]_0
\end{aligned}$$

Recordando que, de acordo com (3.14) devemos ter

$$\langle\, D_{f_1}V(f_2) - D_{f_2}V(f_1), N\,\rangle = \langle\, [\, V(f_1), V(f_2)\,]_0, N\,\rangle$$

os resultados (3.15) e (3.16) nos permitem escrever

$$-\operatorname{sen}\theta \,\langle\, \mathrm{D}_{\mathrm{f}_1}\mathrm{U}(\mathrm{f}_1) + \mathrm{D}_{\mathrm{f}_2}\mathrm{U}(\mathrm{f}_2), \mathrm{N}\,\rangle = \langle\, [\,\mathrm{U}(\mathrm{f}_1), \mathrm{U}(\mathrm{f}_2)\,]_0, \mathrm{N}\,\rangle$$

Logo,

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\langle\, [\,\mathrm{U}(\mathrm{f}_1), \mathrm{U}(\mathrm{f}_2)\,]_0, \mathrm{N}\,\rangle}{\langle\, \mathrm{D}_{\mathrm{f}_1}\mathrm{U}(\mathrm{f}_1) + \mathrm{D}_{\mathrm{f}_2}\mathrm{U}(\mathrm{f}_2), \mathrm{N}\,\rangle}$$

como queríamos. □

Observação 3.1 *Se* $\operatorname{sen}\theta = 0$*, então* $\langle\, [\,U(f_1), U(f_2)\,]_0, N\,\rangle = 0$ *e recaímos no caso anterior onde* $V = U$*.*

Observação 3.2 *O resultado acima significa que* $D_{f_1}U(f_1) + D_{f_2}U(f_2) \neq 0$ *na direção de* N*. Ou seja,* $\langle\, D_{f_1}N, U(f_1)\,\rangle + \langle\, D_{f_2}N, U(f_2)\,\rangle \neq 0$*. Mas o lado esquerda desta expressão nada mais é que o traço de* DN*. Então, o resultado acima significa que* $tr(DN) \neq 0$*.*

Nosso próximo objetivo será verificar o que acontece em alguns grupos de Lie de dimensão 3 específicos. Começaremos verificando as

3.4 Imersões no grupo de Lie $\mathbb{S}^3$ com aplicação de Gauss prescrita

Nessa seção faremos uma síntese do grupo de Lie $\mathbb{S}^3$. Em seguida mostraremos alguns resultados obtidos e finalizaremos a seção com alguns exemplos. Estaremos considerando $\mathbb{S}^3$ como um subgrupo fechado do grupo de Lie dos quatérnios, por onde iniciaremos nossa síntese.

3.4.1 O grupo de Lie dos quatérnios $\mathbb{H}$

Dada a base de $\mathbb{R}^4$, $1 = (1,0,0,0)$, $i = (0,1,0,0)$, $j = (0,0,1,0)$, $k = (0,0,0,1)$, se definirmos as relações

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \qquad ij = k; \quad jk = i; \quad ki = j \tag{3.17}$$

chamaremos o $\mathbb{R}^4$ com essa estrutura de **espaço dos quatérnios** e representaremos por $\mathbb{H}$. Desse modo, $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, com as relações (3.17).

Dados $p, q \in \mathbb{H}$, com $p = a + bi + cj + dk$ e $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, as operações $p + q = (a + \alpha) + (b + \beta)i + (c + \gamma)j + (d + \delta)k$ e $\lambda p = \lambda a + \lambda bi + \lambda cj + \lambda dk$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tornam $\mathbb{H}$ um espaço vetorial.
Definindo o produto $pq = (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta) + (a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)i + (a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta)j + (a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha)k$, verifica-se que:

- $1p = p1 = p \Rightarrow \mathbf{e} = 1$
- Se $\overline{p} = a - bi - cj - dk \Rightarrow |p| = \sqrt{p\overline{p}}$
- Se $p \neq 0, \quad p^{-1} = \dfrac{\overline{p}}{|p|^2} \Rightarrow pp^{-1} = p^{-1}p = 1 \Rightarrow \mathbb{H}$ é um grupo com o produto acima

Além disso,
• $|pq| = |p||q| \quad p, q \in \mathbb{H}$
Com a estrutura $\{(\mathbb{R}^4 - \{0\}, \varphi)\}, \varphi(a, b, c, d) = a + bi + cj + dk$, $\mathbb{H}$ torna-se uma variedade diferenciável de dimensão 4.
Como as operações

$$(p, q) \mapsto pq \quad e \quad p \mapsto p^{-1}, \qquad p, q \in \mathbb{R}^4 - \{0\}$$

são diferenciáveis em $\mathbb{R}^4 - \{0\}$, então $\mathbb{H}$ é um grupo de Lie.

Faremos, agora, uma rápida inspeção no objeto de nosso interesse nesse momento

3.4.2 O grupo de Lie $\mathbb{S}^3$

Como o conjunto dos quatérnios unitários é fechado sob a multiplicação quaterniônica e $|pq| = |p||q|$, segue que a esfera unitária

$$\mathbb{S}^3 := \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4; \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

pode ser vista também como o subconjunto de $\mathbb{H}$

$$\mathbb{S}^3 := \{p \in \mathbb{H}; \quad |p| = 1\}$$

que é, na verdade, um subgrupo de $\mathbb{H}$. Além disso, como a aplicação inclusão $\iota : \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 - \{0\}$, é um mergulho, temos que $\mathbb{S}^3$ é um grupo de Lie de dimensão 3.
Verifica-se que o grupo de Lie $\mathbb{S}^3$

- é compacto e não-abeliano;
- tem espaço tangente na identidade isomorfo ao $\mathbb{R}^3$, i.e., $T_{\mathbf{e}}\mathbb{S}^3 \simeq \mathbb{R}^3$;
- admite uma única métrica biinvariante, que é a métrica induzida de $\mathbb{R}^4$.

A translação à esquerda L_p por $p \in \mathbb{S}^3$ no grupo de Lie $\mathbb{S}^3$ é definida pelo produto quaterniônico

$$L_p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3, \qquad L_p(q) := pq$$

Um campo vetorial X é invariante à esquerda, se $X \circ L_p = dL_p(X)$, então, no ponto $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^3$ a translação à esquerda tem diferencial

$$dL_p : T_{\mathbf{e}}\mathbb{S}^3 \to T_{\mathbf{e}}\mathbb{S}^3, \qquad dL_p(X) := pX$$

3.4.3 Um pouco da geometria de $\mathbb{S}^3$

Sejam X_i, X_j, X_k com $X_i(\mathbf{e}) = i, X_j(\mathbf{e}) = j, X_k(\mathbf{e}) = k$ campos invariantes à esquerda em $\mathbb{S}^3$, a estrutura da álgebra de Lie é dada por

$$[\, X_i, X_j \,] = 2X_k \tag{3.18}$$

ou seja, o produto entre dois campos invariantes à esquerda na álgebra de Lie de $\mathbb{S}^3$ é duas vezes o produto vetorial do $\mathbb{R}^3$ entre esses dois campos.
A conexão Riemanniana $\overset{\mathbb{S}^3}{\nabla}$ de $\mathbb{S}^3$ é dada por

$$\overset{\mathbb{S}^3}{\nabla}_{X_i} X_i = \overset{\mathbb{S}^3}{\nabla}_{X_j} X_j = \overset{\mathbb{S}^3}{\nabla}_{X_k} X_k = 0, \qquad \overset{\mathbb{S}^3}{\nabla}_{X_i} X_j = X_k, \quad \overset{\mathbb{S}^3}{\nabla}_{X_j} X_k = X_i, \quad \overset{\mathbb{S}^3}{\nabla}_{X_k} X_i = X_j$$

ou seja,

$$\overset{\mathbb{S}^3}{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}[\, X, Y \,] \tag{3.19}$$

O tensor curvatura R satisfaz,

$$R(X_i, X_j)X_k = 0 \qquad e \qquad R(X_i, X_j)X_j = X_i$$

para índices distintos i, j e k.

A curvatura seccional σ, evidentemente, é igual a,

$$\sigma(X_i, X_j) = \sigma(X_j, X_k) = \sigma(X_i, X_k) = 1$$

3.5 Resultados obtidos

O Lema a seguir será usado para obtermos um teorema que mostrará que as únicas superfícies regulares de $\mathbb{R}^3$ com aplicação de Gauss N e curvatura média H que podem ser imersas no grupo de Lie $\mathbb{S}^3$, tendo N como aplicação de Gauss, são as superfícies com curvatura média constante com módulo maiores ou iguais a 1.

Lema 3.1 *Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular com aplicação de Gauss N e curvatura média H. Então, uma uma condição necessária para que N seja a aplicação de Gauss de uma imersão isométrica $f : M^2 \looparrowright \mathbb{S}^3$ de M no grupo de Lie $\mathbb{S}^3$, é que exista θ tal que*

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\mathrm{H}} \tag{3.20}$$

Além disso, se a condição abaixo for satisfeita

$$(D_X R_\theta Y - D_Y R_\theta X)^{N^\perp} = R_\theta([\,X, Y\,]) \tag{3.21}$$

onde $\{X, Y\}$ é uma base ortonormal de T_pM, $p \in M$ e R_θ é a rotação de um ângulo θ em T_pM, a condição será também suficiente.
Neste caso,

$$df = R_\theta,$$

a menos de isomorfismo paralelo de $\mathbb{S}^3$.

Demonstração:

Provaremos inicialmente a condição necessária.

Pelo Corolário 3.1, sabemos que, para que os dados sejam admissíveis é necessário que exista θ tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= -\frac{\langle\,[\,U(f_1), U(f_2)\,]_0, N\,\rangle}{\langle\, D_{f_1}U(f_1) + D_{f_2}U(f_2), N\,\rangle} \\ &= \frac{\langle\,[\,U(f_1), U(f_2)\,]_0, N\,\rangle}{\langle\, f_1, D_{f_1}N\,\rangle + \langle\, f_2, D_{f_2}N\,\rangle} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como, o numerador de (3.22) é igual a

$$[\,U(f_1), U(f_2)\,]_0 = [\,f_1, f_2\,]_0 = 2N$$

e o denominador de (3.22), é igual a

$$\langle\, f_1, D_{f_1}N\,\rangle + \langle\, f_2, D_{f_2}N\,\rangle = \langle\, f_1, \kappa_1 f_1\,\rangle + \langle\, f_2, \kappa_2 f_2\,\rangle = \kappa_1 + \kappa_2 = 2H,$$

onde κ_1 e κ_2 são as curvaturas principais de M em p e H a curvatura média de M neste ponto, então podemos escrever (3.22) da seguinte forma,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\langle\, 2\mathrm{N}, \mathrm{N}\,\rangle}{2\mathrm{H}} = \frac{2}{2\mathrm{H}} = \frac{1}{\mathrm{H}}$$

o que prova a condição “necessária”da proposição.

Por outro lado, recordemos a seguinte definição: Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Existe uma vizinhança $W \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(W)$, ortogonais em cada ponto de W, tais que, em p, $\nabla_{E_i}E_j(p) = 0$. Uma tal família E_i, $i = 1, \ldots, n$, de campos de vetores é chamada **referencial** (local) **geodésico** em p.

Portanto, dado $p \in M$, seja f_1, f_2 um referencial geodésico em p, i.e., em p, $\nabla_{f_i} f_k = 0, \quad i, k = 1, 2$. Do Corolário 3.1, sabemos que para N ser a aplicação de Gauss de uma imersão isométrica $f : M^2 \looparrowright \mathbb{S}^3$ é suficiente que tenhamos

$$V = U \circ R_\theta$$

satisfazendo,

$$\text{(3.23)}\ (D_{f_1}V(f_2) - D_{f_2}V(f_1) - V([\,f_1, f_2\,]))^{N^\perp} = [\,V(f_1), V(f_2)\,]_0^{N^\perp}$$

Mas, para a imersão de uma superfície regular M do $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{S}^3$ devemos ter $U = \iota : TM \hookrightarrow N^\perp$, onde ι é a aplicação de inclusão.

Portanto, $V = U \circ R_\theta = \iota \circ R_\theta = R_\theta$. Logo, o lado direito da igualdade (3.23) será igual a $[\,R_\theta f_1, R_\theta f_2\,]_0^{N^\perp}$. Mas, $[\ ,\ ]_0$ é obtido do produto na álgebra de Lie de $\mathbb{S}^3$ que, como sabemos, é igual a duas vezes o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$, ou seja, se $X, Y \in N^\perp$, $[\,X, Y\,]_0$ está na direção de N. Portanto $[\,R_\theta f_1, R_\theta f_2\,]_0^{N^\perp} = 0$, uma vez que $R_\theta f_1, R_\theta f_2 \in N^\perp$. Além disso, supondo que f_1, f_2 é um referencial geodésico em p, então $[\, f_1, f_2\,] = 0$ em p. Como a projeção da conexão D sobre $N^{\perp}$ é a conexão ∇ de M, o fato de termos um referencial geodésico em $p \in M$, anula o lado esquerdo de (3.23), o que mostra ser verdadeira essa igualdade.

Assim, a condição "suficiente"do teorema está provada. $\square$

Veremos, em seguida, o teorema comentado no início dessa seção.

Teorema 3.3 *Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$ com aplicação de Gauss N e curvatura média H. Então, existe uma imersão isométrica $f : M^2 \looparrowright \mathbb{S}^3$ de M^2 no grupo de Lie $\mathbb{S}^3$ com a mesma aplicação de Gauss N se, e somente se, H for constante e $|H| \geq 1$.*

Demonstração:

Iniciaremos a demonstração mostrando que se H não for constante, não existirá a imersão.

Suponha H não constante.

Dado $p \in M$, seja f_1, f_2 um referencial geodésico em $W \subset M$ contendo p.

Pelo Lema 3.1 sabemos que para existir a imersão, é necessário e suficiente que exista θ tal que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\mathrm{H}}$$

e, além disso, vale a condição (3.21). Como estamos supondo H não constante, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\mathrm{H}}$ significa que θ está variando.
Observe que no referencial geodésico f_1, f_2, a condição (3.21) será dada por

$$(D_{f_1} R_\theta f_2 - D_{f_2} R_\theta f_1)^{N^{\perp}} = 0 \tag{3.24}$$

Lembrando que $R_\theta f_1 = \cos\theta\, f_1 + \operatorname{sen}\theta\, f_2$ e $R_\theta f_2 = -\operatorname{sen}\theta\, f_1 + \cos\theta\, f_2$, e que $(D_{f_i} f_j)^{N^{\perp}} = \nabla_{f_i} f_j = 0$ então

$$\begin{aligned} D_{f_1} R_\theta f_2 &= D_{f_1}(-\operatorname{sen}\theta\, f_1 + \cos\theta\, f_2) \\ &= -\cos\theta\, d\theta(f_1) f_1 - \operatorname{sen}\theta\, \mathrm{D}_{f_1} f_1 \\ &- \operatorname{sen}\theta\, \mathrm{d}\theta(f_1) f_2 + \cos\theta\, \mathrm{D}_{f_1} f_2 \\ &= -\cos\theta\, d\theta(f_1) f_1 - \operatorname{sen}\theta\, \mathrm{d}\theta(f_1) f_2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Analogamente,

$$D_{f_2}R_\theta f_1 = -\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta(f_2)f_1 + \cos\theta\,\mathrm{d}\theta(f_2)f_2 \tag{3.26}$$

Calculando a diferença (3.25) - (3.26) obtemos

$$\begin{aligned} D_{f_1}R_\theta f_2 - D_{f_2}R_\theta f_1 = & - & \cos\theta\, d\theta(f_1)f_1 - \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta(f_1)f_2 \\ & + & \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta(f_2)f_1 - \cos\theta\,\mathrm{d}\theta(f_2)f_2 \\ = & & \left(\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta(f_2) - \cos\theta\,\mathrm{d}\theta(f_1)\right) f_1 \\ & - & \left(\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta(f_1) + \cos\theta\,\mathrm{d}\theta(f_2)\right) f_2 \end{aligned}$$

Agora, de acordo com (3.24) os coeficientes de f_1, f_2 devem ser nulos, o que nos fornece o sistema

$$(*)\begin{cases} \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta(f_2) = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta(f_1) \\ \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta(f_1) = -\cos\theta\,\mathrm{d}\theta(f_2) \end{cases}$$

Da primeira equação do sistema $(*)$ obtemos $d\theta(f_2) = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta(f_1)$. Substituindo este resultado na segunda equação teremos,

$$\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta(f_1) = -\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,\mathrm{d}\theta(f_1) \Rightarrow \left(\operatorname{sen}^2 + \theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta(f_1) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\theta(f_1) = 0$$

o que implica que θ é constante na direção de f_1.

De modo semelhante concluiremos que $d\theta(f_2) = 0$, o que implica θ constante também na direção de f_2.

Portanto, θ é constante. Mas isso contradiz nossa suposição que θ está variando.

Essa contradição significa que a condição (3.21) não pode ser verificada para θ variando. Logo não existe a imersão nesse caso.

Por outro lado, supondo H constante, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\mathrm{H}}$ significa que θ é constante. Como

$$\begin{aligned} D_{f_1}R_\theta f_2 - D_{f_2}R_\theta f_1 &= (D_{f_1}R_\theta)(f_2) - (D_{f_2}R_\theta)(f_1) \\ &+ R_\theta([\, f_1, f_2\,]) \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde $(D_{f_i}R_\theta)(f_j)$ representa a derivada tensorial de R_θ na direção de f_i aplicada a f_j, e θ é constante, o que implica que R_θ é paralelo com respeito a conexão D, ou seja, $(DR_\theta) = 0$, então, por (3.27) temos que

$$D_{f_1} R_\theta f_2 - D_{f_2} R_\theta f_1 = R_\theta([\,f_1, f_2\,])$$

Portanto,

$$(D_{f_1} R_\theta f_2 - D_{f_2} R_\theta f_1)^{N^\perp} = (R_\theta([\,f_1, f_2\,]))^{N^\perp} = R_\theta([\,f_1, f_2\,])$$

e a condição (3.21) está verificada.

Logo, o Lema 3.1 garante a existência de uma imersão isométrica $f : M^2 \looparrowright \mathbb{S}^3$ com aplicação de Gauss N e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\mathrm{H}}$ ou seja, com $|H| \geq 1$. $\square$

Observação 3.3 *Uma superfície no $\mathbb{R}^3$ é dita **mínima** se sua curvatura média H for constante e igual a zero. Uma consequência do Teorema 3.3 é que se uma superfície mínima do $\mathbb{R}^3$ tiver aplicação de Gauss N, então não existe imersão dessa superfície em $\mathbb{S}^3$ com N como aplicação de Gauss.*

3.5.1 Exemplos

Nosso primeiro exemplo é, provavelmente, o mais simples para a imersão de uma superfície **cmc** do espaço Euclidiano no grupo de Lie $\mathbb{S}^3$.

Exemplo 3.1 (Esfera) *Para uma esfera de raio r, com aplicação de Gauss N, $\mathbb{S}^2_r \subset \mathbb{R}^3$, a curvatura média é dada por $H = \dfrac{1}{r}$. Logo, pelo Corolário3.3, existirá a imersão $\mathbb{S}^2_r \looparrowright \mathbb{S}^3$ com a mesma aplicação de Gauss N se, e somente se, $|r| \leq 1$.*

Nosso próximo exemplo de superfície **cmc**, será um cilindro.

Exemplo 3.2 *Um cilindro circular reto $\mathcal{C}$ no $\mathbb{R}^3$, pode ser pensado como o produto $\mathbb{S}^1_r \times \mathbb{R}$ de um círculo de raio r, por uma reta. Logo, a curvatura média H desse cilindro será a média aritmética $H = \dfrac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ das curvaturas κ_1 de uma reta, e da curvatura κ_2 de um círculo de raio r. Como κ_1 será sempre igual a zero, $H = \dfrac{\kappa_2}{2} = \dfrac{1}{2r}$. Portanto, pelo Teorema 3.3, existirá a imersão $\mathcal{C} \looparrowright \mathbb{S}^3$ com a mesma aplicação de Gauss N, se, e somente se, $r \leq \dfrac{1}{2}$.*

A próxima superfície que iremos abordar é uma superfície de revolução **cmc**, menos conhecida que as anteriores.

Exemplo 3.3 (Ondulóide) *A* ***roulette*** *de uma elipse, é a curva descrita por um dos focos dessa elipse quando esta "rola"sobre uma reta, sem escorregar. Ao girarmos a roulette em torno da reta sobre a qual a elipse girou, obtemos uma superfície de revolução tendo a roulette como meridiano e a reta como eixo de revolução. A superfície assim obtida tem curvatura média constante, e é chamada Ondulóide. Ela é uma das* ***superfícies de Delaunay****. Se a elipse que gerou a roulette tiver o eixo maior igual a* ***a****, então a curvatura média do odulóide será dada por* $H = \dfrac{1}{2a}$*. Para maiores detalhes sobre as superfícies de Delaunay, citamos [3].*

Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ *um ondulóide contido no espaço Euclidiano, com aplicação de Gauss* N *e curvatura média* H*. Como vimos acima,* $H = \dfrac{1}{2a}$*, onde* ***a*** *é o eixo maior da elipse que originou o ondulóide. Então o Corolário3.3, garante a existência da imersão* $\mathcal{O} \looparrowright \mathbb{S}^3$ *com a mesma aplicação de Gauss* N*, se, e somente se,* $a \leq \dfrac{1}{2}$*.*

Observação 3.4 *O grupo de Lie* $\mathbb{S}^3$ *é compacto, portanto admite uma métrica biinvariante. Além deste, os outros grupos de Lie de dimensão* 3 *que admitem métrica biinvariante, são ([10])*

$$\mathbb{R}^3,\, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1,\, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \quad e \quad SO(3).$$

Para esses grupos, as considerações sobre U *são mais simples. O que nos pareceu mais interessante para alguma abordagem foi* $SO(3)$ *dos movimentos rígidos no espaço Euclidiano. Acontece que* $SO(3)$ *tem* $\mathbb{S}^3$ *como recobrimento universal. Por isso, as considerações que faríamos aqui seriam praticamente as mesmas para* $\mathbb{S}^3$*.*

Consideremos em seguida, um exemplo em um grupo de Lie que não admite métrica biinvariante

3.5.2 O grupo de Lie $\mathcal{H}_3$ e sua álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$

$\mathcal{H}_3$, o grupo de Heisenberg de dimensão 3, é um grupo de Lie simplesmente conexo, nilpotente a 2-passos formado pelo conjunto das matrizes triangulares superiores com entradas reais e 1 na diagonal, onde o produto do grupo é o produto usual das matrizes 3×3. Assim, $\mathcal{H}_3 \subset GL(3,\mathbb{R})$ é o grupo dado por

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

com a mesma estrutura de grupo de $GL(3,\mathbb{R})$.
Os elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$ do grupo $\mathcal{H}_3$ são da forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \quad com \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Mostra-se que $\mathcal{H}_3$ pode ser identificado com o $\mathbb{R}^3$ munido do produto

$$(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \right)$$

Os campos invariantes à esquerda

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

geram a álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$ cujos colchetes são dados por

$$[\,E_1, E_2\,] = E_3 \qquad e \qquad [\,E_3, E_2\,] = [\,E_3, E_1\,] = 0$$

3.5.3 Um pouco da geometria de $\mathcal{H}_3$

Para cada $p = (x,y,z) \in \mathcal{H}_3$ a translação à esquerda $L_p : \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3$, $L_p)q) = pq$, $q \in \mathcal{H}_3$ tem sua diferencial na identidade dada por

$$dL_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

portanto, dados $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p\mathcal{H}_3$, através do produto interno $\left\langle\, dL_p^{-1}(v), dL_p^{-1}(w)\, \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$ obtemos uma métrica invariante à esquerda em $\mathcal{H}_3$ dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \Big(dz + \frac{y}{2}dy - \frac{x}{2}\Big)^2$$

Com respeito a essa métrica, a conexão Riemanniana $\nabla^{\mathcal{H}_3}$ de $\mathcal{H}_3$ na base $\{E_1, E_2, E_3\}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\nabla^{\mathcal{H}_3}_{E_1} E_2 &= \frac{1}{2}E_3 = -\nabla^{\mathcal{H}_3}_{E_2} E_1 \\
\nabla^{\mathcal{H}_3}_{E_1} E_3 &= -\frac{1}{2}E_2 = \nabla^{\mathcal{H}_3}_{E_3} E_1 \\
\nabla^{\mathcal{H}_3}_{E_2} E_3 &= \frac{1}{2}E_1 = \nabla^{\mathcal{H}_3}_{E_3} E_2 \\
\nabla^{\mathcal{H}_3}_{E_i} E_i &= 0, \qquad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

O tensor curvatura R de $\mathcal{H}_3$ calculado na base $\{E_1, E_2, E_3\}$ com $R_{ijk} = R(E_i, E_j)E_k$ resulta em

$$R_{iij} = 0, \quad R_{121} = \frac{3}{4}E_2, \quad R_{122} = -\frac{3}{4}E_1, \quad R_{123} = 0, \quad R_{131} = -\frac{1}{4}E_3,$$

$$R_{132} = 0, \quad R_{133} = \frac{1}{4}E_1, \quad R_{231} = 0, \quad R_{232} = -\frac{1}{4}E_3 \quad e \quad R_{233} = \frac{1}{4}E_2.$$

Para a curvatura seccional K de $\mathcal{H}_3$ obtemos, em termos da mesma base,

$$\begin{aligned}
K(E_1, E_2) &= \left\langle \frac{3}{4}E_2, E_2 \right\rangle = \frac{3}{4} \\
K(E_1, E_3) &= \left\langle -\frac{1}{4}E_3, E_3 \right\rangle = -\frac{1}{4} \\
K(E_2, E_3) &= \left\langle -\frac{1}{4}E_3, E_3 \right\rangle = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Portanto, a curvatura seccional de $\mathcal{H}_3$ não é constante.

3.5.4 Exemplo

Para imersões de superfícies do $\mathbb{R}^3$ em $\mathcal{H}_3$, com curvatura de Gauss prescrita, é possível encontrar exemplo em que não necessitemos do operador ortogonal R_θ, ou seja, podemos encontrar U e as hipóteses necessárias para a aplicação da Proposição 3.1.

Dada a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do $\mathbb{R}^3$, sabemos, pelas considerações do grupo de Heisenberg $\mathcal{H}_3$, que o produto (colchete) da álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$, que no nosso caso é $[\,,\,]_0$, para os vetores e_1, e_2 e e_3 é

$$[\,e_1, e_2\,]_0 = e_3 \qquad e \qquad [\,e_i, e_3\,]_0 = 0,\ i = 1,2,3$$

Ou seja, $ker\,[\,,\,]_0 = \{e_3\}$. Então, a idéia é encontrar uma superfície em $\mathbb{R}^3$ em que, para qualquer ponto, seja possível deixar esse núcleo sempre no plano tangente à superfície naquele ponto.

Um cilindro no $\mathbb{R}^3$, obtido a partir da rotação de uma geratriz vertical em torno de um círculo, tem essa propriedade.

Então, seja $f : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ o cilindro $\mathcal{C}$ dado por

$$f(\theta, r) = (cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \mathrm{r}) \tag{3.28}$$

Consideremos, por exemplo, $(1, 0, r)$, $a \leq r \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$ a geratriz de $\mathcal{C}$. Essa geratriz é paralela a e_3. Como uma base ortonormal do plano tangente em $p \in \mathcal{C}$, $T_p\mathcal{C}$ é dada por

$$f_\theta = -\operatorname{sen}\theta \mathrm{e}_1 + \cos\theta \mathrm{e}_2 \qquad \text{e} \qquad f_r = \mathrm{e}_3 \tag{3.29}$$

então, o vetor N unitário e normal a $\mathcal{C}$ em p, será

$$N = \frac{f_\theta \times f_r}{\| f_\theta \times f_r \|} = \cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta \mathrm{e}_2 \tag{3.30}$$

Portanto, N está na direção do vetor posição do círculo $(cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, que é normal ao plano tangente a $\mathcal{C}$ em p.

Agora, se $u, v \in T_p\mathcal{C}$, então

$$u = u_1\, f_\theta + u_2\, f_r \qquad e \qquad v = v_1\, f_\theta + v_2\, f_r$$

com $u_i, v_i \in \mathbb{R}$. Logo,

$$[\,u, v\,]_0 = [\,u_1\, f_\theta + u_2\, f_r, v_1\, f_\theta + v_2\, f_r\,]_0 = (u_1 v_2 - u_2 v_2)\,[\,f_\theta, f_r\,]_0$$

Mas, $f_r = e_3$ que é o núcleo de $[\,,\,]_0$. Então, $[\,f_\theta, f_r\,]_0 = 0$. O que implica $[\,u, v\,]_0 = 0$. Portanto, conseguimos a hipótese que precisamos para aplicar a Proposição 3.1, que é $\langle\,[\,u, v\,]_0, N\,\rangle = 0$, para $u, v \in T_p\mathcal{C}$.

Como U é dado pela aplicação identidade, $U(f_\theta) = f_\theta$ e $U(f_r) = f_r$. Além disso, $[\, f_\theta, f_r \,]_0 = 0$. Logo, a condição (3.1) para este caso, será

$$(D_{f_\theta} f_r - D_{f_r} f_\theta)^{N^\perp} = [\, f_\theta, f_r \,] \tag{3.31}$$

Lembrando que a conexão D projetada sobre $N^\perp$ coincide com a conexão ∇ de $\mathbb{R}^3$, podemos escrever (3.31) como

$$\nabla_{f_\theta} f_r - \nabla_{f_r} f_\theta = [\, f_\theta, f_r \,]$$

o que garante a condição (3.31).

3.6 Imersões $M^n \looparrowright \mathrm{G}^{n+1}$ com $n \geq 3$

A finalidade desta seção, é mostrar algumas condições segundo as quais seja possível obter resultados para a existência de imersões de variedades n-dimensionais em $n+1$-dimensionais grupos de Lie, com aplicação de Gauss prescrita, no caso em que a isometria U está definida.

Proposição 3.2 *Seja (M^{2k}, g) uma variedade Riemaniana de dimensão $2k$ e $\mathrm{G}^{2k+1}, k \geq 2$ um grupo de Lie de dimensão $2k+1$ com uma métrica invariante à esquerda.*

Seja $N : M^{2k} \to \mathbb{S}^{2k} \subset \mathcal{T}_{\mathbf{e}}\mathrm{G}$ uma aplicação suave. Denote por E o fibrado vetorial $M^{2k} \times \mathfrak{R}^{2k+1}$ sobre M e considere em E a conexão flat D tal que $D_X \xi = 0$, para todo $\xi = (p, v)$, com v =constante e $X \in TM$. Suponha que $TM = T^1 \oplus T^2 \oplus \cdots \oplus T^{2k}$, com dim$(T^i) = 2$. Suponha também que, $D_{T^i} N \subset U(T^i)$ e $[\, U(T^i), U(T^j) \,]_0^\perp = 0$ se $i \neq j$, com $i, j = 1, \ldots, 2k$.

Uma condição necessária para que exista uma isometria f tal que N seja a aplicação de Gauss, é que exista θ_k tal que

$$\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{k}} = -\frac{\langle\, [\, \mathrm{U}(\mathrm{f}_{2\mathrm{k}-1}), \mathrm{U}(\mathrm{f}_{2\mathrm{k}}) \,]_0, \mathrm{N} \,\rangle}{\left\langle\, \mathrm{D}_{\mathrm{f}_{2\mathrm{k}-1}} \mathrm{U}(\mathrm{f}_{2\mathrm{k}-1}) + \mathrm{D}_{\mathrm{f}_{2\mathrm{k}}} \mathrm{U}(\mathrm{f}_{2\mathrm{k}}), \mathrm{N} \,\right\rangle} \tag{3.32}$$

onde $f_1, \ldots, f_{2k}$ é base ortonormal de T_pM, $p \in M$, e U é como no Teorema3.1.

Além disso, a condição é também suficiente se

$$V = U \circ O \tag{3.33}$$

onde $O : T_pM \to T_pM$ é o operador ortogonal dado por

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & & & \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\theta_k & -\operatorname{sen}\theta_{\mathrm{k}} \\ & & & \operatorname{sen}\theta_{\mathrm{k}} & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

onde os termos não expostos são iguais a zero, e V satisfaz

(3.34) $\left(D_{f_i}V(f_j) - D_{f_j}V(f_i) - V([\,f_i, f_j\,])\right)^{N^{\perp}} = [\,V(f_i), V(f_j)\,]_0^{N^{\perp}}$

Neste caso,

$$df = V,$$

a menos de isomorfismo paralelo de G.

Demonstração: Dado $p \in M$, seja $f_1, \ldots, f_{2k}$ um referencial ortonormal em $W \subset M$ contendo p.

Como,

$$O(f_k) = \cos\theta_{\frac{k+1}{2}} f_k + \operatorname{sen}\theta_{\frac{\mathrm{k}+1}{2}} \mathrm{f}_{\mathrm{k}+1},$$

se k é ímpar e

$$O(f_k) = -\operatorname{sen}\theta_{\frac{\mathrm{k}}{2}} \mathrm{f}_{\mathrm{k}-1} + \cos\theta_{\frac{\mathrm{k}}{2}} \mathrm{f}_{\mathrm{k}},$$

se k é par, então

$$V(f_k) = U \circ O(f_k) = \cos\theta_{\frac{k+1}{2}} U(f_k) + \operatorname{sen}\theta_{\frac{\mathrm{k}+1}{2}} U(\mathrm{f}_{\mathrm{k}+1}),$$

se k é ímpar e

$$V(f_k) = -\operatorname{sen}\theta_{\frac{\mathrm{k}}{2}} U(\mathrm{f}_{\mathrm{k}-1}) + \cos\theta_{\frac{\mathrm{k}}{2}} U(\mathrm{f}_{\mathrm{k}}),$$

se k é par.

Portanto, de acordo com

$$\left\langle\, D_{f_i}V(f_j) - D_{f_j}V(f_i), N \,\right\rangle = \left\langle\, [\,V(f_i), V(f_j)\,]_0, N \,\right\rangle$$

onde $i, j = 1, 2, \ldots, 2k$ e as nossas hipótese, obtemos as k seguintes expressões,

$$\langle\, V(f_1), D_{f_2}N \,\rangle - \langle\, V(f_2), D_{f_1}N \,\rangle = \langle\, [\,V(f_1), V(f_2)\,]_0, N \,\rangle$$

a partir da qual obtemos

$$\operatorname{sen}\theta_1 = -\frac{\langle\, [\, \mathrm{U}(\mathrm{f}_1), \mathrm{U}(\mathrm{f}_2)\,]_0, \mathrm{N}\,\rangle}{\langle\, \mathrm{D}_{\mathrm{f}_1}\mathrm{U}(\mathrm{f}_1) + \mathrm{D}_{\mathrm{f}_2}\mathrm{U}(\mathrm{f}_2), \mathrm{N}\,\rangle}$$

$$\vdots$$

$$\langle\, V(f_{2k-1}), D_{f_{2k}}N\,\rangle - \Big\langle\, V(f_{2k}), D_{f_{2k-1}}N\,\Big\rangle = \langle\, [\, V(f_{2k-1}), V(f_{2k})\,]_0, N\,\rangle$$

a partir da qual obtemos

$$\operatorname{sen}\theta_{\mathrm{k}} = -\frac{\langle\, [\, \mathrm{U}(\mathrm{f}_{2\mathrm{k}-1}), \mathrm{U}(\mathrm{f}_{2\mathrm{k}})\,]_0, \mathrm{N}\,\rangle}{\Big\langle\, \mathrm{D}_{\mathrm{f}_{2\mathrm{k}-1}}\mathrm{U}(\mathrm{f}_{2\mathrm{k}-1}) + \mathrm{D}_{\mathrm{f}_{2\mathrm{k}}}\mathrm{U}(\mathrm{f}_{2\mathrm{k}}), \mathrm{N}\,\Big\rangle}$$

Portanto, para cada valor de k, reobteremos a Proposição3.1, com $\theta = \theta_k$.

Uma vez conseguido θ_k teremos $V(f_k)$, e logo a imersão. $\square$

Bibliografia

[1] ALEXANDRINO, M. M. E BETTIOL, R. G., *Introduction to Lie groups, isometric and adjoint actions and some generalizations*, http://arxiv.org/abs/0901.2374 , (2010).

[2] ANTONIO CAMINHA, M. N., *Tópicos de Geometria Diferencial*, Coleção Fronteiras da Matemática, 1rd edition, SBM (2014).

[3] BENDITO, E., BOWICK, M.J. E MEDINA, A., *Delaunay Surfaces*, arXiv:1305.5681v1 [math.DG], (2013)

[4] CHEEGER, J. E EBIN, D., *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North–Holland Publishing Co., Amsterdam, (1975).

[5] DAJCZER, M., *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series. Houston: Publish or Perish, (1990).

[6] DO CARMO, M. P., *Geometria Riemanniana*, Publicações Matemáticas, IMPA (2010).

[7] DO CARMO, M. P., *Notas de um curso de Grupos de Lie*, IMPA (1974).

[8] ESCHENBURG, J. H. ; KRUGLIKOV, B. S. ; MATVEEV, V. S. E TRIBUZY, R. A. *Compatibility of Gauss map with metrics.* Preprint, (2012).

[9] ESCHENBURG, J. H. E TRIBUZY, R. A. *Existence and uniqueness of maps into affine homogeneous spaces.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 69 (1993), 11 - 18.

[10] Espírito-Santo,N., Fornari, S., Frensel, K. e Ripoll, J. *Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie group with bi-invariant metric.* Manuscripta math 111, (2003), 459 - 470.

[11] Fegan, H. D., *Introduction to compact Lie groups*, Series in Pure Mathematics, **13**, World Scientific, (1998).

[12] Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol 34, AMS (2001).

[13] Kobayashi, S. e Nomizu, N., *Foundations of Differential Geometry*, Vol. **I, II** Interscience Publisher, J. Wiles & Sons, (1963).

[14] Petersen, P., *Riemannian Geometry*, 2nd edition, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mahematics (2000).

[15] Lee, J.*Introduction to Smooth Manifolds*. Washington: Springer, (2002).

[16] Lima, E. L., *Variedades Diferenciáveis*, Projeto Euclides, 3rd edition, IMPA (2005).

[17] Meeks III, W. H. e Pérez, J., *Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups*, http://www.imus.us.es/DC/2011_STA/material/Sevilla2011_Course3.pdf, (1974).

[18] Milnor, J., *Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups*, Advances in Math. **21**, 3, p. 293-329 (1976).

[19] Petersen, P., *Riemannian Geometry*, 2nd edition, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mahematics (2000).

[20] Postnikov, M. M., *Riemannian Geometry VI*, Springer, (2000).

[21] San Martin, L. A. B., *Álgebras de Lie*, 2nd edition, Editora da Unicamp, (2010).

[22] ———. Grupos de Lie, http://www.ime.unicamp.br/ smartin/cursos/grupolie-2014/gruplie0.pdf, (2014).

[23] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. **IV**, Publish or Perish (1975).

[24] Warner, F.W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer–Verlag, Graduate Texts in Mathematics (1983).

[25] Ziller, W., *Lie Groups. Representation Theory and Symmetric Spaces*, http://www.math.upenn.edu/ wziller/math650/LieGroupsReps.pdf , (2010).