UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES COM VETOR CURVATURA MÉDIA NORMALIZADO PARALELO

MARCIO COSTA DE ARAÚJO FILHO

Manaus - 2014

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES COM VETOR CURVATURA MÉDIA NORMALIZADO PARALELO

MARCIO COSTA DE ARAÚJO FILHO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Interinstitucional CAPES/ FUNTAC/UFAM/UFAC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM
Orientador: Prof. Dr. José Kenedy Martins

Durante parte do desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Manaus, Junho de 2014

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES COM VETOR CURVATURA MÉDIA NORMALIZADO PARALELO

Marcio Costa de Araújo Filho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Interinstitucional CAPES/ FUNTAC/UFAM/UFAC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

BANCA EXAMINADORA:

....

Prof°. Dr. José Kenedy Martins, Presidente

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Profª. Dra. Inês Silva de Oliveira Padilha, Membro

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

....

Prof°. Dr. Dragomir Mitkov Tsonev, Membro

Professor Visitante - UFAM

Manaus, 20 de Junho de 2014

Ficha Catalográfica
(Catalogação realizada pela Biblioteca Central da UFAM)

A663c

Araújo Filho, Marcio Costa de.
Classificação de superfícies com vetor curvatura média normalizado paralelo / Marcio Costa de Araújo Filho. - 2014.
48 f..
Dissertação (mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Amazonas.
Orientador: Prof. Dr. José Kenedy Martins.

1. Geometria 2. Superfície mínima 3. Curvatura média I. Martins, José Kenedy, orientador II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

CDU (1997): 514.752.6 (043.3)

Ao meu irmão, Manoel,
dedico.

"Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível."

— Charles Chaplin

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, responsável por todas as coisas visíveis e invisíveis, pela minha vida, saúde e motivação para concluir este trabalho.

Para não ser injusto, agradeço de antemão à todas as pessoas que, direta ou indiretamente, me ajudaram nas vitórias de minha vida, principalmente na conclusão deste trabalho.

Agradeço fortemente:

A todos os meus familiares, que são fonte de perseverança e motivação, pelo apoio, paciência e conselhos. Sem vocês não teria chegado tão longe. Em especial, agradeço minha principal fonte de inspirarão, meu irmão Manoel, obrigado pelo apoio e conselhos que me destes em toda minha vida, obrigado por me ensinar a não desistir, obrigado por tornar os livros o meu mundo. Agradecimento especial também à minha namorada, Raquel Cardoso, por estar sempre ao meu lado. Agradeço sincero a meus pais, Marcio e Maria Lucia, pelo exemplo de caráter e humildade, se hoje sou alguém na vida é por que pratiquei seus ensinamentos.

Aos membros da banca examinadora da defesa de dissertação, professores Dragomir Mitkov Tsonev, Inês Silva de Oliveira Padilha e José Kenedy Martins, pelas sugestões dadas para melhoria desta dissertação escrita. Ao meu orientador, professor José Kenedy Martins ou simplesmente Akay de Nataraja, pela dedicação e confiança em mim depositados, por todas as lições e ensinamentos fornecidos durante a realização deste trabalho e pela paciência e competência ao auxiliar-me nos momentos de dúvidas e dificuldades.

A todos os colaboradores do MINTER - UFAM/UFAC principalmente os professores: Flávia Morgana, Inês Padilha, José Ivan, José Kenedy, Renato Tribuzy e Sérgio Brasil.

Obrigado pela dedicação e trabalho de vocês, principalmente ao professor José Ivan, que por muitas vezes teve que defender "com unhas e dentes"esse importante projeto.

Aos colegas e amigos Clebes Brandão, Daiana dos Santos e Marcos Aurélio pelo apoio nas dificuldades encontradas em nossa estadia em Manaus e pelas discussões a respeito de Geometria Diferencial.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço aos meus amigos da turma de mestrado, Cleber Pereira, José Genivaldo Moreira, Josean da Silva Alves e José Roberto Guimarães que foram de grande importância em todas as etapas deste trabalho, pela companhia nos momentos de descontração e, principalmente, nos momentos de estudo.

Resumo

Diz-se que uma variedade Riemanniana M^2 é uma superfície com vetor curvatura média normalizado paralelo se o seu vetor curvatura média é não-nulo e se o vetor unitário dado por esta direção é paralelo no fibrado normal. Nesta dissertação é demonstrado que toda superfície analítica em $\mathbb{E}^m$ com vetor curvatura médio normalizado paralelo deve ou estar em $\mathbb{E}^4$ ou em uma hiperesfera de $\mathbb{E}^m$ como uma superfície mínima. Além disso, prova-se que se uma esfera de Riemann em $\mathbb{E}^m$ tem vetor curvatura médio normalizado e paralelo, então ou ela está em $\mathbb{E}^3$ ou em uma hiperesfera de $\mathbb{E}^m$ como uma superfície mínima.

Palavras-chave: Superfícies Mínimas, curvatura média, paralelo.

Abstract

A surface M in a Riemannian manifold is said to have parallel normalized mean curvature vector if the mean curvature vector is nonzero and the unit vector in the direction of the mean curvature vector is parallel in the normal bundle. In this dissertation, it is proved that every analytic surface in a euclidean m-space $\mathbb{E}^m$ with parallel normalized mean curvature vector must lie either in $\mathbb{E}^4$ or lies in an hypersphere of $\mathbb{E}^m$ as a minimal surface. Moreover, it is proved that if a Riemann sphere in $\mathbb{E}^m$ has parallel normalized mean curvature vector, then it lies either in a $\mathbb{E}^3$ or in a hypersphere of $\mathbb{E}^m$ as a minimal surfaces.

Keywords: Minimal surfaces, mean curvature, parallel.

Sumário

Introdução

Em [1] e [9] Chen e Yau provaram que uma superfície M em um espaço m-euclidiano E^m tem vetor curvatura média paralelo se, e somente se, M é uma superfície mínima em E^m, ou uma superfície mínima de uma hiperesfera de E^m ou uma superfície em E^4 o qual está em E^3 ou uma hiperesfera de E^4 com curvatura média constante.

Dizemos que uma superfície M tem o vetor curvatura média H normalizado paralelo se H não se anula e se o campo $\frac{H}{|H|}$ é paralelo. É imediato deduzir que toda superfície em um espaço 3-dimensional tem vetor curvatura média normalizado paralelo em um subconjunto em que H seja não-nulo. De fato, como o espaço é 3-dimensional sabemos que $dim(T_pS)^{\perp} = 1$. Se $H(p) \neq 0$, para todo $p \in U \subset S$ com U aberto, consideremos o vetor curvatura média normalizado paralelo $\eta = \frac{H}{|H|}$, então $\langle \eta, \eta \rangle = 1$. Derivando, obtemos $0 = X(\langle \eta, \eta \rangle) = 2 \left\langle \nabla^{\perp}_X \eta, \eta \right\rangle$. Por outro lado, como $dim(T_pS)^{\perp} = 1$ temos $\nabla^{\perp}_X \eta = \lambda \eta, \lambda \in \mathbb{R}(\nabla^{\perp}_X \eta \in (T_pS)^{\perp})$, daí $0 = 2 \langle \lambda \eta, \eta \rangle = 2\lambda \langle \eta, \eta \rangle \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \nabla^{\perp}_X \eta = 0$, ou seja, η é paralelo.

Em [7], Leung prova que existem muitas superfícies analíticas em uma variedade Riemanniana 4-dimensional cujo vetor curvatura média normalizado seja paralelo. Em geral, tais superfícies tem vetor curvatura média não-paralelo.

No primeiro capítulo desta dissertação, apresentaremos as ferramentas básicas necessárias para a compreensão deste trabalho. Mais precisamente veremos alguns conceitos e resultados básicos da Geometria Riemanniana, como por exemplo, o conceito de variedade diferenciável, hipersuperfícies, imersões isométricas, espaço tangente, fibrado tangente, etc.

O objetivo do segundo capítulo desta dissertação é tratar de maneira geral de alguns dos conceitos e resultados centrais para a demonstração do teorema principal, que será demonstrado no capítulo 3. Muitos resultados serão admitidos neste capítulo sem as demonstrações, que podem ser encontradas nas referências desta dissertação.

No terceiro e último capítulo desta dissertação, nós provaremos que não há superfície analítica M em E^m com vetor curvatura média normalizado paralelo exceto se ou M está em E^4 ou M está em uma hiperesfera de E^m como uma superfície mínima. Em verdade, temos o seguinte:

Teorema Principal. *Seja M uma superfície analítica em uma variedade Riemanniana $R^m(c)$, completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante igual a c. Se M tem vetor curvatura média normalizado paralelo, então ou M está em uma hiperesfera de $R^m(c)$ como uma superfície mínima ou M está em uma subvariedade totalmente geodésica de $R^m(c)$.*

Como consequência ou aplicação do *Teorema Principal* obtemos o resultado a seguir, que também será provado no último capítulo desta dissertação.

Aplicação do Teorema Principal. *Seja M uma superfície analítica orientada compacta e de gênero zero em um espaço euclidiano E^m. Se M tem vetor curvatura média normalizado paralelo, então ou M está em uma hiperesfera de E^m como uma superfície mínima ou M está em um espaço linear E^3.*

Capítulo 1

Conceitos Básicos Gerais

Neste capítulo vamos exibir definições, resultados e exemplos da teoria básica geral da geometria Riemanniana, os quais serão utilizados no decorrer desta dissertação. Especificamente, vamos disponibilizar os conceitos de variedades diferenciáveis, métricas, conexões, curvaturas e as equações fundamentais das imersões isométricas. As demonstrações dos resultados serão, por conveniência, omitidas. Para mais detalhes sobre este capítulo, ver [5].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Começamos essa seção com o primordial conceito de variedade diferenciável.

Definição 1.1 (Variedade Diferenciável)**.** *Dizemos que um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n, se satisfazem as seguintes propriedades:*

(1) $\displaystyle\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$

(2) *Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos do $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.*

(3) *A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal relativamente às condições* (1) *e* (2)*.*

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou sistemas de coordenadas) de M em p; $x_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p; Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada *estrutura diferenciável* em M. A condição (3) aparece na definição acima por razões técnicas.

Exemplo 1.1 (Espaço Euclidiano)**.** *O espaço euclideano* $\mathbb{R}^n$ *de dimensão* n *é uma variedade diferenciável determinada pela estrutura diferenciável* $\{(\mathbb{R}^n, i)\}$*, a qual consiste apenas da aplicação identidade em* $\mathbb{R}^n$*. Tal estrutura é chamada de estrutura diferenciável padrão e o sistema de coordenadas correspondente é chamado de sistema de coordenadas padrão. No que segue, usaremos sempre este sistema de coordenadas em* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemplo 1.2 (Espaço Vetorial Finito)**.** *Seja* V *um espaço vetorial qualquer de dimensão finita. Qualquer norma em* M *determina uma topologia em* V*, a qual independe da escolha da norma. Com esta topologia,* V *tem uma estrutura diferenciável natural definida como segue: qualquer base ordenada* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *de* V *define um isomorfismo de espaços vetoriais* $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ *dado por*

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Esta aplicação é um homeomorfismo, então a estrutura diferenciável consistindo apenas da parametrização $(\mathbb{R}^n, \psi)$ *define uma estrutura diferenciável em* V*.*

Exemplo 1.3 (Espaço das Matrizes)**.** *Denote por* $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *o espaço das matrizes de ordem* $n \times m$ *que tem como entrada números reais. Sabemos que este é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *com as operações usuais de adição e produto por escalar. Segue então que* $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *é uma variedade diferenciável de dimensão* nm*. De maneira análoga, o espaço* $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ *das matrizes com entradas complexas de ordem* $n \times m$ *é um espaço vetorial de dimensão* $2nm$ *sobre* $\mathbb{R}$ *e, então é uma variedade diferenciável de dimensão* $2nm$*.*

Exemplo 1.4 (Esfera Unitária $\mathbb{S}^n$)**.** *Vamos denotar por* $\mathbb{S}^n$ *a esfera unitária de dimensão* n *de* $\mathbb{R}^{n+1}$*:*

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ |x| = 1\}$$

Para cada índice $i = 1, \ldots, n+1$*, vamos denotar por* $U_i^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *o conjunto onde a i-ésima coordenada é sempre positiva:*

$$U_i^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n \ ; \ x_i > 0\}.$$

De forma análoga, U_i^- *é o conjunto onde* $x_i < 0$*. Para cada* i*, defina aplicações* $\varphi : U_i^\pm \longrightarrow$

$\mathbb{R}^n$ por

$$\varphi_i^{\pm}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{n+1})$$

onde o chapéu sobre x_i significa que x_i está omitido. Cada $\varphi_i^{\pm}$ é uma aplicação contínua, sendo esta um restrição a $\mathbb{S}^n$ de uma aplicação linear em $\mathbb{R}^n$. Temos que esta aplicação é um homeomorfismo sobre sua imagem, a bola unitária $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, pois tem uma inversa contínua dada por

$$(\varphi_i^{\pm})^{-1}(u_1, \ldots, u_n) = \left(u_1, \ldots, u_{i-1}, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, u_i, \ldots, u_n\right).$$

Além disso, para quaisquer índices distintos $i < j$, a aplicação transição $(\varphi_j^{\pm}) \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}$ é dada por

$$(\varphi_j^{\pm}) \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}(u_1, \ldots, u_n) = \left(u_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \pm\sqrt{1 = |u|^2}, \ldots, u_n\right)$$

e o mesmo vale quando $i > j$, $i = j$. Desta forma a família $\{(\varphi_i^{\pm}), U_i^{\pm}\}$ define uma estrutura diferenciável para a variedade de dimensão $\mathbb{S}^n$.

Antes de apresentarmos mais exemplos de variedades diferenciáveis, vamos estender para variedades a noção do Cálculo Diferencial.

Definição 1.2 (Aplicação Diferenciável)**.** *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$, se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Pela condição (2) da definição 1 temos que a definição dada acima independe da escolha das parametrizações e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é chamada de *expressão de φ nas parametrizações x e y.*

Definição 1.3 (Vetor Tangente)**.** *Seja M uma variedade de diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ é chamada uma curva diferenciável em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0} \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.

Observação 1.1. *Seja M uma variedade diferenciável, vamos mostrar que o conjunto de todos os vetores tangentes em $p \in M$, T_pM, torna-se um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$. Para isso, escolha uma parametrização $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ em torno de $p = f(0, \ldots, 0)$. Então a curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ e a função $\varphi \in \mathcal{D}$ podem ser expressas, respectivamente, por*

$$f^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1, \ldots, x_n) \quad e \quad \varphi \circ f(q) = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \qquad q = (x_1, \ldots, x_n) \in U.$$

Então segue que,

$$\alpha'(0)\varphi = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi(x_1(t), \ldots, x_n(t))\Big|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)\varphi.$$

Logo, o vetor tangente $\alpha'(0)$ pode ser expresso como combinação linear dos vetores $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$, os quais são tangentes às curvas coordenadas

$$x_i \longmapsto f(0, \ldots, x_i, \ldots, 0).$$

Vamos denotar por T_f o espaço vetorial gerado por $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_0\}_{i=1}^n$.

Lema 1.1. *O conjunto T_pM de todos os vetores tangentes a M em m é igual a T_f.*

Assim T_pM é um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$ chamado de *espaço tangente* a M no ponto p e a base $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_0\}_{i=1}^n$ é chamada *base associada* à parametrização f.

Proposição 1.1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.*

Definição 1.4 (Aplicação Diferencial)**.** *A aplicação linear $d\varphi_p$ dada acima é chamada de diferencial de φ em p.*

Definição 1.5 (Difeomorfismo)**.** *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um difeomorfismo se é uma bijeção diferenciável com inversa φ^{-1} diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo.*

Provavelmente, o teorema local mais importante no Cálculo é o teorema da função inversa. Sendo um teorema local, este se estende naturalmente à variedades diferenciáveis.

Teorema da Função Inversa. *Suponha M e N variedades diferenciáveis e $\varphi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se φ é invertível em todo ponto $p \in M$, então existem vizinhanças $U \subset M$ de p e $V \subset N$ de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \longrightarrow N$ é um difeomorfismo.*

Definição 1.6 (Imersões e Mergulhos)**.** *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis.*

(*a*) *Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_mM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$.*

(*b*) *Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um mergulho.*

(*c*) *Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N. Observe que se $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ é uma imersão, então $p \leq n$ e a diferença $n - m$ é chamada a codimensão da imersão φ.*

Uma importante consequência do teorema da função inversa é o seguinte.

Proposição 1.2. *Suponha que M e N sejam variedades diferenciáveis de mesma dimensão e $\varphi : M \longrightarrow N$ um imersão. Então φ é um difeomorfismo local. Se φ é bijetiva, então φ é um difeomorfismo.*

A seguir vejamos outros exemplos de variedades.

Exemplo 1.5 (O Fibrado Tangente)**.** *Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Considere*

$$TM = \{(p, v)\ ;\ p \in M, v \in T_pM\}$$

*ou seja, TM é o conjunto formado por todos os vetores tangentes a M. Vamos introduzir uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$), com esta estrutura TM é chamado de **fibrado tangente** de M.*

Seja $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ uma parametrização de M com $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) \in U_\alpha$. Para $w \in T_{x_\alpha(q)}M$, $q \in U_\alpha$, podemos escrever

$$w = \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}.$$

Defina uma aplicação $X_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ por

$$X_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha, y_1^\alpha, \ldots, y_n^\alpha) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right).$$

Segue que, se $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável para M então $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, X_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável para TM.

Exemplo 1.6 (Superfícies Regulares do $\mathbb{R}^n$)**.** *Um subconjunto $S^k \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície regular de dimensão k em $\mathbb{R}^n$ se para cada $p \in S$ existir uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow S \cap V$ de uma aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $S \cap V$ tais que:*

(a) *f é um homeomorfismo diferenciável;*

(b) *$(df)_q : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $q \in U$.*

Uma superfície $S^k \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.7 (Orientação)**.** *Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que:*

($\bullet$) *Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo.*

Caso contrário, diz-se que M é não-orientável. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição ($\bullet$) é chamada uma orientação de M e M é, então, orientada. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem a condição ($\bullet$) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz a condição ($\bullet$).

Exemplo 1.7. *A esfera unitária de dimensão n*

$$\mathbb{S}^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é orientável.

Definição 1.8 (Campo de Vetores)**.** *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência $p \longmapsto X(p)$ que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor tangente $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. Dizemos que o campo X é diferenciável se a aplicação $X : M \longrightarrow TM$ é diferenciável.*

Lema 1.2. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo de vetores Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.*

O campo de vetores $Z = [X, Y] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ dado por $[X, Y] = XY - YX$ é chamado de colchete de X e Y, o qual possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.3. *Se X, Y e Z são campos de vetores diferenciáveis em M, α, β são números reais, e f, g são funções diferenciáveis, então valem as seguintes propriedades:*

(*a*) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anti-comutatividade*) (*b*) $[\alpha X + \beta Y, Z] = a[X, Z] + \beta[Y, Z]$ (*linearidade*)

(*c*) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*)

(*d*) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.2 Métricas Riemannianas

Nesta seção veremos a definição de métrica Riemanniana e através dessa métrica veremos também o importante conceito de imersão isométrica.

Definição 1.9 (Métrica Riemanniana)**.** *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ a um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$, ou seja, uma forma bilinear simétrica positiva definida, no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em p, com $x(x_1, \ldots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Definição 1.10 (Isometria)**.** *Sejam M e N variedade Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado de isometria se:*

($\diamond$) $\quad \langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$, *para todo $p \in M$ e para todos $u, v \in T_pM$*

Definição 1.11 (Isometria Local)**.** *Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \longrightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo ($\diamond$).*

Exemplo 1.8 ($M = \mathbb{R}^n$)**.** *Considere $M = \mathbb{R}^n$ o espaço euclideano de dimensão n com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então a métrica é dada por $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, chamada de geometria métrica euclideana.*

Exemplo 1.9 (Variedades Imersas)**.** *Seja $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ uma imersão, ou seja, tem-se que f é diferenciável e $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se N tem uma estrutura Riemanniana, então f induz uma estrutura Riemanniana em M por*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \quad u, v \in T_pM.$$

Desta forma, como df_p *é injetiva segue que* $\langle\ \rangle_p$ *é bilinear e positiva definida. A métrica em* M *é então chamada de métrica induzida em* M *e* f *é chamada de imersão isométrica.*

Exemplo 1.10 (Métrica Produto)**.** *Sejam* M_1 *e* M_2 *variedades Riemannianas e consideremos o produto cartesiano* $M_1 \times M_2$ *com estrutura diferenciável produto. Sejam* $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ *e* $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$ *as projeções naturais. Vamos munir* $M_1 \times M_2$ *com uma métrica Riemanniana pondo:*

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle_q$$

para todos $(p, q) \in M_1 \times M_2$ *e* $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$*. Como exemplo, temos que o toro* $S^1 \times S^1 = T^2$ *tem uma estrutura Riemannianna obtida escolhendo no círculo* $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ *a métrica induzida por* $\mathbb{R}^2$ *e tomando a métrica produto. O toro* T^2 *com tal métrica é chamado toro plano.*

Definição 1.12 (Curva Parametrizada)**.** *Uma aplicação* $c : I \longrightarrow M$ *de um intervalo aberto* $I \subset \mathbb{R}$ *em uma variedade diferenciável* M *chama-se uma curva parametrizada. Observe que uma curva parametrizada pode admitir auto-intersecções ou pontas.*

Definição 1.13 (Campo ao longo de uma curva)**.** *Um campo vetorial* V *ao longo de uma curva* $c : I \longrightarrow M$ *é um aplicação* $t \longmapsto V(t)$ *que a cada* $t \in I$ *associa um vetor tangente* $V(t) \in T_{c(t)}M$*. Dizemos que* V *é diferenciável se para toda função diferenciável* f *em* M*, a função* $t \longmapsto V(t)f$ *é uma função diferenciável em* I*.*

O campo vetorial $dc\left(\frac{d}{dt}\right)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$, é chamado *campo velocidade* ou tangente de c. A restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ chama-se um *segmento.* Se M é Riemanniana, definimos o comprimento de um segmento por

$$l_a^b = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right\rangle} dt.$$

O teorema a seguir garante a existência de métricas Riemannianas.

Teorema 1.1. *Uma variedade diferenciável* M*, a qual satisfaz os axiomas de Hausdorff e da base enumerável, possui uma métrica Riemanniana.*

1.3 Conexões

Nesta seção vamos indicar por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.14 (Conexão Afim). *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

indicada por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

A seguir, temos uma proposição que esclarecer um pouco a definição dada acima.

Proposição 1.4. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência*

$$V \longmapsto \frac{DV}{dt}$$

que associa a cada campo de vetores V ao longo de um curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$ um outro campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ ao longo da curva c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:

(a) $\dfrac{D}{dt}(V + W) = \dfrac{DV}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$

(b) $\dfrac{D}{dt}(fV) = \dfrac{df}{dt}V + f\dfrac{DV}{dt}$, *onde V é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.*

(c) *Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, ou seja, $V(t) = Y(c(t))$, então $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.*

Observação 1.2. *A Proposição acima mostra que a escolha de uma conexão afim ∇ em M dá origem a uma derivada satisfazendo as condições (a) e (b) de campos de vetores ao longo de curvas. A conexão, desta forma, fornece uma forma de derivar vetores ao longo de curvas. Surge de maneira natural a noção de paralelismo.*

Veremos na definição a seguir o conceito de campo paralelo.

Definição 1.15 (Campo Paralelo)**.** *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ é chamado campo paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$*

Proposição 1.5. *Seja (M, ∇) uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $c : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_o \in I$, ou seja, $V_0 \in T_{c(t_0)}M$. Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$.*

A partir da proposição acima podemos definir o seguinte objeto.

Definição 1.16 (Transporte Paralelo)**.** *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $c : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$. O campo de vetores paralelo V ao longo de $c : I \longrightarrow M$ tal que $V(t_0) = V_0$, é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c.*

Definição 1.17 (Conexão compatível com a métrica)**.** *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$. A conexão é dita ser compatível com a métrica $\langle\ ,\ \rangle$, quando para toda curva diferenciável $\alpha : I \longrightarrow M$ e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de α, tivermos $\langle P, P' \rangle =$ constante.*

Observação 1.3. *A proposição a seguir garante que se a conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica, então podemos diferenciar produto interno pela regra do produto usual, fato que justifica a definição dada acima.*

Proposição 1.6. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo* *da curva diferenciável $\alpha : I \longrightarrow M$ tem-se:*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \ t \in I. \tag{1}$$

Corolário 1.1. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \tag{2}$$

Definição 1.18 (Conexão Simétrica)**.** *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita ser simétrica quando:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{3}$$

Observação 1.4. *Em um sistema de coordenadas (U, x), dizer que ∇ é simétrica implica que, para todo $i, j = 1, \ldots, n$, tem-se*

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3'}$$

O teorema a seguir (teorema de Levi-Civita) é o principal resultado desta seção.

Teorema 1.2 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana M, existe um única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

(*a*) ∇ *é simétrica.*

(*b*) ∇ *é compatível com a métrica*

Tal conexão é chamada de conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana de M.

1.4 Curvaturas

O objetivo dessa seção será explorar o conceito de curvatura que será de muita importância para compreensão dos próximos capítulos.

Definição 1.19 (Curvatura). *A curvatura K de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência $(X,Y) \longrightarrow K(X,Y)$ que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $K(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$K(X,Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.7. *A curvatura K de uma variedade Riemanniana possui as seguintes propriedades:*

(i) K é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, ou seja,

$$K(fX_1 + gX_2, Y_1) = fK(X_1, Y_1) + gK(X_2, Y_1)$$

$$K(X_1, fY_1 + gY_2) = fK(X_1, Y_1) + gK(X_1, Y_2)$$

onde $f, g \in \mathcal{D}(M)$, $\qquad X_i, Y_i \in \mathcal{X}(M)$.

(ii) Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $K(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ é linear, ou seja,

$$K(X,Y)(Z+W) = K(X,Y)Z + K(X,Y)W,$$

$$K(X,Y)fZ = fK(X,Y)Z,$$

onde $f \in \mathcal{D}(M)$, $\qquad Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Proposição 1.8 (Primeira Identidade de Bianchi).

$$K(X,Y)Z + K(Y,Z)X + K(Z,X)Y = 0$$

Por questões de conveniência, identificamos o operador quadrilinear

$$\langle K(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R},$$

que para cada quádrupla $(X, Y, Z, W) \in (\mathcal{X}(M))^4$ associa o número $\langle K(X,Y)Z, W\rangle$, simplesmente por

$$(X, Y, Z, W) = \langle K(X, Y)Z, W\rangle \, .$$

Proposição 1.9. *O operador definido acima possui as seguintes propriedades:*

(*a*) $(X, Y, Z, W) + (Y, Z, X, W) + (Z, X, Y, W) = 0$

(*b*) $(X, Y, Z, W) = -(Y, X, Z, W)$

(*c*) $(X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z)$

(*d*) $(X, Y, Z, W) = (Z, W, X, Y)$

No que segue, vamos usar a seguinte notação: dado um espaço vetorial V, indicaremos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $x, y \in V$.

Proposição 1.10. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço de dimensão 2 do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então,*

$$k(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

A definição acima permite definirmos o seguinte objeto.

Definição 1.20 (Curvatura Seccional)**.** *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $k(x, y) = k(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado **curvatura seccional** de σ em p.*

Lema 1.3. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \ , \ \rangle$, com $\dim V \geq 2$. Sejam*

$$K : V \times V \times V \longrightarrow V \quad e \quad K' : V \times V \times V \longrightarrow V$$

aplicações tri-lineares tais que as condições (a), (b), (c) e (d) da proposição 9 sejam satisfeitas para

$$(x,y,z,t) = \langle K(x,y)x, y\rangle\,, \qquad (x,y,z,t)' = \langle K'(x,y)x, y\rangle\,.$$

Se x, y são dois vetores linearmente independentes, vamos escrever,

$$k(\sigma) = \frac{(x,y,z,t)}{|x\wedge y|^2}, \qquad k'(\sigma) = \frac{(x,y,z,t)'}{|x\wedge y|^2},$$

onde $\sigma = [x,y]$ é o subespaço bi-dimensional gerado por x, y. Se para todo $\sigma \subset V$, $k(\sigma) = k'(\sigma)$, então $K = K'$.

Lema 1.4. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação tri-linear $K' : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$ dada por*

$$\langle K'(X,Y,W), Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_mM$. Então M tem curvatura seccional constante k se, e somente se, $K = kK'$, onde K é a curvatura de M.

A seguir vamos apresentar algumas combinações das curvaturas seccionais de uma variedade.

Definição 1.21 (Curvatura de Ricci)**.** *Para qualquer vetor unitário e qualquer $v \in T_pM$, a curvatura de Ricci de M na direção do vetor $v \in T_pM$ é definida pela média*

$$\mathrm{Ric}_p(v) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} k(v, v_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(v,v_i)v, v_i\rangle\,,$$

das curvaturas seccionais $k(v, v_i)$, onde $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Definição 1.22 (Curvatura Escalar)**.** *A Curvatura Escalar (ou média) de M no ponto $p \in M$ é definida pela média*

$$K(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ric}_p(v_i) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j=1}^{n}\langle R(v_i,v_j)v_i, v_j\rangle\,,$$

das curvaturas de Ricci $\mathrm{Ric}_p(v_i)$, *onde* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *é qualquer base ortonormal de* T_pM.

Observação 1.5. *A seguir, vamos mostrar que as definições acima não dependem da escolha das parametrizações. Primeiro, vamos definir uma forma bilinear em* T_pM *como segue: Sejam* $v, w \in T_pM$ *e faça*

$$Q(v, w) = \textit{traço da aplicação } [z \longrightarrow K(v, z)w].$$

Temos que Q *é bilinear e, além disso, escolhendo um vetor unitário* $v \in T_pM$ *e completando em uma base ortonormal* $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ *de* T_pM *temos que*

$$\begin{aligned} Q(v, w) &= \sum_{i=1}^{n} \langle K(v, v_i)w, v_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle K(w, v_i)v, v_i\rangle \\ &= Q(w, v) \end{aligned}$$

ou seja, isso mostra que $Q(v, w) = Q(w, v)$ *e* $Q(v, v) = (n-1)\,\mathrm{Ric}_m(v)$; *isto prova que* $\mathrm{Ric}_p(v)$ *(só depende de* $v \in T_pM$ *) é um conceito intrínseco. Por outro lado, a forma bilinear* Q *em* T_pM *corresponde uma aplicação linear auto-adjunta* R *dada por*

$$\langle R(v), w\rangle = Q(v, w)$$

Tomando uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *de* T_pM, *temos que*

$$\begin{aligned} trR &= \sum_{j=1}^{n} \langle R(v_j), v_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} Q(v_j, v_j) \\ &= (n-1)\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_m(v_j) \\ &= n(n-1)R(m). \end{aligned}$$

o que prova o que foi afirmado, em que trR *indica o traço da aplicação linear* R. *A forma* *bilinear* $\frac{1}{n-1}Q$ *é, algumas vezes, chamada de tensor de Ricci.*

1.5 Imersões Isométricas

Nesta seção iremos ver o conceito de vetor curvatura média e apresentar as importantes equações de Gauss, Ricci e Codazzi.

Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ uma imersão. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isso significa que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto do $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do espaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$.

Vamos identificar U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ numa soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, então podemos escrever $v = v^T + v^N$, com $v^T \in T_pM$ e $v^N \in (T_pM)^{\perp}$. Neste caso, denominamos v^T a componente tangencial de v e v^N a componente normal de v. Essa decomposição é diferenciável no sentido que as aplicações de TM em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \longmapsto (p, v^T) \quad \text{e} \quad (p, v) \longmapsto (p, v^N)$$

são diferenciáveis. A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X, Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T$. Pelo teorema de existência e unicidade de Levi-Civita, sabemos que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M.

Definição 1.23. *Sejam X, Y campos locais a M, então vamos definir uma aplicação h da seguinte forma*

$$h(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Segue que $h(X, Y)$ é um campo local em $\overline{M}$ normal a M e $h(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Portanto $h(X,Y)$ está bem definida. Daqui em diante, vamos indicar por $\mathcal{X}(M)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

Proposição 1.11. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, a aplicação $h : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)^{\perp}$ dada por*

$$h(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Este fato decorre diretamente da bilinearidade e simetria das conexões Riemannianas ∇ e $\overline{\nabla}$.

Observação 1.6. *Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$H_\eta(x,y) = \langle h(x,y), \eta \rangle, \qquad x, y \in T_pM,$$

é, pela proposição anterior, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.24 (Segunda Forma Fundamental)**.** *A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em $p \in M$ segundo o vetor normal η.

Observação 1.7. *Às vezes (é o caso deste trabalho) se utiliza a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação h que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear simétrica, tomando valores em $(T_pM)^{\perp}$. Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ por*

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x,y) = \langle h(x,y), \eta \rangle .$$

A proposição a seguir relaciona a segunda forma fundamental com a derivada covariante.

Proposição 1.12. *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de*

η normal a M. Então

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Se $v, w \in T_mM \subset T_m\overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $k(v,w)$ e $\overline{k}(v,w)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por v e w.

Teorema 1.3 (Fórmula de Gauss). *Sejam $m \in M$ e $v, w \in T_mM$ vetores ortonormais. Então*

$$k(v,w) - \overline{k}(v,w) = \langle h(v,v), h(w,w)\rangle - |h(v,w)|^2. \tag{1}$$

Definição 1.25 (Imersão Totalmente Geodésica). *Uma imersão $f : M \longrightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p, ou seja, se $A_\eta \equiv 0$ ou equivalentemente $h \equiv 0$. Dizemos que a imersão f é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo ponto $p \in M$.*

Proposição 1.13. *Uma imersão $f : M \longrightarrow \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e somente se, toda geodésica γ de M partindo de m é geodésica de $\overline{M}$ em p.*

Exemplo 1.11. *No caso em que $\overline{M} = \mathbb{R}^n$, as variedades totalmente geodésicas são os subespaços lineares de $\mathbb{R}^n$. No caso em que $\overline{M} = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, as variedades totalmente geodésicas são as intersecções $\sum$ de subespaços lineares de $\mathbb{R}^{n+1}$ com $\mathbb{S}^n$.*

A seguir vamos apresentar uma condição mais fraca do que a condição de totalmente geodésica.

Definição 1.26 (Vetor Curvatura Média). *Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. O vetor curvatura média H de M é definido como sendo*

$$H = \frac{1}{n} tr\ h = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

o qual não depende da escolha da base.

Observação 1.8. *Sejam $\{e_j\}_{j=n+1}^{p}$ uma base ortonormal de $(T_pM)^\perp$ e, por simplicidade,* *denotemos A_{e_j} por A_j, onde $j = n+1, \ldots, p$. Observe que, para todo $i = 1, \ldots, n$, tem-se*

$$\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) = \sum_{j=n+1}^{p} \left\langle \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i), e_j \right\rangle e_j$$

Logo,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{p} \left\langle \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i), e_j \right\rangle e_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle h(e_i, e_i), e_j\rangle \right) e_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle A_j(e_i), e_i\rangle \right) e_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{p} \Big(tr\ de\ A_j \Big) e_j. \end{aligned}$$

Definição 1.27 (Imersão Mínima)**.** *Uma imersão $f : M \longrightarrow \overline{M}$ é dita ser mínima se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ tem-se que $trA_\eta \equiv 0$. Ou, de forma equivalente, dizemos que a imersão f é mínima se, e somente se, o vetor curvatura média de f*

$$H = \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{p} \Big(tr\ A_j \Big) e_j = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{j=n+1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle A_j(e_i), e_i\rangle \right) e_j$$

é nulo para todo ponto $p \in M$.

Observação 1.9. *De agora em diante, vamos usar as letras $X, Y, Z, \ldots,$ para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras $\nu, \xi, \eta, \ldots,$ para indicar os campos diferenciáveis normais. Dados X e η, sabemos que a componente tangente de $\overline{\nabla}_X \eta$ é dada por $(\overline{\nabla}_X \eta)^T = -A_\eta(X)$.*

Definição 1.28 (Conexão Normal)**.** *A componente normal de $\overline{\nabla}_X \eta$ é chamada de conexão normal $\nabla^{\perp}$ da imersão. A saber,*

(1) $$\nabla^{\perp}_X \eta = (\overline{\nabla}_X \eta)^N = \overline{\nabla}_X \eta - (\overline{\nabla}_X \eta)^T = \overline{\nabla}_X \eta + A_\eta(X)$$

Observação 1.10. *Desta forma a conexão normal $\nabla^{\perp}$ possui as propriedades usuais de conexão, as quais são a linearidade em X, aditividade em η e vale que*

$$\nabla^{\perp}_X(f\eta) = f\nabla^{\perp}_X\eta + X(f)\eta, \qquad f \in \mathcal{D}(M).$$

Definição 1.29 (Curvatura Normal)**.** *De forma análoga ao caso do fibrado tangente, vamos introduzir via conexão normal $\nabla^{\perp}$ uma noção de curvatura no fibrado normal $TM^{\perp}$ a qual será chamada de curvatura normal K^N da imersão e definida por*

$$K^N(X,Y)\eta = \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\eta - \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\eta + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta.$$

Observação 1.11. *Para a segunda forma h a derivação covariante pode ser estendida de forma natural da seguinte maneira:*

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z). \tag{1.1}$$

O objetivo desta seção é apresentar as seguintes relações:

Proposição 1.14 (Equações de Gauss, Ricci e Codazzi)**.** *Valem as seguintes equações:*

(*a*) *Equação de Gauss:*

$$\left\langle \overline{K}(X,Y)Z, W \right\rangle = \langle K(X,Y)Z, W\rangle - \langle h(Y,W), h(X,Z)\rangle + \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle . \tag{1.2}$$

(*b*) *Equação de Ricci:*

$$\left\langle \overline{K}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle - \left\langle K^N(X,Y)\xi, \eta \right\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle , \tag{1.3}$$

onde $[A_\nu, A_\eta] = A_\nu \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\nu$.

(*c*) *Equação de Codazzi:*

$$\overline{K}(X,Y)Z = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z) - (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z). \tag{1.4}$$

Observação 1.12. *A importância das equações de Gauss, Ricci e Codazzi é que, no caso em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, elas desempenham um papel análogo aos das equações de compatibilidade na teoria local das superfícies. Na verdade, as equações de compatibilidade da teoria das superfícies são apenas casos particulares das equações de Gauss e Codazzi.*

Capítulo 2

Conceitos Básicos Específicos

Neste capítulo procuramos reunir os principais conceitos e resultados que serão referenciados no capítulo 3.

2.1 Alguns conceitos e resultados iniciais

Nesta seção vamos estabelecer algumas definições e resultados que serão utilizados especificamente nas demonstrações dos lemas e teoremas feitas no capitulo 3.

Definição 2.1. *Uma variedade complexa M de dimensão (complexa) n é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional (dimensão real), munida de um atlas formado por cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ satisfazendo a seguinte condição: sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, a mudança de coordenadas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é uma função holomorfa de n variáveis complexas. Nesse caso, cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ é uma carta coordenada holomorfa ou ainda um sistema de coordenadas complexas em M, e o conjunto das $\varphi_\alpha'^{s}$ é um atlas complexo de M.*

Toda variedade complexa é uma variedade analítica real; além disso, se $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ é uma carta coordenada holomorfa em M com $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ e $z_i = x_j + iy_j$, para $1 \leq j \leq n$, então $\varphi(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ é uma carta coordenada analítica de M, vista como variedade analítica real.

Observação 2.1. *As variedades analíticas complexas de dimensão 1 são as superfícies de Riemann.*

Seja M uma superfície analítica conexa em uma variedade Riemanniana analítica R^m. Considere ∇ e ∇' as derivadas covariantes de M e R respectivamente. Sejam X e Y campos vetoriais tangentes em M. Já vimos que a segunda forma fundamental h é dada por

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.1}$$

Sabemos que $h(X, Y)$ é um campo vetorial normal em M e que h é simétrico em X e Y. Considere um campo vetorial normal qualquer ξ em M e escrevamos:

$$\nabla'_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla^\perp_X \xi \tag{2.2}$$

onde $-A_\xi(X)$ e $\nabla^\perp_X \xi$ denotam respectivamente os componentes tangencial e normal do vetor $\nabla'_X \xi$, então obtemos

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle h(X, Y), \xi \rangle \tag{2.3}$$

onde $\langle , \rangle$ denota a métrica riemanniana de R. Diz-se que um campo normal ξ em M é paralelo no fibrado normal se $\nabla^\perp_X \xi \equiv 0$. Para cada campo tangente $X \in \mathcal{X}(M)$ o vetor curvatura média H é definido por:

$$H = \frac{1}{2} trh \tag{2.4}$$

Um conceito que aparecerá muito no decorrer desta dissertação é o conceito de subvariedade mínima apresentado a seguir.

Definição 2.2 (Subvariedade mínima)**.** *Se $H \equiv 0$, então dizemos que M é uma subvariedade (neste caso, superfície) mínima em R^m.*

Sendo assim, dizer que uma subvariedade é mínima significa dizer que seu vetor curvatura média é nulo. Outro conceito importante é o de variedade compacta que veremos na próxima definição.

Definição 2.3. *Se para todo sistema de vizinhanças coordenadas cobrindo a variedade M, existe um número finito de vizinhanças coordenadas que cobrem toda a variedade, então a variedade M é dita compacta.*

Um campo vetorial normal unitário de M em R é, às vezes, chamado de uma seção normal em M, ou uma direção normal em M.

Para uma seção normal ξ em M, se A_ξ for proporcional à identidade, isto é, $A = \rho I$, para alguma função ρ, então ξ é chamada seção umbílica em M, ou M é chamada umbílica com respeito a ξ. Se a subvariedade M é umbílica com respeito a toda seção normal local em M, então M é chamada de totalmente umbílica.

Para um campo vetorial normal ξ de M em R, se $\frac{1}{2} tr A_\xi = 0$, entao ξ é chamado uma seçao mínima em M.

Para a proposição que se segue, precisamos saber o que significa a conexão normal $\nabla^\perp$ ser flat, esse é o conteúdo da definição abaixo.

Definição 2.4. *Dizemos que a conexão normal $\nabla^\perp$ é flat se o tensor curvatura média K^N se anula, isto é, $K^N = 0$.*

Proposição 2.1. *Seja M^n uma subvariedade de N^m. Então a conexão normal $\nabla^\perp$ de M em N é flat se, e somente se, existem $(m-n)$ campos ortonormais e paralelos no fibrado normal.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Temos $\nabla^\perp_X \xi_j = 0$ para $j = 1, ..., m-2$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Logo $K^N(X,Y)\xi_j = 0$. Dado qualquer campo normal $\sum_{j=1}^n f_j \xi_j$ de M. Então temos:

$$\begin{aligned} K^N(X,Y)\left(\sum_{j=1}^{n} f_j\xi_j\right) &= \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\left(\sum_{j=1}^{m-2} f_j\xi_j\right) - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\left(\sum_{j=1}^{m-2} f_j\xi_j\right) - \nabla^\perp_{[X,Y]}\left(\sum_{j=1}^{m-2} f_j\xi_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m-2}\left[(XY-YX)f_j\right]\xi_j - \sum_{j=1}^{m-2}\left([X,Y]f_j\right)\xi_j = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Portanto, a conexão normal $\nabla^\perp$ é flat.

($\Rightarrow$) Assumamos que $\nabla^\perp$ é flat. Então para quaisquer conjunto de $(m-n)$ campos normais ortonormais ξ_i de M, temos:

$$\nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi_j - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi_j - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi_j = 0, \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

Definindo $\nabla^{\perp}_X \xi_j = \sum_{i=1}^{n} \omega^i_j(X)\xi_i$, temos $\omega^i_j = -\omega^j_i$ e também

$$0 = \sum_{j=1}^{n}[X\omega^j_i(Y) - Y\omega^j_i(X) - \omega^j_i([X,Y])]\xi_j + \sum_j \Big\{ \sum_k [\omega^k_i(Y)\omega^j_k(X) - \omega^k_i(X)\omega^i_k(Y)]\Big\}\xi_j$$

ou seja, $d\omega^j_i = -\sum \omega^k_i \wedge \omega^j_k$ e $\omega^j_i = -\omega^i_j$. É possível então obter uma matriz de ordem $(m-n), A = (a^j_i)$ de funções a^j_i satisfazendo:

$$dA = -A\omega; \qquad\qquad A^t = A^{-1} \tag{2.6}$$

onde $\omega = (\omega^j_i)$. Esta equação (2.6) tem a expressão local:

$$da^k_i = \sum a^j_i \omega^j_k = -\sum a^j_i \omega^k_j \tag{2.7}$$

fazendo

$$\xi'_i = \sum_j a^j_i \xi_j \tag{2.8}$$

os campos ξ'_i são também $m-n$ campos ortonormais.

Usando (2.7) e (2.8) obtemos:

$\omega'^j_i a^k_j = da^k_i + a^j_i \omega^k_j = 0$, onde ω'^j_i são definidos por $\nabla^{\perp}\xi'_i = \omega'^j_i \xi'_j$. Isto prova que cada ξ'_i é paralelo no fibrado normal.

■

Proposição 2.2. *Seja M uma subvariedade n-dimensional de uma variedade N de curvatura constante. Então a conexão normal $\nabla^{\perp}$ é flat se, e somente se, todos os tensores segunda forma A_ξ são diagonalizados simultaneamente.*

A demonstração dessa proposição segue da equação de Ricci.

Proposição 2.3. *Seja M uma subvariedade n-dimensional de uma variedade riemanniana m-dimensional N. Sejam $\{\xi_i\}$ e $\{\xi'_i\}$ conjuntos de $(m-n)$ campos normais ortonormais de M, ambos conjuntos de campos paralelos no fibrado normal. Se tivermos $\xi'_i = \sum_j a^j_i \xi_j$ em uma componente de interseção dos domínios de definição dos campos, então as funções a^j_i são todas constantes. Em particular, se cada $\xi_i = \xi'_i$ em um ponto,* *então* $(a_i^j) = (\delta_i^j)$.

A proposição acima é consequência da definição de campos paralelos.

É possível escolher um sistema de coordenadas isotérmicas $\{x_1, x_2\}$ cobrindo M. O tensor métrica induzida g tem a seguinte forma:

$$g = E\{(dx_1)^2 + (dx_2)^2\}. \tag{2.9}$$

A seguir, fixaremos a notação $X_i = \partial/\partial x_i$ e consideremos,

$$L = h(X_1, X_1), \qquad M = h(X_1, X_2), \qquad N = h(X_2, X_2). \tag{2.10}$$

Para as coordenadas isotérmicas x_1, x_2 com tensor métrico dado por (2.9), veremos que

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{E}, \qquad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{X_1(E)}{2E}, \qquad \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{X_2(E)}{2E} \tag{2.11}$$

em que os Γ_{ji}^h são dados por

$$\nabla_{X_j} X_i = \Gamma_{ji}^h X_h. \tag{2.12}$$

De fato, como $g(X_1, X_1) = E = g(X_2, X_2)$, obtemos:

$$\frac{1}{2}X_1(E) = \frac{1}{2}X_1[g(X_1, X_1)] = \frac{1}{2}[2g(\nabla_{X_1}X_1, X_1)] = \frac{1}{2}[g(\Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2, X_1)] = \frac{1}{2}2E\Gamma_{11}^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma_{11}^1 = \frac{X_1(E)}{2E};$$

$$\frac{1}{2}X_2(E) = \frac{1}{2}[2g(\nabla_{X_2}X_1, X_1)] = \frac{1}{2}[2g(\Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2, X_1)] = \frac{1}{2}2E\Gamma_{12}^1 \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = \frac{X_2(E)}{2E};$$

$$\frac{1}{2}X_1(E) = \frac{1}{2}[2g(\nabla_{X_1}X_2, X_2)] = \frac{1}{2}[2g(\Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2, X_2)] = \frac{1}{2}2E\Gamma_{12}^2 \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = \frac{X_1(E)}{2E};$$

$$\frac{1}{2}X_2(E) = \frac{1}{2}[2g(\nabla_{X_2}X_2, X_2)] = \frac{1}{2}[2g(\Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2, X_2)] = \frac{1}{2}2E\Gamma_{22}^2 \Rightarrow \Gamma_{22}^2 = \frac{X_2(E)}{2E};$$

E ainda,

$$g(X_1, X_2) = 0 \Rightarrow g(\nabla_{X_1}X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_{X_1}X_2) = 0 \Rightarrow E\Gamma_{11}^2 + E\Gamma_{12}^1 = 0 \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2$$

$$g(X_1, X_2) = 0 \Rightarrow g(\nabla_{X_2}X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_{X_2}X_2) = 0 \Rightarrow E\Gamma_{12}^2 + E\Gamma_{22}^1 = 0 \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1$$

Pela equação de Codazzi, temos $(\overline{\nabla}_{X_1}h)(X_2, X_1) = (\overline{\nabla}_{X_2}h)(X_1, X_1)$ e pela equação (1.1), tem-se

$$(\overline{\nabla}_{X_1}h)(X_2, X_1) = \nabla_{X_1}^{\perp}(h(X_2, X_1)) - h(\nabla_{X_1}X_2, X_1) - h(X_2, \nabla_{X_1}X_1),$$

e

$$(\overline{\nabla}_{X_2}h)(X_1, X_1) = \nabla_{X_2}^{\perp}(h(X_1, X_1)) - h(\nabla_{X_2}X_1, X_1) - h(X_1, \nabla_{X_2}X_1)$$

Logo,

$$\nabla_{X_2}^{\perp}M - h(\nabla_{X_1}X_2, X_1) - h(X_2, \nabla_{X_1}X_1) = \nabla_{X_2}^{\perp}L - h(\nabla_{X_2}X_1, X_1) - h(X_1, \nabla_{X_2}X_1)$$

Devido h ser bilinear e simétrica e $\nabla_{X_2}X_1 = \nabla_{X_1}X_2$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_2}^{\perp}L - \nabla_{X_2}^{\perp}M &= h(\nabla_{X_2}X_1, X_1) - h(X_2, \nabla_{X_1}X_1) \\
&= h(\Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2, X_1) - h(X_2, \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2) \\
&= \Gamma_{12}^1 h(X_1, X_1) + \Gamma_{12}^2 h(X_2, X_1) - \Gamma_{11}^1 h(X_2, X_1) - \Gamma_{11}^2 h(X_2, X_2)
\end{aligned}$$

Mas, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^1$ e $\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2$, daí

$$\nabla^{\perp}_{X_2} L - \nabla^{\perp}_{X_2} M = \Gamma_{12}^1 [h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2)].$$

Uma vez que

$$H = \frac{1}{2} trh = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} g(h(X_i, X_i), X_i) = \frac{1}{2}[g(h(X_1, X_1), X_1) + g(h(X_2, X_2), X_2)] \Rightarrow$$

$$H = \frac{1}{2}[\frac{1}{E} h(X_1, X_1) + \frac{1}{E} h(X_2, X_2)] \Rightarrow h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2) = 2EH$$

e $\Gamma_{12}^1 = \frac{X_2(E)}{2E}$, temos

$$\nabla^{\perp}_{X_2} L - \nabla^{\perp}_{X_1} M = \frac{X_2(E)}{2E}[h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2)] = \frac{X_2(E)}{2E} 2EH = X_2(E)H. \tag{2.13}$$

Analogamente,

$$\nabla^{\perp}_{X_2} M - \nabla^{\perp}_{X_1} N = \frac{-X_1(E)}{2E}[h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2)] = -X_1(E)H. \tag{2.14}$$

Pela definição de vetor curvatura média H, temos

$$\nabla^{\perp}_{X_i}(EH) = E\nabla^{\perp}_{X_i} H + X_i(E)H \Rightarrow X_i(E)H = -E\nabla^{\perp}_{X_i} H + \nabla^{\perp}_{X_i}[E\frac{1}{2E}(h(X_1, X_1) + h(X_2, X_2))] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_i(E)H = -E\nabla^{\perp}_{X_i} H + \frac{1}{2}\left(\nabla^{\perp}_{X_i} L + \nabla^{\perp}_{X_i} N\right).$$

Substituindo $X_i(E)H$ em (2.13) e (2.14), obtemos:

$$\nabla^{\perp}_{X_2} L - \nabla^{\perp}_{X_1} M = -E\nabla^{\perp}_{X_2} H + \frac{1}{2}\nabla^{\perp}_{X_2}(L + N) \Rightarrow$$

$$\nabla^{\perp}_{X_2}(\frac{L - N}{2}) - \nabla^{\perp}_{X_1} M = -E\nabla^{\perp}_{X_2} H, \tag{2.15}$$

$$\nabla^{\perp}_{X_2}M - \nabla^{\perp}_{X_1}N = E\nabla^{\perp}_{X_1}H - \frac{1}{2}\nabla^{\perp}_{X_1}(L+N) \Rightarrow \nabla^{\perp}_{X_1}(\frac{L-N}{2}) + \nabla^{\perp}_{X_2}M = E\nabla^{\perp}_{X_1}H. \quad (2.16)$$

Assim, temos o seguinte lema.

Lema 2.1. *Seja M uma superfície em uma variedade Riemanniana m-dimensional de curvatura constante. Se existe uma seção isoperimétrica paralela ξ em M, então a função*

$$\varphi(\xi) = \langle \frac{L-N}{2}, \xi \rangle - \langle M, \xi \rangle i \quad (2.17)$$

é analítica em $z = x_1 + ix_2$ para todo conjunto de coordenadas isotérmicas x_1, x_2, onde uma seção ξ isoperimétrica em M significa um campo vetorial normal unitário definido globalmente em M com $\frac{1}{2}trA_\xi =$constante. Em particular, se o vetor curvatura média H é paralelo e não-nulo, então a função

$$\varphi(\frac{H}{|H|}) = \langle \frac{L-N}{2}, \frac{H}{|H|} \rangle - \langle M, \frac{H}{|H|} \rangle i \quad (2.18)$$

é analítica em $z = x_1 + ix_2$.

A demonstração desse lema pode ser encontrada em [1], página 103.

2.2 Fibrados Vetoriais

Esta seção é necessária para a compreensão do Teorema de Erbach que será enunciado na próxima seção.

Definição 2.5. *Sejam E e M variedades diferenciáveis e seja $\rho : E \to M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que ρ é um fibrado vetorial de dimensão k quando para cada $P \in M$*

(i) $\rho^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão k; e

(ii) existe uma vizinhança aberta U de p em M e um difeomorfismo $\phi : \rho^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição $\rho^{-1}(q)$ é um isomorfismo sobre $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, para cada $q \in U$.

Dado um fibrado vetorial $\rho : E \to M$ e um subconjunto $F \subset E$ tal que a restrição $\rho\ |_F : F \to M$ é também um fibrado vetorial, dizemos que F é um subfibrado vetorial de E se a inclusão $i : F \hookrightarrow E$ leva $(\rho\ |_F)^{-1}(p)$ linearmente sobre $\rho^{-1}(p)$, para todo $p \in M$.

Por abuso de linguagem é comum não nos referirmos à aplicação $\rho : E \to M$ quando trabalhamos com fibrados cuja aplicação é natural, mas sim às variedades E e M.

Definição 2.6. *Seja $\rho : E \to M$ um fibrado vetorial. Para cada $p \in M$ chamamos o espaço $E_p = \rho^{-1}(p)$ a fibra de ρ sobre p. Uma seção de um espaço fibrado é uma aplicação $\sigma : M \to E$ tal que $\rho \circ \sigma = id_M$.*

Exemplo 2.1. *Seja $TM = (p, v_p)\Big|_P \in M, v_p \in T_pM$. A aplicação $\rho : TM \to M$ dada por $\rho(p, v_p) = p$, é um espaço fibrado vetorial de classe C^∞, chamado o espaço fibrado tangente a M.*

Uma seção do espaço fibrado tangente TM é um campo de vetores em M. Assim,um campo de vetores X, é para todos os efeitos,uma aplicação que a cada $p \in M$ associa o vetor $X(p) \in T_pM$

Exemplo 2.2. *Seja $\langle\ ,\ \rangle$ um métrica Riemanniana em M^n e seja $N^m \subset M^n$ uma subvariedade de M. Dado $p \in M$, seja $T_pN^\perp \subset T_pM$ o subespaço de vetores normais a T_pN; definimos $\omega(N) = (p, v_p); p \in N, v_p \in T_pN^\perp$. A aplicação $\rho : \omega(N) \to N$, dada por $\rho(p, v_p) = p$ é um espaço fibrado vetorial, chamado o espaço fibrado normal.*

Definição 2.7. *Sejam $\rho : E \to M$ um fibrado vetorial com uma conexão linear ∇ e $\Gamma(\rho)$ o conjunto das seções de ρ. Dizemos que a seção $\sigma \in \Gamma(\rho)$ é paralela quando $\nabla_X^\sigma = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Um subfibrado vetorial F de E é dito paralelo se, para toda seção η de F e todo $X \in \mathcal{X}(M)$, tivermos que ∇_X^η é uma seção paralela de F.*

2.3 Resultados Importantes

Nesta seção iremos apresentar os importantes *Teorema de Erbach* e *Teorema de Riemann-Roch* que serão fundamentais para as demonstrações que serão feitas no capitulo 3. O primeiro resultado importante, apresentado a seguir, pode ser encontrado em [9].

Lema 2.2. *Seja M^2 uma superfície com vetor curvatura média paralelo em uma variedade com curvatura constante N. Então ou M^2 é uma superfície mínima de uma subvariedade umbílica de N ou a segunda forma fundamental de M^2 pode ser diagonalizada simultaneamente.*

Lema 2.3. *[Chen, 1973; Yau, 1973] Seja M uma superfície em um m-espaço forma $R^m(c)$ de curvatura seccional c. Se o vetor curvatura média H é paralelo no fibrado normal, então M é uma das seguintes superfícies:*

(i) *superfície mínima de $R^m(c)$;*

(ii) *superfície mínima de uma hiperesfera de $R^m(c)$;*

(iii) *superfície com vetor curvatura média constante em uma 3-esfera de $R^m(c)$.*

Para a demonstração ver Teorema 2.1 de [1], página 106.

Se denotarmos o espaço nulo da aplicação linear $\xi \to A_\xi$ por $N_0(x)$, então o complemento ortogonal de $N_0(x)$ no espaço normal $T_p^\perp M$ é chamado o primeiro espaço normal em x.

Proposição 2.4 (*Teorema de Erbach*)**.** *Considere $\psi : M_n \to \overline{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana conexa n-dimensional M^n em uma variedade riemanniana $(n+p)$-dimensional $\overline{M}_c^{n+p}$ de curvatura seccional constante c. Se o primeiro espaço normal $N_1(x)$ é invariante por transporte paralelo com respeito à conexão no fibrado normal e a dimensão de N_1 é constante igual a l, então existe uma subvariedade $(n+l)$-dimensional L^{n+l} totalmente geodésica de $\overline{M}_c^{n+p}$, tal que $\psi(M) \subset L^{n+l}$.*

Seja M uma variedade n-dimensional de uma variedade Riemanniana m-dimensional e E um subfibrado do fibrado normal $T^\perp M$. Então E é dito paralelo no fibrado normal se, para toda seção ξ de E e todo vetor X tangente a M, tivermos $\nabla_X \xi \in E$.

O teorema de redução de J. Erbacher (1971) (2.4) afirma o seguinte:

Corolário 2.1. *Seja M uma subvariedade de uma variedade Riemanniana m-dimensional $R^m(c)$ completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante c. Se existe um subfibrado normal E de dimensão l que é paralelo no fibrado normal e o primeiro espaço normal N_x^1, gerado por $\{h(X,Y); X, Y \in T_xM\}$, está contido em E_x para cada $x \in M$, então M está contida em uma subvariedade totalmente geodésica $(n+l)$-dimensional de $R^m(c)$.*

Para a demonstração do Teorema de Erbacher, ver [6].

2.3.1 O Famoso Teorema de Riemann-Roch

Devido este teorema vir de uma área diferente da tratada nesta dissertação, ele vem da Geometria Algébrica, preferimos colocá-lo em uma seção a parte para podermos apresentar, a seguir, algumas definições e nomenclaturas necessárias para seu enunciado.

Definição 2.8. *Uma superfície de Riemann é um espaço topológico de Hausdorff, conexo, com base enumerável e uma estrutura complexa definida.*

Definição 2.9. *Uma n-diferencial meromorfa sobre um conjunto $V \subset \mathbb{C}$ é uma expressão μ do tipo*

$$\mu = f(z)(dz)^n,$$

onde f é uma função meromorfa sobre V. Diremos que μ é uma n- diferencial meromorfa na coordenada z.

Sejam X uma superfície de Riemann e $D : X \to \mathbb{Z}$ uma função. O suporte de D, denotado por $supp(D)$, é o conjunto

$$supp(D) = \{p \in X / D(p) \neq 0\}.$$

O principal conceito necessário para o enunciado do teorema de Riemann-Roch é o de divisores que será apresentado na definição a seguir.

Definição 2.10. *Um divisor sobre X é uma função $D : X \to \mathbb{Z}$ cujo suporte é um subconjunto discreto de X. Denotaremos por $Div(X)$ o conjunto dos divisores sobre X.*

Vamos definir a seguir o grau de um divisor sobre uma superfície compacta.

Definição 2.11. *O grau de um divisor D sobre uma superfície de Riemann compacta, denotado por $deg(D)$, é a soma*

$$deg(D) = \sum_{p \in X} D(p)$$

Sejam X uma superfície de Riemann e f uma função meromorfa não-nula sobre X. Podemos associar um divisor a f.

Definição 2.12. *O divisor da função meromorfa f, denotado por $divf$, é o divisor*

$$div(f) = \sum_{p \in X} ord_p(f).p$$

Divisores desse tipo são chamados de divisores principais sobre X, e o conjunto de tais divisores é denotado por $PDiv(X)$.

Definição 2.13. *Sejam X uma superfície de Riemann e $D \in Div(X)$. O espaço das funções meromorfas sobre X com pólos limitados por D, denotado por $\mathcal{L}(D)$, é o conjunto*

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X)/div(f) \geq -D\}.$$

Em que $\mathcal{M}(X) = \{f : X \to \mathbb{C}/f$é meromorfa$\}$

Definição 2.14. *Seja X uma superfície de Riemann e $D \in Div(X)$. O espaço das n-diferenciais meromorfas sobre X com pólos limitados por D, denotado por $\mathcal{L}^n(D)$, é o conjunto*

$$\mathcal{L}^n(D) = \{n - diferenciais\ meromorfas\ \mu/div(\mu) \geq -D\}$$

Definição 2.15. *Seja X uma superfície de Riemann. Para cada ponto $p \in X$, fixemos uma coordenada local z_p próxima de p. Um divisor de truncamento de Laurent sobre X é uma soma formal finita*

$$\sum_{p \in X} r_p(z_p).p,$$

onde $r_p(z_p)$ é um polinômio de Laurent. Os divisores de truncamento de Laurent formam um grupo com relação à adição, denotado por $\mathcal{T}(X)$.

A cada divisor $D \in Div(X)$ associamos um subespaço de $\mathcal{T}(X)$, definido por

$$\mathcal{T}[D](X) = \left\{ \sum_{p \in X} r_p.p \ / \ deg(r_p) < -D(p), \ \ para \ \ todo \ \ r_p \neq 0 \right\}.$$

Definimos a aplicação de truncamento de Laurent por

$$\begin{aligned} \alpha_D : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathcal{T}[D](X) \\ f &\longmapsto \sum_{p \in X} r_p.p \end{aligned}$$

onde r_p é o truncamento de Laurent com termos de ordem menor que $-D(p)$ da série de Laurent de f em torno de p com respeito a coordenada local z_p fixada. Podemos notar que esta é uma aplicação linear.

O conúcleo de α_D, recebe a seguinte notação:

$$\mathcal{H}^1(D) := coker(\alpha_D).$$

Após as seguidas definições podemos, enfim, enunciar o importante teorema de Riemann-Roch.

Teorema 2.1 (Primeira Forma do Teorema de Riemann-Roch)**.** *Seja X uma curva algébrica. Então, para todo divisor $D \in Div(X)$ temos*

$$dim\mathcal{L}(D) - dim\mathcal{H}^1(D) = deg(D) + 1 - dim\mathcal{H}^1(0).$$

Teorema 2.2 (Segunda Forma do Teorema de Riemann-Roch)**.** *Seja X uma curva algébrica de gênero g. Então, para todo divisor $D \in Div(X)$ e todo divisor canônico $K \in KDiv(X)$, temos*

$$dim\mathcal{L}(D) - dim\mathcal{L}(K - D) = deg(D) + 1 - g.$$

Capítulo 3

Classificação de Superfícies com Vetor Curvatura Média Normalizado Paralelo

Neste último capítulo vamos mostrar o teorema principal desta dissertação, este foi demonstrado por Chen na referência [2] em 1973.

3.1 Resultados específicos auxiliares

Nosso objetivo nesta seção é fazer uma preparação para a demonstração do principal teorema desta dissertação, que será apresentada na próxima seção.

Seja M uma superfície analítica em uma variedade riemanniana $R^m(c)$ completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante c. Então, sabe-se (podemos ver em [1], pag. 21 e 22) que $R^m(c)$ é analítica e é isométrica a uma das formas espaciais a seguir: elíptica, hiperbólica ou ou euclidiana, de acordo que a curvatura seccional seja positiva, negativa ou nula.

Considere K', K, K^N os tensores curvaturas associados com ∇', ∇ e $\nabla^{\perp}$. Então para quaisquer campos de vetores tangentes X, Y, Z, W e campos normais ξ, η em M, as equações de Gauss e Ricci são, respectivamente, dadas pela *proposição (1.14)*:

$$\langle K'(X,Y)Z,W\rangle = \\ = \langle K(X,Y)Z,W\rangle + \langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle - \langle h(Y,Z),h(X,W)\rangle. \tag{3.1}$$

$$\langle K^N(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi, A\eta](X),Y\rangle \tag{3.2}$$

Para a segunda forma fundamental h, definimos a derivada covariante, denotada por $\overline{\nabla}_X h$, através da equação:

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = \nabla_X^{\perp}(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{3.3}$$

Uma vez que $R^m(c)$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi reduz-se a:

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z) \tag{3.4}$$

Por hipótese, assumimos que M tem vetor curvatura média normalizado paralelo e portanto podemos considerar campos unitários e mutuamente ortogonais $\xi_3, ..., \xi_m$ com $\xi_3 = \frac{H}{|H|}$. Então temos para cada campo $X \in \mathcal{X}(M)$

$$\nabla_X^{\perp}\xi_3 = 0. \tag{3.5}$$

Assim pela equação (3.2) de Ricci temos:

$$\langle K^N(X,Y)\xi_3, \xi_r\rangle = \langle [A_3, A_r](X), Y\rangle$$

como $K^N(X,Y)\xi_3 = \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}\xi_3 - \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}\xi_3 + \nabla_{[X,Y]}\xi_3 = 0$, teremos:

$$[A_3, A_r] = 0 \tag{3.6}$$

para cada $r = 4, ..., m$ onde $A_r = A_{\xi_r}$. Por outro lado, sendo $\xi_3, ..., \xi_m$ uma base ortonormal do espaço normal $T_p^{\perp}(M)$, então $H = \frac{1}{2}\sum_{r=3}^m (trA_r)\xi_r$ e usando que $\xi_3 = \frac{H}{|H|}$ obtemos:

$$|H|\xi_3 = \frac{1}{2}(trA_3)\xi_3 + \frac{1}{2}\sum_{r=4}^m (trA_r)\xi_r \Rightarrow (\frac{1}{2}trA_3 - |H|)\xi_3 + \frac{1}{2}\sum_{r=4}^m (trA_r)\xi_r = 0$$

Como $\xi_3, ..., \xi_m$ são linearmente independentes, concluímos que:

$$trA_r = 0 \; para \; r = 4, ..., m \tag{3.7}$$

Por (3.6) e (3.7), tem-se , respectivamente, que $[A_3, A_r] = 0$ e tr$A_r = 0$ para cada $r = 4, ..., m$, podemos mostrar que se A_3 não for proporcional à transformação identidade I em um ponto $p \in M$, então $[A_r, A_s] = 0$ em p para todos $r, s = 3, ..., m$.

De fato, sabendo que A_r é auto-adjunta e que tr$A_r = 0$ para todo $r = 4, ..., m$. Existe uma base ortonormal β, do espaço tangente, tal que

$$[A_3]_\beta = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} ; [A_r]_\beta = \begin{bmatrix} x & y \\ y & -x \end{bmatrix} ; [A_s]_\beta = \begin{bmatrix} p & q \\ q & -p \end{bmatrix}$$

Assim, $[A_r, A_s] = 0 \Leftrightarrow [A_r]_\beta[A_s]_\beta = [A_s]_\beta[A_r]_\beta \Leftrightarrow xq = py$. Mas, $[A_3, A_r] = 0 \Rightarrow [A_3]_\beta[A_r]_\beta = [A_r]_\beta[A_3]_\beta \Rightarrow ay = yb \Rightarrow (a - b)y = 0$ como $A_3 \neq \lambda I$ temos $y = 0$. E ainda, $[A_3, A_r] = 0 \Rightarrow [A_3]_\beta[A_s]_\beta = [A_s]_\beta[A_3]_\beta \Rightarrow aq = qb \Rightarrow (a - b)q = 0$, logo $q = 0$. Sendo assim, vemos que $xq = 0 = py$, ou seja, $[A_r, A_s] = 0$, para todo $r = 3, ..., m$.

Consequentemente, de (3.6) e (3.7), obtemos o seguinte:

Lema 3.1. *Seja $M_1 = \{p \in M; A_3 = \lambda I$ em algum $\lambda \in \mathbb{R}\}$. Então $K^N \equiv 0$ sobre o fecho de $M \setminus M_1 (M - M_1)$.*

Demonstração. De fato, em $M \setminus M_1$ tem-se $A_3 \neq \lambda I, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, assim vimos anteriormente que $[A_r, A_s] = 0$, para todo $r = 3, ..., m$ em $p \in M \setminus M_1$. Daí, pela equaçao de Ricci (3.2), temos

$$\langle K^N(X, Y)\xi_r, \xi_s\rangle = \langle [A_r, A_s](X), Y\rangle \Rightarrow K^N \equiv 0.$$

■

Agora, considerando que ξ_3 é paralelo, temos pela equação (3.3):

$$\begin{aligned} \langle (\overline{\nabla}_X h)(Y, Z), \xi_3\rangle &= \langle \nabla^\perp_X(h(Y, Z)), \xi_3\rangle - \langle h(\nabla_X Y, Z), \xi_3\rangle - \langle h(Y, \nabla_X Z), \xi_3\rangle \\ &= \langle \nabla^\perp_X(h(Y, Z)), \xi_3\rangle - \langle A_3(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle A_3(Y), \nabla_X Z\rangle \end{aligned}$$

Como $X \langle h(Y, Z), \xi_3\rangle = \left\langle \nabla^\perp_X(h(Y, Z)), \xi_3\right\rangle + \left\langle (h(Y, Z)), \nabla^\perp_X \xi_3\right\rangle = \left\langle \nabla^\perp_X(h(Y, Z)), \xi_3\right\rangle$, temos

$$\langle (\overline{\nabla}_X h)(Y, Z), \xi_3\rangle = X\langle h(Y, Z), \xi_3\rangle - \langle A_3(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle A_3(Y), \nabla_X Z\rangle \tag{3.8}$$

Sobre o interior de M_1 que denotaremos por $int(M_1)$, temos $A_3 = \lambda I$. Logo, usando (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z),\xi_3\right\rangle &= X\left\langle h(Y,Z),\xi_3\right\rangle - \left\langle \lambda\nabla_X Y, Z\right\rangle - \left\langle \lambda Y, \nabla_X Z\right\rangle \\ &= X\left\langle A_3(Y),Z\right\rangle - \lambda\left\langle \nabla_X Y, Z\right\rangle - \lambda\left\langle Y,\nabla_X Z\right\rangle \\ &= X(\lambda\left\langle Y,Z\right\rangle) - \lambda(\left\langle \nabla_X Y,Z\right\rangle + \left\langle Y,\nabla_X Z\right\rangle) \\ &= \lambda X\left\langle Y,Z\right\rangle + X(\lambda)\left\langle Y,Z\right\rangle - \lambda X\left\langle Y,Z\right\rangle\end{aligned}$$

o que implica,

$$\langle(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z),\xi_3\rangle = X(\lambda)\langle Y,Z\rangle \tag{3.9}$$

Utilizando o mesmo raciocínio, obtemos

$$\langle(\overline{\nabla}_Y h)(X,Z),\xi_3\rangle = Y(\lambda)\langle X,Z\rangle \tag{3.10}$$

Da equação de Codazzi, (3.4), sabemos que: $(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z)$. Então de (3.9) e (3.10) obtemos:

$$X(\lambda)\langle Y,Z\rangle = Y(\lambda)\langle X,Z\rangle \tag{3.11}$$

Uma vez que a equação anterior vale para quaisquer X,Y e Z tangentes a $int(M_1)$ vemos que λ é constante em cada componente de $int(M_1)$. De fato, de (3.11) temos

$$X(\lambda)\left\langle Y,Z\right\rangle - Y(\lambda)\left\langle X,Z\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle X(\lambda)Y - Y(\lambda)X, Z\right\rangle = 0 \Rightarrow X(\lambda)Y - Y(\lambda)X = 0.$$

para todo X,Y,Z tangentes a $int(M_1)$. Logo, $X(\lambda) = 0$ e $Y(\lambda) = 0$, ou seja, λ será constante.

Devido a função $\langle H,H\rangle$ ser analítica em M e igual a λ^2 em M_1, tem-se que $\langle H,H\rangle$ ou é constante em toda M ou não é constante em qualquer aberto de M.

No primeiro caso temos que o vetor curvatura média H é paralelo e aplicando um resultado de Chen e You, Lema 2.3 e Lema 2.2, temos que M é uma superfície como descrita no teorema.

No segundo caso, temos $int(M_1)$ vazio e portanto pelo Lema 3.1 tem-se que o tensor curvatura normal K^N é nula em M.

Estes fatos ficam sumarizados no seguinte lema.

Lema 3.2. *Sob as hipóteses do Teorema Principal, ou M é uma superfície mínima de uma hiperesfera de $R^m(c)$ ou M tem o tensor curvatura normal nulo.*

Agora, assumiremos que o tensor curvatura normal K^N de M é nulo. Seja $T_p^{\perp}M$ o espaço normal de M em $R^m(c)$ no ponto $p \in M$, colocaremos $N_p = \{\xi \in T_p^{\perp}M; \langle \xi, H\rangle = 0\}$. Vamos definir uma aplicação linear γ entre N_p e o espaço das matrizes de ordem 2, simétricas:

$$\gamma(\xi) = A_\xi \tag{3.12}$$

Consideremos $O_p = \gamma^{-1}(0)$ e $N_p^{'}$ o subespaço de N_p dado por

$$N_p = N_p^{'} \oplus O_p, \qquad N_p^{'} \perp O_p$$

Definimos $M_2 = \{p \in \mathrm{M}/dimN_p^{'} = 0\}$ e $M_3 = \{p \in M/dimN_p^{'} = 1\}$. Então $M = M_2 \cup M_3$. De fato, para todo $p \in M$ podemos ter $\gamma = 0$ ou $\gamma \neq 0$. Se $\gamma = 0$ então $dimN_p^{'} = dimIm(\gamma) = 0$ e assim $p \in M_2$.Por outro lado, se $\gamma \neq 0$, sabemos, pela proposição 2.2, que existe uma base β de T_pM que diagonaliza simultaneamente todos os A_ξ com $\xi \perp H$, isto é, $[A_\xi]_\beta = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, assim se $\gamma \neq 0$ então $dimN_p^{'} = dimIm(\gamma) = 1$, ou seja, $p \in M_3$.

Além disso, é fácil ver que M_3 é um subconjunto aberto de M. Com efeito, para todo $p \in M_3$ tem-se $dimIm(\gamma) = dimN_p^{'} = 1$, ou seja, $dimIm(\gamma) \neq 0$. Porém, isso acontece se, e somente se, existe $\eta \in N_p$ tal que $\gamma(\eta) = A_\eta \neq 0$. Vamos utilizar $\gamma(p, \eta) = A_\eta$, com $p \in M$ e $\eta \in T_p^{\perp}M(\eta \perp H)$, para denotar γ. Logo como γ é contínua então existe um aberto $V \subset M_3$ com $p \in V$ e $\gamma(q, \eta) \neq 0$ para todo $q \in V$, isso nos diz que V é uma vizinhança aberta de p em M_3, e portanto, M_3 é aberto.

Lema 3.3. *O fecho de cada componente de $int(M_2)$ está em uma subvariedade totalmente geodésica 3-dimensional de $R^m(c)$.*

Demonstração. Uma vez que $Imh = \{h(X,Y)/X, Y \in \chi(M)\}$, em $p \in$int(M_2) tem-se $A_\eta = 0, \forall \eta \in N_p$, daí $\langle h(X.Y), \eta\rangle = \langle A_\eta(X), Y\rangle = 0$, para todo $\eta \in N_p(\eta \perp H)$, então h está na direçao de H, para todo $p \in$int(m_2), assim $Imh = spn\{H\}$. Logo, Imh é um subfibrado normal de dimensão 1 sobre M_2 e também é paralelo, então o resultado de Erbacher, corolário (2.1), implica que cada componente conexa de $int(M_2)$ e assim seu fecho está uma subvariedade totalmente geodésica de dimensão 3 de $R^m(c)$.

■

Lema 3.4. *O fecho de cada componente conexa de M_3 está em uma subvariedade totalmente geodésica 4-dimensional em $R^m(c)$.*

Demonstração. Consideremos uma componente conexa M_3^0 de M_3. Considerando que $dimN_p^{'} = 1$ para cada $p \in M_3^0$, podemos escolher um vetor $\xi_4 \in N_p^{'}$. Assim temos :

$$A_r = 0, \qquad r = 5, ..., m \tag{3.13}$$

Utilizando a equação (3.3), obtemos:

$$\langle(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z), \xi_r\rangle = \langle\nabla_X^{\perp}(h(Y,Z)), \xi_r\rangle = -\langle h(Y,Z), \nabla_X^{\perp}\xi_r\rangle$$

Observando a igualdade anterior e a equaçao de Codazzi,(3.4), vemos que:

$$\langle h(Y,Z), \nabla_X^{\perp}\xi_r\rangle = \langle h(X,Z), \nabla_Y^{\perp}\xi_r\rangle \qquad r = 5, ..., m \tag{3.14}$$

Fazendo

$$\nabla_X^{\perp}\xi_r = \sum_{s=3}^{m} \omega_r^s(X)\xi_s, \qquad r = 3, ..., m \tag{3.15}$$

temos $\omega_r^s(X) + \omega_s^r(X) = 0$. Além disso, usando que $\nabla_X^{\perp}\xi_3 = 0$ vemos que $\omega_r^3 = 0$. Consequentemente a partir de (3.14) e (3.15) obtemos a seguinte igualdade,

$$\omega_r^4(X)\langle A_4(Y), Z\rangle = \omega_r^4(Y)\langle A_4(X), Z\rangle \qquad r = 5, ..., m \tag{3.16}$$

Uma vez que A_4 é não-singular em M_3, tem-se de (3.16) que $\omega_r^4 = 0$ para cada $r = 5, ..., m$. Por outro lado, usando que $\omega_3^4 = 0$ e ω_r^s é anti-simétrico obtemos que ξ_4 é paralelo. Concluímos portanto que Imh é um subfibrado normal bi-dimensional e paralelo sobre $int(M_3)$. Assim, o resultado de Erbacher, corolário (2.1), implica que cada componente de M_3 está em uma subvariedade 4-dimensional e totalmente geodésica de $R^m(c)$. ■

Lema 3.5. *Se K^N é identicamente nulo então ou M_2 é a superfície M inteira ou o fecho de M_3 é toda a superfície M.*

Demonstração. O subconjunto M_2 é fechado em M. Se M_2 é um subconjunto próprio de M então M_3 é um subconjunto não-vazio e aberto de M. Assumiremos que M_2 tem interior não-vazio e que p é um ponto comum aos bordos de $int(M_2)$ e M_3. Então devido ao anulamento de K^N pela proposição (2.1) garantimos a existência de $(m-2)$ campos vetoriais ortonormais $\eta_3, ..., \eta_m$ em uma vizinhança U de $p \in M$, suficientemente pequena tal que η_r é paralelo no fibrado normal (veja a Proposição 1.1 de [1] pag 99). Além disso, uma vez que ξ_3 é paralelo em M e $\xi_4 \in N'$ é paralelo em M_3, a proposição (2.3) nos diz que podemos escolher $\eta_3, ..., \eta_m$ em U tais que $\eta_3 = \xi_3$ em U e $\eta_4 = \xi_4$ em $U \cap M_3$.
Seja x_1, x_2 um sistema de coordenadas isotérmicas em U, com o tensor métrico induzido g dado por

$$g = E((dx_1)^2 + (dx_2)^2)$$

Consideramos $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e definimos:

$$L = h(X_1, X_1); M = h(X_1, X_2) \text{ e } N = h(X_2, X_2)$$

Então, de acordo com (2.15) e (2.16), obtemos:

$$\nabla^\perp_{X_2}(\frac{L-N}{2}) - \nabla^\perp_{X_1} M = -E\nabla^\perp_{X_2} H \tag{3.17}$$

$$\nabla^\perp_{X_1}(\frac{L-N}{2}) - \nabla^\perp_{X_2} M = -E\nabla^\perp_{X_1} H \tag{3.18}$$

Considerando que η_4 é uma seção mínima no fibrado normal e ainda das equações (3.17) e (3.18) temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\langle\frac{L-N}{2},\eta_4\rangle - \frac{\partial}{\partial x_1}\langle M,\eta_4\rangle = 0 \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\langle\frac{L-N}{2},\eta_4\rangle + \frac{\partial}{\partial x_2}\langle M,\eta_4\rangle = 0 \tag{3.20}$$

Isso implica a analiticidade da função $f(z)$, em que $z = x_1 + ix_2$, dada abaixo:

$$f = \langle\frac{L-N}{2},\eta_4\rangle - \langle M,\eta_4\rangle i, i = \sqrt{-1}$$

Desse modo, devemos ter $f \equiv 0$ em U, uma vez que no subconjunto aberto e não-vazio $U \cap M_2$ a função f é nula. Em particular, temos então:

$$\langle L,\eta_4\rangle = \langle N,\eta_4\rangle \tag{3.21}$$

Por outro lado, uma vez que η_4 é uma seção mínima

$$\langle L,\eta_4\rangle + \langle N,\eta_4\rangle = 0 \tag{3.22}$$

Assim provamos que $A_{\eta 4} = 0$ em $U \cap M_3$. Isso contradiz a definição de M_3 e portanto o Lema está provado. ■

3.2 Demonstração do Teorema Principal:

Veremos a seguir, a demonstração do teorema principal desta dissertação, que será feita utilizando-se os lemas 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 vistos anteriormente.

Teorema Principal. *Seja M uma superfície analítica em uma variedade Riemanniana $R^m(c)$, completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante igual a c. Se M tem vetor curvatura média normalizado paralelo, então ou M está em uma hiperesfera de $R^m(c)$ como uma superfície mínima ou M está em uma subvariedade totalmente geodésica de $R^m(c)$.*

Demonstração. Para demonstrar o *Teorema Principal*, observamos pelos lemas 3.2, 3.3 e 3.5 que uma das 3 afirmações seguintes é válida:

(i) A superfície M é mínima em uma hiperesfera de $R^m(c)$;

(ii) A superfície M está em uma subvariedade 3-dimensional de $R^m(c)$;

(iii) O fecho de M_3 é toda a superfície M e o tensor curvatura normal é identicamente zero em M.

No caso em que a terceira afirmação acima é válida e que M_3 tenha apenas uma componente conexa, então pelo lema 3.4, a superfície M está em uma subvariedade totalmente geodésica 4-dimensional de $R^m(c)$ e o teorema principal é verdadeiro.

Agora assumamos que aconteça (iii) mas que M_3 tenha mais de uma componente conexa. Sejam N_1 e N_2 componentes de M_3 tais que N_1 e N_2 tenham um ponto $p \in \partial N_1 \cap \partial N_2$ em comum. Devido o anulamento de K^N em M e a proposição 2.1, existe uma vizinhança U de p suficientemente pequena e existem $m-2$ campos ,normais unitários e mutuamente ortogonais, paralelos em U, digamos $\eta_3, ..., \eta_m$ tais que $\eta_3 = \xi_3 = \frac{H}{|H|}$ em U e $\eta_4 = \xi_4 \in N'$ em $U \cap N_1$. Uma vez que cada η_r com $r = 5, ..., m$ é uma seção mínima paralela em U temos, usando o Lema 2.1, que as funções $f_r(z)$ com $z = x_1 + ix_2$ dadas a seguir são analíticas:

$$f_r = \langle \tfrac{L-N}{2}, \eta_r \rangle + \langle M, \eta_r \rangle \text{ com } r = 5, ..., m$$

Considerando que $\langle L, \eta_r \rangle = \langle M, \eta_r \rangle = \langle N, \eta_r \rangle = 0$ com $r = 5, ..., m$ em $U \cap N_1$, temos $f_r \equiv 0$ em U. Combinando isto com a condição

$$\langle L, \eta_r \rangle + \langle N, \eta_r \rangle = 0 \text{ com } r = 5, ..., m$$

vemos que $A_{\eta_r} \equiv 0$ em U. Isto implica que N_1 e N_2 estão em uma mesma subvariedade totalmente geodésica 4-dimensional de $R^m(c)$. Isto conclui a prova do Teorema Principal.

■

3.3 Aplicação do Teorema Principal

Nesta última seção de nossa dissertação apresentamos a seguinte aplicação do teorema demonstrado na seção anterior:

Aplicação do Teorema Principal. *Seja M uma superfície analítica orientada compacta e de gênero zero em um espaço euclidiano E^m. Se M tem vetor curvatura média normalizado paralelo, então ou M está em uma hiperesfera de E^m como uma superfície mínima ou M está em um espaço linear E^3.*

Demonstração. Seja M uma superfície analítica orientada, compacta e de gênero zero em um espaço euclidiano E^m. Se M tem vetor curvatura média normalizado paralelo, então ou M é uma superfície mínima de uma hiperesfera de E^m ou M tem o tensor curvatura normal nulo. Assumiremos que ocorre o segundo caso. Assim, pela proposição 2.1, existem $(m-2)$ campos normais $\xi_3, ..., \xi_m$ ortonormais e paralelos. Uma vez que $\frac{H}{|H|}$ é unitário, podemos considerar $\xi_3 = \frac{H}{|H|}$. Além disso, sendo M simplesmente conexa, estes campos podem ser escolhidos de modo a estarem globalmente definidos, ou seja, definidos em toda M.

Uma vez que $\xi_4, ..., \xi_m$ são seções mínimas paralelas, o Lema 2.1 mostra que as funções:

$$\varphi_r = \langle \tfrac{L-N}{2}, \xi_r \rangle - \langle M, \xi_r \rangle i$$

com $r = 4, ..., m$ são analíticas em $z = x_1 + x_2 i$. Como M pode ser coberta por um sistema de coordenadas isotérmicas nós obtemos $(m-3)$ diferenciais quadráticas globalmente analíticas ϕ_r, com $r = 4, ..., m$, localmente definidas por $\phi_r = \varphi_r dz^2$. Sendo M uma superfície orientada e compacta de gênero zero, o famoso Teorema de Riemann-Roch, 2.2, implica que $\phi_r \equiv 0$ em toda M. Consequentemente, usando $trA_r = 0$ obtemos que $A_r \equiv 0$ para $r = 4, ..., m$. Como ξ_3 é paralelo, podemos assim concluir que M está em um subespaço linear 3-dimensional de $R^m(c)$. Isto completa a prova do teorema em questão. ■

Referências Bibliográficas

[1] Chen, B. Y., *Geometry of Submanifolds*, New York: M. Dekker, 1973.

[2] Chen, B. Y., *On the surfaces with parallel mean curvature vector*. Indiana Univ. Math. J. 22, 655-666 (1973).

[3] Chen, B. Y., G. D. Ludden, *Surfaces with mean curvature vector parallel in the normal bundle*. Nogoya Math. J. 47, 161-167 (1972).

[4] Chen, B. Y., *Surfaces with Parallel Normalized Mean Curvature Vector*. Mh. Math. 90, 185-194 (1980).

[5] Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - segunda edição.(Projeto Euclides).

[6] Erbacher, J. A., *Reduction of the codimension of an isometric immersion*, J. Diff. Geom. 5, 333 - 340 (1971).

[7] Leung, D. S. P., *The Cauchy problem for surfaces with parrallel normalized mean curvature vector in a four dimensional Riemannian manifold*.

[8] Ruh, E. A., *Minimal immersions of 2-spheres in* S^4, Proc. Amer. Math. Soc. 28, 219 - 222 (1971).

[9] Yau, S. T., *Submanifolds with constant mean curvature*, I. Amer. J. Math. 96, 346 - 366 (1974).