

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CONVEXIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES DE \mathbb{R}^{n+1} COM
CURVATURAS SECCIONAIS NÃO-NEGATIVAS

Clebes do Nascimento Brandão

MANAUS - 2014

Clebes do Nascimento Brandão

**CONVEXIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES DE \mathbb{R}^{n+1} COM
CURVATURAS SECCIONAIS NÃO-NEGATIVAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof^o. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

Manaus, Julho de 2014

Ficha Catalográfica
(Catalogação realizada pela Biblioteca Central da UFAM)

B817c	<p>Brandão, Clebes do Nascimento. Convexidade de hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} com curvaturas seccionais não-negativas / Clebes do Nascimento Brandão. - 2014. 42 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Amazonas. Orientador: Prof. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy.</p> <p>1. Geometria diferencial 2. Curvas 3. Hipersuperfícies I. Tribuzy, Ivan de Azevedo, orientador II. Universidade Federal do Amazonas III. Título</p> <p>CDU (1997): 514.752.6 (043.3)</p>
-------	--

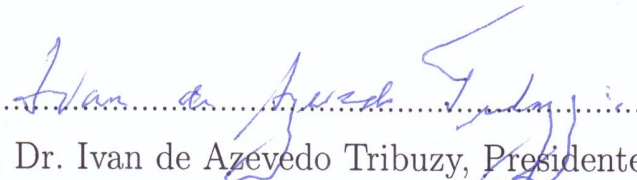
Clebes do Nascimento Brandão

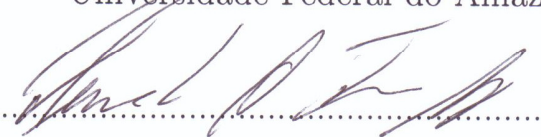
CONVEXIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES DE \mathbb{R}^{n+1} COM CURVATURAS
SECCIONAIS NÃO-NEGATIVAS


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Aprovado em 24 de Julho de 2014.

BANCA EXAMINADORA


.....
Prof.º Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy, Presidente
Universidade Federal do Amazonas


.....
Prof.º Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, Membro
Universidade Federal do Amazonas


.....
Prof.º Dr. Dragomir Mitkov Tsonev, Membro
Universidade Federal do Amazonas - Visitante - Membro Externo

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

Ao Deus e Pai de nosso Senhor e Salvador Jesus Cristo por me permitir mais esta conquista, abençoando-me com saúde, proteção, sabedoria e força de vontade para vencer cada etapa desta jornada.

À minha família, em especial minha mãe Odete, meu padrasto Ilásio, meus irmãos Renã, Renata, Irla e Elaine que suportaram com amor e paciência minha ausência durante o tempo em que estive em Manaus fazendo meu curso. Agradeço pela confiança a mim depositada, pelos incentivos e apoio incondicional. Gostaria de citar o nome de minha sobrinha Eloísa que "chegou" há pouco mais de um ano, e tem sido a alegria de minha casa. Por mais que não estejam presentes fisicamente, agradeço a meus irmãos Gilvan e Ângela (*in memoriam*) pelos ensinamentos e conselhos a mim deixados, a eles dedico.

Aos amigos e professores da área de Matemática da Universidade Federal do Acre - UFAC, que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação acadêmica. Em especial, aos professores Ivan Ramos e Marcos Aurélio, que contribuíram de forma direta para meu ingresso no mestrado incentivando-me e financiando minha estadia durante o tempo em que estive participando do nivelamento. Agradeço mesmo a estes dois pela confiança a mim depositada, e espero sinceramente ter retribuído de forma satisfatória às suas expectativas. Destaco também meus amigos Márcio Costa e José Roberto, pela colaboração.

Aos amigos e professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas - UFAM, que contribuíram direta ou indiretamente em meu mestrado. Em especial, à professora Inês Padilha pela disponibilidade de tempo, auxílio e pela confiança em meu trabalho.

Aos meus amigos da turma de mestrado pelos momentos agradáveis que estivemos juntos durante o tempo em que passei em Manaus: Adrian Vinícius, Andrea Pinto, Camila Pinheiro, Carina Figueiredo, Carla Zeline, Daiana Viana, Francisco Almino, Gustavo Neto, Jefferson Silva, Lauriano de Souza, Marcelo Viana, Marcos Aurélio, Raphael Costa, Silvia Viviane, Soraya Bianca, Thiago Ferreira, Valdenildo Alves. Vocês foram de grande importância em todas as etapas de meu curso, obrigado pela companhia nos momentos de descontração e, principalmente, nos momentos de estudo.

Aos membros da banca examinadora da defesa de dissertação, professores Dragomir Tsonev, Renato Tribuzy e Ivan Tribuzy, pelas sugestões dadas para melhoria desta dissertação escrita. Ao meu orientador, professor Ivan Tribuzy, pela proposta do tema, por sua dedicação e ensinamentos fornecidos durante a realização deste trabalho e pela paciência ao auxiliá-me nos momentos de dúvidas e dificuldades. Mais que um orientador, para mim o senhor foi um pai. Seus valiosos conselhos sobre a vida e no tocante a minha caminhada no ensino superior estão sendo postos em prática e tenho ganhado muito com isso.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço a todos os meus amigos e irmãos em Cristo da Igreja Evangélica Assembleia de Deus Tradicional do Amazonas (IEADTAM), congregação do Coroado III, por terem me acolhido tão bem. Em especial, agradeço ao irmão José Maria Cascaes e sua esposa, irmã Regina, que sempre me trataram como um filho. A irmã Francisca Santos e seu esposo Cleiton, pelos momentos de confraternização. Agradeço a meus amigos: Alanda e Aline Araújo, Ana Cláudia, Carlos Júnior, Jeferson e Giselle Cascaes, Victor e Jéssica Nunes e ao Wenerson Pattresy pelos momentos agradáveis em que estivemos juntos, principalmente nas reuniões de oração.

A todos, meu muito obrigado!

"Now faith is the substance of things hoped for, the evidence of things not seen.

For by it the elders obtained testimony.

By faith we understand that the worlds by the word of God were created, so that what is seen was not made than is apparent."

"ORA, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam, e a prova das coisas que se não vêem.

Porque por ela os antigos alcançaram testemunho.

Pela fé entendemos que os mundos pela palavra de Deus foram criados; de maneira que aquilo que se vê não foi feito do que é aparente."

*Holy Bible
Bíblia Sagrada*

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar imersões de variedades com curvaturas seccionais não-negativas. Mais precisamente, iremos detalhar um artigo de M. do Carmo e E. Lima, que dá uma nova demonstração de um teorema devido a Sacksteder. Usando argumentos da Topologia Diferencial os dois autores provaram, entre outras coisas, que uma hipersuperfície completa M^n de \mathbb{R}^{n+1} com curvaturas seccionais não-negativas é convexa se pelo menos uma dessas curvaturas seccionais for positiva.

Palavras-chave: *Imersões Isométricas; Curvatura e Convexidade; Teorema de Hadamard.*

Abstract

The aim of this dissertation is to discuss immersions of manifolds with nonnegative sectional curvature. More precisely, we will detail an paper by M. do Carmo and E. Lima, which gives a new proof of a theorem by Sacksteder. Using Differential Topology arguments, the two authors prove, among other things, that a complete hypersurface M^n of \mathbb{R}^{n+1} with non-negative sectional curvature is convex at least one of these sectional curvature is positive.

Keywords: *Isometric Immersions; Curvature and Convexity; Hadamard theorem*

Sumário

Introdução	3
1 Curvatura e Convexidade	4
1.1 Variedades Riemannianas	4
1.2 Imersões Isométricas; Variedades Completas	5
1.2.1 A Segunda Forma Fundamental	7
1.2.2 Hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} e a Aplicação de Gauss	10
1.3 Curvaturas Seccionais	11
1.4 Curvatura e Convexidade: O Teorema de Hadamard	14
2 O Grau de uma Aplicação e Curvatura Total Absoluta	18
2.1 O Grau de uma Aplicação Diferenciável	18
2.1.1 O Grau da Aplicação Normal de Gauss	21
2.2 Curvatura Total Absoluta	21
2.3 A Hessiana e o Gradiente da Função Altura	22
2.4 Uma Generalização do Teorema de Hadamard	27
3 O Teorema Principal	30
3.1 Regiões Normais da Função Altura	30
3.2 Demonstração do Teorema Principal	37
Referências Bibliográficas	41

Introdução

Em 1897 J. Hadamard [12] mostrou que hipersuperfícies M^n do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} conexas e compactas com curvatura de Gauss-Kronecker $K_n > 0$, são mergulhadas e homeomorfas à esfera S^n . A partir daí muitas generalizações foram feitas adaptando as hipóteses sobre a curvatura e considerando novos espaços em que estas hipersuperfícies pudessem ser imersas de forma que resultados análogos fossem obtidos. Por exemplo: Em 1936, J. Stoker [21] generalizou o teorema de Hadamard supondo M^n completa em vez de compacta. Em 1958 S.S. Chern e R.K. Lashof [9] estenderam este resultado para hipersuperfícies compactas com $K_n \geq 0$.

Em 1960, R. Sacksteder [20] generalizou todos estes resultados mostrando que se uma imersão isométrica $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana completa, conexa e orientável no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} possui todas as curvaturas seccionais não negativas e pelo menos uma é positiva, então, $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma subvariedade convexa.

Dizemos que um subconjunto N de uma variedade Riemanniana M é *convexo* se dados p e q pertencentes a N , existe uma geodésica minimal de M ligando p a q , a qual está inteiramente contida em N . Se, além disso, o interior de N é não vazio, diz-se que N é um *corpo convexo*. Uma subvariedade N de uma variedade Riemanniana M é uma *subvariedade convexa* se N é o bordo de um corpo convexo em M .

Usando topologia diferencial, M. do Carmo e E. Lima [6] deram uma prova independente do resultado de Sacksteder, supondo que a segunda forma fundamental é semi-definida e definida em algum ponto de M . Mais precisamente, mostraram o seguinte

Teorema Principal. *Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 1$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana M n -dimensional, de classe C^∞ , completa e orientável no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} cujas curvaturas seccionais são não-negativas e, pelo menos em um ponto,*

são todas positivas. Então:

- (i) M ou é homeomorfa à esfera \mathbb{S}^n ou ao \mathbb{R}^n .
- (ii) $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é o uma subvariedade convexa, em particular φ mergulha M topologicamente como um subconjunto fechado de \mathbb{R}^{n+1} .
- (iii) Para quase todos os pontos $v \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ os hiperplanos que são normais a v intersectam $\varphi(M)$ em um conjunto que, quando não-vazio, ou é um ponto ou é homeomorfo a \mathbb{S}^n .
- (iv) A curvatura total de $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é 2π (se M é compacta) ou $\leq \pi$.

Se, em particular, M é não-compacta e todas as curvaturas seccionais são positivas, então:

- (v) A aplicação normal de Gauss $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ é um difeomorfismo sobre um conjunto aberto contido num hemisfério de \mathbb{S}^n .
- (vi) Um ponto $v_0 \in \mathbb{S}^n$ pode ser escolhido de modo que $\varphi(M)$ seja o gráfico de uma função convexa definida em um conjunto contido num hiperplano normal a v_0 , e em particular, o volume de $\varphi(M)$ é infinito.

Este teorema foi publicado somente em 1972.

A presente dissertação baseia-se principalmente no artigo [6], intitulado *Immersions of Manifolds with non-negative sectional curvatures*, e tem como principal objetivo apresentar uma demonstração do teorema acima. Para tanto organizamos o trabalho em três capítulos, como segue.

No capítulo 1, estabelecemos as notações, definições e resultados fundamentais a serem utilizados no decorrer do trabalho. O capítulo 1 está dividido em 4 seções: Na primeira definimos e mostramos alguns exemplos de variedades Riemannianas. Na segunda introduzimos a noção de Imersão Isométrica; definimos e exibimos alguns exemplos de Variedades Completas; introduzimos o conceito de Segunda Forma Fundamental de uma imersão isométrica e definimos a Aplicação Normal de Gauss. Para finalizar esta seção, demonstramos um fato fundamental que é a Proposição 1.2. Na seção 3, definimos Curvaturas Seccionais e exibimos alguns exemplos e na seção 4 destacamos um resultado (global) devido a Hadamard, a saber, o Teorema 1.1, que mostra que a segunda forma fundamental de uma imersão isométrica

$\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e Convexidade estão fortemente relacionadas.

O capítulo 2 está dividido em quatro seções. Na primeira introduzimos a noção de Grau de uma aplicação diferenciável e mostramos alguns exemplos. Além disso, obtemos uma expressão do grau da aplicação normal de Gauss em termos da curvatura de Gauss-Kronecker. Na segunda seção definimos a Curvatura Total Absoluta da imersão e enunciamos, sem demonstração, o Teorema 2.1, que é devido a Chern e Lashof [9]. Na terceira seção fazemos um breve estudo da matriz Hessiana e do campo Gradiente da Função Altura, bem como destacamos alguns lemas e a Proposição 2.1. Por fim, na quarta seção, demonstramos o Teorema 2.2 e a Proposição 2.2. O Teorema 2.2, principal resultado deste capítulo, é uma generalização do Teorema 1.1, e sua demonstração é uma consequência da Proposição 2.1 complementada com o Teorema 2.1. A Proposição 2.2 será bastante útil na demonstração do Teorema Principal deste trabalho.

No capítulo 3, definimos Regiões Normais da função altura e demonstramos a Proposição 3.1 e o Teorema 3.1, principal resultado deste trabalho. Como já observamos anteriormente, o Teorema 3.1 generaliza o Teorema 2.2. Para finalizar este capítulo, mostramos dois exemplos onde o Teorema 3.1 pode ser aplicado e outro onde o mesmo não pode ser aplicado por não satisfazer suas hipóteses.

Para finalizar esta introdução destacamos que, obviamente, este trabalho não é auto-suficiente. Portanto, sempre que possível indicaremos as principais referências utilizadas no decorrer do texto.

Capítulo 1

Curvatura e Convexidade

Seja $M = M^n$ uma variedade diferenciável (conexa e orientável) de dimensão n - Diferenciável sempre significará de classe C^∞ . Denotaremos por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais diferenciáveis definidas em M e $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M . Se $p \in M$, então T_pM denotará o espaço tangente de M em p e $TM = \{(p, v) : p \in M \text{ e } v \in T_pM\}$ denotará o fibrado tangente de M . Se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o colchete de X e Y é o campo de vetores $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$ definido por $[X, Y] = XY - YX$. Por fim, indicaremos por $\mathbb{S}_r^n(q)$ a esfera do \mathbb{R}^{n+1} , de centro q e raio r , isto é, $\mathbb{S}_r^n(q) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : |\mathbf{x} - q| = r\}$. No caso em que $q = 0$ e $r = 1$ usaremos a notação simplificada e usual $\mathbb{S}_1^n(0) = \mathbb{S}^n$. As principais referências para este capítulo são as seguintes: [1], [2], [3], [8], [10], [11], [15], [17] e [19].

1.1 Variedades Riemannianas

Uma *variedade Riemanniana* é uma variedade diferenciável M e uma escolha, para cada ponto $p \in M$, de um produto interno positivo definido $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM de M em p , que varia diferenciavelmente com p no seguinte sentido: Se X e Y são campos diferenciáveis de vetores em M , então a função $p \mapsto \langle X, Y \rangle_p$ é diferenciável em M . O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (ou simplesmente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quando não houver possibilidade de confusão) é usualmente chamado uma *métrica riemanniana* em M .

Exemplo 1.1. Considere $M = \mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano de dimensão n com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, então a métrica riemanniana de \mathbb{R}^n é o produto interno canônico dado por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. A geometria Riemanniana deste espaço é chamada de geometria métrica euclidiana.

Exemplo 1.2 (O espaço Hiperbólico). *Considere o semi-espaço do \mathbb{R}^n dado por*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

e introduza em \mathbb{H}^n a métrica

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$$

\mathbb{H}^n é chamado o espaço hiperbólico de dimensão n .

A noção natural de equivalência entre duas variedades Riemannianas é a noção de isometria: Sejam M_1^n e M_2^n variedades diferenciáveis. Um difeomorfismo $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um homeomorfismo diferenciável cujo inverso também é diferenciável. Um difeomorfismo $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ entre duas variedades Riemannianas M_1 e M_2 é uma *isometria* se para todo $p \in M_1$ e todo par $X, Y \in T_p M$, tem-se

$$\langle X, Y \rangle = \langle d\varphi_p(X), d\varphi_p(Y) \rangle \quad (1.1)$$

onde, por simplicidade, usamos o mesmo símbolo para indicar as métricas riemannianas de M_1 e M_2 . φ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (1.1).

1.2 Imersões Isométricas; Variedades Completas

Definição 1.1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis.*

- (a) Uma aplicação diferenciável $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é uma *imersão* se a diferencial $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ for injetiva para todo $p \in M_1$.
- (b) Se a imersão $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M_1) \subset M_2$, onde $\varphi(M_1)$ tem a topologia induzida por M_2 , diz-se que φ é um *mergulho*.
- (c) Se $M_1 \subset M_2$ e a inclusão $i : M_1 \hookrightarrow M_2$ é um mergulho, diz-se que M_1 é uma *subvariedade* de M_2 .

Observe que se $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$ é uma imersão, então $n \leq m$ e a diferença $m - n$ é chamada a *codimensão* da imersão φ . No caso em que a codimensão é 1, i.e., $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^{n+1}$, $\varphi(M_1) \subset M_2$ é então denominada uma *hipersuperfície*.

Um resultado interessante é o que mostra ser toda imersão localmente um mergulho: *Seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma imersão da variedade M_1 na variedade M_2 . Para todo $p \in M_1$ existe uma vizinhança $U \subset M_1$ de p tal que a restrição $\varphi : U \rightarrow M_2$ é um mergulho.* Uma demonstração para tal fato pode ser encontrada em [2]. Outro fato fundamental neste mesmo sentido em espaços euclidianos é o famoso Teorema de Whitney: *Dada uma variedade diferenciável M^n , existe sempre uma imersão $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ e um mergulho $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.* Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [18]. Um corolário do Teorema de Whitney é que toda variedade diferenciável M^n pode ser munida de uma métrica Riemanniana. Para mais detalhes, veja [17].

Exemplo 1.3. *Se $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um mergulho, então a imagem $\varphi(M_1)$ é uma subvariedade de M_2 , e a aplicação φ aplica M_1 difeomorficamente sobre $\varphi(M_1)$.*

Exemplo 1.4. *Por sua definição, segue que toda superfície regular $N^k \subset \mathbb{R}^n$, $k \leq n$ é uma variedade diferenciável de dimensão k e que a inclusão $\iota : N^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um mergulho, isto é, N^k é uma subvariedade do \mathbb{R}^n . Se $k = n - 1$, então, pelo visto acima, N^{n-1} é uma hipersuperfície do \mathbb{R}^n .*

Seja M_1^n uma variedade Riemanniana e seja $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^{n+k}$ uma imersão de M_1 em uma variedade Riemanniana M_2 . Dizemos que φ é uma *imersão isométrica* se a condição (1.1) for satisfeita. Em outras palavras, a imersão φ é isométrica se a métrica induzida coincide com a métrica original. Um resultado importante acerca de imersões isométricas é um famoso teorema devido a John Nash que garante que todas as variedades Riemannianas podem ser imersas isometricamente em um espaço euclidiano.

Exemplo 1.5. *Se $\varphi : M_1^{n+k} \rightarrow M_2^k$ é uma aplicação diferenciável e $a \in M_2$ é um valor regular de φ (i.e., $d\varphi$ é sobrejetiva para todo $p \in \varphi^{-1}(a)$), segue-se da forma local das submersões (cf. [19]) que $S = \varphi^{-1}(a)$ é uma subvariedade mergulhada de M_1 de dimensão n . Podemos então considerar a inclusão $\iota : S \hookrightarrow M_1$ de S em M_1 e tomar em S a métrica induzida por ι .*

Um caso particular do exemplo 1.5 é o seguinte:

Exemplo 1.6 (A métrica canônica de \mathbb{S}^n). *Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$. Então 0 é valor regular de f e $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = \mathbb{S}^n$ é a esfera unitária do \mathbb{R}^{n+1} . A métrica induzida por \mathbb{R}^{n+1} em \mathbb{S}^n é chamada a métrica canônica de \mathbb{S}^n .*

A variedade Riemanniana M se torna um espaço métrico se a distância entre dois pontos p e q é definida como o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por parte ligando p a q . Uma variedade é dita ser *completa* se o espaço métrico obtido desta maneira é completo conforme o Teorema de Hopf-Hinow (cf. [2], pg. 162). Como corolários do Teorema de Hopf-Hinow, temos que:

(i) Se M é compacta, então M é completa.

(ii) Uma subvariedade fechada de uma variedade Riemanniana completa é completa na métrica induzida.

Exemplo 1.7. *Como o espaço euclidiano \mathbb{R}^n é completo como espaço métrico (cf. [15], pg. 167) (ou também seus subconjuntos limitados e fechados são compactos), segue pelo teorema de Hopf-Hinow que \mathbb{R}^n é uma variedade completa.*

Pelo item (ii) anterior, as subvariedades fechadas de um espaço euclidiano são completas. Em particular, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.8. *Tomando em \mathbb{S}^n a métrica induzida por ι , segue que \mathbb{S}^n é completa com tal métrica, pois $\mathbb{S}^n = f^{-1}(\{0\})$ é fechado em \mathbb{R}^{n+1} , onde f é a aplicação dada no exemplo 1.6. Portanto \mathbb{S}^n é completa como espaço métrico e, pelo teorema de Hopf-Rinow, é uma variedade completa.*

1.2.1 A Segunda Forma Fundamental

Seja M uma variedade Riemanniana e $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. A aplicação $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ indicará a única conexão Riemanniana de M , conforme o teorema de Levi-Civita, determinada por

$$\begin{cases} X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \end{cases}$$

Considere $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica, onde \overline{M} é uma variedade Riemanniana com conexão $\overline{\nabla}$. Para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p , tal que $\varphi|_U$ é um mergulho de U sobre sua imagem $\varphi(U)$, ou seja, $\varphi(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de \overline{M} . Faremos a convenção usual de identificar U com $\varphi(U)$.

O espaço tangente $T_{\varphi(p)}\overline{M}$ de \overline{M} em $\varphi(p)$ se decompõe em uma soma direta

$$T_{\varphi(p)}\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp,$$

onde identificamos $d\varphi(T_pM)$ com T_pM e denotamos por T_pM^\perp o complemento ortogonal de T_pM em $T_{\varphi(p)}\overline{M}$. O subespaço T_pM^\perp é chamado o *espaço normal* de M no ponto p .

Sejam X e Y campos de vetores de M . Então $d\varphi(X)$ e $d\varphi(Y)$ são campos de vetores definidos ao longo de $\varphi(U)$. Se \overline{X} e \overline{Y} são as extensões de X e de Y em uma vizinhança de $\varphi(p)$ em \overline{M} , definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla_X Y})^\top$$

E, em consequência do teorema de existência e unicidade de Levi-Civita, segue que

$$\overline{\nabla_X Y} = \nabla_X Y + (\nabla_X Y)^\perp \quad (1.2)$$

Denotando por $\alpha(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp$ fica bem definida a aplicação bilinear e simétrica sobre $\mathcal{D}(M)$

$$\begin{aligned} \alpha : T_pM \times T_pM &\rightarrow T_pM^\perp \\ (X, Y) &\rightsquigarrow \alpha(X, Y) = \overline{\nabla_X Y} - \nabla_X Y \end{aligned}$$

Denominada a *Segunda Forma Fundamental* da imersão φ .

Um *campo de vetores normal* ξ é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor ξ_p em $T_pM^\perp \subset T_{\varphi(p)}\overline{M}$. Denotemos por $\mathcal{X}(M)^\perp$ o conjunto de todos os campos de vetores normais diferenciáveis da imersão φ . Por sua definição, segue que $\alpha(X, Y) \in \mathcal{X}(M)^\perp$.

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_pM \quad (1.3)$$

É uma forma bilinear simétrica. Em particular, temos a aplicação

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x) = \langle \alpha(x, x), \eta \rangle$$

Quando não houver possibilidade de confusão, diremos também que a aplicação II_η é a Segunda Forma Fundamental de φ em $p \in M$ segundo η e usaremos a notação $II_\eta(x, y) = H_\eta(x, y)$.

Diremos que a segunda forma fundamental é *semi-definida* em $p \in M$ se $II_\eta(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in T_pM$, e diremos que a segunda forma fundamental é *definida* em $p \in M$ se, $\forall x, y \in T_pM$, $II_\eta(x, y) > 0$.

Proposição 1.1. *Sejam $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 1$ uma imersão isométrica e $p \in M$. Suponha que exista uma vizinhança U de p tal que $\varphi(U)$ está contida no interior de uma esfera $\mathbb{S}_r^n(q)$, passando por $\varphi(p)$. Então a segunda forma fundamental de M em p é definida.*

Demonstração. Considere a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle \varphi(x), \varphi(p) \rangle$. f possui um máximo local em $x = p$. Portanto, $0 = Xf(p) = \langle X, \varphi(p) \rangle$, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Segue que $\varphi(p)$ é normal a M em p . Tome $\eta = -\frac{\varphi(p)}{r}$. Como p é ponto de máximo local de f , temos que se $X \in \mathcal{X}(M)$, então:

$$0 = XXf(p) = \langle \nabla_X X, \varphi(p) + \|X\|^2 \rangle = -\langle \nabla_X X, \eta \rangle + \|X\|^2.$$

Como η é unitário e normal a M em p , segue de (1.3) que $II_\eta(X, X) = \langle \nabla_X X, \eta \rangle$. Portanto, $II_\eta(X, X) \geq \frac{1}{r}\|X\|^2$, donde $II_\eta(X, X)$ é definida. ■

Corolário 1.1. *Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 1$, uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta M . Então existe $p \in M$ tal que a segunda forma fundamental de M em p é definida.*

Demonstração. Como M é compacta, a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|\varphi(x)\|$ assume o máximo em um ponto $p \in M$. Seja $r = \|\varphi(p)\|$. Então, M está contida na esfera \mathbb{S}_r^n , que passa por p . Pela proposição 1.1, a segunda forma fundamental de M em p é definida. ■

Sejam $\eta \in \mathcal{X}(M)^\perp$ e $x \in \mathcal{X}(M)$. Considerando $S_\eta(x) = (\overline{\nabla}_x \eta)^\top$ a componente tangente e $\overline{\nabla}_x \eta^\perp$ a componente normal de $\overline{\nabla}_x \eta$. Como $\forall y \in T_pM$, $\langle y, \eta \rangle = 0$, segue-se a equação de Weingarten

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y), \eta \rangle \quad (1.4)$$

$S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ definida acima é uma aplicação linear auto-adjunta associada a H_η e é chamada operador de forma (ou Segunda Forma Fundamental quando não houver possibilidade de confusão).

1.2.2 Hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} e a Aplicação de Gauss

Considere a hipersuperfície $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ (i.e., φ é uma imersão com codimensão 1) e sejam $p \in M$ e $\eta \in T_p M^\perp$, $|\eta| = 1$. Suponha que M e \overline{M} são orientáveis e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal que diagonaliza S_η , i.e.,

$$S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, 1 \leq i \leq n$$

Tome $\{e_1, \dots, e_n\}$ como base positiva de $T_p M$, então η fica univocamente determinada se exigirmos que $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ seja positiva de $T_p \overline{M}$. Neste caso os e_i são as direções principais e os $\lambda_i = \kappa_i$ são as curvaturas principais, serão os invariantes da imersão.

Definimos

- (a) $\det(S_\eta(p)) = \lambda_1 \dots \lambda_n = K_n(p)$ - Curvatura de Gauss-Kronecker de φ ;
- (b) $\frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = H(p)$ - Curvatura Média de φ .

No caso particular em que $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ podemos definir uma aplicação normal $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ de M na esfera unitária \mathbb{S}^n de \mathbb{R}^{n+1} pela regra $\phi(p) = \eta_p$. Como M é orientada, a aplicação ϕ é globalmente definida e é chamada a *aplicação normal de Gauss* de φ . Observe que, como $T_p M$ e $T_{\phi(p)} \mathbb{S}^n$ são paralelos, ambos podem ser identificados e segue que

$$d\phi_p(x) = -S_\eta(x) \tag{1.5}$$

Ou seja $-S_\eta(x)$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

A aplicação normal de Gauss tem profundas implicações topológicas. Como um exemplo, temos o seguinte fato:

Proposição 1.2. *Seja M^n , $n \geq 2$, uma variedade conexa, compacta e orientável. Se existir uma imersão $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura de Gauss-Kronecker não nula em todos os pontos de M , então M é difeomorfa à esfera \mathbb{S}^n .*

Demonstração. Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação normal de Gauss de φ . Como, para todo $p \in M$,

$$K_n(p) = \det(S_\eta(p)) = (-1)^n \det(d\phi)_p \neq 0,$$

segue-se, pelo Teorema da Aplicação Inversa, que ϕ é um difeomorfismo local. Como M é compacta e conexa, ϕ é uma aplicação de recobrimento (cf. [17]). Como \mathbb{S}^n é simplesmente conexa ($n \geq 2$), ϕ é um difeomorfismo global. ■

1.3 Curvaturas Seccionais

A *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ associa uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M) \quad (1.6)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Exemplo 1.9. Se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. De fato, se indicarmos por $Z = (z_1, \dots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do \mathbb{R}^n , obteremos que

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n)$$

Donde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n),$$

O que implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0,$$

Como havíamos afirmado. ■

Seja (U, \mathbf{x}) um sistema local de coordenadas em torno do ponto $p \in M$. Fazendo $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$ e $\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = R_{ijks}$, temos as seguintes identidades:

$$(a) \quad R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0.$$

$$(b) \quad R_{ijks} = -R_{jiks}.$$

$$(c) \quad R_{ijks} = -R_{jisk}.$$

$$(d) \quad R_{ijks} = R_{ksij}.$$

Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$, o número real

$$K(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado *curvatura seccional* de σ em p .

Seja $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ uma imersão isométrica. Se $p \in M$ e $x, y \in T_p M \subset T_p \overline{M}$ são linearmente independentes, indicando por $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e \overline{M} , respectivamente, no plano gerado por x e y , a fórmula de Gauss (cf. [2], pg 143) relaciona $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ com as segundas formas fundamentais do seguinte modo:

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - |\alpha(x, y)|^2 \quad (1.7)$$

No caso de uma hipersuperfície $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$, a fórmula (1.7) admite uma expressão mais simples. Sejam $p \in M$ e $\eta \in T_p M^\perp$, $|\eta| = 1$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ para a qual $S_\eta = S$ é diagonal, i.e., $S(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$ onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os valores próprios de S . Então (1.7) se escreve

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j \quad (1.8)$$

Exemplo 1.10 (Curvatura de \mathbb{S}^n). A *curvatura seccional* da esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é constante e igual a 1.

Demonstração. De fato, orientando \mathbb{S}^n pelo campo normal unitário $A(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|x| = 1$, segue que a aplicação normal de Gauss é então igual a $-\iota$, onde ι é a identidade

de \mathbb{S}^n . Nestas condições, a aplicação auto-adjunta associada a H_A tem todos os seus autovalores iguais a 1. Isto nos diz que para todo $p \in \mathbb{S}^n$, todo $v \in T_p\mathbb{S}^n$ é um vetor próprio. Pela expressão (1.8), concluímos que qualquer curvatura seccional de \mathbb{S}^n é igual a 1, como havíamos afirmado. ■

Exemplo 1.11 (Curvatura de \mathbb{H}^n). *O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ com a métrica g_{ij} dada no exemplo 1.2 tem curvatura seccional constante igual a -1 .*

Demonstração. Uma demonstração mais detalhada e envolvendo outros resultados sobre \mathbb{H}^n pode ser vista em [2].

Temos $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$. Escrevendo $g^{ij} = x_n^2 \delta_{ij}$ para indicar a matriz inversa de g_{ij} , e fazendo $\log x_n = f$. Nestas condições, indicando $\frac{\partial}{\partial x_j} f = f_j$, temos

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = -2 \frac{\delta_{ik}}{x_n^2} f_j.$$

Com as devidas substituições, os símbolos de Christofel são $\Gamma_{ij}^k = 0$, se os três índices forem distintos, caso contrário, temos

$$\Gamma_{ij}^i = -f_j, \Gamma_{ii}^j = f_j, \Gamma_{ij}^j = -f_i \text{ e } \Gamma_{ii}^i = -f_i$$

Agora, sendo $R_{ijij} = \sum_l R_{ijil} g_{lj} = R_{ijji} \frac{1}{x_n^2}$, temos que a curvatura seccional no plano gerado por $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$ será

$$K_{ij} = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijij} x_n^4 = - \left(- \sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj} \right) x_n^2.$$

se $i \neq j$ e $j \neq n$, teremos

$$K_{ij} = \left(- \frac{1}{x_n^2} \right) x_n^2 = -1;$$

se $i = n, j \neq n$, teremos

$$K_{nj} = (-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn}) F^2 = - \frac{1}{x_n^2} x_n^2 = -1;$$

e por último, se $i \neq j, j = n$, teremos ainda $K_{in} = -1$. Ao fazer a determinação de $R_{ijk}^i, R_{ijk}^j, R_{ijk}^k$ e utilizando o **Corolário 3.5** do Capítulo IV, de [2] (pg. 107), concluímos que a curvatura seccional de \mathbb{H}^n é constante e igual a -1 . ■

1.4 Curvatura e Convexidade: O Teorema de Hadamard

De acordo com Heijenoort [13], uma subvariedade Riemanniana M^n de \mathbb{R}^{n+1} é convexa em $p \in M$ se existir uma vizinhança U de p em M , tal que U está contido em um dos semi-espaços fechados H determinados pelo hiperplano de M em p . Se, além disso, U tem apenas um ponto em comum com o bordo de H , então M é chamada estritamente convexa em p . M é convexa (respect. estritamente convexa) se as condições anteriores forem satisfeitas em qualquer ponto de M .

O seguinte resultado (local) mostra a relação entre a convexidade e as curvaturas seccionais de M em um dado ponto $p \in M$.

Proposição 1.3. *Se a curvatura seccional de M em p é estritamente positiva, então M é estritamente convexa em p . Analogamente, se M é convexa em p , então a curvatura seccional de M em p é não negativa.*

Demonstração.

(i) Assumiremos que p é a origem. Seja $\{e_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) uma base ortonormal do hiperplano tangente H_p onde S_η é diagonal. Sejam $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ e $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ dois vetores em H_p . Então,

$$R(u, v, u, v) = \sum_{i=1}^n u_i u_k v_j v_l R(e_i, e_k, e_j, e_l).$$

Usando a equação de Gauss e denotando por λ_i os valores próprios de S_η , obtemos

$$R(u, v, u, v) = \sum_{i=1, j} (u_i^2 v_j^2 - u_i v_i u_j v_j) \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1, j} (u_i v_j - u_j v_i)^2 \lambda_i \lambda_j.$$

Daí, $K_p > 0$ se, e somente se, todos os λ_i, λ_j são estritamente positivos ou, equivalentemente, se, e somente se, todos os λ_i são ou estritamente positivos, ou estritamente negativos. Portanto,

$K_p > 0 \Leftrightarrow S_\eta$ é definida positiva ou definida negativa em p

e $K_p \geq 0 \Leftrightarrow S_\eta$ é positiva ou negativa.

(ii) Agora, seja e_0 um vetor normal a H_p . Então existe uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, em uma vizinhança de p , M é uma hipersuperfície de equação

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_n)$$

(coordenadas com respeito à base $\{e_i\}$). Por construção, $f(p) = 0$, e p é um ponto crítico de f . Considerando que, para $u, v \in H_p$,

$$\alpha(u, v) = -Hessf(u, v)$$

Concluimos que, se α é definida positiva ou definida negativa em p , o mesmo vale para $(Hessf)_p$ e, portanto, M é localmente um lado de H_p . Por outro lado, se M é convexa em p , sabemos que $(Hessf)_p$ é positiva ou negativa e, portanto, que todos os seus valores próprios são positivos ou negativos. Logo, $K_p \geq 0$.

■

O restante desta seção será dedicado à demonstração do seguinte teorema fundamental (de natureza global), devido a Hadamard [12]. Ele mostra que a segunda forma fundamental de uma imersão isométrica $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e convexidade estão fortemente relacionadas. Após a demonstração faremos alguns comentários que julgamos relevantes sobre este teorema que nos permitirá compreender melhor o desenvolvimento histórico do principal resultado deste trabalho que é o Teorema 3.1, no capítulo 3.

Teorema 1.1 (de Hadamard). *Seja M^n , $n > 1$, Riemanniana, compacta e conexa e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) *A segunda forma fundamental é definida em todo ponto (i.e., $\alpha(X, X) \neq 0$ para todo $X \neq 0$);*
- (2) *M é orientável e a aplicação de Gauss é um difeomorfismo;*
- (3) *A curvatura de Gauss-Kronecker é não nula em todo ponto de M .*

E qualquer uma destas condições implica que a imersão é convexa.

Demonstração. Uma demonstração completa deste resultado pode ser encontrada em [19].

((1) \Rightarrow (2)) Para cada ponto $p \in M$ escolha um vetor normal unitário η_p tal que II_{η_p} é negativa definida. Como a segunda forma fundamental α é sempre definida em todo ponto (i.e., $\alpha(X, X) \neq 0$ para todo $X \neq 0$), temos que η está bem definido e é contínuo em M . Portanto, M é orientável. Consideremos $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação de Gauss. Como α é não degenerada, temos que a aplicação $d\phi_p = -S_\eta$ é não singular e, portanto, ϕ é um difeomorfismo local. Como M é compacta e conexa, ϕ é uma aplicação de recobrimento. Como \mathbb{S}^n é simplesmente conexa ($n \geq 2$), ϕ é um difeomorfismo global.

((2) \Rightarrow (3)) Como ϕ é um difeomorfismo, $d\phi_p = -S_\eta$ é não singular, para todo $p \in M$. Portanto, a curvatura de Gauss-Kronecker é não nula em todo ponto de M ($K_n = \det S_\eta \neq 0$).

((3) \Rightarrow (1)) Pelo corolário da Proposição 1.1, existe $p \in M$ tal que II_{η_p} é definida. Como a curvatura de Gauss-Kronecker é não nula em todo ponto de M , II_{η_p} é não degenerada em todo ponto de M .

Agora, Como a aplicação de Gauss é um difeomorfismo, segue que φ é um mergulho de uma esfera topológica em \mathbb{R}^{n+1} . Pelo teorema de separação de Jordan-Brower, $\varphi(M)$ separa \mathbb{R}^{n+1} em dois conjuntos conexos por arcos, L e I , tais que $\text{fronteira}(L) = \text{fronteira}(I) = \varphi(M)$. Suponha L a parte limitada, e pode-se provar que L é um conjunto convexo, e, portanto, $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma subvariedade convexa. ■

Observação 1.1. *O Teorema de Hadamard foi incluído neste trabalho para completar o texto, tendo em vista que ele é o precursor de uma cadeia de resultados que relacionam a curvatura de uma variedade Riemanniana com sua topologia, inclusive o principal resultado deste trabalho, que é o Teorema 3.1.*

Observação 1.2. *Um fato interessante do Teorema de Hadamard é que a curvatura positiva implica que a imersão é na verdade um mergulho. Observe que este fato não é verdade para curvas no plano; uma curva fechada no plano não é necessariamente convexa. Neste caso, para garantir a convexidade é preciso exigir que não possua pontos duplos.*

Observação 1.3. *O Teorema de Hadamard exige que as segundas formas fundamentais da variedade compacta M sejam sempre definidas, isto implica que a curvatura de Gauss-Kronecker é não nula em todos os pontos de M , o que é equivalente ao fato de que todos os valores próprios da imersão $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ sejam não nulos e tenham sempre o mesmo sinal. O Teorema 2.2, principal resultado do próximo capítulo garantirá a convexidade da imersão φ supondo (além da compacidade de M) apenas que as segundas formas fundamentais de φ sejam semi-definidas (i.e., os valores próprios sejam maiores ou iguais a zero).*

Observação 1.4. *O Teorema de Hadamard garante a convexidade de uma imersão compacta com curvaturas seccionais sempre positivas em \mathbb{R}^{n+1} . Em [19] encontra-se um estudo sobre imersões com curvaturas seccionais não positivas e imersões com curvaturas seccionais identicamente nulas. Sobre as imersões com curvaturas seccionais identicamente nulas, no caso de superfícies em \mathbb{R}^3 temos dois casos: ou temos um ponto parabólico ($k_1 \neq 0, k_2 = 0$) ou um ponto planar ($k_1 = k_2 = 0$). L. Rodrigues, [19], estuda como estes casos se misturam na mesma imersão e conclui que a imersão tem que ser um cilindro. Mais precisamente, lá encontra-se uma demonstração do seguinte teorema (de Hatman-Nirenberg): Se $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão isométrica de uma variedade completa, simplesmente conexa e com curvaturas seccionais identicamente nulas, então M é isométrica a \mathbb{R}^n e f é um cilindro, isto é, $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i v_i + b(x_n)$, onde $b(x_n)$ é uma curva contida num plano de dimensão dois e os v_i 's são vetores constantes perpendiculares a esse plano e perpendiculares também entre eles.*

Capítulo 2

O Grau de uma Aplicação e Curvatura Total Absoluta

Neste capítulo apresentaremos uma generalização do Teorema de Hadamard, a saber, o Teorema 2.2. Este teorema é uma consequência do teorema de Chern-Lashof [9] que relaciona o grau da aplicação normal de Gauss com a curvatura total absoluta (a serem definidas) e a convexidade da imersão. Uma demonstração do Teorema 2.2 também pode ser encontrada em [7]. As principais referências para este capítulo são as seguintes: [1], [3], [6], [9], [14], [17] e [19].

2.1 O Grau de uma Aplicação Diferenciável

Seja $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$ uma aplicação diferenciável de uma variedade diferenciável M_1 em uma variedade diferenciável M_2 . Lembremos que um *ponto crítico* de φ é um ponto $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ não é sobrejetiva. A imagem de um ponto crítico é chamada um *valor crítico* de φ . Os pontos de M_2 que não são valores críticos de φ são chamados *valores regulares* de φ . O fato fundamental relativo a estas definições é o Teorema de Sard: *Os valores críticos de φ constituem um conjunto de medida nula em M_2 . Em consequência, o conjunto dos valores regulares de φ é denso em M_2 .* Para uma demonstração deste fato, veja [14].

Sejam M^n e N^n variedades compactas orientadas de mesma dimensão n . Então, por sua definição, segue-se que toda aplicação contínua $\varphi : M \rightarrow N$ é chamada uma *aplicação própria* (cf. [17], pg 29). Se φ é diferenciável, então, pelo Teorema de Sard, o conjunto dos

valores regulares $p \in N$ de φ é denso em N . Além disso, sendo φ própria, esse conjunto é aberto em N . Seja, pois, $p \in N$ um valor regular de φ . A imagem inversa $\varphi^{-1}(p)$ é uma subvariedade compacta de dimensão 0 de M , donde consiste em um número finito de pontos:

$$\varphi^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\} \subset M.$$

Em cada ponto $p_i \in \varphi^{-1}(p)$, a aplicação linear $d\varphi_{p_i} : T_{p_i}M \rightarrow T_pN$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais orientados em questão. Diremos que o ponto p_i é *positivo* ($p_i > 0$) ou *negativo* ($p_i < 0$) conforme o isomorfismo $d\varphi_{p_i}$ conserve as orientações ou as inverta, respectivamente. Definiremos então o *grau* de φ no valor regular $p \in N$ como o número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em $\varphi^{-1}(p)$. Usaremos a notação $gr_p(\varphi)$ para indicar esse número.

Exemplo 2.1. *Seja $\varphi : M^n \rightarrow M^n$ a aplicação identidade. Todo ponto $p \in M$ é um valor regular de φ e $gr_p(\varphi) = 1$. Agora consideremos uma variedade N^n que é igual a M^n , mas com a orientação oposta. A aplicação identidade $\psi : M^n \rightarrow N^n$ é tal que todo ponto $p \in N$ é um valor regular mas o ponto $p = \varphi^{-1}(p)$ é negativo. Assim, para todo $p \in N$, $gr_p(\psi) = -1$.*

Exemplo 2.2. *Considere a esfera unitária n -dimensional*

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

Definamos uma aplicação diferenciável $\varphi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ pondo $\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$. Em outras palavras: φ é a reflexão relativamente ao hiperplano $x_{n+1} = 0$. Consideremos o ponto $p = (0, \dots, 0, -1)$ em \mathbb{S}^n . Temos $\varphi^{-1}(p) = p_1 = (0, \dots, 0, 1)$. Os espaços tangentes $T_p\mathbb{S}^n$, $T_{p_1}\mathbb{S}^n$ de \mathbb{S}^n nos pontos p e p_1 são "paralelos": como subespaços do \mathbb{R}^{n+1} tais que $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0)$. No que diz respeito à orientação, diremos que uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de um espaço tangente $T_q\mathbb{S}^n$ é positiva se, completando-a com o vetor normal $v = q - 0$ que aponta para o exterior de \mathbb{S}^n , obtivermos uma base positiva $\{e_1, \dots, e_n, v\}$ de \mathbb{R}^{n+1} . Assim, por exemplo, se $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1, 0)$, a base $\{e_1, \dots, e_n\}$ é positiva para o espaço tangente $T_{p_1}\mathbb{S}^n$, pois $v = p_1 - 0 = (0, \dots, 0, 1)$ determina a base positiva $\{e_1, \dots, e_n, v\}$ em \mathbb{R}^{n+1} . Por outro lado, no ponto $p = (0, \dots, 0, -1) = \varphi(p_1)$, a mesma base $\{e_1, \dots, e_n\}$, agora considerada como base de $T_p\mathbb{S}^n$, é negativa, pois $w = p - 0 = (0, \dots, 0, -1)$ determina a base negativa $\{e_1, \dots, e_n, w\}$ para \mathbb{R}^{n+1} . Ora, veja que, indicando por φ_* a transformação linear $d\varphi_{p_1} : T_{p_1}\mathbb{S}^n \rightarrow T_p\mathbb{S}^n$ induzida por φ , tem-se $\varphi_*(e_1) = e_1, \dots,$

$\varphi_*(e_n) = e_n$. Assim, φ_* inverte as orientações e, por conseguinte, o ponto p_1 é negativo. Podemos então afirmar que $gr_p(\varphi) = -1$.

Um fato relevante acerca do grau de uma aplicação diferenciável própria é o seguinte: *Sejam M^n e N^n variedades orientadas, de mesma dimensão n , sendo N conexa, e $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável própria. Então o grau $gr_p(\varphi)$ é o mesmo, qualquer que seja o valor regular $p \in N$.* Para uma demonstração, veja [17], pg 34. Portanto, temos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Dadas as variedades orientadas M^n , N^n , sendo N^n conexa, e uma aplicação diferenciável própria $\varphi : M \rightarrow N$, chamaremos de grau de φ ao número $gr(\varphi)$, igual a $gr_p(\varphi)$ para qualquer valor regular $p \in N$ da aplicação φ .*

Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada. Definiremos, em cada espaço tangente T_pM , o volume do paralelepípedo gerado por n vetores $v_1, \dots, v_n \in T_pM$ através da fórmula

$$vol(v_1, \dots, v_n) = \pm \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}.$$

Observe que o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores v_1, \dots, v_n é uma forma n -linear alternada em T_pM (para mais detalhes veja [17], pg 37 a 54). Portanto, definiremos em M , a forma diferencial ω , de grau n , chamada o elemento do volume de M , pondo, para todo $p \in M$,

$$\omega_p(v_1, \dots, v_n) = vol(v_1, \dots, v_n) = \pm \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)};$$

$$v_1, \dots, v_n \in T_pM.$$

O número real $c = \int_M \omega$ chama-se o volume da variedade Riemanniana M . Quando M é compacta, seu volume é sempre finito. No caso de M não ser compacta seu volume pode ser infinito.

Exemplo 2.3. *Quando $M = M^1$ é uma curva ou $M = M^2$ é uma superfície regular do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , (com a métrica Riemanniana induzida) vemos que o "volume" como foi acima definido coincide com o "comprimento de arco" e a "área de uma superfície" respectivamente.*

O fato interessante nestes termos é que podemos obter uma expressão global para o grau de uma aplicação diferenciável: *Seja N^n uma variedade Riemanniana conexa, orientada, de volume finito $c = \int_M \omega$, e $\varphi : M^n \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável própria. Então $\varphi^*\omega$ é*

uma forma integrável em M e, além disso, tem-se

$$\frac{1}{c} \int_M \varphi^* \omega = gr(\varphi).$$

Para uma demonstração deste fato veja [17], página 57.

2.1.1 O Grau da Aplicação Normal de Gauss

Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Identificando M com $\varphi(M)$, temos que, como subvariedades de \mathbb{R}^{n+1} , M e \mathbb{S}^n estão dotadas de métricas Riemannianas naturais, o produto interno em cada espaço tangente sendo induzido pelo produto interno existente em \mathbb{R}^{n+1} .

Indicaremos com ω o elemento de volume de M e com σ o elemento de volume da esfera \mathbb{S}^n . Indicando por $c_n = \int_{\mathbb{S}^n} \sigma$ o volume da esfera \mathbb{S}^n , temos que o grau da aplicação normal de Gauss $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ é igual a $\frac{1}{c_n} \int_M \phi^* \sigma = gr(\varphi)$. [17] nos mostra que podemos expressar este grau em função da curvatura de Gauss-Kronecker de M , $K_n(p)$ da seguinte forma:

$$gr(\phi) = \frac{1}{c_n} \int_M K_n(p) dp, \quad c_n = \text{volume de } \mathbb{S}^n$$

2.2 Curvatura Total Absoluta

No capítulo anterior definimos a aplicação normal de Gauss como sendo uma aplicação $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$, de M na esfera unitária \mathbb{S}^n de \mathbb{R}^{n+1} , pela regra $\phi(p) = \eta_p$, onde $\eta_p \in T_p M^\perp$. Para o que se segue, daremos uma definição equivalente a esta, como se vê:

Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão e suponhamos M orientada. Seja TM^\perp o espaço fibrado normal de φ e \mathcal{B} o *espaço fibrado normal unitário* correspondente, isto é,

$$\mathcal{B} = \{(p, \eta) : p \in M, \quad \text{e} \quad \eta \in T_p M^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad |\eta| = 1\}$$

Seja $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1} . A aplicação $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S}^n$ dada por $\phi(p, \eta) = \eta$ é chamada a aplicação de Gauss.

Observação 2.1. *A definição dada acima é uma adaptação de uma feita por Chern e Lashof, que em [9] definem a aplicação de Gauss generalizada.*

Sejam $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão e $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação de Gauss, onde \mathcal{B} é o espaço fibrado normal unitário de φ . Seja c_n o volume da esfera unitária \mathbb{S}^n em \mathbb{R}^{n+1} . Com estas notações temos a seguinte

Definição 2.2. *A Curvatura Total Absoluta da imersão φ é*

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathcal{B}} |\det d\phi| d\mathcal{B}.$$

Podemos escolher em cada ponto de \mathcal{B} um vetor normal de maneira natural: num ponto $(p, \eta) \in \mathcal{B}$, o vetor η é normal a \mathcal{B} . Desta forma \mathcal{B} é orientável e, assim, podemos pensar em $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S}^n$ como a aplicação de Gauss usual. Usando a definição de grau topológico em termos de integrais vemos que o grau de ϕ é

$$gr(\phi) = \frac{1}{c_n} \int_{\mathcal{B}} \det \phi d\mathcal{B}.$$

Um resultado interessante, e que nos será bastante útil, é devido a Chern e Lashof [9], que relaciona o grau da aplicação de Gauss com a curvatura total e a convexidade de uma imersão, a saber:

Teorema 2.1 (Chern-Lashof). *Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão da variedade compacta e orientável M e $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação normal de Gauss. Temos as seguintes equivalências:*

- (1) $gr(\phi) = \pm 1$ e a curvatura Gaussiana tem sinal constante;
- (2) A curvatura total é 2π ;
- (3) M é mergulhada como uma subvariedade convexa.

2.3 A Hessiana e o Gradiente da Função Altura

Seja M uma variedade Riemanniana. Pelas considerações da seção 2.1, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, temos:

- (a) Um ponto $p \in M$ é um ponto crítico de f se $Xf(p) = 0$ para todo X em $\mathcal{X}(M)$.

- (b) Se $p \in M$ é crítico, a Hessiana de f em p é a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$, onde (U, \mathbf{x}) é um sistema local de coordenadas ao redor de p .
- (c) O ponto crítico p é chamado *não-degenerado* se a matriz Hessiana é não-singular.
- (d) Se f só tem pontos críticos não-degenerados então f é chamada uma *função de Morse*.

Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientável M e $v \in S^n$. A função $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(p) = \langle \varphi(p), v \rangle$, $p \in M$, é chamada de *função altura*.

Exemplo 2.4. A matriz Hessiana da função altura $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \langle \varphi, v \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, v \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}, v \right\rangle.$$

Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientável M e $\eta \in T_p M^\perp$ unitário. Do exemplo 2.4 temos que a matriz da segunda forma fundamental na direção η é dada pela matriz Hessiana da função altura h , i.e.,

$$\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \cdot \eta = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$$

Deste modo, a matriz Jacobiana da aplicação de Gauss ϕ em p é igual a $-\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, onde h é a função altura na direção $\eta = \eta_p = \phi(p)$. Para uma demonstração destes fatos, Veja [19].

Lema 2.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e orientável cujas curvaturas seccionais são não-negativas e, pelo menos em um ponto, são todas positivas. Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de M no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} e seja $\phi : M \rightarrow S^n$ a aplicação normal de Gauss.*

- (a) *Um ponto $p \in M$ é um ponto crítico da função altura $h = \langle \varphi, v_0 \rangle$, $v_0 \in S^n$ se, e somente se, v_0 é um vetor normal a M em $\varphi(p)$.*
- (b) *Se v_0 é um valor regular de ϕ , todos os pontos críticos de h são não-degenerados e são ou máximos ou mínimos.*

Demonstração.

- (a) p é ponto crítico de h se e somente se $dh_p = \langle d\varphi_p, v_0 \rangle = 0$, ou seja, se e somente se v_0 é normal a M em $\varphi(p)$.
- (b) Pelo item anterior, observe que o hessiano

$$d^2h_p(v) = \langle d^2\varphi_p(v), v_0 \rangle$$

é a segunda forma fundamental de φ na direção v_0 . Como v_0 é um valor regular da aplicação ϕ , $\det(d\phi) \neq 0$. Mas $\det(d\phi)$ é, a menos de um sinal, o determinante da forma quadrática d^2h_p em p . Portanto, p é um ponto crítico não-degenerado de h . Além disso, como as curvaturas seccionais de M são não-negativas, todos os valores próprios de d^2h_p têm o mesmo sinal. Portanto p é ou um máximo, ou um mínimo de h . ■

Seja $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura. O gradiente de h , denotado por $gradh$, é o campo vetorial em M definido por

$$\langle gradh, v \rangle = dh_p(v), \quad \text{para todo } p \in M \text{ e todo } v \in T_pM.$$

Veja que, se p é ponto crítico de h , então $gradh(p) = 0$.

Uma trajetória de $gradh$ é uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\frac{d\gamma}{dt} = gradh(\gamma(t))$. Diz-se que uma trajetória $\gamma(t)$ do gradiente *sai* de um ponto $p \in M$ se $\gamma(0)$ está próximo de p e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = p$. Analogamente, diz-se que a trajetória $\gamma(t)$ *entra* em p se $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = p$.

O lema a seguir encontra-se demonstrado em [4].

Lema 2.2. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica e seja $h(p) = \langle \varphi(p), v \rangle, v \in \mathbb{S}^n$ a função altura em M . Então a trajetória $\gamma(t)$ de $gradh$ é definida para todo $t \in (-\infty, \infty)$.*

Demonstração. Observe que $|gradh| = 1$. De fato, como φ é uma isometria local,

$$\frac{d}{dt}(h \circ \gamma(t)) = dh \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \langle d\varphi(\gamma'(t)), v \rangle = \langle d\varphi(gradh), v \rangle = \langle gradh, v \rangle;$$

por outro lado, pela definição de $gradh$,

$$\frac{d}{dt}(h \circ \gamma(t)) = dh(\gamma'(t)) = dh(gradh) = |gradh|^2$$

Daí, $|gradh|^2 = \langle gradh, v \rangle$ e segue o afirmado.

Agora, suponha que $\gamma(t)$ é definida para $t < t_0$, mas não para $t = t_0$. Então, existe uma sequência $\{t_i\}$, $i = 1, \dots, n$ convergindo para t_0 tal que $\{\gamma(t_i)\}$ não converge. Como $|gradh| \leq 1$, obtemos

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq \int_{t_i}^{t_j} |gradh(\gamma(t))| dt \leq |t_i - t_j|,$$

onde d é a distância na métrica intrínseca de M . Segue que $\{\gamma(t_i)\}$ é uma sequência de Cauchy, e isto contradiz a completude de M . Portanto $\gamma(t)$ é definida para todo $t \in \mathbb{R}$. ■

Uma demonstração do lema a seguir encontra-se em [5]. Uma prova em um contexto mais geral pode ser vista em [22].

Lema 2.3. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e orientável. Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica e suponha que $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é o bordo de um corpo convexo. Então, o fecho $\overline{\varphi(M)}$ da imagem da aplicação normal de Gauss $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ é convexo em \mathbb{S}^n .*

Demonstração. Considere primeiro o caso em que $v_0 = \phi(p_0)$, $v_1 = \phi(p_1)$ não são dois pontos antípodas de \mathbb{S}^n . Seja v um ponto no menor arco da esfera que liga v_0 a v_1 . Considere a função altura $h(p) = \langle \varphi(p), v \rangle$. Como $\varphi(M)$ está contido na intersecção convexa dos semi-espaços limitados pelo hiperplano tangente (não paralelo) em $\varphi(p_0)$ e $\varphi(p_1)$, existe um hiperplano H normal a v tal que $\varphi(M)$ está no mesmo lado de H . Assim, h é limitada. Agora seja $p \in M$ e $\gamma(t)$ a trajetória de $gradh$ com $\gamma(0) = p$. Pelo Lema 2.2, $\gamma(t)$ está definida para $t \in (-\infty, \infty)$. Observe que

$$\frac{dh}{dt}(\gamma(t)) = dh\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \langle gradh(\gamma(t)), \frac{d\gamma}{dt} \rangle = |gradh(\gamma(t))|^2.$$

Como h é limitado em M , e

$$h(\gamma(t)) - h(\gamma(0)) = \int_0^t \frac{d}{dt} h(\gamma(t)) dt = \int_0^t |gradh(\gamma(t))|^2 dt,$$

Concluimos que $|gradh|$ se aproxima arbitrariamente de zero ao longo da trajetória $\gamma(t)$.

Segue que, ou existe um ponto crítico $\gamma(t_0)$, de h , $t_0 \in [0, \infty)$, e então o vetor normal a $\gamma(t_0)$

é v , ou existe uma sequência de pontos em M cujos vetores normais convergem para v . Em qualquer caso, v pertence ao fecho de $\phi(M)$.

Consideremos agora os outros casos. Se algum ou a ambos v_0 e v_1 pertencem ao bordo de $\phi(M)$ e não são antípodas, tomamos o limite de geodésicas mínimas unindo v_n^0 a v_n^1 , em que $\{v_n^0\} \rightarrow v_0$, $\{v_n^1\} \rightarrow v_1$ e nenhum par v_n^0, v_n^1 é antípoda. Se v_0 e v_1 pertencem a $\overline{\phi(M)}$ e são antípodas, tomamos um terceiro ponto $v_2 = \phi(p_2)$, $v_2 \neq v_1, v_2 \neq v_0$ (que existe pela conexidade de M). Pelo argumento anterior, as geodésicas mínimas $\widehat{v_0v_2}, \widehat{v_1v_2}$ pertencem a $\overline{\phi(M)}$. Tomando sequências de pontos sobre $\widehat{v_0v_2}$ e $\widehat{v_1v_2}$, que convergem para v_0 e v_1 , respectivamente, e considerando as geodésicas mínimas que unem estes pontos, segue que $\widehat{v_0v_1}$ pertence a $\overline{\phi(M)}$. ■

Proposição 2.1. *Seja M^n , $n > 1$ uma variedade Riemanniana compacta e conexa. Seja $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura e suponha que todos os seus pontos críticos sejam não degenerados, e sejam pontos de máximo ou pontos de mínimo. Então h possui exatamente dois pontos críticos.*

Demonstração. Pela compacidade de M existe um ponto crítico de h , digamos $p \in M$. Trocando h por $-h$, se necessário, podemos supor que p é mínimo. Segue-se do lema 2.2 que por p passa uma trajetória máxima $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow M$ de $gradh$. Pela demonstração do Lema 2.3, temos que $|gradh|$ se aproxima arbitrariamente de zero ao longo da trajetória $\gamma(t)$. Como o fecho de γ é um conjunto compacto, $|gradh|$ se anula em algum ponto deste fecho. Decorre daí, e do fato que os pontos críticos são pontos de máximo ou de mínimo, que existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = q \in M$, (isto é, $\gamma(t)$ entra em q) e q é um ponto crítico de h . Mostraremos que p e q são os únicos pontos críticos de h . Diremos que o conjunto dos pontos de M onde $h = const. - c$ é a superfície de nível c de h . Se c é um valor regular de h , decorre do teorema da função implícita que a superfície de nível c é uma subvariedade de M de dimensão $n - 1$ (cf. Exemplo 1.5). Além disso, se p é um ponto crítico não-degenerado de máximo ou de mínimo, as superfícies de nível "perto de p " são homeomorfas a esferas S^{n-1} .

Seja S uma superfície de nível de h , suficientemente próxima de q tal que S seja homeomorfa a uma esfera. Seja $A =$ o conjunto dos pontos que são intersecções de S com uma trajetória de $gradh$ saindo de p e entrando em q . Como p e q são pontos de máximo ou de mínimo, A é aberto em S . Por outro lado, como vimos anteriormente, uma trajetória que sai de p e intersecta S em um ponto do complementar de A , entra em um ponto crítico, digamos r ,

que também é um ponto de máximo ou de mínimo. Decorre daí que o complementar de A é aberto em S , e como S é conexo (aqui é usado o fato de que $n > 1$), $A = S$. Portanto todas as trajetórias de $gradh$ que saem de p entram em q . Por um argumento análogo, vê-se que o conjunto de tais trajetórias constitui um conjunto aberto e fechado de M , donde toda a variedade M . Portanto p e q são os únicos pontos críticos de h . ■

2.4 Uma Generalização do Teorema de Hadamard

O Teorema de Hadamard visto no capítulo anterior supõe a hipersuperfície M compacta e exige que as segundas formas fundamentais sejam sempre definidas, isto implica que todos os seus valores próprios sejam não nulos e tenham sempre o mesmo sinal, garantindo assim que a imagem $\varphi(M)$ de M pela imersão isométrica φ é uma subvariedade convexa de \mathbb{R}^{n+1} . Veremos agora que, para garantir a convexidade de $\varphi(M)$, o Teorema 2.2, exige, além da compacidade de M , apenas que as segundas formas fundamentais sejam semi-definidas (i.e., os valores próprios sejam maiores ou iguais a zero). O Teorema 2.2 mostra que o teorema principal é verdadeiro se assumirmos que a variedade M seja compacta.

Teorema 2.2. *Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 1$, uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M compacta, orientável com a propriedade de que todas as segundas formas fundamentais são semi-definidas. Então:*

- (a) $\varphi(M)$ é bordo de um corpo convexo; i.e., M é mergulhada como uma subvariedade convexa de \mathbb{R}^{n+1} .
- (b) A curvatura total de $\varphi(M)$ é igual a 2π , em particular, M é homeomorfa à esfera,

Demonstração. Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação normal de Gauss. Pela compacidade de M , existe um ponto $r \in M$, tal que a segunda forma fundamental de $\varphi(r)$ é definida. Isto significa que $d\phi_r$ é não singular e, pelo teorema de Sard, existe um ponto p em uma vizinhança de r , tal que $\phi(p) = v$ é um valor regular de ϕ . Decorre do lema 2.1 que p é um ponto crítico não-degenerado da função altura h e que todos os pontos críticos de h são não-degenerados e são pontos de máximo ou de mínimo. Pela proposição 2.1, h tem exatamente dois pontos críticos, digamos p e q . Segue que a imagem inversa dos valores regulares de ϕ contém apenas um elemento. O grau de ϕ é então ± 1 , e a proposição segue do Teorema 2.1. ■

Para finalizar este capítulo demonstraremos outra proposição que será utilizada no capítulo seguinte.

Proposição 2.2. *Seja M^n , $n > 1$, uma variedade Riemanniana completa e orientável. Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica e suponha que $\varphi(M)$ não está contida em nenhum hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} e que, para cada $p \in M$, $\varphi(M)$ está inteiramente contida em um dos semi-espacos fechados limitados pelo hiperplano tangente $d\varphi_p(T_pM) = T_pM$. Então:*

(a) $\varphi(M)$ é bordo de um corpo convexo;

Se, além disso, a segunda forma fundamental de φ é definida em algum ponto de M , então:

(b) φ é um homeomorfismo e a curvatura total de $\varphi(M)$ é 2π (se M for compacta) ou $\leq \pi$.

Demonstração.

(a) Seja K a intersecção de todos semi-espacos fechados, limitados por T_pM , $p \in M$, contendo $\varphi(M)$. Observe que K é um conjunto convexo fechado de \mathbb{R}^{n+1} . Pela compacidade de M e do fato de que $\varphi(M)$ não está contido em nenhum hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} , segue-se que K contém pontos interiores, portanto é um corpo convexo cujo bordo ∂K contém $\varphi(M)$. Queremos mostrar que $\varphi(M) = \partial K$. Pela classificação de bordos de corpos convexos (ver Busemann [1], pg. 3), ∂K ou é conexo ou a união de dois hiperplanos paralelos. Consideremos, primeiro, o caso ∂K conexo. Evidentemente, $\varphi(M)$ é aberto em ∂K . Mostraremos que $\varphi(M)$ é fechado em ∂K .

Sejam $\varphi(p), \varphi(q) \in \partial K$, $p, q \in M$. De acordo com Busemann [1], pg. 78 – 79, ∂K possui uma métrica intrínseca definida como o ínfimo do comprimento das curvas retificáveis em ∂K . Esta métrica é completa e topologicamente equivalente à métrica induzida em ∂K por $\mathbb{R}^{n+1} \supset \partial K$. Como ∂K é completo na métrica intrínseca, existe um segmento (geodésica minimizante) γ em ∂K unindo $\varphi(p)$ a $\varphi(q)$. Como φ é uma isometria local e $\varphi(M)$ é aberto em ∂K , existe uma vizinhança V de p em M tal que $\left(\varphi|_V\right)^{-1} \circ \gamma$ é uma geodésica em M . Se este "levantamento" não puder ser estendido para toda a geodésica γ , existe uma geodésica em M que não pode ser definida para todos os valores do parâmetro e isto contradiz a completude de M . Segue que γ está inteiramente contida em $\varphi(M)$. Portanto $\varphi(M) \subset \partial K$ é um subespaço métrico de ∂K . Como $\varphi(M)$ é completo, ele é fechado em ∂K . Como supomos ∂K conexo, temos

$$\varphi(M) = \partial K.$$

Se ∂K não for conexo, repetimos o argumento acima para cada componente conexa, o que prova a primeira parte da proposição.

- (b) Para provar a segunda afirmação, observe que a hipótese sobre a segunda forma fundamental implica que ∂K não é nem um cilindro nem a união de dois hiperplanos paralelos. Pela classificação citada acima, ∂K é, então, simplesmente conexo. Por outro lado, como $\varphi : M \rightarrow \partial K$ é uma isometria local sobre $\partial K = \varphi(M)$, e M é completa, φ é uma aplicação de recobrimento (cf. [12], pg. 74). Segue-se que φ é um homeomorfismo. A afirmação sobre a curvatura total de $\varphi(M)$ é então uma consequência do lema 2.3, e isso termina a prova da proposição 2.2.

■

Capítulo 3

O Teorema Principal

Este capítulo tem dois objetivos principais, sendo o primeiro a demonstrar a proposição 3.1 e o segundo a demonstrar o principal resultado deste trabalho, que é o teorema 3.1. A relevância da Proposição 3.1 vem do fato de que ela terá um papel muito importante na demonstração do Teorema Principal. Como veremos, por exemplo, a parte (i) do teorema principal será uma simples consequência desta proposição.

Para demonstrarmos estes resultados precisaremos de algumas definições e lemas que serão dados a seguir.

3.1 Regiões Normais da Função Altura

Seja M^n uma variedade Riemanniana e $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura. Uma *superfície de nível* S_λ de h no nível λ é uma componente conexa do conjunto de nível $h^{-1}(\lambda) = \{p \in M; h(p) = \lambda\}$.

Seja $p \in M$ um ponto crítico de h , isto é, $dh(p) = 0$. Dizemos que a superfície de nível S_λ de h é *normal* em p se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (1) S_λ é homeomorfa a uma esfera S^{n-1} e limita uma região aberta $\Sigma_\lambda \subset M$ que contém p como o único ponto crítico de h ;
- (2) Existe um homeomorfismo θ da bola fechada $B_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq \lambda\} \subset \mathbb{R}^n$ sobre o fecho $\bar{\Sigma}_\lambda$ de Σ_λ , tal que a imagem, por este homeomorfismo, de cada esfera $\mathbb{S}_\alpha^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = \alpha\}$, $\alpha \leq \lambda$, é uma superfície de nível S_α .

Se estas condições forem satisfeitas, diremos que Σ_λ é uma *região normal* de p e λ o *valor normal* de h em relação a p . Observe que as superfícies de nível de h próximas de p são normais a p . Pela condição (2), segue-se que se a superfície de nível S tem um ponto na região normal Σ_λ , então $S \subset \Sigma_\lambda$, e S é uma superfície normal. Observe também que se S_λ é uma superfície de nível normal que não contém pontos críticos de h , então existe uma superfície de nível S_{λ_1} , $\lambda_1 > \lambda$.

Indicaremos por Σ a união de todas as regiões normais que contêm o ponto crítico p , por $\partial\Sigma$ o bordo de Σ e por λ^* o supremo dos valores normais. Σ é um conjunto não vazio aberto de M e tem uma das seguintes possibilidades mutuamente exclusivas:

- (a) $\Sigma = M$;
- (b) $\Sigma \neq M$ e o bordo $\partial\Sigma$ de Σ contém um ponto crítico de h ;
- (c) $\Sigma \neq M$ e $\partial\Sigma$ não contém nenhum ponto crítico de h .

A seguir faremos um breve estudo das três possibilidades acima.

Suponha que (a) ocorre. Temos o seguinte lema:

Lema 3.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$ um ponto crítico da função altura $h : M \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\Sigma = M$, então p é único ponto crítico de h e todas as trajetórias de $\text{grad}h$ que saem de p cobrem M .*

Demonstração. De fato. Se $\Sigma = M$ então todas as superfícies de nível de h são normais em p e p é o único ponto crítico de h em M . Seja $r \neq p$ um ponto arbitrário de M . Seja S a superfície de nível de h que passa por r e $\gamma(t)$ uma trajetória de $\text{grad}h$, com $\gamma(0) = r$. Veja que, para $t < 0$, $\gamma(t)$ pertence ao fecho (compacto) $\bar{\Sigma}$ da região Σ delimitada por S . Pela compacidade de $\bar{\Sigma}$, e pelo Lema 2.2, $\gamma(t)$ é definida para todos os $t \leq 0$ e, como h é limitada em $\bar{\Sigma}$, pela demonstração do Lema 2.3, $|\text{grad}h|$ se aproxima arbitrariamente de zero em $\gamma((-\infty, 0])$. Segue-se que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = p$, isto é, $\gamma(t)$ sai de p . Como r é arbitrário, concluímos que M é coberta pelas trajetórias de $\text{grad}h$ saindo de p . ■

Suponha que (b) ocorre. Temos o seguinte Lema:

Lema 3.2. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$ um ponto crítico da função altura $h : M \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que $\Sigma \neq M$ e o bordo $\partial\Sigma$ de Σ contém um ponto crítico de h . Então, h tem dois pontos críticos p e q , e as trajetórias de $\text{grad}h$ que saem de p e entram em q cobrem M .*

Demonstração. Pelo argumento anterior e do fato de que as superfícies de nível perto q são novamente homeomorfas a esferas, obtemos que qualquer trajetória de $\text{grad}h$ que passa em q parte de p . Portanto q é um máximo e, trocando os papéis de p e q , temos que as trajetórias de $\text{grad}h$ partindo de p entram em q . Pelo mesmo argumento, estas trajetórias cobrem um conjunto aberto e fechado de M , daí a toda variedade M . ■

Suponha que (c) ocorre. Temos então os seguintes lemas:

Lema 3.3. *Sejam M uma variedade Riemanniana, $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura e $p \in M$ um ponto crítico de h . Suponha que h não possui pontos críticos em $\partial\Sigma$. Então $\partial\Sigma$ é a união de superfícies de nível de h ao nível λ^* .*

Demonstração. Mostraremos primeiro que $\partial\Sigma \subset h^{-1}(\lambda^*)$, isto é, se $q \in \partial\Sigma$, então $h(q) = \lambda^*$. Como $h(m) \leq \lambda^*$, para todo $m \in \Sigma$, segue, da continuidade de h , que $h(q) \leq \lambda^*$. Suponha que $h(q) = \lambda < \lambda^*$, $q \in \partial\Sigma$. Como λ é um valor normal existe uma superfície de nível normal $S_\lambda \subset \Sigma$. S_λ é compacta e não possui pontos críticos de h . Portanto existe uma vizinhança W de S_λ em M que contém todos os pontos de h cujos níveis estão suficientemente próximo de λ . Seja q_n uma sequência de pontos em Σ tal que q_n converge para q . Como h é contínua, $h(q_n)$ converge para λ . Portanto, se n é suficientemente grande, então $q_n \in W$. Deste modo, $q \in S_\lambda$, o que contradiz o fato de que $q \in \partial\Sigma$. Logo, $h(q) = \lambda^*$.

Agora, seja S_{λ^*} uma superfície de nível passando por $q \in \partial\Sigma$. Afirmamos que $S_{\lambda^*} \subset \partial\Sigma$. De fato, seja $A = S_{\lambda^*} \cap \partial\Sigma$. Como S_{λ^*} e $\partial\Sigma$ são fechados A é fechado em S_{λ^*} . Para mostrar que A é aberto em S_{λ^*} , tome $r \in A$ e veja que, como r não é um ponto crítico de h , podemos escolher uma vizinhança V de r em M tal que o fecho \bar{V} de V não contém pontos críticos de h , e que todos os pontos em V no nível λ^* estão em $V \cap S_{\lambda^*}$. Agora, usando as trajetórias de $\text{grad}h$, que preenchem uma vizinhança W de $V \cap S_{\lambda^*}$ em M temos que, como $r \in V \cap S_{\lambda^*}$ e $r \in \partial\Sigma$, existe um ponto $s \in \Sigma \cap W$ na trajetória que passa por r , e, portanto, existe uma vizinhança U de s , $U \subset \Sigma \cap M$. Projetando U em $V \cap S_{\lambda^*}$ ao longo das trajetórias, temos

uma vizinhança de r em S_{λ^*} , que está inteiramente contida em $\partial\Sigma$. Segue-se que A é aberto e por conexidade $A = S_{\lambda^*}$ como afirmamos.

Pelo exposto acima, concluímos que $\partial\Sigma$ é uma união de superfícies de nível do nível λ^* . ■

Considerando as notações do Lema 3.3, observe que se $q \in \partial\Sigma$, existe uma trajetória $\gamma_q(t)$ de $gradh$, com $\gamma_q(0) = q$. Para $t < 0$ pequeno, $\gamma_q(t)$ interceptará uma superfície de nível que contém um ponto de Σ suficientemente perto de q , portanto, $\gamma_q(t) \in \Sigma$. Pela demonstração do Lema 3.1, segue que $\gamma_q(t)$ sai de p . Pela ausência de pontos críticos em $\bar{\Sigma} - \{q\}$, segue-se que podemos parametrizar uma tal trajetória no intervalo $[\lambda_0, \lambda^*]$, $\lambda_0 \neq 0$, tal que $h(\gamma_q(\lambda)) = \lambda$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda^*]$. Como $\gamma_q(\lambda)$ é diferenciável em $[\lambda_0, \lambda^*]$ e $\gamma'_q(\lambda)$ é ortogonal ao espaço tangente de S_λ em $\gamma_q(\lambda)$, segue-se que o espaço tangente de $\partial\Sigma$ em q é o limite quando $\lambda \rightarrow \lambda^*$ do espaço tangente de S_λ em $\gamma_q(\lambda)$.

Agora seja $\phi(p) = v_0$, $p \in M$, um valor regular da aplicação normal de Gauss ϕ . Seja $S_\lambda \subset \Sigma$, $0 \neq \lambda \leq \lambda^*$, uma superfície de nível, em Σ , e denote por $y : S_\lambda \rightarrow \mathbb{R}_\lambda^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a restrição da imersão $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a S_λ , onde \mathbb{R}_λ^n denota o hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} que contém $\varphi(S_\lambda)$. Nestas condições temos os seguintes lemas:

Lema 3.4. *As segundas formas fundamentais da imersão $y : S_\lambda \rightarrow \mathbb{R}_\lambda^n$, $0 \neq \lambda \leq \lambda^*$, são semi-definidas.*

Demonstração. Seja $q \in S_\lambda$. Então

$$\langle dy_q(v), v_0 \rangle = 0$$

e

$$\langle d^2y_q(v), v_0 \rangle = 0$$

Para qualquer vetor $v \in T_q S_\lambda$, no espaço tangente de S_λ em q . Seja v o vetor normal unitário de $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ em $\varphi(q)$, e v_y o vetor normal unitário de $y(S_\lambda) \subset \mathbb{R}_\lambda^n$ em $y(q) = \varphi(q)$. Então, v , v_y e v_0 são ortogonais em $d\varphi(T_q S_\lambda)$ e $\langle v_0, v_y \rangle = 0$. Consequentemente,

$$v = \alpha v_y + \beta v_0$$

Onde $\langle v, v_y \rangle$ é diferente de zero pelo fato de q não ser um ponto crítico. Portanto, para qualquer vetor $v \in T_q S_\lambda$,

$$\langle d^2 y_q(v), v_y \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle d^2 y_q(v), v \rangle$$

Como α é uma função contínua diferente de zero no conjunto conexo $\bar{\Sigma} - \{p\}$, o Lema 3.4 é verificado. ■

Lema 3.5. $\partial\Sigma$ é não compacto e a curvatura total de $y(\partial\Sigma) \subset \mathbb{R}_\lambda^n$ é igual a 2π .

Demonstração. Primeiro considere o caso $n > 2$. Como S_λ é compacta para $\lambda < \lambda^*$, pelo Teorema 2.2, segue-se que a curvatura total de $y(S_\lambda) \subset \mathbb{R}_\lambda^n$, $\lambda < \lambda^*$, é 2π . Como parte integrante, a curvatura total é uma função contínua do parâmetro λ , daí a curvatura total de $y(\partial\Sigma)$ é 2π . Além disso, a superfície de nível $S_{\lambda^*} \subset \partial\Sigma$ é não compacta; caso contrário, pelo Teorema 2.2, é homeomorfa a uma esfera e, como $\partial\Sigma$ não contém pontos críticos, existe um valor normal $\lambda > \lambda^*$, o que é uma contradição. Portanto $\partial\Sigma$ não é compacto, e isso prova o lema para o caso $n > 2$.

Para $n = 2$, o Teorema 2.2 não pode ser aplicado e devemos argumentar diretamente. Tudo o que precisamos mostrar é que, para qualquer círculo S_λ , $\lambda < \lambda^*$, a curvatura total da curva planar fechada $y(S_\lambda)$ é igual a 2π . Isto é claramente verdadeiro próximo de p . Por outro lado, os únicos outros valores possíveis são múltiplos inteiros de 2π . Por continuidade, o valor deve ser de 2π para todo λ , o que finaliza o lema. ■

Lema 3.6. Para cada $q \in \partial\Sigma$, $y(\partial\Sigma) \subset \mathbb{R}_{\lambda^*}^n$ está inteiramente contida em um dos semi-espaços fechados de $\mathbb{R}_{\lambda^*}^n$ limitados pelo hiperplano tangente $dy_q(\partial\Sigma_q) = T$ de $y(\partial\Sigma)$ em $y(q)$.

Demonstração. Projete os conjuntos $y(S_\lambda) \subset \mathbb{R}_\lambda^n$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda^*]$, sobre $\mathbb{R}_{\lambda^*}^n$, usando o vetor normal v_0 , e identifique os conjuntos projetados com suas projeções. Para cada $\varphi(q) \in \varphi(\partial\Sigma)$, denote por $\psi_q(\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda^*]$ a curva contínua obtida pela projeção $\varphi(\gamma_q(\lambda))$ em $\mathbb{R}_{\lambda^*}^n$.

Agora, suponha que existem pontos $\varphi(q_1)$ e $\varphi(q_2)$, $q_1, q_2 \in \partial\Sigma$, em ambos os lados de T . Por continuidade e as observações feitas anteriormente no Lema 3.4, T é o limite quando $\lambda \rightarrow \lambda^*$, dos espaços tangentes T_λ de $\varphi(S_\lambda)$ em $\psi_q(\lambda)$. Portanto, pode-se escolher um $\lambda' \in [\lambda_0, \lambda^*]$, perto de λ^* , tal que $\varphi(q_1)$ e $\varphi(q_2)$ estão em lados diferentes de $T_{\lambda'}$, com $\lambda > \lambda'$. Como $\psi_{q_1}(\lambda)$

e $\psi_{q_2}(\lambda)$ convergem para $\varphi(q_1)$ e $\varphi(q_2)$, respectivamente, quando $\lambda \rightarrow \lambda^*$, existe um $\lambda'' > \lambda'$ tal que $\psi_{q_1}(\lambda'')$ e $\psi_{q_2}(\lambda'')$ estão em lados diferentes de $T_{\lambda''}$. Mas isto significa que $\varphi(S_{\lambda''})$ terá pontos em lados diferentes de alguns dos seus espaços tangentes, o que contradiz a convexidade de $\varphi(S_{\lambda''})$ e isto prova o lema. ■

Passaremos agora à proposição 3.1.

Proposição 3.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana, completa e orientável com curvaturas seccionais não-negativas e suponha que pelo menos em um ponto são todas positivas. Sejam $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de M no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} e $\phi(p) = v_0$, $p \in M$, um valor regular da aplicação normal de Gauss ϕ . Então:*

(a) *A função altura $h = \langle \varphi, v_0 \rangle$ tem apenas um ponto crítico p , e as trajetórias de $\text{grad}h$ que saem de p cobrem M .*

ou

(b) *h tem dois pontos críticos p e q , e as trajetórias de $\text{grad}h$ que saem de p e entram em q cobrem M .*

Em qualquer caso, os hiperplanos que são normais a v_0 intersectam $\varphi(M)$ em um conjunto que, quando não-vazio, ou é um ponto ou é homeomorfo a S^n .

Demonstração. Com as hipóteses do teorema, pelo Lema 2.1, todos os pontos críticos de h são não-degenerados e são máximos ou mínimos, e p é um ponto crítico de h . Suponha que p seja mínimo e que $h(p) = 0$. Sejam Σ a união de todas as regiões normais que contém p e λ^* o supremo dos valores normais de h relativos a p . Como vimos anteriormente, Σ tem as seguintes possibilidades mutuamente exclusivas:

(a) $\Sigma = M$. Neste caso, pelo Lema 3.1, p é único ponto crítico de h e todas as trajetórias de $\text{grad}h$ que saem de p cobrem M .

(b) $\Sigma \neq M$ e o bordo $\partial\Sigma$ de Σ contém um ponto crítico de h . Neste caso, pelo Lema 3.2, $\bar{\Sigma}$ tem dois pontos críticos p e q , e as trajetórias de $\text{grad}h$ que saem de p e entram em q cobrem M .

(c) $\Sigma \neq M$ e $\partial\Sigma$ não contém nenhum ponto crítico de h . Vamos mostrar que isto não pode acontecer e, pelo visto acima, provaremos a proposição 3.

De fato, seja $S_\lambda \subset \Sigma$, $0 \neq \lambda \leq \lambda^*$, uma superfície de nível, em Σ , e $y : S_\lambda \rightarrow \mathbb{R}_\lambda^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a restrição da imersão φ a S_λ . Veja que $\varphi(\partial\Sigma)$ não está contido em um hiperplano de \mathbb{R}^n , caso contrário a sua curvatura total seria igual a zero, o que contradiz o Lema 3.5. Analogamente, a segunda forma fundamental de y é definida em algum ponto de $\partial\Sigma$. Como $\partial\Sigma$ é não compacto, e é completa em cada componente conexa, segue-se do Lema 3.4 e Proposição 2.1, que a curvatura total de $\varphi(\partial\Sigma)$ é $\leq \pi$, o que é novamente uma contradição com o Lema 3.5, e termina a prova da Proposição 3.1. ■

O lema a seguir é uma adaptação de um argumento em [9] para o nosso caso não (necessariamente) compacta e será útil na demonstração do item (ii) do Teorema Principal.

Lema 3.7. *Seja M^n uma variedade Riemanniana, completa e orientável com curvaturas seccionais não-negativas e positivas em pelo menos um ponto. Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica. O conjunto dos valores regulares da aplicação normal de Gauss $\phi : M \rightarrow S^n$ é denso na imagem $\phi(M)$. Por outro lado, se $\phi(q)$ é um valor crítico de ϕ , existe uma sequência de valores regulares $\phi(p_1), \dots, \phi(p_m), \dots$ convergindo para $\phi(q)$, tal que os hiperplanos tangentes de $\phi(M)$ em $\phi(p_1), \dots, \phi(p_m), \dots$ convergem para o hiperplano tangente em $\phi(q)$.*

Demonstração. Seja $\phi(q)$, $q \in M$ um valor crítico de ϕ e V uma vizinhança de $\phi(q)$ em S^n . Primeiro mostraremos que existe um ponto $\phi(p) \in V$, tal que o posto $(d\phi(p)) = n$. Suponhamos que o posto $(d\phi(q)) = k < n$ e denotemos por U_l o conjunto de pontos de M onde o posto de $(d\phi)$ é igual a l .

Como o posto $(d\phi(q)) = k$, ou existe uma vizinhança de q em M contida em U_k ou em cada vizinhança de q existem pontos de U_m , $m > k$. Repetindo este argumento, se necessário, encontraremos um ponto $p_1 \in M$, com $\phi(p_1) \in V$, tal que uma vizinhança W de p_1 está contida em U_m , $m \geq k$. Pelo lema 2 de [9], a imagem $\phi(W) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ desta vizinhança é gerada por planos $(n - m)$ -dimensionais, e a aplicação normal no $(n - m)$ -plano π_1 , passando por p_1 , é constante, portanto, igual a $\phi(p_1)$.

Afirmamos que π_1 não está totalmente contido em $\varphi(M)$. De fato, seja $r \in M$ tal que $\phi(r)$ é um valor regular de ϕ , e seja h a função altura $h = \langle \varphi, \phi(r) \rangle$. Pela proposição 3.1, dado qualquer ponto $s \in M$, existe uma trajetória de $gradh$ que sai de r e entra em s . Segue-se que $\varphi(M)$ pertence inteiramente a um dos lados do hiperplano tangente π em $\varphi(r)$. Se π_1 intersecta π , então π_1 não está inteiramente contido em $\varphi(M)$. Se π_1 é paralelo a π , ele

pertence a uma superfície de nível de h ; como as superfícies de nível de h são compactas, segue-se novamente que π_1 não está inteiramente contida em $\varphi(M)$, o que prova a afirmação. Segue-se que o conjunto de pontos em π_1 que pertencem a $\varphi(M)$ tem um ponto de fronteira, digamos $\varphi(p_2)$, que, por completude, pertence a $\varphi(M)$. Veja que $\phi(p_2) = \phi(p_1)$ e que p_2 é um ponto de fronteira de U_m . Pelo lema 2 de [9], $p_2 \in U_m$. Portanto, em cada vizinhança de p_2 existem pontos de U_l , $l > m \geq k$. Segue que existe um ponto $p_3 \in M$, tal que $\phi(p_3) \in V$ e $p_3 \in U_l$. Prosseguindo com este argumento, chegamos a um ponto $p \in M$, tal que $\phi(p) \in V$ e $p \in U_n$, o que prova a afirmação feita no início da demonstração.

A primeira declaração do lema segue imediatamente se observarmos que arbitrariamente perto do ponto p com posto ($d\phi(p) = n$), existe um ponto $r \in M$, cuja imagem é um valor regular de ϕ (cf. prova do Teorema 2.2). A segunda afirmação decorre da observação acima sobre o hiperplano tangente em $\varphi(p)$, e isto completa a prova do Lema 3.7. ■

3.2 Demonstração do Teorema Principal

Passaremos agora ao segundo e principal objetivo não só deste capítulo, mas de todo este trabalho que é a demonstração do Teorema Principal, a saber:

Teorema Principal. *Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica, onde M é uma variedade Riemanniana completa e orientável com a propriedade de que todas as suas curvaturas seccionais são não-negativas e, pelo menos em um ponto, são todas positivas. Então:*

- (i) *M ou é homeomorfa a uma esfera \mathbb{S}^n ou ao \mathbb{R}^n .*
- (ii) *$\varphi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma subvariedade convexa, em particular φ mergulha M topologicamente como um subconjunto fechado de \mathbb{R}^{n+1} .*
- (iii) *Para quase todos os pontos $v \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ os hiperplanos que são normais a v intersectam $\varphi(M)$ em um conjunto que, quando não-vazio, ou é um ponto ou é homeomorfo a \mathbb{S}^n .*
- (iv) *A curvatura total de $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é 2π (se M é compacta) ou $\leq \pi$.*

Se, em particular, M é não-compacta e todas as curvaturas seccionais são positivas, então:

- (v) *A aplicação normal $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ é um difeomorfismo sobre um conjunto aberto contido num hemisfério de \mathbb{S}^n .*

(vi) Um ponto $v_0 \in \mathbb{S}^n$ pode ser escolhido de modo que $\varphi(M)$ seja o gráfico de uma função convexa definida em um conjunto contido num hiperplano normal a v_0 , e em particular, o volume de $\varphi(M)$ é infinito.

Demonstração. Vejamos

- (i) Seja $r \in M$ um ponto onde as curvaturas seccionais são todas positivas (i.e., a segunda forma fundamental é positiva definida em r). Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação normal de Gauss. Temos que $d\phi$ é não singular e pelo teorema de Sard, existe um ponto $p \in M$ próximo de r , tal que $\phi(p) = v_0$ é um valor regular de ϕ (cf. prova do Teorema 2.2). Pela Proposição 3.1, segue que ou a função altura $h = \langle \varphi, v_0 \rangle$ tem apenas um ponto crítico p , e as trajetórias de $\text{grad}h$ que saem de p cobrem M . Neste caso podemos construir homeomorfismos de M em \mathbb{R}^n ; ou h tem dois pontos críticos p e q , e as trajetórias de $\text{grad}h$ que saem de p e entram em q cobrem M . Neste caso podemos construir homeomorfismos de M em \mathbb{S}^n .
- (ii) Seja $p \in M$. Se $\phi(p)$ é um valor regular da aplicação normal de Gauss ϕ , segue-se da Proposição 3.1 (cf. prova do Lema 3.7) que $\varphi(M)$ encontra-se em um dos lados do hiperplano tangente de $\varphi(M)$ em $\varphi(p)$. Se $\phi(p)$ é um valor crítico de ϕ , então, pelo Lema 3.7, $\phi(p)$ é o limite de uma sequência de valores regulares $\phi(p_1), \dots, \phi(p_m), \dots$, e o hiperplano tangente π em $\varphi(p)$ é o limite dos hiperplanos tangentes em $\varphi(p_1), \dots, \varphi(p_m), \dots$. Segue-se que $\varphi(M)$ encontra-se em um dos lados de cada um de seus hiperplanos tangentes. Como existe um ponto em que a segunda forma fundamental de $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é definida, o conjunto $\varphi(M)$ não está contido em nenhum hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} . Portanto, pela Proposição 2.2, $\varphi(M)$ é o bordo de um corpo convexo.
- (iii) Considere o conjunto de todos os pontos $r_i \in M$, $i = 1, 2, \dots$ onde as curvaturas seccionais de cada r_i são positivas. Pelo teorema de Sard, existe um ponto $p_i \in M$, próximo de r_i , tal que $\phi(p_i) = v_i$ é um valor regular de ϕ (cf. prova do Teorema 2.2). Pela Proposição 3.1 segue que os hiperplanos que são normais a v_i intersectam $\varphi(M)$ em um conjunto que, quando não-vazio, ou é um ponto ou é homeomorfo a \mathbb{S}^n .

- (iv) Seja $r \in M$ um ponto onde as curvaturas seccionais são todas positivas (i.e., a segunda forma fundamental é definida em r). Pelo teorema de Sard, existe um ponto $p \in M$, próximo de r , tal que $\phi(p) = v_0$ é um valor regular de ϕ . Pela proposição 3.1 (cf. demonstração do Lema 3.7) segue-se que $\varphi(M)$ encontra-se em um dos lados de cada um de seus hiperplanos tangentes. Como existe um ponto em que a segunda forma fundamental de $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é definida, o conjunto $\varphi(M)$ não está contido em nenhum hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} . Portanto, pela proposição 2.2, a curvatura total de $\varphi(M)$ é 2π (se M for compacta) ou $\leq \pi$.
- (v) Agora seja M não-compacta com curvaturas seccionais positivas. Então todas as funções altura tem exatamente um ponto crítico não-degenerado. Assim, a aplicação $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ é injetiva, portanto, um difeomorfismo em sua imagem, e a imagem $\phi(M) \subset \mathbb{S}^n$ é um conjunto aberto que não contém pontos antípodas. Lembremos pelo item (ii) acima que $\varphi(M)$ é o bordo de um corpo convexo. Portanto, pelo Lema 2.3, $\varphi(M)$ está contido em um hemisfério de \mathbb{S}^n , e isto prova (v).
- (vi) Tome o pólo do hemisfério de \mathbb{S}^n que contém $\varphi(M)$ e denote por v_0 . Afirmamos que qualquer linha l em \mathbb{R}^{n+1} paralela a v_0 intercepta $\varphi(M)$ no máximo uma vez. De fato, suponha que l intersecta $\varphi(M)$ em dois pontos distintos $\varphi(p_1)$ e $\varphi(p_2)$. Observe que o segmento $\omega = \overline{\varphi(p_1)\varphi(p_2)}$ pertence ao corpo convexo $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ cujo bordo é $\varphi(M)$ e indicaremos por conveniencia que os vetores normais a $\varphi(M)$ apontam para fora de K . Sejam π_1 e π_2 os hiperplanos normais a v_0 e passando por $\varphi(p_1)$ e $\varphi(p_2)$, respectivamente. Por convexidade, $\phi(p_1)$ e $\phi(p_2)$ apontam para os lados de π_1 e π_2 , que não contêm o segmento ω . Isto significa que ou π_1 ou π_2 não pertence à união de todas as regiões normais Σ , e isto é uma contradição. Portanto, $\varphi(M)$ é o gráfico de uma função f definida em um conjunto contido em um hiperplano π normal a v_0 . Pelas hipóteses sobre a curvatura, a hessiana de f é positiva definida, portanto f é convexa. f é ilimitada em uma direção, caso contrário pelo argumento usado na prova do Lema 2.3, teríamos que tanto v_0 e $-v_0$ pertenceriam ao fecho da imagem esférica, o que é uma contradição. Deste modo, concluímos que o volume de $\varphi(M)$ é infinito.

■

Exemplo 3.1. O parabolóide de revolução $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ é uma variedade Riemanniana de dimensão 2 mergulhada em \mathbb{R}^3 . Uma parametrização para \mathcal{P} é $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Então, segue-se que

$$K_2(u, v) = \frac{4}{1 + 4u^2 + 4v^2} > 0 \quad \text{para todo } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Como \mathcal{P} é completa, conexa e orientável, segue-se que o Teorema 3.1 é válido para \mathcal{P} e, em particular, \mathcal{P} é homeomorfo ao \mathbb{R}^2 .

Exemplo 3.2. Pelo Exemplo 1.8, temos que $\mathbb{S}^n = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, como pré-imagem de um conjunto compacto por uma função contínua, é uma variedade Riemanniana compacta. Pelo Exemplo 2.2, a curvatura seccional de \mathbb{S}^n é constante e igual a 1 (i.e., é positiva em todos os pontos). Como a aplicação de inclusão $\iota : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma isometria, o Teorema 3.1 é válido para a esfera \mathbb{S}^n .

Exemplo 3.3. Veja que, o espaço euclidiano \mathbb{R}^n é uma variedade Riemanniana completa (cf. Exemplos 1.1 e 1.6), mas todas as suas curvaturas seccionais são constantes e iguais a zero. Portanto, o Teorema 3.1 não pode ser verificado em \mathbb{R}^n .

Referências Bibliográficas

- [1] BUSEMAN, H., *Convex Surfaces*, Interscience Publishers. (1958). 4, 18, 28
- [2] CARMO, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. 5 (Projeto Euclides). 4, 6, 7, 12, 13
- [3] CARMO, M.P., *O Método do Referencial Móvel*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976. 4, 18
- [4] CARMO, M.P., *Positively-curved hypersurfaces of a Hilbert Space*, Journal of Diff. Geom. **2**(1968), 355 - 362. 24
- [5] CARMO, M.P. & LAWSON, B., *Spherical images of convex surfaces* to appear in Proc. A.M.S. 25
- [6] CARMO, M.P. & LIMA, E.L., *Immersions of manifolds with non-negative sectional curvatures* Bol. Soc. Bras. Mat. **2**(1971) 9-22. 1, 2, 18
- [7] CARMO, M.P. & LIMA, E.L., *Isometric immersions with semi-definite second quadratic forms* Archiv. Der Math. **20**(1969), 173-175. 18
- [8] CAVALCANTE, C.A., *Imersões Isométricas no Espaço Hiperbólico com Curvaturas Principais $k_i \geq 1$* , Rio de Janeiro: IMPA, 1991. Monografia. 4
- [9] CHERN, S.S. & LASHOF, R.K., *On the total curvature of immersed manifolds II* American Journal of Mathematics, **79**(1957), pp. 306-318. 1, 3, 18, 22, 36, 37
- [10] DAJCZER, M., *Submanifolds and Isometric Immersions*, Houston, Publish or Perish, 1990. 4
- [11] GALLOT, S.; HULIN, D. & LAFONTAINE, J., *Riemannian Geometry* Springer, 1980. 4

- [12] HADAMARD, J., *Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique.*, J. Math. Pures Appl. **3**(1897) 331-387. 1, 15, 29
- [13] HEIJENOORT, J. V., *On locally convex manifolds* Communications on Pure and Applied Mathematics, **5**(1952), pp. 223-242. 14
- [14] JUDICE, E.D., *O Teorema de Sard e suas Aplicações*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011. 18
- [15] LIMA, E.L., *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009. 4. 4, 7
- [16] LIMA, E.L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.
- [17] LIMA, E.L., *Introdução à Topologia Diferencial*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1961. 4, 6, 11, 18, 20, 21
- [18] LIMA, E.L., *Variedades Diferenciáveis*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1973. 6
- [19] RODRIGUES, L., *Geometria das Subvariedades*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976. 4, 6, 16, 17, 18, 23
- [20] SACKSTEDER, R., *On hypersurfaces with non-negative sectional curvatures*, American Journal of Mathematics, **82**(1960), pp. 609-630. 1
- [21] STOKER, J.J., *Über die Gestalt der positive gekrumnten off enen Fläche*, Compositio Mathematica, **3**(1936), pp. 55-88. 1
- [22] WU, H., *A structure theorem for complete Riemannian hypersurfaces of non-negative curvature*, to appear. 25