UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A RESOLUÇÃO GRÁFICA

Ramina Samoa Silva Camargo

MANAUS
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Ramina Samoa Silva Camargo

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A RESOLUÇÃO GRÁFICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Prata

MANAUS
2014

Ficha Catalográfica
(Catalogação realizada pela Biblioteca Central da UFAM)

Camargo, Ramina Samoa Silva

C172i Introdução à Programação Linear no Ensino Médio Utilizando a Resolução Gráfica / Ramina Samoa Silva Camargo. – Manaus, 2014.

44f. il. color.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal do Amazonas.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Prata

1. Programação linear 2. Maximizar 3. Mininizar 4. Ensino I. Prata, Roberto (Orient.) II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

CDU 2007 519.852(043.3)

Ramina Samoa Silva Camargo

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A RESOLUÇÃO GRÁFICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 14 de Março de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Presidente

Prof. Dr. Mário Salvatierra Junior
Membro

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
Membro

AGRADECIMENTOS

A uma força maior.

A minha Mãe, que sempre foi minha base forte nesta caminhada, o meu muito obrigada por tudo àquilo que me orientou e me ensinou.

Ao meu orientador Prof. Dr. Roberto Prata e ao Prof. Dr. Alfredo Wagner, pela confiança e dedicação, pelo incentivo desde sempre, pela competência, pelas imensas duvidas tiradas sobre todos os conteúdos.

Enfim, agradeço a todos(as) colegas de curso, pelo companheirismo e pelas várias noites que passamos estudando.

"Toda educação científica que não se inicia com a
matemática é naturalmente imperfeita em sua base "(Augusto Comte).

RESUMO

A ideia deste trabalho foi de aplicar o conteúdo Programação Linear no Ensino Médio de forma contextualizada e com a utilização dos sotwares Geogebra e o Excel. Neste trabalho abordamos a metodologia da resolução de problemas, partindo de situações que envolvam a otimização através da programação linear. O experimento tem por objetivo principal descrever a abordagem utilizada na implementação realizada a partir desses problemas. As atividades foram desenvolvidas no segundo semestre de 2013, com alunos do terceiro ano do Ensino Médio, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas - Campus Parintins - IFAM, e a outra com alunos também do terceiro ano do Ensino Médio, na Fundação Centro de Análise, Pesquisa e Inovação Tecnológica - FUCAPI, em Manaus, verificando assim as reais dificuldades dos alunos sobre os temas abordados. Dos problemas de otimização, em que inúmeras soluções são possíveis, despertaram o interesse e contribuíram para uma participação mais ativa nas aulas de matemática. A partir da discussão desses problemas e das soluções apresentadas pelos alunos, com a utilização do software Geogebra e do programa Solver do Excel foram sistematizadas abordagens da programação linear, tais como a solução gráfica e o método simplex. Essa experiência mostrou que houve maior dedicação às atividades de aprendizagem, nas quais os discentes puderam identificar e observar a aplicabilidade da Programação Linear com duas variáveis. Utilizando o método gráfico com o Geogebra verificou-se a aplicação do Teorema Fundamental da Programação Linear e melhor aprendizagem dos discentes no ensino médio.

Palavras-chave: Programação Linear; Maximizar; Minimizar; Ensino.

ABSTRACT

The idea of this work was to apply the Linear Programming in secondary education content in context and with the use of Geogebra sotwares and Excel. This paper deals with the methodology of solving problems, starting with situations involving optimization through linear programming. The experiment's main objective is to describe the approach used in the implementation carried out from these problems. The activities were developed in the second half of 2013, with students of the third year of high school, at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Amazonas - Campus Parintins - IFAM, and also one with students of the third year of high school, the Foundation center for Analysis, Research and Technological Innovation - FUCAPI in Manaus, thus verifying the real difficulties of the students on the topics covered. Of optimization problems in which several solutions are possible, sparked interest and contributed to a more active participation in math classes. From the discussion of these problems and the solutions presented by the students, using the Geogebra software and Excel Solver program approaches of linear programming, such as the simplex method and graphical solution were systematized. This experiment showed that there was a greater dedication to learning activities in which the students were able to identify and observe the applicability of linear programming with two variables. Using the graphical method with Geogebra verified the application of the Fundamental Theorem of Linear Programming and better learning of students in high school.

Keywords: Linear Programming; Maximize; Minimize and Education.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Os professores de matemática no Brasil, em geral, sentem dificuldade em envolver seus alunos com esta disciplina. Dentre alguns dos motivos para que este fato ocorra, temos a dificuldade por parte dos alunos em trabalhar com a matemática, falta de motivação de alunos e professores, a falta aplicação entre a matemática escolar e o cotidiano dos alunos, experiências negativas que envolvem esta matéria e a maneira como os professores desenvolvem suas atividades.

Pensando nisso, deve-se escolher uma maneira motivadora para que sejam abordados determinados assuntos, tentando envolver o conteúdo o máximo possível com a realidade do aluno, procurando sua aplicabilidade, de modo a tornar o processo ensino-aprendizagem mais tranquilo e satisfatório, em termos de resultados.

Neste texto, apresentamos uma proposta de abordagem do tema de Programação Linear no Ensino Médio. Acreditamos que este tema é muito importante, trazendo situações-problema para a sala de aula, onde o aluno será motivado a utilizar o raciocínio lógico, criatividade, além de abordar temas ensinados ao longo do Ensino Fundamental e Médio e contextualizar a matemática com assuntos da sua realidade. Além disso, verificamos que alguns conteúdos, que a princípio são trabalhados no Ensino Superior, podem ser iniciados nas séries anteriores e estes, sendo bem abordados, podem trazer a tona um sentimento de prazer e interesse por parte dos alunos com relação à matemática.

A Programação Linear (PL) consiste em achar a melhor solução (a que dá mais lucro, menos prejuízo,...), conhecida também como solução ótima, de alguma situação-problema, respeitando-se, ao mesmo tempo, uma série de restrições. Neste trabalho, abordaremos um breve histórico sobre a pesquisa operacional, alguns modelos de matemáticos, apresentaremos a metodologia de aplicação do conteúdo programação linear e com base nessas informações apresentaremos a resolução de um problema de programação linear com duas variáveis.

1.1 Estrutura da Dissertação

Além deste capítulo introdutório, este trabalho está organizado como segue. No Capítulo 2, descrevemos o histórico da Pesquisa Operacional, do desenvolvimento de trabalhos sobre Programação Linear no Ensino Médio. No Capítulo 3, apresentamos os modelos matemáticos da Pesquisa Operacional, definições e propriedades dos problemas de Programação Linear e a Interpretação Geométrica, Conceitos básicos necessários para compreensão deste trabalho, mostramos também exemplos de resolução gráfica de problemas de programação linear com duas variáveis e um comparativo do Método Gráfico com o Método Algébrico Simplex. No Capítulo 4, apresentamos as atividades de programação linear realizadas com os alunos do 3º ano do ensino médio em duas instituições, sendo uma realizada no Instituto Federal do Amazonas - IFAM - Campus Parintins e a outra na Fundação Centro de Análise Pesquisa e Inovação Tecnológica - FUCAPI em Manaus, associadas a utilização de recursos computacionais. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos nossas considerações finais sobre a prática do processo de ensino e aprendizagem da introdução a Programação Linear no Ensino médio utilizando a resolução gráfica.

Capítulo 2

Histórico

A expressão Pesquisa Operacional foi utilizada pela primeira vez durante a Segunda Guerra Mundial, quando equipes de pesquisadores procuraram desenvolver métodos para resolver determinados problemas de operações militares.

Entretanto, segundo Moreira [15], o começo da atividade chamada Pesquisa Operacional tem sido geralmente atribuído a algumas iniciativas militares na Segunda Guerra Mundial. Por causa da guerra houve uma necessidade extrema de alocar recursos escassos às várias operações militares e às atividades dentro de cada operação de uma maneira efetiva.

O termo *pesquisa operacional* é uma tradução brasileira direta do termo em inglês *operational research*, conforme Arenales [2] , em Portugal foi traduzido por *investigação operacional* e nos países de língua hispânica, por *investigación operativa*. O surgimento de tal termo está ligado à invenção do radar na Inglaterra em 1934. Dois anos depois, o ministério da Aviação criou a Estação de Pesquisa Manor Bawdsey, em Suffolk, para estudar como a tecnologia do radar poderia ser utilizada para interceptar aviões inimigos. Em seguida o termo pesquisa operacional foi atribuído na estação A. P. Rowe, que, em 1938, coordenava equipes para examinar a eficiência de técnicas de operações advindas de experimentos com interceptação de radar. Em 1941, foi inaugurada a Seção de Pesquisa Operacional do Comando da Força Aérea de Combate, com equipes envolvidas em problemas de operações de guerra. A análise científica do uso operacional de recursos militares de maneira sistemática foi iniciada na Segunda Guerra Mundial.

Depois do fim da guerra, logo a pesquisa operacional evoluiu na Inglaterra e nos Estados Unidos. Em 1947, foi implantado o projeto *Scientific Computation of Optimal Programs* no Pentágono, com objetivo de apoiar decisões de operações na força aérea americana. Os coordenadores do projeto eram o economista Marshall Wood e o matemático George Dantzig. Ao longo do projeto, Dantzig desenvolveu, formalizou e testou o método simplex para desenvolver problemas de Programação Linear. Tal desenvolvimento teve embasamento em trabalhos precursores do matemático russo Leonid Kantorovich, e o termo *Programação linear* foi sugerido a Dantzig pelo economista T. C. Koopmans.

Em 1952, foi fundada a sociedade científica americana de pesquisa operacional chamada ORSA - *Operactions Research Society of America*e, em 1953, a sociedade inglesa de pesquisa operacional denominada TIMS - *The Institute of Management Science*. Em 1957, foi realizada a primeira conferência internacional de pesquisa operacional em Oxford, na Inglaterra. Nesta conferência foram apresentados diferentes trabalhos entre os cientistas americanos e ingleses. Pois os americanos enfatizaram os modelos e métodos matemáticos em diversos temas e teorias de estoque substituição de equipamentos, teorias de filas, programação de tarefas em máquinas, teoria de jogos, fluxos em rede e otimização linear, enquanto os ingleses abordaram os estudos de caso ou problemas específicos.

A partir do início da década de 1950 até o final da década de 1960, a pesquisa operacional foi aplicada em uma variedade de problemas de origem de setores privados e públicos. Em 1953 na Grã-Bretanha foi feito um levantamento de departamentos de pesquisa operacional como exemplo de aplicações em diversos setores industriais e financeiros como: mineração, metalúrgico, construção civil e militar, farmacêutico, bancário e transportes. E em 1967 foram identificados grupos de pesquisa operacional a exemplos de aplicações no setor público envolvendo coleta de lixo, transporte e polícia, entre outros. Desde então a pesquisa operacional tem sido aplicada nas mais diversas áreas de produção e logística.

Em relação a educação, na primeira década de 1960 a pesquisa operacional era apenas estudada nos cursos de pós-graduação e somente por volta de 1970 teve início nos estudos dos cursos de graduação. Os Livros mais influentes na época eram: *Linear Programing:Methods and Applications* (Gass, 1958)[11], *Applied Dynamic Programming* (Bellmand, 1962)[4], *Flows in Networks* (Ford, 1962)[10] e *Linear Programming and Extensions* (Dantzig, 1963)[8]. No livro de Linear Programming and Extensions conforme Dantzig[8] a definição de Programação Linear é "construir um enunciado de ações a serem executadas, os instantes da execução, suas quantidades, que permite que um sistema evolua de um dado estado a um objetivo definido". No contexto da época, o objetivo era programar atividades de sistemas complexos, que gerou a área de programação matemática, em que a programação linear é um caso particular de otimização de funções lineares sujeito a restrições lineares.

No Brasil, a pesquisa operacional teve início na década de 1960, no primeiro simpósio brasileiro de pesquisa operacional que foi realizado em 1968 no ITA, em São José dos Campos, SP. Posteriormente, foi fundada a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. Uma outra definição de pesquisa operacional foi proposta no periódico inglês *Operation Research Quarterly* em 1967, que de forma resumida, consiste no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos, com a finalidade de prever e comparar estratégias ou decisões alternativas. De forma sucinta, a pesquisa operacional é um foco científico sobre a tomada de decisões. Alguns autores sugerem outras denominações, por exemplo, análise e decisões, mas o termo pesquisa operacional é bastante difundido no âmbito das engenharias, principalmente na engenharia de produção, também nas ciências de comunicação, economia, estatística e matemática entre outros.

2.1 Histórico da Programação Linear no Ensino Médio

Segundo Paiva [17], PL é tema obrigatório das disciplinas de 2º e 3º ano do Ensino Médio. E de acordo com a autora, os documentos do Ministério da Educação de Portugal sugerem uma abordagem geométrica para a solução de problemas de máximo e de mínimo, sujeitas a um conjunto de restrições. Segundo a autora, os documentos indicam que o esse estudo pode motivar os alunos a aprenderem Matemática motivados por problemas reais nos quais a geometria é utilizada na indústria, economia, etc.

Paiva[17] traz uma perspectiva de ensino de PL aliada a de utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), argumentado que as utilizações das TIC desenvolvem a curiosidade, requisito, segundo a autora, fundamental para o desenvolvimento do gosto pela aprendizagem. Também argumenta que a utilização das TIC desenvolvem capacidades que vão além das habilidades comuns de sala de aula (cálculo, compreensão de conceitos e relações matemáticas). Despertam no aluno a confiança, o espírito de tolerância e cooperação, permitindo que o aluno tenha um papel mais ativo na sala de aula, possibilitando a investigação e a formulação e teste de conjecturas próprias. Para a autora as TIC representam o apoio que o aluno necessita para desenvolver seu raciocínio e a sua forma de pensar matematicamente podendo construir generalizações concretizáveis no cotidiano.

Paiva[17] sugere, para abordagem no ensino de PL no Ensino Médio, a formulação, resolução e pós-otimização de problemas. Nesta resolução é enfatizado o uso da calculadora gráfica, softwares como Geogebra e do comando Solver do Microsoft Excel, na perspectiva de possibilitar a resolução de problemas mais complexos bem como a análise crítica dos resultados.

Conforme Paiva[17], no nível de ensino considerado, a escolha dos problemas de PL deve ser cuidadosa e que envolva somente duas variáveis de decisão nas restrições e na função objetivo. A formulação deve ser encarada como a tradução matemática dos problemas expressos em linguagem corrente. Ilustrando as etapas do processo de formulação e resolução dos problemas Paiva [17] selecionou um conjunto de problemas extraídos de manuais escolares.

Paiva [17] enuncia sem demonstração, o Teorema Fundamental da Programação Linear, que garante que, se a região é limitada, a função objetivo tem um máximo e um mínimo ocorrendo em pelo menos um vértice desta região. A autora apresenta instruções de utilização do comando Solver do Microsoft Excel para resolução de problemas de PL. O texto da autora é claro e objetivo. Paiva [17], seguindo as orientações do Ministério da Educação de Portugal, sugere uma abordagem de PL que integre o uso de tecnologias digitais (calculadoras e computadores). A escolha dos problemas que ilustram seu trabalho é adequada, são práticos e ligados a áreas de interesse de cursos técnicos, de nível adequado podem permitir o entendimento aos alunos do ensino médio.

No Brasil algumas atividades em relação a problemas de programação linear no ensino médio tem sido aplicadas por parte de alguns professores por meio de projetos ou cursos, como por exemplos: o trabalho intitulado *Tópicos de Pesquisa Operacional no Ensino Médio*, elaborado por Neto [16], o artigo *Resolvendo problemas de otimização no ensino médio* feito por Rech [18]. Em que ambos mostram métodos de utilizar a programação linear no Ensino médio.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [6], é de responsabilidade do ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. Portanto, a programação linear ajuda a cumprir as orientações do PCN.

Capítulo 3

Programação Linear

3.1 Modelos Matemáticos

Conforme Andrade [1], a metodologia da Pesquisa Operacional é a mais desenvolvida para a solução de problemas que podem ser representados por modelos matemáticos. O modelo mais apropriado para um dado contexto ou problema depende de vários fatores, como:

- a natureza matemática das relações entre as variáveis;
- os objetivos do encarregado da decisão;
- a extensão do controle sobre as varáveis de decisão;
- o nível de incerteza associado ao ambiente da decisão.

Considerando esses fatores, podemos dividir os modelos matemáticos em dois grandes grupos:

- modelos de simulação;
- modelos de otimização.

3.1.1 Modelos de Simulação

Procuram oferecer uma representação do mundo real com o objetivo de permitir a geração e análise de alternativas, antes da implementação de qualquer uma delas. E isto, fornece ao analista uma flexibilidade com relação a escolha da ação mais conveniente.

Uma característica importante é que o critério de escolha da melhor alternativa não é fixado na estrutura do modelo, sendo aplicado pelo analista, como no modelo da Figura 3.1.

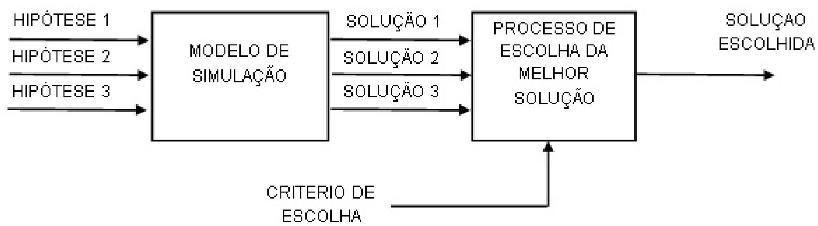

Figura 3.1: Processo de decisão com modelos de simulação

3.1.2 Modelos de Otimização

O modelo de otimização não permite flexibilidade nas escolhas de alternativas como no modelo anterior, ele é estruturado para selecionar uma única alternativa, que será considerada *ótima*, segundo o critério do analista. Tal critério faz parte da estrutura do modelo, que encontra a melhor alternativa através de uma análise matemática. Os modelos de otimização são mais especializados e encontram utilização em problemas nos quais as variáveis podem assumir vários valores ou variar a intervalos bastante amplos. A *solução ótima* encontrada, segundo o critério, é tomada como referência para a decisão real. A Figura 3.2 ilustra tal processo.

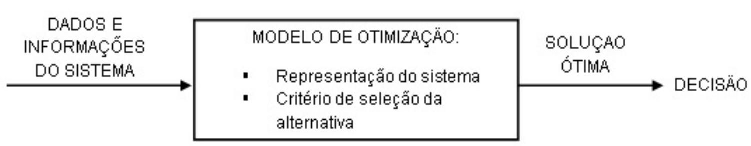

Figura 3.2: Processo de decisão com modelos de otimização

3.2 Definições e Propriedades dos Problemas de Programação Linear

Um problema de programação linear pode ser definido sob a seguinte forma:

$$maximizar z = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \tag{3.1}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, ..., q \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., p \tag{3.3}$$

onde c_j, a_{ij} e b_i são dados, ou seja, números reais e x_j representa para $j = 1, 2, ..., p$ as variáveis de decisão. A função linear a ser maximizada em (3.2) é denominada função objetivo, função econômica ou função critério. As restrições de não-negatividade (3.3) são conhecidas como triviais.

Cada restrição i de (3.2) pode ser substituída com acréscimo de uma variável $x_{p+i} \geq 0$, denominada variável de folga, por uma restrição de igualdade e uma restrição trivial:

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + x_{p+i} = b_i, \\ x_{p+i} \geq 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j - x_{p+i} = b_i, \\ x_{p+i} \geq 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Uma restrição de igualdade poderá também ser substituída por duas desigualdades:

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \leq b_i, \\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \geq b_i. \end{cases} \tag{3.6}$$

De acordo com Maculan [14], dado um problema de programação linear com restrições de igualdades e desigualdades, podemos acrescentar variáveis de folga as desigualdades não triviais, passando dessa maneira a trabalhar com restrições de igualdades e desigualdades triviais. Assim, um problema de programação linear poderá sempre ser escrito da seguinte maneira:

$$(PPL) : maximizar z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.7}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, ..., m \tag{3.8}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n, \tag{3.9}$$

que poderá ser ainda apresentado sob forma abaixo:

$$(PPL) : maximizar z = cx \tag{3.10}$$

sujeito a:

$$Ax = b \tag{3.11}$$

$$x \geq 0 \tag{3.12}$$

onde $c^T = (c_1 \;\; c_2 \;\; ... \;\; c_n)$, $x^T = (x_1 \;\; x_2 \;\; ... \;\; x_n)$, $b^T = (b_1 \;\; b_2 \;\; ... \;\; b_m)$, $A = (a_1 \;\; a_2 \;\; ... \;\; a_n)$ e $a_j^T = (a_{1j} \;\; a_{2j} \;\; ... \;\; a_{mj})$, isto é, $c^T \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $a_j \in \mathbb{R}^m$.
A desigualdade (3.12) indica que cada componente do vetor x é não negativa. Indicaremos, portanto, que um dado vetor x tem pelo menos uma componente negativa pela notação $x \not\geq 0$.

Definição 3.2.1. *Seja* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \, | Ax = b, x \geq 0\}$. *O conjunto* X *é denominado conjunto ou região viável do (PPL), e se* $x \in X$, *então* x *é uma solução viável do mesmo problema. Dado* $x^* \in X, x^*$ *é denominado uma solução ótima do (PPL) se* $c^T \geq cx$, *para todo* $x \in X$.

Demonstração: 1. *Suporemos, em perda de generalidade, que a matriz* A *tenha posto igual a* m *colunas, ou seja, existem* m *colunas de* A *linearmente independentes.*

Podemos dizer que a presença de uma variável x_j *irrestrita em sinal será expressa:* $x_j^+ - x_j^-$, $x_j^+ \geq 0$ *e* $x_j^- \geq 0$. *Deixando sempre o problema na forma (PPL).*

Particionaremos a matriz A *da seguinte maneira:* $A = (BN)$, *onde* B *é uma matriz quadrada* $m \times m$ *e inversível. Analogamente, particionaremos os vetores* x *e* c : $x^T = (x_B^T \quad x_N^T)$, $c = (c_B \quad c_N)$, x_B *e* c_N *possuirão* m *componentes associadas à matriz* B. *Dessa maneira, o (PPL) poderá ser escrito:*

$$(PPL) : maximizar z = c_B x_B + c_N x_N \tag{3.13}$$

sujeito a:

$$Bx_B + Nx_N = b \tag{3.14}$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0. \tag{3.15}$$

Explicitaremos x_B *em função de* x_N *em (3.14):*

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N. \tag{3.16}$$

Façamos $x_N = 0$ *e* $\overline{x}_B = B^{-1}b$.

Definição 3.2.2. $\overline{x}$ *é uma solução básica de (3.11) se* $\overline{x}^T = (\bar{x}_B^T 0)$. *As variáveis associadas às componentes de* $\overline{x}_B$ *são denominadas básicas e as demais não básicas. Quando* $\overline{x}_B$ *possuir ao menos uma componente nula diremos de* $\overline{x}$ *é uma solução básica degenerada.*

No caso em que $\overline{x}_B$ for negativo, isto é, $(\bar{x}_B \geq 0)$, então $\overline{x}$ satisfará à restrição (3.12). Logo $\overline{x}$ é uma solução básica primal viável.

Sejam I_B o conjunto dos índices das colunas de A pertencendo à matriz B e I_N o conjunto dos demais índices de A. Lembrando que $I_B \cap I_N = \oslash$ e $I_B \cup I_N = \{1, 2, ..., n\}$.

Levando a expressão de x_B em (3.16) na função objetivo (3.13) teremos uma outra forma do (PPL):

$$(PPL) : maximizarz = c_B B^{-1} b - (c_B B^{-1} N - c_N) x_N \tag{3.17}$$

sujeito a:

$$x = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \tag{3.18}$$

$$x_B \geq 0,\ x_N \geq 0. \tag{3.19}$$

Seguindo alguns autores clássicos dos textos de programação linear, por exemplo, Dantzig[8] e Simonnard[19], novos parâmetros para o último (PPL):

$$u = c_B B^{-1}, u^T \in \mathbb{R}^m, \tag{3.20}$$

$$\overline{x}_B = B^{-1} b, \overline{x}_B \in \mathbb{R}^m, \tag{3.21}$$

$$z_j = u a_j (j \in I_B \cup I_N), z_j \in \mathbb{R}, \tag{3.22}$$

$$y_j = B^{-1} a_j (j \in I_B \cup I_N), y_j \in \mathbb{R}^m, \tag{3.23}$$

$$\overline{z} = c_B B^{-1} b = ub = c_B \overline{x}_B. \tag{3.24}$$

Assim, poderemos escrever $(c_B B^{-1}N - c_N)x_N = \sum_{j \in I_N}(z_j - c_j)x_j$ e o (PPL) se tornará:

$$(PPL) : maximizarz = \overline{z} - \sum_{j \in I_N}(z_j - c_j)x_j \tag{3.25}$$

sujeito a:

$$x_B = \overline{x}_B - \sum_{j \in I_N} y_j x_j \tag{3.26}$$

$$x_B \geq 0, x_j \geq 0, j \in I_N. \tag{3.27}$$

Definindo:

$y_j^T = (y_{1j} \;\; y_{2j} \;\; ... \;\; y_{mj}),\;\; x_B^T = (x_{B(1)} \;\; x_{B(2)} \;\; ... \;\; x_{B(m)})$ e $\overline{x}_B^T = (\overline{x}_{B(1)}\, \overline{x}_{B(2)} ... \overline{x}_{B(m)})$

então (3.26) poderá ainda ser escrito como:

$$x_{B(i)} = \overline{x}_{B(i)} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j, i = 1, 2, ..., m. \tag{3.28}$$

Proposição 3.2.1. *Se,* $\overline{x}_B \geq 0$ *e* $z_j - c_j \geq 0$, $\forall j \in I_N$ *então o vetor* $x^* \in \mathbb{R}^n$*, onde* $x^*_{B(i)} = \overline{x}_{B(i)}$, $i = 1, 2, ..., m$ *e* $x^*_j = 0$, $j \in I_N$*, será uma solução ótima do (PPL).*

Demonstração: 2. *Como no* $z_j - c_j \geq 0$ *e* $x_j \geq 0$, $\forall j\ I_N$*, então de 3.25 temos* $z \leq \overline{z} = cx^*$*. O máximo de* z *não ultrapassará* $\overline{z} = cx^*$*, mas* x^* *é uma solução viável do (PPL), logo* x^* *é uma solução ótima do (PPL).*

Proposição 3.2.2. *Se (3.11), (3.12) admitirem uma solução viável, então haverá ao menos uma solução básica de (3.11) satisfazendo (3.12).*

Proposição 3.2.3. *Se o (PPL) possuir ótimo finito ao menos uma solução ótima será básica viável.*

3.3 Interpretação Geométrica

Um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se para quaisquer x_1 e $x_2 \in C$ temos que $x = \lambda_1 + (1 - \lambda)x_2$ para $0 \leq \lambda \leq 1$ pertencerá também a C.

O conjunto $X = \{x \in R^n \mid Ax = b\}$, $x \geq 0$ é, por definição, um conjunto poliédrico quando $X \neq \oslash$.

Proposição 3.3.1. *O conjunto X é convexo.*

Demonstração: 3. *Sejam x_1 e $x_2 \in X$ então $x_1 \geq 0$, $Ax_1 = b$ e $x_2 \geq 0$, $Ax_2 = b$. Para 0 < $\lambda < 1$ podemos escrever $\lambda x_1 \geq 0$, $\lambda Ax_1 = \lambda b$ e $(1-\lambda)x_2 \geq 0$, $(1-\lambda)Ax_2 = (1-\lambda)b$ ou $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0$, $\lambda Ax_1 + (1-\lambda)Ax_2 = \lambda b + (1-\lambda)b$, assim temos $\overline{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0$, $A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = A\overline{x} = b$, logo $\overline{x} \in X$.*

Definição 3.3.1. *x é um vértice (ponto extremo) de um conjunto poliédrico X se $x \in X$ e não existir $\lambda \in [0,1]$ tal que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, onde x_1 e $x_2 \in X$, para $x \neq x_1$ e $x \neq x_2$.*

Proposição 3.3.2. *Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \oslash$ e seja A uma matriz $m \times n$, de posto igual a m. Uma solução básica de $AX = b$, satisfazendo $x \geq 0$ corresponde a um vértice de X.*

Demonstração: 4. *Consideremos $A = (B\ N)$, e $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz quadrada inversível e $N \neq 0$, pois se $n = 0$ haveria um único ponto em X que seria o próprio vértice.*

Tomemos $\overline{x} = (\overline{x}_B \quad \overline{x}_N)^T$, onde $\overline{x}_N = 0$, uma solução básica viável, ou seja, $\overline{x}_B = B^{-1}b \geq 0$.

Sejam x_1 e $x_2 \in X$ diferentes de $\overline{x}$, vamos supor exista um $\lambda \in [0,1]$ tal que $\overline{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, sabemos que $x_1 \geq 0$, $Ax_1 = Bx_{1B} + Nx_{1N} = b$, $x_2 \geq 0$, $Ax_2 = Bx_{2B} + Nx_{2N} = b$, como $N \neq 0$, $x_{1N} \neq 0$ e $x_{2N} = 0$, caso contrário, $x_{1N} = 0$ implicaria $x_{1B} = \overline{x}_B$ e $x_{2N} = 0$ implicaria $x_{2B} = \overline{x}_B$; contrariando a hipótese de que $x_1 \neq \overline{x}$ e $x_2 \neq \overline{x}$.

Temos que

$$\overline{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \tag{3.29}$$

implica

$$\overline{x}_B = \lambda x_{1B} + (1-\lambda)x_{2B} \ \text{ e } \ 0 = \lambda x_{1N} + (1-\lambda)x_{2N}. \tag{3.30}$$

Como $x_{1N} \geq 0$ e $x_{1N} \neq 0$, $x_{2N} \geq 0$ e $x_{2N} \neq 0$, $\lambda \geq 0$, $(1-\lambda) \geq 0$; λ e $(1-\lambda)$ não podem ser anulados ao mesmo tempo, então (3.30) nunca será verificada. Assim, demonstramos, por absurdo, que uma solução básica viável correspondente a um vértice de conjunto poliédrico X.

Lema 3.3.1. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$, $a_i, b \in \mathbb{R}$. Se dentre os valores que f assumir num segmento AB do $\mathbb{R}^n$, o valor máximo (mínimo) for assumido num ponto P interior deste segmento, então f será constante em AB.*

Teorema 3.3.1 (Teorema Fundamental da Programação Linear)**.** *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida na região poliedral convexa V do $\mathbb{R}^n$ por $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$, $a_i, b \in \mathbb{R}$. Suponha que f assuma um valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se V possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.*

Demonstração: 5. *Faremos a seguinte demonstração para $n = 2$, utilizando a mesma estrutura que Boldrini [5].*
Seja $V \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que o valor máximo (mínimo) de f seja assumido em um ponto P de V, considerando todas as regiões poliedrais convexas possíveis de $\mathbb{R}^2$ podemos ter:

I) P é um vértice. (Neste caso o teorema já está provado).
II) P está numa aresta. Do lema 3.3.1, f assumirá este valor máximo (mínimo) em toda a aresta. Como a região V possui vértice(s) esta aresta conterá um vértice v obrigatoriamente, portanto $f(P) = f(v)$.
III) P está no interior de V. Neste Caso, f será constante em toda região V.

De fato, seja A um outro ponto de interior de V. Como V é poliedral convexa, o segmento AP está contido em V; além disso, como P é interior podemos considerar AA' que contém, P deste ainda contido em V. Do lema 3.3.1 segue que f é constante em AA' e portanto, $f(P) = f(A)$.

Observe a Região Viável V na Figura 3.3 o ponto máximo em seu interior.

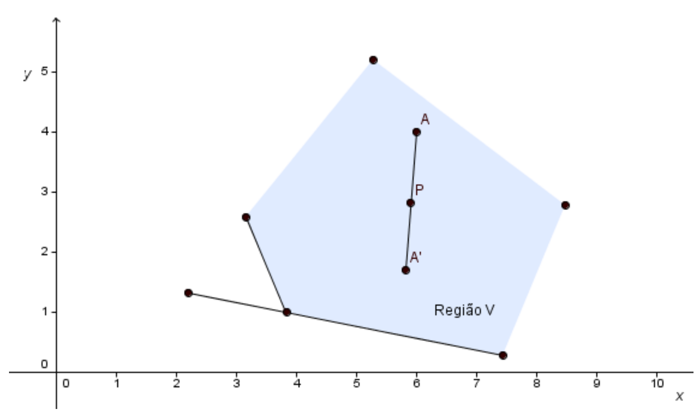

Figura 3.3: Ponto máximo no interior de uma região viável V

3.3.1 Problemas de Programação Linear com Duas Variáveis - Resolução Gráfica

Na Resolução de uma problema de Programação Linear com duas variáveis podemos utilizar a Interpretação Geométrica, que conforme Boldrini [5] é conhecido como método Geométrico de Resolução em Programação Linear.

Os exemplos de aplicação a seguir adaptados do livro intitulado *Pesquisa Operacional* e de acordo com o autor Taha [20] resolve os problemas maximização e minimização.

Exemplo 1. ***(Companhia Brasicor)***

A Brasicor produz tintas para interiores e exteriores com base em duas matérias-primas, M1 e M2. A tabela 3.1 apresenta os dados básicos do problema:

	Tinta para exteriores	Tinta para interiores	Disponibilidade máxima diária
Matéria-prima, M1	6	4	24
Matéria-prima, M2	1	2	6
Lucro por tonelada(R$ 1.000)	5	4	

Tabela 3.1: Produção de tintas da Brasicor

Uma pesquisa de mercado indica que a demanda diária de tintas para interiores não pode ultrapassar a de tintas para exteriores por mais de 1 tonelada. Além disso, a demanda máxima diária de tinta para interiores é 2t.

O modelo de PL, como qualquer modelo de PO, tem três componentes básicos.

1. **Variáveis** de decisão que procuramos determinar.

2. **Objetivo** que precisamos otimizar.

3. **Restrições** que a solução deve satisfazer.

Precisamos determinar as quantidades diárias a produzir de tintas para exteriores e interiores. Definiremos as variáveis do modelo como:

x_e = toneladas de tinta para exteriores produzidas diariamente.

x_i = toneladas de tinta para interiores produzidas diariamente.

Para construir a função objetivo, observemos que a empresa quer *maximizar* o lucro total diário para as duas tintas. E de acordo com a tabela, temos que a representação do lucro total diário (em milhares de reais) por z, o objetivo da empresa é:

$$\text{Maximizar } z = 5x_e + 4x_i$$

Em seguida, temos que construir as restrições que limitam a utilização da matéria prima e a demanda do produto. As restrições relacionadas são dadas como

$$6x_e + 4x_i \leq 24$$

$$x_e + 2x_i \leq 6$$

$$x_i - x_e \leq 1$$

$$x_i \leq 2$$

Uma restrição implícita é que as variáveis x_e e x_i não podem assumir valores negativos. As **restrições de não-negatividade**, $x_e \geq 0$, $x_i \geq 0$ são responsáveis por esse requisito. Portanto o modelo completo da Brasicor é

$$\text{Maximizar } z = 5x_e + 4x_i$$

sujeito a

$$6x_e + 4x_i \leq 24$$

$$x_e + 2x_i \leq 6$$

$$x_i - x_e \leq 1$$

$$x_i \leq 2$$

$$x_e,\, x_i \geq 0$$

Quaisquer valores de x_e e x_i que satisfaçam todas as cinco restrições constituem uma **solução viável**. A meta do problema é achar a melhor solução viável, ou seja, a solução **ótima**, que maximize o lucro total. Utilizando o método gráfico, o procedimento inclui duas etapas:

1. Determinação da região de soluções viáveis.

2. Determinação da solução ótima entre todos os pontos viáveis da região de soluções.

Etapa 1. *Determinação da região de soluções viáveis*

E primeiro lugar, levamos em consideração as restrições de não-negatividade de x_e e x_i. Na Figura 3.4, o eixo horizontal x_e e o eixo vertical x_i representam as variáveis tinta para exteriores e tinta para interiores, respectivamente. Então, a área se restringe ao primeiro quadrante. Para levar em conta as quatro restrições restantes, substituiremos cada desigualdade por uma equação e depois representaremos em gráfico a linha reta resultante localizando dois pontos distintos nela. Por exemplo, $6x_e + 4x_i = 24$, podemos determinar dois pontos distintos ao fazer $x_e = 0$ para obter $x_i = \frac{24}{4} = 6$, e ao fazer $x_i = 0$ na equação obteremos $x_e = \frac{24}{6} = 4$. Então a reta passa pelos pontos, (0,6) e (4,0). Em seguida, considere o efeito da desigualdade. Tudo que ela faz dividir o plano (x_e,x_i) em dois meios-espaços, um de cada lado da reta representada no gráfico. Só uma dessas duas metades satisfaz a desigualdade. Para determinar o lado correto, tomemos (0,0) como um ponto de referência. Se ele satisfizer a desigualdade, o lado no qual ele se encontra é a meia-região viável, caso contrário, o viável é o outro lado. (se, por acaso, a reta passar pela origem, qualquer outro ponto poderá ser utilizado). A aplicação do procedimento do ponto de referência a todas as restrições do modelo produz as restrições mostradas na Figura 3.4, que qualquer ponto que esteja dentro ou sobre o contorno da área $ABCDEF$ é parte da região de soluções viáveis. Todos os pontos fora dessa área são inviáveis.

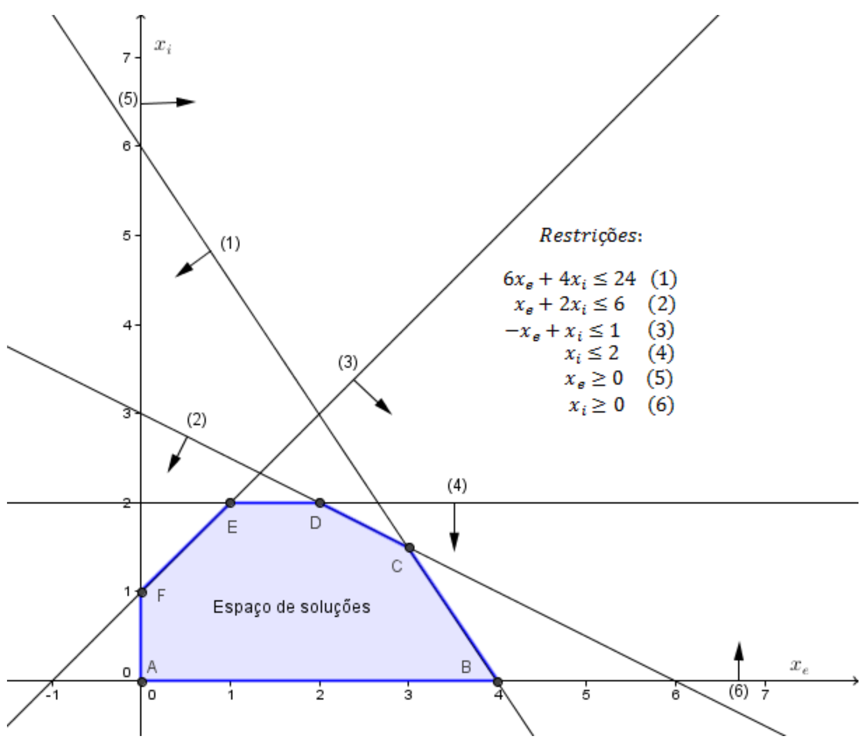

Figura 3.4: Região viável do modelo da Brasicor

Etapa 2. *Determinação da solução ótima*

Como a região viável $ABCDEF$ consiste em um número infinito de pontos, precisamos de um procedimento sistemático para identificar a solução ótima. A determinação da solução ótima requer identificar a direção na qual a função lucro $z = 5x_e + 4x_i$ aumenta. Uma característica importante da solução ótima de PL é que ela sempre está relacionada com um ponto extremo da região de soluções, ou seja, os vértices do polígono ABCDEF. Portanto, basta substituir as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F na função objetivo, e o valor maior valor será então a solução ótima. Observe os resultados na Figura 3.5 em que a solução ótima se dá na substituição de $x_e = 3$ e $x_i = 1,5$, com $z = 5.3 + 4.1,5 = 21$. O que representa um produto diário de 3 t de tinta para exteriores e 1,5 t de tinta para interiores. O lucro diário associado é de R$ 21.000.

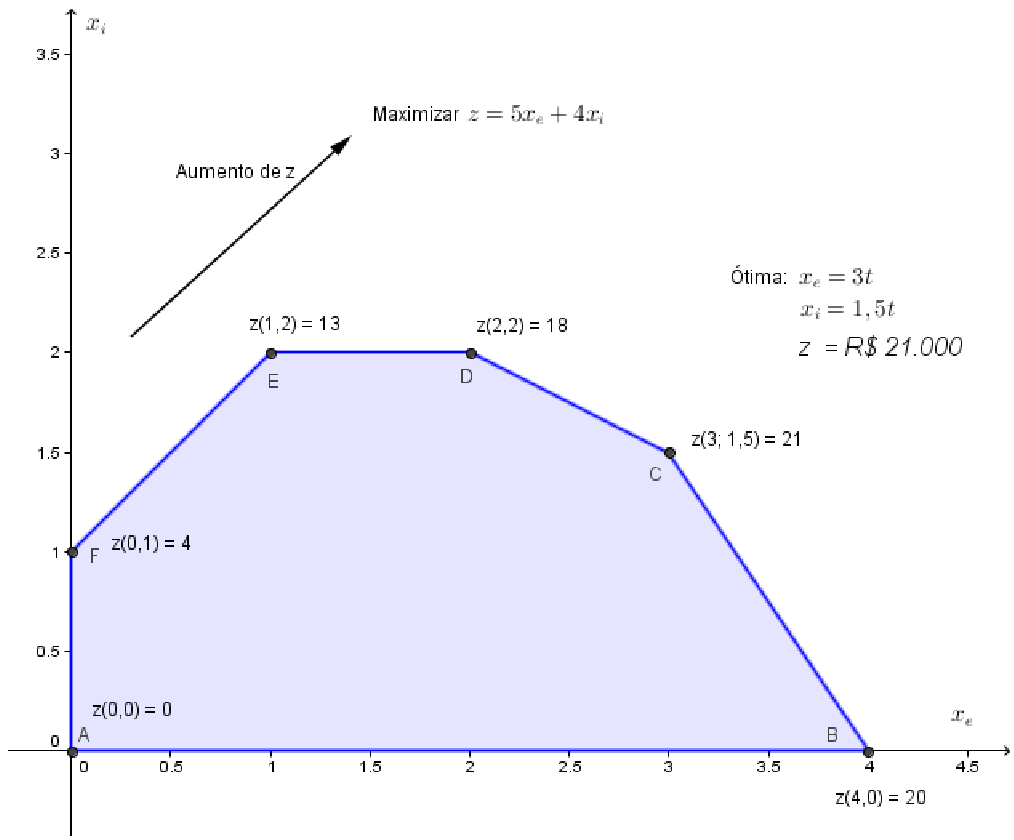

Figura 3.5: Solução ótima do modelo de Brasicor

Exemplo 2. ***(Problema da Dieta)***

A Fazenda Só Grãos usa no mínimo 800 kg de ração especial por dia. Essa ração especial é uma mistura de milho e soja com as composições descritas na Tabela 3.2.

Ração	Proteína	Fibra	Custo(R$/kg)
Milho	0,09	0,02	0,30
Soja	0,60	0,06	0,90

Tabela 3.2: Composição de ração da Fazenda Só Grãos

Os requisitos nutricionais da ração especial são os de no mínimo 30% de proteína e de no máximo 5% de fibra. A Fazenda Só Grãos quer determinar a mistura que gera a ração de mínimo custo diário.

Como a ração consiste na mistura de milho e preparado de soja, definiremos as variáveis de decisão do modelo como:

m = kg de milho na mistura diária.

s = kg de preparado de soja na mistura diária.

A função objetivo procura minimizar o custo total diário da ração, que vamos definir como:

$$\text{Minimizar } z = 0,3m + 0,9s$$

Como a Fazenda Só Grãos precisa de no mínimo 800 kg de ração por dia, a restrição pode ser escrita como:

$$m + s \geq 800$$

Em relação as restrições quanto o requisito nutricional de proteína, a quantidade de proteína presente em m kg de milho e s kg de preparado de soja é $(0,09m + 0,6s)$ kg e essa quantidade deve ser igual no mínimo 30% do total da mistura das rações $(m + s)$ kg, ou seja:

$$0,09m + 0,6s \geq 0,3(m + s)$$

Da mesma forma, o requisito de no máximo 5% de fibras é dado por:

$$0,02m + 0,06s \leq 0,05(m + s)$$

Portanto podemos expressar o modelo completo da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } z = 0,3m + 0,9s$$

sujeito a

$$m + s \geq 800$$

$$0,21m - 0,30s \leq 0$$

$$0,03m - 0,01s \geq 0$$

$$m, s \geq 0$$

Como neste modelo buscamos a minimização do custo, precisamos reduzir o máximo possível na direção mostrada na Figura 3.6. A solução ótima é a interseção das duas retas $m + s = 800$ e $0,21m - 0,30s = 0$ que dá o resultado $m = 470,59$ kg e $s = 329,41$ kg. Seque que o custo da ração é $z = 0,3\ .\ 470,59\ +\ 0,9\ .\ 329,42 = R\$\ 437,65$ por dia.

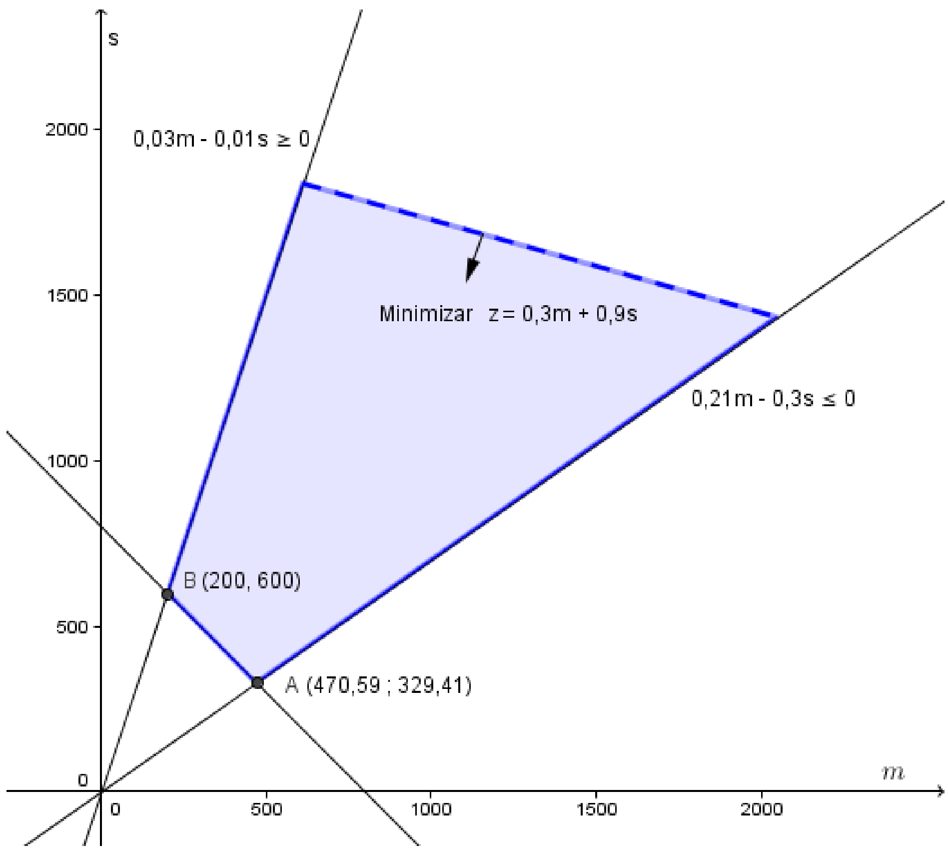

Figura 3.6: Solução gráfica do modelo da dieta

3.4 Método do Simplex

Dantzig[9], em 1947 introduziu o método do simplex para resolver um problema de programação linear (PPL).

A ideia do método é partir de uma solução básica de (3.11) satisfazendo (3.12), isto é, uma solução básica primal viável, passar para outra solução básica primal viável sem que o valor da função objetivo diminua (no caso de maximização). Como o número de soluções básicas é finito, o algoritmo, sob algumas condições, convergirá.

Dada a matriz B quadrada e inversível, extraída de A, tal que $\overline{x}_B \geq 0$, colocaremos o problema de programação linear (3.10), (3.11) e (3.12) sob a forma (3.25), (3.26) e (3.27). Utilizando a propriedade 3.2.1, testaremos se esta solução é ótima; caso não seja, tentaremos aumentar o valor de uma variável $x_k, k \in I_N$, tal que $z_k - c_k < 0$. Se $a_{+\infty}$, então não haverá ótimo finito.

As informações mostradas pela solução gráfica do problema de programação linear na seção 3.3 lançam bases para o desenvolvimento do método algébrico simplex. Na figura 3.7 apresenta um paralelo entre os dois métodos. No método gráfico, a região de soluções é delineada pelos meios-espaços, que representam as restrições e no método simplex, a região de soluções é representada por m equações lineares simultâneas e n variáveis não negativas.

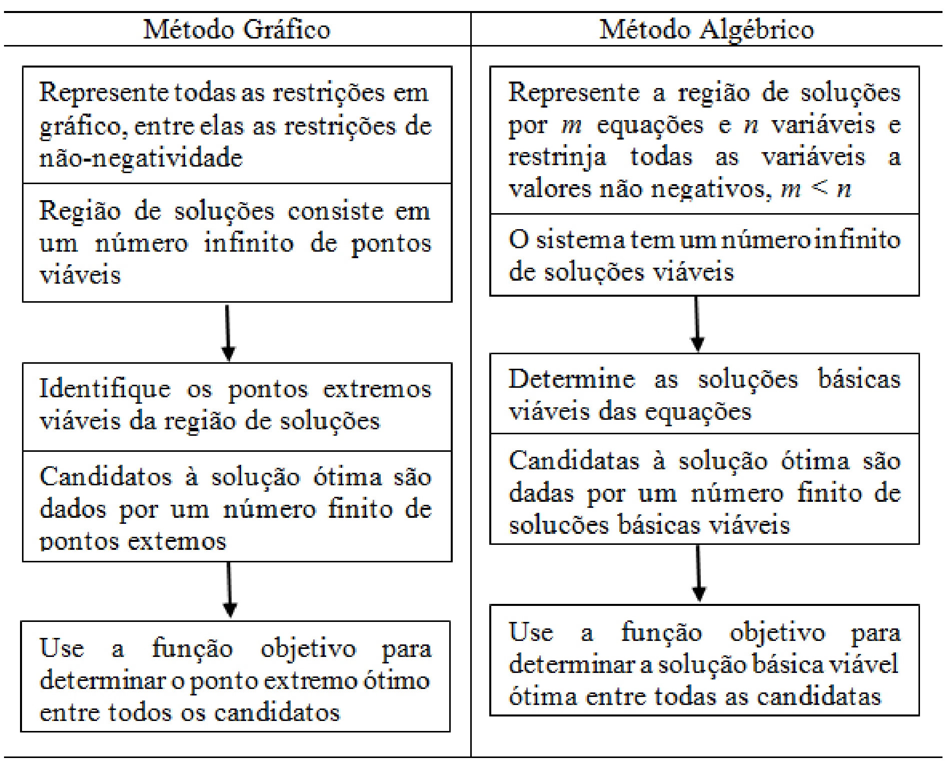

Figura 3.7: Paralelo entre o Método gráfico e o Método Algébrico

Determinação algébrica dos pontos extremos

Em um conjunto de $m \times n$ equações $(m < n)$, se igualarmos n - m variáveis a zero, e depois resolvermos as m equações para as n variáveis restantes, a solução resultante, se for única, é denominada **solução básica** e deve corresponder a um ponto extremo da região de soluções. Portanto, o número máximo de pontos extremos é

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Cálculo do algoritmo simplex

Utilizaremos o exemplo do modelo da Brasicor para explicarmos detalhes do método simplex. O problema é expresso na forma de equações como

$$\text{Maximizar } z = 5x_e + 4x_i + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

sujeito a

$$6x_e + 4x_i + s_1 = 24$$

$$x_e + 2x_i + s_2 = 6$$

$$-x_e + x_i + s_3 = 1$$

$$x_i + s_4 = 2$$

$$x_e, x_i, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

As variáveis s_1, s_2, s_3 e s_4 são as folgas associadas ás respectivas restrições. Na sequência, expressamos a função objetivo como

$$z - 5x_e - 4x_i = 0$$

Consequentemente a tabela simplex inicial pode ser representada da seguinte maneira:

Base	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução	
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0	Linha z
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	Linha s_1
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	Linha s_2
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	Linha s_3
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	Linha s_4

As interações simplex começam na origem $(x_e, x_i) = (0, 0)$ e os conjuntos associados de variáveis não básicas e básicas são definidas

$$\text{Variáveis não básicas: } (x_e, x_i)$$

$$\text{Variáveis básicas: } (s_1, s_2, s_3, s_4)$$

Substituindo as variáveis não básicas por $(x_e, x_i) = (0, 0)$ segue a a solução imediata:

$$z = 0$$

$$s_1 = 24$$

$$s_2 = 6$$

$$s_3 = 1$$

$$s_4 = 2$$

Como na tabela simplex expressa a função objetivo como $z - 5x_e - 4x_i = 0$ nos mostra que a solução pode ser melhorada aumentando x_e ou x_i. Usaremos x_e que tem o coeficiente *mais negativo* e o selecionaremos para a *variável a entrar na base*. Essa regra é denominada **condição de otimalidade**.

A determinação da variável que sai com a base na tabela simplex exige o cálculo das razões não negativas entre o lado direito das equações (coluna Solução) e o coeficiente de restrição correspondente da variável que entra x_e, como mostra a tabela:

Base	Entrando x_e	Solução	Razão (ou intercepto)
s_1	6	24	$x_e = \frac{24}{6} = 4 \leftarrow mínimo$
s_2	1	6	$x_e = \frac{6}{1} = 6$
s_3	-1	1	$x_e = \frac{1}{-1} = -1\ (ignorar)$
s_4	0	2	$x_e = \frac{2}{0} = \infty\ (ignorar)$
Conclusão: x_e entra e x_i sai			

Então a razão mínima não negativa identifica a variável s_1 como a variável que sai da base e designa à variável que entra na base x_e o valor de 4.

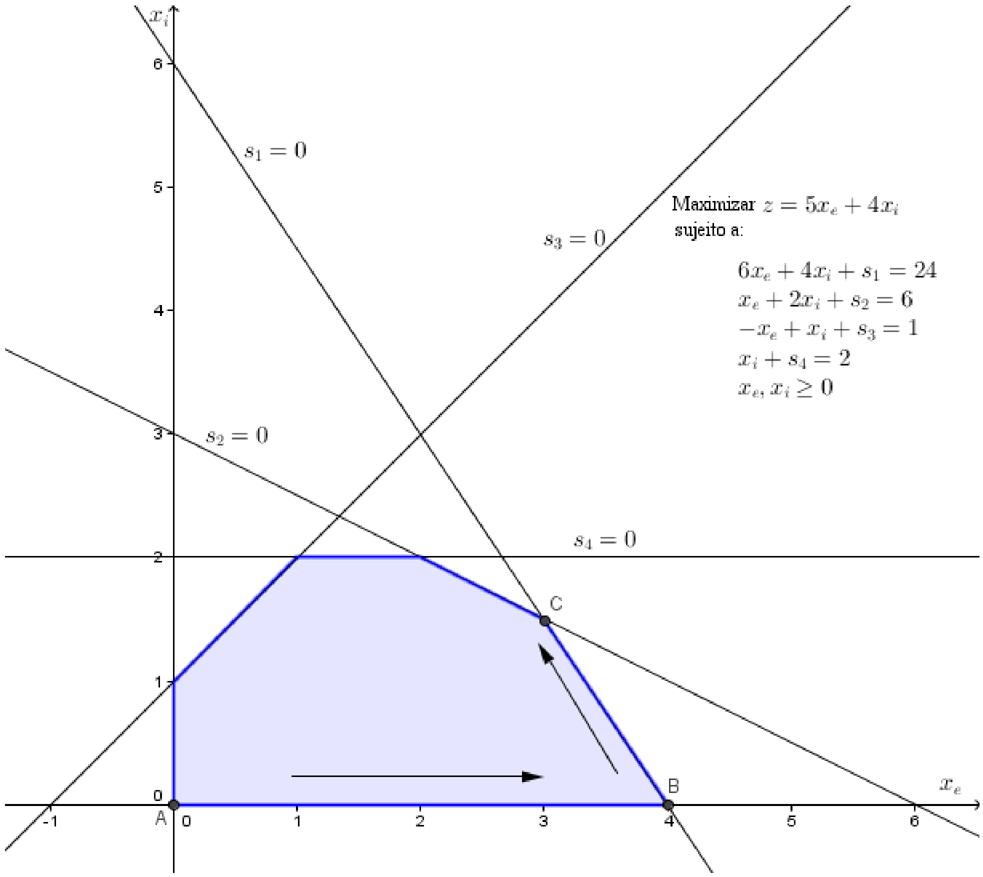

Figura 3.8: Interpretação gráfica das razões do método simplex para o modelo da Brasicor

Como mostra a Figura 3.8 , as razões calculadas são as interações das restrições com o eixo x_e da variável que entra na base. Podemos ver que o valor de x_e deve ser aumentado para 4 no ponto extremo B, que é a menor interseção não negativa com o eixo x_e. Um aumento que ultrapasse B é inviável. No ponto B, a variável básica atual associada coa a primeira restrição assume um valor zero e torna-se a variável que sai da base. A regra associada com os cálculos das razões é denominada **condição de viabilidade** pois garante a viabilidade da nova solução.

O novo ponto de solução B é determinado pela *troca* entre a variável que entra na base x_e e a variável que sai da base s_1 na tabela simplex para produzir os seguintes conjunto de variáveis não básicas e básicas:

$$\text{Variáveis não básicas em } B\text{: } (s_1, x_i)$$

$$\text{Variáveis básicas em } B\text{: } (x_e, s_2, s_3, s_4)$$

O processo de *troca* é baseado nas **operações de Gauss-Jordan**, que identifica a coluna da variável que entra na base como a **coluna do pivô**, e a linha da variável que sai como a **linha do pivô**. As interações da coluna do pivô como a linha do pivô é

	Entra ↓									
	Base	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução	
	z	1	-5	-4	0	0	0	0	0	
Sai ←	s_1	0	**6**	4	1	0	0	0	24	Linha do pivô
	s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	
	s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	
			Coluna do pivô							

denominada *elementos do pivô.* Na tabela seguinte, mostra a coluna e linha em destaque:

Para produzir a nova solução básica é necessário realizar os cálculos por Gauss-Jordan seguintes:

1. Linha do pivô.
   (a) Substituir a variável que sai da base na coluna Base pela variável que entra na base.
   (b) Nova linha do pivô = Linha do pivô atual ÷ pelo Elemento pivô

2. Todas as outras linhas, incluindo z
   Nova linha do pivô = (Linha do pivô atual) − (Seu coeficiente de coluna do pivô) × (Nova linha do pivô)

Realizar os cálculos por Gauss-Jordan da seguinte forma:

1. Substituir s_1 na coluna Base por x_e.
   Nova linha x_e = Linha s_1 atual ÷ $6 = \frac{1}{6}(0\ \ 6\ \ 4\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 24) = (0\ \ 1\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4)$

2. Nova linha z = Linha z atual $-(-5)\times$ Nova linha $x_e = (1\ \ -5\ \ -4\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0) - (-5) \times (0\ \ 1\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4) = (1\ \ 0\ \ -\frac{2}{3}\ \ \frac{5}{6}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 20)$

3. Nova linha s_2 = Linha s_2 atual $-(-1)\times$ Nova linha $x_e = (0\ \ 1\ \ 2\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 6) - (1) \times (0\ \ 1\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4) = (0\ \ 0\ \frac{4}{3}\ \ -\frac{1}{6}\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 2)$

4. Nova linha s_3 = Linha s_3 atual $-(-1)\times$ Nova linha $x_e = (0\ \ -1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1) - (-1) \times (0\ \ 1\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4) = (0\ \ 0\ \frac{5}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 5)$

5. Nova linha s_4 = Linha s_4 atual $-(0)\times$ Nova linha $x_e = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2) - (0) \times (0\ \ 1\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4) = (0\ \ 0\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 2)$

Consequentemente a nova solução básica é (x_e, s_2, s_3, s_4), observemos como a nova tabela tem as mesmas propriedades da tabela inicial e mostra a *condição de otimalidade* que x_i é a variável que deve entrar na base. E quando igualamos as novas variáveis não básicas x_i e s_1 a zero, a coluna *Solução* nos mostra a nova solução $(x_e = 4, s_2 = 2, s_3 = 5, s_4 = 2)$, e o novo valor da função objetivo é $z = 20$.

			↓						
	Base	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução
	z	1	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	0	20
	x_e	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{6}$	0	0	0	4
←	s_2	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$	1	0	0	2
	s_3	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	5
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

A condição de viabilidade produz o seguinte:

Base	Entrando x_i	Solução	Razão
x_e	$\frac{2}{3}$	4	$x_i = 4 \div \frac{2}{3} = 6$
s_2	$\frac{4}{3}$	2	$x_i = 2 \div \frac{4}{3} =$ 1,5 (mínimo)
s_3	$\frac{5}{3}$	5	$x_i = 5 \div \frac{5}{3} = 3$
s_4	1	2	$x_i = 2 \div 1 = 2$

Portanto o novo valor de $x_i = 1,5$. O aumento correspondente em z é $\frac{2}{3}x_i = \frac{2}{3} \times 1,5 = 1$, o que resulta em $z = 20 + 1 = 21$.

Substituindo s_2 na coluna Base por x_i que entra, as seguintes operações de fila por Gauss-Jordan são:

1. Nova linha do pivô $x_i =$ Linha s_2 atual $\div \frac{4}{3}$
2. Nova linha $z =$ Linha z atual $-(-\frac{2}{3})\times$ Nova linha x_i
3. Nova linha $x_e =$ Linha x_e atual $-(\frac{2}{3})\times$ Nova linha x_i
4. Nova linha $s_3 =$ Linha s_3 atual $-(\frac{5}{3})\times$ Nova linha x_i
5. Nova linha $s_4 =$ Linha s_4 atual $-(1)\times$ Nova linha x_i

Com esses cálculos obtemos a seguinte tabela:

Base	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução
z	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
x_e	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	0	0	3
x_i	0	0	1	$\frac{-1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s_3	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{-5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
s_4	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

Como nenhum dos coeficientes da linha z associados com variáveis não básicas s_1 e s_2 são negativos, seguindo a condição de otimalidade, temos que a essa tabela simplex é ótima.

A solução ótima pode ser apresentada na seguinte tabela:

Variável de decisão	Valor ótimo	Recomendação
x_e	3	Produzir 3t diárias de tintas para exteriores
x_i	$\frac{3}{2}$	Produzir 1,5t diárias de tintas para interiores
z	21	Lucro diário é igual a R$21.000,00

Outro método que poderíamos aplicar é o método dos pontos interiores que tem sido bastante estudado desde a apresentação do algoritmo de Karmarkar [12], diferentemente do método Simplex que a cada interação percorre as extremidades da região viável, o algoritmo proposto por Karmarkar utiliza a estratégia de determinar um solução ótima caminhando por pontos interiores do domínio viável. Tal método tornou-se bastante notável para resolver problemas de programação linear e não-linear principalmente com várias variáveis. Um exemplo interessante apresentado por Barbosa [3] é a aplicação para resolução de um problema de planejamento ótimo para o tratamento do câncer por radioterapia que utiliza a técnica dos pontos interiores. Conforme Wrigth [21], os problemas pequenos o método simplex tem rendimento satisfatório. O que justifica utilizar o método dos pontos interiores para problemas de várias variáveis e de maior complexidade computacional.

Capítulo 4

Contribuições da Programação Linear no Ensino Médio e Resultados

Seguindo as orientações propostas por Paiva [17], realizamos atividades de programação linear com alunos do 3º ano do ensino médio em duas instituições: uma no Instituto Federal de Educação do Amazonas - Campus Parintins e a outra na Fundação Centro de Análise Pesquisa e Inovação Tecnológica em Manaus. As atividades foram realizadas no laboratório de informática de cada instituto com o intuito de utilizar os recursos computacionais através do software Geogebra e assim resolver problemas de programação linear com duas variáveis pelo método da resolução gráfica, visto que esse recurso segundo Paiva [17] é de grande relevância para o desenvolvimento de atividades que envolvem PL, pois as utilizações das TIC desenvolvem a curiosidade, requisito fundamental para o desenvolvimento do gosto pela aprendizagem. Ao final de cada atividade também foi utilizado uma planilha Excel que seguindo instruções de utilização do comando Solver do Microsoft Excel conforme Lachtermacher [13] é a ferramenta mais utilizada no Brasil.

Vale ressaltar que a atividade realizada no Instituto Federal de Educação do Amazonas - Campus Parintins foi transformada em trabalho estendido apresentado no 1º Simpósio Nacional da formação do Professor de Matemática realizado na UnB - Brasília, intitulado **Introduzindo a Programação Linear no Ensino Médio** (Camargo,2013)[7].

Primeiramente em sala de aula foi apresentado um breve histórico de pesquisa operacional, o Teorema de Fundamental da Programação Linear e a resolução de problemas de PL com duas variáveis utilizando o método gráfico fazendo uso dos exemplos de aplicação mostrados na seção 3.3.1, utilizando as ferramentas do software Geogebra.

Posteriormente na sala do laboratório de informática, propomos a seguinte atividade:

Exemplo 3. ***(Maximização do Lucro da Empresa na produção de geladeiras)***

Um fabricante de geladeiras precisa decidir quais modelos deve produzir em uma nova fábrica recentemente instalada na Zona Franca de Manaus. O departamento de marketing e vendas realizou uma pesquisa de mercado que indicou que, no máximo, 1.500 unidades do modelo de luxo e 6.000 unidades do modelo básico podem ser vendidas no próximo mês. A empresa já contratou um certo número de empregados e, com isso dispõe de uma força de trabalho de 25.000 homens-hora por mês. Cada modelo de luxo requer dez homens-hora e cada modelo básico requer oito homens-hora para ser montado. Além disso, uma mesma linha de montagem é compartilhada pelos dois modelos e considere que a capacidade de produção desta linha seja de 4.500 geladeiras por mês. O lucro unitário do modelo de luxo é de R$100,00 e do modelo básico é de R$50,00. Deseja-se determinar quanto produzir de cada modelo de modo a maximizar o lucro da empresa.

No primeiro momento da atividade os alunos fizeram a análise do problema e identificaram que tratava-se de encontrar uma forma de maximizar o lucro da empresa.

Figura 4.1: Momento em que os discentes estão fazendo a análise do problema

Alguns discentes manifestaram várias hipóteses de como equacionar o problema, então fizemos algumas orientações sobre como identificar as variáveis de decisão , as restrições e a função objetivo. Então, escrevemos em forma de expressões matemáticas as restrições impostas pela situação. Definimos a variável x_l como a quantidade de geladeiras do tipo luxo e a variável x_b como a quantidade de geladeiras do tipo básico. De modo que o lucro da empresa foi representado por $f(x_l, x_b) = 100x_l + 50x_b$. As restrições de produção devido à limitação de capacidade ficaram $10x_l + 8x_b \leq 25.000$, devido à limitação da força de trabalho por mês e, $x_l + x_b \leq 4.500$, devido à limitação da linha de montagem. As restrições divido ao mercado e à não-negatividade são $0 \leq x_l \leq 1.500$ e $0 \leq x_b \leq 6.000$. E o sistema foi expresso da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar } f(x_l, x_b) = 100x_l + 50x_b$$

sujeito a

$$10x_l + 8x_b \leq 25.000$$

$$x_l + x_b \leq 4.500$$

$$0 \leq x_l \leq 1.500$$

$$0 \leq x_b \leq 6.000$$

Os alunos perceberam que as restrições seriam passadas para o $\mathbb{R}^2$ de forma que desenhadas no mesmo plano cartesiano plano, determinariam a região viável, ou seja, aquela ao qual o par ordenado satisfaria todas as restrições do problema.

Após a análise do problema através do software Geogebra, foi feita orientações afim de que os alunos pudessem compreender como as inequações foram representas graficamente para que observassem a área viável, que representa o conjunto de todos os pares ordenados que satisfazem o problema.

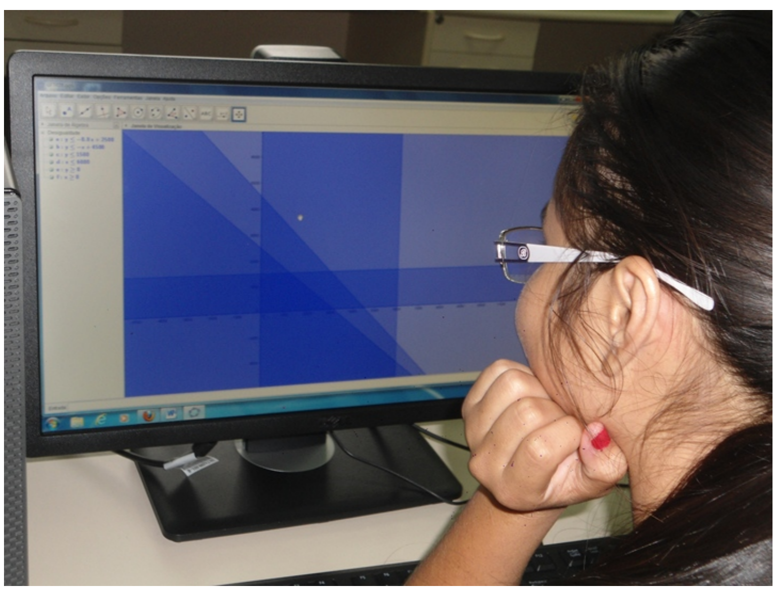

Figura 4.2: Análise dos semiplanos e verificando a solução do problema no IFAM - Campus Parintins

Em seguida os alunos fizeram as substituições das coordenadas dos vértices da região viável na função objetivo do problema e verificaram que um dos vértices era satisfazia o lucro máximo.

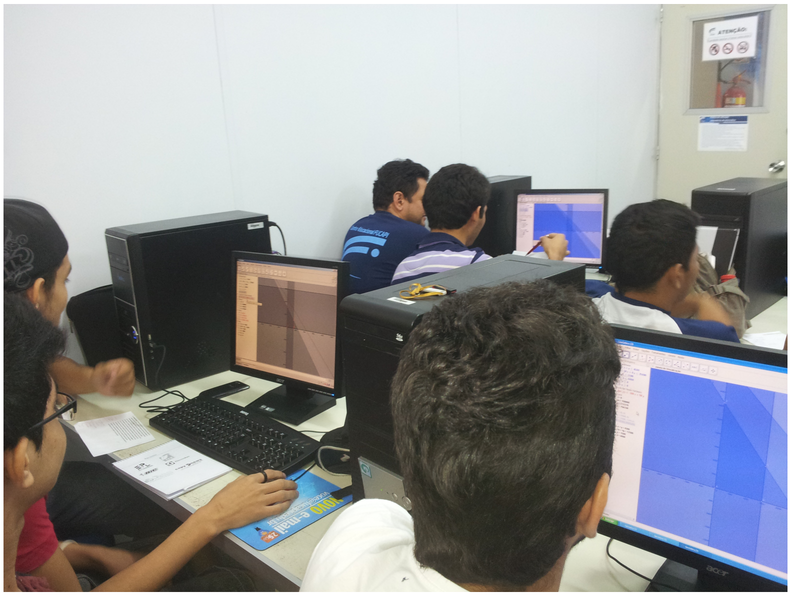

Figura 4.3: Análise dos semiplanos e verificando a solução do problema na FUCAPI - Manaus

A seguir detalharemos as instruções da utilização do software Geogebra para o problema proposto.

4.1 Instruções de utilização das ferramentas no Geogebra

O Geogebra é um software que reúne geometria, álgebra e cálculo. O objetivo que seu desenvolvimento foi para educação matemática nas escolas que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, gráficos de funções em geral. Entretanto, usaremos inequações e coordenadas para solucionar o problema proposto, tais itens estão interligados diretamente através do Geogebra. Portanto, observando as características no GeoGebra em que uma expressão em álgebra corresponde a um objeto concreto na geometria e vice-versa.

Para mostrarmos a atividade proposta substituiremos x_l e x_b por x e y respectivamente no ambiente do Geogebra.

1ª Parte:

- Abra um novo arquivo do Geogebra;
- Na barra de Entrada, digite as inequações e ao final de cada inequação digitar na tecla Enter como mostra a Figura 4.4;
- Selecione na barra de ferramentas no último botão a opção reduzir e clique no espaço do plano cartesiano quantas vezes for necessário afim de que observe o gráfico com

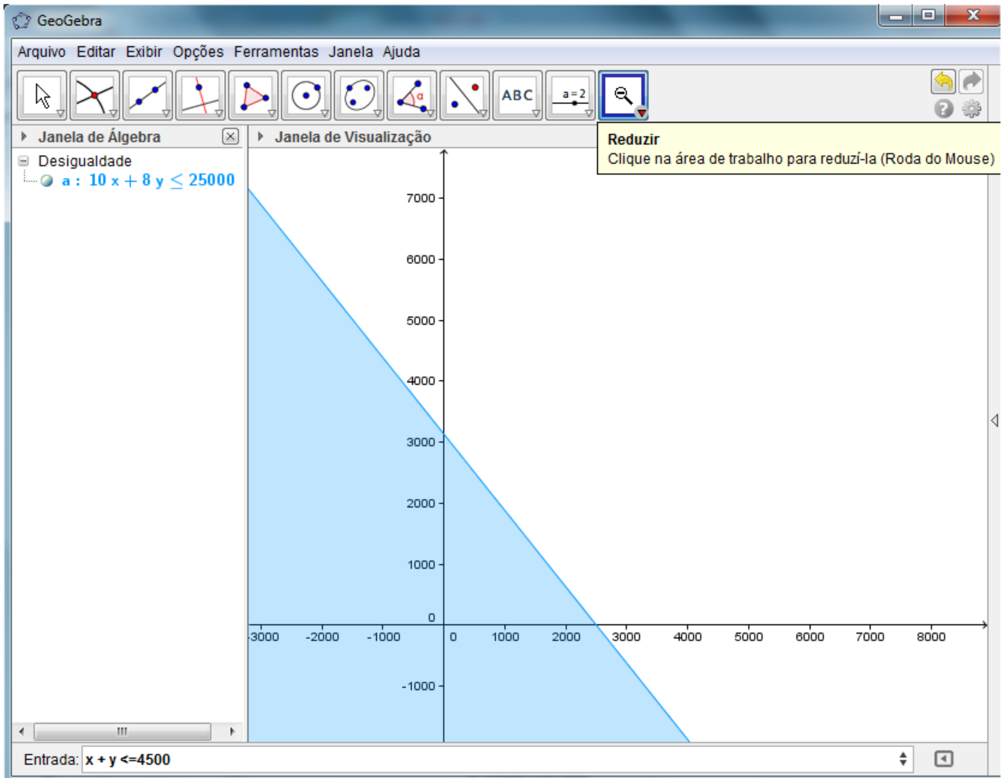

Figura 4.4: Digitação das inequações na barra de Entrada

seus pontos de interseção com os eixos coordenados.

2ª Parte:

- Na barra de Entrada, digite também as equações de cada reta, como mostra a Figura 4.5;

- Na barra de ferramentas, selecione no segundo botão a opção Interseção de Dois Objetos, em seguida selecione as equações das retas dois a dois. Automaticamente no gráfico será mostrado os pontos de interseção das retas, desmarque os pontos que não são da região viável na Janela de Álgebra como mostra a Figura 4.6;

- Na barra de ferramentas o quinto botão a opção Polígono, em seguida selecione os pontos da região viável, ver Figura 4.7.

3ª Parte:

- Digite na barra de Entrada a função objetivo da seguinte forma $L(x, y) = 100x+50y$;

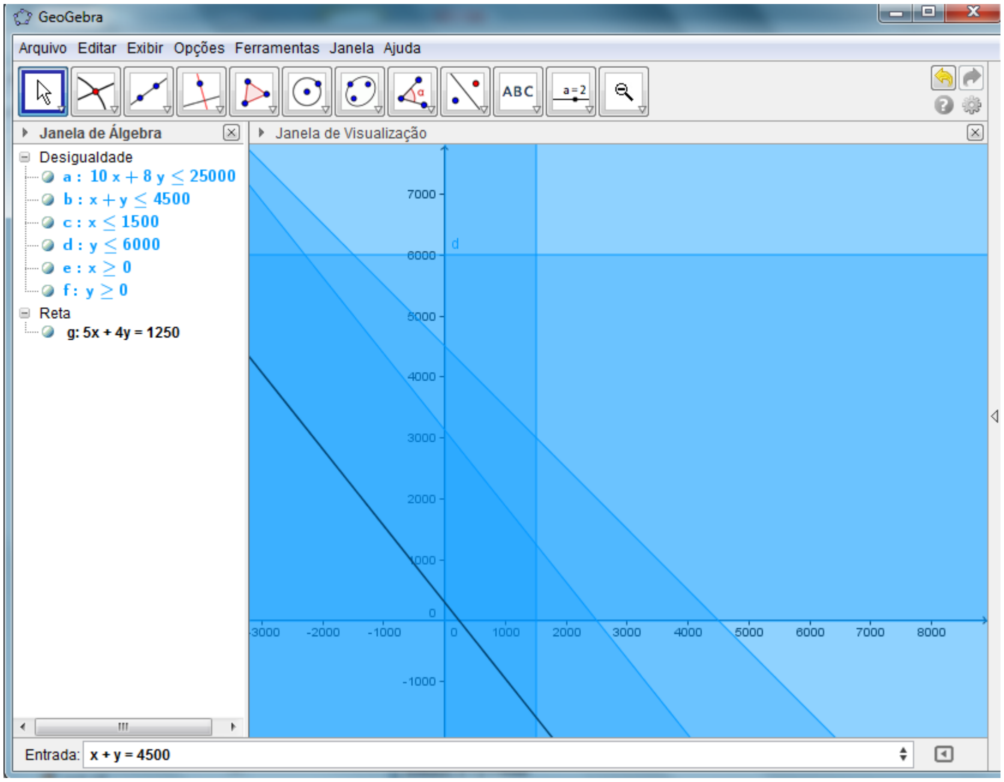

Figura 4.5: Digitação das equações na barra de Entrada

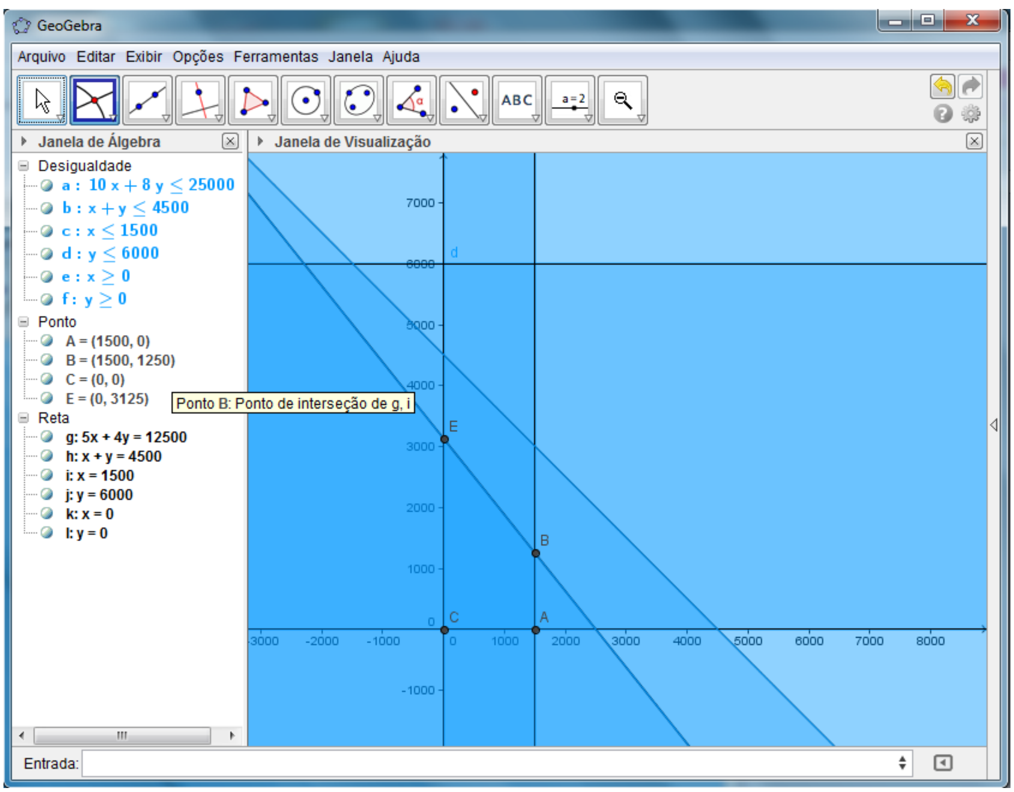

Figura 4.6: Selecionando a Interseção de Dois Objetos

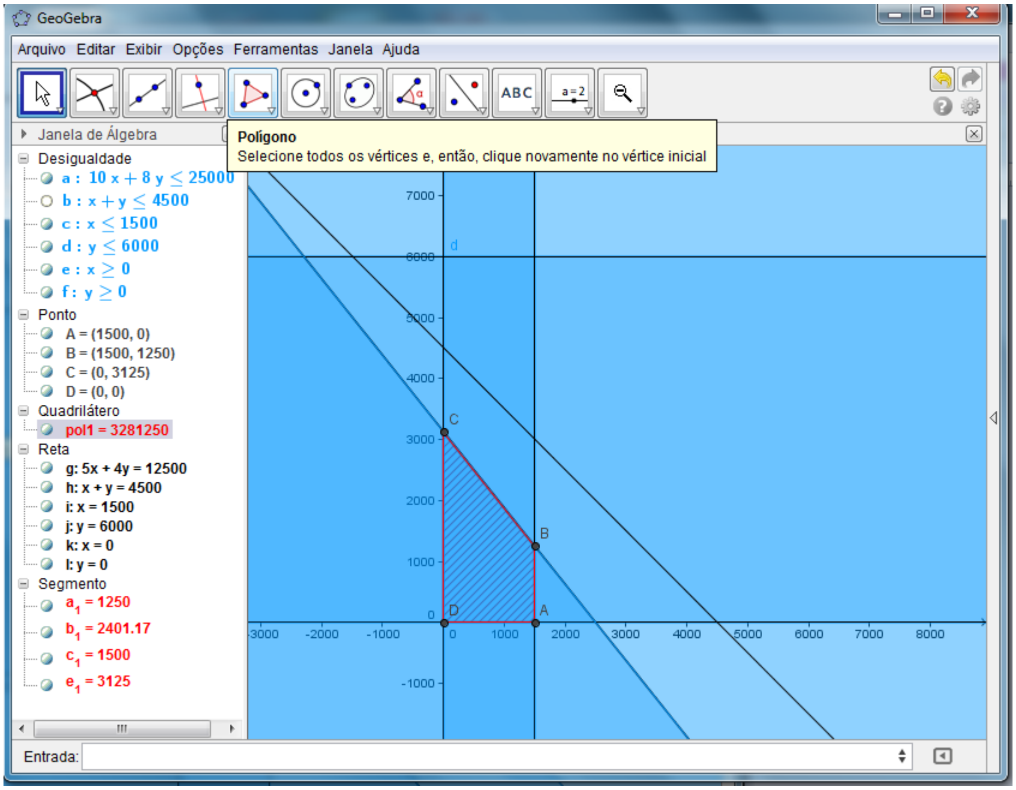

Figura 4.7: Desmarcação dos pontos da região não viável na Janela de Álgebra

- Digite *L(A), L(B), L(C), L(D)* , um de cada vez, observe que A, B, C, D são os vértices da região viável, ver Figura 4.8. Que resultarão nos valores da função objetivo relacionados aos respectivos vértices da região viável do problema.

- Ao final observe o valor maior que indica o Lucro Máximo da Empresa.

Assim, os discentes concluíram que a solução do problema se dá com a produção de 1.500 geladeiras do modelo luxo e 1.250 geladeiras do modelo básico, pois levam a maximizar o lucro da empresa em R$ 21.2500,00.

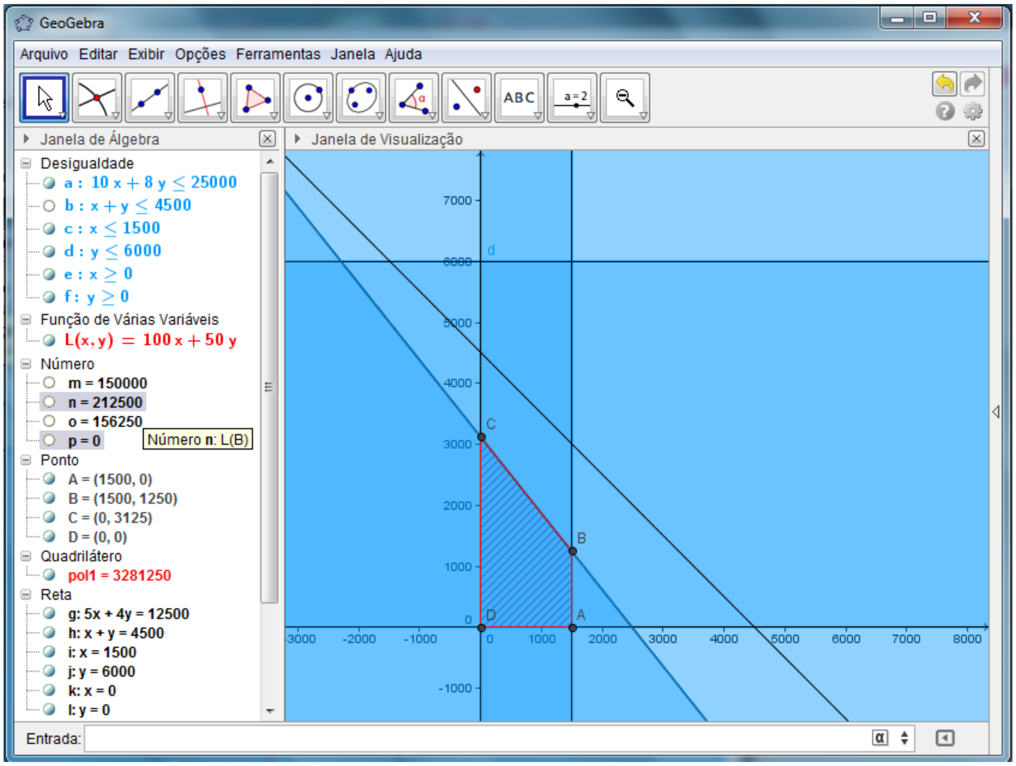

Figura 4.8: Substituição das coordenadas dos vértices na função objetivo

4.2 Resolvendo Problemas de Programação Linear com o Solver do Excel

Existem muitos softwares disponíveis no mercado que podem nos auxiliar na tarefa dos cálculos. Dentre as ferramentas que vêm ganhando cada vez mais adeptos, as planilhas eletrônicas são as preferidas. Dentre essas planilhas, as mais utilizadas são o Excel da Microsoft, o Lotus da Lotus/IBM e o Quattro-Pro da Corel. Conforme Lachtermarcher [13] todas elas dispõem basicamente das mesmas ferramentas, diferindo apenas a forma do comando empregado. Depois dos alunos terem feito a analise e a resolução pelo método gráfico, resolvemos mostrar também a praticidade da utilização de uma planilha Excel na resolução dos cálculos.

A seguir apresentaremos as instruções utilizadas na sala do laboratório para a resolução do problema no exemplo 3.

1ª Parte: Carregamento da Planilha

Na Figura 4.9 mostra o carregamento da planilha do Excel com os dados do exemplo 3. Observe que a montagem da planilha seguiu os seguintes passos:

1. Os coeficientes da matriz das restrições foram digitados nos campos identificados com o título **Coeficientes das Restrições**. Temos que observar atentamente a ordem e os sinais. Nos espaços em branco, devemos digitar 0.

2. Os termos independentes devem ser digitados nas células marcadas com o título **Disponibilidades**. Todos os termos independentes devem ser digitados, inclusive os de valor 0.

3. Os **Lucros Unitários** foram digitados nos campos correspondentes, observando-se com cuidado os sinais.

4. Em seguida devemos carregar, nas células marcadas com o título **Quantidade Utilizada**, as relações matemáticas das restrições. A Figura 4.10 mostra o exemplo da fórmula carregada na célula F7 correspondente à primeira restrição. E. Finalmente, devemos criar uma fórmula para o valor da função objetivo, que será carregada na célula H15, como mostra a Figura 4.11.

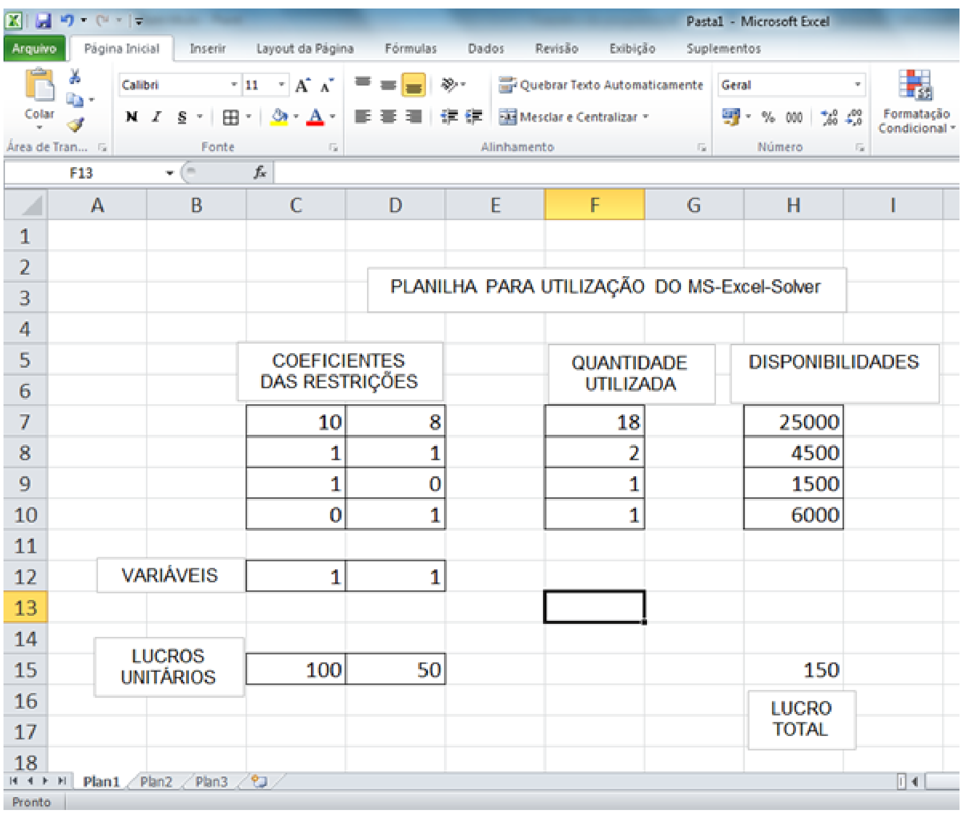

Figura 4.9: Carregamento da planilha Excel

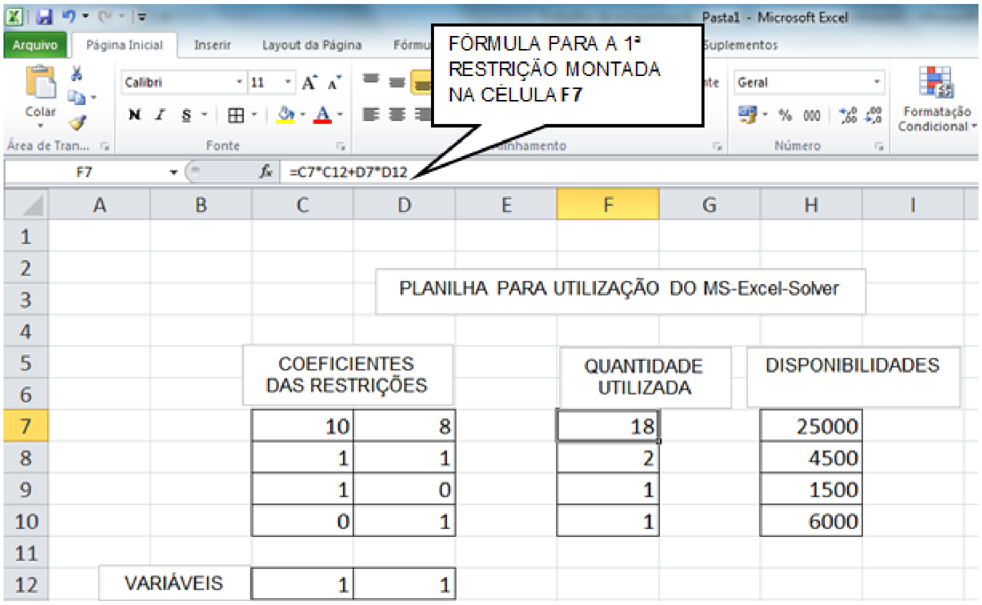

Figura 4.10: Fórmula para a 1ª restrição

2ª Parte: Programação do Solver

Para resolver o problema de programação linear neste exemplo, programamos a ferramenta Solver. Para isso, selecionamos no menu **Dados** e em seguida **Solver**. Na janela **Parâmetros do Solver**, vamos informar todas as células que contêm os elementos do nosso modelo. Assim, temos:

1. No campo **Definir objetivo**, informamos a célula que conterá o valor da função objetivo. No exemplo, a célula H15.

2. No campo **Para**, devemos informar **Max**, pois o problema é de maximização.

3. No campo **Células variáveis** informamos o intervalo de células que contêm as variáveis. No exemplo: o intervalo **C12:D12** como mostra a Figura 4.12.

4. Submeter às restrições, utilizando o comando **Adicionar** para inserir as restrições do modelo, observemos as Figuras 4.13 e 4.14.

E assim, temos a programação completa para resolvermos o problema. Na Figura 4.15 mostra a janela **Parâmetros do Solver** com todos os dados. E quando acionamos o comando **Resolver** dessa janela, o programa procura uma solução para o problema. Uma vez encontrada a solução, recebemos de volta uma janela como mostra a Figura 4.16. Observemos que nessa janela temos várias opções, podemos aceitar a solução encontrada, que é mostrada na própria planilha (ver Figura 4.17), ou podemos voltar aos valores originais, caso queiramos corrigir algum dado.

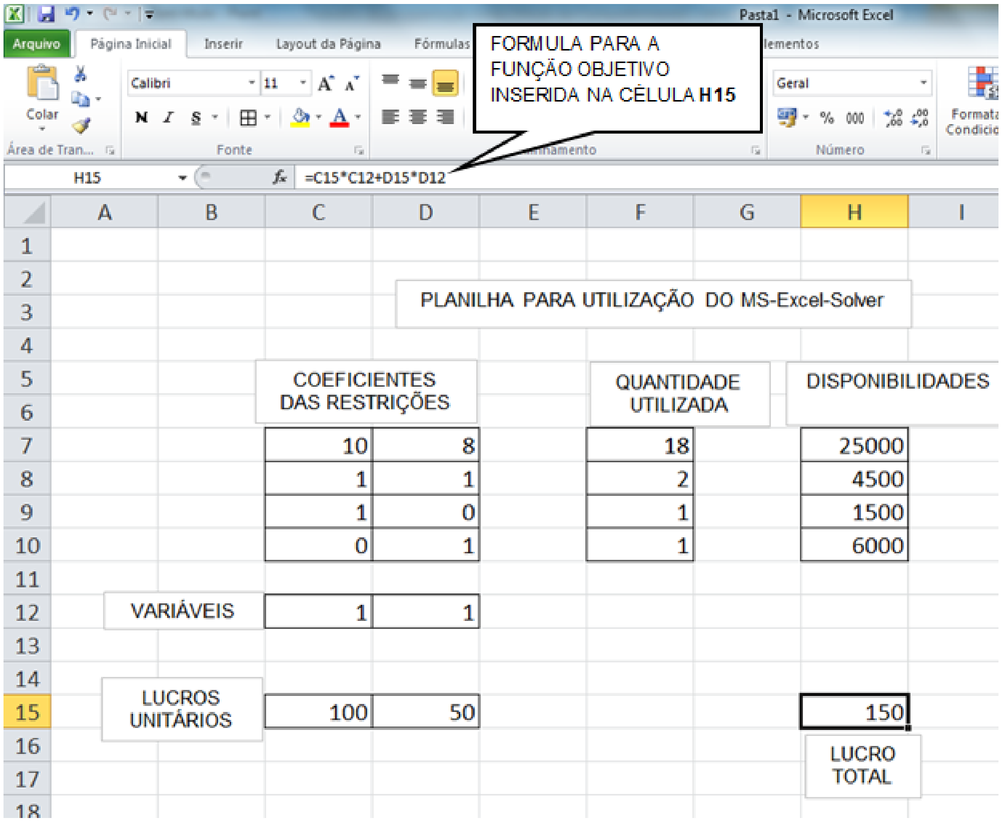

Figura 4.11: Fórmula da função objetivo

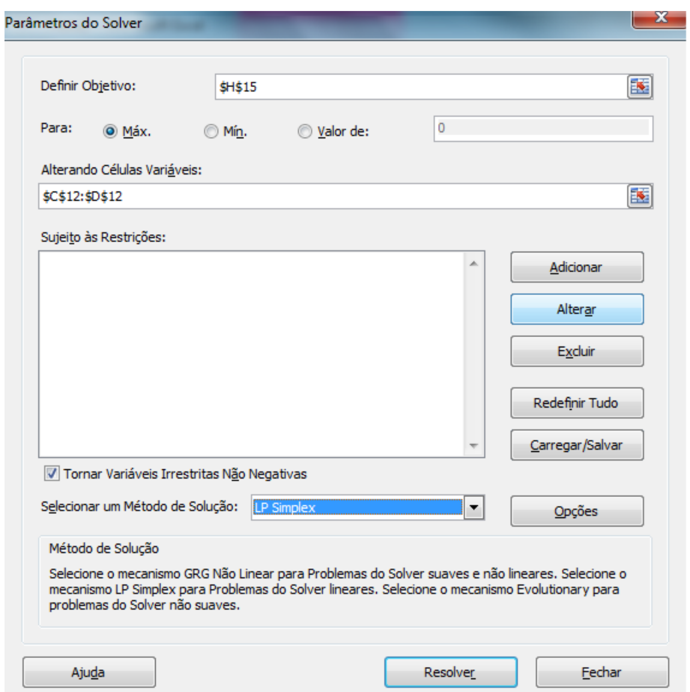

Figura 4.12: Informações do valor da função objetivo e células variáveis

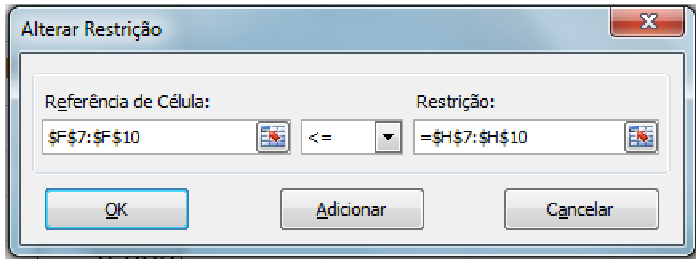

Figura 4.13: Restrições de desigualdades

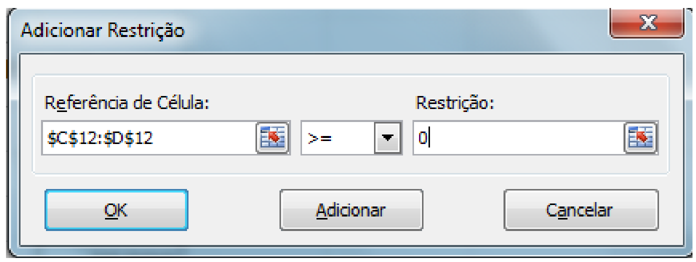

Figura 4.14: Restrições de não-negatividade das variáveis

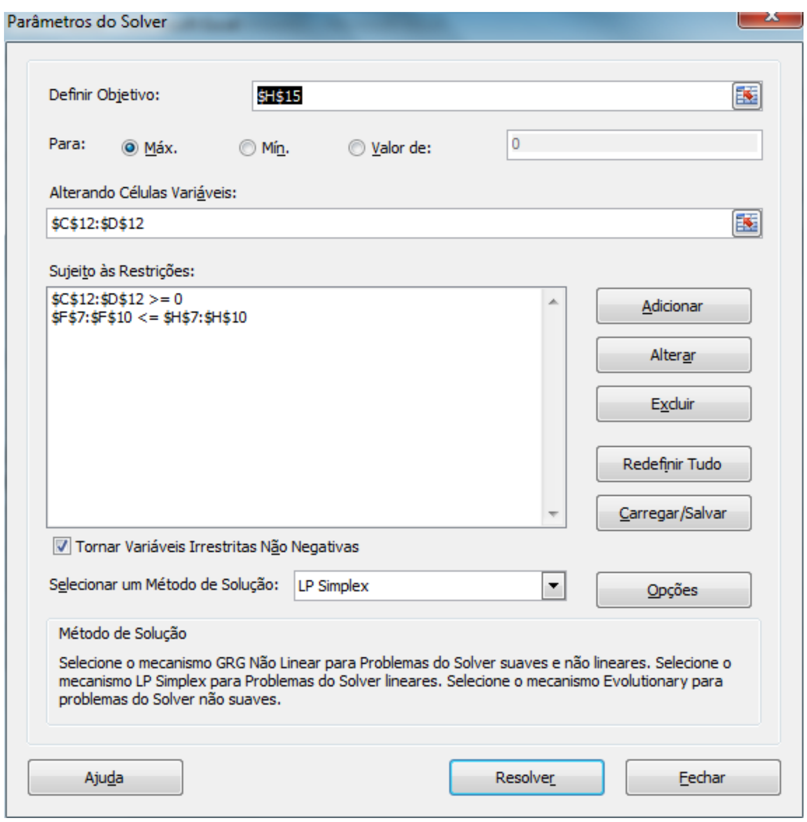

Figura 4.15: Informações completas para utilização do Solver

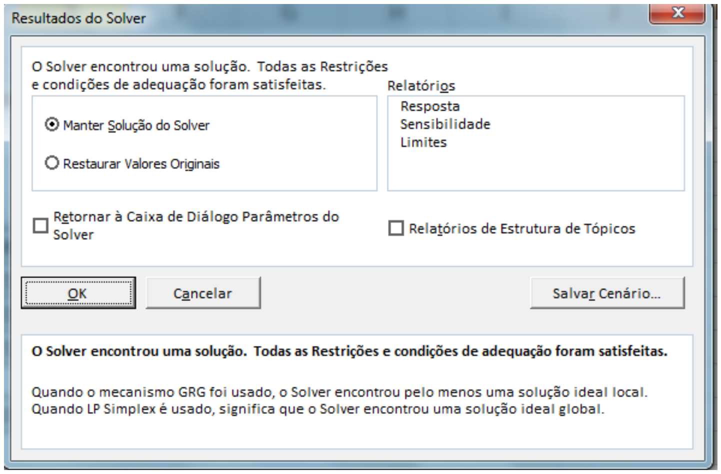

Figura 4.16: Respostas do programa quando encontra uma solução

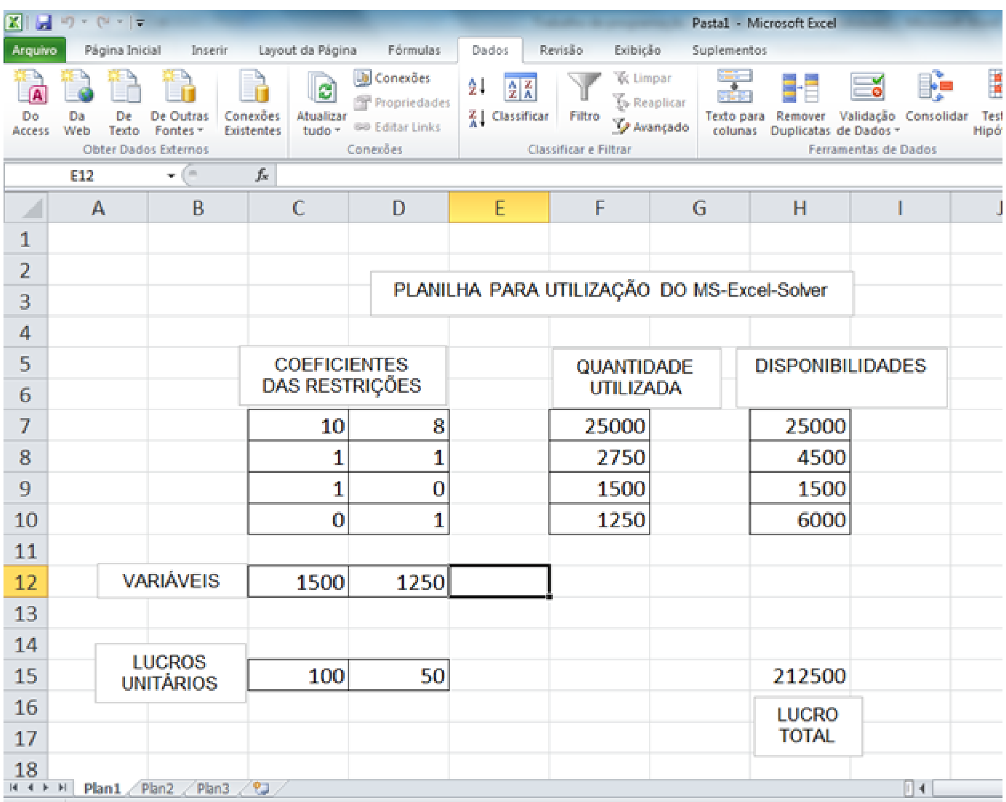

Figura 4.17: Solução do problema mostrada na planilha

Capítulo 5

Considerações Finais

Nesta trabalho propusemos métodos para a resolução do problemas de Programação Linear, utilizamos uma estratégia de elaborar uma sequência didática escolhendo problemas atrativos, que despertem o interesse e curiosidade dos alunos. Nossa contribuição consistiu na formulação de um breve histórico sobre pesquisa operacional e da programação linear com atividades aplicadas que desenvolvidas exclusivamente usando problemas de Programação Linear propostos, evitando exercícios enfadonhos e sem sentido prático.

Como resultado, sugerimos incentivar os alunos a elaborarem conjecturas e conclusões sobre os conteúdos estudados, respeitando seus ritmos e ideias. Também observamos que o uso do recurso computacional se deu de forma consciente, ou seja, usado como instrumento facilitador para que o aluno pudesse gerar conclusões (principalmente com o uso dinâmico). A experiência com essa atividade mostrou ser conveniente iniciar as aulas com problemas de programação linear com apenas duas variáveis, pois utilizamos o método gráfico para problemas de modelagem que mostrou-se bastante eficaz na resolução e contribuiu significativamente para a compreensão e contextualização dos conteúdos estudados no ensino médio como o estudo de funções, desigualdades e sua representação gráfica.

Por fim, o envolvimento e o compromisso da maioria dos discentes com as atividades propostas no laboratório foram bastante satisfatório. Pois, podemos perceber que quando motivado de forma dinâmica, o aluno tende a participar e responder, melhorando seu desempenho nas atividades propostas.

Esperamos que neste trabalho que apresenta nossa proposta possa gerar discussões sobre a prática do processo de ensino e aprendizagem da Programação Linear no Ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, Eduardo L. *Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e modelos para análise de decisões*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

[2] ARENALES, Marcos. et al. *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

[3] BARBOSA, C.B. *Planejamento do Tratamento por Radioterapia Através de Método de Pontos Interiores*. Dissertação de Mestrado, USP - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Paulo: 2003.

[4] BELMAND, R.; DREYFUS, S. *Applied Dynamic Programming*. Princeton: Princeton University Press, 1962.

[5] BOLDRINI, José L. et al. *Álgebra Linear*. São Paulo: Harbra, 1980.

[6] BRASIL. MEC. SEF. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental*. Brasília, 1998.

[7] CAMARGO, Ramina. et al. *Introduzindo a Programação Linear no Ensino Médio*. In: SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA,1, Brasília, 2013.

[8] DANTZIG, George B. *Linear Programming and Extensions*. Princeton: Princeton University Press, 1963.

[9] DANTZIG, George B. *Linear Programming. History of Mathematical Programming:*A collection of personal reminiscence, Lenstra, J. K.; Rinnooy Kan, A. H. G.; Schrijver, A. CWI, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[10] FORD, R. L.; FULKERSON, D. R. *Flows in Network*. Princeton: Princeton University Press, 1962.

[11] GASS, S. I. *Linear Programming: Methods and Application*. Nova York: McGraw-hill, 1958.

[12] KARMARKAR, N. *A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programing*. Combinatórica, Vol. 4, Nº4, 373-395, 1984.

[13] LACHTERMACHER,Gerson. *Pesquisa operacional na tomada de decisões*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

[14] MACULAN, N.; FAMPA, M. *Otimização Linear*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

[15] MOREIRA, Daniel. *Pesquisa Operacional: Curso Introdutório*. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

[16] NETO, Luiz L. S. *Tópicos de Pesquisa Operacional para o Ensino Médio*. Artigo - Pólo Universitário do Sul Fluminense. Rio de Janeiro: 2006.

[17] PAIVA, Suzete M. A. *A programação linear no ensino secundário*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Portucalense Infante D. Henrique. Lisboa: 2008.

[18] RECH, Roberto. *Resolvendo Problemas de otimização no Ensino Médio*. Artigo - UNOPAR. Pará: 2008.

[19] SIMONNARD, Michel. *Programmation Linéaire - Technique du Calcul Economique*. Paris: Dunod, 1973.

[20] TAHA, Hamdy A. *Pesquisa Operacional*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

[21] WRIGHT, S. J. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. SIAM - Philadelphia: PA, 1997