

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

*ALGUNS TEOREMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA SINTÉTICA E
APLICAÇÕES*

VINÍCIUS PAULO DE FREITAS

MANAUS

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

VINÍCIUS PAULO DE FREITAS

*ALGUNS TEOREMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA SINTÉTICA E
APLICAÇÕES*

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2013

Ficha Catalográfica
(Catalogação realizada pela Biblioteca Central da UFAM)

F866a	<p>Freitas, Vinícius Paulo de. Alguns teoremas clássicos da geometria sintética e aplicações / Vinícius Paulo de Freitas. - 2013. 79 f. : il. Dissertação (mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Amazonas. Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira.</p> <p>1. Geometria 2. Teoremas clássicos 3. Ensino-aprendizagem I. Oliveira, Nilomar Vieira de, orientador II. Universidade Federal do Amazonas III. Título</p> <p>CDU (1997): 514.752 (043.3)</p>
-------	--

VINICIUS PAULO DE FREITAS

ALGUNS TEOREMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA SINTÉTICA E
APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 07 de março de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

Profa. Dra. Flávia Morgana Oliveira Jacinto
Membro

Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira
Membro

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e bênçãos a mim concedidas por sempre guiar meus passos para realizar com sucesso os meus objetivos.

A meus pais, que sempre foram minha base forte nesta caminhada, o meu muito obrigado por tudo àquilo que me instruíram e por todos os princípios que me foram passados.

A meus amores Meire Alves Muraiare de Freitas e Francisco Emanuel Muraiare de Freitas, esposa e filho, pela dedicação, amor, apoio e principalmente pelo incentivo constante sem o qual eu não estaria concretizando este sonho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pela confiança e dedicação, por toda liberdade no desenvolvimento deste estudo e ter acreditado em meu potencial me conduzindo para esta realização, obrigado pelas horas e apoio disponibilizados.

A todos meus professores do PROFMAT, pela arte de ensinar, por nos desafiar e acreditar em nossa capacidade de aprender sempre mais.

Enfim, agradeço aos amigos pelo companheirismo nas árduas vitórias conquistadas e todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução dessa Dissertação de Mestrado.

RESUMO

Neste trabalho procuramos fazer uma abordagem simples de alguns teoremas clássicos da Geometria Euclidiana Plana e torná-los mais conhecidos, pois embora tenham um grande papel na resolução de muitos problemas geométricos, estão de certa forma esquecidos tanto no ensino básico quanto no ensino de graduação. No intuito de resgatar tais teoremas, desenvolvendo assim habilidades em Geometria, exploramos os seguintes teoremas: Stewart, Menelaus, Ceva, Reta de Simpson-Wallace, Ptolomeu, Hiparco, Napoleão, Miquel, Desargues, Pascal, Pappus e Feuerbach. Para as demonstrações destes teoremas, fizemos o uso de alguns resultados da Geometria Plana e da Geometria Inversiva. Acreditamos que tanto o enfoque da realização desse trabalho, com a utilização da Geometria Inversiva, por exemplo, como os teoremas clássicos, que utilizamos simplesmente métodos elementares da Geometria Sintética, pode servir para a melhoria do ensino-aprendizagem de Geometria Euclidiana Plana e possivelmente servir de elemento motivador para alunos e professores que busquem aprimorar seus conhecimentos em Geometria nos seus diversos desdobramentos.

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem, Geometria Euclidiana, Teoremas Clássicos, Geometria Inversiva.

ABSTRACT

In this work, we tried to take a simple approach of some classical theorems of Euclidean Plane Geometry and make them better known, because although they have a great role in solving many geometrical problems, they are somehow forgotten both in primary and in undergraduate education. In order to redeem such theorems, therefore developing the people skills in Geometry, we explored the following Theorems: Stewart, Menelaus, Ceva, Wallace-Simpson line, Ptolemy, Hipparchus, Napoleon, Miquel, Desargues, Pascal, Pappus and Feuerbach. For the proofs of the mentioned theorems, we use some results of Plane Geometry and Inversive Geometry. We believe that both approach the making of this work, with the use of Inversive Geometry, for instance, as the classical theorems which we used only elementary methods of Synthetic Geometry, can serve to improve the teaching and learning of Euclidean Plane Geometry and possibly serve as the motivating element for students and teachers seeking to improve their knowledge in Geometry in its various ramifications.

Keywords: Teaching-Learning, Euclidean Geometry, Classical Theorems, Inversive Geometry.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Um Breve Histórico da Matemática e da Geometria Euclidiana	1
1.2	Motivação e Métodos do Trabalho	4
1.3	Estrutura do Trabalho	5
2	Os Teoremas Clássicos Abordados	6
2.1	Teorema de Stewart	6
2.2	O Teorema de Menelaus e o Teorema de Ceva	8
2.3	Reta de Simpson-Wallace	16
2.4	Teorema de Ptolomeu e o Teorema de Hiparco	18
2.5	Teorema de Napoleão	21
2.6	Teorema de Miquel	26
2.7	A reta de Euler e a Circunferência dos nove pontos	27
2.8	Teorema de Feuerbach	32
3	Algumas Aplicações dos Teoremas Estudados	44
3.1	Aplicações do Teorema de Stewart	44
3.2	Aplicações dos Teoremas de Menelaus e Ceva	47
3.3	Aplicações do Teorema de Ptolomeu	55
	Considerações Finais	58
	Referências Bibliográficas	59
A	Demonstrações dos teoremas auxiliares	62

LISTA DE SÍMBOLOS

\overleftrightarrow{AB}	Reta AB.
\overrightarrow{OP}	Semirreta AB.
\overline{AB}	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
\widehat{ABC}	Medida do ângulo ABC.
$\text{sen } \theta$	Senô do ângulo θ .
$\text{cos } \theta$	Cosseno do ângulo θ .
$\triangle ABC$	Triângulo ABC.
S_{ABC}	Área do triângulo ABC.
$\overline{AB} \perp \overline{CD}$	Segmento AB perpendicular ao segmento CD.
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	Reta AB paralela a reta CD.
$AB \equiv CD$	Segmento AB congruente ao segmento CD.
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$	Triângulo ABC congruente ao triângulo DEF.
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	Triângulo ABC semelhante ao triângulo DEF.
$2p$	Perímetro.
$S = C(O, r)$	Círculo ou circunferência de centro no ponto O e raio r .
$P' = \text{Inv}(P)$	P' é o inverso de P .
■	Indica o fim de uma demonstração.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Um Breve Histórico da Matemática e da Geometria Euclidiana

Para entendermos o processo de surgimento da Matemática e, conseqüentemente, da Geometria, que evidentemente não tinha contorno de Ciência, vamos voltar a mais de 3000 a.C., no período da Pré-história em que o método científico chama de *Idade da Pedra*¹. Nesse período os agrupamentos humanos eram nômades, viviam da coleta de frutas e da caça, dominavam o fogo, comunicavam-se através da fala, e eram capazes de fabricar instrumentos rudimentares de pedra e madeira [8].

Produzir conhecimento, em particular conhecimento matemático, nessa época, era quase impossível, devido a condições hostis em que o ser humano vivia. Também não existia a agricultura, que foi uma grande aliada para o desenvolvimento intelectual do homem, como veremos mais adiante.

Outro fator que atrasou muito o avanço científico nesse período foram os sacerdotes, que eram pessoas que tinham certos poderes nos povoados, pois todos os fenômenos naturais eram interpretados por eles como sendo algo divino, não podendo, assim, sequer questioná-los.

Mas como a Matemática foi estimulada nesse tempo? Bem, a resposta vem dos artesãos que, na busca de meios para o sustento na luta pela sobrevivência das comunidades, construíam armadilhas, utensílios, etc, desenvolvendo assim o raciocínio abstrato, e dos caçadores que praticavam um tipo rústico de comércio, desenvolvendo a idéia de contar.

Apesar de todo empirismo do conhecimento matemático desenvolvido na Idade da Pedra, a utilização da Matemática e o raciocínio abstrato surge como apoio à vida diária. Mas foi por volta de 3000 a.C, já na *Idade do Bronze*², que a Ciência em geral, e a Matemática em particular, puderam se desenvolver de uma forma mais intensa. E o

¹Período compreendido em torno de 500.000 a.C. e 3.000 a.C.

²Período que vai de 3.000 a.C. até 1.500 a.C.

motivo deste impulso é o surgimento de atividades agrícolas ao longo dos rios Nilo, Tigre, Eufrates e Amarelo³.

Com a agricultura o homem passou a produzir um certo “estoque”, de alimentos, podendo assim se dedicar ao mundo das idéias. A Matemática nesta época ainda era muito empírica, não passava de uma coleção de regras práticas que permitia operações de cálculos de áreas, volumes de alguns sólidos e resolver outros problemas simples.

Por volta de 600 a.C. com os filósofos naturalistas, o homem deixa de ser submisso às crenças e passa a interpretar a natureza de forma independente, sem a manifestação de uma vontade divina. Foi nessa época que a Matemática começou a ganhar contorno de Ciência. E o primeiro a organizar racionalmente o pensamento e a apresentar o conhecimento matemático através de uma cadeia de raciocínios dedutivos, foi o filósofo naturalista Tales de Mileto [8].

Tales transformou as verdades geométricas de seu tempo, e aquelas conhecidas pelos egípcios e outros povos, em um sistema lógico, ordenado e coerente. Ele estudou ângulos, retas e superfícies e realizou demonstrações formais e rigorosas sobre as relações geométricas no círculo e no triângulo isósceles.

Seguindo os passos de Tales, outros geômetras avançaram na organização lógica e sistematizada da Matemática. Dentre estes, Pitágoras, que tem seu nome destacado em manuscritos sobre a geometria primitiva. Reza a história que devido a proximidade das cidades onde Tales e Pitágoras nasceram, Pitágoras possivelmente tenha estudado com Tales.

Na cidade de Crotona, situada no sul da Itália, Pitágoras fundou a famosa e misteriosa “escola pitagórica⁴”. Apesar de toda essa natureza mística, a escola fundada por Pitágoras produziu, por cerca de duzentos anos que se seguiram à fundação da escola, grandes resultados matemáticos novos e aprimorando outros já conhecidos. Dentre esses resultados, estão as propriedades das retas paralelas e de figuras semelhantes, algumas teorias de proporções, alguns poliedros regulares e a relação entre os lados de um triângulo retângulo⁵.

Com esta grande explosão de conhecimento matemático feito pelos pitagóricos e outros estudiosos da Matemática, começaram a surgir afirmações que derivam de outras anteriores. À medida que essas cadeias de afirmações se alongavam e se ligavam umas às outras, a idéia ousada de desenvolver toda Geometria com uma longa cadeia foi surgindo [16]. Vários matemáticos tentaram, alguns até com sucesso pelos menos parcialmente, reunir logicamente sob forma de uma única cadeia de proposições as afirmações geométricas, baseadas em algumas definições e suposições iniciais⁶. Mas foi por volta de 300

³As pessoas que viviam ao longo dessas bacias, eram conhecidas por suas habilidades em engenharia de drenagem, irrigação, demarcações, etc. Tais projetos requeriam muita Geometria.

⁴Para informações interessantes sobre a “escola pitagórica” ver [28].

⁵O Teorema de Pitágoras já era conhecida há 2.000 a.C, ou seja, há muito tempo antes de Pitágoras.

⁶Chamadas *axiomas* ou *postulados*, são afirmações que não são provadas, são consideradas óbvias e

a.C., que o matemático grego Euclides de Alexandria produziu uma obra composta de 13 livros, uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa a Geometria Plana e Espacial, Teoria dos Números e Álgebra Geométrica grega. “*Os Elementos*”, como ele a chamou, reúne quase todos os trabalhos gregos de Geometria durante três séculos, ou seja, desde o tempo de Tales, e é uma das obras mais influentes na história da Matemática, sendo considerada o tratamento axiomático-dedutivo sobrevivente mais antigo da Matemática.

Outros tratados foram escritos por outros grandes matemáticos, como Arquimedes (287 - 212 a.C.) e Apolônio (c. 225 a.C.). Vários dos trabalhos que Arquimedes produziu se perderam, mas quatro dos que sobreviveram, falavam sobre Geometria Plana e Espacial. Arquimedes foi o primeiro a apresentar corretamente as fórmulas para a área e volume da esfera, área da calota esférica e volume do segmento esférico. Na parte de seus trabalhos dedicados a Geometria Plana, ele apresentou um “*Método dos perímetros*”⁷ para calcular o valor de π , e descobriu que este número está entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$.

“*O grande geômetra*”, como foi chamado o matemático grego Apolônio, embora tenha sido um grande astrônomo, ficou famoso por sua obra “*Secções cônicas*”⁸, onde ele fez um estudo exaustivo sobre essas curvas. Outro trabalho de Apolônio que merece destaque, foi a construção, com régua e compasso, de um círculo tangente a três círculos dados; esse problema é conhecido hoje como “*O problema de Apolônio*”.

Com a morte de Apolônio, a época de ouro da Geometria grega chegou ao fim. Os geômetras que se seguiram, pouco mais fizeram do que preencher detalhes e talvez desenvolver independentemente certas teorias cujos germes já estavam contidos nos trabalhos de matemáticos que os antecederam [16]. Dentre esses geômetras destacam-se Menelaus (c. 100 a.C.), Cláudio Ptolomeu (127 - 150 d.C.) e Pappus (c. 300 d.C.), por terem feito grandes aplicações da Geometria.

A partir século XVII, com a álgebra mais apurada, surge com mais força a idéia de estabelecer um teorema em Geometria a um teorema correspondente em Álgebra. Nasce, assim, a Geometria Analítica, com técnicas e metodologias desenvolvidas por dois matemáticos franceses: Pierre de Fermat (1601 - 1665) e René Descartes (1596 - 1650). Embora a origem formal da Geometria Analítica seja atribuída a estes dois matemáticos, existem indícios, ao longo da própria história da Matemática, de seu uso empírico em mapas e agrimensura feitos pelos antigos egípcios e gregos, que sugerem o uso de coordenadas e aplicações de Álgebra à Geometria.

A atribuição de Descartes como um dos inventores da Geometria Analítica, veio do

necessárias para a construção ou aceitação de uma teoria.

⁷Este método consiste em tomar um hexágono inscrito em uma circunferência e outro circunscrito a ela, o perímetro da circunferência está compreendido entre os perímetros destes hexágonos, obtendo, assim, uma aproximação por deficiência e outra por excesso para o valor de π .

⁸São curvas planas que são obtidas da interseção de um cone circular com um plano. São exemplos de cônicas: Parábola, Elipse, e Hipérbole.

seu tratado “*Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências*”, publicado em 1637, onde apresentou suas idéias sobre a unificação de Álgebra e Geometria. Já a atribuição de Fermat, baseia-se em um pequeno texto, intitulado “*Introdução aos lugares planos e sólidos*”, publicado provavelmente em 1679.

Quase que paralelamente ao grande impulso que a Geometria Analítica teve no século XVII, outra teoria, que mais tarde revolucionou a geometria, teve uma notável ampliação, a chamada Geometria Projetiva⁹. O francês Girard Desargues (1591 - 1661), engenheiro e arquiteto, influenciado pela necessidade cada vez maior que artistas e arquitetos tinham para produzir quadros mais realistas, se aprofundou nos conceitos de *Ponto de fuga* e *Perspectividade*¹⁰. Contudo, talvez pela própria maneira como tinha escrito, ou por causa da Geometria Analítica que era mais flexível, as idéias de Desargues não foram bem aceitas na época.

Somente no início do século XIX, Jean Poncelet (1788 - 1867), com seu trabalho “*Propriétés Projectives des Figures*” de 1822, desenvolveu idéias que inauguraram o chamado “grande período da Geometria Projetiva”. Após Poncelet outros nomes surgiram na Geometria Projetiva ajudando-a a solidificá-la, dentre os quais destacamos Michael Chasles (1798 - 1867), Jacob Steiner (1756 - 1831) e Von Staudt (1798 - 1867).

Como vimos no início deste Capítulo, a Geometria empírica se tornou uma Geometria demonstrativa, fruto de trabalhos desenvolvidos por diversos povos, no qual destacamos os gregos. Estes, afirmavam que só havia um espaço e uma Geometria. O espaço não era pensado como um conjunto de pontos¹¹, os objetos podiam se deslocar livremente e ser comparados uns com os outros [5], ou seja, a relação básica era de congruência ou superposição. No século XIX, com o descobrimento das Geometrias não Euclidianas Clássicas, os matemáticos aceitaram a situação de que há mais do que um espaço concebível e, portanto, mais do que uma Geometria.

1.2 Motivação e Métodos do Trabalho

Atualmente com a decadência do ensino de Geometria na educação básica brasileira, tem-se aumentado o interesse de pesquisadores de Ensino da Matemática em debater esta problemática nas escolas e, até mesmo, nas Universidades. “Além disso, há uma consciência coletiva da importância deste ramo da Matemática, como área de aprendizagem, pela sua contribuição na formação e cultura dos alunos e pela aplicação que tem em outras Ciências, inclusive dentro da própria Matemática” [27].

⁹Esta Geometria estuda as propriedades descritivas das figuras. É uma forma não métrica da Geometria.

¹⁰É uma transformação sob a qual duas figuras são perspectivas. O ponto localizado na linha do horizonte, pra onde todas as linhas paralelas convergem, quando vistas em perspectiva, chama-se *Ponto de Fuga*.

¹¹Isso só veio acontecer no século XVII com a Geometria Analítica.

Foi nesse intuito de tornar o ensino de Geometria mais interessante e resgatar alguns de seus resultados clássicos já até esquecidos no ensino básico e, geralmente, no ensino de graduação, é que desenvolvemos este trabalho, objetivando criar um roteiro de estudo direcionado aos níveis de educação supracitados. A ideia é desenvolver habilidades em Geometria, explorando “alguns teoremas clássicos da Geometria Euclidiana”, tais como o Teorema de Stewart, que é utilizado no cálculo dos comprimentos das principais cevianas; os Teoremas de Menelaus e Ceva, que tratam, respectivamente, de problemas de colinearidades e concorrências; a Reta de Simpson-Wallace, que nos mostra quando um tipo especial de triângulo é degenerado; os Teoremas de Ptolomeu e Hiparco, que relacionam as diagonais e os lados de um quadrilátero inscrito, e também nos dá uma condição de inscrição de quadriláteros sem a utilização de análise ângulos; o Teorema de Napoleão, que é um resultado interessante que vem dos triângulos e que possui grande quantidade de propriedades, variações e generalizações; o Teorema de Miquel, que trata da concorrência de circunferências em um quadrilátero completo; a Reta de Euler e a Circunferência dos nove pontos, que tratam de resultados surpreendentes envolvendo alguns pontos notáveis dos triângulos; o Teorema de Feuerbach, que fornece uma propriedade importante da Circunferência dos nove pontos, e outros não menos interessantes que serão chamados, neste trabalho, de “aplicações”, pois seguem diretamente dos teoremas acima citados.

Para tal estudo fizemos uma minuciosa pesquisa bibliográfica, e com o auxílio do software *GeoGebra* procuramos detalhar a visualização geométrica dos teoremas abordados bem como as figuras que ajudarão nas demonstrações dos mesmos.

1.3 Estrutura do Trabalho

Com o intuito de atender os objetivos citados na seção anterior, no capítulo seguinte apresentamos “alguns teoremas clássicos da Geometria Euclidiana Plana” com suas respectivas demonstrações e, alguns deles com uma segunda demonstração. Como estes teoremas, com exceção do Teorema de Feuerbach que utiliza Geometria Inversiva, utilizam outros resultados bastante conhecidos da Geometria Plana, antes de apresentá-los, enunciaremos esses teoremas conhecidos e alguns de seus corolários ou proposições, cujas demonstrações são apresentadas no Apêndice.

No Capítulo 3, faremos algumas aplicações de alguns dos teoremas estudados no capítulo anterior. Muitas dessas aplicações, também são “teoremas clássicos da Geometria”, como, por exemplo, os Teoremas de Desargues, Pappus e Pascal.

Nas Considerações Finais, apresentamos nossa visão sobre os assuntos abordados neste trabalho e como elas podem contribuir para a melhoria do ensino de Geometria no Ensino Básico e nos períodos iniciais da graduação.

Capítulo 2

Os Teoremas Clássicos Abordados

2.1 Teorema de Stewart

Na Geometria Euclidiana plana, sem qualquer dúvida, o polígono que mais ocupa destaque é o triângulo. Esta figura geométrica, que ocupa espaço interno limitado pela reunião de três segmentos (formado por três pontos não colineares) e três ângulos cuja soma resulta 180° , possui propriedades interessantes. Entre elas, apresentamos a relação de Stewart¹, que é um importante teorema da Geometria Plana que relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo com o comprimento de uma ceviana², sendo aplicável a uma ceviana qualquer.

Cevianas de um triângulo são segmentos que possuem extremidades no vértice e na reta suporte ao lado oposto a este vértice. São exemplos de cevianas a *mediana*, que é um segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto a este vértice; a *bissetriz* que é o segmento que divide o ângulo ao meio e tem a propriedade de que todos os seus pontos estão a igual distância dos lados do ângulo que forma o vértice; e a *altura* que é um segmento perpendicular ao lado oposto ao vértice.

Teorema 2.1.1. (*Lei dos Cossenos*) *Em um triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.*

Teorema 2.1.2. (*Teorema de Stewart*) *Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ e seja x o comprimento de uma ceviana \overline{AD} que divide \overline{BC} em dois segmentos $BD = m$ e $DC = n$. Então vale a seguinte relação:*

¹Matthew Stewart matemático do século XVIII, nasceu numa pequena ilha chamada Bute, na Escócia. Educado em Rothesay Grammar School, entrou na Universidade de Glasgow em 1734, onde estudou Geometria antiga. Foi na publicação de sua famosa obra: *Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts os Mathematics*, onde ele garantiu uma vaga como professor na Universidade de Edimburgo, que Stewart apresentou a proposição II, hoje conhecida como Teorema de Stewart.

²Em homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva, que formulou o teorema que leva o seu nome e será tratado na próxima seção.

$$b^2m + c^2n = a(x^2 + mn)$$

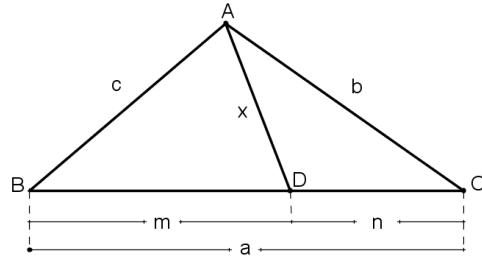


Figura 2.1: Teorema de Stewart.

Demonstração. Do Teorema 2.1.1 aplicado no $\triangle ABD$ temos

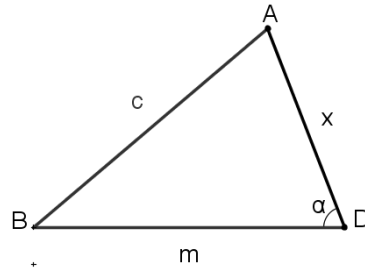


Figura 2.2: $\widehat{BDA} = \alpha$.

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2xm \cdot \cos \alpha \tag{2.1}$$

Procedendo da mesma forma no $\triangle ADC$, temos

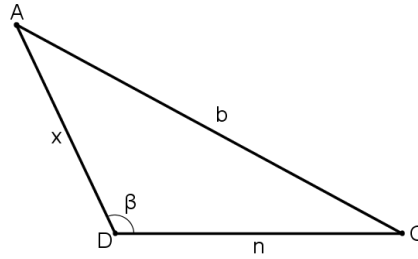


Figura 2.3: $\widehat{ADC} = \beta = 180^\circ - \alpha$.

$$b^2 = x^2 + n^2 - 2xn \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \tag{2.2}$$

Multiplicando (2.1) por n e (2.2) por m, vem que

$$c^2n = x^2n + m^2n - 2xmn \cdot \cos \alpha \tag{2.3}$$

$$b^2m = x^2m + n^2m - 2xnm \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \tag{2.4}$$

Somando (2.3) e (2.4) e fazendo $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, temos

$b^2m + c^2n = x^2(m + n) + nm(m + n)$, mas $m + n = a$ (conforme Figura 2.1), logo

$$b^2m + c^2n = x^2a + mna = a(x^2 + mn)$$



2.2 O Teorema de Menelaus e o Teorema de Ceva

Muitos dos problemas envolvendo triângulos estão relacionados com conjuntos de determinados pontos que são *colineares*, ou com conjuntos de segmentos que são *concorrentes*. Problemas estes que podem ser solucionados através de dois Teoremas Clássicos da Geometria Euclidiana: O Teorema de Menelaus³ e o Teorema de Ceva⁴. O primeiro trata de colinearidade de pontos e o segundo de concorrência de segmentos. Com a ajuda destes dois teoremas, provas que envolvem colinearidade e concorrência, que antes eram longas e complicadas, passaram a ser simplificada, tornando-as acessíveis a todos os níveis de ensino.

Veremos no Capítulo 3 algumas de suas aplicações, desde os bem conhecidos resultados de concorrência das alturas, medianas e bissetrizes de um triângulo, aos menos ensinados nos cursos de Geometria, como os Teoremas de *Desargues* e de *Pascal*.

Como o Teorema de Menelaus faz uso de razão orientada de segmentos colineares, faremos um breve resumo sobre este assunto antes de sua demonstração.

Definição 2.2.1. (*Razão orientada*) A razão orientada $r = (M, \overleftrightarrow{AB})$, em que o ponto M divide a reta \overleftrightarrow{AB} , é um número tal que $|r| = \frac{AM}{MB}$.

Dada esta definição, a pergunta agora é: Como sabermos se o ponto M está ou não entre os pontos A e B ? A resposta vem das propriedades da razão orientada de segmentos, que são elas:

- Se $M \in \overline{AB}$, então $\frac{AM}{MB} > 0$. De fato, neste caso \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{MB} tem a mesma orientação.
- Se $M \notin \overline{AB}$, então $\frac{AM}{MB} < 0$. De fato, neste caso \overrightarrow{AM} e \overrightarrow{MB} tem orientação oposta.

Para o Teorema de Menelaus, consideraremos apenas as medidas que levam em conta a orientação dos segmentos, que são chamadas de *medidas algébricas*. Já aquelas medidas que não levam em consideração a orientação do segmento são chamadas de *medidas geométricas*.

Teorema 2.2.1. (*Teorema de Tales*) Um feixe de paralelas determinam sobre duas secantes quaisquer segmentos proporcionais.

Teorema 2.2.2. (*Teorema de Menelaus*) Sejam três pontos L , M e N localizados respectivamente nas retas suportes dos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} de um triângulo ABC (qualquer) e diferentes dos vértices. Então L , M e N são colineares se, e somente se

³Menelaus de Alexandria (aproximadamente 100 a.C.) era matemático e astrônomo que viveu em Alexandria, no Egito e em Roma. Escreveu vários tratados de Geometria, Trigonometria e Mecânica, teve seu teorema esquecido por 17 séculos, só redescoberto por Giovanni Ceva, em 1678.

⁴Giovanni Ceva era matemático e engenheiro italiano do século XVII. Em 1678, na sua obra *De lineis rectis*, publicou o Teorema de Menelaus e o teorema que leva seu nome.

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

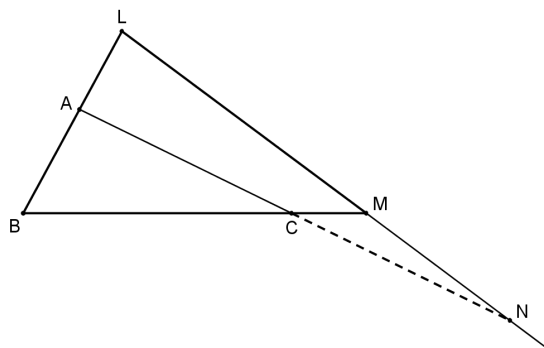


Figura 2.4: Teorema de Menelaus.

Demonstração. Seja o $\triangle ABC$, e sejam L , M e N pontos colineares pertencentes as retas \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{CA} , respectivamente. Pelo vértice A , traça-se uma reta \overleftrightarrow{AD} paralela a transversal \overleftrightarrow{LM} .

Pelo Teorema 2.2.1 as paralelas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{LM} cortam as secantes \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{BC} em partes proporcionais, daí

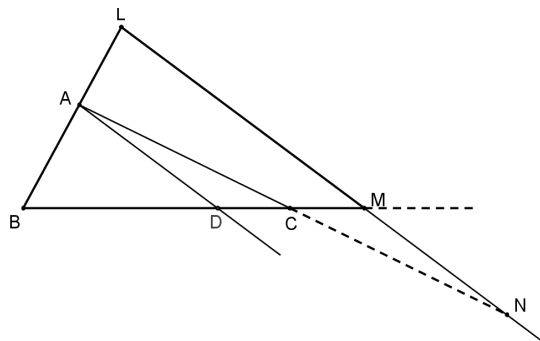


Figura 2.5: $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{LM}$.

$$\frac{LA}{MD} = \frac{LB}{MB} \implies \frac{LA}{MD} \cdot \frac{MB}{LB} = 1 \quad (2.5)$$

Aplicando o Teorema 2.2.1 às paralelas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{LM} que cortam, também, as secantes \overleftrightarrow{AN} e \overleftrightarrow{DM} em partes proporcionais. Assim

$$\frac{MD}{NA} = \frac{MC}{NC} \implies \frac{MD}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1 \quad (2.6)$$

Multiplicando (2.5) e (2.6), temos que

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \quad (2.7)$$

Reciprocamente, sejam L , M e N pontos pertencentes as retas suportes \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{CA} , respectivamente, de um $\triangle ABC$ tais que satisfazem a relação (2.7). Seja N' o ponto de intersecção de \overleftrightarrow{LM} com \overleftrightarrow{AC} , conforme figura abaixo.

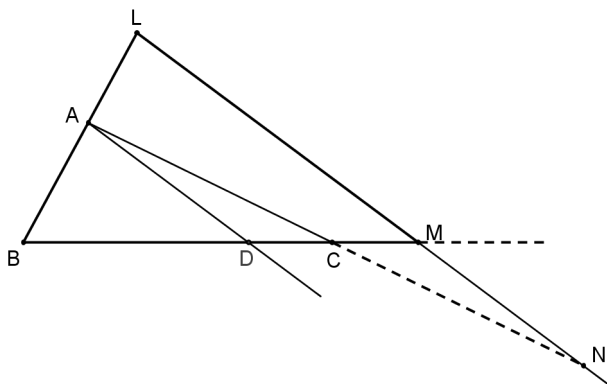


Figura 2.6: $\overleftrightarrow{LM} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{N'\}$.

Pelo que foi provado, temos que

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{N'C}{N'A} = 1 \quad (2.8)$$

De (2.7) e (2.8), temos $\frac{NC}{NA} = \frac{N'C}{N'A}$. Como existe apenas um único ponto que divide o segmento \overline{CA} numa dada razão, temos que $N' = N$.

Portanto L , M e N são colineares. ■

A seguir apresentaremos outra demonstração do Teorema de Menelaus. Mas antes veremos o seguinte teorema sobre semelhança de triângulos e área.

Teorema 2.2.3. (*Teorema Fundamental da Semelhança*) *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intersecta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que esta reta determina é semelhante ao primeiro.*

Corolário 1. *Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.*

Teorema 2.2.4. *Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ e as alturas h_a , h_b e h_c , respectivamente, relativas aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} . Então a área S do triângulo ABC é dada por*

$$S_{ABC} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

Decorre imediatamente deste teorema o seguinte corolário:

Corolário 2. Sendo θ o ângulo formado pelos lados \overline{AC} e \overline{AB} . Então a área S do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen } \theta$$

Outra demonstração do Teorema de Menelaus

Suponhamos primeiramente que os pontos L, M e N sejam colineares. Sejam $\overline{BM'} \perp \overleftrightarrow{LN}, \overline{AN'} \perp \overleftrightarrow{LN}$ e $\overline{CL'} \perp \overleftrightarrow{LN}$, como mostra a figura abaixo.

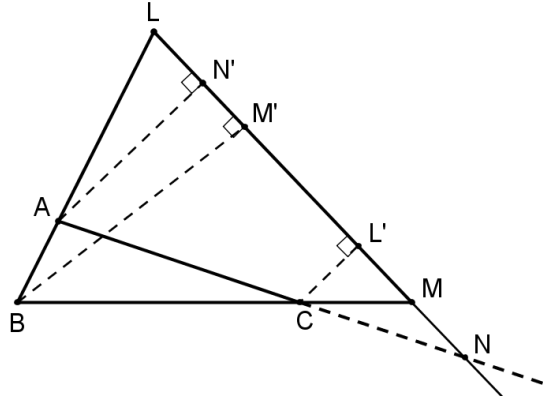


Figura 2.7: Outra demonstração do Teorema de Menelaus.

Segue que

$$\Delta BM'L \sim \Delta AN'L : \frac{LB}{LA} = \frac{BM'}{AN'} \implies \frac{LA}{LB} = \frac{AN'}{BM'} \tag{2.9}$$

$$\Delta AN'N \sim \Delta CL'N : \frac{NA}{NC} = \frac{AN'}{CL'} \implies \frac{NC}{NA} = \frac{CL'}{AN'} \tag{2.10}$$

$$\Delta BM'M \sim \Delta CL'M : \frac{MB}{MC} = \frac{BM'}{CL'} \tag{2.11}$$

Multiplicando membro a membro (2.9), (2.10) e (2.11) obtemos (2.7). ■

Analogamente a primeira demonstração, mostra-se a recíproca.

Observação 2.2.1. Quando utilizamos medidas geométricas dos segmentos envolvidos, o Teorema 2.2.2 é válido parcialmente, pois a recíproca deste é falsa. Por isso, consideramos apenas as medidas algébricas dos segmentos. Como contra-exemplo, consideremos os pontos médios L, M e N dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{AC} respectivamente, de um ΔABC (conforme figura ao lado). Consideremos as medidas geométricas dos segmentos $\overline{BM}, \overline{CM}$,

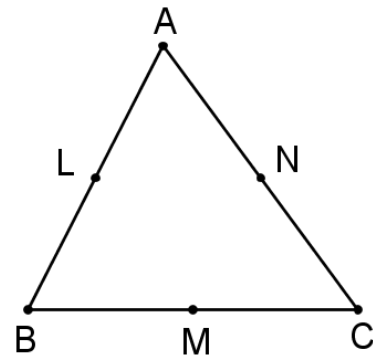


Figura 2.8: Contra-exemplo.

\overline{CN} , \overline{AN} , \overline{AL} e \overline{BL} . Temos que $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$, mas L , M e N não são colineares.

Sendo assim, não vale a recíproca do Teorema de Menelaus.

Observação 2.2.2. O Teorema de Menelaus também pode ser apresentado como

$$\frac{\text{sen}(\widehat{LCA})}{\text{sen}(\widehat{LCB})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{MAB})}{\text{sen}(\widehat{MAC})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{NBC})}{\text{sen}(\widehat{NBA})} = 1$$

chamada forma Trigonométrica do Teorema de Menelaus.

Observação 2.2.3. Os pontos L , M e N , devem ser diferentes dos vértices do triângulo para que não apareçam frações com denominadores iguais a zero.

Teorema 2.2.5. (Teorema Generalizado de Menelaus) Seja $A_1A_2A_3\dots A_n$ um polígono de n lados, e seja r uma reta não paralela a nenhum dos lados do polígono. Seja $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ os n pontos de intersecção de r com as retas $\overleftrightarrow{A_1A_2}, \overleftrightarrow{A_2A_3}, \dots, \overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overleftrightarrow{A_nA_1}$. Então

$$\frac{A_1P_1}{A_2P_1} \cdot \frac{A_2P_2}{A_3P_2} \cdot \dots \cdot \frac{A_{n-1}P_{n-1}}{A_nP_{n-1}} \cdot \frac{A_nP_n}{A_1P_n} = 1$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre o número de lados do polígono.

- Pelo Teorema de Menelaus, a afirmação é verdadeira para $n = 3$.
- Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $n - 1$ lados.
- Provaremos a validade da afirmação para n lados.

Consideremos um polígono $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$ de n lados. Vamos supor, sem perda de generalidade, que r não seja paralela à diagonal $\overline{A_{n-1}A_1}$. Seja $Q = r \cap \overline{A_{n-1}A_1}$ (conforme Figura 2.9) e o polígono de $n - 1$ lados $A_1A_2A_3\dots A_{n-2}A_{n-1}$. Pela hipótese de indução temos

$$\frac{A_1P_1}{A_2P_1} \cdot \frac{A_2P_2}{A_3P_2} \cdot \dots \cdot \frac{A_{n-2}P_{n-2}}{A_{n-1}P_{n-2}} \cdot \frac{A_{n-1}Q}{A_1Q} = 1 \quad (2.12)$$

Na Figura 2.9, consideremos o $\Delta A_{n-1}A_nA_1$. Pelo Teorema 2.2.2, para este triângulo e a reta r , temos

$$\frac{A_{n-1}P_{n-1}}{A_nP_{n-1}} \cdot \frac{A_nP_n}{A_1P_n} \cdot \frac{A_1Q}{A_{n-1}Q} = 1 \quad (2.13)$$

Multiplicando membro a membro (2.12) e (2.13), temos

$$\frac{A_1P_1}{A_2P_1} \cdot \frac{A_2P_2}{A_3P_2} \cdot \dots \cdot \frac{A_{n-1}P_{n-1}}{A_nP_{n-1}} \cdot \frac{A_nP_n}{A_1P_n} = 1$$

■

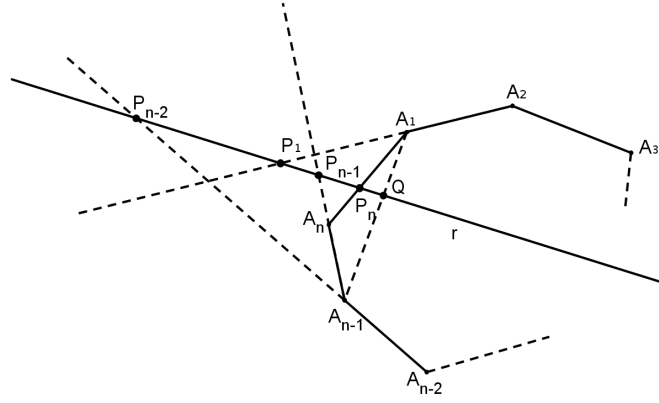


Figura 2.9: Teorema Generalizado de Menelaus.

Observação 2.2.4. Para $n > 3$, a recíproca do Teorema 2.2.5 não é verdadeiro. Como contra-exemplo, basta considerarmos um quadrilátero $ABCD$ e P um ponto na diagonal \overline{AC} . Consideremos duas semirretas distintas e não opostas com origem em P (conforme Figura 2.10) tais que uma delas intersecta o lado \overline{BC} e a reta suporte do lado \overline{AB} nos pontos L e K respectivamente, e a outra intersecta o lado \overline{DA} e a reta suporte do lado \overline{CD} nos pontos N e M , respectivamente. Pelo Teorema de Menelaus aplicado ao $\triangle ABC$ e à reta que passa pelos pontos P , L e K , obtemos

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CP}{AP} = 1 \quad (2.14)$$

Por outro lado, aplicando o mesmo teorema ao $\triangle ACD$ e à reta que passa pelos pontos P , N e M , obtemos

$$\frac{AP}{CP} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN}{AN} = 1 \quad (2.15)$$

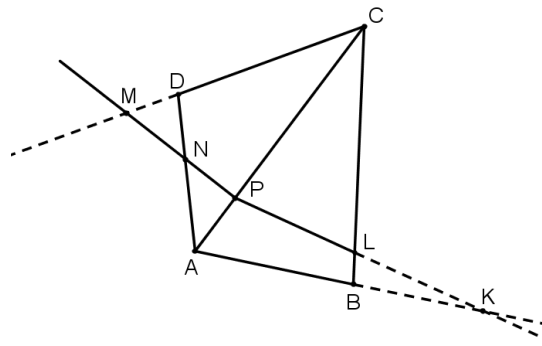


Figura 2.10: \overrightarrow{PN} e \overrightarrow{PL} são semirretas não opostas.

Multiplicando membro a membro (2.14) e (2.15), obtemos

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN}{AN} = 1 \quad (2.16)$$

Portanto, por (2.16) observemos que os quatro pontos não colineares K , L , M e N satisfazem o Teorema 2.2.5. Logo não vale a recíproca do Teorema de Menelaus.

Teorema 2.2.6. (Teorema de Ceva) Num triângulo ABC , três cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes, se e somente se,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

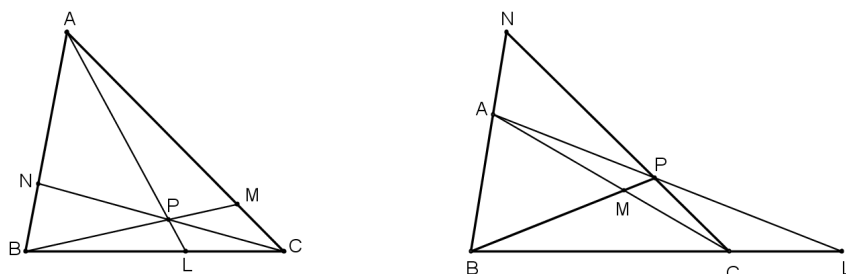


Figura 2.11: \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes em P .

Demonstração. Seja r uma reta paralela a \overline{BC} passando por A , conforme figura abaixo.

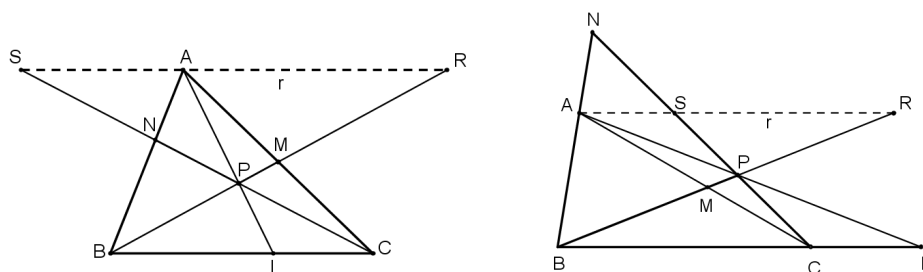


Figura 2.12: $r \parallel \overline{BC}$.

Pelo Corolário 1 temos as seguintes semelhanças

$$\Delta AMR \sim \Delta CMB \implies \frac{MA}{CM} = \frac{AR}{BC} \quad (2.17)$$

$$\Delta BNC \sim \Delta ANS \implies \frac{NB}{AN} = \frac{BC}{SA} \quad (2.18)$$

$$\Delta CPL \sim \Delta SPA \implies \frac{LC}{SA} = \frac{LP}{AP} \quad (2.19)$$

$$\Delta BPL \sim \Delta RPA \implies \frac{BL}{AR} = \frac{LP}{AP} \quad (2.20)$$

De (2.19) e (2.20) vem que

$$\frac{LC}{SA} = \frac{BL}{AR} \text{ ou } \frac{LC}{BL} = \frac{SA}{AR} \quad (2.21)$$

Multiplicando membro a membro (2.17), (2.18) e (2.21), obtemos

$$\frac{MA}{CM} \cdot \frac{NB}{AN} \cdot \frac{LC}{BL} = \frac{AR}{BC} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{SA}{AR} = 1$$

ou

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Seja agora, $\overline{BM} \cap \overline{AL} = \{P\}$ (veja Figura 2.12) e estendendo o segmento \overline{PC} até intersectar \overleftrightarrow{AB} em N' . Como $\overline{AL}, \overline{BM}$ e $\overline{CN'}$ são concorrentes, aplicando o que foi provado anteriormente temos

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN'}{N'B} = 1$$

Mas por hipótese, $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$, o que implica $\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NB}$. Mas isso só ocorre se, e somente se, $N = N'$. ■

Outra demonstração do Teorema de Ceva

Fazendo uso do Teorema 2.2.4 temos

$$\frac{BL}{LC} = \frac{\text{área } \Delta ABL}{\text{área } \Delta ACL} \tag{2.22}$$

Verifiquemos também que

$$\frac{BL}{LC} = \frac{\text{área } \Delta PBL}{\text{área } \Delta PCL} \tag{2.23}$$

De (2.22) e (2.23) temos

$$\frac{\text{área } \Delta ABL}{\text{área } \Delta ACL} = \frac{\text{área } \Delta PBL}{\text{área } \Delta PCL}$$

Assim,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{\text{área } \Delta ABL - \text{área } \Delta PBL}{\text{área } \Delta ACL - \text{área } \Delta PCL} = \frac{\text{área } \Delta APB}{\text{área } \Delta ACP} \tag{2.24}$$

Analogamente, $\frac{CM}{MA} = \frac{\text{área } \Delta BMC}{\text{área } \Delta BMA} = \frac{\text{área } \Delta PMC}{\text{área } \Delta PMA}$ o que implica

$$\frac{CM}{MA} = \frac{\text{área } \Delta BMC - \text{área } \Delta PMC}{\text{área } \Delta BMA - \text{área } \Delta PMA} = \frac{\text{área } \Delta BCP}{\text{área } \Delta APB} \tag{2.25}$$

e

$$\frac{AN}{NB} = \frac{\text{área } \Delta ACN}{\text{área } \Delta BCN} = \frac{\text{área } \Delta APN}{\text{área } \Delta BPN} \text{ o que implica}$$

$$\frac{AN}{NB} = \frac{\text{área } \Delta ACN - \text{área } \Delta APN}{\text{área } \Delta BCN - \text{área } \Delta BPN} = \frac{\text{área } \Delta ACP}{\text{área } \Delta BCP} \tag{2.26}$$

Multiplicando membro a membro (2.24), (2.25) e (2.26) temos

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

■

A recíproca é tratada de forma semelhante a primeira demonstração.

Observação 2.2.5. *O Teorema de Ceva também pode ser apresentado como*

$$\frac{\text{sen}(\widehat{BAL})}{\text{sen}(\widehat{LAC})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBM})}{\text{sen}(\widehat{ABM})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{ACN})}{\text{sen}(\widehat{BCN})} = 1$$

chamada forma Trigonométrica do Teorema de Ceva.

2.3 Reta de Simpson-Wallace

Dizemos que uma *polígono está inscrito em um circunferência* quando todos os seus vértices são pontos desta circunferência e todos os seus lados estão dentro do círculo que a mesma define.

Polígonos regulares e triângulos quaisquer são sempre inscritíveis em uma circunferência. Isso já não ocorre, por exemplo, com os quadriláteros. O Teorema 2.3.1, abaixo, nos diz quando um quadrilátero é inscritível numa circunferência, condição essencial nas demonstrações de muitos teoremas, pois nem sempre utilizamos medidas segmentos para obtermos tais demonstrações.

Nesta seção apresentamos uma aplicação *clássica* deste assunto. Mas antes, vamos definir dois tipos especiais de triângulos: o *triângulo órtico* e o *triângulo pedal*.

Triângulo órtico de um triângulo não retângulo ABC é o triângulo que se obtém quando se ligam os três pés das alturas do triângulo ABC. Tomando, agora, um ponto P não situado sobre qualquer das retas suportes dos lados do triângulo ABC, marcamos os pontos D , E e F , pés das perpendiculares baixadas de P , respectivamente, aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} . O triângulo DEF assim obtido é o *triângulo pedal* de P em relação ao triângulo ABC. Esses dois triângulos possuem propriedades interessantes, tais como:

- Em todo triângulo acutângulo, o ortocentro coincide com o incentro do triângulo órtico.
- Os lados de um triângulo acutângulo são bissetrizes externas do seu triângulo órtico, bem como as alturas são as bissetrizes internas do seu triângulo órtico.
- Sendo ℓ o perímetro do triângulo ABC, e $2p$ o perímetro de um triângulo pedal de ABC, temos que $\ell \geq 4p$.

- Sendo T um triângulo, se considerarmos todos os triângulos DEF semelhantes a T , todos na mesma ordem, com D sobre o lado \overline{BC} , E sobre o lado \overline{AC} e F sobre o lado \overline{AB} , o de menor área é o triângulo pedal de algum ponto P .

Esta última propriedade nos mostra uma importante característica dos triângulos pedais: eles normalmente minimizam áreas. Analisaremos agora um caso especial de triângulo pedal, quando o ponto P está sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , conhecido como Teorema de Simson-Wallace⁵, que explica quando o triângulo pedal de um ponto é degenerado (ou seja, D , E e F são colineares).

Teorema 2.3.1. (*Quadriláteros inscritíveis*) *Um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} , é inscritível se, e somente se, qualquer das condições a seguir for satisfeita:*

- $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$
- $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$

Corolário 3. *Todo trapézio isósceles é inscritível.*

Teorema 2.3.2. (*Reta de Simpson-Wallace*) *Os pés das três perpendiculares traçadas de um ponto P aos lados de um triângulo ABC são colineares se, e somente se, o ponto P pertencer a circunferência circunscrita ao triângulo ABC .*

Demonstração. Para que o ponto P esteja situado sobre a circunferência circunscrita ao ΔABC , devemos ter P situado em uma das regiões angulares \widehat{BAC} , \widehat{ABC} ou \widehat{BCA} mas seja exterior ao ΔABC .

Suponhamos, sem perda de generalidade, que P é exterior ao ΔABC e está situado na região angular \widehat{ABC} , conforme Figura 2.13.

Sejam D , E e F os pés das perpendiculares baixadas, respectivamente, de P às retas suportes dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} . Como $\widehat{PFA} = \widehat{PEA} = 90^\circ$, pelo Teorema 2.3.1, o quadrilátero $PFAE$ é inscritível. Analogamente, usando o segundo item do Teorema 2.3.1, o quadrilátero $PEDC$ também é inscritível. Segue que

$$\widehat{APC} - \widehat{DPF} = \widehat{DPC} - \widehat{FPA} = \widehat{DEC} - \widehat{FEA} \quad (2.27)$$

Considerando os pontos D , E e F colineares, temos que $\widehat{FEA} = \widehat{DEC}$, o que implica em (2.27) que $\widehat{APC} = \widehat{DPF}$. Mas $\widehat{DPF} = 180^\circ - \widehat{ABC}$, logo

$$\widehat{APC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \Leftrightarrow ABCP \text{ é inscritível.}$$

Reciprocamente, de (2.27) e da hipótese de que P pertence a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , temos

⁵Em homenagem ao matemático escocês Robert Simson (1687-1768). Embora os historiadores não encontraram nenhuma prova de sua autoria, este teorema foi publicado em 1797 por William Wallace, daí o nome *Teorema de Simson-Wallace*.

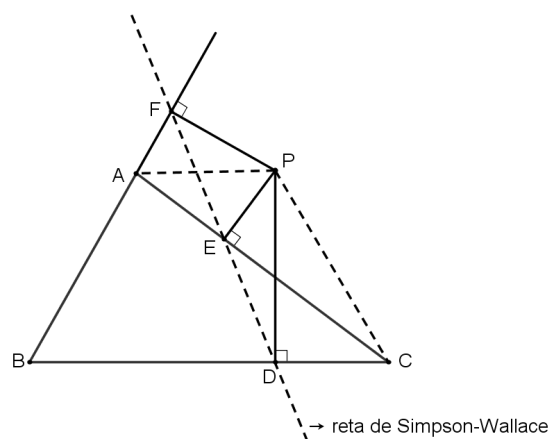


Figura 2.13: Triângulo pedal degenerado DEF.

$$\widehat{APC} = \widehat{DPF} \Leftrightarrow \widehat{DEC} = \widehat{FEA} \Leftrightarrow D, E \text{ e } F \text{ são colineares.}$$

■

Observação 2.3.1. Nas notações da demonstração acima, quando P estiver sobre o círculo circunscrito ao triângulo ABC , diremos que a reta que passa pelos pontos D, E e F é a reta de Simpson-Wallace de P relativa ao triângulo ABC .

2.4 Teorema de Ptolomeu e o Teorema de Hiparco

Nesta seção, apresentamos dois importantes teoremas produzidos no período Alexandrino: O *Teorema de Hiparco* e o *Teorema de Ptolomeu*.

Hiparco (180 - 125 a.C.), matemático e astrônomo, nasceu na cidade egípcia de Nicéia. É considerado o fundador da Trigonometria, pois na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros que se ocupa da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, uma tábua de doze cordas. Evidentemente fez esta tabela para usá-la em sua astronomia.

Os trabalhos de Hiparco e de outros estudiosos da matemática e astronomia, foram reunidos em um compêndio composto de 13 livros pelo matemático e astrônomo Cláudio Ptolomeu (127 - 150 d.C.). No *Almagesto*, como foi chamado, Ptolomeu desenvolve não somente modelos astronômicos, mas também as ferramentas matemáticas, além da Geometria elementar, necessárias para a Astronomia, entre elas a Trigonometria.

Foi no *Almagesto* que Ptolomeu apresentou os dois Teoremas que abordaremos a seguir.

Teorema 2.4.1. (*Lei dos Senos*) Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Teorema 2.4.2. *Sejam ABC um triângulo de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ e R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Então a área S do triângulo ABC em função dos lados e do raio R é dada por*

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Teorema 2.4.3. *(Teorema de Ptolomeu) Num quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.*

Demonstração. Sejam $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = p$ e $BD = q$. Mostraremos que $p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d$.

Seja P um ponto sobre \overline{BD} tal que $B\hat{A}P = C\hat{A}D$. Como $A\hat{C}B = P\hat{D}A$ (ângulo inscrito na circunferência de mesmo arco \overline{AB}), temos que $\triangle APD \sim \triangle ABC$, daí

$$\frac{PD}{b} = \frac{d}{p} \implies PD \cdot p = b \cdot d \quad (2.28)$$

Analogamente os $\triangle APB$ e $\triangle ADC$ são semelhantes, o que implica

$$\frac{BP}{c} = \frac{a}{p} \implies BP \cdot p = a \cdot c \quad (2.29)$$

Somando (2.28) e (2.29) temos

$$p \overbrace{(PD + BP)}^{BD=q} = a \cdot c + b \cdot d \implies p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d$$

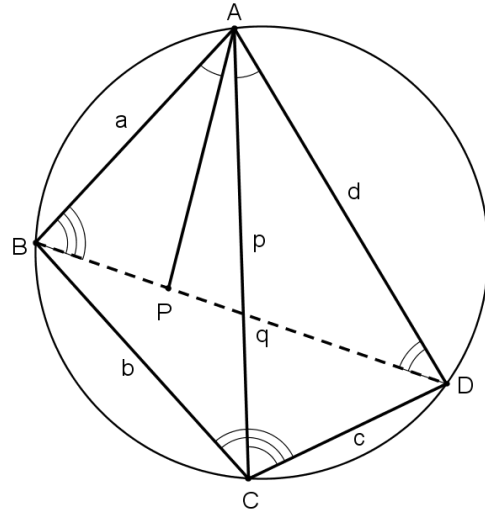


Figura 2.14: Teorema de Ptolomeu.

Teorema 2.4.4. *(Desigualdade de Ptolomeu) Se ABC é um triângulo e P um ponto do plano deste triângulo, então $AB \cdot CP + BC \cdot AP \geq AC \cdot BP$. A igualdade ocorre se, e somente se o quadrilátero $ABCP$ é inscritível.*

Demonstração. Sejam $B_1 \in \overleftrightarrow{AC}$, $A_1 \in \overleftrightarrow{BC}$ e $C_1 \in \overleftrightarrow{AB}$, tais que $\overline{PC_1} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $PB_1 \perp \overleftrightarrow{AC}$ e $PA_1 \perp \overleftrightarrow{BC}$. Consideremos os segmentos $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{B_1C_1}$. Como $A\hat{C}_1P + A\hat{B}_1P = 180^\circ$, pelo Teorema 2.3.1 o quadrilátero AB_1PC_1 é inscritível, sendo \overline{AP} um diâmetro do círculo circunscrito (pois $A\hat{C}_1P = 90^\circ$).

Além disso, $B_1\hat{P}C_1 + C_1\hat{A}B_1 = 180^\circ$, mas $C_1\hat{A}B_1 = 180^\circ - \hat{A}$, onde \hat{A} é um ângulo interno do triângulo ABC . Logo $B_1\hat{P}C_1 = \hat{A}$.

Aplicando o Teorema 2.4.1 no triângulo PB_1C_1 , temos que

$$\frac{B_1C_1}{\widehat{\text{sen } A}} = AP \quad (2.30)$$

Pelo Teorema 2.4.1 aplicado no triângulo ABC , temos

$$\widehat{\text{sen } A} = \frac{BC}{2R} \quad (2.31)$$

onde R é o raio do círculo circunscrito ao ΔABC .

De (2.30) e (2.31) vem que

$$B_1C_1 = \frac{BC \cdot AP}{2R}$$

Como os quadriláteros BA_1PC_1 e CPB_1A_1 também são inscritíveis, temos de modo análogo

$$A_1C_1 = \frac{AC \cdot BP}{2R} \quad \text{e} \quad A_1B_1 = \frac{AB \cdot CP}{2R}$$

Pela Desigualdade Triangular, temos no triângulo $A_1B_1C_1$ que

$$A_1B_1 + B_1C_1 > A_1C_1 \implies \frac{AB \cdot CP}{2R} + \frac{BC \cdot AP}{2R} > \frac{AC \cdot BP}{2R}$$

Logo

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP > AC \cdot BP \quad (2.32)$$

Do Teorema de Ptolomeu e de (2.32) temos que

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP \geq AC \cdot BP$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se os pontos A_1, B_1 e C_1 estão alinhados, fazendo com que esta reta seja uma *Reta de Simpson-Wallace* e o ponto P pertença ao círculo circunscrito ao triângulo ABC . ■

Observação 2.4.1. A Desigualdade de Ptolomeu é um Teorema bem mais geral que o Teorema de Ptolomeu. Esta desigualdade permite descobrir se um quadrilátero $ABCD$ é inscritível ou não, a partir dos valores dos lados e diagonais, sem que seja necessário fazer uma análise dos ângulos. Para isto, basta que se verifique a igualdade $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. Se por acaso ocorrer de $AB \cdot CD + BC \cdot AD > AC \cdot BD$, então $ABCD$ não é inscritível.

Teorema 2.4.5. (Teorema de Hiparco) A razão das diagonais de um quadrilátero inscritível é igual a razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais.

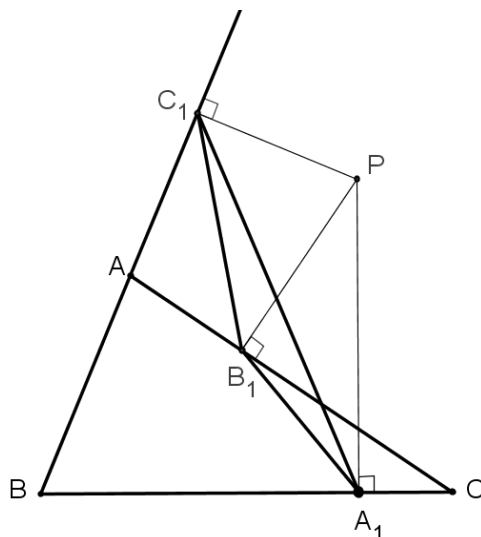


Figura 2.15: AB_1PC_1 é inscritível

Demonstração. Considerando o quadrilátero inscrito ABCD, com $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = p$ e $BD = q$, conforme Figura 2.16. Mostraremos que $\frac{p}{q} = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{a \cdot d + b \cdot c}$.

Observemos que a área de ABCD é equivalente à soma de dois triângulos com um lado comum \overline{AC} ou \overline{BD} , o que nos permite escrever $S_{(ABC)} + S_{(DAC)} = S_{(ABD)} + S_{(CBD)}$.

Como esses quatro triângulos possuem o mesmo círculo circunscrito, temos pelo Teorema 2.4.2 que

$$\frac{abp}{4R} + \frac{cdp}{4R} = \frac{adq}{4R} + \frac{bcq}{4R} \implies$$

$$p(a \cdot b + c \cdot d) = q(a \cdot d + b \cdot c)$$

onde R é o raio do círculo circunscrito.

Daí vem que

$$\frac{p}{q} = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{a \cdot d + b \cdot c}$$

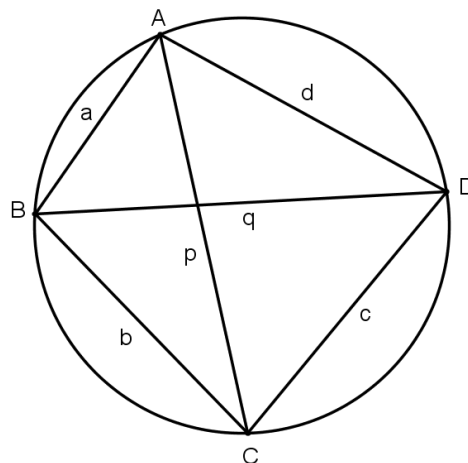


Figura 2.16: Teorema de Hiparco.

■

2.5 Teorema de Napoleão

Apesar de haver dúvidas sobre sua autoria, o teorema que iremos apresentar nesta seção é conhecido como *Teorema de Napoleão*.

Napoleão Bonaparte (1769 - 1821) foi um líder político e militar durante os últimos estágios da Revolução Francesa. Segundo os historiadores, Napoleão era muito interessado pela Matemática e, especialmente, pela Geometria. Há rumores que, antes de ser governante da França, ele se envolveu em uma discussão com dois grandes matemáticos: Laplace e Lagrange. Este último, teria recebido a demonstração feita por Napoleão.

Em 1955, um matemático chamado Barlotti mostrou que a mesma “ideia” utilizada no Teorema de Napoleão pode ser estendida para um n -ágono qualquer. Segue abaixo o seu enunciado, conhecido como Teorema de Barlotti⁶.

Dado um n -ágono qualquer, se este for a imagem por uma transformação afim⁷ de um n -ágono regular, então o n -ágono formado pelos baricentros dos n -ângulos regulares construídos (interno ou externamente) sobre os seus lados é um n -ágono regular.

⁶Uma demonstração desse teorema pode ser visto em [22].

⁷Chamamos $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de *transformação afim* quando $F = T \circ L$, sendo $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma transformação linear e $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma translação.

Teorema 2.5.1. (Teorema de Napoleão: Parte I) *Se sobre os lados de um triângulo qualquer construírmos externamente triângulos equiláteros, então o triângulo formado pelos centros desses triângulos equiláteros ainda é equilátero.*

Demonstração. Sejam M , N e L os centros (baricentros) dos triângulos equiláteros AYB , BZC e CXA , respectivamente.

Os segmentos \overline{AZ} e \overline{BX} são congruentes, pois $CA = CX$, $CZ = CB$ e $\widehat{ACZ} = \widehat{XCB} = \widehat{ACB} + 60^\circ$, o que implica que os triângulos ZCA e BCX são congruentes. Por igual raciocínio, mostra-se que $CY = AZ = BX$.

Na Figura 2.17, os ΔZCA e ΔNCL são semelhantes, pois

$$\frac{LC}{AC} = \frac{NC}{ZC} = \frac{NL}{AZ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2.33)$$

Este resultado de (2.33) é devido ao fato de $LC = \frac{2}{3} h_{CXA} = \frac{AC\sqrt{3}}{3}$.

Procedendo de maneira análoga com os ΔBAX e ΔMAL e com os ΔCBY e ΔNBM , obteremos

$$\frac{LM}{BX} = \frac{MN}{CY} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2.34)$$

De (2.33) e (2.34) concluímos que

$$\frac{NL}{AZ} = \frac{LM}{BX} = \frac{MN}{CY}$$

Como $AZ = BX = CY$, vem que

$$NL = LM = MN$$

Portanto o triângulo MNL é equilátero. ■

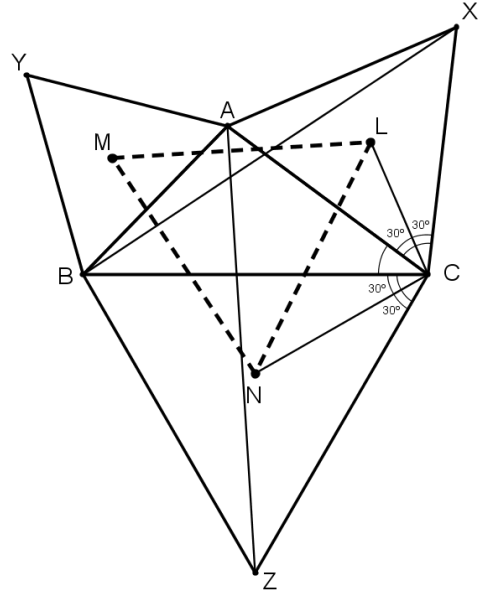


Figura 2.17: Teorema de Napoleão.

Teorema 2.5.2. (Generalização do Teorema de Napoleão) *Dado um triângulo qualquer ABC, constroem-se os triângulos semelhantes BAY, CXA e ZCB, exteriores ao triângulo ABC. O triângulo formado pelos circuncentros dos triângulos exteriores é semelhante a estes três triângulos.*

Antes da demonstração, vamos provar duas afirmações que serão utilizadas no decorrer da prova.

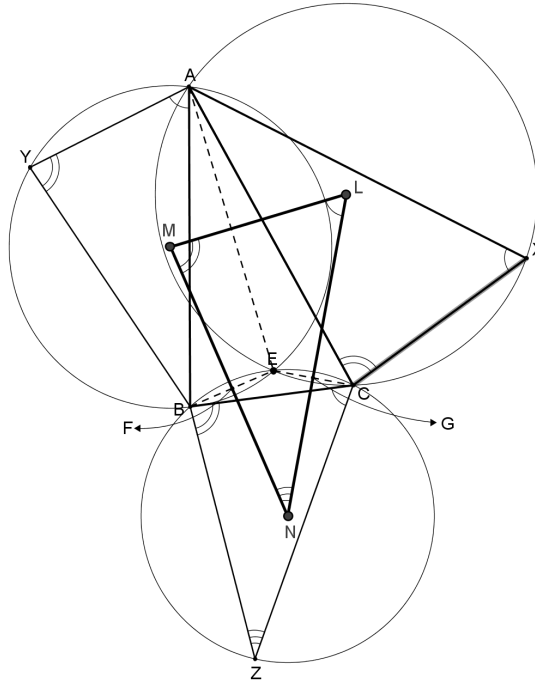


Figura 2.18: Generalização do Teorema de Napoleão.

Lema 2.5.1. *As circunferências circunscritas aos triângulos BAY, CXA e ZCB passam por um mesmo ponto.*

Demonstração. Primeiramente observemos a ordem dos vértices, conforme Figura 2.18. Daí temos a seguinte relação

$$\widehat{AYB} + \widehat{BZC} + \widehat{CXA} = 180^\circ \quad (2.35)$$

Seja E o outro ponto de interseção das circunferências circunscritas aos triângulos BAY e CXA. Pelo Teorema 2.3.1, temos

$$\widehat{AEC} = 180^\circ - \widehat{CXA}$$

$$\widehat{BEA} = 180^\circ - \widehat{AYB}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \widehat{CEB} &= 360^\circ - (\widehat{AEC} + \widehat{BEA}) \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{AYB} + 180^\circ - \widehat{CXA}) \\ &= \widehat{AYB} + \widehat{CXA} \end{aligned} \quad (2.36)$$

De (2.35) e (2.36), vem que

$$\widehat{CEB} = 180^\circ - \widehat{BZC}$$

o que nos mostra que o quadrilátero BECZ é inscritível. Logo a circunferência circunscrita ao triângulo ZCB também passa pelo ponto E . ■

Lema 2.5.2. *A corda comum a duas circunferências é perpendicular a reta que une os centros.*

Demonstração. Basta ver que os centros das circunferências equidistam dos pontos de interseção, ou seja, o segmento com extremidades nos centros, determina a mediatriz da corda comum. ■

Demonstração do Teorema. Pelo Lema 2.5.2, o quadrilátero FEGN é inscritível, pois $E\widehat{F}N = N\widehat{G}E = 90^\circ$. E pelo Lema 2.5.1 $C\widehat{E}B = 180^\circ - F\widehat{N}G$, o que implica $F\widehat{N}G = M\widehat{N}L = B\widehat{Z}C$.

Analogamente, $L\widehat{M}N = A\widehat{Y}B$ e $N\widehat{L}M = C\widehat{X}A$, que nos mostra que os triângulos BAY, CXA, ZCB e NLM são semelhantes. ■

Observação 2.5.1. *O triângulo MNL, da Figura 2.17, é chamado Triângulo externo de Napoleão. Quando esses triângulos são construídos internamente ao triângulo ABC, conforme Figura 2.19, seus baricentros M', N' e L' formam o Triângulo interno de Napoleão, que também é equilátero.*

Teorema 2.5.3. *(Teorema de Napoleão: Parte II) Se sobre os lados de um triângulo qualquer construirmos internamente triângulos equiláteros, então o triângulo formado pelos centros desses triângulos equiláteros ainda é equilátero.*

Demonstração. Pela Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo MAL, da Figura 2.19, temos

$$(ML)^2 = \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 - \frac{2}{3}bc \cdot \cos(\widehat{A} + 60^\circ) \quad (2.37)$$

onde $AC = b$, $AB = c$, $AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$ e $B\widehat{A}C$ denominaremos como sendo apenas \widehat{A} .

Aplicando a Lei dos Cossenos no $\Delta M'AL'$, vem que

$$(M'L')^2 = \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 - \frac{2}{3}bc \cdot \cos(\widehat{A} - 60^\circ) \quad (2.38)$$

Subtraindo (2.37) e (2.38) temos

$$\begin{aligned} (ML)^2 - (M'L')^2 &= \frac{2}{3}bc \left[\cos(\widehat{A} - 60^\circ) - \cos(\widehat{A} + 60^\circ) \right] \\ &= \frac{2}{3}bc \left[\frac{1}{2}\cos\widehat{A} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sen\widehat{A} - \frac{1}{2}\cos\widehat{A} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sen\widehat{A} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}bc \cdot \sen\widehat{A} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot S_{ABC} \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde $b \cdot c \cdot \widehat{\text{sen}}\hat{A} = 2S_{ABC}$, sendo S_{ABC} a área do triângulo ABC, conforme Corolário 2.

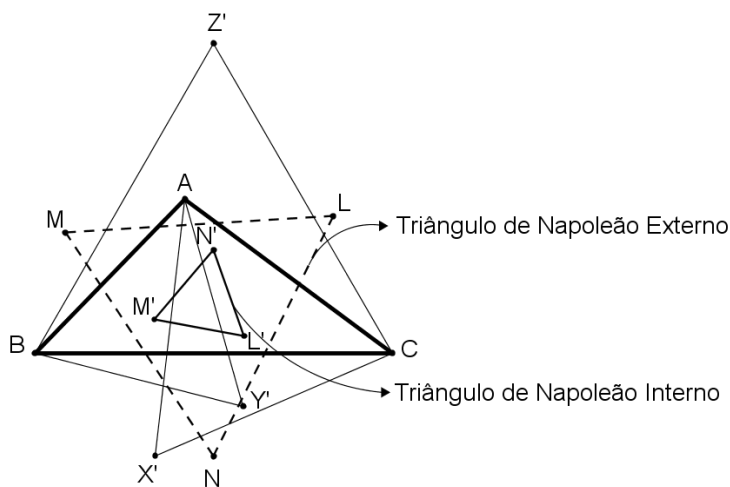


Figura 2.19: Triângulos de Napoleão.

De maneira análoga, temos que

$$(NL)^2 - (N'L')^2 = (MN)^2 - (M'N')^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot S_{ABC} \quad (2.40)$$

Como $MN = NL = ML$, das equações (2.39) e (2.40) vem que $M'N' = N'L' = L'M'$. Portanto, o triângulo $M'N'L'$ é equilátero. ■

Observação 2.5.2. Considerando os triângulos de Napoleão (interno e externo), podemos, ainda, verificar as seguintes propriedades:

1. Os triângulos de Napoleão têm o mesmo baricentro, que coincide com o do triângulo inicial.
2. A diferença entre as áreas dos triângulos de Napoleão é igual a área do triângulo inicial.
3. Nas notações da Figura 2.17,
 - (i) as retas \overleftrightarrow{ZN} , \overleftrightarrow{XL} e \overleftrightarrow{YM} são concorrentes em O , que é o circuncentro do triângulo ABC.
 - (ii) os segmentos \overline{AN} , \overline{BL} e \overline{CM} são concorrentes.
 - (iii) os segmentos \overline{AZ} , \overline{BX} e \overline{CY} se encontram em um único ponto. Além disso, estes segmentos fazem um ângulo de 60° entre si, e tem o mesmo comprimento.

2.6 Teorema de Miquel

O teorema que iremos apresentar, embora sua autoria seja duvidosa, foi explicitamente declarado e provado por A. Miquel⁸ em 1838.

O Teorema de Miquel, como é chamado, se desenvolve no que chamamos de *Quadriláteros Completos*, que é a figura formada por quatro retas que se cruzam em 6 pontos.

Teorema 2.6.1. (*Teorema de Miquel*) *Sejam a, b, c e d quatro retas coplanares, de modo que não há duas paralelas e nem três concorrentes. Os circuncírculos dos quatro triângulos determinados pelas quatro retas passam por um mesmo ponto.*

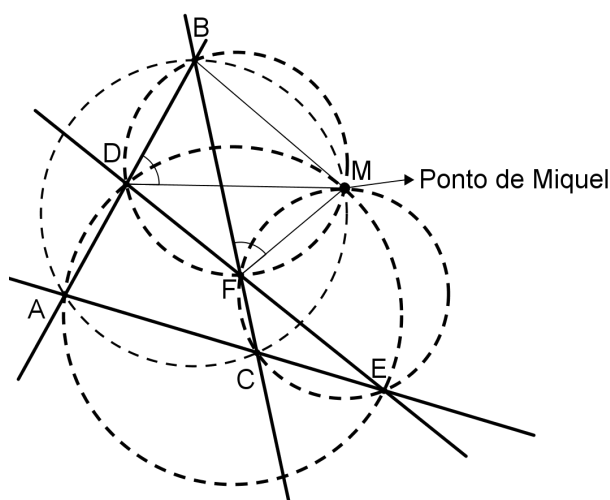


Figura 2.20: Teorema de Miquel.

Demonstração. Seja M a intersecção dos circuncírculos dos triângulos CEF e BDF , conforme Figura 2.20. Então

$$M\hat{E}A = M\hat{E}C = 180^\circ - M\hat{F}C = B\hat{F}M = B\hat{D}M$$

o que implica que

$$M\hat{E}A = 180^\circ - A\hat{D}M \implies M\hat{E}A + A\hat{D}M = 180^\circ$$

onde concluímos que o quadrilátero $MDAE$ é inscritível. Daí, M pertence ao circuncírculo de ADE .

Analogamente, prova-se que M pertence ao circuncírculo do triângulo ABC . Logo M é o ponto de intersecção dos quatro circuncírculos, chamado *ponto de Miquel*. ■

Teorema 2.6.2. (*Teorema de Miquel para triângulos*) *Seja ABC um triângulo e D, E e F pontos sobre as retas $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ e \overleftrightarrow{AB} , respectivamente. Então os circuncírculos dos triângulos AEF, BFD e CDE têm um ponto em comum.*

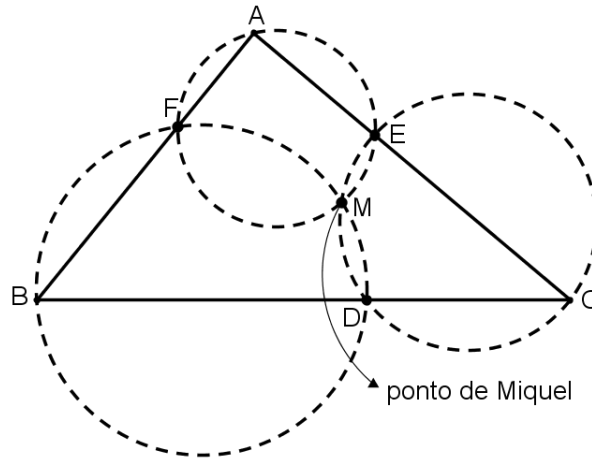


Figura 2.21: Teorema de Miquel para triângulos.

Demonstração. Seja M a segunda intersecção dos circuncírculos dos triângulos AEF e BFD , conforme Figura 2.21. Então

$$C\hat{D}M = B\hat{F}M = A\hat{E}M = 180^\circ - C\hat{E}M$$

o que mostra que o quadrilátero $ECDM$ é inscritível. Logo M pertence ao circuncírculo do triângulo CED , o que nos mostra que o círculo que passa por CDE , também passa por M . ■

2.7 A reta de Euler e a Circunferência dos nove pontos

Leonhard Euler⁹ foi um matemático incansável. Produziu cerca de 886 trabalhos em diversas áreas da Matemática, tais como Cálculo, Geometria e Grafos. Além disso, também ficou famoso por seus trabalhos em Mecânica, Óptica e Astronomia. Vários resultados na Geometria levam o seu nome; nesta seção apresentaremos dois deles: a *Reta de Euler* e a *Circunferência dos nove pontos*. Mas antes, recordemos alguns resultados importantes que acontece no triângulo.

Na Seção 3.2, do Capítulo 3, veremos as concorrências das *alturas*, *medianas* e das *bissetrizes* de um triângulo. A esses pontos, juntamente com o ponto de concorrência das mediatrizes, damos o nome de *Pontos Notáveis* do triângulo, que são eles:

- o *ortocentro* (H), que é ponto de encontro das alturas;

⁸Matemático francês que publicou vários trabalhos sobre a *teoria de curvas e interseções de círculos e de esferas*.

⁹Matemático e Físico suíço, nasceu na cidade de Basileia em 1707. Mesmo com graves problemas na visão, que o deixou completamente cego nos últimos anos de sua vida, Euler continuou escrevendo vários artigos de Matemática e Física. Quase todos os símbolos que usamos atualmente na Trigonometria, são praticamente os mesmos criados por Euler em 1748.

- o *baricentro* (G), ora chamado de centro de gravidade do triângulo, é o ponto de concorrência das medianas;
- o *incentro* (I), que é o ponto de encontro das bissetrizes. O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo;
- o *circuncentro* (O), que é o ponto de concorrência das mediatrizes. O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Veremos, agora, o fato de que, em qualquer triângulo, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são colineares. A reta que contém estes três pontos é chamada *Reta de Euler*, já que foi Euler o primeiro a chamar a atenção para este fato.

Teorema 2.7.1. (*Base média do triângulo*) *Seja ABC um triângulo qualquer. Se M e N são os pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AC} , então $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$. Reciprocamente, se traçarmos por M uma reta paralela ao lado \overline{BC} , então a mesma intersecta \overline{AC} em N . Ademais, em qualquer um dos casos acima, temos*

$$MN = \frac{1}{2}BC$$

Lema 2.7.1. *A distância do circuncentro (O) de um triângulo a um de seus lados é igual a metade da distância do ortocentro (H) ao vértice oposto.*

Demonstração. Considerando a Figura 2.22, onde A' e B' são os pontos médios dos lados \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente. Provaremos que $OA' = \frac{1}{2}HA$.

Como $\overline{OA'} \parallel \overline{HA}$, $\overline{OB'} \parallel \overline{HB}$, $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ e $A'B' = \frac{1}{2}AB$ (Teorema 2.7.1).

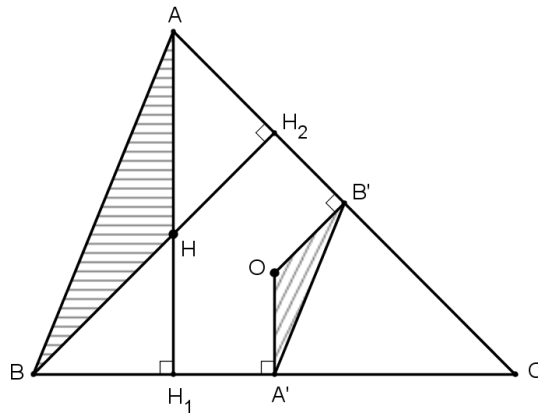


Figura 2.22: Triângulos semelhantes AHB e $A'OB'$.

Temos que

$$B'\widehat{A}'C = A\widehat{B}H_1 = A\widehat{B}C \text{ pois } \overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \text{ e}$$

$$O\widehat{A}'B' + B'\widehat{A}'C = 90^\circ \implies O\widehat{A}'B' = 90^\circ - A\widehat{B}C$$

logo

$$O\widehat{A}'B' = H\widehat{A}B.$$

Analogamente, $A'\widehat{B}'O = A\widehat{B}H$ e consequentemente os $\triangle AHB$ e $\triangle A'OB'$ são semelhantes na razão $\frac{1}{2}$. Portanto

$$OA' = \frac{1}{2}HA$$

■

Teorema 2.7.2. (*Reta de Euler*) *Em um triângulo, o ortocentro (H), o baricentro (G) e o circuncentro (O) estão alinhados. Além disso, o baricentro divide o segmento cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro, na razão 1:2.*

Demonstração. Seja G um ponto pertencente ao segmento \overline{HO} , conforme Figura 2.23, onde A' é o ponto médio do segmento \overline{BC} e $\overline{AA'}$ é uma mediana. Pelo paralelismo entre os segmentos $\overline{AH_1}$ e $\overline{OA'}$, temos que $G\widehat{A}H = G\widehat{A}'O$, e como $H\widehat{G}A = O\widehat{G}A'$ (o.p.v), os $\triangle AHG$ e $\triangle A'GO$ são semelhantes.

Usando esta afirmação e o Lema 2.7.1, vem que $GA' = \frac{1}{2}GA$, sendo G , portanto, o baricentro do triângulo ABC .

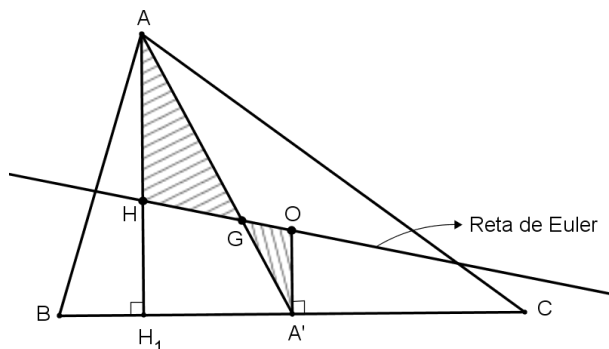


Figura 2.23: Reta de Euler.

Ainda desta semelhança temos que $GO = \frac{1}{2}GH$, mostrando assim que o *ortocentro*, o *baricentro* e o *circuncentro* são colineares e o baricentro divide o segmento \overline{HO} na razão 1:2.

■

O próximo teorema atribuído a Euler, conhecido como *Circunferência dos nove pontos*, é considerada a primeira circunferência famosa depois da era grega. Euler sabia algumas

de suas propriedades, mas foi o matemático francês Poncelet¹⁰ que publicou, em 1821, um artigo demonstrando que para todo triângulo é possível encontrar uma circunferência passando pelos *pontos médios dos lados*, os *pés das alturas* e os *pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro*.

Teorema 2.7.3. (*Circunferência dos nove pontos*) *Seja ABC um triângulo de circuncentro O e ortocentro H . Então os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam H aos vértices estão em uma circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento \overline{OH} e cujo raio é a metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC .*

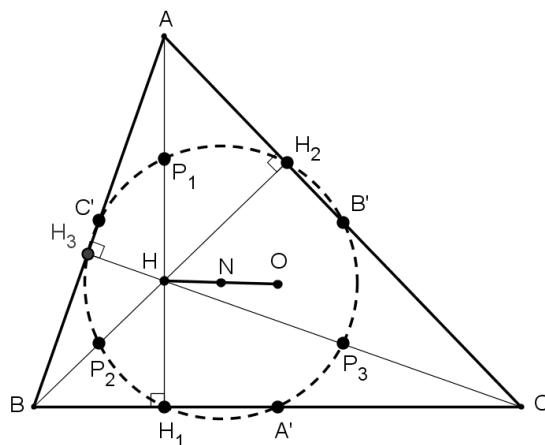


Figura 2.24: Circunferência dos nove pontos.

Demonstração 1. Seja N o ponto médio do segmento \overline{OH} . Como $OG : GH = 1 : 2$, implica que

$$GH = 2OG \implies GN + NH = 2OG,$$

como $NH = NO$, temos

$$\begin{aligned} GN + NO = 2GO &\implies GN + GN + OG = 2GO \\ &\implies 2GN = OG \implies \frac{GN}{OG} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Na demonstração do Teorema 2.7.2, vimos que $GA' : GA = 1 : 2$. Usando este fato, a equação (2.41) e que $\widehat{A'GN} = \widehat{AGO}$ (o.p.v), os triângulos $A'GN$ e AGO são semelhantes. Daí, temos que os ângulos $\widehat{GNA'} = \widehat{GOA}$, o que implica que os segmentos $\overline{NA'}$ e \overline{OA} são paralelos e

$$\frac{NA'}{OA} = \frac{1}{2} \implies NA' = \frac{1}{2}OA$$

¹⁰Nascido em 1788, Poncelet estudou na Escola Politécnica de Metz, na França. Foi professor de Matemática e sua principal obra foi publicada em 1822 com o título “*Tratado das propriedades projetivas das figuras*”.

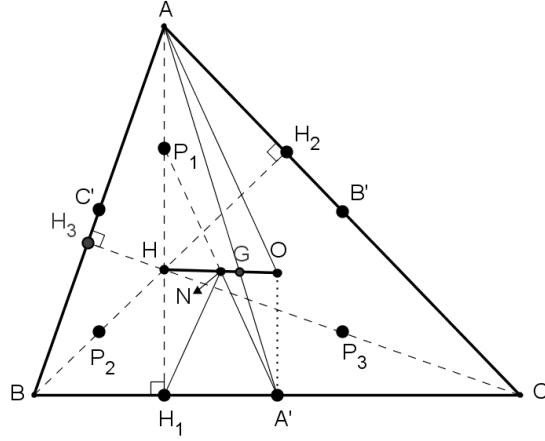


Figura 2.25: $\overline{NA'}$ e \overline{OA} são paralelos.

Seja agora $\{P_1\} = \overleftrightarrow{NA'} \cap \overline{AH}$. Como N é ponto médio de \overline{OH} e $\overleftrightarrow{NA'} \parallel \overline{OA}$, temos que o segmento $\overline{NP_1}$ é base média relativa a \overline{OA} do triângulo AHO, o que implica que P_1 é ponto médio de \overline{AH} e $NP_1 = \frac{1}{2}OA$.

No trapézio $HH_1A'O$, $NH_1 = NA'$, pois N é ponto médio de \overline{OH} .

Concluimos a partir das informações provadas acima, que

$$NH_1 = NA' = NP_1 = \frac{1}{2}OA$$

mas $OA = R$, onde R é o raio do circuncírculo do triângulo ABC. Portanto

$$NH_1 = NA' = NP_1 = \frac{1}{2}R$$

O que nos mostra que passa uma circunferência Ω pelos pontos P_1, H_1, A' e raio igual a metade do raio do circuncírculo do triângulo ABC.

Aplicando os mesmos procedimentos feitos acima, a partir dos vértices B e C, veremos que a circunferência Ω também passa pelos pontos P_2, P_3, H_2, H_3, B' e C' . ■

Demonstração 2. Considerando a Figura 2.26, temos que $A'B' = \frac{1}{2}AB = H_1C'$, pois $\overline{A'B'}$ é base média do triângulo ABC relativa ao lado \overline{AB} e, $\overline{H_1C'}$ é mediana relativa ao lado \overline{AB} do triângulo retângulo AH_1B .

Passemos a analisar o quadrilátero $H_1A'B'C'$. Observemos que este quadrilátero é um trapézio isósceles, pois $A'B' = H_1C'$, logo é inscritível. Concluimos daí, que passa uma circunferência Ω pelos pontos H_1, A', B', C' . Analogamente, Ω passa pelos pontos H_2 e H_3 .

No triângulo AHB, os pontos H_1, H_2 e H_3 são também os pés de suas alturas. Analogamente o que foi feito acima, mostra-se que a circunferência Ω também passa pelos pontos P_1, P_2 e P_3 .

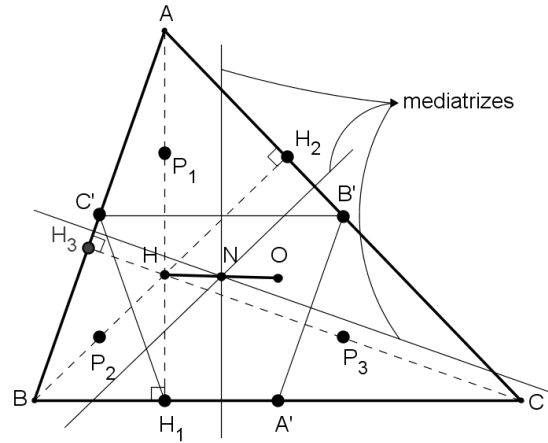


Figura 2.26: $\overline{NA'}$ e \overline{OA} são paralelos.

Analisando o trapézio retângulo $HH_1A'O$, temos que a mediatriz do segmento $\overline{H_1A'}$ passa pelo ponto médio N de \overline{HO} . O mesmo ocorre com as mediatrizes dos segmentos $\overline{H_2B'}$ e $\overline{H_3C'}$. Portanto o ponto N é o centro da circunferência Ω .

Para concluirmos a demonstração, consideremos o triângulo HOC . Como P_3 é ponto médio de \overline{HC} , o segmento $\overline{P_3N}$ é base média deste triângulo relativo ao segmento \overline{OC} . Portanto $NP_3 = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}$, ou seja, $\frac{R}{2}$ é o raio da circunferência Ω . ■

2.8 Teorema de Feuerbach

Na Seção 2.7, falamos que Euler tinha provado algumas propriedades da Circunferência dos nove pontos. Na verdade, Euler provou que passa uma mesma circunferência sobre os vértices dos triângulos medial, que é o triângulo formado unindo os pontos médios do triângulo, e órptico de um triângulo ABC . Mais tarde, este trabalho foi redescoberto por Karl Feuerbach¹¹, que acrescentou uma propriedade notável, que induziu muitos autores a chamar a Circunferência dos nove pontos de *Circunferência de Feuerbach*.

Feuerbach comprovou que a Circunferência dos nove pontos intersecta as quatro circunferências tritangentes de um triângulo ABC qualquer, ou seja, ela intersecta a circunferência inscrita e às três circunferências ex-inscrita¹² ao triângulo ABC .

Para demonstrarmos esse teorema, faremos o uso da *Geometria Inversiva*¹³, que foi

¹¹Matemático alemão do século XIX, Feuerbach publicou em 1822 o teorema que hoje leva o seu nome. Embora com a saúde debilitada, foi um dos inventores das chamadas *coordenadas homogêneas*. Feuerbach morreu jovem, com 34 anos em Erlangen, Alemanha.

¹²Uma circunferência ex-inscrita de um triângulo é uma circunferência externa ao triângulo, tangente a um de seus lados e às extensões dos outros dois.

¹³Essa Geometria permitiu a solução de problemas que até então estavam sem solução ou com soluções complicadíssimas, se resolvidos pela Geometria Euclidiana.

desenvolvida no século XIX por Jacob Steiner¹⁴. Faremos um breve resumo, mostrando alguns de seus principais resultados.

Definição 2.8.1. (*Conjugados harmônicos*) Seja um segmento de reta \overline{AB} . Dizemos que dois pontos M e N , pertencentes à reta \overleftrightarrow{AB} , são conjugados harmônicos de \overline{AB} se

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}.$$

Como existe apenas um ponto que divide interiormente o segmento \overline{AB} em uma dada razão¹⁵, concluímos que apenas um deles, M ou N , está entre os pontos A e B .

Definição 2.8.2. (*Inverso de um ponto*) Seja $S = C(O,r)$ um círculo de centro O e raio r . Dado um ponto P , diferente de O , o ponto P' na semi-reta \overrightarrow{OP} tal que $OP \cdot OP' = r^2$ é dito o inverso de P em relação a S .

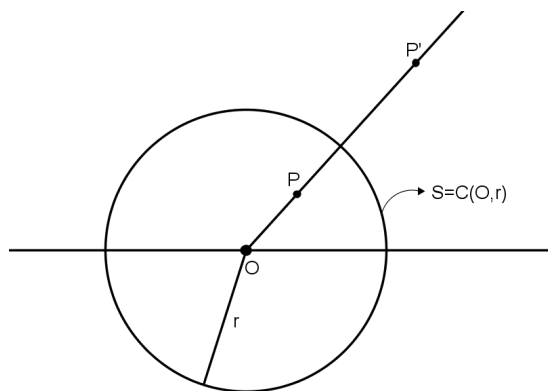


Figura 2.27: Inverso de um ponto.

Nos referimos ao círculo $S = C(O,r)$ como sendo o *círculo de inversão* e diremos que o ponto O é o *centro de inversão*.

De uma forma geral, se denotarmos E^2 como sendo o plano euclidiano, a transformação $I : E^2 - \{O\} \rightarrow E^2 - \{O\}$ que leva qualquer ponto $P \in E^2 - \{O\}$ a seu inverso referente a $S = C(O,r)$, chama-se *inversão*. Notemos que I é uma *aplicação bijetiva*.

Uma vez fixado o círculo de inversão, denotaremos o inverso de qualquer figura (ou ponto) X como sendo X' , ou seja, $Inv(X) = X'$.

Observação 2.8.1. Considerando a inversão referente a $S = C(O,r)$, temos:

1. Se P' é o inverso de P , então P é o inverso de P' .
2. Se $P \neq Q$, então $P' \neq Q'$.

¹⁴Matemático suíço nascido em 1796. Na Matemática, Steiner centrou-se na Geometria, em que procurou aperfeiçoar-se no campo sintético, pois odiava a Geometria Analítica, mesmo quando por ela se obtinham iguais ou melhores resultados.

¹⁵Uma prova desta afirmação pode ser vista em [23].

3. Se $P \in S$, então $P' = P$.

Definição 2.8.3. (Curvas ortogonais) Duas curvas são ortogonais em um ponto de interseção, se as retas tangentes às curvas nesse ponto forem perpendiculares.

Antes de passarmos um importante teorema que trata sobre a inversa de circunferências ortogonais, recordaremos um teorema da Geometria Plana que é usualmente chamado de *Potência de Ponto*.

Teorema 2.8.1. (Potência de Ponto: Parte I) Se duas cordas \overline{AB} e \overline{DC} de um círculo concorrem em um ponto P interior ou exterior a esse círculo, então

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Teorema 2.8.2. (Potência de Ponto: Parte II) Se P é um ponto exterior a um círculo, \overline{PAB} uma secante qualquer e PT o segmento da tangente traçada deste ponto ao círculo, então

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

Teorema 2.8.3. (Circunferências ortogonais) Seja $S = C(O,r)$. Se os pontos P, P' e O estão alinhados, então P e P' são inversos em relação a S se, e somente se, qualquer circunferência que passa por P e P' for ortogonal a S .

Demonstração. Suponhamos que P e P' são pontos inversos em relação à S . Seja $K = C(Q,k)$ uma circunferência com centro em Q e raio k , que passa por P e P' . Como um dos pontos é interno a S , as circunferências S e K se intersectam em G e H .

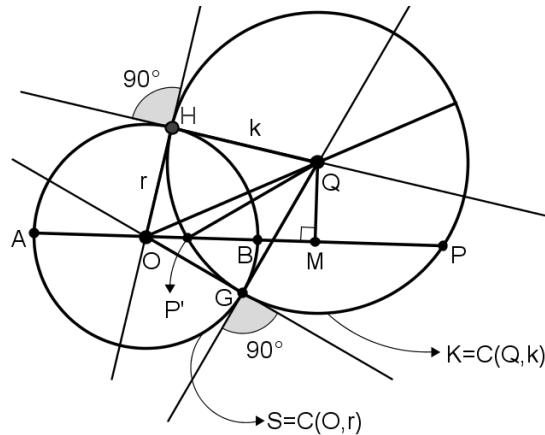


Figura 2.28: Circunferências ortogonais.

Seja M o pé da perpendicular traçada de Q à reta \overleftrightarrow{OP} , conforme figura acima. Do triângulo retângulo OQM vem que

$$OQ^2 = OM^2 + QM^2 \tag{2.42}$$

Por outro lado, $OM = OP' + P'M$. Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado, temos

$$\begin{aligned}
 OM^2 &= (OP' + P'M)^2 \\
 &= \left(OP' + \frac{PP'}{2} \right)^2 \\
 &= \left(OP' + \frac{OP - OP'}{2} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{OP + OP'}{2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

No triângulo QMP', temos

$$\begin{aligned}
 QM^2 &= QP'^2 - P'M^2 \\
 &= k^2 - \left(\frac{PP'}{2} \right)^2 \\
 &= k^2 - \left(\frac{OP - OP'}{2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Substituindo as equações (2.43) e (2.44) na equação (2.42) obtemos

$$OQ^2 = OP \cdot OP' + k^2$$

como por hipótese $OP \cdot OP' = r^2$, então

$$OQ^2 = r^2 + k^2$$

o que implica que os triângulos OHQ e OGQ são retângulos em \widehat{H} e \widehat{G} , respectivamente.

Reciprocamente, seja $K = C(Q,k)$ uma circunferência ortogonal a $S = C(O, r)$ e que passa por P e P' . Então, se H é um ponto de interseção entre S e K , a reta s tangente à K no ponto H é perpendicular à reta s' tangente à S no ponto H . Assim, a reta s passa por O . Como $OH^2 = r^2$, por Potência de Ponto teremos que

$$OP \cdot OP' = OH^2 = r^2$$

o que mostra que os pontos P e P' são inversos em relação a S . ■

Como consequência direta do teorema acima temos o seguinte corolário:

Corolário 4. *Uma circunferência $K = C(Q,k)$ é invariante em relação a uma circunferência de inversão $S = C(O,r)$ se, e somente se, K é ortogonal a S .*

Teorema 2.8.4. *Os pontos P e P' são inversos em relação a $S = C(O,r)$ se, e somente se, P e P' são conjugados harmônicos em relação ao diâmetro \overline{AB} determinado pela intersecção da reta \overleftrightarrow{OP} com a circunferência S .*

Demonstração. Considerando a Figura 2.29, temos

$$\begin{aligned} P'B &= OP' - r & PA &= r + OP \\ P'A &= OP' + r & PB &= r - OP \end{aligned} \quad \text{e}$$

então

$$\frac{P'A}{P'B} = \frac{OP' + r}{OP' - r} \quad \text{e} \quad \frac{PA}{PB} = \frac{r + OP}{r - OP}$$

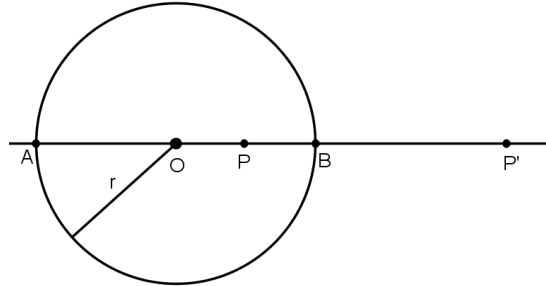


Figura 2.29: P e P' são conjugados harmônicos.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{P'A}{P'B} = \frac{PA}{PB} &\Leftrightarrow \frac{OP' + r}{OP' - r} = \frac{r + OP}{r - OP} \\ &\Leftrightarrow (OP' + r) \cdot (r - OP) = (OP' - r) \cdot (OP + r) \\ &\Leftrightarrow OP \cdot OP' = r^2 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.8.5. (*Inversão de reta: Parte I*) Seja $S = C(O, R)$. A inversa em relação a S de uma reta s que não passa por O , é uma circunferência que passa por O .

Demonstração. Seja A o pé da perpendicular traçada de O à reta s , e B um ponto qualquer distinto de A , pertencente a s . Sejam A' e B' os inversos de A e B , respectivamente. Então $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$, o que implica

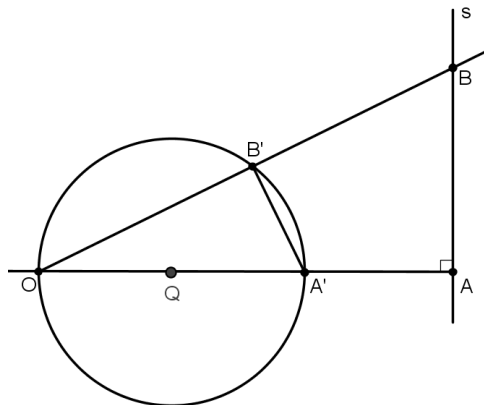


Figura 2.30: Inversão de reta que não passa por O .

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$$

e como $B'\widehat{O}A' = B\widehat{O}A$, concluímos que os triângulos AOB e $A'OB'$ são semelhantes.

Logo $\widehat{A'B'O}$ é reto, o que nos mostra que B' pertence a uma circunferência $K = (Q, \overline{OQ})$ que tem o segmento $\overline{A'O}$ como diâmetro. ■

Decorre imediatamente que:

Corolário 5. *Se s' é uma reta tangente a circunferência $K = (Q, \overline{OQ})$ no ponto O , então s' é paralela a s .*

Teorema 2.8.6. *(Inversão de reta: Parte II) Seja $S = C(O, R)$. A inversa em relação a S de uma reta s que passa por O , é a própria reta s , ou seja, uma reta é invariante quando esta passa pelo centro de inversão.*

Demonstração. Se $P \neq O$ é um ponto da reta s , então, o inverso P' de P pertence à semirreta \overrightarrow{OP} , logo, como P e O pertencem à s , então, $P' \in s$. Portanto $s' = Inv(s)$. ■

Teorema 2.8.7. *(Inversão de circunferência) Seja $S = C(O, r)$. A inversão em relação a S de uma circunferência $K = C(Q, k)$ que passa por O é uma reta.*

Demonstração. Seja P' um ponto pertencente ao diâmetro \overline{OP} tal que $OP \cdot OP' = r^2$.

Consideremos uma reta s , que contém P' e é perpendicular a \overline{OP} , conforme Figura 2.31. Seja B um ponto da circunferência $K = (Q, \overline{OQ})$, vamos provar que B' , pertencente ao segmento \overline{OB} , é o inverso de B .

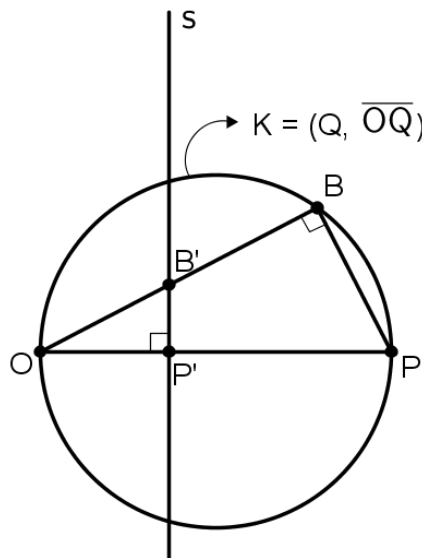


Figura 2.31: Inversão de circunferência que passa por O .

Como os triângulos $OP'B'$ e OBP são semelhantes, temos que

$$\frac{OP'}{OB} = \frac{OB'}{OP} \implies OB \cdot OB' = OP \cdot OP' = r^2$$

O que nos mostra que $B' = Inv(B)$. Logo $s = Inv(K)$ ■

Observação 2.8.2. Considerando S a circunferência de inversão, mostra-se que a inversa de uma circunferência que não passa por O é uma circunferência que, também, não passa por O .

Lema 2.8.1. Se dois pontos P e P' pertencem, respectivamente, às curvas inversas C e C' , então as tangentes a essas curvas em P e P' formam ângulos iguais com a reta $\overleftrightarrow{PP'}$.

Demonstração. Sejam os pares de pontos inversos P e P' , B e B' . Como

$$OP \cdot OP' = OB \cdot OB' \implies \frac{OP}{OB} = \frac{OB'}{OP'}$$

temos, conforme Figura 2.32, que os triângulos BOP e $B'OP'$ são semelhantes. Isso implica que o quadrilátero $BPP'B'$ é inscritível, sendo s e s' retas antiparalelas¹⁶ em relação ao ângulo \widehat{O} .

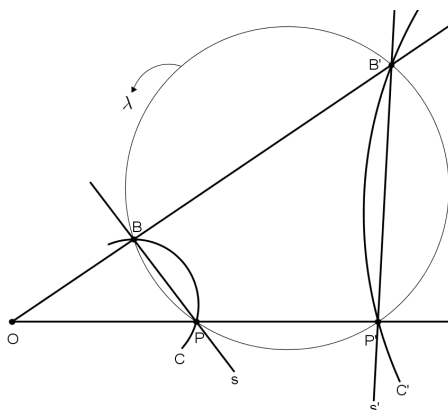


Figura 2.32: C e C' são curvas inversas.

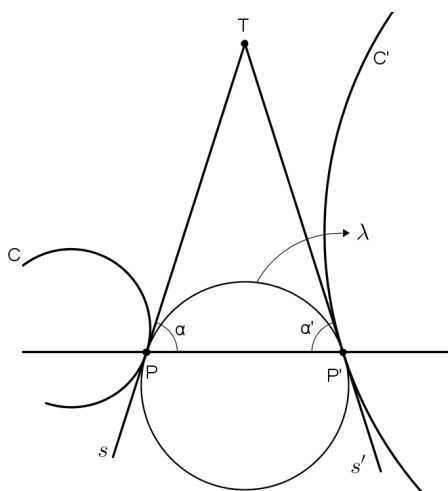


Figura 2.33: $\alpha = \alpha'$.

¹⁶São retas tais que o ângulo que s forma com a semirreta \overrightarrow{OB} é congruente ao ângulo que s' forma com a semirreta $\overrightarrow{OP'}$.

Considerando as Figuras 2.32 e 2.33, vemos que quando B tende a P , B' tende a P' e, quando $B = P$, implica que $B' = P'$. A circunferência λ (que passa pelos vértices do quadrilátero) será, então, tangente às curvas C e C' em P e P' , respectivamente, e as retas s e s' serão tangentes a essa circunferência e às curvas C e C' .

Como o triângulo TPP' é isósceles, temos, pela Figura 2.33, que $\alpha = \alpha'$. ■

Teorema 2.8.8. *Se duas curvas C_1 e C_2 formam um ângulo α em um ponto de interseção P , as suas inversas C'_1 e C'_2 , na mesma inversão, formarão um ângulo α em um ponto de interseção P' , inverso de P .*

Demonstração. Considerando a Figura 2.34, temos pelo Lema 2.8.1 que os triângulos MPP' e NPP' são isósceles. Concluimos imediatamente que os ângulos α e α' são iguais. ■

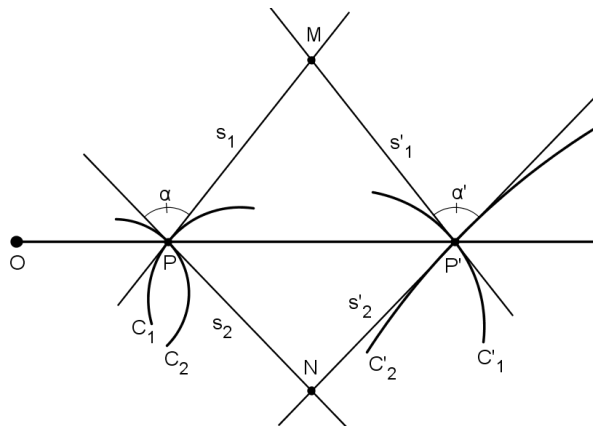


Figura 2.34: $\alpha = \alpha'$.

Enunciamos outro corolário que nos diz que a inversa mantém a tangência entre reta e circunferência, propriedade que será usada na demonstração do Teorema de Feuerbach.

Corolário 6. *Seja s uma reta tangente a uma circunferência $K = (Q, k)$ num ponto P , então a inversa s' da reta s é tangente a K' , inversa da circunferência K , em P' .*

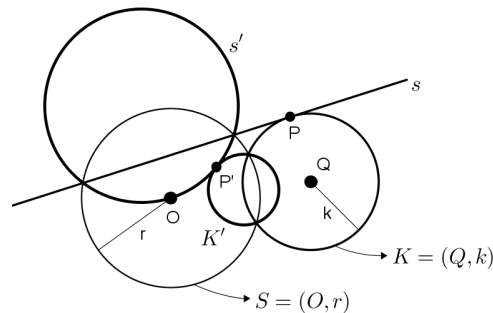


Figura 2.35: Inversão preserva tangência.

Antes de demonstrarmos o Teorema de Feuerbach vamos analisar dois resultados importantes para a demonstração do teorema supracitado.

Lema 2.8.2. *Sejam M , N e P os pontos médio dos lados de um triângulo ABC , Ω a sua Circunferência dos nove pontos, s uma reta tangente as circunferências inscrita e ex-inscrita a este triângulo e, r uma reta tangente a Ω por M . Então r é paralela a s .*

Demonstração. Pela Figura 2.36, temos:

- $\widehat{LMP} = \widehat{MNP}$, pois são ângulos de segmentos e inscritos referente a mesma corda \overline{PM} .
- $\widehat{MNP} = \widehat{PBM}$, pois $PBMN$ é um paralelogramo (observemos que \overline{MN} é base média relativa a \overline{AB} , do ΔABC).
- \overline{AK} é bissetriz dos ângulos $\widehat{CAC'}$ e $\widehat{CKC'}$.

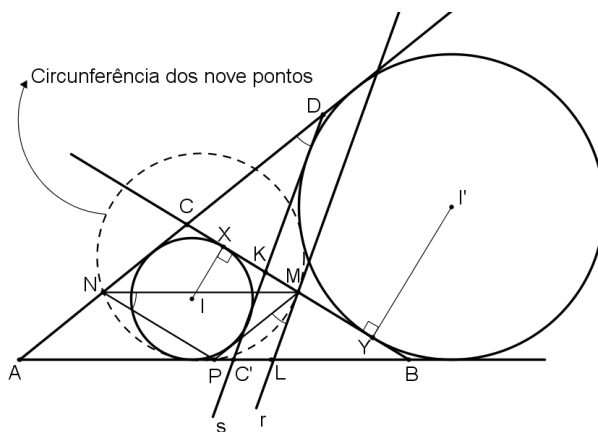


Figura 2.36: $r \parallel s$.

Logo, pelo caso ALA, os triângulos ACK e $AC'K$ são congruentes, o que implica que $\widehat{ACK} = \widehat{AC'K}$ e $AC = AC'$. Daí, os triângulos $AC'D$ e ACB são congruentes (caso ALA). Portanto $\widehat{ABC} = \widehat{ADC'}$.

Considerando as afirmações acima, r e s fazem os mesmos ângulos com as retas paralelas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{PM} , o que mostra que são paralelas. ■

Lema 2.8.3. *Considerando a Figura 2.37, M é ponto médio do segmento \overline{XY} .*

Demonstração. Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$ e p o semiperímetro de ABC . Sejam F , E e X os pontos onde a circunferência inscrita em ABC tangencia os seus lados, e suponha ainda que a circunferência ex-inscrita a \overline{BC} tangencia tal lado em Y e os prolongamentos de \overline{AC} e \overline{AB} em G e J , respectivamente.

Denotando $AE = AF = x$, $CX = CF = y$ e $BX = BE = z$, obtemos o seguinte sistema

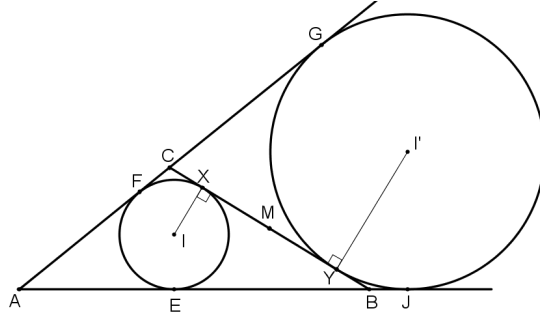


Figura 2.37: M é ponto médio de \overline{XY} .

$$\begin{cases} \overline{AC} : x + y = b \\ \overline{BC} : y + z = a \\ \overline{AB} : z + x = c \end{cases}$$

Somando essas igualdades temos que $x + y + z = p$. Daí

$$CX = CF = y = y + x + z - (x + z) \implies CX = p - c \quad (2.45)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} AJ &= AG \\ 2AJ &= AJ + AG \\ &= (AB + BJ) + (AC + CG) \\ &= (c + b) + (BY + CG) \\ &= a + b + c = 2p \end{aligned}$$

de modo que $AJ = AG = p$.

Como $BJ = BY = AJ - AB$. Concluimos que

$$BY = p - c \quad (2.46)$$

De (2.45) e (2.46) vem que $BY = CX$. Como, por hipótese, M é ponto médio de \overline{BC} , então M também é ponto médio do segmento \overline{XY} . ■

Lema 2.8.4. Considerando a Figura 2.38, os pontos I e I' são conjugados harmônicos referente ao segmentos \overline{AK} .

Demonstração. Temos as seguintes semelhanças

$$\triangle AWI \sim \triangle AZI' \implies \frac{IA}{I'A} = \frac{r}{R} \quad (2.47)$$

$$\triangle IXK \sim \triangle I'YK \implies \frac{IK}{I'K} = \frac{r}{R} \quad (2.48)$$

De (2.47) e (2.48), temos

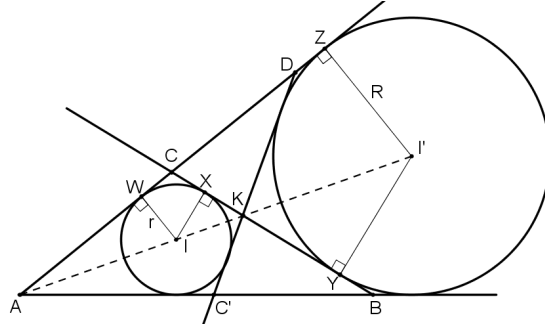


Figura 2.38: I e I' são conjugados harmônicos de \overline{AK} .

$$\frac{IA}{IK} = \frac{I'A}{I'K}$$

de onde concluímos que os pontos I e I' são conjugados harmônicos do segmentos \overline{AK} . ■

Lema 2.8.5. *Os pontos X e Y , projeções ortogonais de I e I' , respectivamente, sobre a reta \overleftrightarrow{BC} , são conjugados harmônicos em relação ao segmento cuja extremidade são as projeções ortogonais dos pontos A e K .*

Demonstração. Análogo ao lema anterior. ■

Teorema 2.8.9. *(Teorema de Feuerbach) Sejam ABC um triângulo e Ω sua Circunferência dos nove pontos. Então Ω é tangente à circunferência inscrita e às três circunferências ex-inscrita ao triângulo ABC .*

Demonstração. Pelo Lema 2.8.4, os pontos I e I' da Figura 2.39, são conjugados harmônicos referente ao segmentos \overline{AK} . Segue, pelo Lema 2.8.5, que os pontos X e Y são, também, conjugados harmônicos em relação ao segmentos $\overline{KH_1}$.

Consideremos, agora, uma circunferência $S = (M, \overline{MX})$, de centro M e que passa por X , conforme Figura 2.39. Pelo Lema 2.8.3, S também passa pelo ponto Y . Como a reta \overleftrightarrow{BC} é tangente as circunferências inscrita e ex-inscrita em X e Y , respectivamente, e o diâmetro de S está sobre \overleftrightarrow{BC} . Temos que estas circunferências são ortogonais a S , donde concluímos, pelo Corolário 4, que estas circunferências permanecem invariantes em relação S . O mesmo acontece com o segmento \overline{BC} , pois este segmento passa pelo centro de inversão.

Sendo Ω a Circunferência dos nove pontos do triângulo ABC . Como Ω passa pelo centro de inversão, pois passa por M , pelo Teorema 2.8.7, sua inversa é uma reta s' que passa pelo ponto K , pois $K = Inv(H_1)$, conforme Teorema 2.8.4.

Por outro lado, s' é paralela à tangente a Ω no ponto M (ver Corolário 5). O Lema 2.8.2 nos mostra que s' coincide com s , ou seja, s' é tangente a circunferência inscrita e ex-inscrita. Logo pelo Corolário 6, Ω é tangente as circunferências inscrita e ex-inscrita.

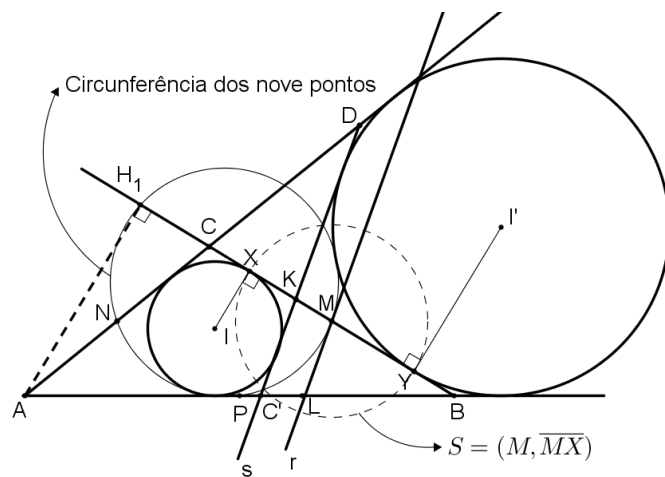


Figura 2.39: Reta s é a inversa da Circunferência dos nove pontos.

Por procedimentos similares, mostra-se que Ω é tangente as outras duas circunferências ex-inscritas. ■

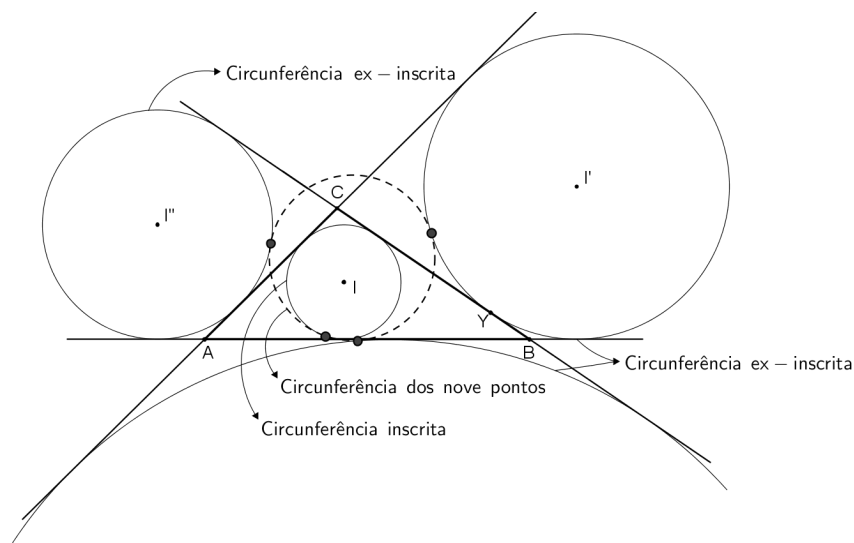


Figura 2.40: Teorema de Feuerbach.

Capítulo 3

Algumas Aplicações dos Teoremas Estudados

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações dos teoremas de *Stewart*, *Menelaus*, *Ceva* e *Ptolomeu*. Mas antes, enunciaremos dois teoremas conhecidos da Geometria Plana Euclidiana que serão utilizados no decorrer deste capítulo.

Teorema 3.0.10. (*Teorema das Bissetrizes Internas*) Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Teorema 3.0.11. (*Teorema das Bissetrizes Externas*) Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intersecta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

3.1 Aplicações do Teorema de Stewart

Proposição 3.1.1. (*Cálculo das medianas de um triângulo*) Sejam m_a , m_b e m_c as medianas relativas ao lado \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, de um triângulo ABC . Então

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} \quad e$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

onde $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$.

Demonstração. Seja $AM = m_a$ a mediana relativa ao lado \overline{BC} , conforme Figura 3.1. Aplicando o Teorema de Stewart, temos

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} = m_a^2 \cdot a + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \quad \frac{a}{2}(c^2 + b^2) = a \left(m_a^2 + \frac{a^2}{4} \right)$$

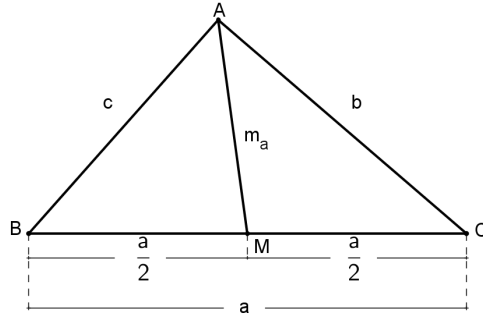


Figura 3.1: \overline{AM} mediana relativa a \overline{BC} .

$$m_a^2 = \frac{1}{2}(c^2 + b^2) - \frac{a^2}{4}$$

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{4}(2(c^2 + b^2) - a^2)}, \text{ pois } m_a > 0, \text{ logo}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2 + b^2) - a^2}$$

■

Analogamente, mostra-se que

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

Proposição 3.1.2. (*Cálculo das bissetrizes internas de um triângulo*) Sejam s_a , s_b e s_c as bissetrizes internas relativas aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, de um triângulo ABC . Então

$$s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}, s_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)} \text{ e } s_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

onde $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ e $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro.

Demonstração. Seja $AD = s_a$ uma bissetriz interna relativa ao lado \overline{BC} , conforme Figura 3.2.

Pelo Teorema da bissetriz interna temos que

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} \implies \frac{\overbrace{m+n}^a}{c+b} = \frac{m}{c} = \frac{n}{b}$$

$$\frac{a}{c+b} = \frac{m}{c} = \frac{n}{b} \implies \begin{cases} m = \frac{ac}{b+c} \\ n = \frac{ab}{b+c} \end{cases}$$

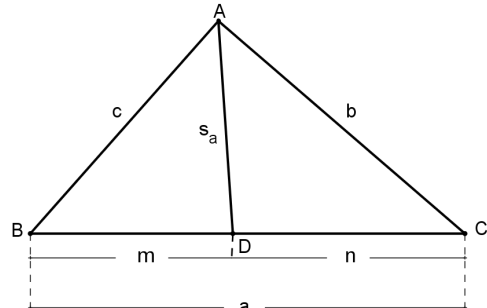


Figura 3.2: s_a bissetriz relativa a \overline{BC} .

Aplicando o Teorema de Stewart no $\triangle ABC$ obtemos

$$c^2 \cdot n + b^2 \cdot m = s_a^2 \cdot a + m \cdot n \cdot a$$

Substituindo os valores de m e n obtidos anteriormente, temos

$$\frac{b^2 ac}{b+c} + \frac{c^2 ab}{b+c} = s_a^2 \cdot a + \frac{a^2 bca}{(b+c)^2}$$

$$\frac{b^2 ac + c^2 ab}{b+c} = a \left(s_a^2 + \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} \right)$$

$$\frac{bc(b+c)}{b+c} - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = s_a^2$$

$$\frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = s_a^2$$

$$\frac{bc \overbrace{(b+c-a)}^{2p-a} \cdot \overbrace{(b+c+a)}^{2p}}{(b+c)^2} = s_a^2$$

$$\frac{bc(2p-2a) \cdot 2p}{(b+c)^2} = s_a^2$$

$$s_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}, \text{ como } s_a > 0 \text{ temos}$$

$$s_a = \frac{2}{(b+c)} \sqrt{bcp(p-a)}$$

■

As outras duas relações são mostradas de forma similar.

Observação 3.1.1. Com o auxílio do Teorema de Stewart mostra-se que: Sendo β_a, β_b e β_c as bissetrizes externas relativas aos lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, respectivamente, de um triângulo ABC . Então

$$\beta_a = \frac{2}{|b-c|} \sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$\beta_b = \frac{2}{|a-c|} \sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

$$\beta_c = \frac{2}{|a-b|} \sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

onde p é o semiperímetro do triângulo ABC .

3.2 Aplicações dos Teoremas de Menelaus e Ceva

Teorema 3.2.1. (Teorema de Desargues¹) Se dois triângulos situados no mesmo plano estão relacionadas de maneira que as retas que unem vértices homólogos passam por um mesmo ponto (triângulos copolares), então os lados homólogos se cortam nos pontos de uma mesma reta (triângulos colineares). Reciprocamente, triângulos colineares são copolares.

Demonstração. Aplicando o Teorema de Menelaus aos três trios de pontos $\{D, R', Q'\}$, $\{E, P', R'\}$, $\{F, Q', P'\}$ em relação aos triângulos ΔOQR , ΔORP , e ΔOPQ , respectivamente, da Figura 3.3, teremos

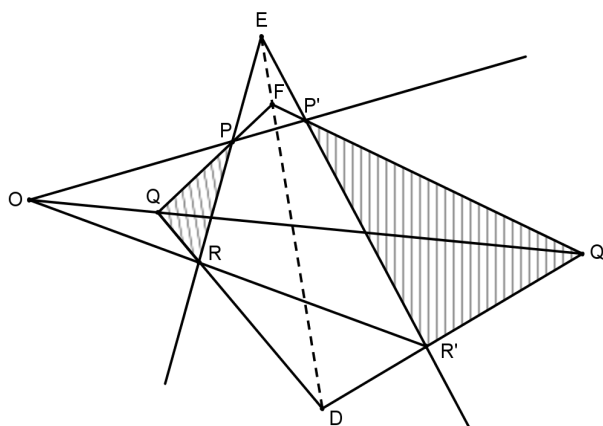


Figura 3.3: Teorema de Desargues.

$$\frac{QD}{RD} \cdot \frac{RR'}{OR'} \cdot \frac{OQ'}{QQ'} = 1 \quad (3.1)$$

$$\frac{RE}{PE} \cdot \frac{PP'}{OP'} \cdot \frac{OR'}{RR'} = 1 \quad (3.2)$$

$$\frac{PF}{QF} \cdot \frac{QQ'}{OQ'} \cdot \frac{OP'}{PP'} = 1 \quad (3.3)$$

Multiplicando membro a membro (3.1), (3.2) e (3.3), temos

$$\frac{QD}{RD} \cdot \frac{RE}{PE} \cdot \frac{PF}{QF} = 1 \quad (3.4)$$

Mas a equação (3.4) nos mostra a recíproca do Teorema de Menelaus aplicado ao ΔPQR . Portanto E, F e D são colineares.

¹Gerard Desargues (1591 - 1661) matemático e engenheiro francês, foi precursor da Geometria Projetiva. Sua principal obra foi sobre as propriedades imutáveis dos círculo, publicada em 1639.

Reciprocamente, considerando os ΔPQR e $\Delta P'Q'R'$ da Figura 3.3, temos que os pontos $\overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{P'R'} = \{E\}$, $\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{P'Q'} = \{F\}$ e $\overleftrightarrow{QR} \cap \overleftrightarrow{Q'R'} = \{D\}$ são colineares.

Sendo $\overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{RR'} = \{O\}$, mostraremos que a reta $\overleftrightarrow{QQ'}$ passa por O , ou seja, $\overleftrightarrow{RR'} \cap \overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{QQ'} = \{O\}$.

Aplicando aos $\Delta FPP'$ e $\Delta DRR'$ o que foi mostrado na primeira parte deste teorema, teremos que $\overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{RR'} = \{O\}$, $\overleftrightarrow{P'F} \cap \overleftrightarrow{R'D} = \{Q'\}$ e $\overleftrightarrow{FP} \cap \overleftrightarrow{DR} = \{Q\}$ são colineares e que os dois triângulos possuem os vértices dois a dois sobre três retas concorrentes. ■

Teorema 3.2.2. (Teorema de Pappus²) Quando um hexágono tem três de seus vértices sobre uma reta e os outros três sobre outra reta, os três pontos de intersecção dos lados opostos são colineares.

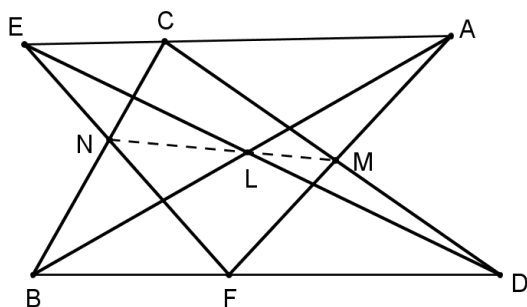


Figura 3.4: Teorema de Pappus.

Demonstração.

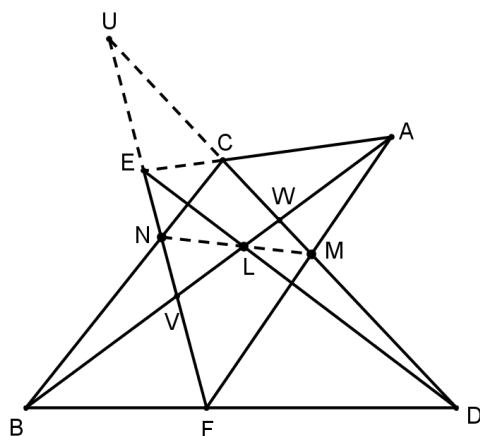


Figura 3.5: N, L, M são pontos não colineares.

Seja $ABCDEF$, o hexágono com vértices A, C e E sobre a reta \overleftrightarrow{AC} e, B, D e F sobre a reta \overleftrightarrow{BD} , conforme figura abaixo, onde $\overline{AB} \cap \overline{ED} = \{L\}$, $\overline{CD} \cap \overline{AF} = \{M\}$, $\overline{BC} \cap \overline{EF} = \{N\}$, $\overline{CD} \cap \overline{EF} = \{U\}$, $\overline{AB} \cap \overline{EF} = \{V\}$ e $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{W\}$.

²Pappus de Alexandria (cerca de 300 d.C.) foi o maior matemático de sua época. Seus trabalhos no campo da Geometria Projetiva foi redescoberto quase dezesseis séculos mais tarde. Pappus é considerado o último dos grandes geômetras da antiguidade.

Consideremos os cinco trios de pontos $\{L, D, E\}$, $\{A, M, F\}$, $\{B, C, N\}$, $\{A, C, E\}$ e $\{B, D, F\}$ em relação ao triângulo ΔUVW , da Figura 3.5, formado pelas retas \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD} e \overleftrightarrow{EF} , temos pelo Teorema de Menelaus

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WD}{UD} \cdot \frac{UE}{VE} = 1 \quad (3.5)$$

$$\frac{VA}{WA} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UF}{VF} = 1 \quad (3.6)$$

$$\frac{VB}{WB} \cdot \frac{WC}{UC} \cdot \frac{UN}{VN} = 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{VA}{WA} \cdot \frac{WC}{UC} \cdot \frac{UE}{VE} = 1 \quad (3.8)$$

$$\frac{VB}{WB} \cdot \frac{WD}{UD} \cdot \frac{UF}{VF} = 1 \quad (3.9)$$

Multiplicando membro a membro (3.5), (3.6) e (3.7) e multiplicando (3.8) e (3.9), respectivamente, temos

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WD}{UD} \cdot \frac{UE}{VE} \cdot \frac{VA}{WA} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UF}{VF} \cdot \frac{VB}{WB} \cdot \frac{WC}{UC} \cdot \frac{UN}{VN} = 1 \quad (3.10)$$

$$\frac{VA}{WA} \cdot \frac{WC}{UC} \cdot \frac{UE}{VE} \cdot \frac{VB}{WB} \cdot \frac{WD}{UD} \cdot \frac{UF}{VF} = 1 \quad (3.11)$$

Dividindo membro a membro (3.10) e (3.11) obtemos

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UN}{VN} = 1$$

Mas esta equação nos dá a recíproca do Teorema de Menelaus aplicado ao ΔUVW , logo L, M e N são colineares. ■

Teorema 3.2.3. (Teorema de Pascal³) *Em um hexágono inscrito em uma circunferência, os pontos de intersecção dos três pares de lados opostos então em linha reta.*

Demonstração. Seja ΔUVW , formado pelo lado \overline{AB} e pelas retas \overleftrightarrow{CD} e \overleftrightarrow{EF} , conforme Figura 3.6.

Provaremos que $\overline{AB} \cap \overline{DE} = \{L\}$, $\overline{CD} \cap \overline{FA} = \{M\}$ e $\overline{BC} \cap \overline{EF} = \{N\}$ são colineares.

Aplicando o Teorema de Menelaus ao ΔUVW e aos três trios de pontos $\{L, D, E\}$, $\{A, M, F\}$ $\{B, C, N\}$, respectivamente, obtemos as seguintes relações

³Blaise Pascal (1623 - 1662) matemático e físico francês, deu grandes contribuições para a Geometria Projetiva e a Teoria das Probabilidades. Seu “*Tratado sobre triângulos aritmético*” de 1653, descreveu uma apresentação tabular para os coeficientes binomiais, hoje chamado Triângulo de Pascal.

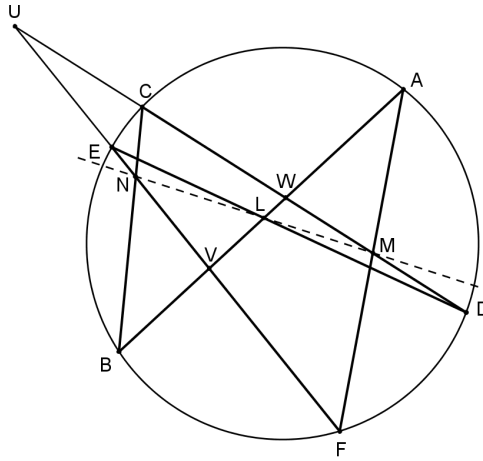


Figura 3.6: Teorema de Pascal.

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WD}{UD} \cdot \frac{UE}{VE} = 1 \quad (3.12)$$

$$\frac{VA}{WA} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UF}{VF} = 1 \quad (3.13)$$

$$\frac{VB}{WB} \cdot \frac{WC}{UC} \cdot \frac{UN}{VN} = 1 \quad (3.14)$$

Multiplicando membro a membro (3.12), (3.13) e (3.14) membro a membro, temos

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UN}{VN} \cdot \frac{WD}{UD} \cdot \frac{UE}{VE} \cdot \frac{VA}{WA} \cdot \frac{UF}{VF} \cdot \frac{VB}{WB} \cdot \frac{WC}{UC} = 1 \quad (3.15)$$

Como, pelo Teorema 2.8.1, $UE \cdot UF = UC \cdot UD$, $VA \cdot VB = VE \cdot VF$ e $WC \cdot WD = WA \cdot WB$, vem de (3.15) que

$$\frac{WD}{UD} \cdot \frac{UE}{VE} \cdot \frac{VA}{WA} \cdot \frac{UF}{VF} \cdot \frac{VB}{WB} \cdot \frac{WC}{UC} = 1$$

Logo

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UN}{VN} = 1$$

Portanto, M , N e L são colineares. ■

A reta que contém os pontos M , N e L , chama-se *Reta de Pascal*.

Observação 3.2.1. *Fazendo coincidir certos pares de pontos no hexágono ABCDEF, podemos deduzir teoremas análogos ao de Pascal para pentágonos, quadriláteros e até triângulos inscritos na circunferência.*

Proposição 3.2.1. *As bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo não isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo cortam os lados opostos em três pontos colineares.*

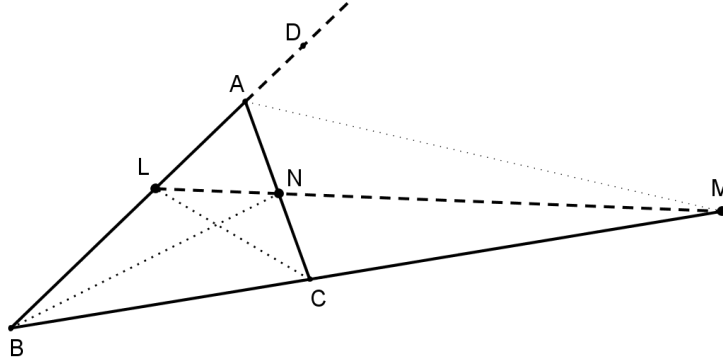


Figura 3.7: L , N e M são pontos colineares.

Demonstração. Seja ABC um triângulo não isósceles, sendo

- \overline{BN} (com $N \in \overline{AC}$) e \overline{CL} (com $L \in \overline{AB}$) as bissetrizes dos ângulos \widehat{ABC} e \widehat{BCA} , respectivamente.
- \overline{AM} a bissetriz externa relativa ao ângulo \widehat{DAC} , com $\{M\} = \overline{AM} \cap \overleftrightarrow{BC}$.

Pelo Teorema 3.0.10 aplicado a bissetriz \overline{CL} , temos

$$\frac{LA}{AC} = \frac{LB}{BC} \implies \frac{LA}{AC} \cdot \frac{BC}{LB} = 1 \quad (3.16)$$

Analogamente, aplicando o Teorema 3.0.10 à bissetriz \overline{BN} temos

$$\frac{NC}{BC} = \frac{NA}{AB} \implies \frac{NC}{BC} \cdot \frac{AB}{NA} = 1 \quad (3.17)$$

Agora, pelo Teorema 3.0.11, temos

$$\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{AC} \implies \frac{MB}{AB} \cdot \frac{AC}{MC} = 1 \quad (3.18)$$

Multiplicando membro a membro (3.16), (3.17) e (3.18) temos

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

Pela recíproca do Teorema de Menelaus, vem que L , M e N são colineares. ■

Proposição 3.2.2. *(Ponto de Gergonne⁴) Sejam \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} os lados de um triângulo ABC , e λ um círculo inscrito no triângulo ABC (incírculo). Se $\{X\} = \overline{BC} \cap \lambda$, $\{Y\} = \overline{AC} \cap \lambda$ e $\{Z\} = \overline{AB} \cap \lambda$, então as cevianas \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} são concorrentes em um único ponto.*

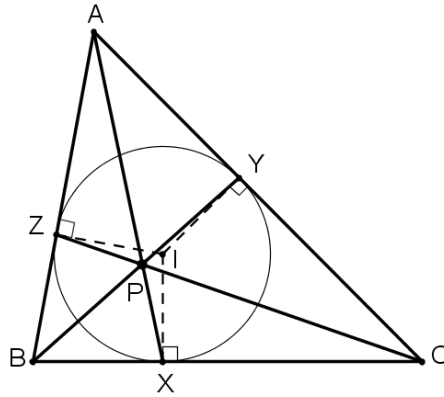


Figura 3.8: P é o ponto de Gergonne.

Demonstração. Pela Figura 3.8, temos que $AZ = AY$, $BZ = BX$ e $CX = CY$. Logo

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{CY}{AY} = \frac{BZ}{CY} \cdot \frac{AY}{BZ} \cdot \frac{CY}{AY} = 1$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, as cevianas \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} são concorrentes em um único ponto. ■

Proposição 3.2.3. (*Ponto de Nagel*⁵) Sejam \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} os lados de um triângulo ABC , e λ_1, λ_2 e λ_3 círculos tangentes aos lados do triângulo ABC (ex-círculo). Se $\{X_b\} = \overline{BC} \cap \lambda_1$, $\{Y_b\} = \overline{AC} \cap \lambda_2$ e $\{Z_b\} = \overline{AB} \cap \lambda_3$, então as cevianas $\overline{AX_b}$, $\overline{BY_b}$ e $\overline{CZ_b}$ são concorrentes em um único ponto.

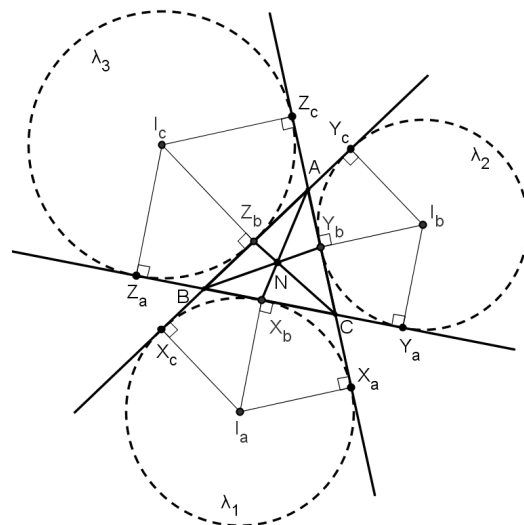


Figura 3.9: N é o ponto de Nagel.

⁴Em homenagem ao matemático francês Joseph Dias Gergonne (1771 - 1859).

⁵Em homenagem ao matemático norte americano Ernest Nagel (1803 - 1832).

Demonstração. Sejam $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ e p o semiperímetro de ABC . Pela demonstração do Lema 2.8.3, mostra-se que $BX_b = AY_b = p - c$, analogamente temos que $BZ_b = CY_b = p - a$ e $AZ_b = CX_b = p - b$. Logo

$$\frac{AZ_b}{BZ_b} \cdot \frac{BX_b}{CX_b} \cdot \frac{CY_b}{AY_b} = \frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} = 1$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, as cevianas $\overline{AX_b}$, $\overline{BY_b}$ e $\overline{CZ_b}$ são concorrentes em um único ponto. ■

Proposição 3.2.4. (*Concorrência das medianas de um triângulo*) Num triângulo ABC as medianas se encontram num ponto chamado baricentro do triângulo ABC .

Demonstração. Sejam D, E e F os pontos médios dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Temos que $BD = DC$, $CE = EA$, $AF = FB$ e $CE = EA$. Logo

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

que pelo Teorema de Ceva nos mostra que as medianas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} se intersectam em um único ponto. ■

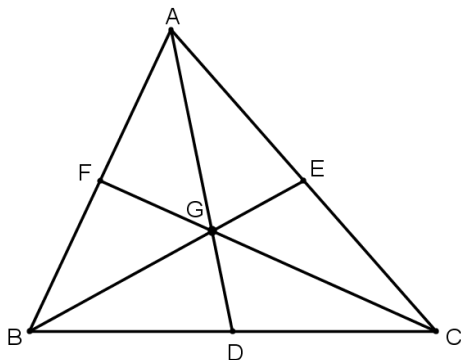


Figura 3.10: G é o baricentro do triângulo ABC .

Proposição 3.2.5. (*Concorrência das bissetrizes internas de um triângulo*) Num triângulo ABC as bissetrizes se encontram num ponto chamado incentro do triângulo ABC .

Demonstração. Sejam $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Pelo Teorema da bissetriz interna temos que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}, \frac{AF}{FB} = \frac{b}{a} \text{ e } \frac{CE}{EA} = \frac{a}{c}$$

Multiplicando essas equações membro a membro temos

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

que pelo Teorema de Ceva nos mostra que as bissetrizes \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} se intersectam em um único ponto. ■

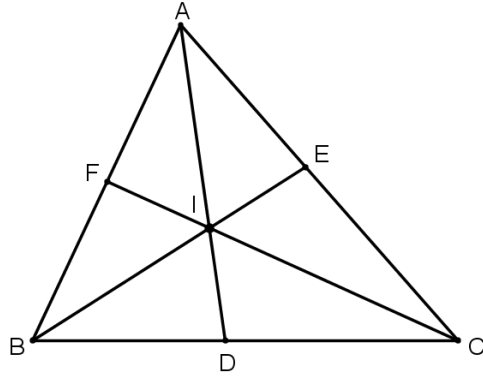


Figura 3.11: I é o incentro do triângulo ABC .

Proposição 3.2.6. (*Concorrência das alturas de um triângulo*) Num triângulo ABC as alturas se encontram num ponto chamado ortocentro do triângulo ABC .

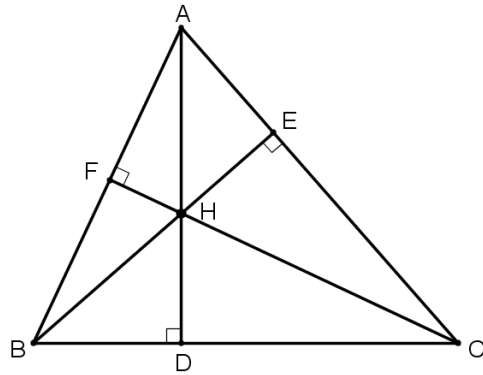


Figura 3.12: H é o ortocentro do triângulo ABC .

Demonstração. Sejam \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} as alturas relativas aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, de um triângulo ABC . Sendo $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, temos pela Figura 3.12 que os $\triangle AFC$ e $\triangle AEB$ tem o ângulo \widehat{A} em comum e são triângulos retângulos, o que implica que eles são semelhantes. Assim

$$\frac{AF}{EA} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \quad (3.19)$$

De maneira análoga, $\triangle BFC \sim \triangle BDA$, daí

$$\frac{BD}{FB} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \quad (3.20)$$

Temos também que $\triangle CEB \sim \triangle CDA$, o que implica que

$$\frac{CE}{DC} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} \quad (3.21)$$

Multiplicando membro a membro (3.19), (3.20) e (3.21) temos

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

que pelo Teorema de Ceva nos mostra que as alturas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} se intersectam em um único ponto. ■

3.3 Aplicações do Teorema de Ptolomeu

O problema que iremos apresentar a seguir, foi tirado da OIM (Olimpíada Internacional de Matemática) e mostra uma aplicação da Geometria à Teoria dos Números.

Proposição 3.3.1. *Sejam a, b, c e d inteiros com $a > b > c > d > 0$. Se $a \cdot c + b \cdot d = (b + d + a - c) \cdot (b + d - a + c)$, então $a \cdot b + c \cdot d$ não é um número primo.*

Demonstração. Observemos que a equação da hipótese pode ser escrita como

$$\begin{aligned} a \cdot c + b \cdot d &= b^2 + b \cdot d - a \cdot b + b \cdot c + b \cdot d + d^2 - a \cdot d + c \cdot d + a \cdot b + \\ &+ a \cdot d - a^2 + a \cdot c - b \cdot c - c \cdot d + a \cdot c - c^2 \end{aligned}$$

Segue daí que

$$a^2 - a \cdot c + c^2 = b^2 + b \cdot d + d^2$$

É nessa parte que utilizamos a Geometria.

Consideremos um triângulo de lados a, c e $\sqrt{a^2 - a \cdot c + c^2}$, e outro de lados b, d e $\sqrt{b^2 - b \cdot d + d^2}$.

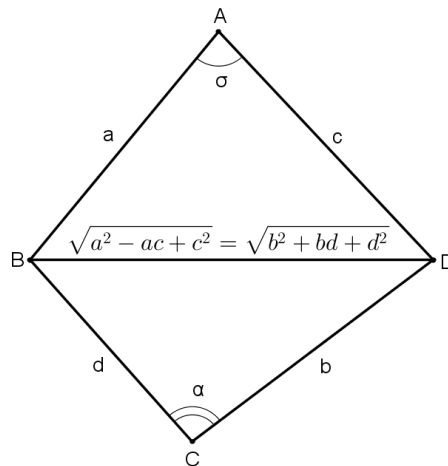


Figura 3.13: $\sigma = 60^\circ$ e $\alpha = 120^\circ$.

Temos pela Lei dos Cossenos que

$$\begin{aligned} (\sqrt{a^2 - a \cdot c + c^2})^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \sigma \implies \\ a^2 - a \cdot c + c^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \sigma \implies \end{aligned}$$

$$\cos \sigma = \frac{1}{2} \implies \sigma = 60^\circ$$

Analogamente, o outro triângulo tem um ângulo de 120° .

Considerando a Figura 3.14 e aplicando o Teorema de Ptolomeu, temos que

$$x \cdot y = a \cdot b + c \cdot d$$

Ainda pela mesma figura temos

$$\phi + \beta + \theta + \lambda = 180^\circ \implies \phi + \beta = 180^\circ - (\theta + \lambda)$$

Pela Lei dos Cossenos no $\triangle ACD$ temos que

$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\theta + \lambda) \quad (3.22)$$

De maneira análoga, do $\triangle ABC$ temos que

$$y^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos(\beta + \phi) \quad (3.23)$$

Como $\theta + \lambda$ e $\beta + \phi$ são suplementares, vem que $-\cos(\theta + \lambda) = \cos(\beta + \phi)$.

Multiplicando membro a membro (3.22) por $a \cdot d$ e (3.23) por $b \cdot c$ e, logo depois somando temos

$$y^2 = \frac{(a \cdot b + c \cdot d) \cdot (a \cdot c + b \cdot d)}{a \cdot d + b \cdot c}$$

Como $x \cdot y = a \cdot b + c \cdot d$ o que implica que $x^2 \cdot y^2 = (a \cdot b + c \cdot d)^2$ ou

$$\frac{\overbrace{(a^2 - a \cdot c + c^2)}^{x^2} \cdot (a \cdot b + c \cdot d) \cdot (a \cdot c + b \cdot d)}{a \cdot d + b \cdot c} = (a \cdot b + c \cdot d)^2$$

o que implica

$$(a^2 - a \cdot c + c^2) \cdot (a \cdot c + b \cdot d) = (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (a \cdot b + c \cdot d)$$

Agora, suponhamos que $a \cdot b + c \cdot d$ é primo. Como $a \cdot b + c \cdot d > a \cdot c + b \cdot d$ (caso contrário teríamos $a \cdot b + c \cdot d - a \cdot c - b \cdot d < 0$ ou $(a - d) \cdot (b - c) < 0$ o que não é verdadeiro, pois $a > b > c > d > 0$ por hipótese), então $a \cdot c + b \cdot d$ não pode ter fator comum com $a \cdot b + c \cdot d$. Então $a \cdot d + b \cdot c$ é múltiplo de $a \cdot c + b \cdot d$, o que implica que $a \cdot d + b \cdot c \geq a \cdot c + b \cdot d$, o que é um absurdo, pois por hipótese $a > b > c > d$. Logo $a \cdot d + b \cdot c < a \cdot c + b \cdot d$, onde concluímos que $a \cdot b + c \cdot d$ não é primo. ■

Proposição 3.3.2. *Seja $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ um polígono regular de n lados. Se $\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$, então este polígono tem 7 lados.*

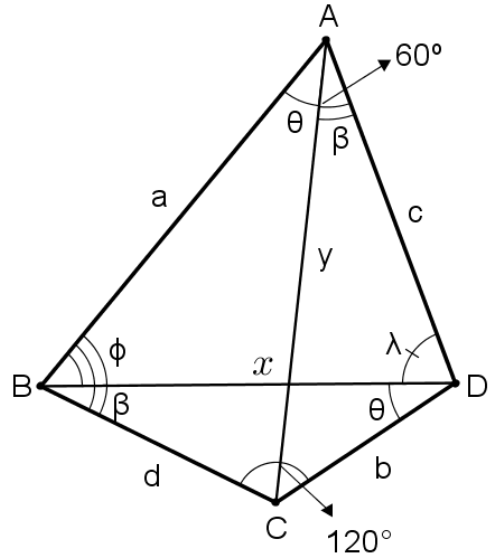


Figura 3.14: Quadrilátero inscritível.

Demonstração. Seja $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = c$ e $A_1A_5 = d$.

Pela figura abaixo, temos que o quadrilátero $A_1A_3A_4A_5$ é inscritível. Aplicando o Teorema de Ptolomeu temos

$$b \cdot c = a \cdot d + a \cdot b \implies a \cdot d = b \cdot c - a \cdot b \quad (3.24)$$

mas por hipótese

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \implies b \cdot c - a \cdot b = a \cdot c \quad (3.25)$$

De (3.24) e (3.25) temos

$$a \cdot c = a \cdot d \implies c = d$$

Como $A_5A_6 = a$ e $A_1A_5 = d = c$ devemos ter $A_1A_6 = b$, para isso, basta termos um único ponto sobre a circunferência entre os pontos A_1 e A_6 . Logo teremos um *heptágono regular*. ■

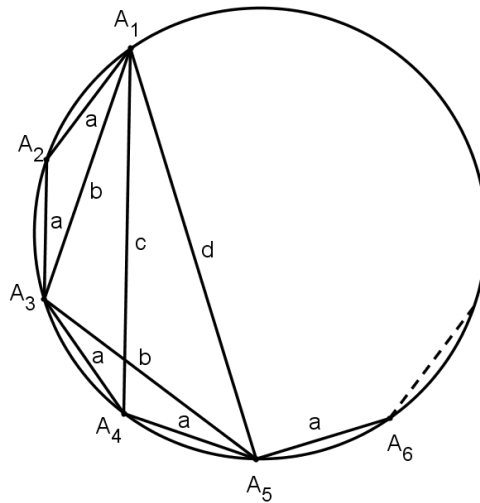


Figura 3.15: n-ágono regular.

Considerações Finais

Neste trabalho procuramos fazer uma abordagem simples de alguns teoremas clássicos da Geometria Plana e torná-los mais conhecidos, pois embora tenham um grande papel na resolução de muitos problemas, estão de certa forma esquecidos tanto no ensino básico quanto no ensino de graduação.

Vimos ao longo dos capítulos, que muitos desses teoremas clássicos são construídos por meio de teoremas, proposições e corolários bastante conhecidos e ensinados nos diversos níveis de ensino, podendo, portanto, serem abordados, pois não necessitariam de assuntos que não fossem ministrados em tais níveis de ensino. Para o último teorema do Capítulo 2, fizemos o uso de uma Transformação Geométrica que tem a propriedade de preservar ângulos e que é muito utilizada em problemas que envolvem tangências, a chamada Transformação Inversiva. Transformações Geométricas são aplicações bijetivas de pontos do plano sobre si mesmo, ou seja, uma transformação geométrica transporta um ponto do plano para outro lugar do plano, segundo uma lei de associação. Apesar desse tema não está incorporado às práticas escolares e, até mesmo na formação de professores, sua forma aqui utilizada e suas generalizações para dimensões superiores, são frequentemente utilizadas em demonstrações de problemas geométricos, pois “constituem um campo rico de conexões para raciocinar sobre o plano e o espaço” [4].

Acreditamos que tanto o enfoque da realização desse trabalho, com a utilização da Geometria Inversiva, por exemplo, como os teoremas clássicos, que utilizamos simplesmente métodos elementares da Geometria Sintética, pode servir para a melhoria do ensino-aprendizagem de Geometria Euclidiana Plana e possivelmente servir de elemento motivador para alunos e professores que busquem aprimorar seus conhecimentos em Geometria nos seus diversos desdobramentos.

Referências Bibliográficas

- [1] ALLAN, N.D. *Teoremas de Menelaus e Ceva*. Unesp - São Paulo. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/nelo/newCEVMN.doc>>. Acesso em: 15 jan. 2013.
- [2] ALLAN, N.D. *Os Teoremas de Desargues, Pascal e Pappus* - Unesp. São Paulo. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/nelo/newDESRG.doc>>. Acesso em: 01 fev. 2013.
- [3] BARBOSA, J.L.M. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática. BBM: Rio de Janeiro, 1994.
- [4] BASTOS, R. *Notas sobre o ensino de Geometria: Transformações Geométricas*. Educação e Matemática. Revista da APM, Lisboa, n.94, 2007.
- [5] BOYER, C.B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
- [6] CARNEIRO, J.P. *Reta de Euler e Números Complexos*. Disponível em: <http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/reta_euler.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2013.
- [7] CARVALHO, J. B. P. *Os Elementos de Euclides*. Cadernos da RPM-Revista do Professor de Matemática, nº 1, 1994.
- [8] COSTA, C., TRALEA, P. *Argumentação e conceito de prova em Matemática*. Rio de Janeiro: UFF-Universidade Federal Fluminense, 2007.
- [9] COURANT, R., ROBBINS, H., *What is Mathematics?*. 1 ed., New York, Oxford University Press, 1941.
- [10] COXETER, H.S.M., Greitzer, S.L. *Geometry Revisited, The Mathematical Association of America*. Washington, 1967.
- [11] _____. *Matthew Stewart (mathematician)*. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Matthew_Stewart>. Acesso em: 05 fev. 2013.

- [12] _____. *Hiparco*. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Hiparco#Teorema_de_Hiparco>. Acesso em: 05 fev. 2013.
- [13] _____. *Napoleão Bonaparte*. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Napole_Bonaparte>. Acesso em: 05 fev. 2013.
- [14] _____. *Jakob Steiner*. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Jakob_Steiner>. Acesso em: 06 fev. 2013.
- [15] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol 9: Geometria Plana. 7ª ed. São Paulo: Atual, 1985.
- [16] EVES, H. *Tópicos de História da Matemática - Geometria*. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.
- [17] GILBERT, E. N, POLLAK, H.O. "Steiner Minimal Trees", *SIAM J. Appl. Math.*, v. 16, n.1, pp. 1-29, 1968.
- [18] GUALBERTO, K.J. *Colinearidade e Concorrência na Geometria Plana*. Monografia de Graduação. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina. 20057.
- [19] HWANG, F.K., RICHARDS, D.S., WINTER, P. *The Steiner Tree Problem*. North-Holland, 1992.
- [20] JOHNSON, R.A. *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications, Inc. New York.
- [21] LIMA, E.L. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1991.
- [22] LOPES, S.M.R. *Complexidade em Geometria Plana Euclidiana*. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: PUC-Pontifícia Univerdade Católica, 2002.
- [23] MORGADO, A.C., WAGNER, E., JORGE, M. *Geometria II*. Fortaleza, VestSeller, 2008.
- [24] OLIVEIRA, N.V. *O Problema de Steiner e a Estrutura das Biomacromoléculas*. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.
- [25] PINHO, J.L.R., BATISTA, E., CARVALHO, N.T.B. *Geometria I*. Curso EaD, UFSC, 2005.
- [26] POSAMENTIER, A. et al. *Challenging Problems in Geometry*. New York, Dover Publications, INC, 1970, 1988.

- [27] SARMENTO, M.I. *Um Passeio Proveitoso Pelos Círculos de Apolônio*. Dissertação de Mestrado. Porto - Portugal. Universidade do Porto, 2007.
- [28] SINGH, S. *O Último Teorema de Fermat*. 13^a ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- [29] SMARANDACHE, F. *Généralisation du Théorème de Ménélaüs*. Rabat, Marocco, Seminar for the selection and preparation of the Moroccan students for the International Olympiad of Mathematics in Paris-France, 1983,

Apêndice A

Demonstrações dos teoremas auxiliares

Demonstração do Teorema 2.1.1

(I) Caso: $0 < \hat{A} < 90^\circ$

Seja ABC um triângulo com

- $AC = b$
- $AB = c$
- $BC = a$
- $D \in \overline{AB}$ tal que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$
- $AD = m$
- $CD = h$
- $C\hat{A}B = \theta$, $A\hat{B}C = \alpha$ e $B\hat{C}A = \beta$

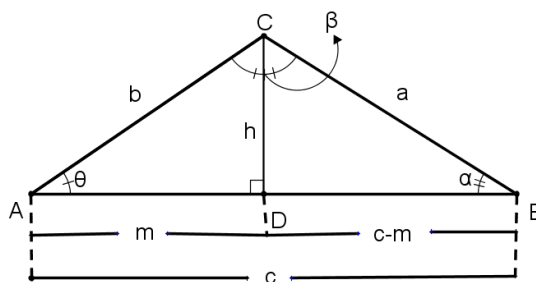


Figura A.1: $0 < C\hat{A}B = \theta < 90^\circ$.

Temos, então

$$\left. \begin{array}{l} \Delta BCD : a^2 = h^2 + (c - m)^2 \\ \Delta ACD : b^2 = m^2 + h^2 \end{array} \right\} \implies a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad (\text{A.1})$$

$$\Delta CDA : \cos \theta = \frac{m}{b} \implies m = b \cdot \cos \theta \quad (\text{A.2})$$

Substituindo (A.2) em (A.1), temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \theta$$

■

Analogamente,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \alpha \quad (\text{A.3})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \beta \quad (\text{A.4})$$

(II) Caso: $90^\circ < \widehat{A} < 180^\circ$

Notemos que não há nenhuma alteração nas relações acima, pois pelo $\triangle ABC$ abaixo, temos:

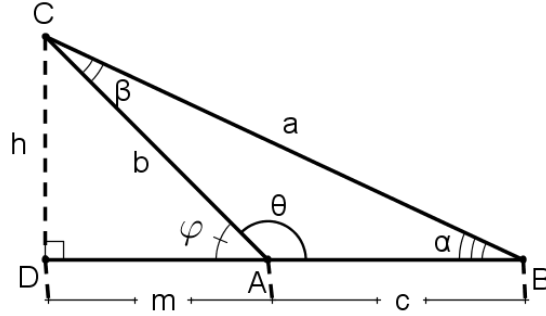


Figura A.2: $90^\circ < \widehat{CAB} = \theta < 180^\circ$ e $\varphi = 180^\circ - \theta$.

$$\begin{aligned} \triangle CDB : a^2 &= h^2 + (c + m)^2 \\ &= h^2 + c^2 + 2cm + m^2 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\triangle CDA : h^2 = b^2 - m^2 \quad (\text{A.6})$$

De (A.5) e (A.6), temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - m^2 + 2cm + m^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \quad (\text{A.7})$$

Mas no $\triangle CDA$:

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{m}{b} \implies -\cos \theta = \frac{m}{b} \implies m = -b \cos \theta \quad (\text{A.8})$$

Substituindo (A.8) em (A.7), temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \theta$$

■

Por procedimentos análogos obteremos (A.3) e (A.4).

Demonstração do Teorema 2.2.1

Sejam $r_1 \parallel r_2 \parallel r_3 \parallel \dots \parallel r_{n-1} \parallel r_n$, mostraremos que $\frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_3A_4}{A'_3A'_4}$ e de forma análoga

$$\frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{A'_{n-1}A'_n} = \frac{A_1A_n}{A'_1A'_n} = \dots = \frac{u}{u'}$$

Seja u um segmento que divide exatamente $\overline{A_1A_2}$ e cabe m vezes em $\overline{A_1A_2}$. Traçando paralelas ao feixe (conforme figura abaixo), encontraremos u' na outra transversal que divide $\overline{A'_1A'_2}$ e também cabe m vezes neste segmento. Escrevemos $A_1A_2 = m.u$ e $A'_1A'_2 = m.u'$.

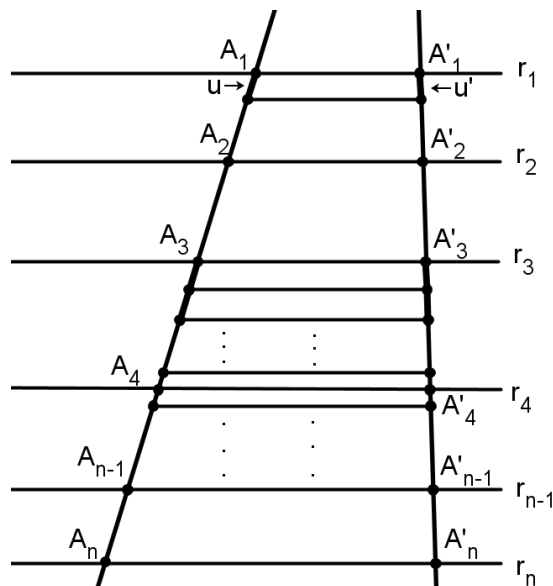


Figura A.3: Teorema de Tales.

Vamos supor que $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_3A_4}$ são *incomensuráveis*, o caso de serem *comensuráveis* é tratado de maneira análoga. Marcando u sucessivamente em $\overline{A_3A_4}$, vamos supor, sem perda de generalidade, que o ponto A_4 esteja na n -ésima parte, ou seja, entre o $(n-1)$ -ésimo e n -ésimo pontos de divisão. Traçando paralela ao feixe, o mesmo se verifica na outra transversal. Daí vem

$$(n-1).u < A_3A_4 < n.u \quad (\text{A.9})$$

e

$$(n-1).u' < A'_3A'_4 < n.u' \quad (\text{A.10})$$

Dividindo (A.9) por $m.u$ e (A.10) por $m.u'$, temos

$$\frac{n-1}{m} < \frac{A_3A_4}{A_1A_2} < \frac{n}{m} \quad \text{e} \quad \frac{n-1}{m} < \frac{A'_3A'_4}{A'_1A'_2} < \frac{n}{m}$$

ou

$$\frac{m}{n} < \frac{A_1A_2}{A_3A_4} < \frac{m}{n-1} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} < \frac{A'_1A'_2}{A'_3A'_4} < \frac{m}{n-1}$$

Como u é um submúltiplo de $\overline{A_1A_2}$ que se pode variar, dividindo u , aumentamos n e nestas condições $\frac{m}{n}$ e $\frac{m}{n-1}$ definem um único número real

(se $n \rightarrow \infty, n - 1 \sim n, \frac{m}{n - 1} \rightarrow \frac{m}{n}$), então

$$\frac{A_1 A_2}{A'_1 A'_2} = \frac{A_3 A_4}{A'_3 A'_4}$$

■

Demonstração do Teorema 2.2.3

Considerando o $\triangle ABC$ abaixo, mostraremos que

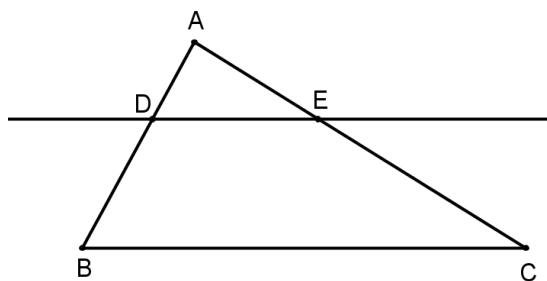


Figura A.4: $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (\text{A.11})$$

ou seja, que $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ tenham ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais.

Seja $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, temos que $\widehat{D} \equiv \widehat{B}$ e $\widehat{E} \equiv \widehat{C}$ (ângulos correspondentes), pelo Teorema 2.2.1, temos

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (\text{A.12})$$

Agora no $\triangle ABC$ construiremos por E uma reta \overleftrightarrow{EF} paralela a \overleftrightarrow{AB} , com $F \in \overline{BC}$.

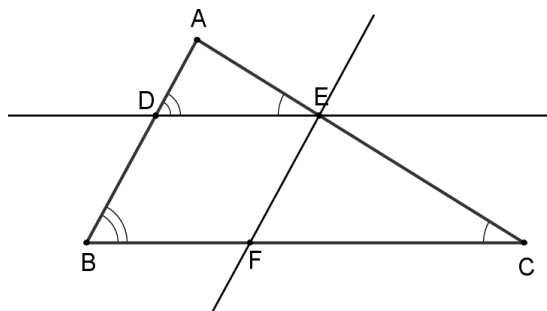


Figura A.5: $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

Temos que $\overline{DE} \equiv \overline{BF}$ (pois BDEF é um paralelogramo), pelo Teorema 2.2.1 vem que

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

logo

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad , \quad (A.13)$$

De (A.12) e (A.13), temos a relação (A.11). Portanto, o $\Delta ADE \sim \Delta ABC$. ■

Demonstração do Teorema 2.2.4

Pelos pontos A e C tracemos retas paralelas, respectivamente, a \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{AB} , que se intersectam no ponto D . Como ABCD é um paralelogramo¹, sua área é $2S$, pois $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$, logo

$$2S_{ABC} = ah_a \implies S = \frac{ah_a}{2}$$

donde segue a primeira igualdade. As outras duas igualdades são obtidas de modo análogo. ■

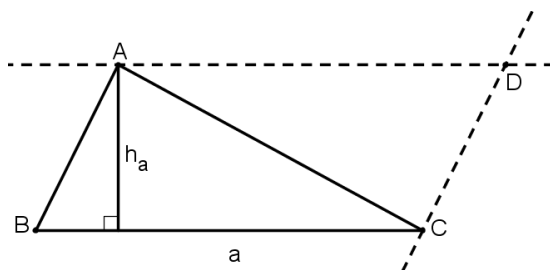


Figura A.6: Área de um triângulo dada a altura h_a relativa a base $BC = a$.

Demonstração do Teorema 2.3.1

Suponhamos que o quadrilátero ABCD seja inscritível, conforme Figura A.7. Então, pelo Teorema do ângulo inscrito², temos $B\hat{A}C = B\hat{D}C$ e

$$D\hat{A}B + B\hat{C}D = \frac{1}{2} B\hat{C}D + \frac{1}{2} B\hat{A}D = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

Reciprocamente, suponhamos primeiramente que $B\hat{A}C = B\hat{D}C$. Como ABCD é convexo e os vértices estão nomeados consecutivamente, segue que A e D estejam situados de um mesmo lado da reta \overleftrightarrow{BC} , conforme Figura A.8. Sendo θ o valor comum

¹A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual a $b \cdot h$, uma prova desta afirmação é dada em [23].

²A demonstração deste teorema pode ser vista em [3].

dos ângulos \widehat{BAC} e \widehat{BDC} o arco capaz de θ sobre \overline{BC} . Logo, o círculo desse arco capaz é circunscrito a ABCD.

Seja agora $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, e considere o círculo λ circunscrito ao triângulo BAD. Seja $\overleftrightarrow{BC} \cap \lambda = \{E\}$, se C estiver no interior do mesmo, teremos

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ \tag{A.14}$$

$$\widehat{DAB} + \widehat{BED} = 180^\circ \tag{A.15}$$

Dividindo (A.14) e (A.15) temos

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \widehat{DAB} + \widehat{BED} = 180^\circ \implies \widehat{BCD} = \widehat{BED}$$

que é uma contradição ao Teorema do ângulo externo. ■

De modo análogo, mostra-se que C não pode ser exterior ao círculo.

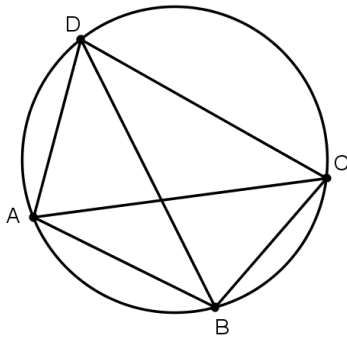


Figura A.7: ABCD inscritível.

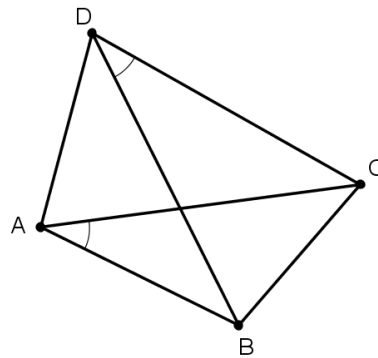


Figura A.8: $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BDC}$.

Demonstração do Teorema 2.4.1

Seja ABC um triângulo inscrito em um círculo de raio R , com $BC = a$, $AB = c$ e $AC = b$. Sendo \overline{BD} um diâmetro deste círculo, pelo Teorema 2.3.1 temos que $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$. Como o triângulo BDC é retângulo, vem que

$$\text{sen } \widehat{A} = \frac{a}{2R} \implies \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = 2R$$

onde $\widehat{A} = \widehat{BAC}$.

Analogamente,

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} = 2R$$

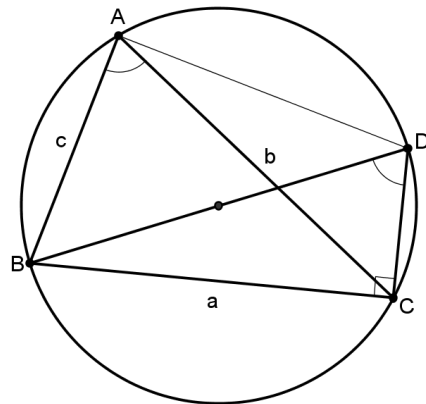


Figura A.9: Lei dos Senos. ■

Demonstração do Teorema 2.7.1

Tomemos um ponto M' sobre a reta \overleftrightarrow{MN} tal que $\overline{MN} = \overline{NM'}$, conforme Figura A.10. Como N é ponto médio de \overline{AC} e $\widehat{ANM} = \widehat{CNM'}$, os triângulos AMN e $CM'N$ são congruentes. Segue daí que

$$BM = CM' \text{ e } \overleftrightarrow{AM} \parallel \overleftrightarrow{M'C}$$

donde vem que o quadrilátero $MBCM'$ é um paralelogramo, logo

$$BC = MM' = 2MN \implies MN = \frac{1}{2}BC$$

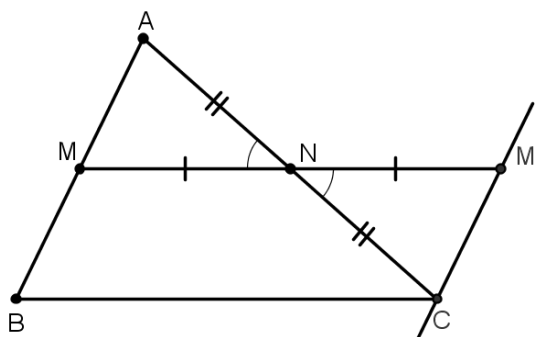


Figura A.10: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Reciprocamente, seja r uma reta paralela ao segmento \overline{BC} passando por M . Como \overleftrightarrow{MN} é paralela ao segmento \overline{BC} , segue que $r \equiv \overleftrightarrow{MN}$, em particular $N \in r$. ■

Demonstração dos Teoremas 2.8.1 e 2.8.2

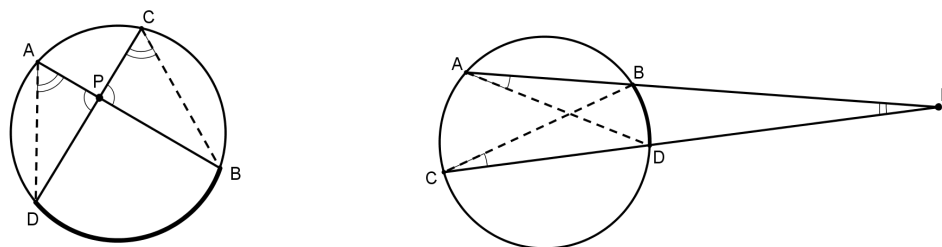


Figura A.11: Ffigura 15

Considerando os triângulos PAD e PCB , temos

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{P} \text{ comum} \\ \widehat{A} = \widehat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{array} \right\} \implies \Delta PAD \sim \Delta PCB \implies \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \quad (\text{A.16})$$

De (A.16) vem que

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

■

Por procedimentos análogos, mostra-se o Teorema 2.8.2.

Demonstração do Teorema 2.4.2

Seja $BE = h_b$ a altura relativa à base \overline{AC} da Figura A.9. Pelo Teorema 2.2.4 temos

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}b \cdot h_b \tag{A.17}$$

Comos os triângulos AEB e DCB são semelhantes, vem que

$$\frac{h_b}{a} = \frac{c}{2R} \implies h_b = \frac{a \cdot c}{2R} \tag{A.18}$$

onde R é o raio do círculo circunscrito.

Substituindo (A.18) em (A.17), vem que

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

■

Demonstração do Teorema 3.0.10

Seja ABC um triângulo com:

- $AC = b$.
- $AB = c$.
- $BC = a$.
- $BD = m$.
- $DC = n$.
- $D \in \overline{BC}$.
- \overline{AD} bissetriz relativa ao ângulo \widehat{A} .

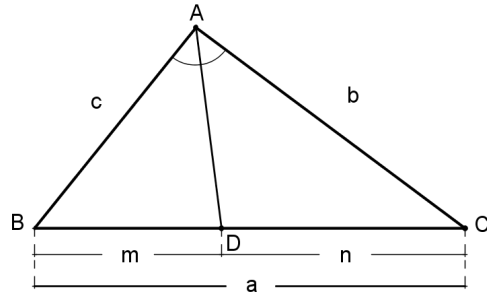


Figura A.12: Teorema da Bissetriz interna.

Considerando a Figura A, mostraremos que $\frac{m}{c} = \frac{n}{b}$

Por C conduzimos uma paralela a \overleftrightarrow{AD} , determinando um ponto E pertencente a reta \overleftrightarrow{AB} ($\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$).

Fazendo $\widehat{BAD} = \widehat{1}$, $\widehat{DAC} = \widehat{1}$, $\widehat{AEC} = \widehat{2}$ e $\widehat{ACE} = \widehat{3}$, vem do paralelismo que

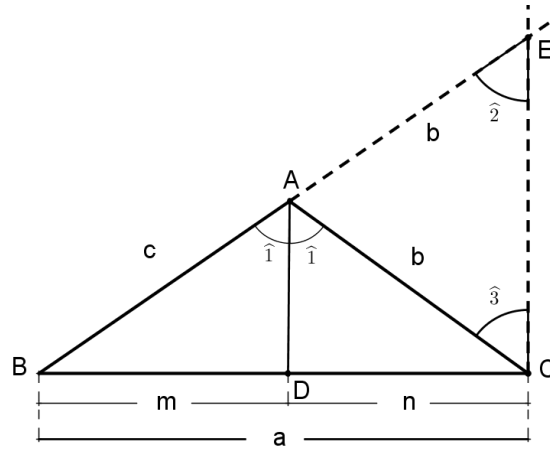


Figura A.13: $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$.

$$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \implies \hat{1} \equiv \hat{2} \text{ (correspondentes)}$$

$$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \implies \hat{1} \equiv \hat{3} \text{ (alternos internos)}$$

Decorre das expressões acima que $\hat{2} \equiv \hat{3}$.

Daí, temos que $\triangle ACE$ é isósceles de base \overline{CE} , o que implica $\overline{AE} \equiv \overline{AC}$, ou seja, $AE = b$.

Considerando \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{BE} como transversais de um feixe de retas paralelas e aplicando o Teorema de Tales, temos

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b}$$



Demonstração do Teorema 3.0.11

Seja ABC um triângulo com:

- $AC = b$.
- $AB = c$.
- $BC = a$.
- $BD = m$.
- $CD = n$.
- $D \in \overleftrightarrow{BC}$.
- \overline{AD} bissetriz externa relativa ao ângulo \hat{A} .

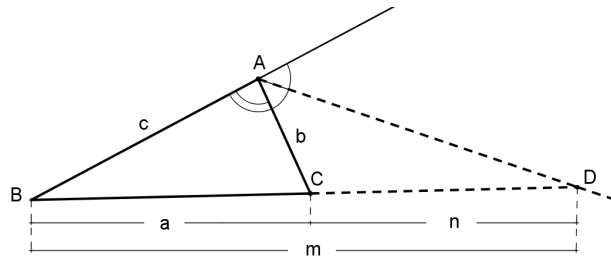


Figura A.14: Teorema da Bissetriz externa.

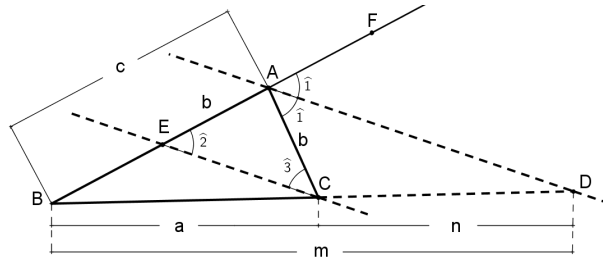


Figura A.15: $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$.

Considerando a Figura A.15, mostraremos que $\frac{m}{c} = \frac{n}{b}$.

Por C conduzimos uma paralela a bissetriz \overleftrightarrow{AD} , determinando um ponto E pertencente a reta \overleftrightarrow{AB} ($\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$).

Fazendo $\widehat{CAD} = \widehat{1}$, $\widehat{DAF} = \widehat{1}$, $\widehat{AEC} = \widehat{2}$ e $\widehat{ACE} = \widehat{3}$, temos do paralelismo que

$$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \implies \widehat{1} \equiv \widehat{2} \text{ (correspondentes)}$$

$$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \implies \widehat{1} \equiv \widehat{3} \text{ (alternos internos)}$$

Decorre das expressões acima que $\widehat{2} \equiv \widehat{3}$.

Daí, temos que o $\triangle ACE$ é isósceles de base \overline{CE} , o que implica $\overline{AC} \equiv \overline{AE}$. Logo $AE = b$.

Considerando \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{BE} como transversais de um feixe de retas paralelas, aplicando o Teorema de Tales temos

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b}$$

■