UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

NÚMEROS REAIS - UMA OUTRA ABORDAGEM

JEFFERSON PEREIRA DE OLIVEIRA

MANAUS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Jefferson Pereira de Oliveira

NÚMEROS REAIS - UMA OUTRA ABORDAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos

MANAUS
2013

Ficha Catalográfica
(Catalogação realizada pela Biblioteca Central da UFAM)

O48c

Oliveira, Jefferson Pereira de.
Construção dos números reais – uma outra abordagem / Jefferson de Oliveira. - 2013.
133 f. : il. color..
Dissertação (mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Amazonas.
Orientador: Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos.

1. Números reais 2.Ensino-aprendizagem 3. Matemática I. Marrocos, Marcus Antonio Mendonça, orientador II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

CDU (1997): 511.11 (043.3)

JEFFERSON PEREIRA DE OLIVEIRA

NÚMEROS REAIS - UMA NOVA ABORDAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23 Agosto de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos
Presidente

Prof. Dr. Michel Pinho Rebouças
Membro

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo
Membro

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por tudo concedido até hoje.

A Minha família em geral: esposa, pais e filhos, pelo amor, educação e apoio sempre presente.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos, por sua competência e pelo seu tempo dedicado a mim sempre que necessário.

Agradeço a todos os meus professores do Departamento de Matemática da UFAM e aos amigos que me ajudaram.

Finalmente agradeço a banca examinadora pelas sugestões dadas, que contribuiram para a melhoria desta dissertação.

RESUMO

Neste trabalho procuramos fazer uma nova abordagem na construção dos números reais. Sabemos que os números reais são abordados de forma deficitária no Ensino Médio, de modo que os discentes acabam por adquirir conhecimentos ínfimo ou quase inexistente sobre esse assunto tão importante. Esse trabalho começa com evolução do conceito de número no primeiro capítulo. A partir daí são criadas situações problemas de modo a se necessitar trabalhar com números reais. Feito isso construiremos o conjunto dos números reais através dos pares de sequências de Cauchy e por fim, abordaremos o estudo dos números reais no ensino médio de uma forma diferenciada da vista no ensino médio.

Palavras-chave: Números reais, Pares de sequências de Cauchy, Construção dos números irracionais, Ensino-Aprendizagem.

ABSTRACT

In this work we try a new approach in construction of the real numbers. We know that the real numbers are discussed lack of information in high school, so that students end up purchasing less or almost non-existent on this important subject knowledge. This work begins with the evolution of the concept of number in the first chapter. Thereafter problem situations so if you need to work with real numbers are created. Made it build the set of real numbers by pairs of Cauchy sequences and finally, discuss the study of real numbers in high school in a different way of looking at the high school.

Keywords: Real Numbers, Pairs of Cauchy Sequences, Problem Situations.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Ideia de quantidade aos números

A problemática da relação entre o contínuo Geométrico e o descontínuo Aritmético esteve sempre presente ao londo de toda história da Matemática, sendo um dos aspectos essenciais da filosofia de Pitágoras (cerca de $580 - 500$ a.C) a fim de compreender o mundo real a partir dos números naturais. A ideia de Pitágoras fracassou devido ao fato do pressuposto da comensurabilidade de todas grandezas, ou seja, nem sempre é possível se exprimir as suas relações por uma razão de inteiros, como veremos adiante.

Os gregos desenvolveram a Teoria das Proporções ([20], P. 204)atribuída a Eudóxio $(408 - 355 A.C)$, movidos pela necessidade de estruturar uma Álgebra das grandezas. A Teoria de Eudóxio remonta ao século IV antes de Cristo e foram necessários centenas de anos para que o programa de Pitágoras, de arimetização do contínuo, fosse cumprido.

Os gregos consideravam, o perímetro de uma circunferência, como grandeza a ser medida, eles acreditavam intuitivamente que esse comprimento existia e que estava para o diâmetro assim como a área do círculo estava para o quadrado do raio, porém, a identificação desse número com o irracional π não estava ao alcance de matemáticos da época.

A ideia de que a circunferência está compreendida entre duas sucessões de polígonos, inscritos e circunscritos, serviu para chegar a valores aproximados, ideia de limite, do que a intuição indicava ser o comprimento da circunferência. No entanto, a afirmação de que este comprimento existe e se exprime por um número, é o que só pode decorrer das condições de monotonia das referidas sucessões para existência de um limite comum. Esta situação está implícita na condição de convergência, que foi enunciada por Cauchy $(1789 - 1857)$ no século XIX, e só foi estabelecida depois das construções lógicas dos números reais feitas por Georg Cantor $(1845 - 1918)$, Charles Méray $(1835 - 1911)$ e Richard Dedekind.

Os racionais e os irracionais obtidos por construções geométricas, eram os números conhecidos até então, e eram encarados com uma infinidade numerável, e dessa forma não chegavam a cobrir o contínuo dos pontos da reta numérica. Desse modo, a intuição sugere que o número real é o resultado da medida de qualquer segmento orientado, delimitado a partir de uma origem de coordenadas. Logo, a intuição do que possa ser reta Euclidiana, está baseada na análise da variável real e dos seus desenvolvimentos nos séculos XVIII e XIX. Portanto, houve a necessidade formal da definição de número real e levou vários matemáticos a publicarem as suas teorias quase simultaneamente, embora elaboradas em períodos distintos e tendo sido igualmente diferentes as razões que os moveram a empreender semelhante tarefa.

Na segunda metade do século XIX houve um crescente número de artigos e livros publicados, dedicados a definição precisa de número real e a definição de funções baseadas nessa definição. Podemos destacar três campos distintos de construção da definição de número real: Hankel $(1839 - 1873)$ e Frege $(1848 - 1925)$ defenderam a ideia tradicional de que a Análise deveria ser fundamentada na noção de quantidade contínua; Dedekind, Weierstrass $(1815 - 1897)$ e Cantor defenderam a noção de que a quantidade deveria ser substituída por uma rigorosa construção aritmética dos números reais, ou seja, uma construção baseada na noção de números naturais ou racionais, que assumiu-se ser menos problemática do que a noção de quantidade contínua; Heine $(1821 - 1881)$, Thomas $(1840 - 1921)$ e Hilbert $(1862 - 1943)$ defenderam que os conceitos fundamentais da Análise poderiam, e deveriam, ser construídos simplesmente de uma maneira formal, desprezando, tanto quanto possível, os assuntos de ordem filosófica.

Hankel estudou com Riemann $(1826 - 1866)$ assim como Weierstrass e Kronecker $(1823 - 1891)$. Em 1867 publicou o livro *Theorie der Complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginaren Zahlen und der Hamiltonschen Quaternionen* onde tratou dos assuntos que caracterizaram o fim da ciência quantidade. Para Hankel o número não é um objeto, é uma substância que existe "$fora$" do sujeito e do objeto que lhe deu origem, é um princípio independente, tal como visto pelos Pitagóricos.

Hankel introduziu uma distinção no que diz respeito ao conceito de número. Números cuja noção está completamente determinada, mas que não são susceptíveis de serem construídos intuitivamente devem ser denominados de números puramente intelectuais ou puramente formais, em contraste com os números, no sentido filosófico da palavra, e suas combinações.

Hankel, de um modo formal, tomou sistemas numéricos como sistemas de símbolos e operações, uma operação era vista como uma combinação de símbolos que produzia outro símbolo do mesmo sistema. Exigiu também que todos os símbolos de um determinado sistema pudessem ser obtidos de outros símbolos básicos (as "unidades") por repetidas aplicações de operações, definindo assim o sistema, e o sistema como um todo deveria ser fechado para estas operações.

Hankel definiu recursivamente a adição e multiplicação provando também a associatividade, comutatividade e distributividade. Depois, introduziu a subtração e divisão juntamente com novos símbolos para os negativos e para as frações. Estendeu as leis da aritmética, de forma a produzir os números racionais. A partir daí, questionou-se sobre o fato deste sistema de números, ser ou não completo. A indagação por trás desta questão é que podem existir outras operações, além das referidas, tal como a extração de uma raiz quadrada de números positivos, para os quais o sistema dos números reais seja necessário.

Hankel sabia que a problemática dos números irracionais não estava formalmente resolvida, uma vez que, era impossível definir, de uma vez por todas, todas as operações que podemos eventualmente admitir no domínio dos reais. A razão principal para Hankel acreditar que uma abordagem formal dos números reais possuía limitações essenciais, foi a sua visão fundamentalmente construtivista do sistema de números formais. Apesar disso, ele não o colocou dessa forma.

Por último, Hankel supôs que qualquer sistema desse tipo deveria ser gerado a partir de um conjunto finito de símbolos básicos por uma sequência contável de aplicações de operações definidas. A noção de quantidade, por outro lado, foi levada para um domínio que englobava outro tipo de infinidade, nomeadamente o contínuo intuitivo. Hankel defendeu que, apenas utilizando a nossa intuição, era possível compreender o conceito de número real. Desse modo, apesar de continuar preso à ideia tradicional de quantidade contínua, faltou - lhe uma noção formal da completude no domínio do número, tal como a proposta mais tarde, por Hilbert.

1.2 Aritmética da Análise

Apesar de Hankel continuar a acreditar que era necessário fundamentar a análise na doutrina da quantidade, o seu professor Weierstrass já havia desistido deste ponto de vista. Nas suas conferências em Berlim, Weierstrass esboçou uma noção de números reais numa base puramente aritmética, ou seja, começando no domínio dos números racionais e utilizando argumentos acerca de certos conjuntos infinitos irracionais. Voltou muitas vezes a esse tópico elaborando cada vez mais suas ideias.

Weierstrass encarou os números como agregados de certos elementos ([21]$-$ cit, in [13], p. 295). Os inteiros positivos referem-se a agregados de coisas idênticas em pensamento, isto é, unidades de uma mesma espécie. Os números racionais positivos foram concebidos como agregados cujos elementos são unidades básicas e partes exatas dessas unidades. Arbitrariamente, quantidades numéricas eram entendidas similarmente como agregados infinitos possuindo o mesmo tipo de elemento. Uma quantidade numérica era representada por qualquer membro de uma classe de equivalência destes agregados, respeitante a uma relação de equivalência de igualdade cuja definição requeria algum cuidado.

Weierstrass considerou dois tipos de transformações de quantidades numéricas que não as alterava essencialmente:

(i) Quaisquer n elementos da forma $1/n$ podem ser substituídos pela unidade principal.

(ii) Qualquer elemento pode ser substituído pelas suas partes exatas, isto é, 1 por $n.(1/n)$; $(1/a)$ por $b.(1/ab)$, etc.

Uma quantidade numérica a' denomina-se por parte de a se a' consiste numa quantidade finita de elementos de a e pode ser transformada numa quantidade a" por uma sequência finita de transformações (i) e (ii) tal que todos os elementos de a" ocorrem em a o mesmo número de vezes que em a" e, além disso, a contém outros elementos ou um número maior dos mesmos elementos.

Weierstrass definiu duas quantidades numéricas a e b iguais se e só se toda parte de a pode ser obtida por transformação numa parte de b e vice-versa. Se as partes de a podem ser transformadas em partes de b mas não vice-versa, b é denominado maior do que a. ([22], p. 296, ou, [23], p. 80). Desse modo, Weierstrass pôde caracterizar quantidade numéricas finitas pela seguinte condição:

> Dizemos que um número a é uma quantidade finita, se existe um número b maior do que a, sendo b composto por um número finito de elementos.([23], p. 81)

As operações de adição e multiplicação explicadas para números inteiros positivos por manipulações de suas unidades, estavam agora definidas, analogamente, para os números finitos arbitrários. Com o intuito de definir os números negativos, Weierstrass introduziu a noção de agregados opostos e a convenção de que agregados iguais e opostos anulam-se um ao outro.

As definições de Weierstrass mostram que os seus agregados podiam ser vistos, com alguma cautela, como somas (possivelmente infinitas) dos seus elementos. No entanto, as suas definições evitaram este tipo de expressão, talvez para permanecerem próximas da visão tradicional dos números como agregados de unidades. Weierstrass usou livremente a linguagem das somas ao longo das suas explanações. Estas definições consistiram na fundamentação do assunto principal dos seus cursos e permitiram-lhe apresentar provas e teoremas acerca de limites de sucessões de números e funções.

A ideia de Weierstrass reduz o conceito de quantidade ao conceito de número. Ele continuou a utilizar a noção de quantidade, mas expressões como quantidade aritmética ou quantidade numérica mostram que na sua mente existia uma separação lógica entre os conceitos e aqueles que são mais intuitivos, em contrapartida, na Geometria ou Física.

Cantor, em 1871, iniciou um programa de aritmetização semelhante aos de Méray e Weierstrass.

Certas simplificações sugeridas por Heine levaram ao chamado desenvolvimento de Heine-Cantor, publicado em 1972 por Heine no seu artigo *Die Elemente der Functionenlehre*, Heine e Cantor foram colegas em Halle e foram fortemente influenciados pela escola de análise de Berlim, trocando ideias acerca da construção dos números reais com base em conjuntos infinitos de racionais. A posição de Heine foi mais filosoficamente pronunciada que a de Cantor, pois Cantor sustentou que a cada sucessão fundamental [sucessão de cauchy] corresponde um número real.

A condição de Cauchy como condição suficiente de convergência de sucessões numéricas ou, em linguagem de Topologia - ao contrário do que sucede com oa números racionais, os números reais constituem um espaço métrico completo. A construção dos reais feita por Cantor tem por objetivo imediato garantir essa suficiência. Ou seja, partindo-se da sucessão de números racionais que satisfaçam a condição de Cauchy, consideram-se equivalentes aquelas que por diferença de termos da mesma ordem conduzem a uma sucessão de limite zero, e um número real será então qualquer classe de sucessões equivalentes.

A abordagem de Cantor foi similar a de Heine mas colocou mais ênfase na possibilidade de interagir no método de formação das sucessões de Cauchy. Cantor denominou um número dado por uma sucessão de Cauchy de racionais de quantidade numérica de primeira espécie, adicionando uma reflexão entre quantidades numéricas e os pontos de uma linha reta. Reconhecendo igualmente que era necessário um princípio que servisse de elo de ligação entre estes dois conceitos. Assim estabeleceu que:

> Toda quantidade numérica corresponde a um ponto definido numa reta, cuja coordenada [referente a um segmento de reta unitário] é igual a esta quantidade numérica ([24], p. 97 $-$ cit. in [22], p. 306).

Além da definição de número real, o fator crucial da investigação de Cantor foi a noção de ponto limite, que hoje é denominado ponto de acumulação. O conjunto derivado, P' de um conjunto de pontos P, foi denominado como o conjunto de todos os pontos de acumulação de P.

Cantor provou que o conjunto dos números reais é não numerável e comunicou o fato a Dedekind. Este resultado mostra se a sua construção (ou a de Dedekind, ou a de Weierstrass) dos números reais fosse tomada como verdadeiramente garantida, então existia pelo menos dois tipos de conjuntos infinitos: os conjuntos do tipo do conjunto dos números naturais e os conjuntos do tipo contínuo. Cantor formulou então a noção de que existiam dois tipos de infinito se e só se fosse impossível efetuar uma correspondência um a um entre os dois conjuntos.

Em 1883 Cantor organizou suas investigações num documento onde introduziu as noções de ordinais transfinitos e cardinais transfinitos ([25], p.594).

A construção da Teoria dos conjuntos Transfinitos ([25], pp. $597-609$) de Cantor pode ser colocada como representando o final da ciência da quantidade devido à clarificação do conceito de contínuo, propondo-o de uma forma puramente aritmética. Além disso, Cantor forneceu uma descrição precisa da sua cardinalidade.

O trabalho de Weierstrass sobre aritmetização da análise não foi publicado, no entanto, estas ideias foram dadas a conhecer pelos seus discípulos, em particular por Heine, que havia frequentado os seus cursos. Heine no seu artigo, *Die Elemente der Functionenlehre*, fez referência a muitos teoremas sobre funções provados por Weierstrass, que formavam a análise Weierstrassiana. Heine observou que, nesses teoremas, ainda se levantavam dúvidas em algumas passagens, devido "à sua não completamente rígida definição de números irracionais". Nesta definição "ideias de Geometria, nomeadamente sobre a criação de uma linha por movimento, ocasionaram muitas vezes influências confusas"(veja-se [26],p.172−cit.in[22], p.299).

Heine utilizou uma abordagem formal, para resolver o mistério dos números irracionais, que era mais radical do que a apresentada por Hankel, para os números racionais:

> Para a definição tomarei a visão puramente formal, denominando certos símbolos tangíveis de números, tais que não poderá existir dúvida acerca da sua existência. Estes símbolos necessitam estar equipados de um sistema que nos permita definir as operações[uma aritmética] (veja-se [26],p.172−cit.in[22], p.299).

A ideia matemática básica por detrás da visão de Heine, tomada de Cantor, foi considerar sucessões de números racionais satisfazendo o que hoje é denominado de Critério de Convergência de Cauchy ([27], p.75).

A construção de Heine mostrou, mais uma vez, a tentativa de separar o conceito de número real das ideias intuitivas sobre quantidade e, mais uma vez, foi vista à introdução de conjuntos infinitos de racionais na sua definição.

A filosofia de Heine era distinta da de Weiertrass. Ele procurou evitar problemas filosóficos, encarando os números como símbolos tangíveis sem estar consciente do quanto a ideia era vaga.

Frege criticou o trabalho de Heine questionando se era necessário considerar as sucessões infinitas, e se ainda seria um símbolo tangível. E questionou, do mesmo modo, se um número irracional seria uma sucessão desse género ou uma classe de equivalência de uma classe de sucessões.

Alguns anos antes, uma ideia similar à construção dos números reais de Cantor e Heine, foi apresentada por Charles Méray, professor na Universidade de Dijon.

De acordo com a cronologia dos fatos, foi Méray o primeiro matemático a publicar uma teoria dos números irracionais, no ano de 1869, no artigo intitulado *Remarques sur la nature des quantités définies por la condition de servir de limites à des variables données*([28], pp. $280-289$).

Para Méray, as definições existentes de números irracionais eram insatisfatórias, assim, houve a necessidade de criar uma teoria de números irracionais. Ele pretendeu com a sua obra edificar a Análise, fundamento de todas as matemáticas, sobre bases sólidas, excluindo qualquer empréstimo que a Geometria pudesse fornecer a algumas demonstrações.

Considerou os raciocínios empregados na análise das funções pouco claros e rigorosos, ao contrário do que sucedia na Álgebra e na Geometria([29],XI).

Méray defendeu, em todas as suas obras, que a possibilidade das funções poderem ser em Séries de taylor, constituía um princípio simples sobre o qual a teoria das funções deveria ser construída. Esta é a ideia básica da análise de Méray e o instrumento que unifica sua teoria.

No final do século XVIII, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) introduziu, na perspectiva de algebrização da Análise o desenvolvimento de funções em Séries de Taylor, que foi abordado pela primeira vez por Méray em 1868, no seu artigo *Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calcul infinitésimal et sur la théorie de développement des fonctions en séries*([30], pp. $133 - 138$).

Considerando o limite como sendo a noção de base da Análise, entendemos a necessidade de Méray em definir corretamente os números irracionais, pois os teoremas sobre limites de sucessões deixavam de ter sentido quando estas não tendiam para números racionais. foi também, por não concordar com as definições de número incomensurável na época, que sentiu a necessidade de elaborar uma teoria de números irracionais. O seu descontentamento foi manifestado em relação as definições que recorrem ao conceito de limite, uma vez que exigem a existência de número incomensurável.

Para Méray, a base essencial de todas as partes da matemática, onde intervém a noção de limite de uma sucessão, era o princípio de que uma sucessão crescente majorada ou decrescente minorada tende para um limite e que o princípio de toda sucessão de Cauchy tende para um limite. Méray na sua obra de 1869, afirma que na época as proposições supra citadas eram tomadas como axiomas apenas para escapar à introdução da noção de número incomensurável([28], p.280).

Desse modo, tendo em conta a natureza dos limites de sucessões de números racionais que não admitem por limite nenhum racional, Méray formula o seu conceito de número irracional e é à custa dessa definição que, no final das suas obras, apresenta o que considera serem provas perfeitamente corretas de resultados tão importantes. Méray considerou sucessões de números racionais satisfazendo o critério de convergência de Cauchy. No caso em que uma sucessão não convergia para um número racional, Méray definiu *limite fictício*. Estes limites eram denotados por símbolos arbitrários. Ele discutiu, igualmente, a necessária relação de equivalência entre sucessões diferindo unicamente numa sucessão convergente para zero.

O conjunto constituído pelos limites racionais e pelos limites fictícios foi considerado o domínio das quantidades reais.

Em 1872, Méray voltou a apresentar a sua teoria dos números irracionais, na obra *Nouveau Précis d'analyse Infinitésimale.* Mais adiante, pareceu-lhe que a publicação não esclarecia suficientemente a teoria apresentada, talvez por este tema não ter constituído o papel principal de tal obra, então decidiu fazer um estudo mais aprofundado e em 1887 publicou o artigo *Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée*([31],pp. 342 - 360). Podemos encontrar uma exposição final da sua teoria no volume 1 da obra,*Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses apllications* *géométriques*,[32], publicada em 1894.

Vários fatores contribuíram para que à obra de Méray não tivesse a devida importância. Podemos salientar o fato de que na época em que Méray publica a sua obra, não existir na França uma notória apreciação à problemática da definição de número irracional. Além disso, Méray foi o único matemático do século XIX de nacionalidade francesa a se dedicar à arimetização da Análise e como não se tratava de um matemático de renome, a teoria por ele desenvolvida não assumiu as repercussões que o mesmo ansiava.

Por Méray ver a prioridade do seu feito ser atribuída a outros matemáticos, escreveu no prefácio da sua obra de 1894, que:

> A teoria dos números incomensuráveis (...) foi atribuída ao Sr. Heine pela sua invenção, aos Sr. Lipschitz, de Bois-Reymond, G. Cantor pelas suas primeiras aplicações mas três anos antes eu tinha exposto a mesma teoria na sua totalidade, depois de a ter comunicado ao congresso, *Revue des Sociétés Savantes*([32],XXIII).

Contudo, Cantor e Heine pareceram ter formado as suas ideias independentemente do trabalho de Méray, fato que não é surpreendente num período que ocorreu logo após a Guerra Franco-Prussiana.

Em 1872 Dedekind publicou o famoso ensaio *stetigkeit und Irrationale zahlen*, onde foi dado um tratamento distinto do mesmo problema, representando o ponto alto das suas pesquisas, iniciadas em Zurique em 1858 quando, ensinando Cálculo Diferencial, pela primeira vez tomou consciência da necessidade de uma discussão científica acerca do conceito de continuidade e foi levado a reconsiderar todo o problema da definição de número real. Dedekind, tal como Weiertrass usou conjuntos infinitos de números racionais na sua construção de números reais.

Dedekind insistiu na visão de que os objetos matemáticos, aos quais chamamos números reais, são invenção do homem. Ele acreditava que isso era verdade para os números naturais e racionais, bem como para novos conceitos como a Teoria Algébrica Numérica. Além de propor uma construção aritmética dos números reais, acrescentou a questão da construção geométrica dos pontos numa linha reta, ou seja, a noção intuitiva de quantidade contínua.

Estava claro que toda razão entre segmentos de reta definia um corte de números racionais, mas o inverso é verdade? Será que todo o corte define uma razão possível entre segmentos de reta ou, se fixarmos um segmento unitário, todo o corte corresponde a um bem definido ponto numa linha?

Para responder este impasse foi criado o seguinte postulado:

> Se todos os pontos numa linha reta caem em duas classes de tal forma que todo o ponto da primeira classe está à esquerda de todo o ponto da segunda, então existe um e somente um ponto que produz esta decomposição de todos

> os pontos em duas classes, esta divisão da linha reta em duas partes.([33], p. 11)

Na base da ordenação natural dos cortes, pode ser introduzida uma ordenação dos números reais. Atendendo a esta ordenação, o conjunto dos números reais satisfaz a denominada condição de corte, descrita pelo seguinte Teorema:

Se o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais é decomposto em dois subconjuntos A_1 e A_2 tais que para todo o $\alpha_1 \in A_1$ e $\alpha_2 \in A_2$ se tem $\alpha_1 < \alpha_2$, então existe um único número $\alpha \in \mathbb{R}$ que produz este corte, ou seja, tal que $A_1 = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta < \alpha\}$ e $A_2 = \mathbb{R} - A_1$ ou $A_2 = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta > \alpha\}$ e $A_1 = \mathbb{R} - A_2$.

Sendo esta propriedade válida para os números reais, foi para Dedekind, a garantia para estreita analogia entre esta criação matemática e a noção intuitiva de quantidade contínua. Dedekind tomou uma decisão diferente da tomada por Hankel, quando separou os conceitos de número real e quantidade contínua. Hankel viu a continuidade do domínio dos números reais como uma razão para confiar na doutrina tradicional de quantidade, enquanto Dedekind revolucionou a versão desta propriedade de continuidade, transformando-a num elo de ligação entre a Geometria e a Aritmética dos números reais.

Weierstrass passou por cima deste ponto de forma engenhosa mas pouco clara. Porém, a escolha de Dedekind dos cortes como o aspecto característico do contínuo foi, mais tarde, muito criticada.

Rodolf Lipschitz $(1832 - 1903)$ e Heinrich Weber $(1842 - 1913)$ foram os primeiros a apontar críticas à teoria dos números irracionais de Dedekind, através de correspondências que trocaram com o matemático. Segundo Lipschitz, a teoria de Dedekind não possuía caráter inovador pois não diferia da que havia sido elaborada pelos gregos nos *elementos*, livro V, a partir da definição 5 ([34], p. 114), acerca das grandezas incomensuráveis ([35], p. 116). Sobre este tema foram trocadas cartas entre os dois matemáticos, cada qual defendendo o seu ponto de vista (veja-se, [39]).

Esta discussão foi iniciada por Lipschitz em 1876, mas na atualidade, vários autores, como por exemplo, Jean Louis Gardies $(1925 - 2004)$, [36], Howard Stein $(1911 - 1980)$, [37], Leo Corry, [38], continuam a analisar esta controvérsia.

Mas, em todo caso, todas estas exposições parecem ir de encontro à ideia defendida pelo próprio Dedekind:

> (...) os princípios euclidianos por si só, sem a junção da continuidade que não está contido neles, são incapazes de fundamentar uma teoria completa dos números reais como razões entre grandezas (...).

Na construção de Dedekind do conceito de número irracional, a noção de corte assume um papel fundamental, porém, as expressões utilizadas pelo matemático para referir-se à criação desse número são pouco claras, gerando até alguma contradição.

"Sempre que um corte (A_1, a_2) não seja produzido por nenhum número racional, criamos um novo número, um número irracional α, que consideramos completamente definido por este corte (A_1, a_2); diremos que o número α corresponde a este corte, ou produz este corte". ([33], p. 15)

Nesta definição, tal como para Weber, o número irracional não é nada mais que o próprio corte, mas Dedekind em carta a Weber defende que um número irracional não é um corte, é antes algo que corresponde ao corte. Afirma que o poder criativo que atribui à mente humana é justificável pela semelhança de todos os números. Justifica que existindo igualmente cortes produzidos por números racionais, não teria sentido, nesse caso, afirmar que um número racional seria idêntico ao corte que produz. Da mesma forma, não podemos dizer que um número irracional é um corte.

Dedekind estabeleceu uma correspondência entre cortes e números irracionais e com ele não pretendeu identificar as duas entidades mas sim assegurar que ambas verificam as mesmas propriedades. Contudo, as palavras de Dedekind justificam o fato de não sabermos a entidade com a qual identificar um número irracional. Note-se que Dedekind já havia feito algo do gênero quando comparou os números racionais com os pontos de uma linha reta.

Dedekind reconheceu que o fato de um número real ser definido por um corte acarreta algumas desvantagens, quando verificou quais propriedades dos números racionais que seriam válidas no conjunto dos números reais. Solucionou esta questão, enunciando o seguinte Teorema:

"Se o número λ é o resultado de uma operação entre os números $\alpha, \beta, \gamma, ...$ e λ pertence ao intervalo L, então podemos considerar intervalos $A, B, C, ...$, aos quais pertençam $\alpha, \beta, \gamma, ...$ de modo que, substituindo os números $\alpha, \beta, \gamma, ...$ por números arbitrários de $A, B, C, ...$, o resultado da operação aplicada a estes novos números é sempre um número do intervalo L". ([33], p. 23)

Com esse resultado Dedekind reconheceu ser necessário introduzir novos conceitos de forma a simplificar o seu enunciado e é sobre as noções de grandeza variável, função e valores limites que afirma, deverem ser definidas as mais simples operações aritméticas.

Pirre Dugac $(1926 - 2000)$ considerou notável este teorema para a época pelo fato de envolver leis de composição (veja-se[39], p. 46). Segundo Dugac ([39], pp. $60-62$) a teoria dos números irracionais elaboradas por Dedekind teve uma grande aceitação por parte da comunidade matemática, inclusive, foram vários os matemáticos que consideraram esta teoria mais simples do que as de Weierstrass e de Cantor, publicadas no mesmo ano de 1872.

A popularidade, reconhecimento ou simplesmente o interesse pela obra de Dedekind, justificaram o fato do seu livro *Stetigkeit und Irratoinale Zahlen* ter sido traduzido para inglês em 1901, russo em 1908, polaco em 1914, italiano em 1926 e até japonês ([39], p.62).

A forma como Dedekind respondeu à pergunta orientadora da sua obra: *Qual a essência* *da continuidade?* levou-o à construção do seu conceito de número irracional e permitiu que as suas ideias fossem difundidas por todo o mundo.

Assim, concluída a aritmetização da variável real, e tendo chegado ao número real por um caminho puramente lógico que teve início no número natural, decide-se a concordância das duas escolas (a numérica e a dos pontos da reta) à maneira de cantor e de Dedekind, num postulado, afirmando a correspondência biunívoca entre os seus elementos ([25], p. 607).

1.3 Axiomatização dos Reais

Foi também no século XIX que se deu o aparecimento de sistemas de axiomas para vários tipos de estruturas matemáticas. Particularmente, no final deste século foram desenvolvidas conjuntos de axiomas com o intuito de definir os números inteiros positivos e, um grande trabalho foi efetuado no sentido de ser apresentada uma definição precisa de número real.

O mais antigo sistema de axioma conhecido é o de Euclides (300 a.C.), no que diz respeito ao estudo da Geometria. Porém, muitos matemáticos, evidenciaram que Euclides tomou como certas determinadas afirmações, que em algumas das suas demonstrações, não se encontravam explicitamente mencionadas na sua lista de axiomas e postulados.

Desenvolvendo a geometria não Euclidiana os matemáticos reexaminaram a natureza dos vários axiomas e colocaram a Geometria de Euclides sob uma base sólida e consistente.

David Hilbert foi o idealizador da tentativa mais bem sucedida de construir um sistema de axiomas para a qual a Geometria Euclidiana pudesse ser derivada.

Em 1899 Hilbert pulblicou *Grundlagen der Geometrie*, que consistia essencialmente numa compilação das sua lições sobre Geometria Euclidiana, apresentadas na Universidade de Gottingen.

O objetivo do seu trabalho consistia numa tentativa para dar o enunciado dum sistema de axiomas completo e tão simples quanto possível para a geometria, e deduzir dele os teoremas geométricos mais importantes da tal modo que fique também claramente em evidência o significado dos diferentes grupos de axiomas e a projeção da cada um dos axiomas nas consequências que deles se tiram ([40], p. XVII).

Hilbert, ao efetuar uma axiomatização do que lhe pareceu fundamental na noção de continuidade que a reta sugere, fez de tal modo que a correspondência biunívoca, entre o conjunto de números reais e os pontos da reta, está implicitamente assegurada. Esse trabalho, continha uma nova definição de número real, cuja estrutura lógica era diferente da maioria das definições anteriores. Ele desenvolveu meios para estudar as consequências de grupos particulares de axiomas separadamente, tendo a sua caracterização do sistema dos números reais se apoiado em trabalhos de Hankel e Thomae.

Contrastando com outras construções de números reais, a abordagem de Hilbert não assentava em objetos que já eram conhecidos, tais como os números racionais. Em vez disso, propôs aos seus leitores que imaginassem um sistema de entes em que todas as propriedades dos números racionais eram satisfeitas, embora Hilbert nunca tenha provado a existência desse sistema.

Hilbert começou com os três termos indefinidos: ponto, linha e plano e definiu as relações existentes entre eles por meio de axiomas. Segundo ele, eram os próprios axiomas que definiam estas relações e não precisaríamos de qualquer tipo de intuição geométrica para levar a cabo a demonstração de um resultado. Com efeito, Hilbert defendia que as três noções iniciais poderiam ser substituídas por quaisquer outra, desde que satisfizessem os axiomas.

A ideia de Hilbert, de um sistema de axiomas era distinta das elaboradas por Euclides, e Aristóteles ($384 - 322$ a.C.). Os gregos estipularam como verdadeiras certas afirmações que já tinham intuitivamente compreendido, enquanto Hilbert, delegou para o abstrato as propriedades desejadas, independentemente de qualquer interpretação concreta. Hilbert dividiu os axiomas em seis conjuntos: os axiomas de conexão, os de ordem, de paralelismo,de congruência, os de continuidade e os de completude.

O primeiro grupo, de seis axiomas, estabelecia as conexões existentes entre as suas concepções iniciais: ponto, linha e plano. O segundo grupo de axiomas permitia, segundo Hilbert, definir a ideia de segmento de reta $[AB]$ como sendo o conjunto de pontos que estão entre os pontos A e B. O terceiro grupo de axiomas consistia unicamente na concepção de Hilbert do axiomas das paralelas e o quarto grupo, dedicado à congruência, procurou definir explicitamente este termo, uma vez que o método adotado por Euclides, e por alguns contestado, consistia em efetuar uma simples sobreposição.

O último grupo de axiomas contém dois que caracterizam a ideia básica de continuidade. O primeiro consiste no Axioma de Arquimedes, que estipula que dado qualquer segmento de reta e qualquer unidade de medida, existe um inteiro n tal que n unidades de medida conduz a um segmento de reta maior que o segmento dado. Uma das consequências deste axioma consiste em, quando adicionado aos estipulados anteriormente, não existe limitação para o comprimento de uma linha reta.

O último axioma de Hilbert afirma que os pontos de uma reta estão em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais. Assim, não existem buracos na reta. Este axioma responde à objeção feita à construção Euclidiana de um triângulo equilátero, de que não existia garantia de que os dois círculos construídos efetivamente se intersectavam, pois segundo este axioma não podem ser adicionados outros pontos a estes dois círculos, logo, estes não podem deixar de se intersectar.

Dessa forma, Hilbert formulou o axioma da completude, axioma que em trabalhos modernos é usualmente substituídos por outras condições de completude, tais como o Postulado dos Cortes de Dedekind ou a Condição da Completude das Métricas (isto é, a existência de limite para todas as Sucessões de Cauchy).

Após estabelecer os diferentes grupos de axiomas, Hilbert prosseguiu provando que estes eram consistentes, ou seja, que não poderia ser deduzida qualquer contradição a partir deles. A sua ideia, à semelhança de outros matemáticos, ao mostrar que a Geometria não Euclidiana não possuía contradições, era a de construir uma Geometria usando unicamente operações aritméticas, que satisfizesse os diferentes grupos de axiomas.

Assim, ao interpretar aritmeticamente qualquer conceito geométrico, Hilbert criou um modelo aritmético dos seus axiomas para a Geometria. Se os axiomas levassem a uma contradição geométrica, existiria uma análoga contradição em termos aritméticos. Consequentemente, assumindo que os axiomas para a aritmética eram consistentes, assim como os axiomas geométricos.

Outra importante característica deste sistema de axiomas era a independência, isto é, a particularidade de que nenhum axioma pode ser deduzido a partir dos restantes. Apesar de Hilbert não ter demonstrado completamente a independência do seu sistema de axiomas, mostrou que vários grupos de axiomas eram independentes, construindo interessantes modelos em que um grupo de axiomas era satisfeito e outros não eram satisfeitos.

Hilbert não tratou diretamente a questão da completude do seu sistema de axiomas, ou seja, o fato de se poder mostrar que qualquer afirmação estabelecida pode ser verdadeira ou falsa. Contudo, acreditamos que Hilbert confiava na completude dos seus axiomas e, posteriormente, vários matemáticos mostraram que todos os teoremas da Geometria Euclidiana poderiam ser provados usando os axiomas de Hilbert.

A importância do trabalho desenvolvido por Hilbert prende-se não só com as respostas apresentadas às objeções relacionadas com o esquema dedutivo de Euclides, mas essencialmente com o reforço da ideia de que qualquer espaço matemático deverá ter por base determinados termos não definidos e um conjunto de axiomas especificando as relações entre eles.

Assim verificamos que apesar de inicialmente o trabalho de Hilbert consistir numa tentativa de desenvolver um tratamento completo e consistente dos axiomas da Geometria, ao longo de várias edições, procurou sintetizar estes axiomas no contexto da análise dos números reais, a qual explicaremos nos capítulos 3 e 4 deste trabalho.

Foram vários os sistemas de axiomas desenvolvidos com o intuito de fundamentar várias áreas da matemática. O trabalho de Hilbert foi a culminância deste processo na medida em que conseguiu justificar as ideias transmitidas pelo modelo dos elementos de Euclides, fazendo com que este continuasse a ser o modelo matemático adaptado e, uma possível confirmação disso, é que um século depois as suas ideias ainda continuaram válidas.

Capítulo 2

A descoberta dos incomensuráveis

2.1 Grandezas comensuráveis

Uma das figuras mais importantes da matemática grega e da geometria foi Pitágoras [1]. Nascido em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, ele viajou pelo Egito e Babilônia antes de se estabelecer em Crotona, atualmente Itália, e lá fundar a Escola Pitagórica. Está escola de matemática, também era uma sociedade secreta, onde eram trabalhadas várias doutrinas científicas, filosóficas, políticas e morais. Uma delas dizia que o conhecimento é um bem comum a toda sociedade, e dessa forma, a atribuição de descobertas não era feita a nenhum membro da escola.

O famoso teorema de Pitágoras já era conhecido, por outras civilizações, mas provavelmente, os Pitagóricos foram os primeiros a demonstrá-lo.

Segundo outra doutrina Pitagórica "número é o princípio de todas as coisas", ou seja, tudo podia ser explicado através dos números inteiros e suas razões que eram os números racionais. Acreditava-se também que dados dois segmentos quaisquer, eles eram sempre comensuráveis, ou seja, existia um terceiro segmento, menor que os dois primeiros, tal que cada um deles era múltiplo inteiro do menor. Se a e b são comprimentos de dois segmentos, então existe um segmento c e dois inteiros m e n tais que $a = mc$ e $b = nc$. Ou seja, o segmento c é um submúltiplo comum dos segmentos a e b. Desse modo, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$. Muitas das demonstrações de Pitágoras junto com o seu teorema eram baseadas neste fato.

"Um progresso considerável na operação de medir consistia na determinação de um submúltiplo comum à unidade previamente fixada e à grandeza a qual iria medir".

A existência de tal submúltiplo garantiria a comensurabilidade das grandezas, ou seja, duas grandezas são comensuráveis quando existe uma unidade, por menor que seja, a qual cabe exatamente um número inteiro de vezes numa e na outra. Se duas grandezas, de

[1] Pitágoras de Samos: $\approx$ 569 A.C., Samos, Grécia - † $\approx$ 475 A. C.

mesma espécie, não admitem um submúltiplo comum, por menor que seja, então elas são denominadas incomensuráveis.

2.2 Grandezas incomensuráveis

A revelação da existência de segmentos incomensuráveis, ou seja, da existência de número irracional, foi um acontecimento de grande importância, que possivelmente marcou a origem do que é considerada uma contribuição especificamente grega a procedimentos de rigor e de formalismo em matemática, afetando profundamente a matemática e a filosofia da época grega até os dias de hoje.

Em termos históricos, a primeira evidência da necessidade de números irracionais ocorre com a ideia da incomensurabilidade. Os números conhecidos hoje como irracionais não eram conceituados na matemática grega. Aristóteles associava a irracionalidade da raiz quadrada de 2 á tentativa de escrever este número como razão de dois inteiros primos entre si [2](fração irredutível). Veremos que isso não é possível. Considerando um quadrado de lado 1 e sendo d o comprimento de sua diagonal. Pelo Teorema de Pitágoras $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Pela comensurabilidade entre a diagonal e o lado, deveriam existir m e n tais que $\dfrac{d}{1} = \dfrac{m}{n}$. Supondo, sem perda de generalidade, que m e n não tem divisor comum maior que 1. Assim, $2 = d^2 = \dfrac{m^2}{n^2}$. Segue que $m^2 = 2.n^2$ e, portanto, m^2 é par, o que implica que m é par. Assim, existe um inteiro p tal que $m = 2p$. Temos então $2.n^2 = m^2 = 4p^2$, e portanto, $n^2 = 2p^2$. Daí concluímos que n^2 é par e, assim n é par. Provamos que tanto m como n são números pares, contradizendo o fato que eles não possuem divisor comum maior do que 1. Isto mostra que o quadrado de lado 1 e sua diagonal são incomensuráveis.

A comensurabilidade entre dois segmentos quaisquer é equivalente ao fato que todo número é racional, o que não é uma verdade. A incomensurabilidade entre o quadrado de lado 1 e sua diagonal significa que d = $\sqrt{2}$ não é racional. Isto mostra que ao contrário do que os Pitagóricos acreditavam, os números inteiros e suas razões não eram suficientes para realizar as medidas de todos os segmentos. Acredita-se que esse resultado foi descoberto e revelado por Hippasus de Metapontum, que por este motivo, foi expulso da Escola Pitagórica. Assim a raiz quadrada de dois parece ser o primeiro irracional a ser descoberto. Essa possibilidade está associada à descoberta das grandezas incomensuráveis, que estão ligadas às medições de segmentos.

A construção geométrica simples que pode resultar em um segmento incomensurável

[2]dois números inteiros m e n, ambos diferes de zero, são primos entre si, se admitirem apenas o número 1 como divisor positivo comum.

com a unidade é feita usando o compasso[3]

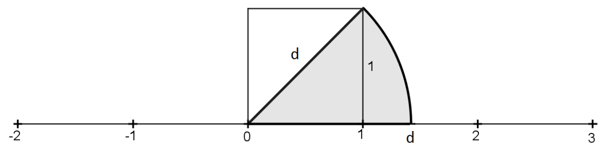


Figura 2.1: Número construtível

Se este segmento é demarcado sobre a reta numérica, por meio de um compasso, então o ponto assim construído não pode coincidir com nenhum dos pontos racionais, logo pode-se concluir que o conjunto de pontos racionais, embora denso, não cobre toda reta numérica, o que pode parecer estranho em termos intuitivos, mas com a descoberta dos incomensuráveis, instigou e ainda instiga filósofos e matemáticos, causando um efeito que Courant e Robbins (2000) consideram ser provocativo e especulativo na mente humana.

Pode-se definir então que um número irracional, representa o comprimento de um segmento incomensurável com a unidade, para haver uma correspondência mútua entre números e pontos de uma reta.

2.3 Os números irracionais

Uma análise observada nos livros didáticos do ensino fundamental mostra que os números irracionais são definidos como números que não podem ser representados por uma divisão entre dois números inteiros, ou seja, números que possuem uma representação infinita e não-periódica.

"Existem números cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Por exemplo 0,10100100010000100000... e 2,71727374..., são representações decimais infinitas não-periódicas. Não existe um mesmo padrão que se repete após a vírgula"(Dante, 2009, p.30).

Na citação acima, retirada de uma coleção de livros do ensino fundamental, o autor faz referência a números que não são racionais, por sua representação decimal, e afirma que esses números são irracionais, denotando o conjunto de todos esses números pela letra (I).

Uma outra situação muito utilizada no ensino fundamental, no mesmo ano escolar (8º ano), apresenta os números irracionais através do uso de potências e de aproximações para raízes quadradas não exatas, aplicando o teorema de Pitágoras.

[3]Primeiro se constrói um quadrado de lado 1. Utilizando um compasso, abra-o até que fique com comprimento da diagonal. com essa abertura, coloca-se a ponta seca do compasso no zero e, coma outra extremidade, traça-se um semicírculo, passando pela reta orientada, no lugar que o semicírculo cortar a reta orientada é o ponto $\sqrt{2}$.

“Vamos determinar a raiz quadrada do número 2 e, desse modo, encontrar a medida da hipotenusa” (Giovanni e Castrucci, 2009, p.22).

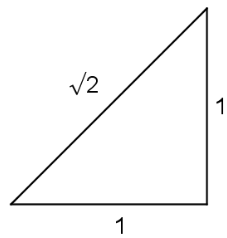


Figura 2.2: Triângulo retângulo

Buscando as aproximações, verificamos que a raiz quadrada de 2 está entre dois números quadrados perfeitos, 1 e 4, como o quadrado de $1 = 1$ e o quadrado de 4 é igual a 2^2, o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2. E, assim, diversas tentativas são utilizadas na busca de descobrir qual valor mais próximo desta raiz quadrada.

$(1,1)^2 = 1,21 < 2$
$(1,2)^2 = 1,44 < 2$
$(1,3)^2 = 1,69 < 2$
$(1,4)^2 = 1,96 < 2$
$(1,5)^2 = 2,25 > 2$

Com essa distribuição, percebemos que o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5. Continuando o cálculo, temos:

$(1,41)^2 = 1,9881 < 2$ $(1,42)^2 = 2,0164 < 2$

Então $\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42 e, prosseguindo os cálculos, temos:

$(1,411)^2 = 1,990921 < 2$
$(1,412)^2 = 1,993744 < 2$
$(1,413)^2 = 1,996569 < 2$
$(1,414)^2 = 1,999396 < 2$
$(1,415)^2 = 2,002225 > 2$

"Desse modo, temos que $\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415. Continuando as interações, encontra-se uma aproximação para $\sqrt{2}$ que seria 1,414213562..... Notamos que essa representação é infinita, mas não-periódica (Giovanni e Castrucci, 2009, p.22)".

Para Giovanni e Castrucci, os números que apresentam a característica de ser infinito e não-periódico são chamados de números irracionais. Esses mesmos autores concluem que número irracional é todo número cuja representação decimal é sempre infinita e não-periódica.

Giovanni e Castrucci, continuaram afirmando:

> Um número irracional nunca pode ser escrito na forma de fração com numerador e denominador inteiro. Nem todo número que representa raiz quadrada

de outro número é um número irracional, ou seja: 1) As raízes quadradas de números quadrados perfeitos são números racionais. 2) Entre dois naturais quadrados perfeitos existem números racionais cujas raízes quadradas são números irracionais(Giovanni e Castrucci, 2009, p.24).

2.4 Situação problema

Vimos na seção anterior que os números racionais são insuficientes, pois, não servem para realizar a medida de qualquer segmento de reta. Deste modo, precisamos completá-los e amplia-los, introduzindo a noção de corpo ordenado $(\mathbb{R}, +, ., \leqslant)$ dos números reais, conforme veremos adiante nos capítulos 3 e 4. Desta forma, uma das primeiras e grandes crises da matemática foi criada com a descoberta da incomensurabilidade entre medidas e segmentos, e esse problema precisava ser resolvido. Existem várias maneiras de construir este corpo ordenado. Nesta obra, optamos pela construção através das sequências equivalentes dos pares de Cauchy, que determinam um número racional ou aproximações sucessivas tão boas como desejarmos de um número dito irracional. Os gregos da época pitagórica conheciam e manipulavam números racionais e apenas eles. Suas demonstrações eram baseadas nas propriedades dos racionais e somente nelas. Por outro lado, eles sabiam que existiam outros números (por exemplo $\sqrt{2}$) e, pelo fato de não saberem como eles eram, os gregos eram incapazes de manipulá-los. Este foi o motivo da problemática sugerida como título desta seção e que nos motiva a construção dos números reais, muito importantes para nossa vida e desenvolvimento intelectual da humanidade.

Para começarmos a construir os números reais devemos admitir o conhecimento dos seguintes assuntos: Teoria dos Conjuntos, funções, Conjunto dos Números Racionais e suas propriedades (operatórias, ordem, etc). Por outro lado, devemos ter em mente o conjunto dos números reais pois a experiência adquirida com ele nos ajudará para a sua construção.

Capítulo 3

Pares de Cauchy

Neste capítulo apresentamos as definições e características de um par de Cauchy e dessa forma construíremos o conjunto dos números reais, através das sequências dos pares de Cauchy.

3.1 Sequências de números racionais

Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais.

Uma função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ é chamada uma sequência de números racionais.

Por exemplo, seja $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que para todo número natural n, $S(n) = \dfrac{n}{1+n}$. Assim, $s(0) = 0$, $s(1) = \dfrac{1}{2}$, $s(2) = \dfrac{2}{3}$, etc.

Exemplo 1. Consideremos a sequência $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que para todo número natural n, f_n é a maior fração que tem denominador 10^n e não ultrapassa $\dfrac{1}{3}$. Assim temos, $f_n = \dfrac{K}{10^n} \leqslant \dfrac{1}{3}$, $K \in \mathbb{N}$, desta forma:

$K \leqslant \dfrac{10^n}{3}$

$n = 0,\ K = 0,\ f_0 = 0$

$n = 1,\ K = 3,\ f_1 = 0,3$

$n = 2,\ K = 33,\ f_2 = 0,33$

Logo, $f_0 = 0$; $f_1 = 0,3$; $f_2 = 0,33$, etc.

Uma sequência de números racionais s_n é dita *limitada* quando existem dois números racionais, p e q tais que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$p \leqslant s_n \leqslant q$

A sequência $\dfrac{1}{1+n}$ é limitada, pois para todo n,

$0 \leqslant \dfrac{1}{1+n} \leqslant 1$

A sequência n^2 não é limitada.

Uma sequência a_n é dita *crescente* se, para todo número natural j:

$a_j \leqslant a_{j+1}$

Como exemplo, seja a: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que para todo n, a_n é a maior fração que tem denominador 10^n e não ultrapassa $\frac{5}{7}$. Veremos que a_n é de fato crescente e também limitada, pois para todo n, $0 \leqslant a_n < \frac{5}{7}$.

Veja:

$a_n = \dfrac{K}{10^n} \leqslant \dfrac{5}{7}$, $K \in \mathbb{N}$, desta forma:

$K \leqslant \dfrac{5.10^n}{7}$

$n = 0$, $K \leqslant \dfrac{5}{7}$, $K = 0$, $a_0 = 0$

$n = 1$, $K \leqslant \dfrac{50}{7}$, $K = 7$, $a_1 = 0,7$

$n = 2$, $K \leqslant \dfrac{500}{7}$, $K = 71$, $a_2 = 0,71\ 0$

Logo, $a_0 = 0$; $a_1 = 0,7$; $a_2 = 0,71$, etc.

Provando que a_n, é crescente:

$a_j \leqslant a_{j+1}$, assim: $\dfrac{K_n}{10^n} \leqslant \dfrac{K_{n+1}}{10^{n+1}} \Rightarrow K_{n+1} \geqslant 10K_n$

Temos que:

$\dfrac{K_n}{10^n} \leqslant \dfrac{5}{7}$ e $\dfrac{K_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant \dfrac{5}{7}$

Assim:

$K_{n+1} \leqslant \dfrac{50.10^n}{7}$ e $10K_n \leqslant \dfrac{50.10^n}{7}$

Como K_{n+1} é o maior valor que não supera $\dfrac{50.10^n}{7}$ e $10K_n$ é o número que não supera $\dfrac{50.10^n}{7}$, concluímos que $K_{n+1} \geqslant 10K_n$. Desse modo, a_n é crescente.

Uma sequência b_n é dita *decrescente* se, para todo número natural j:

$b_{j+1} \leqslant b_j$

Por exemplo, seja $\{b_n\}$ a sequência tal que para todo n, b_n é a menor fração que tem denominador 8^n e é maior que $\dfrac{1}{3}$. Do mesmo modo que foi feito acima, podemos verificar que $\{b_n\}$ é decrescente e limitada, pois para todo natural n, $\dfrac{1}{3} < b_n \leqslant 1$. Neste exemplo,

$b_0 = 1$; $b_1 = \dfrac{3}{8}$; $b_2 = \dfrac{22}{8^2}$; $b_3 = \dfrac{171}{8^3}$, etc.

3.2 Pares de Cauchy

Observe os seguintes problemas matemáticos:

1) Dado o número natural n, achar duas frações de denominador 10^n, a_n e b_n tais que $a_n < \dfrac{5}{7}$; $\dfrac{5}{7} < b_n$ e $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$.

2) Dado o número natural m, achar duas frações de denominador 10^n, c_m e d_m tais que $c_m^2 < 2$; $2 < d_m^2$ e $d_m - c_m = \dfrac{1}{10^m}$.

No primeiro problema acima, quando o natural n percorre todo o conjunto dos números naturais, as soluções a_n formam uma sequência crescente $\{a_n\}$ e as soluções b_n formam uma sequência decrescente $\{b_n\}$. Os termos a_n e b_n, de mesmo índice, vão ficando cada vez mais próximos à medida que n cresce, pois a diferença, $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$, torna - se pequena.

O segundo problema também exibe um fenômeno parecido.

Os exemplos acima e muitos outros que veremos, mostram que é importante analisar um par de sequências de números racionais racionais $\{a_n, b_n\}$ tais $\{a_n\}$ é crescente,$\{b_n\}$ é decrescente, $a_n \leqslant b_n$ para todo número natural e a diferença $b_n - a_n$ vai tendendo a zero, à medida que o índice n cresce. Esse par de sequência com as características acima é chamado par de Cauchy, a qual iremos estudar a seguir.

Definição 3.2.1. *Duas sequências de a_n e b_n de números racionais formam nessa ordem o par de Cauchy $\{a_n, b_n\}$ se as seguintes condições são verificadas:*

1) a_n é crescente e b_n é decrescente;

2) Para todo $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant b_n$;

3)Dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

$b_n - a_n < \epsilon$

Exemplos:

1) Seja r um número racional. Para todo número n, seja $a_n = b_n = r$. Podemos ver que $\{a_n, b_n\}$ é um par de Cauchy:

I) $a_j \leqslant a_{j+1}$ (crescente) e $b_{j+1} \leqslant b_j$ (decrescente);

II) Para todo $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant b_n$;

III)Dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

$b_n - a_n < \epsilon$, $b_n - a_n = 0$

2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, sejam $a_n = -\dfrac{1}{n+1}$ e $b_n = \dfrac{1}{n+1}$. Podemos ver que $\{a_n, b_n\}$ é um par de Cauchy:

I) $a_j \leqslant a_{j+1}$ (crescente) e $b_{j+1} \leqslant b_j$ (decrescente); Temos que:

$-\dfrac{1}{n+1} \leqslant -\dfrac{1}{n+2} \Rightarrow -n-2 \leqslant -n-1 \Rightarrow 1 \leqslant 2$ (verdadeiro). Logo a_n é crescente.

$\dfrac{1}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow n+1 \leqslant n+2 \Rightarrow 1 \leqslant 2$ (verdadeiro). Logo b_n é decrescente.

II) Para todo $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant b_n$; Temos que:

$-\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

III)Dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

Tomando $\dfrac{2}{n+1} < \epsilon \Rightarrow n > \dfrac{2}{\epsilon} - 1$ (propriedade arquimediana)

$b_n - a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2}{n+1} < \epsilon$

3) Podemos ver que, se $\{a_n, b_n\}$ é um par de Cauchy, então $\{-b_n, -a_n\}$ é um par de cauchy:

Como $\{a_n, b_n\}$ é um par de Cauchy, então valem as três condições vistas acima. Logo:

I) Se b_n é decrescente $\Rightarrow -b_n$ é crescente; Se a_n é crescente $\Rightarrow -a_n$ é decrescente;

II) $a_n \leqslant b_n \Rightarrow -b_n \leqslant -a_n$;

III) Temos que, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

$b_n - a_n < \epsilon$

Assim para o par $\{-b_n, -a_n\}$, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

$-a_n - (-b_n) < \epsilon \Rightarrow b_n - a_n < \epsilon$

4) Sendo $\{c_n, d_n\}$ um par de Cauchy tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $c_n > 0$. Podemos mostrar que $\{\dfrac{1}{d_n}, \dfrac{1}{c_n}\}$ é um par de Cauchy:

Como $\{c_n, d_n\}$ é um par de Cauchy, então valem as três condições vistas acima. Logo:

I) Se d_n é decrescente $\Rightarrow \dfrac{1}{d_n}$ é crescente; Se c_n é crescente $\Rightarrow \dfrac{1}{c_n}$ é decrescente;

II) $c_n \leqslant d_n \Rightarrow \dfrac{1}{d_n} \leqslant \dfrac{1}{c_n}$, pois $c_n > 0$;

III) Temos que, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

Tomando $d_n - c_n < \epsilon c_0^2$ e sabendo que $c_o < c_n$ e $c_0 < d_n$

$$\frac{1}{c_n} - \frac{1}{d_n} = \frac{d_n - c_n}{d_n.c_n} \leqslant \frac{d_n - c_n}{c_0^2} < \frac{\epsilon c_0^2}{c_0^2} = \epsilon$$

5) Sendo $\{e_n, f_n\}$ um par de Cauchy tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n < 0$. Podemos mostrar que $\{\dfrac{1}{f_n}, \dfrac{1}{e_n}\}$ é um par de Cauchy:

Como $\{e_n, f_n\}$ é um par de Cauchy, então valem as condições abaixo. Logo:

I) Se f_n é decrescente $\Rightarrow \dfrac{1}{f_n}$ é crescente; Se e_n é crescente $\Rightarrow \dfrac{1}{e_n}$ é decrescente;

II) $e_n \leqslant f_n \Rightarrow \dfrac{1}{f_n} \leqslant \dfrac{1}{e_n}$, pois $f_n < 0$;

III) Temos que, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

Tomando $f_n - e_n < \epsilon e_0^2$ e sabendo que $e_o < e_n$ e $e_0 < f_n$

$$\frac{1}{e_n} - \frac{1}{f_n} = \frac{f_n - e_n}{e_n.f_n} \leqslant \frac{f_n - e_n}{e_0^2} < \frac{\epsilon e_0^2}{e_0^2} = \epsilon$$

6) Sendo $\{a_n, b_n\}$, $\{c_n, d_n\}$ dois pares de Cauchy tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ e $c_n > 0$. Podemos mostrar que $\{a_n c_n, b_n d_n\}$ também é um par de cauchy. Temos que:

I) a_n é crescente e c_n é crescente, logo $a_n c_n$ também é crescente, visto que $a_n > 0$ e $c_n > 0$;

b_n é decrescente e d_n é decrescente, logo $b_n d_n$ também é decrescente, visto que $b_n > 0$ e $d_n > 0$;

II) $a_n \leqslant b_n$ e $c_n \leqslant d_n$, logo $a_n b_n \leqslant c_n d_n$, visto que $a_n > 0$ e $c_n > 0$;

III) Temos que, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

Tomando $b_n - a_n < \dfrac{\epsilon}{2d_0}$ e $d_n - c_n < \dfrac{\epsilon}{2b_0}$ sabendo que $d_n < d_0$ e $b_n < b_0$. Assim:

$b_n d_n - a_n c_n = b_n d_n - a_n d_n + a_n d_n - a_n c_n \leqslant d_n(b_n - a_n) + a_n(d_n - c_n) \leqslant d_0(b_n - a_n) + b_0(d_n - c_n) < d_0 \dfrac{\epsilon}{2d_0} + b_0 \dfrac{\epsilon}{2b_0} = \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$

7) Sendo $\{a_n, b_n\}$, $\{c_n, d_n\}$ dois pares de Cauchy . Podemos mostrar que $\{a_n + c_n, b_n + d_n\}$ também é um par de cauchy. Temos que:

I) a_n é crescente e c_n é crescente, logo $a_n + c_n$ também é crescente;

b_n é decrescente e d_n é decrescente, logo $b_n + d_n$ também é decrescente;

II) $a_n \leqslant b_n$ e $c_n \leqslant d_n$, logo $a_n + b_n \leqslant c_n + d_n$;

III) Temos que, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

Tomando $b_n - a_n < \frac{\epsilon}{2}$ e $d_n - c_n < \frac{\epsilon}{2}$. Assim:

$(b_n + d_n)$ - $(a_n + c_n) = (d_n - c_n) + (b_n - a_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Os exemplos acima mostram que podemos obter uma infinidade de pares de Cauchy realizando operações entre diversos pares de Cauchy, operações como soma, multiplicação, inverso, etc.

O exemplo a seguir mostra que os termos iniciais de uma sequência de pares de Cauchy, são irrelevantes para definir a condição III da definição dos pares de Cauchy.

Sejam $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy e n_0 um número natural. Definindo as sequências a_n' e b_n' do seguinte modo:

$b_n' = b_{n_0}$, $a_n' = a_{n_0}$, para $n \leqslant n_0$

$b_n' = b_n$, $a_n' = a_n$, para $n > n_0$

Mostraremos que $\{a_n', b_n'\}$ é um par de Cauchy e que os termos iniciais (para $n \leqslant n_0$), são irrelevantes para caracterizar o par de Cauchy.

Como $\{a_n, b_n\}$ é um par de Cauchy, então, teremos as condições abaixo:

1) a_n é crescente e b_n é decrescente;

2) Para todo $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant b_n$;

3)Dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

$b_n - a_n < \epsilon$

Para $n \leqslant n_0$, $b_n' = b_{n_0}$, $a_n' = a_{n_0}$. Assim: b_n' e a_n', são constantes b_{n_0} e a_{n_0} respectivamente. Logo pode atender as condições de pares de Cauchy ou não.

Para $n > n_0$, teremos:

$b_n' = b_n$, $a_n' = a_n$, para $n > n_0$

I) $b_n' = b_n$ (decrescente) e $a_n' = a_n$ (crescente);

II) Para todo $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant b_n$, logo $a_n' \leqslant b_n'$;

III) Dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:

$b_n - a_n < \epsilon \Rightarrow b_n'$ - $a_n' < \epsilon$. Logo, a partir de um n_0, $\{a_n', b_n'\}$ é um par de Cauchy, sendo irrelevantes os termos do par de Cauchy para $n \leqslant n_0$.

3.3 Unicidade

Vamos mostrar que dado um par de Cauchy $\{a_n, b_n\}$, se existe um número racional r, tal que para todo n $\in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant r \leqslant b_n$, então esse número é *único.*

Demonstração: Vamos supor que seja possível existir um outro número racional s , diferente de r, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:
$a_n \leqslant s \leqslant b_n$
Mostraremos que não é possível:
Se existisse esse número s diferente de r, então $s > r$ ou $s < r$.
Verificaremos que as situações acima não podem acontecer:
Situação 1: Se $s > r$ então $s - r > 0$. De acordo com a condição 3) da definição de pares de Cauchy, podemos tomar $\epsilon = s - r$ e assim existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:
$0 \leqslant (b_n - a_n) < \epsilon \Rightarrow b_n - a_n < s - r$, assim $b_n + r < s + a_n$
mas, por hipótese $a_n \leqslant s \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. então
$b_n + r < s + a_n \leqslant b_n + a_n$ e portanto
$b_n + r < b_n + a_n$
isto é, $r < a_n$, isso é um absurdo, pois por hipótese $a_n \leqslant r \leqslant b_n$ para todo n.
Situação 2: Se $s < r$ então $r - s > 0$. De acordo com a condição 3) da definição de pares de Cauchy, podemos tomar $\epsilon = r - s$ e assim existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$:
$0 \leqslant (b_n - a_n) < \epsilon \Rightarrow b_n - a_n <$ r - s, assim $b_n + s < r + a_n$
mas, por hipótese $a_n \leqslant s \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. então
$b_n + a_n \leqslant s + b_n < r + a_n$ e portanto
$b_n + a_n <$ r $+ a_n$
isto é, $b_n < r$, isso é um absurdo, pois por hipótese $a_n \leqslant r \leqslant b_n$ para todo n.

□

Proposição 3.3.1. *Dado um par de Cauchy $\{a_n, b_n\}$, se existir um número racional r tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant r \leqslant b_n$, então r é o único.*

Definição 3.3.1. *Dados o par de Cauchy $\{a_n, b_n\}$ e o número racional r, dizemos que $\{a_n, b_n\}$ determina r se para todo $n \in \mathbb{N}$, acontece isto: $a_n \leqslant r \leqslant b_n$*

Quero salientar que um par de Cauchy pode ou não determinar um número racional, como veremos nos exemplos abaixo:

1) Verificar que o par $\{3 + \dfrac{-1}{n+1}, 3 + \dfrac{1}{n+1}\}$ é de Cauchy e determina o número 3 para todo $n \in \mathbb{N}$:

Verificando que é de Cauchy e que determina o número 3:

I) $a_n = 3 + \dfrac{-1}{n+1}$ e $b_n = 3 + \dfrac{1}{n+1}$. Assim

$3 + \dfrac{-1}{n+1} \leqslant 3 + \dfrac{-1}{n+2} \Rightarrow$ - n - 2 $\leqslant$ - n - 1 $\Rightarrow$ - 2 $\leqslant$ - 1. Assim a_n é crescente;

$3 + \dfrac{1}{n+1} \geqslant 3 + \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow$ n + 2 $\geqslant$ n + 1 $\Rightarrow$ 2 $\geqslant$ 1. Assim b_n é decrescente;

II) $3 + \dfrac{-1}{n+1} \leqslant 3 + \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow a_n \leqslant b_n$;

III) Dado qualquer número racional $\epsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ e tomando $\dfrac{2}{n+1} < \epsilon$, perfeitamente possível, pois podemos ter n tão grande quanto desejarmos.

$b_n - a_n = (3 + \dfrac{1}{n+1})$ - $(3 + \dfrac{-1}{n+1}) = \dfrac{2}{n+1} < \epsilon$. Logo, o par é de Cauchy.

Para:

$n = 1$, $b_1 = \dfrac{7}{2}$, $a_1 = \dfrac{5}{2}$, $b_1 - a_1 = 1$

$n = 2$, $b_2 = \dfrac{10}{3}$, $a_2 = \dfrac{8}{3}$, $b_2 - a_2 = \dfrac{2}{3}$

$n = 3$, $b_3 = \dfrac{13}{4}$, $a_3 = \dfrac{11}{4}$, $b_3 - a_3 = \dfrac{2}{4}$

Temos também que:

$3 + \dfrac{-1}{n+1} \leqslant 3 \leqslant 3 + \dfrac{1}{n+1}$

2) Verificar que o par $\{a_n, b_n\}$ é de Cauchy e não determina nenhum número racional. Sendo as sequências a_n e b_n, para cada $n \in \mathbb{N}$ dadas por:

* a_n é a maior fração de denominador 10^n tal que $a_n^2 \leqslant 2$;
* b_n é a menor fração positiva de denominador 10^n tal que $b_n^2 \geqslant 2$;

Verificando que o par é de Cauchy e que não determina o número racional nenhum:

I) Temos que $a_n = \dfrac{k_n}{10^n}$; verificaremos que a_n é crescente:

ser crescente equivale a dizer que: $a_n \leqslant a_{n+1}$, logo

$\dfrac{k_n}{10^n} \leqslant \dfrac{k_{n+1}}{10^{n+1}} \Rightarrow 10k_n \leqslant k_{n+1}$

Assim, como $a_n^2 \leqslant 2$:

$(\dfrac{k_n}{10^n})^2 \leqslant 2 \Rightarrow k_n^2 \leqslant 2.10^{2n}$

$(\dfrac{k_{n+1}}{10^{n+1}})^2 \leqslant 2 \Rightarrow k_{n+1}^2 \leqslant 2.10^{2n}.10^2$. Logo:

$k_{n+1}^2 \leqslant 2.10^{2n+2}$ e $10k_n^2 \leqslant 2.10^{2n+2}$, como k_{n+1} é o maior valor que ao quadrado é menor do que 2.10^{2n+2} e $10k_n$ é o número que levado ao quadrado é menor do que 2.10^{2n+2}, podemos dizer que $10k_n \leqslant k_{n+1}$ e a_n é crescente.

Temos que $b_n = \dfrac{k_n}{10^n}$; verificaremos que b_n é decrescente:

ser decrescente equivale a dizer que: $b_n \geqslant b_{n+1}$, logo

$\dfrac{k_n}{10^n} \geqslant \dfrac{k_{n+1}}{10^{n+1}} \Rightarrow 10k_n \geqslant k_{n+1}$

Assim, como $b_n^2 \geqslant 2$:

$(\dfrac{k_n}{10^n})^2 \geqslant 2 \Rightarrow k_n^2 \geqslant 2.10^{2n}$

$(\dfrac{k_{n+1}}{10^{n+1}})^2 \geqslant 2 \Rightarrow k_{n+1}^2 \geqslant 2.10^{2n}.10^2$. Logo:

$k_{n+1}^2 \geqslant 2.10^{2n+2}$ e $10k_n^2 \geqslant 2.10^{2n+2}$, como k_{n+1} é o menor valor que ao quadrado é maior do que 2.10^{2n+2} e $10k_n$ é o número que levado ao quadrado é maior do que 2.10^{2n+2}, podemos dizer que $10k_n \geqslant k_{n+1}$ e b_n é decrescente.

II) Como por hipótese, $a_n^2 \leqslant 2$ e $b_n^2 \geqslant 2$, então $a_n^2 \leqslant b_n^2 \Rightarrow b_n^2 - a_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow (b_n - a_n).(b_n + a_n) \geqslant 0 \Rightarrow b_n - a_n \geqslant 0 \Rightarrow b_n \geqslant a_n$

III) Primeiro verificaremos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$; temos que:

$(k_n^a)^2 < 2.10^{2n}$, não é quadrado perfeito;

$(k_n^a + 1)^2 > 2.10^{2n}$ e $(k_n^b)^2 > 2.10^{2n} \Rightarrow k_n^a + 1 = k_n^b$. Assim: para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$.

Continuando:

Para todo $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/n \geqslant n_0$

$b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n} < \epsilon$, provaremos que isso é válido. Temos que:

$\dfrac{1}{\epsilon} < 10^n$, quando ϵ diminui 10^n aumenta, ou seja pode se tornar suficientemente grande, pois é exponencial.

Dado $M \in \mathbb{Q}$, M > 0 $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$/ n $> n_0$

$10^n > M$ (**I**)

pela desigualdade de Bernoulli: [1]

$(1+9)^n \geqslant 1 + 9n > n; \forall n > n_0 \Rightarrow n > \dfrac{n-1}{9}$ (**II**)

[1]a desigualdade de Bernoulli afirma que: $(1+x)^n \geqslant 1 +$ nx; sempre que x $>$ -1 um número inteiro não negativo.

Dado $k \in \mathbb{Q}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $n_0 > k$ (**III**)

devido a propriedade arquimediana dos racionais. [2]

Como acontece **I**, **II**, **III**

$b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n} < \epsilon$

Logo o par $\{a_n, b_n\}$ é de Cauchy.

Verificaremos agora, que esse par não determina nenhum racional h, tal que $a_n < h < b_n$. Se existisse este número racional, deveria acontecer um dos três casos:

I) $h^2 = 2$

II) $h^2 < 2$

III) $h^2 > 2$

Mostraremos que nenhum desses casos é possível.

Demonstração:

I) Não existe nenhum número racional h tal que $h^2 = 2$. de fato, se existe um tal h, ele seria da forma $h = \dfrac{p}{q}$, onde p e q são números naturais primos entre si e $q \neq 0$. Desse modo: $\dfrac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$. Logo p^2 é par. Portanto p é par. Assim p^2 é múltiplo de 4 e como $p^2 = 2q^2$ concluímos que q^2 é múltiplo de 2, então q é par. Isso é um absurdo, pois p e q são primos entre si, logo não existe o número racional h, tal que $h^2 = 2$.

II) Mostraremos que $h^2 < 2$, não é possível:
Sabemos que $b_n = (b_n - h) + h$, então $[(b_n - h) + h]^2 = b_n^2 > 2$. Logo
$(b_n - h)^2 + 2h(b_n - h) + h^2 > 2$ (**I**)

Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$ e $a_n \leqslant h \leqslant b_n$, então:

$-a_n \geqslant -h \geqslant -b_n$

$b_n - a_n \geqslant b_n - h > 0$

$0 < b_n - h \leqslant \dfrac{1}{10^n}$

$2(b_n - h)h \leqslant \dfrac{2.h}{10^n}$

$(b_n - h)^2 \leqslant \dfrac{1}{10^{2n}}$

Portanto de (**I**), teremos:

[2] Dizemos que um corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, . , \leqslant)$é arquimediano se $\mathbb{N}$ é um subconjunto de K ilimitado superiormente, ou seja, para todo x $\in \mathbb{K}$ existe m $\in \mathbb{N}$ tal que x $<$ m. De fato, $(\mathbb{Q}, +, . , \leqslant)$ é arquimediano pois se $x \in \mathbb{Q}$, com x > 0, então existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $x = \dfrac{m}{n}$. Como x > 0, temos $m \in \mathbb{N}$. Concluímos observando que $x = \dfrac{m}{n} \leqslant m < m + 1 \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{10^{2n}} + \frac{2h}{10^n} + h^2 \geqslant (b_n - h)^2 + 2h(b_n - h) + h^2 = [(b_n - h) + h]^2 = b_n^2 > 2 \ \mathbf{(1)}$$

Dado o número racional positivo h, existe um número natural n_0 tal que

$10^{n_0} > \dfrac{1}{h}$, devido a desigualdade de Bernoulli e propriedade arquimediana dos racionais, visto anteriormente.

Logo, para todo $n \geqslant n_0$, podemos escrever:

$$10^n \geqslant 10^{n_0} > \frac{1}{h} \Rightarrow 10^n > \frac{1}{h} \Rightarrow h > \frac{1}{10^n}$$

Assim concluímos que para todo $n \geqslant n_0$:

$$\frac{1.h}{10^n} > \frac{1}{10^n} . \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^{2n}}$$

e assim, de acordo com o resultado ($\mathbf{1}$), teremos:

$\dfrac{1}{10^n}.h + \dfrac{2h}{10^n} + h^2 > \dfrac{1}{10^{2n}} + \dfrac{2h}{10^n} + h^2 > 2$, isto é,

$\dfrac{3h}{10^n} + h^2 > 2$, para todo $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}.\mathbf{(2)}$

Podemos concluir de ($\mathbf{2}$) que

$\dfrac{3h}{10^n} > 2 - h^2$, como $2 - h^2 > 0$:

$\dfrac{3h}{2 - h^2} > 10^n$, qualquer que seja $n \geqslant n_0$ ($\mathbf{3}$).

($\mathbf{3}$) é um absurdo pois dado o número racional $\dfrac{3h}{2 - h^2} > 0$ sempre existe um número natural n maior do que n_0 tal que

$$\frac{3h}{2 - h^2} < 10^n$$

Logo está mostrado que h^2 não pode ser menor do que 2.

III) Mostraremos que $h^2 > 2$, não é possível:

Sabemos que $a_n = (a_n - h) + h$, então $[(a_n - h) + h]^2 = a_n^2 < 2$. Logo

$(a_n - h)^2 + 2h(a_n - h) + h^2 < 2$ ($\mathbf{I}$)

Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$ e $a_n \leqslant h \leqslant b_n$, então:

$$a_n - a_n \leqslant h - a_n \leqslant b_n - a_n$$

$$0 \leqslant h - a_n \leqslant b_n - a_n$$

$$0 \leqslant h - a_n \leqslant \frac{1}{10^n}$$

$$0 \geqslant a_n - h \geqslant \frac{-1}{10^n}$$

$$2h.(a_n - h) \geqslant \frac{-2h}{10^n}$$

$(a_n - h)^2 \geqslant \dfrac{1}{10^{2n}}$

Portanto de (**I**), teremos:

$\dfrac{1}{10^{2n}} - \dfrac{2h}{10^n} + h^2 \leqslant (a_n - h)^2 + 2h(a_n - h) + h^2 = [(a_n - h) + h]^2 = a_n^2 < 2$ **(1)**

Dado o número racional positivo h, existe um número natural n_0 tal que

$10^{n_0} > \dfrac{1}{h}$

Logo, para todo $n \geqslant n_0$, podemos escrever:

$10^n \geqslant 10^{n_0} > \dfrac{1}{h} \Rightarrow 10^n > \dfrac{1}{h} \Rightarrow h > \dfrac{1}{10^n}$

Assim concluímos que para todo $n \geqslant n_0$:

$\dfrac{1.h}{10^n} > \dfrac{1}{10^n}.\dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{10^{2n}}$

e assim, de acordo com o resultado (**1**), teremos:

$\dfrac{1}{10^{2n}} - \dfrac{2h}{10^n} + h^2 \leqslant \dfrac{1.h}{10^n}$ - $\dfrac{2h}{10^n} + h^2 < 2$, isto é,

$\dfrac{-h}{10^n} + h^2 < 2$, para todo n $\geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}$.**(2)**

Podemos concluir de (**2**) que

$\dfrac{-h}{10^n} < 2 - h^2$, como $2 - h^2 < 0$:

$\dfrac{h}{h^2 - 2} > 10^n$, qualquer que seja $n \geqslant n_0$ (**3**).

(**3**) é um absurdo pois dado o número racional $\dfrac{h}{h^2 - 2} > 0$ sempre existe um número natural n maior do que n_0 tal que

$\dfrac{h}{h^2 - 2} > 10^n$

Logo está demonstrado que h^2 não pode ser maior do que 2. □

Obs: Dado um par de Cauchy qualquer $\{a_n, b_n\}$, nem sempre podemos garantir a existência de um número racional r que tenha a seguinte propriedade:

$a_n \leqslant r \leqslant b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Sabemos também que quando este número r existe, ele é único, ou seja, não é possível existir um outro número s racional, diferente de r e que satisfaça as condições

$a_n \leqslant s \leqslant b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Por essa razão, quando $a_n \leqslant r \leqslant b_n$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, podemos dizer que o par de Cauchy $\{a_n, b_n\}$ *determina* o número racional r. Mas quando o par de Cauchy não determina o número racional r, o que ele determina? para responder a esta pergunta iremos continuar analisando termo a termo o par de Cauchy $\{a_n, b_n\}$, acima:

* a_n é a maior fração de denominador 10^n tal que $a_n^2 \leqslant 2$;

$a_n = \dfrac{k_n}{10^n} \Rightarrow (\dfrac{k_n}{10^n})^2 \leqslant 2 \Rightarrow (k_n)^2 \leqslant 2.10^{2n}$. Assim:

$n = 1$,$(k_1)^2 \leqslant 200$, $k_1 = 14$, $a_1 = \dfrac{14}{10} = 1{,}4$

$n = 2$,$(k_2)^2 \leqslant 20.000$, $k_2 = 141$, $a_2 = \dfrac{141}{100} = 1{,}41$

$n = 3$,$(k_3)^2 \leqslant 2.000.000$, $k_3 = 1414$, $a_3 = \dfrac{1414}{1000} = 1{,}414$; já sabíamos que a_n é crescente.

* b_n é a menor fração de denominador 10^n tal que $b_n^2 \geqslant 2$

$b_n = \dfrac{k_n}{10^n} \Rightarrow (\dfrac{k_n}{10^n})^2 \geqslant 2 \Rightarrow (k_n)^2 \geqslant 2.10^{2n}$.

$n = 1$,$(k_1)^2 \geqslant 200$, $k_1 = 15$, $a_1 = \dfrac{15}{10} = 1{,}5$

$n = 2$,$(k_2)^2 \geqslant 20.000$, $k_2 = 142$, $a_2 = \dfrac{142}{100} = 1{,}42$

$n = 3$,$(k_3)^2 \geqslant 2.000.000$, $k_3 = 1415$, $a_3 = \dfrac{1415}{1000} = 1{,}415$; já sabíamos que b_n é decrescente.

O exemplo acima mostra aproximações por falta e por excesso de $\sqrt{2}$. Assim, quando o par de Cauchy não determina um número racional, ele determina aproximações sucessivas por falta e por excesso de um número irracional. Aproximações tão boas quanto desejarmos.

Seja $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy. Podemos obter um outro par de Cauchy, diferente de $\{a_n, b_n\}$ e que determina o mesmo número r.

Exemplo:

$a_n^{'} = a_n - \dfrac{1}{n+1}$

$b_n^{'} = b_n + \dfrac{1}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Temos que $a_n^{'} \neq a_n$, $b_n^{'} \neq b_n$ e $a_n^{'} \leqslant a_n \leqslant r \leqslant b_n \leqslant b_n^{'}$, isto é $a_n^{'} \leqslant r \leqslant b_n^{'}$. Podemos verificar que $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ é um par de Cauchy e como $a_n^{'} \leqslant r \leqslant b_n^{'}$, então $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ determina o número r. Veja:

I) a_n crescente, então $a_n^{'} = a_n - \dfrac{1}{n+1}$ continua crescente;

b_n decrescente, então $b_n^{'} = b_n + \dfrac{1}{n+1}$ continua decrescente, para todo n $\in \mathbb{N}$;

II) $a_n \leqslant b_n \Rightarrow a_n^{'} = a_n - \dfrac{1}{n+1} \leqslant b_n^{'} = b_n + \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow a_n^{'} \leqslant b_n^{'}$;

III) Para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in$ n tal que dado $n \geqslant n_0$, $b_n - a_n < 0$. Tomando $b_n - a_n < \epsilon - \dfrac{2}{n+1}$;

$$b_n^{'} - a_n^{'} = b_n + \frac{1}{n+1} - (a_n - \frac{1}{n+1}) = b_n - a_n + \frac{2}{n+1} < \epsilon$$

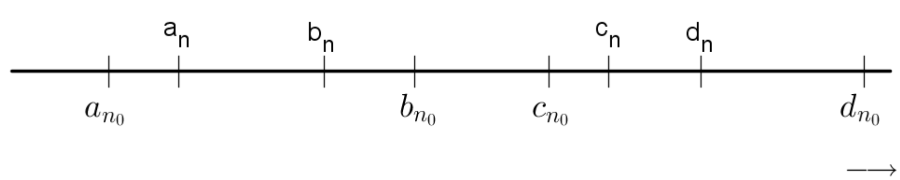
Obs: Um par de Cauchy pode determinar no máximo um número racional, mas um número racional pode ser determinado por muitos pares de Cauchy.

3.4 Comparação de pares de Cauchy

Definição 3.4.1. *Dados dois pares de Cauchy* $\{a_n, b_n\}$ *e* $\{c_n, d_n\}$*, dizemos que* $\{a_n, b_n\}$ *é estritamente menor do que* $\{c_n, d_n\}$*, e escrevemos* $\{a_n, b_n\} < \{c_n, d_n\}$*, se existir algum índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$b_{n_0} < c_{n_0}$

Geometricamente a definição acima, para $n > n_0$:



Definição 3.4.2. *Dado dois pares de Cauchy* $\{a_n, b_n\}$ *e* $\{c_n, d_n\}$*, quando* $\{a_n, b_n\} < \{c_n, d_n\}$*, dizemos que* $\{c_n, d_n\}$ *é estritamente maior do que* $\{a_n, b_n\}$ *e escrevemos* $\{c_n, d_n\} > \{a_n, b_n\}$*.*

Exemplo: Consideremos os dois pares de Cauchy $\{a_n, b_n\}$ e $\{c_n, d_n\}$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = 1$ e $c_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, $d_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$. Podemos ver que $\{a_n, b_n\}$ não é nem estritamente maior nem estritamente menor do que $\{c_n, d_n\}$, pois tanto $\{a_n, b_n\}$ como $\{c_n, d_n\}$ determinam o mesmo número racional 1. Assim b_{n_0} não é menor que c_{n_0}.

Dados dois pares de Cauchy $\{a_n, b_n\}$, $\{c_n, d_n\}$, vamos supor que existe um número racional r tal que $a_n \leqslant r \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja $\{a_n, b_n\}$ determina o número r. Vamos supor que $\{a_n, b_n\}$ não é estritamente maior nem estritamente menor do que $\{c_n, d_n\}$. Mostraremos que $\{c_n, d_n\}$ determina o mesmo número r.

Demonstração: Como $\{a_n, b_n\}$ não é estritamente menor do que $\{c_n, d_n\}$ podemos afirmar que para todo $n \in \mathbb{N}$:
$c_n \leqslant b_n$
Como $\{a_n, b_n\}$ não é estritamente maior do que $\{c_n, d_n\}$ podemos afirmar que para todo $n \in \mathbb{N}$:
$a_n \leqslant d_n$
Para demonstrarmos que $\{c_n, d_n\}$ determina r, precisamos mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:
$c_n \leqslant r \leqslant d_n$
Se a afirmação acima fosse falsa deveria existir um número natural n_0 tal que um dos casos abaixo aconteceria:
1) $r < c_{n_0}$;
2) $d_{n_0} < r$.
demonstrando que 1) não pode ocorrer:
Se $r < c_{n_0}$, então $c_{n_0} - r > 0$ e para todo $n \geqslant n_0$, $c_n - r \geqslant c_{n_0} - r > 0$.
Tomando o número racional positivo $c_{n_0} - r$. Sabemos que $\{a_n, b_n\}$ é um par de Cauchy, existe $n_1 > n_0$ tal que para todo $n \geqslant n_1$:
$b_n - a_n < c_{n_0} - r$
Então para todo $n \geqslant n_1$ e sabendo que $c_{n_0} - r \leqslant c_n - r$, temos
$b_n - a_n < c_n - r$, desse modo
$b_n - c_n < a_n - r$, mas sabendo por hipótese que $c_n \leqslant b_n$, concluímos que $b_n - c_n \geqslant 0$ e portanto
$a_n - r > 0$ para todo $n \geqslant n_1$, isto é um absurdo, pois por hipótese $a_n \leqslant r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
demonstrando que 2) não pode ocorrer:
Se $d_{n_0} < r$, então $r - d_{n_0} > 0$ e para todo $n \geqslant n_0$, $r - d_n \geqslant r - d_{n_0} > 0$.
Tomando o número racional positivo $r - d_{n_0}$. Sabemos que $\{a_n, b_n\}$ é um par de Cauchy, existe $n_1 > n_0$ tal que para todo $n \geqslant n_1$:
$b_n - a_n < r - d_{n_0}$
Então para todo $n \geqslant n_1$ e sabendo que $r - d_n \geqslant r - d_{n_0}$, temos
$b_n - a_n < r - d_n$, desse modo
$d_n - a_n < r - b_n$, mas sabendo por hipótese que $a_n \leqslant d_n$, concluímos que $d_n - a_n \geqslant 0$ e portanto
$r - b_n > 0$ para todo $n \geqslant n_1$, isto é um absurdo, pois por hipótese $r \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Proposição 3.4.1. *Se $\{a_n, b_n\}$ determina o número racional r e $\{c_n, d_n\}$ é um par de*

Cauchy que não é nem estritamente maior nem estritamente menor que do que $\{a_n, b_n\}$, então $\{c_n, d_n\}$ determina o mesmo número racional r.

Definição 3.4.3. *Dados dois pares de Cauchy $\{a_n, b_n\}$ e $\{c_n, d_n\}$, dizemos que $\{a_n, b_n\}$ é **equivalente** a $\{c_n, d_n\}$ e escrevemos $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$ se $\{a_n, b_n\}$ não é estritamente maior nem estritamente menor que $\{c_n, d_n\}$. Esta definição da início a classe de equivalência dos pares de Cauchy, pois pares equivalentes de Cauchy determinam o mesmo número racional r ou quando não determinam o racional r, determinam as mesmas aproximações por falta e por excesso dos números irracionais.*

Propriedades da relação de equivalência ($\sim$)

Demonstraremos as propriedades das relações de equivalência:

I) $\{a_n, b_n\} \sim \{a_n, b_n\}$, para todo par de Cauchy $\{a_n, b_n\}$;

Pois $\{a_n, b_n\}$ não é estritamente maior nem estritamente menor que ele mesmo, ou seja, $b_n \geqslant a_n$

II) $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\} \Rightarrow \{c_n, d_n\} \sim \{a_n, b_n\}$;

Como $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$, então $\{a_n, b_n\}$ não é nem estritamente maior nem estritamente menor que $\{c_n, d_n\}$, assim, $b_n \geqslant c_n$ e $d_n \geqslant a_n$. Logo $\{c_n, d_n\} \sim \{a_n, b_n\}$.

III) Se $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$ e $\{c_n, d_n\} \sim \{e_n, f_n\}$, então $\{a_n, b_n\} \sim \{e_n, f_n\}$;

Hipóteses: $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\} \Rightarrow b_n \geqslant c_n$ e $d_n \geqslant a_n$;

$\{c_n, d_n\} \sim \{e_n, f_n\} \Rightarrow d_n \geqslant e_n$ e $f_n \geqslant c_n$;

Tese:$\{a_n, b_n\} \backsim \{e_n, f_n\} \Rightarrow b_n \geqslant e_n$ e $f_n \geqslant a_n$;

Vamos supor que $\{a_n, b_n\}$ não é equivalente a $\{e_n, f_n\} \Rightarrow \{a_n, b_n\} > \{e_n, f_n\}$ ou $\{e_n, f_n\} > \{a_n, b_n\}$;

Para $\{a_n, b_n\} > \{e_n, f_n\} \Rightarrow f_{n_0} < a_{n_0} \Rightarrow a_{n_0} - f_{n_0} > 0$ e para todo $n \geqslant n_0$,

$a_n - f_n \geqslant a_{n_0} - f_{n_0} > 0$. tomando o número racional positivo $a_{n_0} - f_{n_0}$. Como $\{c_n, d_n\}$ é um par de Cauchy, existe $n_1 > n_0$ tal que para todo $n \geqslant n_1$, temos:

$d_n - c_n < a_{n_0} - f_{n_0}$

Como a_n é crescente e f_n é decrescente por, hipótese, e $a_n - f_n \geqslant a_{n_0} - f_{n_0}$, então para $n \geqslant n_1$:

$d_n - c_n < a_n - f_n$, assim

$d_n - a_n < c_n - f_n$, mas por hipótese $d_n \geqslant a_n$, ou seja $d_n - a_n \geqslant 0$ e portanto

$c_n - f_n > 0 \Rightarrow c_n > f_n$, absurdo, pois por hipótese $f_n \geqslant c_n$. Logo $\{a_n, b_n\}$ não é estritamente maior do que $\{e_n, f_n\}$.

Para $\{a_n, b_n\} < \{e_n, f_n\} \Rightarrow b_{n_0} < e_{n_0} \Rightarrow e_{n_0} - b_{n_0} > 0$

$e_n - b_n \geqslant e_{n_0} - b_{n_0} > 0$. tomando o número racional positivo $e_{n_0} - b_{n_0}$. Como $\{c_n, d_n\}$ é um par de Cauchy, existe $n_1 > n_0$ tal que para todo $n \geqslant n_1$, temos:

$d_n - c_n < e_{n_0} - b_{n_0}$

Como e_n é crescente e b_n é decrescente, por hipótese, e $e_n - b_n \geqslant e_{n_0} - b_{n_0}$, então para $n \geqslant n_1$:

$d_n - c_n < e_n - b_n$, assim

$b_n - c_n < e_n - d_n$, mas por hipótese $b_n \geqslant c_n$, ou seja $b_n - c_n \geqslant 0$ e portanto

$e_n - d_n > 0 \Rightarrow e_n > d_n$, absurdo, pois por hipótese $d_n \geqslant e_n$. Logo $\{a_n, b_n\}$ não é estritamente menor do que $\{e_n, f_n\}$. Portanto:

$\{a_n, b_n\} \sim \{e_n, f_n\}$

IV) Se $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$ e $\{e_n, f_n\} \sim \{g_n, h_n\}$ e $\{a_n, b_n\} > \{e_n, f_n\}$, então $\{c_n, d_n\} > \{g_n, h_n\}$;

Hipóteses:

$\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\} \Rightarrow b_n \geqslant c_n$ e $d_n \geqslant a_n$;

$\{e_n, f_n\} \sim \{g_n, h_n\} \Rightarrow f_n \geqslant g_n$ e $h_n \geqslant e_n$;

$\{a_n, b_n\} > \{e_n, f_n\} \Rightarrow f_{n_0} < a_{n_0}$;

a_n, c_n, e_n e g_n sequências crescentes;

b_n, d_n, f_n e h_n sequências decrescentes.

Tese:

$\{c_n, d_n\} > \{g_n, h_n\} \Rightarrow h_{n_0} < c_{n_0}$.

Supondo que $\{c_n, d_n\}$ não é estritamente maior nem estritamente menor do que $\{g_n, h_n\}$ e , então $h_n \geqslant c_n$ e $d_n \geqslant g_n$. Logo $\{c_n, d_n\} \sim \{g_n, h_n\}$. Temos por hipótese que $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$ e $\{e_n, f_n\} \sim \{g_n, h_n\}$, portanto $\{a_n, b_n\} \sim \{e_n, f_n\}$, absurdo, pois por hipótese $\{a_n, b_n\} > \{e_n, f_n\} \Rightarrow f_{n_0} < a_{n_0}$. Logo $\{c_n, d_n\}$ é estritamente maior do que $\{g_n, h_n\}$.

Após demonstrarmos as propriedades da equivalência entre pares de Cauchy, veremos alguns exemplos, como soma e multiplicação de pares de Cauchy. Estes exemplos mostram que podemos obter outro pares de Cauchy realizando estas operações, isso aumenta bastante a quantidade dos pares de Cauchy que podemos eventualmente trabalhar, sendo importante para resolução de diversos problemas.

Exemplos:

1) Sejam $\{a_n, b_n\}$ e $\{c_n, d_n\}$ dois pares de Cauchy. Podemos dizer que $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$ se e somente se para todo n, $a_n \leqslant d_n$ e $c_n \leqslant b_n$.

Demonstração: $\Rightarrow$ Se $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$, então $\{a_n, b_n\}$ não é nem estritamente menor nem estritamente maior do que $\{c_n, d_n\}$. Logo para todo n, $a_n \leqslant d_n$ e $c_n \leqslant b_n$.
$\Leftarrow$ Se para todo n, $a_n \leqslant d_n$ e $c_n \leqslant b_n$, então $\{a_n, b_n\}$ não é nem estritamente maior nem estritamente menor do que $\{c_n, d_n\}$. Logo $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$.

□

2) Sejam r e s números racionais e $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy que determina r e $\{c_n, d_n\}$ um par de Cauchy que determina s. Então podemos mostrar que $\{a_n + c_n, b_n + d_n\}$ é um par de Cauchy que determina $r + s$.

Demonstração:

Hipótese: $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy, então a_n crescente, b_n decrescente, $a_n \leqslant b_n$ e dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, para $n \geqslant n_0$, $b_n - a_n < \dfrac{\epsilon}{2}$;

$a_n \leqslant r \leqslant b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$\{c_n, d_n\}$ um par de Cauchy, então c_n crescente, d_n decrescente, $c_n \leqslant d_n$ e dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, para $n \geqslant n_0$, $d_n - c_n < \dfrac{\epsilon}{2}$;

$c_n \leqslant s \leqslant d_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$
Tese:
$\{a_n + c_n, b_n + d_n\}$ é um par de Cauchy que determina $r + s$;
I) $a_n + c_n$ crescente e $b_n + d_n$ decrescente;
II) $a_n \leqslant b_n$, $c_n \leqslant d_n \Rightarrow a_n + c_n \leqslant b_n + d_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
III) Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geqslant n_0$ e tomando $b_n - a_n < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $d_n - c_n < \dfrac{\epsilon}{2}$ $b_n + d_n - (a_n + c_n) = b_n - a_n + d_n - c_n < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. logo $\{a_n + c_n, b_n + d_n\}$ é um par de Cauchy.

Temos também que $a_n \leqslant r \leqslant b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $c_n \leqslant s \leqslant d_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $a_n + c_n \leqslant r + s \leqslant b_n + d_n$. Assim $\{a_n + c_n, b_n + d_n\}$ determina $r + s$.

$\square$

3) Sejam r e s números racionais e $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy que determina r e $\{c_n, d_n\}$ um par de Cauchy que determina s. Supondo que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ e $c_n > 0$. Podemos mostrar que $\{a_n c_n, b_n d_n\}$ é um par de Cauchy que determina $r.s$ e $\{\dfrac{1}{b_n}, \dfrac{1}{a_n}\}$ é um par de cauchy que determina $\dfrac{1}{r}$.

Demonstração:
Hipótese: $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy, então a_n crescente, b_n decrescente, $a_n \leqslant b_n$, $a_n > 0$, $b_n > 0$ e dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, para $n \geqslant n_0$, $b_n - a_n < \epsilon$;
$a_n \leqslant r \leqslant b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$
$\{c_n, d_n\}$ um par de Cauchy, então c_n crescente, d_n decrescente, $c_n \leqslant d_n$, $c_n > 0$, $d_n > 0$ e dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, para $n \geqslant n_0$, $d_n - c_n < \epsilon$;
$c_n \leqslant s \leqslant d_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$
Tese: $\{a_n c_n, b_n d_n\}$ é um par de Cauchy que determina $r.s$ e $\{\dfrac{1}{b_n}, \dfrac{1}{a_n}\}$ é um par de cauchy que determina $\dfrac{1}{r}$;
Provaremos que $\{a_n c_n, b_n d_n\}$ é um par de Cauchy que determina $r.s$:
I) a_n crescente, c_n crescente, como $a_n > 0$ e $c_n > 0$, $a_n c_n$ é crescente;

b_n crescente, d_n crescente, como $b_n > 0$ e $d_n > 0$, $b_n d_n$ é decrescente;

II) $a_n \leqslant b_n$, $c_n \leqslant d_n \Rightarrow a_n.c_n \leqslant b_n.d_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $a_n > 0$ e $c_n > 0$;

III) Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geqslant n_0$ e tomando $b_n - a_n < \dfrac{\epsilon}{2d_0}$ e $d_n - c_n < \dfrac{\epsilon}{2b_0}$

$b_n d_n - a_n c_n = b_n d_n + a_n d_n - a_n d_n - a_n c_n =$

$d_n.(b_n - a_n) + a_n.(d_n - c_n) < d_0(b_n - a_n) + b_0(d_n - c_n) < \ d_0.\dfrac{\in}{2d_0} + b_0.\dfrac{\in}{2b_0} = \epsilon.$ logo

$\{a_n c_n, b_n d_n\}$ é um par de Cauchy.

Temos também que $a_n \leqslant r \leqslant b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $c_n \leqslant s \leqslant d_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, como $a_n > 0$ e $c_n > 0$, logo $a_n c_n \leqslant r.s \leqslant b_n d_n$. Assim $\{a_n c_n, b_n d_n\}$ determina $r.s$.

Provaremos que $\{\dfrac{1}{b_n}, \dfrac{1}{a_n}\}$ é um par de cauchy que determina $\dfrac{1}{r}$:

I) a_n crescente, $\dfrac{1}{a_n}$ decrescente;

b_n decrescente, $\dfrac{1}{b_n}$ crescente;

II) $a_n \leqslant b_n$, $a_n > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} \geqslant \dfrac{1}{b_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

III) Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geqslant n_0$, $b_n - a_n < \epsilon$;

tomando $b_n - a_n < a_0^2. \in$ e sabendo que $a_n \geqslant a_0$, $b_n \geqslant b_0$, $a_n \leqslant b_0$, $b_n \geqslant a_0$, teremos

$\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{b_n - a_n}{b_n a_n} \leqslant \dfrac{b_n - a_n}{a_0^2} < \dfrac{a_0^2.\epsilon}{a_0^2} = \epsilon.$ logo $\{\dfrac{1}{b_n}, \dfrac{1}{a_n}\}$ é um par de cauchy é um par de Cauchy.

Temos também que $a_n \leqslant r \leqslant b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, como $a_n > 0$. Assim $\dfrac{1}{b_n} \leqslant \dfrac{1}{r} \leqslant \dfrac{1}{a_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo $\{\dfrac{1}{b_n}, \dfrac{1}{a_n}\}$ determina $\dfrac{1}{r}$. $\square$

4) Seja m um número natural e $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy. Considere as sequências $a_n^{'}$ e $b_n^{'}$ definidas do seguinte modo:

$b_n^{'} = b_m$ e $a_n^{'} = a_m$ para $n \leqslant m$

$b_n^{'} = b_n$ e $a_n^{'} = a_n$ para $n > m$

Mostraremos que $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ é um par de Cauchy equivalente a $\{a_n, b_n\}$.

Demonstração:

Hipótese: $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy, logo:

a_n crescente, b_n decrescente, $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $b_n - a_n < \epsilon$;

Tese:

$\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ é um par de Cauchy equivalente a $\{a_n, b_n\}$;

Mostraremos primeiro que $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ é um par de Cauchy.

para $n \leqslant m$:

$b_n^{'} = b_m$ e $a_n^{'} = a_m$

I) $a_n^{'} = a_m$, pela definição de crescimento $a_j \leqslant a_{j+1}$, $a_n^{'}$ é constante, logo crescente;

$b_n^{'} = b_m$, pela definição de decrescimento $b_j \geqslant b_{j+1}$, $b_n^{'}$ é constante, logo decrescente;

II) $a_m \leqslant b_m$ para todo $m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n^{'} \leqslant b_n^{'}$;

III) Dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$, $m \geqslant m_0$, $b_m - a_m < \epsilon \Rightarrow b_n^{'} - a_n^{'} < \epsilon$.

para $n > m$:

$b_n^{'} = b_n$ e $a_n^{'} = a_n$

I) $a_n^{'} = a_n$ crescente, $b_n^{'} = b_n$ decrescente;

II) $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n^{'} \leqslant b_n^{'}$;

III) Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $b_n - a_n < \epsilon \Rightarrow b_n^{'} - a_n^{'} < \epsilon$.

Portanto $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ é um par de Cauchy.

Para $n > m$, $b_n^{'} = b_n$ e $a_n^{'} = a_n$ e para para $n \leqslant m$, $b_n^{'} = b_m$ e $a_n^{'} = a_m$. Assim $\{a_n, b_n\}$ não é nem estritamente menor nem estritamente maior que $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$. Portanto $\{a_n, b_n\}$ $\sim \{a_n^{'}, b_n^{'}\}$.

$\square$

3.5 Adição de pares de Cauchy

Dados dois pares de Cauchy $\alpha = \{a_n, b_n\}$ e $\beta = \{c_n, d_n\}$, já vimos que podemos formar o par de Cauchy $\{a_n + c_n, b_n + d_n\}$, que chamaremos de soma dos pares de Cauchy α e β e escreveremos:

$\{a_n, b_n\} + \{c_n, d_n\} = \{a_n + c_n, b_n + d_n\}$

Exemplo:

Sejam os pares de Cauchy $\{2+\dfrac{-1}{n+1}, 2+\dfrac{1}{n+1}\}$, determina o número 2 e $\{3+\dfrac{-1}{n+1}, 3+\dfrac{1}{n+1}\}$, determina o número 3. A soma destes pares de Cauchy é $\{5+\dfrac{-2}{n+1}, 5+\dfrac{2}{n+1}\}$, determina o número 5.

Indicaremos como Ô o par de Cauchy $\{e_n, f_n\}$ tal que $e_n = f_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Já vimos que dado o par de cauchy $\alpha = \{a_n, b_n\}$, podemos formar o par de Cauchy $-\alpha = \{-b_n, -a_n\}$, que é chamado de simétrico de α.

Podemos verificar, aplicando as condições e a adição dos pares de Cauchy que são válidas as propriedades abaixo, onde as letras gregas indicam pares de Cauchy:

1) $\alpha \sim \alpha^{'}$ e $\beta \sim \beta^{'} \Rightarrow \alpha + \beta \sim \alpha^{'} + \beta^{'}$;

2) $\alpha \sim \alpha^{'} \Rightarrow -\alpha \sim -\alpha^{'}$;

3) $\alpha + \hat{O} \sim \alpha$;

4) $\alpha + \beta \sim \beta + \alpha$;

5) $(\alpha + \beta) + \gamma \sim \alpha + (\beta + \gamma)$;

6) $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Demonstrado a propriedade 1)

Demonstração: Sendo $\{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$ e $\{e_n, f_n\} \sim \{g_n, h_n\} \Rightarrow$
$\{a_n + e_n, b_n + f_n\} \sim \{c_n + g_n, d_n + h_n\}$
Hipóteses:
$a_n \leqslant b_n$, $c_n \leqslant d_n$, $e_n \leqslant f_n$, $g_n \leqslant h_n$;
$b_n \geqslant c_n$, $d_n \geqslant a_n$, $f_n \geqslant g_n$, $h_n \geqslant e_n$;
Desse modo: $b_n + f_n \geqslant c_n + g_n$ e $d_n + h_n \geqslant a_n + e_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\{a_n + e_n, b_n + f_n\}$ não é nem estritamente maior nem estritamente menor que $\{c_n + g_n, d_n + h_n\}$. Logo $\{a_n + e_n, b_n + f_n\} \sim \{c_n + g_n, d_n + h_n\}$. □

3.6 Multiplicação de pares de Cauchy

Sabemos que quando $\{a_n, b_n\}$ e $\{c_n, d_n\}$ são pares de Cauchy tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$ e $c_n > 0$, então $\{a_n c_n, b_n d_n\}$ também é um par de Cauchy. Quando $\{a_n, b_n\}$ determinar o número racional r e $\{c_n, d_n\}$ determinar o número racional s, então já mostramos que $\{a_n c_n, b_n d_n\}$ determina $r.s$.

Definição 3.6.1. *Se $\alpha = \{a_n, b_n\}$ e $\beta = \{c_n, d_n\}$ são pares de Cauchy tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ e $c_n > 0$ então chamamos de produto de α por β o par de Cauchy $\{a_n c_n, b_n d_n\}$. Assim temos:*

$\{a_n, b_n\}\ x\ \{c_n, d_n\} = \{a_n c_n, b_n d_n\}$

Exemplos:

Seja $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy estritamente maior que o par de Cauchy $\hat{O}$. então existe um par de Cauchy $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ tal que $\{a_n, b_n\} \sim \{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ e $a_n^{'} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução:

Como $\{a_n, b_n\} > \hat{O}$, então existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} > 0$. Assim para todo $n \geqslant n_0$ teremos $a_n > 0$.

Vamos considerar as sequências $a_n^{'}$ e $b_n^{'}$, vistas anteriormente:

$b_n^{'} = b_{n_0}$ e $a_n^{'} = a_{n_0}$ para $n \leqslant n_0$

$b_n^{'} = b_n$ e $a_n^{'} = a_n$ para $n > n_0$

Já foi verificado em exemplo anterior que $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ é um par de Cauchy. Podemos ver também que $\{a_n^{'}, b_n^{'}\} \sim \{a_n, b_n\}$ e tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n^{'} > 0$.

Sabemos que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $a_{n_0} \leqslant b_{n_0}$. Desse modo, considerando as condições das sequências $a_n^{'}$ e $b_n^{'}$, teremos $b_n^{'} \geqslant a_n^{'} = a_n$ e $b_n \geqslant a_n = a_n^{'}$, assim $\{a_n, b_n\}$ não é nem estritamente maior nem estritamente menor que $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ e se por hipótese $a_{n_0} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0 \Rightarrow a_n^{'} > 0$.

È interessante escolhermos, no exemplo acima, o índice n_0 de tal modo que a_{n_0} seja o primeiro termo maior do que zero na sequência a_n (isto é, $a_{n_0} > 0$ e $a_j \leqslant 0$ para $j < n_0$). Dessa forma dizemos que $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ é um par de Cauchy associado a $\{a_n, b_n\}$.

Definição 3.6.2. *Sejam $\{a_n, b_n\}$, $\{c_n, d_n\}$ pares de Cauchy estritamente maiores do que $\hat{O}$. seja $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ o par associado a $\{a_n, b_n\}$ e $\{c_n^{'}, d_n^{'}\}$ o par associado a $\{c_n, d_n\}$ (sabemos que $a_n^{'} > 0$ e $c_n^{'} > 0$ para todo n e $\{a_n, b_n\} \sim \{a_n^{'}, b_n^{'}\}$, $\{c_n, d_n\} \sim \{c_n^{'}, d_n^{'}\}$)assim, temos a seguinte definição:*

$\{a_n, b_n\}$ *x* $\{c_n, d_n\} = \{a_n^{'} c_n^{'}, b_n^{'} d_n^{'}\}$

São válidas as propriedades abaixo para multiplicação de pares de Cauchy, onde as letras gregas indicam pares de Cauchy estritamente maiores que Ô.

1) α x $\beta \sim \beta$ x α;

2) $(\alpha$ x $\beta)$ x $\gamma \sim \alpha$ x $(\beta$ x $\gamma)$;

3) $\alpha \sim \alpha^{'}$, $\beta \sim \beta^{'} \Rightarrow \alpha$ x $\beta \sim \alpha^{'}$ x $\beta^{'}$;

4) Seja $\hat{1}$ o par de Cauchy $\{e_n, f_n\}$ tal que $e_n = f_n = 1$ para todo n. Sendo α um par de Cauchy estritamente positivo , então α x $\hat{1} \sim \alpha$;

5) Sendo $\alpha = \{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy tal que $a_n > 0$ para todo n, considerando o par de Cauchy $\alpha^{-1} = \{\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n}\}$. Temos que α x $\alpha^{-1} \sim 1$. O par α^{-1} é o inverso de α.

6) Sejam α e β dois pares de Cauchy estritamente maiores do que Ô e seja $\alpha^{'}$ e $\beta^{'}$ os seus respectivos associados. Então:

$\alpha \sim \beta \Rightarrow (\alpha^{'})^{-1} \sim (\beta^{'})^{-1}$

A relação acima diz que se dois pares de Cauchy estritamente maiores do que Ô são equivalentes, então os inversos de seus respectivos associados são equivalentes.

Demonstrando a propriedade 6)

Demonstração:

Hipótese:

Seja $\alpha = \{a_n, b_n\}$ e $\beta = \{c_n, d_n\}$, pares de Cauchy estritamente maiores do que Ô, ou seja, $a_{n_0} > 0$ e $c_{n_0} > 0$, para todo $n \geqslant n_0$, $a_n > 0$ e $c_n > 0$;

Como c $\sim \beta \Rightarrow \{a_n, b_n\} \sim \{c_n, d_n\}$. Assim $b_n \geqslant c_n$ e $d_n \geqslant a_n$;

Temos $\alpha^{'}$ e $\beta^{'}$ pares de Cauchy associados a α e β, respectivamente. Assim $\alpha \sim \alpha^{'}$ e $\beta \sim \beta^{'}$, logo $\{a_n, b_n\} \sim \{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ e $\{c_n, d_n\} \sim \{c_n^{'}, d_n^{'}\}$ e $a_n^{'} > 0$ e $c_n^{'} > 0$, temos ainda
$b_n \geqslant a_n^{'}$ e $b_n^{'} \geqslant a_n$.
Tese:
$(\alpha^{'})^{-1} \sim (\beta^{'})^{-1} \Rightarrow \{\frac{1}{b_n^{'}}, \frac{1}{a_n^{'}}\} \sim \{\frac{1}{d_n^{'}}, \frac{1}{c_n^{'}}\}$
Utilizando as hipóteses acima $\{a_n^{'}, b_n^{'}\} \sim \{c_n^{'}, d_n^{'}\}$ e temos $a_n^{'} > 0$ e $c_n^{'} > 0$. Desse modo $b_n^{'} \geqslant c_n^{'}$ e $d_n^{'} \geqslant a_n^{'}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo
$\frac{1}{a_n^{'}} \geqslant \frac{1}{d_n^{'}}$ e $\frac{1}{c_n^{'}} \geqslant \frac{1}{b_n^{'}}$. Portanto:

$\{\frac{1}{b_n^{'}}, \frac{1}{a_n^{'}}\} \sim \{\frac{1}{d_n^{'}}, \frac{1}{c_n^{'}}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3.7 Números reais

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e sabendo que $\mathbb{Q}$ x $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos pares ordenados de números racionais, isto é: $\mathbb{Q}$ x $\mathbb{Q} = \{(a, b) | a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$. As funções f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ x $\mathbb{Q}$ formam um conjunto que chamaremos de A. Um elemento de A é uma função f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ x $\mathbb{Q}$ que pode ser pensada como um par de sequências de números racionais $\{a_n, b_n\}$. Em particular um par de Cauchy pertence a A, ou seja, os pares de Cauchy formam um subconjunto de A. Seja $\triangle$ o conjunto dos pares de Cauchy e dessa forma $\triangle \subset$ A.

Dado um par de Cauchy α, colecionando num conjunto α^* todos os pares de Cauchy equivalentes a α. Isto é,

$\alpha^* = \{\alpha^{'} \in \triangle \mid \alpha^{'} \sim \alpha\}$

Dizemos que α^* é um número real determinado pelo par de Cauchy α. O par de Cauchy α é então chamado representante do número real α^*.

Dois pares de Cauchy equivalentes determinam o mesmo número real (muito importante), ou seja:

Proposição 3.7.1. $\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha^* = \beta^*$.

Demonstração: Sabemos que α^* e β^* são subconjuntos de $\triangle$, provaremos que $\alpha^* = \beta^*$, assim temos que provar que $\alpha^* \subset \beta^*$ e $\beta^* \subset \alpha^*$;
Pela definição temos:
$\alpha^* = \{\alpha^{'} \in \triangle \mid \alpha^{'} \sim \alpha\}$
$\beta^* = \{\beta^{'} \in \triangle \mid \beta^{'} \sim \beta\}$
por hipótese $\alpha \sim \beta$. Assim $\beta \sim \alpha^*$, pois $\beta \sim \alpha$. Dado $\beta^{'} \in \beta^*$, temos por definição $\beta^{'} \sim \beta$ e como $\beta \sim \alpha$, temos $\beta^{'} \sim \alpha$, isto é $\beta^{'} \in \alpha^*$. Portanto todo elemento de β^* é

também elemento de α^*, ou seja $\beta^* \subset \alpha^*$. Do mesmo modo $\alpha \sim \beta^*$, pois $\alpha \sim \beta$. Dado $\alpha' \in \alpha^*$, temos por definição $\alpha' \sim \alpha$ e como $\alpha \sim \beta$, temos $\alpha' \sim \beta$, isto é $\alpha' \in \beta^*$. Portanto todo elemento de α^* é também elemento de β^*, ou seja $\alpha^* \subset \beta^*$. Assim comprovamos que
$\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha^* = \beta^*$ □

Definição 3.7.1. *Sejam α^* e β^* dois números reais. Dizemos que α^* é estritamente maior do que β^* e escrevemos $\alpha^* > \beta^*$ se para todo $\alpha' \in \alpha^*$ e todo $\beta' \in \beta^*$ acontece isto: $\alpha' > \beta'$, o par de Cauchy α' é estritamente maior que o par de Cauchy β'.*

Proposição 3.7.2. *Dados dois números reais α^* e β^* então acontece um e somente um dos casos abaixo:*
I) $\alpha^* = \beta^*$
II) $\alpha^* > \beta^*$
III) $\alpha^* < \beta^*$

3. 7. 1 Adição de números reais

Sejam α^* e β^* números reais. Seja $\alpha' \in \alpha^*$ um representante de α^* e $\beta' \in \beta^*$ um representante de β^*, como α' e β' são pares de Cauhy, então podemos formar o par de Cauchy $\alpha' + \beta'$ e depois tomarmos o número real determinado por $\alpha' + \beta'$. Assim:

Definição 3.7.2. $c = (\alpha' + \beta')^*$

Obs: A adição de dois números reais está bem definida, pois se em lugar de $\alpha' \in \alpha^*$, tivéssemos tomado $\alpha'' \in \alpha^*$ e em lugar de $\beta'' \in \beta^*$, tivéssemos tomado $\beta'' \in \beta^*$, teríamos $\alpha'' + \beta''$. E, $(\alpha' + \beta')^* \sim \alpha'' + \beta''$ conforme propriedade anterior, determinando o mesmo número real. Assim temos:
$(\alpha' + \beta')^* = (\alpha'' + \beta'')^*$

É muito oportuno passarmos dos pares de Cauchy aos números reais, pois deste modo conseguimos substituir a relação de $\sim$ entre os pares de Cauchy pela relação de igualdade entre os números reais. Isso acontece devido ao fato de pares de Cauchy diferentes, sendo equivalentes determinam o mesmo número real conforme vimos em exemplos anteriores.

Proposição 3.7.3. *Sejam α^*, β^*, e γ^* números reais. Então*
$\alpha^* > \beta^* \Rightarrow \alpha^* + \gamma^* > \beta^* + \gamma^*$

Definição 3.7.3. *Sendo r um racional e considerando o par de Cauchy $\hat{r} = \{a_n, b_n\}$ tal que para todo n natural, $a_n = b_n = r$. O número real determinado pelo par de Cauchy $\hat{r}$ será escrito r^*.*

Proposição 3.7.4. *Dado o número real α^*, a equação $\alpha^* + x^* = 0$ tem uma única solução. Esta solução é indicada com a notação $(-\alpha^*)$. Isto é, $\alpha^* + (-\alpha^*) = 0^*$.*

Mostraremos que a equação $\alpha^* + x^* = 0$, tem no máximo uma solução.

Demonstração:
Supondo, por absurdo, que x_1^* e x_2^* fossem dois números reais diferentes, tais que
$\alpha^* + x_1^* = 0^*$
$\alpha^* + x_2^* = 0^*$
Sabendo que $x_1^* \neq x_2^*$, em virtude da proposição 2 podemos admitir que $x_1^* > x_2^*$. Mas, a proposição 3, nos diz que
$x_1^* \neq x_2^* \Rightarrow x_1^* + \alpha^* > x_2^* + \alpha^*$
e assim $\alpha^* + x_1^* = 0^*$, então $0^* > x_2^* + \alpha^*$, ou seja, x_2^* não é solução da equação dada. Portanto a equação acima tem no máximo uma solução. □

Podemos verificar que, se $\{a_n, b_n\}$ é um par de Cauchy representante de α^*, então o par de Cauchy $\{-b_n, -a_n\}$ tem a seguinte propriedade:

$\{a_n, b_n\} + \{-b_n, -a_n\} \sim 0^*$

Chamamos de $-\alpha^*$ o número real determinado pelo par de cauchy $\{-b_n, -a_n\}$, assim

$\alpha^* + (-\alpha^*) = 0^*$

A adição de números reais tem propriedades semelhantes as da adição de números racionais. Logo, sendo α^*, β^*, e γ^*, números reais, são válidas as seguintes propriedades:

I) $\alpha^* + \beta^* = \beta^* + \alpha^*$

II) $(\alpha^* + \beta^*) + \gamma^* = \alpha^* + (\beta^* + \gamma^*)$

III) $\alpha^* + 0^* = \alpha^*$

IV) Para todo α^* real existe um número real - α^* tal que

α^* + (- α^*)= 0^*

3. 7. 2 Multiplicação de números reais

No estudo dos pares de Cauchy, tratamos da multiplicação de dois pares de Cauchy estritamente maiores de que Ô. Aproveitando esses resultados, veremos a multiplicação de números reais.

Definição 3.7.4. *Sejam α^* e β^* dois números reais estritamente maiores do que 0*. Sejam $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy representante de α^* e $\{c_n, d_n\}$ um par de Cauchy representante de β^*. Assim, esse pares de Cauchy são estritamentes maiores do que Ô. Podemos considerar o produto desses dois pares de Cauchy $\{a_n, b_n\}.\{c_n, d_n\}$ que chamamos de γ^*. Então, por definição α^* . $\beta^* = \gamma^*$.*

Obs: Supondo que $\{a_n, b_n\}$ e $\{a_n', b_n'\}$ sejam dois pares de Cauchy equivalentes que determinam o número real estritamente maior do que 0^*, ou seja, α^*. Sejam $\{c_n, dn\}$ e $\{c_n', d_n'\}$ sejam dois pares de Cauchy equivalentes que determinam o número real estritamente maior do que 0^*, ou seja, β^*. Portanto, já vimos que $\{a_n, b_n\}.\{c_n, dn\} \sim \{a_n', b_n'\}.\{c_n', d_n'\}$. Assim, temos

$(\{a_n, b_n\}.\{c_n, dn\})^* = (\{a_n^{'}, b_n^{'}\}.\{c_n^{'}, d_n^{'}\})^*$

Isso mostra que quando α^* e β^* são dois números reais estritamente maiores do que 0^*, então o produto $\alpha^*.\beta^*$ definido acima, está bem definido e não depende de como escolhemos um representante para α^* e outro representante para β^* a fim de, a partir deles, determinarmos $\alpha^*.\beta^*$.

Trataremos dos casos em que ao menos um dos fatores não é um número real estritamente maior do que 0^*.

Definição 3.7.5. *Seja α^* um número real qualquer. Então $\alpha^*.0^* = 0^*$*

Obs: Suponhamos que α^* seja um número real estritamente menor do que 0^*. Então, α^* é um número real estritamente maior do que 0^*.

Definição 3.7.6. *Sejam α^* e β^* dois números reais tais que α^* é estritamente menor do que 0^* e β^* estritamente maior do que 0^*. Então:*

$\alpha^*.\ \beta^* = ((-\ \alpha^*).\beta^*)$

Definição 3.7.7. *α^* e β^* dois números reais estritamente menores do que 0^*. Então:*

$\alpha^*.\ \beta^* = (-\ \alpha^*).(\ -\ \beta^*)$

Obs: Desse modo, com as quatro definições acima, o produto de dois números reais fica definido em todos os casos possíveis.

A multiplicação de números reais tem propriedades semelhantes às da multiplicação de números racionais:

1) $\alpha^*\ .\ \beta^* = \beta^*\ .\ \alpha^*$;

2) $(\alpha^*\ .\ \beta^*)\ .\ \gamma^* = \alpha^*\ .\ (\beta^*\ .\ \gamma^*)$;

3) $\alpha^*\ .\ (\beta^* + \gamma^*) = \alpha^*\ .\ \mathrm{c} + \alpha^*\ .\ \gamma^*$;

4) $\alpha^*.\ 0^* = 0^*$;

5) $\alpha^*.\ 1^* = \alpha^*$;

7) Se $\alpha^* < \beta^*$ e $\gamma^* > 0^* \Rightarrow \alpha^*\ .\ \gamma^* < \beta^*.\ \gamma^*$;

8) Se α^* e β^* são números reais e $\alpha^* \neq 0^*$, então existe um único número real γ^* tal que

$\alpha^*\ .\ \gamma^* = \beta^*$

Esse número real γ^* é indicado pela notação $\gamma^* = \dfrac{\beta^*}{\alpha^*}$.

As propriedades de adição e multiplicação vistas, com os seus axiomas mostram que o conjunto dos números reais é um corpo. Além de ser corpo, é ordenado pois valem o axioma do fechamento para soma, produto e vale a tricotomia.

3. 7. 3 Os números reais e os números racionais

Proposição 3.7.5. *Sejam α^* um número real e d um número racional positivo. Então existem números racionais r e s tais que $r < s$, $s - r < d$ e $r^* < \alpha^* < s^*$. Essa proposição pode ser enunciada desse modo: dado um número real α^* e um número racional $d > 0$, sempre existem números racionais r e s cuja distância α^* é menor do que d, tais que r^* $< \alpha^* < s^*$.*

Demonstração: Dado o número real α^*, seja $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ um par de Cauchy representante de α^*. Podemos conseguir um outro par de Cauchy $\{a_n, b_n\}$ equivalente a $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$, de forma que a_n seja estritamente crescente e b_n seja estritamente decrescente. Como $\{a_n, b_n\}$ é um par de Cauchy, dado o número racional $d > 0$ existe n_0 tal que para $n \geqslant n_0$, acontece $b_n - a_n < d$. Em particular, $b_{n_0} - a_{n_0} < d$. Tomando $r = a_{n_0}$ e $s = b_{n_0}$. Então $r < s$, $s - r < d$, e $r < \{a_n, b_n\} < s$, então
$r^* < \alpha^* < s^*$ □

Obs: Na proposição acima, se tivermos $\alpha^* > 0^*$, então conseguimos um número racional $0 < r^* < \alpha^*$.

Exercícios:

1) Mostre que não existe nenhum número racional h tal que $h^2 = 3$.

Demonstração: Supondo que exista um racional, este deve ser da forma $\dfrac{m}{n}$, fração irredutível, e consideremos $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Dessa forma $(\dfrac{m}{n})^2 = 3$, logo $m^2 = 3n^2$. Portanto m^2 contém o fator primo 3. Isso só é possível se m também possuir esse fator. Podemos então escrever $m = 3k$, onde k é um inteiro. Então $(3k)^2 = 3.n^2 \Rightarrow n^2 = 3.k^2$, ou seja n^2 também tem o fator primo 3. Isso só é possível se n também possuir o fator primo 3. Assim tanto m como n possuem o fator primo 3 na sua fatoração. Mas, isso é uma contradição, pois, m e n não possuem fator comum. Portanto não existe nenhum número racional h tal que $h^2 = 3$. □

2) Sejam α^* e β^* dois números reais tais que $\alpha^* < \beta^*$. Podemos mostrar que existe um número racional q tal que $\alpha^* < q^* < \beta^*$.

Demonstração: Dado o número real α^*, seja $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ um par de Cauchy representante de α^* e dado o número real β^*, seja $\{c_n^{'}, d_n^{'}\}$ um par de Cauchy representante de β^*. Podemos ter um outro par de Cauchy $\{a_n, b_n\}$ equivalente a $\{a_n^{'}, b_n^{'}\}$ e um outro par de Cauchy $\{c_n, d_n\}$ equivalente a $\{c_n^{'}, d_n^{'}\}$, tal que a_n e c_n sejam estritamente crescente e b_n e d_n sejam estritamente decrescente. Como $\alpha^* < \beta^* \Rightarrow \{a_n, b_n\} < \{c_n, d_n\} \Rightarrow b_{n_0} < c_{n_0}$, ou seja, $c_{n_0} - b_{n_0} > 0$. Assim, existe n_0 tal que para $n \geqslant n_0 \Rightarrow c_n - b_n > 0$. Tomando q $= \dfrac{b_n + c_n}{2}$, teremos

$b_n < \dfrac{b_n + c_n}{2} < c_n \Rightarrow b_n < q < c_n$, q é racional, pois b_n e c_n são racionais , logo $\alpha^* < q^*$ $< \beta^*$. $\square$

Considerando a função φ: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ que a cada número racional r associa o número real r^*. Podemos ver que para todo a, $b \in \mathbb{Q}$, valem as propriedades:

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, ou seja $(a+b)^* = a^* + b^*$;

2) $\varphi(a.b)= \varphi(a).\varphi(b)$, ou seja $(a.b)^* = a^*.b^*$;

3) Se $a < b$ então $\varphi(a) < \varphi(b)$, ou seja, $a < b \Rightarrow a^* < b^*$;

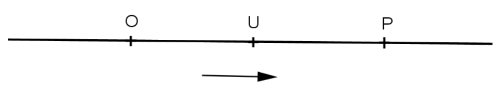
4) Considerando a imagem $\mathbb{Q}^*$ em $\mathbb{R}$ do conjunto $\mathbb{Q}$ através da função φ.

$\mathbb{Q}^* = \varphi(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$

O conjunto $\mathbb{Q}^*$ é uma cópia do conjunto $\mathbb{Q}$, pois em $\mathbb{Q}^*$ operamos com os elementos de $\mathbb{Q}^*$ da mesma maneira como operamos com os elementos de $\mathbb{Q}$. Podemos tratar os elementos de $\mathbb{Q}^*$ como se fossem números racionais. É por isso que podemos dizer que os números racionais $\mathbb{Q}$ formam um subconjunto dos números reais.

3. 7. 4 Interpretação geométrica dos números reais

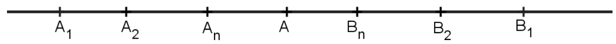
Observando a reta abaixo, em que marcamos sobre a mesma dois pontos distintos O, U, escolhendo como sentido positivo de percurso da reta, o que vai de O para U:



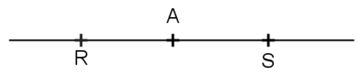
A partir daí, dado um número racional p qualquer, marcando na reta acima o ponto P de tal forma que a medida algébrica do segmento OP feita com a unidade OU seja expressa pelo número p. Se $p > 0$, o ponto P está à direita de O, e se $p < 0$, o ponto P está à esquerda de O. Dessa forma a cada número racional p podemos associar um ponto P, bem determinado, da reta. Chamando de Õ o conjunto de todos os pontos da reta que são correspondentes aos números racionais, então temos a seguinte situação: existem pontos na reta que não pertencem a Õ, ou seja, existem na reta acima, pontos I que não são correspondentes de nenhum número racional, pois o segmento OI não pode ser medido algebricamente com o segmento OU de maneira que a medida seja um número racional.

Dado um número real α^*, supondo que $\{a_n, b_n\}$ seja um par de Cauchy representante de α^*. Sabe - se que os termos a_n e b_n são números racionais. Vamos então, para cada $n \in \mathbb{N}$, achar os pontos A_n e B_n correspondentes a a_n e b_n, respectivamente. Existe na reta um único ponto A tal que para todo n, A pertence ao segmento de extremidades A_n e B_n.

É natural associarmos o número real α ao ponto A acima descrito. Assim, cada ponto da reta é correspondente de um único número real e ca da número real pode ser representado na reta através de um único ponto.



A proposição 3.7.5 significa geometricamente que perto de cada ponto A que representa o número real α^* é sempre possível encontrar pontos R e S tais que A pertence ao segmento de extremos R e S, e R e S são pontos correspondentes a números racionais:



Proposição 3.7.6. *Sejam α^* um número real e $\{r_n, s_n\}$ um par de Cauchy que determina o número real ρ^*. Suponhamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^* < s_n^*$, então $\alpha^* \leqslant \rho^*$.*

Demonstração: Seja $\{a_n, b_n\}$ um par de Cauchy representante do número real α^*.
Queremos mostrar que $\{a_n, b_n\}$ não é estritamente maior do que $\{r_n, s_n\}$.
Se $n \in \mathbb{N}$ fosse estritamente maior do que $\{r_n, s_n\}$, então existiria um número natural n_0 tal que
$s_{n_0} < a_{n_0}$ (I)
Seja $\{e_n, f_n\}$ o par de Cauchy tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $e_n = f_n = s_{n_0}$. Então, em virtude de (I), teríamos:
$\{e_n, f_n\} < \{a_n, b_n\}$ (II)
Mas $\{e_n, f_n\}$ determina o número $s_{n_0}^*$ e $\{a_n, b_n\}$ determina o número real α^*. Logo, por (II) temos:
$s_{n_0}^* < \alpha^*$
isso contrária a hipótese de ser $\alpha^* < s_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 3.7.7. *Sejam α_n^*, β_n^* duas sequências de números reais tais que:*

1) α_n^* é crescente e β_n^* é decrescente;

2) $\alpha_n^* \leqslant \beta_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

3) Dado qualquer número real positivo ϵ, existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$

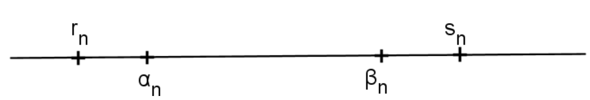
β_n^* - $\alpha_n^* < \epsilon$

Então existe um único número real ρ^* tal que

$\alpha_n^* \leqslant \rho^* \leqslant \beta_n^*$ *para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Obs: O par de Cauchy $\{a_n, b_n\}$, onde a_n e b_n são números racionais, nem sempre existe um número racional r tal que $a_n \leqslant r \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Na proposição acima estamos considerando pares de Cauchy $\{\alpha_n^*, \beta_n^*\}$, onde α_n^* e β_n^* são números reais. Está proposição afirma que neste caso sempre existe um número real ρ^* tal que $\alpha_n^* \leqslant \rho^* \leqslant \beta_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Vamos apresentar um número real ρ^* que tem a seguinte propriedade: $\alpha_n^* \leqslant \rho^* \leqslant \beta_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Para termos ρ^* basta apresentar um par de Cauchy $\{r_n, s_n\}$, representante de ρ^*. O par de Cauchy $\{r_n, s_n\}$ é construído definindo as sequências r_n, s_n, por indução, do seguinte modo:
Para $n = 0$, tomamos como r_0 um número racional menor do que α_0^* e tal que α_0^* - $r_0 <$ 1;
Suponhamos que já foram definidos os termos r_n para $n = 0, 1, 2 \ldots p$, de maneira que r_0 $< r_1 < r_2 < \ldots < r_p$,
$r_n < \alpha_n^*$ e α_n^* - $r_n < \dfrac{1}{n+1}$, para $n = 0, \ldots p$.
Definindo o termo seguinte, r_{p+1}:
Como $\alpha^* \leqslant \alpha_{p+1}^*$ e $r_p < \alpha_p^*$, podemos tomar um número racional r_{p+1} tal que
$r_p < r_{p+1} < \alpha_{p+1}^*$
α_{p+1}^* - $r_{p+1} < \dfrac{1}{p+2}$
Assim está completamente definida a sequência r_n e revendo as suas propriedades:
I) r_n é crescente;
II) $r_n < \alpha_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
III) α_n^* - $r_n < \dfrac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
De modo parecido podemos definir a sequência s_n de modo que:
I) s_n é crescente;
II) $\beta_n^* < s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
III) s_n - $\beta_n^* < \dfrac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;



Sabendo que $\{r_n, s_n\}$ é um par de Cauchy. Então $r_n \leqslant s_n$ para todo n, pois $r_n < \alpha_n \leqslant \beta_n < s_n$. Sabemos pela definição que r_n é crescente e s_n é crescente.
Verificaremos a 3ª condição da definição de um par de Cauchy. Mostraremos que dado qualquer número racional $d > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$,
$s_n - r_n < d$
Assim, dado $d > 0$, conseguimos um n_1 natural tal que para $n \geqslant n_1$
β_n^* - $\alpha_n^* < \dfrac{d}{3}$
Tomando $n_0 > n_1$ tal que

$$\frac{1}{n_0+1} < \frac{d}{3}$$

Para $n \geqslant n_0$, teremos $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{d}{3}$. Assim, observamos que

$s_n - r_n = s_n - \beta_n^* + \beta_n^* - \alpha_n^* + \alpha_n^* - r_n$

Portanto

$s_n - r_n = (s_n - \beta_n^*) + (\beta_n^* - \alpha_n^*) + (\alpha_n^* - r_n)$

assim para $n \geqslant n_0$, temos

$$s_n - r_n < \frac{d}{3} + \frac{d}{3} + \frac{d}{3} = d$$

O par de Cauchy $\{r_n, s_n\}$ determina o número real ρ^*.

Dados dois números naturais p e q, quaisquer,

$\alpha_p^* < s_q^*$, e sabendo que, $\alpha_p^* \leqslant \rho^*$, para todo número p. De modo análogo $\rho^* \leqslant \beta_p^*$, para todo $p \in \mathbb{N}$. □

3. 7. 5 Supremo e ínfimo

Definição 3.7.8. *Seja A um conjunto não vazio de números reais. Dizemos que A é limitado superiormente se existe algum número real M tal que para todo $a \in A$, $a \leqslant M$.*

Definição 3.7.9. *Seja A um conjunto não vazio de números reais e limitado superiormente. Dizemos que o número real s é o supremo de A se estão satisfeitas as seguintes condições:*

I) $a \leqslant s$, para todo $a \in A$;

II) Se r é um número real tal que $a \leqslant r$ para todo $a \in A$, então $s \leqslant r$.

Obs: A segunda condição acima na definição de supremo diz que entre todos os números reais que são maiores que $a \in A$, o número real s é o menor.

Exemplo:

Seja $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. O supremo de A é 2, pois, pela própria definição de A:

$a < 2$, para todo $a \in A$

Supondo que o número real r seja tal que a $\leqslant r$, para todo $a \in A$. Vamos mostrar que $2 \leqslant r$. De fato, em caso contrário teríamos $r < 2$. Ora, o número x $= \dfrac{r+2}{2}$ é maior do que r e menor do que 2. Portanto r não satisfaz a condição de ser maior ou igual a qualquer elemento de A. Logo o supremo de A é 2.

Definição 3.7.10. *Seja a um conjunto não vazio de números reais e limitado inferiormente. Dizemos que o número real m é o máximo de A se estão satisfeitas as seguintes condições:*

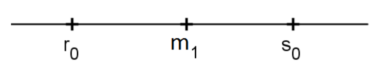
I) $m \in A$;

II) $a \leqslant m$, para todo $a \in A$;

Obs: Se um conjunto A tem máximo m, então m é também o supremo de A. O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ tem supremo igual a 2, mas não tem máximo, pois 2 não pertence a A.

Proposição 3.7.8. *Seja A um conjunto de números reais não vazio e limitado superiormente. Então existe um número real σ tal que σ é o supremo de A.*

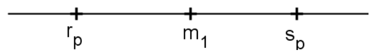
Demonstração: Se o conjunto A tem um máximo m, então este é o supremo de A.
Se o conjunto A não tem máximo, então provaremos que existe o supremo:
Construindo duas sequências de números reais r_n e s_n de modo que
1) r_n é crescente e s_n é decrescente;
2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $r_n < s_n$;
3) Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant n_0$, $s_n - r_n < \epsilon$;
4) para cada $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant s_n$, para todo $a \in A$;
5) para cada $n \in \mathbb{N}$, existem elementos de $a \in A$ tais que
$r_n < a < s_n$
Vamos definir as sequências c:
Como A não é vazio e limitado superiormente, podemos considerar dois números reais, r_0 e s_0 tais que
$r_0 \in A$ (pois $A \neq \varnothing$)
$a < s_0$, para todo $a \in A$ (pois A é limitado superiormente)
considerando o número real $m_1 = \dfrac{r_0 + s_0}{2}$



Dois casos são possíveis (visto A não ter máximo, por hipótese)
1) $a < m_1$, para todo $a \in A$;
2) existe $a \in A$ tal que $m_1 < a$.
No primeiro caso tomamos:
$r_1 = r_0$ e $s_1 = m_1$
No segundo caso tomamos:
$r_1 = m_1$ e $s_1 = s_0$
Supondo que já foram escolhidos os números reais r_n e s_n para $n = 0, \ldots, p$ de tal maneira que
1) $r_n \leqslant r_{n+1} < s_{n+1} \leqslant s_n$ para $n = 0, \ldots, p$ (I)
2) $a < s_n$ para todo $a \in A$, $n = 0, \ldots, p$
3) Para cada $n = 0, \ldots, p$, existe $a \in A$ tal que
$r_n < a < s_n$

4) $s_n - r_n = \dfrac{s_0 - r_0}{2^n}$

Vamos então dizer como tomar os termos seguinte r_{p+1} e s_{p+1}:



Consideremos o número real $m_{p+1} = \dfrac{s_p + r_p}{2}$. Então (pela hipótese de A não ter máximo) são possíveis dois casos:

1) $a < m_{p+1}$, para todo $a \in A$;

2) existem $a \in A$ tais que $m_{p+1} < a$

No primeiro caso definimos

$r_{p+1} = r_p$ e $s_{p+1} = m_{p+1}$

No segundo caso definimos,

$r_{p+1} = m_{p+1}$ e $s_{p+1} = s_p$

As sequências $r_n e s_n$ satisfazem as 5 propriedades enunciadas no início desta demonstração. Em particular as três primeiras propriedades implicam, pela proposição vista anteriormente, que as sequências r_n e s_n determinam um número real σ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$r_n < \sigma < s_n$

Vamos mostrar que σ é o supremo de A:

1) $a \leqslant \sigma$, para todo $a \in A$

De fato, supondo que isso não fosse verdade, então existiria um elemento $x \in A$ tal que $\sigma < x$.

Como $x - \sigma > 0$, podemos encontrar um número natural n_0 tal que $s_{n_0} - r_{n_0} < \epsilon$, isto é, s_{n_0} - $r_{n_0} < x - \sigma$. Mas isso é um absurdo pois $r_{n_0} < \sigma$ e $x < s_{n_0}$;

Observe que s_{n_0} - $r_{n_0} < x - \sigma \Leftrightarrow \sigma$ - $r_{n_0} < x - s_{n_0}$. Como $r_{n_0} < \sigma$, então σ - $r_{n_0} > 0$. Como $x < s_{n_0}$, então $x - s_{n_0} < 0$. Um número negativo não pode ser maior que um positivo. Então está mostrado que para todo $a \in A$:

$a \leqslant \sigma$

2) Se ρ é um número real tal que $a \leqslant \rho$, para todo $a \in A$, então $\sigma \leqslant \rho$. Qualquer número real menor do que ρ é superado por algum elemento de A.

De fato, dado $\delta > 0$, consideremos o número real σ - δ. Podemos achar um número natural n_0 tal que s_{n_0} - $r_{n_0} < \delta$. Como $\sigma < s_{n_0}$, temos σ - $r_{n_0} < \delta$. Portanto como $r_{n_0} < \sigma$, temos σ - $\delta < r_{n_0} < \sigma$. Como existem elementos a $\in A$ tais que $r_{n_0} < a < s_{n_0}$, concluímos que existem números $a \in A$ tais que

σ - $\delta < a$

Então σ - δ não é maior ou igual a qualquer elemento de A. Como $\delta > 0$ é arbitrário, concluímos que se $\rho \geqslant a$, para todo $a \in A$, então $\delta \geqslant \sigma$. Isto é, σ é o supremo de A. $\square$

Definição 3.7.11. *Um subconjunto não vazio de números reais, B, é limitado inferiormente se existe um número real m tal que $m \leqslant b$, para todo $b \in B$.*

Definição 3.7.12. *Seja B um subconjunto não vazio limitado inferiormente de números reais. O número real f é o ínfimo de b se as condições abaixo são satisfeitas:*

1) $f \leqslant b$, para todo $b \in B$;

2) Se $g \leqslant b$,para todo $b \in B$, então $g \leqslant f$.

Proposição 3.7.9. *Seja $B \subset R$ um subconjunto não vazio de números reais e limitado inferiormente. Então existe um número real f tal que f é o ínfimo de B.*

Exemplo 1:

Considerando dois conjuntos, os quais serão denotados por A_1 e c, ambos contidos em um corpo K ordenado. Sendo $A_1 = \{x \in K; 0 < x < 1\}$ e $A_2 = \{x \in K; 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Podemos observar que o conjunto A_1 tem cota superior que é o 1, porém qualquer $b \geqslant 1$ também é cota superior de A_1. Verifica-se que 1 é a menor das cotas superiores de A_1, portanto é o seu supremo.

O conjunto A_2 tem as mesmas cotas superiores de A_1. Observa-se que 1 é a menor cota superior de A_2, ou seja, é o supremo de A_2. Note que o supremo de A_2 pertence ao conjunto A_2, mas o supremo de A_1 não pertence ao conjunto A_1. logo se um conjunto tem supremo, ele pode ou não ser elemento do conjunto considerado.

Se $X = \varnothing$, então todo $b \in K$ é cota superior de X. Como não existe um menor elemento num corpo K ordenado, segue-se que o conjunto vazio não possui supremo, o mesmo aplica-se ao ínfimo.

Voltando aos conjuntos $A_1 = \{x \in K; 0 < x < 1\}$ e $A_2 = \{x \in K; 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, subconjuntos de um corpo ordenado K, percebe-se que 0 é ínfimo dos dois conjuntos, e, de forma análoga ao supremo, o ínfimo não necessariamente tem de ser elemento do conjunto.

Podemos generalizar o fato da existência de supremo e ínfimo que sejam elementos de um mesmo conjunto, da seguinte forma: Se $X \subset K$ possuir um elemento máximo, então este é o supremo, se X possuir um elemento mínimo, este será o ínfimo. Reciprocamente, se o supremo de X pertencer ao conjunto X, então é o maior elemento de X e, se ínfimo de X pertencer a X, esse será o menor elemento de X. No caso do conjunto $A_2 = \{x \in K; 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, 1 é o maior elemento do conjunto e 0 é o menor elemento do conjunto. Já o conjunto $A_1 = \{x \in K; 0 < x < 1\}$ apesar de ter cota superior e inferior, não tem o menor nem o maior elemento.

Exemplo 2:

Considerando o conjunto $Y \subset Q$ das frações do tipo $\dfrac{1}{2^n}$, com $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$Y = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{2^n}\}$. O ínfimo do conjunto Y é 0 e o supremo $\frac{1}{2}$.

Demonstrando, temos que $\frac{1}{2} \in Y$ e, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$, para todo $n > 1$. Logo, $\frac{1}{2}$ é o maior elemento de Y, ou é cota superior de Y, é a menor das cotas superiores, logo supremo de Y.

Por outro lado, $0 < \frac{1}{2^n}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, 0 é cota inferior de Y . Provaremos ainda que nenhum número racional $m > 0$ é cota inferior de Y. Para esta demonstração, sendo Q um corpo ordenado, Arquimediano, dado $m > 0$, pode-se obter $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > \frac{1}{m} - 1 \Rightarrow 1 + n > \frac{1}{m}$. Utilizando a desigualdade de Bernoulli temos:

$2^n = (1+1)^n \geqslant 1 + n > \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < m$. assim, nenhum $m > 0$ é cota inferior de Y, assim, ínfimo de Y é igual a 0. Esse elemento não pertence ao conjunto Y, logo não existe o menor elemento deste conjunto.

Os conceitos matemáticos de supremo e ínfimo, não são citados no ensino fundamental e médio, mas estão presentes nas atividades envolvendo intervalos, logo a observação de um conjunto possuir maior ou menor elemento deve ser trabalhada no ensino fundamental e médio, deixando os questionamentos e as validades destes, relacionados à percepção, maturidade e vivência do educando.

Exemplo 3:

Vamos verificar se o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \geqslant 0 e x^2 < 2\}$, admite supremo e ínfimo no corpo ordenado dos números racionais. Neste conjunto $A \subset (-2, 2)$. Vamos supor que o conjunto A possui um supremo e essa demonstração será elencada provando as afirmações que se seguem:

1) mostrar que a^2 não é menor que dois, ou seja, $a^2 \geqslant 2$;

2) mostrar que a^2 não é maior que dois, ou seja, $a^2 \leqslant 2$;

Demonstrando a afirmação 1:

Demonstração:

Se n é natural $(n \geqslant 1)$, temos $\frac{1}{n} \leqslant 1$. Assim $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$, mas como n é arbitrariamente grande, e considerando $n > 1$. Consequentemente $\frac{1}{n} < 1$ e $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$.

A fim de continuar a demonstração, vamos desenvolver o seguinte produto notável: $(a + \frac{1}{n})^2$, temos $(a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + 2a.\frac{1}{n} + (\frac{1}{n})^2 \Rightarrow a^2 + 2a.\frac{1}{n} + (\frac{1}{n})^2 < a^2 + 2a.\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n}$. fazendo $a^2 + \frac{2a+1}{n} < 2$, encontraremos um n que satisfaça essa condição.

Existindo este n, continuaremos a demonstração. Como $a^2 + \dfrac{2a+1}{n} < 2 \Rightarrow \dfrac{2a+1}{n} <$ $2 - a^2 \Rightarrow 2a + 1 < n.(2 - a^2) \Rightarrow n > \dfrac{2a+1}{2-a^2}$, pelo princípio arquimediano. Para todo n que satisfaça a condição $n > \dfrac{2a+1}{2-a^2}$, temos $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{2-a^2}{2a+1}$, então $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2-a^2}{2a+1} \Rightarrow$ $\dfrac{1}{n}.(2a+1) < 2 - a^2 \Rightarrow \dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n} < 2 - a^2$. Se $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n} < 2 - a^2 \Rightarrow$ $\dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2} < 2 - a^2$. somando a^2, a ambos os membros, temos
$a^2 + \dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2} < 2 - a^2 + a^2 \Rightarrow (a + \dfrac{1}{n})^2 < 2$, desse modo, verificamos que a^2 não pode ser menor que dois, pois a é o supremo do conjunto A, significando que não pode existir outro elemento maior do que ele, pertencente ao mesmo conjunto, cujo quadrado é menor do que dois. Já foi visto que, se o supremo pertence ao conjunto, então ele é o máximo do conjunto. assim $a^2 \geqslant 2$. □

Demonstrando a afirmação 2:

Demonstração: Com n natural e arbitrariamente grande, temos:
se n $> 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n} < 1$. Sabendo que $(a - \dfrac{1}{n})^2 = a^2 - 2a.\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ e

$a^2 - 2a.\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} > a^2 - 2a.\dfrac{1}{n}$. fazendo $a^2 - 2a.\dfrac{1}{n} > 2$, o objetivo é encontrar um n que satisfaça está condição, assim
$a^2 - 2a.\dfrac{1}{n} > 2 \Rightarrow -2a.\dfrac{1}{n} > 2 - a^2 \Rightarrow \dfrac{2a}{n} < a^2 - 2 \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{a^2-2}{2a}$. Pelo princípio Arquimediano, temos:
$0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{a^2-2}{2a}$, logo existe um n, tal que $n > \dfrac{2a}{a^2-2}$. Desenvolvendo esta inequação, teremos $\dfrac{2a}{n} < a^2 - 2 \Rightarrow \dfrac{2a}{n} + 2 < a^2 \Rightarrow 2 < a^2 - \dfrac{2a}{n} < a^2 - \dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2} = (a - \dfrac{1}{n})^2$. assim, podemos obter $(a - \dfrac{1}{n}) < a$, e como $(a - \dfrac{1}{n})^2 > 2$. De fato, a^2 não pode ser maior que dois, pois a igual ao supremo de A, e, como foi demonstrado, existe um valor menor que a, cujo quadrado é maior que dois, então $a^2 \leqslant 2$.
Se a^2 não pode ser menor que dois e não pode ser maior que dois, então a^2 tem que ser igual a dois. Mas, já vimos que não existe número racional a, tal que a^2. Logo, o conjunto $A = \{$x $\in \mathbb{Q}$; $x \geqslant 0$ e $x^2 < 2\}$ não tem supremo. □

De acordo com as demonstrações anteriores, se existir um corpo ordenado no qual todo conjunto não vazio, limitado superiormente, possua supremo, nesse corpo existirá um elemento $a > 0$, cujo quadrado é dois.

3. 7. 6 Corpo ordenado completo

Um corpo ordenado K é dito completo, se todo subconjunto não vazio $X \subset K$, limitado superiormente, possui supremo em K, da mesma forma, se um subconjunto $Y \subset K$ for limitado inferiormente, tem que possuir ínfimo. Podemos concluir que todo corpo ordenado completo é arquimediano.

3. 7. 6 O Corpo ordenado completo dos números reais

A partir de agora, definiremos os Números Reais como corpo ordenado completo e, assim, todas as propriedades de corpos ordenados completos são válidas em $\mathbb{R}$.

Na abordagem atual das licenciaturas, os números reais são definidos axiomaticamente e, uma vez estabelecidos, prova-se que existem reais que não são racionais (Moreira e David, 2005, p.82).

O número real positivo a, em que $a^2 = 2$ é um número real. Simbolizamos esse número por $\sqrt{2}$. Será que podemos pensar na existência de mais algum número real positivo que, elevado ao quadrado seja 2? a resposta é não, pois se existirem dois números reais, a e b, ambos positivos, cujo quadrado seja 2, então $a^2 = b^2 = 2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a - b).(a + b) = 0$. Logo, temos $a - b = 0$ ou $a + b = 0$. Assim teremos, $a = b$ ou $a = -b$. O segundo caso é uma contradição, pois a e b são positivos. Desse modo $a = b$.

Assim só existe um número positivo cujo quadrado é 2. Já sabemos que o número $\sqrt{2}$, não é racional, porém é real. Desta forma, os elementos de $\mathbb{R}$ que não são elementos de $\mathbb{Q}$, serão denominados de números irracionais. O conjunto $\mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números irracionais.

Os irracionais são números reais porque são supremos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios e limitados superiormente de um corpo ordenado completo, porém outra forma de definição é que a partir de resultados de sequências numéricas, como vimos, e de séries numéricas, prova-se que todo número real admite uma representação decimal infinita e, no caso dos irracionais, uma representação infinita não-periódica. Voltaremos a tratar desse tópico no capítulo seguinte.

Capítulo 4

Apresentação dos Números Reais para o Ensino Médio

Vimos que os números racionais estão muito distante de constituírem um campo numérico matematicamente satisfatório, pois existiram problemas que ficariam sem solução. Mas a importância prática e teórica das frações e das expansões decimais mostra que seria um absurdo abrir mão deles. Desta forma temos a intenção de identificar um conjunto, no qual são determinados os números racionais e os números irracionais. Além disso, discutiremos nesse tópico, corpos ordenados completos e a identificação de números reais, com o desejo de aproximar tanto o professor do ensino fundamental como do ensino médio, quanto ao licenciando em matemática, do formalismo conceitual desses números e, ao mesmo tempo, contribuindo para uma melhor identificação desses elementos na prática docente em salas de aulas.

4.1 Números decimais e frações decimais

Buscando uma generalização para o estudo dos decimais, pretendemos nessa discussão, conseguir algumas formas de conceber tais números, melhorando a possibilidade de encontrar formas grais de identificá-los.

Frações decimais são frações cujo denominador é 10, ou uma potência de 10. Desse modo as frações $\frac{3}{10}, \frac{42}{10.000}, -\frac{157}{1.000}$ são exemplos de frações decimais.

Existem frações que são denominadas parcialmente decimais, pois seus denominadores podem ser transformados em potências de 10, por meio da equivalência. As frações $\frac{3}{5}, \frac{7}{8}$, por exemplo, podem ser escritas equivalentemente como frações com denominadores iguais a um potência de 10: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ e $\frac{7}{8} = \frac{875}{1.000}$.

4. 1. 1 Representação decimal

A representação decimal de um número α não negativo é uma expressão que se caracteriza pela forma $\alpha = a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$, em que a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e os índices $a_1a_2a_3 \ldots$ são dígitos, ou seja, são números inteiros $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ e as reticências indicam que essa representação pode continuar a depender do número.

Com relação as frações decimais, sua representação decimal é finita, logo $\dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10} = 0,6$ e $\dfrac{7}{8} = \dfrac{875}{1.000} = 0{,}875$.

Todas as frações equivalentes às frações decimais têm denominadores que podem ser escritos como potências de 2 ou 5, ou 2 e 5. Caso exista algum denominador que apresente pelo menos um fator diferente de 2 e 5, então a fração não pode ser equivalentemente escrita a uma fração decimal.

Podemos representar um número racional na reta numérica, considerando aqueles que se originam pela subdivisão de cada intervalo unitário em 10, na sequência em 100, 1000 e daí por diante. Divisão em segmentos iguais.

Os pontos assim obtidos destas subdivisões correspondem a frações decimais. Um exemplo disso é o número $0{,}145 = \dfrac{1}{10} + \dfrac{4}{100} + \dfrac{5}{1000}$. Esse ponto, está localizado no primeiro intervalo de comprimento unitário, no segundo subintervalo de comprimento 10^{-1}, no terceiro subintervalo de comprimento 10^{-2}, no quarto subintervalo de comprimento 10^{-3}. Deste modo, podemos escrever o ponto $0{,}145 = 3x10^{-1} + 4x10^{-2} + 5x10^{-3}$. essa forma de escrever chamamos de forma polinômica.

Caso a fração tenha n dígitos na parte decimal, então a fração será representada do seguinte modo $f = z + a_1.10^{-1} + a_2.10^{-2} + a_3.10^{-3} + \ldots + a_n.10^{-n}$, onde z é um inteiro e os a_n são dígitos de 0, 1, 2, 3,. . . ,9, os quais representam os décimos, centésimos, milésimos e assim por diante (Courant e Robbins, 2000, p.70)

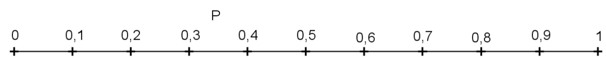
A forma abreviada de representar o número f é $z, a_1a_2a_3 \ldots a_n$. Veja o exemplo do número 4,789, em que por comparação temos: $z = 4$, $a_1 = 7$, $a_2 = 8$, $a_3 = 9$, cuja forma polinômica é $f = 4 + 7.10^{-1} + 8.10^{-2} + 9.10^{-3}$. Podemos perceber que as frações decimais podem ser escritas como frações comuns.

Considere a fração $\dfrac{p}{q}$, sendo $q = 10^n$, se p e q tem divisores comuns, pode-se reduzir a fração dada a uma fração comum com um denominador sendo algum divisor da potência 10^n. Nenhuma fração irredutível pode ser escrita na forma de fração decimal, se o denominador não é o divisor de uma potência de 10.

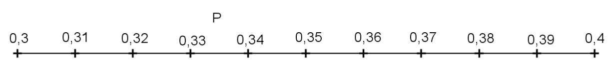
Observando a fração $\dfrac{1}{3}$. Essa fração não pode ser escrita na forma de fração decimal com uma quantidade n finita de casas decimais, pois, segundo Courant e Robbins (2000), por maior que seja o valor de n escolhido, a igualdade $\dfrac{1}{3} = \dfrac{b}{10^n} \Rightarrow 3b = 10^n$, que é um absurdo, pois 3 não é um fator de qualquer potência de 10. Como será a representação decimal desse número?

Vamos para reta numérica e escolhemos um ponto P qualquer que não corresponda a nenhuma fração decimal. Escolhendo um ponto P qualquer, com uma quantidade finita de n dígitos e utilizando o processo da divisão em subintervalos de 10, ou seja, em 10 partes iguais, P não vai ocorrer como ponto inicial de um subintervalo, mas P ainda pode ser incluído em intervalos que se tornam cada vez menores, em relação à divisão decimal, em qualquer grau de aproximação que se deseja.

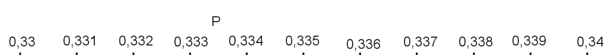
Supondo que o ponto P esteja situado no primeiro intervalo unitário.ao se subdividir esse intervalo em dez partes iguais, cada um com o comprimento de 10^{-1}, verificamos que P, está contido, no quarto intervalo. Observe abaixo:



Nesse momento, o ponto P está situado, entre 0,3 e 0,4. Dando sequência, subdividimos o intervalo 0,3 e 0,4 em 10 partes iguais, cada uma com comprimento de 10^{-2}, nesse caso, consideremos que P está situado, no quarto intervalo, entre 0,33 e 0,34. Observe abaixo:



Subdividindo novamente, verificamos que, o ponto P está situado no quarto intervalo de comprimento 10^{-3}, logo P, está entre 0,333 e 0,334. Observe abaixo:



Continuando esse raciocínio indefinidamente, podemos chegar a uma sequência sem fim de dígitos $a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$,, satisfazendo a propriedade que se segue:

Qualquer que seja o número n escolhido, o ponto P está incluído no intervalo I_n cujo ponto inicial é a fração decimal $0, a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n\ldots$,. O ponto terminal é $0, a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n(a_n+1)\ldots$, com o comprimento de I_n sendo 10^{-n}.

Se a escolha for sucessivamente $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, pode-se observar que cada um destes intervalos $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, \ldots$, está contido naquele que o precedeu, enquanto seus comprimentos $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \ldots$, tendem a zero (Courant e Robbins, 2000, p. 71). Assim, podemos dizer que um ponto P está contido em uma sequência de intervalos encaixados.

Assim o ponto $P = \dfrac{1}{3}$, então os dígitos $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ serão todos iguais a 3. Portanto,

P estará contido em um intervalo encaixado que vai de 0,33333...33 até 0,33333...34, ou seja, $0{,}33333\ldots 33 < \dfrac{1}{3} < 0{,}33333\ldots 34$, para qualquer quantidade de dígitos arbitrariamente grande. aforma de expressar essa característica, é dizer que o número 0,3333333...33, tende a $\dfrac{1}{3}$, à medida que a quantidade n de dígitos aumenta. Logo, escreve-se $\dfrac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$, indicando que a fração decimal deve continuar indefinidamente, assim, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \dfrac{3}{10^3} + \dfrac{3}{10^4} + \ldots$.

Veremos como fica a representação de $\sqrt{2}$. Analisando a solução da equação $x^2 = 2$, já sabemos que o resultado é o ponto irracional $\sqrt{2}$. Podemos conduzir este ponto, a uma fração decimal indefinidamente continuada, mas, segundo Courant e Robbins (2000, p.72), a lei que determina os valores dos dígitos na sequência não é óbvia. Afirmamos que não existe explicitamente uma forma que determine os dígitos sucessivos deste ponto,porém é possível calcular quantos dígitos desejarmos.

Voltando a equação $x^2 = 2$, verificamos que 2 está entre x^2 e $(x+1)^2$, ou seja, $x^2 < 2 < (x+1)^2$, o número $x+1$ é a raiz quadrada de 2 a menos de uma unidade, por excesso. Se $x = 1$, então, a solução da equação $x^2 = 2$ satisfaz $1 < x < 2$.Seguindo o desenvolvimento acima, temos aproximações racionais para solução da equação $x^2 = 2$, que se encontram entre 1 e 2. Vimos essas aproximações quando estudamos as sequências dos pares de Cauchy.

A raiz quadrada de 2 a menos de um décimo por falta é o maior número inteiro de décimos, cujo quadrado é menor que 2. Isso é equivalente a dizer que $(\dfrac{x}{10})^2 < 2 < (\dfrac{x+1}{10})^2$, sendo o número $(\dfrac{x+1}{10})^2$ a raiz quadrada de 2 por excesso, a menos de um décimo.

Para demarcarmos o ponto $\sqrt{2}$, dividimos o intervalo entre 1 e 2, em 10 partes iguais, conforme a figura abaixo:

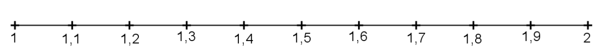


Figura 4.1: Rede de graduação decimal

Verificamos que $1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$ e $(1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$. Notamos que 1,4 é a raiz quadrada de 2, a menos de um décimo por falta e 1,5 é a raiz quadrada de 2, a menos de um décimo por excesso. Logo $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Na sequência, obtemos a solução aproximada a menos de um centésimo, por falta e por excesso, assim basta dividir o intervalo entre 1,4 e 1,5 em dez partes iguais:

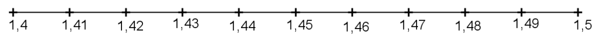


Figura 4.2: Rede de graduação centesimal

Portanto $(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0264$. o valor 1,41 é a raiz quadrada de 2 a menos de um centésimo por falta e 1,42 é a raiz quadrada de 2 a menos de um centésimo por excesso. Seguindo o mesmo raciocínio, tem-se $(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$; $(1,4142)^2 < 2 < (1,4153)^2$ e assim por diante. As classe de soluções da equação $x^2 = 2$, por falta e por excesso, constituídas por decimais infinitos: $A =$ 1; 1,4; 1,41; 1,0414; 1,4142,... e $B =$ 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143,....

De modo geral, afirma-se que um ponto P que não está representado por qualquer fração decimal com um número n, finito de dígitos, é representado por uma fração decimal infinita, $z, a_1a_2a_3\ldots$, se para cada valor de n, o ponto P se situar em um intervalo cujo comprimento é 10^{-n}, o seu ponto inicial será indicado por $z, a_1a_2a_3\ldots a_n$.

É muito importante observar que existe uma correspondência estabelecida entre todos os pontos da reta numérica e todas as frações decimais finitas ou infinitas de modo a definir que um número é um decimal finito ou infinito (Courant e Robbins, 2000, p.72).

Os decimais infinitos que não representam números racionais são os números irracionais. essas considerações eram aceitas como satisfatórias para o sistema dos números racionais e dos irracionais, até meados do século XIX, sendo conhecidas como contínuo numérico.Um reexame crítico de princípios e de consolidação de resultados, levaram os matemáticos a perceberem que o conceito de número irracional exigia uma análise mais precisa, no entanto o desenvolvimento do sistema numérico permitiu um grande avanço da matemática desde o século XVII, e, em particular, da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial e Integral.

Como conclusão, temos que a representação decimal de um número irracional tem que ser infinita e não periódica, pois só os números racionais têm representação finita ou infinita e periódica.

De acordo com os cálculos feitos acima, no que diz respeito de um número ter representação decimal infinita periódica e infinita não periódica, é muito oportuno e importante que o discente no seu aprendizado, façam e manipulem com essas representações a fim de que não permaneçam dúvidas no tocante a representação dos números racionais e irracionais.

4.2 Dízimas periódicas

Transformando frações ordinárias em frações decimais infinitas damos origem as dízimas periódicas.

Veremos a representação decimal e periódica do número 1. Ilustrando o desenvolvimento das dízimas periódicas, considere o fato de que numa divisão de um número por ele mesmo, cujo resultado é 1, se exigência de que o resto é sempre menor que o divisor fosse substituída por um modo diferente da opinião tradicional, em que o resto[1]seria igual ao divisor, como por exemplo, na divisão de 3 por 3. Veja abaixo:

$$\begin{array}{c|l} 3{,}0 & 3 \\ \cline{2-2} 3 & 0{,}9999\ldots \\ 3 & \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

$3 : 3 = 0{,}999\ldots$, como $3 : 3 = 1$, então $0{,}999\ldots = 1$. Utilizando a série geométrica, podemos escrever o número $0{,}999\ldots$ como a soma infinita

$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \ldots = \frac{9}{10}(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots) = \frac{9}{10}(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}) = 1$. Assim, $0{,}999\ldots = 1$.

Se o conceito de números decimais não estivesse bem discutido, ao pensar na representação decimal de um número, poderia causar dúvida ao pensar que a decimal finita 0,34 e a decimal infinita $0{,}33999\ldots$ representa o mesmo número.

Pode-se dizer que um número decimal finito pode ser escrito na forma infinita, bastando, considerar a dízima periódica $0{,}999\ldots$. Podemos dizer que o número $0{,}44999\ldots$ é o mesmo que

$\frac{4}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+... = \frac{4}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{9}{10^3}(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+...) = \frac{4}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{9}{10^3}(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}) =$
$\frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{9}{10^3}(\frac{10}{9}) = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^2} = \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} = 0,34$

De forma generalizada, um número racional inteiro ou decimal finito, pode ser escrito na forma de uma dízima periódica, representando o período desta dízima por 9, chamamos de 9-terminante.

Os números racionais $\frac{p}{q}$ que não são frações decimais finitas podem ser desenvolvidos como frações decimais infinitas, realizando o algoritmo da divisão. Em cada etapa, existe

[1]Em cada etapa da divisão, o resto considerado é o divisor, dividido por 10, isto é, o resto de 3 dividido por 3, na questão acima, não é 3, e sim três décimos.

a necessidade de haver um resto não nulo, pois caso contrário, a fração decimal seria finita.

$$\begin{array}{l|l} p & q \\ \hline r_i & c, a_1a_2a_3a_4a_5 \ldots a_k\overline{b_1b_2b_3 \ldots b_j} \end{array}$$

Os restos r_i que surgem no processo da divisão serão 1, 2, 3,..., $q-1$ (inteiros), de tal forma que haja no máximo $q-1$ possibilidades diferentes para valores dos restos, significando que algum resto r aparecerá uma segunda vez,fazendo com que todos os restos subsequente repitam novamente, mostrando que a expressão decimal para qualquer número racional é periódica.

O traço em cima dos dígitos $b_1 \ldots b_j$ indica que esse conjunto repete infinitamente, determinando, assim, o período da dízima.

Exemplos:

$\dfrac{1}{3} = 0,3333\ldots$

$\dfrac{11}{90} = 0,1222222\ldots$

Apontaremos agora, algumas situações para uma melhor percepção do desenvolvimento das dízimas periódicas, aproximando do formalismo conceitual e abordando novas considerações.

Considerando p e q números primos entre si e seja $p < q$. Logo

$\dfrac{p}{q} = 0, a_1a_2a_3a_4 \ldots a_k\overline{b_1b_2b_3 \ldots b_j}$.

Multiplicando membro a membro por 10^k, teremos a seguinte igualdade:

$$10^k.\frac{p}{q} = a_1a_2a_3a_4 \ldots a_k, \overline{b_1b_2b_3 \ldots b_j} \Leftrightarrow 10^k.\frac{p}{q} = a_1a_2a_3a_4 \ldots a_k + 0, \overline{b_1b_2b_3 \ldots b_j}.$$

O número $0, \overline{b_1b_2b_3 \ldots b_j}$ é:

$$0, \overline{b_1b_2b_3 \ldots b_j} = \frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^j} + \frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^{2j}} + \frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^{3j}} + ... = \frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^j}.(1 + \frac{1}{10^j} + \frac{1}{10^{2j}} + ...) =$$

$$\frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^j}.(\frac{1}{1-\frac{1}{10^j}}) = \frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^j}.(\frac{10^j}{10^j-1}) = \frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^j-1}.$$

Assim, temos

$$10^k.\frac{p}{q} = a_1a_2a_3a_4...a_k + 0, \overline{b_1b_2b_3...b_j} = a_1a_2a_3a_4...a_k + \frac{b_1b_2...b_j}{10^j-1}.$$

Multiplicando membro a membro por $10^j - 1$, temos:

$(10^j-1).10^k.\dfrac{p}{q} = (10^j-1)(a_1a_2a_3a_4...a_k) + b_1b_2...b_j.$

Multiplicando membro a membro por q, temos:

$(10^j-1).10^k.p = q.[(10^j-1)(a_1a_2a_3a_4...a_k) + b_1b_2\dots b_j],$

Logo, q é divisor de $(10^j-1).10^k$. Se q for uma potência de 2 ou 5 ou de 2 e 5, então q é divisor de 10^k, e assim, o decimal é exato, ou seja, não tem parte infinita periódica. Mas se q não for múltiplo somente de 2 e 5, encontra-se então, a parte periódica, pois q será divisor de (10^j-1).

Exemplo:

A representação decimal da fração $\dfrac{1}{6}$. Sabemos que 6 é múltiplo de 2 e 3, logo escrevemos que 2.3 é divisor de $(10^j-1).10^k$, para $j=1$ e para $k=1$. Analisando as condições de j e k, podemos afirmar que a representação decimal da dízima terá um elemento decimal que não repete indefinidamente e um elemento decimal que faz parte do período da dízima. Assim, ao dividirmos o numerador da fração pelo denominador, encontramos a representação decimal de $\dfrac{1}{6} = 0{,}1666\dots$. Outras situações acompanham o mesmo raciocínio.

A fração que dá origem a dízima é denominada fração geratriz (Iezzi, 2007, p.12). Dada a dízima periódica $0,\overline{b_1b_2b_3\dots b_j}$, essa dízima é considerada simples, pois o período inicia-se imediatamente após a vírgula. Considerando m, sendo a geratriz desta dízima. A forma geral de encontrar m é dada por $m = \dfrac{b_1b_2\dots b_j}{10^j-1}$, logo, se o período tiver 4 termos, $j=4$, o denominador da dízima será $10^4-1=9999$. Isso explica o fato da dízima periódica simples apresentar noves em seu denominador.

Aplicando o conceito anterior, encontraremos a geratriz da dízima $0{,}343434\dots$. Temos que o período é 34 e que $j=2$, pois j corresponde a quantidade de algarismo do período, assim

$$\frac{34}{10^2-1} = \frac{34}{100-1} = \frac{34}{99}.$$

Quando, logo após a vírgula, uma parte, sendo um ou um grupo de algarismos não se repete, ou seja, não pertence ao período, temos as dízimas periódicas compostas, fazendo, como o próprio nome diz uma composição entre a parte não periódica e a parte periódica do número. Essas dízimas de forma geral, são representadas por $0,a_1a_2a_3a_4\dots a_k\overline{b_1b_2b_3\dots b_j}$.

Considerando n, a geratriz da dízima composta $0,a_1a_2a_3a_4...a_k\overline{b_1b_2b_3\dots b_j}$; a forma geral de escrever n é dada por

$$n = \frac{[(10^j-1).(a_1a_2a_3a_4...a_k) + b_1b_2\dots b_j]}{(10^j-1).10^k}.$$

A dízima $0{,}17777\dots$ tem como geratriz:

$n = \dfrac{[(10^1-1).1)+7]}{(10^1-1).10^1} = \dfrac{9.1+7}{9.10} = \dfrac{16}{90} = \dfrac{8}{45}.$

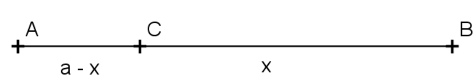
Com as expressões acima, não temos a intenção de substituir a ideia das séries geométricas para encontrar as frações geratrizes, mas resolver situações que ocorrem em sala de aula de matemática. O professor é que decidirá qual a melhor forma de trabalhar com o aluno.

4.3 O número de ouro

Mostramos anteriormente que não existe um número racional r tal que $r^2 = 2$. Agora veremos que não existe número racional r tal que $r^2 = 5$. Suponhamos que existam números inteiros positivos p e q tais que $(\frac{p}{q})^2 = 5$. Supondo p e q são primos entre si.

Então $p^2 = 5q^2$, ou seja 5 divide p^2. Desse modo, como 5 é primo, 5 divide p. Então $p = 5k$. Logo $(5k)^2 = 5q^2 \Rightarrow 25k^2 = 5q^2 \Rightarrow q^2 = 5k^2$. Assim, que 5 divide q^2 e usando o mesmo argumento anterior 5 divide q. Contradição, pois q e p não são primos entre si, logo não existe número racional r, tal que $r^2 = 5$.

Temos uma infinidade de maneiras de dividir um segmento AB em duas partes. Existe uma, no entanto, que parece ser a mais agradável à vista, como se traduzisse uma operação harmoniosa para os nossos sentidos. Relativamente a esta divisão, um matemático alemão Zeizing formulou, em 1855, o seguinte princípio: "Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo". Ele estava falando da razão áurea, estudada pelos gregos antes do tempo de Euclides de Alexandria que descreveu esta seção em sua proposição "dividir um segmento de reta em média e extrema razão". Diz-se que o ponto B divide o segmento AC em média e extrema razão, se a razão entre o maior e o menor dos segmentos é igual à razão entre o segmento todo e o maior, isto é , $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AC}{BC}$. Usando a notação moderna, e observando a figura abaixo, podemos escrever esta relação assim:



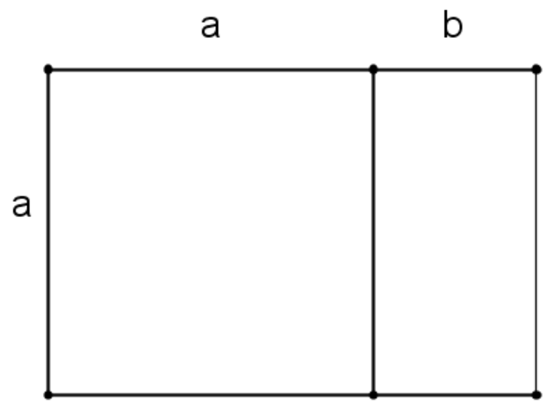
$\dfrac{x}{a-x} = \dfrac{a}{x} \Rightarrow x^2 = a^2 - ax \Rightarrow x^2 - a^2 + ax = 0$. Cujas raízes são:

$x_1 = a(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$, $x_2 = -a(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2})$

Sendo x a raiz de um segmento, descartamos a raiz negativa. Logo, $x = a(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$.

E a razão é: $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{a}{x} = \dfrac{a}{a(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})} = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618033$

O valor da razão descrita acima muitas vezes é chamado de Φ ou ainda de número de ouro. Os gregos consideraram que o retângulo cujos lados apresentavam esta relação apresentava uma especial harmonia estética que lhe chamaram retângulo áureo ou retângulo de ouro, considerado a forma visualmente mais equilibrada e harmoniosa. Observe a baixo:



$\dfrac{a+b}{a} = \phi$

Como vimos acima a razão áurea é denotada geralmente pela letra grega ϕ que é a inicial do nome de Fídias, escultor e arquiteto encarregado da construção do Parthenon, em Atenas. Construído entre 447 e 433 A.C., o Parthenon Grego ou o Templo das Virgens, templo representativo do século de Péricles e uma das obras arquitetônicas mais admiradas da antiguidade, contém a Razão de Ouro no retângulo que contêm a fachada (Largura / Altura). Esta razão está presente também na fachada da Catedral de Notre Dame (em Paris) e a Basílica de Santa Maria Novella (em Florença). Coincidentemente ou não, o número de ouro está presente em muitos lugares que despertam a nossa experiência estética. Em produções ligadas à arte, principalmente na pintura, como nas obras renascentistas de Leonardo da Vinci, a exemplo do quadro Mona Lisa. Desenhando um retângulo à volta da face o retângulo resultante é um Retângulo de Ouro. Dividindo este retângulo por uma linha que passe nos olhos, o novo retângulo obtido também é de Ouro. As dimensões do quadro também representam a razão de Ouro. Há indícios de que do século V a.C. ao Renascimento a arte tomou como critério estético, o número de ouro. Este está presente até no rosto humano e animal, pois é a razão entre o comprimento do rosto e a distância entre o queixo e os olhos. Até hoje não se conseguiu descobrir a razão de ser da beleza que proporciona o número de ouro. Mas a verdade é que existem inúmeros exemplos onde o retângulo de ouro aparece. Até mesmo no nosso cotidiano, encontramos aproximações do retângulo de ouro, por exemplo, no caso dos cartões de crédito, nas carteiras de identidade, nos cartazes de publicidade, nas caixas dos cereais e fósforos, assim como na forma retangular da maior parte dos nossos livros e até nos maços de cigarro.

4.4 Séries geométricas infinitas

Trabalhamos anteriormente a representação decimal do número racional $\frac{1}{3}$. Vimos no Capítulo 3 com os pares de Cauchy que esse número pode ser aproximado por uma sequência de outros racionais, no qual os índices n vão se tornando cada vez maiores, seguindo os valores consecutivos 1, 2, 3,.... Deste modo, um número racional s pode ser aproximado por uma sequência de outros números racionais S_n, sendo n todos os valores consecutivos 1, 2, 3, ...; como forma de generalização.

Aprofundando este pensamento, tomemos um segmento unitário e divida-o ao meio, pegue uma das metades e divida-o novamente ao meio. Desse modo, sempre pegando uma das metades restantes de cada divisão, e dividindo ao meio, teremos intervalos cada vez menores de comprimento 2^{-n}, no qual n pode ser escolhido arbitrariamente grande; Assim o comprimento do intervalo pode ficar tão pequeno quanto se deseje.

Adicionando o comprimento de todos os intervalos exceto o de comprimento unitário, obtemos um comprimento total da sequência S_n:

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$.

Considerando a sequência S_n para:

$n = 1$; observe que S_1 difere de 1 por $(\frac{1}{2})^1$, ou $|S_1 - 1| = |\frac{1}{2} - 1| = \frac{1}{2}$;

$n = 2$; $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; S_2 difere de 1 por $(\frac{1}{2})^2$, ou $|S_2 - 1| = |\frac{3}{4} - 1| = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$; e

$n = 3$; $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$; S_3 difere de 1 por $(\frac{1}{2})^3$, ou $|S_3 - 1| = |\frac{7}{8} - 1| = \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$;

continuando o raciocínio acima, observamos que a sequência S_n, difere de 1 por $(\frac{1}{2})^n$ e esta diferença vai diminuindo e se tornando arbitrariamente pequena, ou tendendo a zero à medida que n aumenta.

O comportamento da sequência S_n é descrito como a soma S_n aproximando do limite 1 à medida que n tende para o infinito, logo podemos escrever:

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots,$

no qual à direita temos uma série infinita, não significando que efetivamente vai ser adicionado os infinitos termos, pois se trata apenas de uma expressão, que segundo Courant e Robbins (2000, p.73) é abreviada para o fato de que 1 é o limite da soma infinita da sequência S_n, à medida que n tende ao infinito.

Nota-se que na igualdade $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$, a forma de apresentar o símbolo incompleto $(+\ldots)$ é meramente uma estenografia[2] matemática para afirmar precisamente que 1 é o limite á medida que n tende ao infinito da quantidade $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$. . Podemos usar de forma abreviada, a simbologia $S_n \to 1$ quando $n \to \infty$, ou a forma $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

Tornando geral o conceito de limite, consideremos um número q no intervalo $(-1, 1)$, logo as potências sucessivas de q, denotada por $q, q^2, q^3, q^4, \ldots, q^n$, se aproximam de zero, quando n aumentar. Se q for negativo, haverá uma alternância dos valores das potências de q em valores positivos e negativos, os quais tenderão a zero pela esquerda ou pela direita alternadamente. O limite de q^n, à medida que n tende ao infinito é zero. Simbolicamente indica-se $q^n \to 0$ com $n \to \infty$, para $-1 < q < 1$.

Analisando para $q > 1$ ou $q < -1$,veremos o comportamento de q^n, quando n tende ao infinito. Vamos inicialmente fazer $q = 2$. Escrevendo as potências sucessivas de q, temos $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots$,podemos verificar que os valores crescem, se afastando do zero, logo não tende a zero, porém para uma prova rigorosa da relação $q^n \to 0$ com $n \to \infty$, para $-1 < q < 1$, usamos a desigualdade de Bernoulli, vista anteriormente no Capítulo 3. Pela desigualdade de Bernoulli vimos que $(1 + p)^n \geqslant 1 + np$, para todo $p > -1$ e n natural. Fixando q entre 0 e 1, tem-se $q = \frac{1}{1+p}$, para $n > 0$. Assim,

$$\frac{1}{q^n} = (1 + p)^n \geqslant 1 + np > np \Rightarrow \frac{1}{q^n} > np, \text{ ou } 0 < q^n < (\frac{1}{p}).(\frac{1}{n}).$$

Assim, podemos concluir que q^n está situado entre os valores fixos 0 e $(\frac{1}{p}).(\frac{1}{n})$, sendo este último se aproximando de zero à medida que n aumenta arbitrariamente e indefinidamente, Dado que o ponto p é fixo e $q^n \to 0$. Quando q é negativo, temos $q = -\frac{1}{1+p}$ e os valores fixos se tornam $(-\frac{1}{p}).(\frac{1}{n})$ e $(\frac{1}{p}).(\frac{1}{n})$.

Considerando a série geométrica $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, sendo $-1 < q < 1$, podemos expressar a soma S_n de uma forma mais simples. esta representação está presente nos estudos de progressões geométricas no Ensino Médio. Logo, multiplicando S_n por q, a igualdade $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, passará a ser da forma equivalente $q.S_n = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}$. Subtraindo as duas igualdades, teremos:

[2]Técnica de escrita abreviada segundo sinais convencionais que permite a rápida transcrição de um discurso.

$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ e $-q.S_n = -q - q^2 - \ldots - q^{n+1} \Rightarrow (1-q).S_n = 1 - q^{n+1}$. Assim,

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Pelo conceito de limite, aumentando n, q^{n+1} tende a zero, logo, passando ao limite $S^n \to \dfrac{1}{1-q}$ quando $n \to \infty$, para $-1 < q < 1$.

Podemos escrever que a série geométrica infinita $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-q}$, para $-1 < q < 1$. Desse modo, quando $q = \dfrac{1}{2}$, temos que a série geométrica infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2-1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Para a série geométrica $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots$. Colocando o fator $\dfrac{1}{2}$ em evidência, temos

$$S_n = \frac{1}{2}.(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}.2 = 1$$

4.5 Construindo os números reais

Vimos que todo ponto da reta real, ou seja, todo número real tem uma representação decimal infinita sendo que se o número é racional a representação é infinita e periódica e se o número é irracional ela é infinita e não periódica. Tendo uma uma representação decimal qualquer. Ela representa um número real? Vamos ver um exemplo: consideremos o decimal 0,1212212221... . (é um decimal infinito cujas casas decimais só tem 1 e 2 conforme um padrão: aumenta-se a quantidade de 2 separados por 1). Este é um decimal infinito e não periódico. Existe um ponto Q da reta cujo número associado tem esta representação. Vamos ver esta afirmação. Tomando as seguintes sequências de números: $0,1; 0,12; 0,121; 0,1212; 0,12122; 0,121221; 0,1212212; 0,12122122; etc...$ A sequência é crescente e nunca ultrapassa 0,13. Também não ultrapassa 0,122. Ou ainda não ultrapassa 0,1213 etc. A diferença entre os termos vai ficando cada vez menor. De fato, a diferença entre dois números consecutivos é sempre menor que $\dfrac{2}{10^n}$ = 0,0...02. Veja:

$0,12 - 0,1 = 0,02$

$0,121 - 0,12 = 0,001$

$0,1212 - 0,121 = 0,0002$; e assim por diante.

Nossa intuição nos diz que esta é uma sequência de números racionais que converge para um número P (um ponto da reta real). E o número P só pode ser o número representado por 0,121221222122221... , com infinitas casas decimais.O argumento que usamos pode ser repetido para toda e qualquer forma decimal infinita que você tiver, mesmo que ela não tenha uma regularidade (como é o caso do exemplo acima). Portanto toda forma decimal infinita (periódica ou não) representa um número real. O que estamos afirmando é que sempre existirá um ponto na reta real, ou seja um número real, para onde converge uma sequência crescente e limitada de números da forma $\frac{b}{10^n}$. Informalmente, dizemos que o conjunto dos números reais não tem buraco. Quando dizemos isso queremos traduzir uma ideia de continuidade ou de completude. E este é um dos conceitos mais difíceis e abstratos da Matemática, cujo mistério foi desvendado por matemáticos como Georg Cantor $(1845 - 1918)$ e Richard Dedekind $(1831 - 1916)$. Para Cantor a completude ou a continuidade dos números da reta real se traduz da seguinte forma: toda sequência de números reais convergente tem limite, ou seja, o limite é um número real. A ideia de Cantor foi sugerida pelo que vimos anteriormente de que números reais podem ser considerados como decimais infinitas e decimais infinitas são limites de decimais finitas (números racionais). Libertando-se do sistema decimal, Cantor afirmou que no conjunto dos números reais toda sequência de números racionais $(a_1, a_2, a_3, a_4...)$ que convergir, ou seja, a diferença entre os termos da sequência vai diminuindo ($a_n - a_m$ tende a 0 a medida que n e m aumentam) terá o limite no conjunto dos números reais.Dedekind,contudo,inspirou-se na Teoria das Proporções de Eudoxo. Na definição de Eudoxo separa-se a fração $\frac{m}{n}$ em três casos: $na > mb$ ou $na = mb$ ou $na < mb$. Assim Dedekind pensou em separar as frações em duas classes: aquelas com $na < mb$ e as com $na > mb$. A este par de classes ele deu o nume de "corte". Ele afirmou que o princípio da completude ou da continuidade está no fato de que toda vez que "cortamos" a reta em dois pedaços A e B existe um ponto que P que produz tal "corte" da reta e a separa em duas partes.

4.6 A reta Euclidiana

Nesta seção veremos a noção de reta, pois estaremos mais adiante com o problema da medição de segmentos da reta e, para fazermos de forma matematicamente consistente, necessitamos de uma descrição matemática rigorosa da reta.

Veremos a definição de um segmento AB ser congruente, menor ou maior do que um outro segmento CD.

Definição 4.6.1. *Na reta Euclidiana, dizemos que dois segmentos de reta são congruentes se conseguirmos transladar um para o outro exatamente.*

Fazemos isso realizando uma construção geométrica com o compasso da seguinte forma: fazemos as pontas do compasso coincidirem com as extremidades do primeiro segmento, e mantendo a mesma abertura, verificamos se as pontas do compasso coincidem com as extremidades do segundo segmento.

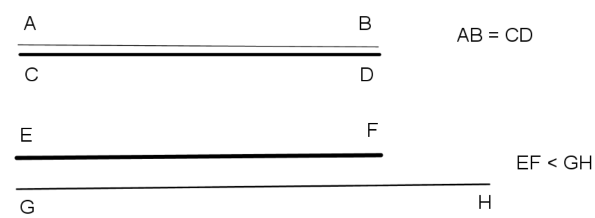
Em caso de congruência de dois segmentos de reta AB e CD, escreveremos $AB = CD$, e caso contrário $AB \neq CD$. Outras notações podem ser utilizadas para congruência de dois segmentos: $AB \equiv CD$ ou $AB \cong CD$.

Obs: Congruência de dois segmentos não é igualdade de conjunto de pontos.

Definição 4.6.2. *Na reta Euclidiana, dado um segmento de reta AB, podemos dizer que:*

- AB será menor que um segmento CD, se for possível transladar AB com o compasso de modo a ficar estritamente contido em CD;

- AB será maior que um segmento CD, se CD for menor que AB. Assim, poderemos ter $AB = CD$; $AB < CD$; $AB > CD$; $AB \leqslant CD$;$AB \geqslant CD$. Observe a seguir:



4. 6. 1 Operações com segmentos de reta

- Adição de segmentos de reta

Dados dois segmentos AB e CD sobre uma mesma reta, sua soma é o segmento AE que se constrói prolongando AB, a partir de B, até um ponto E, tal que BE seja congruente a CD.

$AB + CD = AE$

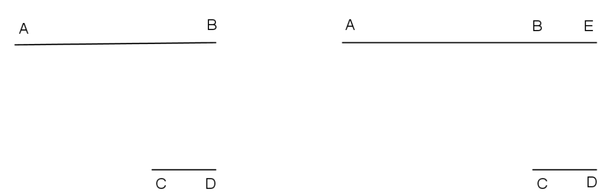


Figura 4.3: Adição de segmentos de reta

- Múltiplo de um segmento de reta

Para cada n número natural positivo e cada segmento de reta AB, por $n.AB$ é o segmento CD obtido somando cópias de AB:

$n.AB = AB + AB + \ldots + AB$ (n vezes)

4. 6. 2 Propriedade arquimediana da reta

- Axioma de Arquimedes / propriedade arquimediana

Na reta Euclidiana, dado um segmento de reta AB não degenerado[3], para cada segmento CD que tomarmos, sempre acharemos um número natural n tal que o segmento formado pelas n cópias de AB é maior do que CD:

$CD < n.AB$

4. 6. 3 Axioma do contínuo

A continuidade da reta era uma ideia que fascinava a humanidade. Dizer que a reta não tinha "furos"ou interrupções era uma situação que intrigava os matemáticos da época. Para Euclides esta ideia era intuitiva, não explicitando-a como axioma. Isto só ocorreu mais de dois mil anos depois, após os trabalhos de Dedekind e George Cantor.

Caracterizando matematicamente a continuidade da reta Euclidiana, veremos dois tipos de sequências de segmentos de reta:

Definição 4.6.3. *Uma sequência de segmentos de reta A_1B_1, A_2B_2, ... é encaixante se estes segmentos, vistos como conjunto de pontos, verificarem as inclusões:*

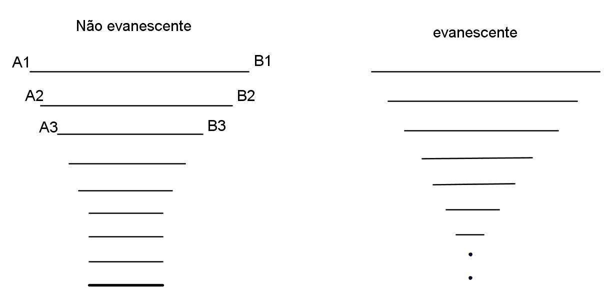
$A_1B_1 \supseteq A_2B_2 \supseteq A_3B_3 \supseteq \ldots A_nB_n \supseteq A_{n+1}B_{n+1} \supseteq \ldots$

Definição 4.6.4. *Uma sequência infinita de segmentos de reta A_1B_1, A_2B_2, ... é dita evanescente se:*

- for encaixante;

- e para cada segmento CD não degenerado que escolhermos, sempre pudermos encontrar um n tal que o n-ésimo segmento da sequência satisfaça:

$A_nB_n < CD$. Observe abaixo:



- 4.6.4 Axioma do contínuo/Princípio dos Segmentos Evanescentes

Sempre que A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,... for uma sequência evanescente de segmentos de reta, podemos dizer que existe um único ponto comum a todos os segmentos da sequência.

Esse axioma diz que a reta Euclidiana é contínua, ou seja, não tem "buracos". Isso quer dizer que se tivéssemos um microscópio focando uma reta e sucessivamente aumentarmos a resolução do microscópio em 10 vezes, 100 vezes, etc., então no "infinito" veríamos

[3]Reduzido a um ponto.

exatamente um ponto, independente da posição inicial do microscópio. Assim existirá apenas um ponto que permanecerá no campo de visão do microscópio em todas as etapas.

Conclusão, a reta é arquimediana e continua.

4.7 Números reais absolutos

Vimos anteriormente que os números racionais são insuficientes para realizar a medida de qualquer segmento de reta. Dessa forma veremos com mais profundidade a noção de número real absoluto que atende perfeitamente ao processo de medição de qualquer segmento de reta, através da medição iterativa.

4. 7. 1 Medida dos segmentos de reta

O ato de medir foi e ainda é uma atividade muito importante para o desenvolvimento da humanidade. Para efetuar uma medição precisamos, primeiramente, convencionar uma unidade de medida: uma unidade de comprimente, uma unidade de massa, uma unidade de tempo, etc. No nosso caso, em que estamos interessados em medir segmentos de reta, é importante convencionar uma unidade de comprimento, que significa escolher e fixar um segmento de reta Euclidiana não reduzido a um único ponto. Chamamos este segmento de segmento unitário e o denotaremos por OU. Assim, o processo de medição, consiste em determinar quantas vezes o segmento unitário cabe no segmento a ser medido.

Axiomas da medição de um segmento de reta Euclidiana:

- Todo segmento de reta, AB, tem exatamente uma medida de comprimento, ou seja, $\mid AB \mid$.

- Segmentos de reta congruentes têm a mesma medida, ou seja, AB congruente a CD $\Longleftrightarrow \mid AB \mid = \mid CD \mid$.

- A medida do todo é maior do que a da sua parte, ou seja, $AB \geqslant$ CD $\Rightarrow \mid AB \mid \geqslant \mid CD \mid$.

- A medida de um todo é a soma da medida de suas partes, ou seja, se C é um ponto entre A e B, então

$\mid AB \mid = \mid AC + CB \mid = \mid AC \mid + \mid CB \mid$

- Os segmentos degenerados, têm medida nula.

A medida do segmento unitário, por convenção tem medida 1, ou seja, $\mid OU \mid = 1$.

Proposição 4.7.1. *A medida do múltiplo de um segmento é o múltiplo da medida, ou seja,*

$\mid n.AB \mid = n.\mid AB \mid.$

Demonstração:
Provando por indução com $n \geqslant 2$.

- Para $n = 2$, teremos $2.AB = AB + AB = AB + BC$, tomando $AB = BC$. Podemos escrever:
$\mid 2AB \mid = \mid AB + BC \mid = \mid AB \mid + \mid BC \mid = \mid AB \mid + \mid AB \mid = 2.\mid AB \mid$.
- Valendo para $n \geqslant 2$, provaremos que vale para $n + 1$.
Temos que, $(n + 1).AB = n.AB + AB$, escrevendo $n.AB = AC$ e tomando $CD = AB$, vemos que
$\mid (n + 1)AB \mid = \mid n.AB + CD \mid = \mid n.AB \mid + \mid AB \mid = (n + 1)\mid AB \mid$. Assim podemos calcular o comprimento de vários tipos de segmentos de reta. □

Proposição 4.7.2. *I) Se $AB = n.OU$, então $\mid AB \mid = n$.*
II) Se $AB = \dfrac{1}{n}OU$, então $\mid AB \mid = \dfrac{1}{n}$.
II) Se $AB = m.\dfrac{1}{n}OU$, então $\mid AB \mid = \dfrac{m}{n}$.

Demonstração:
I) de $AB = n.OU$, então, pela proposição anterior, $\mid AB \mid = \mid n.OU \mid = n.\mid OU \mid = n.1 = n$.
II) escrever $AB = \dfrac{1}{n}OU$ é dizer que $OU = n.AB$, logo $1 = \mid OU \mid = \mid n.AB \mid =$ n.$\mid AB \mid$.
III) usando a proposição anterior e o item II, temos que, se $AB = m.\dfrac{1}{n}\ OU$, então $\mid AB \mid = \mid m.\dfrac{1}{n}OU \mid = m\mid \dfrac{1}{n}OU \mid = m.\dfrac{1}{n} = \dfrac{m}{n}$. □

4. 7. 2 A insuficiência geométrica dos números racionais

Já vimos que anteriormente que os racionais são insuficientes para realizar a medida de qualquer segmento de reta. Isso porquê, dois segmentos podem ser comensuráveis com o segmento unitário ou incomensuráveis com um segmento unitário. Os números racionais podem realizar medidas de segmentos comensuráveis com a unida. Vimos também que nos segmentos de reta incomensuráveis com a unidade, nenhum deles tem como medida um número racional. Assim precisamos construir um tipo de número mais geral do que os racionais, mostrando que eles podem realizar a medida de qualquer segmento de reta.

4. 7. 3 Construção da régua infinita sobre a reta Euclidiana

Nossa finalidade é medir exatamente qualquer segmento de reta, para isso, necessitamos dispor de uma régua que permita realizar medidas arbitrariamente pequenas, diferentemente das réguas escolares, que permitem a medida com no máximo milímetros de precisão. Dessa forma, necessitamos de uma régua matemática, com infinitas subdivisões: unidades, décimos, centésimos, milésimos, décimos de milésimos da unidade, e assim por diante, ad infinitum. assim chamaremos de régua infinita.

A régua infinita é uma idealização matemática, pois no mundo concreto, jamais conseguiremos uma reta com essas características, ou seja, com infinitas marcações. Isto só é possível em uma reta abstrata, como a reta Euclidiana, apresentada na seção anterior.

Assim trataremos da construção da régua infinita, veremos como utilizá-la para medir de maneira exata qualquer segmento de reta.

Convenções:

- A régua infinita será construída sobre a régua Euclidiana, r, na posição horizontal;

- sobre r, escolheremos uma origem O e para unidade de medida um segmento OU, cujo extremo esquerdo coincidirá com O.

A construção da régua matemática será feita por meio de uma sequência infinita de etapas, em cada uma das quais, será marcada em r um rede de pontos com espaçamento ou graduação constante. assim, teremos:

- A rede de graduação unitária formará a primeira etapa. O primeiro ponto dessa rede é o ponto U de OU, ou seja ponto $P(1)$. Para marcamos o segundo ponto, que será $P(2)$. Tomamos um compasso com abertura do segmento em OU. A seguir, colocamos a ponta seca do compasso em $P(1)$ e marcamos com a outra ponta um ponto r à direita de $P(1)$, que será chamado de P(2). Continuamos, colocando a ponta seca do compasso em $P(2)$ e marcamos com a outra ponta um novo ponto de r, que será chamado de $P(3)$, á direita de $P(2)$. repetindo esse processo indefinidamente, obtemos um conjunto de infinitos pontos sobre a semi-reta de r com origem em O:

$O, P(1), P(2), P(3), P(4), \ldots, P(n), \ldots$. os quais constituem a rede de graduação unitária da régua infinita.

- A rede de graduação decimal formará a segunda etapa. iniciaremos dividindo o segmento unitário em dez partes iguais. A seguir, faremos de modo semelhante ao da primeira etapa, usamos como abertura o décimo da abertura de OU. Deste modo, marcaremos sucessivamente e à direita de O, os pontos:

O, $P(\frac{1}{10}), P(\frac{2}{10}), \ldots, P(\frac{10}{10}) = P(1)$,

$P(\frac{11}{10}), P(\frac{12}{10}), \ldots, P(\frac{20}{10}) = P(2)$,

$P(\frac{21}{10}), P(\frac{22}{10}), \ldots, P(\frac{30}{10}) = P(3)$,

...

o conjunto dos quais chamaremos de rede de graduação decimal da régua infinita.

A rede de graduação decimal também pode ser representada usando a expansão decimal dos números racionais associados.

- A rede de graduação centesimal formará a terceira etapa. Prosseguindo de modo semelhante, só que tomando como abertura do compasso um centésimo da abertura de OU. Assim, marcaremos, sucessivamente e á direita de O, os pontos:

O, $P(\frac{1}{100}), P(\frac{2}{100}), \ldots, P(\frac{100}{100}) = P(1)$,

$P(\frac{101}{100}), P(\frac{102}{100}), \ldots, P(\frac{200}{100}) = P(2),$

$P(\frac{201}{100}), P(\frac{202}{100}), \ldots, P(\frac{300}{100}) = P(3),$ ...

A rede de graduação centesimal também pode ser representada usando a expansão decimal dos números racionais associados. Por fim continuando esse processo indefinidamente, chegaremos a n-ésima etapa.

- n-ésima etapa: rede de graduação $\frac{1}{10^n}$.

Prosseguindo de modo semelhante, só que tomando como abertura do compasso $\frac{1}{10^n}$ da abertura de OU. Assim, marcaremos, sucessivamente e à direita de O, os pontos:

O, $P(\frac{1}{10^n}, P(\frac{2}{10^n}, ..., P(\frac{10^n}{10^n}) = P(1)$

$P(\frac{1+10^n}{10^n}), P(\frac{2+10^n}{10^n}), ..., P(\frac{10^n+10^n}{10^n}) = P(2)$

$P(\frac{1+2x10^n}{10^n}), P(\frac{2+2x10^n}{10^n}), ..., P(\frac{10^n+2x10^n}{10^n}) = P(3)$

...

o conjunto dos quais chamaremos de rede de graduação $\frac{1}{10^n}$ da régua infinita.

O conjunto de todos os pontos de todas essas redes é o que chamamos de régua infinita de unidade de medida OU. Esse conjunto consta de todos os pontos (à direita de O) da forma $P(\frac{m}{10^n})$. Esse pontos são chamados de pontos graduados da reta quando não for necessário fazer referência à rede que os originou. O ponto O, poderá ser chamado de $P(0)$.

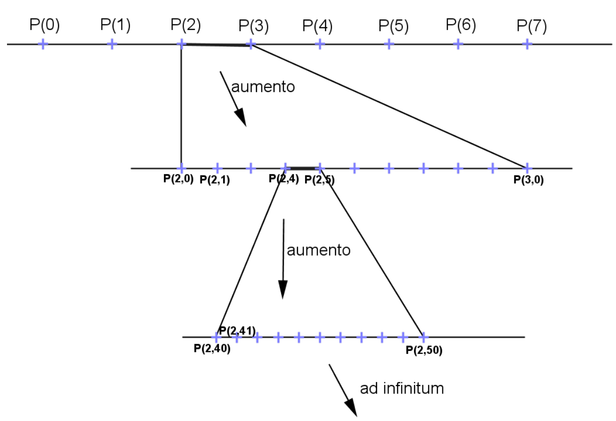


Figura 4.4: Rede de graduação infinita

Do livro Números Racionais, Reais e Complexos; Ripoll, Cidara.; Editora UFRGS; 2ª edição.

4. 7. 4 Usando a régua infinita para construções diretas

A medição direta de um segmento qualquer AB, é feita do seguinte modo: para determinarmos a medida exata por meio da régua infinita, primeiramente achamos o correspondente segmento congruente OP, para isso basta realizar um translação do segmento AB para OP correspondente. Então, ocorrendo de P ser um ponto graduado da reta, digamos $P = P(\frac{m}{10^n})$, teremos:

$$\mid AB \mid = \mid OP \mid = \mid OP(\frac{m}{10^n}) \mid = \frac{m}{10^n}.$$

Usando a propriedade aditiva, podemos dar uma utilidade muito maior ao processo de medição acima. Exemplo:

AB $= P(\frac{3}{100})P(\frac{2}{10}) = P(\frac{3}{100})P(\frac{20}{100})$, assim:

$$OP(\frac{20}{100}) = OP(\frac{3}{100}) + AB \Rightarrow \mid AB \mid = \frac{20}{100} - \frac{3}{100} = \frac{17}{100}.$$

Generalizando, se um segmento AB for congruente a um segmento da forma $P'P$", onde tanto P' como P" são pontos graduados da régua infinita, e onde o primeiro está a esquerda do segundo, então:

$\mid AB \mid = \mid P'P" \mid = \mid OP" \mid - \mid OP' \mid = \frac{m}{10^n} - \frac{r}{10^n}$, sendo $P' = P(\frac{m}{10^n})$, $P" = P(\frac{r}{10^s})$.

Temos que $OP" = OP' + AB$, de modo que $\mid OP" \mid = \mid OP' \mid + \mid AB \mid$ e, assim:

$\mid AB \mid = \mid OP" \mid - \mid OP' \mid$

4. 7. 5 insuficiência do método de medição

Os números que expressam medidas exatas obtidas por medição direta com a régua infinita sempre são números racionais expressos por fração decimal. Assim, existem segmentos de reta cuja medida exata não pode ser obtida pelo método direto por meio da régua infinita. Estes segmentos são:

- todos os segmentos comensuráveis com a unidade, mas cuja medida é um número racional não representado por uma fração decimal;

- todos os segmentos de reta incomensuráveis com o segmento unitário.

Isso é verdade, pois, os resultados das medições, com o método direto com a régua infinita, sempre serão racionais dados por frações decimais. Um exemplo desta situação, é a terça parte do segmento unitário. Pois, esse é um segmento OP tal que $3.OP = OU$, de modo que $\mid 3.OP \mid = 3. \mid OP \mid = \mid OU \mid = 1$, e então sua medida vale $\mid OP \mid = \frac{1}{3}$. Esse valor não pode ser obtido com a régua, pois a fração $\frac{1}{3}$, o denominador não pode ser fatorado apenas com as potências de 2 e/ou 5, o que implica que $\frac{1}{3}$ não tem representação por fração decimal.

4. 7. 6 Usando a régua infinita para medições aproximadas

Dado um segmento de reta AB, dizemos que

- Todo segmento CD, em que $CD \subseteq AB$, é uma aproximação por falta de AB, e que a medida $\mid CD \mid$ de CD é uma aproximação por falta da medida $\mid AB \mid$ de AB, pois $\mid CD \mid \leqslant \mid AB \mid$;

- Todo segmento CD, em que $AB \subseteq CD$, é uma aproximação por excesso de AB, e que a medida $\mid CD \mid$ de CD é uma aproximação por excesso da medida $\mid AB \mid$ de AB, pois $\mid AB \mid \leqslant \mid CD \mid$.

Sendo CD uma aproximação, por falta ou por excesso, do segmento de reta AB, assim escrevemos:

$\mid AB \mid \simeq \mid CD \mid$. A noção de aproximação está associada ao erro. Assim, o erro de uma aproximação é a medida do respectivo segmento de falta ou excesso. Na prática, é impossível calcularmos o erro, logo temos que aceitar uma cota ou estimativa da medida do erro.

Exemplo:

Encontrar uma aproximação do segmento de reta AB com erro de cota 0,001 significa, determinar uma aproximação, por falta ou por excesso, CD de AB, cujo erro tem medida $\leqslant$ 0,001, estando incluída também a possibilidade de acharmos $CD = AB$, pois toda medida exata sempre é uma aproximada para qualquer cota que se escolha. Mas, o usual é encontrarmos ou $CD < AB$, ou $CD > AB$.

Método da medição aproximada

Dado qualquer segmento de reta AB, para encontrarmos sua medida com erro de cota $\frac{1}{10^n}$, primeiramente determinarmos o correspondente segmento congruente OP, de modo que $\mid AB \mid = \mid OP \mid$. Depois, encontramos os dois pontos graduados consecutivos, na rede de graduação $\frac{1}{10^n}$, envolvendo o ponto P, de modo a termos:

$OP(\frac{m}{10^n}) \subseteq OP \subseteq OP(\frac{m+1}{10^n})$

Assim, vale:

$\frac{m}{10^n} \leqslant \mid OP \mid \leqslant \frac{m+1}{10^n} = \frac{m}{10^n} + \frac{1}{10^n}$, desse modo, teremos

- uma aproximação por falta da medida de AB será:

$\mid AB \mid \simeq \frac{m}{10^n}$, com erro $\leqslant \frac{1}{10^n}$;

- uma aproximação por excesso da medida de AB será:

$\mid AB \mid \simeq \frac{m+1}{10^n}$, com erro $\leqslant \frac{1}{10^n}$;

Exemplo:

Sendo AB a terça parte de um segmento unitário, a sua medida aproximada, com erro $\leqslant$ 0,001, é:

Fazendo $3| AB | = 1$, podemos escrever $0{,}999 \leqslant 3 \mid AB \mid \leqslant 1{,}002$; assim

$0{,}333 \leqslant \mid AB \mid \leqslant 0{,}334$; logo

$\mid AB \mid \simeq 0{,}333$; com erro $\leqslant 0{,}001$.

Fixada uma rede de graduação, e deixando de lado as situações excepcionais em que P é um ponto graduado de tal rede, o usual é termos uma única medida por falta e por excesso. Excepcionalmente, teríamos duas por falta e duas por excesso.

Exemplo:

Na rede de graduação $\dfrac{1}{10^2}$, seja o segmento OP, onde $P = P(\dfrac{5}{10})$. A relação

$$OP(\frac{4}{100}) \subseteq OP(\frac{5}{100}) \subseteq OP(\frac{5}{100})$$

podemos interpretar a situação acima como $\mid OP \mid \simeq 0,04$ é uma aproximação por falta, com erro de cota 0,01 e que $\mid OP \mid \simeq 0,05$ é uma aproximação por excesso, com erro de cota 0,01.

Por outro lado, a relação:

$$OP(\frac{5}{100}) \subseteq OP(\frac{5}{100}) \subseteq OP(\frac{6}{100})$$

diz que $\mid OP \mid \simeq 0,05$ é uma aproximação por falta, com erro de cota 0,01 e que $\mid OP \mid \simeq 0,06$ é uma aproximação por excesso, com erro de cota 0,01.

A não ser em casos excepcionais em que o ponto P é um ponto graduado da rede de graduação $\dfrac{1}{10^n}$, a relação

$OP(\dfrac{m}{10^n}) \subseteq OP \subseteq OP(\dfrac{m+1}{10^n})$, ficará escrita como:

$$OP(\frac{m}{10^n}) \subset OP \subset OP(\frac{m+1}{10^n}),$$

o que implicará:

$$\mid OP(\frac{m}{10^n}) \mid < \mid OP \mid < \mid OP(\frac{m+1}{10^n}) \mid.$$

Obs:

O fato do método direto aproximado envolver o enquadramento

$$OP(\frac{m}{10^n}) \subseteq OP \subseteq OP(\frac{m+1}{10^n})$$

e, assim

$$\mid OP(\frac{m}{10^n}) \mid \leqslant \mid OP \mid \leqslant \mid OP(\frac{m+1}{10^n}) \mid$$

deixa em aberto a possibilidade de uma dessas $\leqslant$ tornar-se uma $=$. Logo, o método direto aproximado generaliza o método direto exato.

Embora o método direto exato só pode produzir um resultado para cada segmento de reta medido, essa unicidade não ocorre com o método aproximado. Assim, sempre que P não for ponto graduado, teremos infinitos resultados para $\mid OP \mid$.

Exemplo:

No caso do exemplo anterior, em que o segmento AB é um terço do segmento unitário, daremos as seguintes aproximações por falta:

$\mid AB \mid \simeq$ 0,333; com erro $\leqslant$ 0,001

$\mid AB \mid \simeq$ 0,3333; com erro $\leqslant$ 0,0001; logo, também com com erro $\leqslant$ 0,001

$\mid AB \mid \simeq$ 0,33333; com erro $\leqslant$ 0,00001; logo, também com com erro $\leqslant$ 0,001. E assim por diante.

Teorema 4.7.1. *O método da medição aproximada com a régua infinita pode medir qualquer segmento de reta, qualquer que seja a cota de erro exigida.*

Demonstração: Dado AB, seja seu congruente da forma OP. Sendo a cota de erro dada correspondente a graduação $\dfrac{1}{10^n}$, pela propriedade arquimediana, terá que existir um número natural m, tal que:

$$OP(\frac{m}{10^n}) \subseteq OP \subset OP(\frac{m+1}{10^n}),$$

pois $OP(\dfrac{m}{10^n}) = m.OP(\dfrac{1}{10^n})$ □

4. 7. 7 Usando a régua infinita para medições iterativas

Vimos anteriormente que o método direto é exato, mas não é capaz de realizar a medição da maioria dos segmentos de reta. O método aproximado é capaz de medir qualquer segmento de reta, mas seu resultado não é, em geral, exato.

Veremos agora, o método iterativo, que é exato e capaz de de realizar a medição de qualquer segmento de reta.

Com a aplicação repetida ou iterada do método direto aproximado, escolhendo redes de graduação cada vez menores, podemos produzir medidas tão aproximadas quanto desejarmos de qualquer segmento dado. Assim, o método iterativo leva ao infinito, a repetição das medidas aproximadas. Desse modo, esse método associa a cada medida um resultado infinitamente aproximado.

Método da medição iterativa:

Dado qualquer segmento de reta AB:

I) Inicialmente, escolhemos uma reta infinita de origem O, encontramos sobre ela o segmento OP congruente a AB, de forma que $\mid AB \mid = \mid OP \mid$.

II) Em cada uma das redes de graduação da régua, determinamos dois pontos consecutivos, P' e P", envolvendo P, obtemos assim:

$OP' \subseteq OP \subseteq OP$"

Assim, teremos uma sequência de infinitos pares construídos aproximados de OP, uma por falta e uma por excesso, de cotas de erro sucessivamente $\leqslant 1$, $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$, e que podem ser escritos como:

$m \leqslant \mid OP \mid \leqslant m+1$

$m, a_1 \leqslant \mid OP \mid \leqslant m, a_1 + \frac{1}{10}$

$m, a_1 a_2 \leqslant \mid OP \mid \leqslant m, a_1 a_2 + \frac{1}{10^2}$

$m, a_1 a_2 a_3 \leqslant \mid OP \mid \leqslant m, a_1 a_2 a_3 + \frac{1}{10^3}$

....

Desse modo, a medida iterativa do segmento AB é representada por

$\mid AB \mid = m, a_1 a_2 a_3 \ldots.$

Obs: O método iterativo tem relação direta com os peres de Cauchy, visto no capítulo 3.

Geometricamente falando o item II) faz com que as aproximações por falta sejam, sucessivamente, do tipo:

$m \to m, a_1 \to m, a_1 a_2 \to m, a_1 a_2 a_3 \to \ldots$; nunca poderemos ter uma passagem do tipo $m, a_1 a_2 \to m, a_1 b_2 a_3$; com $a_2 \neq b_2$.

Exemplo:

Revendo o caso de um segmento de reta AB, tal que OP seja um terço do segmento de reta unitário da régua infinita. Sabendo que $\mid OP \mid = 1$, teremos então:

$0 = \mid OP(0) \mid \leqslant \mid OP \mid \leqslant \mid OP(1) \mid = 1$

$0{,}3 = \mid OP(0,3) \mid \leqslant \mid OP \mid \leqslant \mid OP(0,4) \mid = 0{,}4$

$0{,}33 = \mid OP(0,33) \mid \leqslant \mid OP \mid \leqslant \mid OP(0,34) \mid = 0{,}34$

$0{,}333 = \mid OP(0,333) \mid \leqslant \mid OP \mid \leqslant \mid OP(0,334) \mid = 0{,}334$

$0{,}3333 = \mid OP(0,3333) \mid \leqslant \mid OP \mid \leqslant \mid OP(0,3334) \mid = 0{,}3334$

....

de forma que $\mid AB \mid = \mid OP \mid = 0{,}333\,333 \ldots.$

A medição iterativa é uma generalização da medida aproximada.

Teorema 4.7.2. *Todo segmento de reta admite uma medida iterativa.*

Demonstração: Escolhendo uma régua infinita de origem O, dado um segmento de reta qualquer, AB, podemos determinar sobre ela um único segmento OP congruente a AB, de modo que $\mid AM \mid = \mid OP \mid$; em cada uma das redes de graduação da régua, podemos determinar um par de pontos consecutivos, P' e P", envolvendo P, assim:
$OP' \subseteq OP \subseteq OP$"

Dese modo, é imediato que sempre são executáveis as etapas da definição da medida iterativa, qualquer que seja o segmento AB. □

Teorema 4.7.3. *Se dois segmentos de reta tem a mesma medida iterativa, então eles são congruentes.*

Demonstração: Mostraremos que se OP e OQ têm a mesma medida iterativa, então $P = Q$. Ora, sendo $m, a_1a_2a_3\ldots.$ uma medida iterativa desses segmentos, teremos:
$OP(m) \subseteq OP, OQ \subseteq OP(m+1)$

$OP(m + \frac{a_1}{10}) \subseteq OP, OQ \subseteq OP(m + \frac{1+a_1}{10})$

$OP(m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}) \subseteq OP, OQ \subseteq OP(m + \frac{a_1}{10} + \frac{1+a_2}{10^2})$

....

Assim, teremos uma sequência de segmentos de reta encaixante, evanescente, tal que os pontos P e Q estão em todos esses segmentos. Desse modo, pelo Postulado da Continuidade da Reta Euclidiana, temos $P = Q$. Observe abaixo:

$P(m)P(m+1) \supset P(m, a_1)P(m, a_1 + \frac{1}{10}) \supset P(m, a_1a_2)P(m, a_1a_2 + \frac{1}{10^2}) \supset ....$ □

Exemplo 1:

Considerando que o segmento OP tem como P um ponto graduado P $= P(0,75) = P(\frac{75}{10^2})$. Podemos construir duas sequências de segmentos envolventes.

Primeira sequência:

$OP(0) \subseteq OP \subseteq OP(1)$
$OP(0,7) \subseteq OP \subseteq OP(0,8)$
$OP(0,74) \subseteq OP \subseteq OP(0,75)$
$OP(0,749) \subseteq OP \subseteq OP(0,750)$
$OP(0,7499) \subseteq OP \subseteq OP(0,7500)$
$OP(0,74999) \subseteq OP \subseteq OP(0,75000)$
....

Assim, resulta a medida iterativa: $\mid OP(0,75) \mid = 0,749999....$

Segunda sequência:

$OP(0) \subseteq OP \subseteq OP(1)$
$OP(0,7) \subseteq OP \subseteq OP(0,8)$
$OP(0,75) \subseteq OP \subseteq OP(0,76)$
$OP(0,750) \subseteq OP \subseteq OP(0,751)$
$OP(0,7500) \subseteq OP \subseteq OP(0,7501)$
$OP(0,75000) \subseteq OP \subseteq OP(0,75001)$
....

Assim, resulta a medida iterativa: $\mid OP(0,75) \mid = 0,750000\ldots$.

Observe que os segmentos envolventes eram os mesmos nos dois casos, até a primeira rede em que uma das extremidades, P' ou P", coincidiu com P.

Exemplo 2:

Sendo o segmento AB o próprio segmento unitário da régua infinita, de modo que OP tem como P o ponto graduado $P = P(1)$. Neste caso, também temos duas sequências de segmentos envolventes.

Primeira sequência:

$OP(0) \subseteq OP \subseteq OP(1)$

$OP(0,9) \subseteq OP \subseteq OP(1,0)$

$OP(0,99) \subseteq OP \subseteq OP(1,00)$

$OP(0,999) \subseteq OP \subseteq OP(1,000)$

$OP(0,9999) \subseteq OP \subseteq OP(1,0000)$

$OP(0,99999) \subseteq OP \subseteq OP(1,00000)$

....

resulta a medida iterativa: $\mid OP(1) \mid = 0,999999....$

Segunda sequência:

$OP(1) \subseteq OP \subseteq OP(2)$

$OP(1,0) \subseteq OP \subseteq OP(1,1)$

$OP(1,00) \subseteq OP \subseteq OP(1,01)$

$OP(1,000) \subseteq OP \subseteq OP(1,001)$

$OP(1,0000) \subseteq OP \subseteq OP(1,0001)$

$OP(1,00000) \subseteq OP \subseteq OP(1,00001)$

....

resulta a medida iterativa: $\mid OP(1) \mid = 1,000000\ldots$.

Logo, o segmento unitário tem medida iterativa 0,999 999... ou 1,000 000....

Exemplo 3:

O segmento AB se reduz a um único ponto, de modo que OP tem $P = O$. Nesse caso, podemos construir apenas uma sequência de segmentos envolventes:

$OP(0) \subseteq OP \subseteq OP(1)$

$OP(0,0) \subseteq OP \subseteq OP(0,1)$

$OP(0,00) \subseteq OP \subseteq OP(0,001)$

$OP(0,000) \subseteq OP \subseteq OP(0,0001)$

....

resulta a medida iterativa: $\mid OO \mid = 0,000000....$

Obs: O resultado de toda medição direta ou aproximada é um número racional, enquanto o de medida iterativa é uma lista da forma

$m, a_1a_2a_3\ldots$, onde m é um inteiro maior ou igual a zero e os a_n são dígitos.

4. 7. 8 Números reais absolutos

Teorema 4.7.4. *Toda medida de um segmento de reta é uma lista de dígitos e, reciprocamente, toda lista de dígitos é medida de algum segmento de reta.*

Demonstração: Todo segmento de reta tem uma medida iterativa, logo está provado a primeira parte do enunciado. Para provar a recíproca, temos que, dada qualquer lista de dígitos, $m, a_1a_2a_3\ldots,$, iniciamos observando que a mesma define a seguinte sequência de segmentos sobre a régua infinita:

$P(m)P(m+1) \supset P(m,a_1)P(m,a_1+\dfrac{1}{10}) \supset P(m,a_1a_2)P(m,a_1a_2+\dfrac{1}{10^2}) \supset \ldots,$

podemos ver que é encaixante e evanescente. Assim , pelo Axioma da Continuidade da Reta Euclidiana, existe exatamente um ponto P da reta comum a todos eles. É imediato que a medida iterativa do segmento de reta OP, assim determinado, é precisamente a lista dada. □

Definição 4.7.1. *O conjunto dos números reais absolutos é o conjunto de todas as listas de dígitos, ou equivalentemente, é o conjunto de todas as medidas de segmentos de reta.*

Obs:

Os números reais absolutos podem ser divididos em três tipos:

- o número representado por 0,000. . . ;

- os números reais absolutos representados por exatamente uma dentre as infinitas possíveis listas de dígitos que não são nem terminados terminados em 9 e nem terminados em 0;

- os números reais absolutos que têm exatamente duas representações, as quais constituem qualquer um dos possíveis pares de listras que tem a forma

$m, 000000\ldots = M, 999999\ldots$ (onde $M = m-1$) ou da forma

$m, a_1a_2a_3\ldots a_n000 = m, a_1a_2a_3\ldots a_n^{'}999\ldots$ $(ondea_n \neq 0,\ a_n^{'} = a_n - 1 \leqslant 8)$.

Teorema 4.7.5. *Fixada uma régua infinita:*

I) a todo segmento de reta Euclidiano, o método da medida iterativa associa exatamente um número real absoluto como medida exata de seu comprimento.

II) reciprocamente, para cada número real absoluto, pode-se determinar um segmento de reta cujo comprimento é esse número; além disso, todos os segmentos de reta que admitem esse número como medida são congruentes.

Teorema 4.7.6. *Todo número racional absoluto pode ser identificado naturalmente com exatamente um número real absoluto. Veja:*

fixada uma régua infinita, dado um número racional representado pela fração $\dfrac{a}{b}$*, a ele associamos o segmento de reta* $OP = \dfrac{a}{b}OU$ *e determinemos a sua medida iterativa, não*

9-terminante; então, a_n é o n-ésimo dígito dessa medida iterativa de OP, se e só se a_n é o n-ésimo dígito da expansão decimal do número racional $\frac{a}{b}$.

Logo, podemos escrever:

$\frac{a}{b} = \mid OP \mid = m, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots.$

Demonstração:

Se a expansão decimal de $\frac{a}{b}$ é $0, a_1a_2a_3 \ldots$, isto significa que a mesma foi produzida pela seguinte sequência de divisões Euclidianas:

$10a = ba_1 + r_1$, com $0 \leqslant r_1 < b$

$10r_1 = ba_2 + r_2$, com $0 \leqslant r_2 < b$

$10r_2 = ba_3 + r_3$, com $0 \leqslant r_3 < b$

....

de onde aparecem:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10b}$$

$$\frac{r_1}{10b} = \frac{a_2}{100} + \frac{r_2}{100b}$$

$$\frac{r_2}{100b} = \frac{a_3}{1000} + \frac{r_3}{1000b}$$

....

Usando que $0 \leqslant r_1, r_2, \ldots < b$, podemos escrever isso como:

$$0 \leqslant \frac{a}{b} < 1$$

$$\frac{a_1}{10} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{1}{100}$$

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{1}{1000}$$

....

Em termos de segmentos envolventes de $OP = \frac{a}{b}OU$, estas desigualdades são expressas como:

$$OP(0) \subseteq OP \subset OP(1)$$

$$OP(\frac{a_1}{10}) \subseteq OP \subset (\frac{a_1}{10} + \frac{1}{10})$$

$$OP(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}) \subseteq OP \subset (\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2})$$

....

Assim, vemos que a expansão decimal de $\frac{a}{b}$ determina uma sequência de intervalos envolventes de $OP = \frac{a}{b}OU$, do tipo

$OP' \leqslant OP < OP$"
e tais que, em cada rede de graduação, os pontos P' e P" são consecutivos e à distância, $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots$. A medida iterativa do segmento $OP(a/b)$ é a expansão decimal. □

Definição 4.7.2. *Número irracional absoluto é todo número real absoluto que pode ser representado por uma lista de dígito não periódica.*

Exemplo:

0,10100100010000100000. . . ; 0,012012120121212. . . .; 0,1010010000001000000000000010. . . ; são números irracionais.

Teorema 4.7.7. *Todo número irracional absoluto é representado por apenas uma lista de dígitos e a mesma não é periódica.*

Das três possibilidades vista na definição 4.5.6, para o resultado da medida de um segmento de reta, a única compatível com a lista não periódica é a lista única.

Corolário 4.7.1. *Todo número real absoluto ou é irracional, ou é racional.*

Demonstração: Sabemos que existem tantos reais, como irracionais absolutos. Pelo teorema anterior, todo irracional é representado por apenas uma lista de dígitos e ela não é periódica; assim, não havendo nenhuma possibilidade de esse número ter uma representação por lista periódica, logo ele não pode ser racional. □

Exemplo:

Fixada uma régua infinita, um segmento de reta é incomensurável com a unidade se, e só se, ele tiver como medida iterativa um número real absoluto irracional. Pelo teorema anterior, isso equivale afirmar que um segmento de reta é comensurável com a unidade se, e só, se ele tiver como medida um número racional absoluto.

Assim, denotando o segmento unitário da régua por OU:

- sendo AB um segmento comensurável com a unidade, temos que existem inteiros m e n, tais que $mAb = nOU$; assim

$\mid AB \mid = \mid \frac{m}{n}OU \mid = \frac{m}{n}$ = racional absoluto; AB é congruente a $\frac{m}{n}OU$.

Vimos anteriormente que a diagonal do quadrado é incomensurável com o lado do mesmo. assim, medindo a diagonal do quadrado, temos um número irracional absoluto.

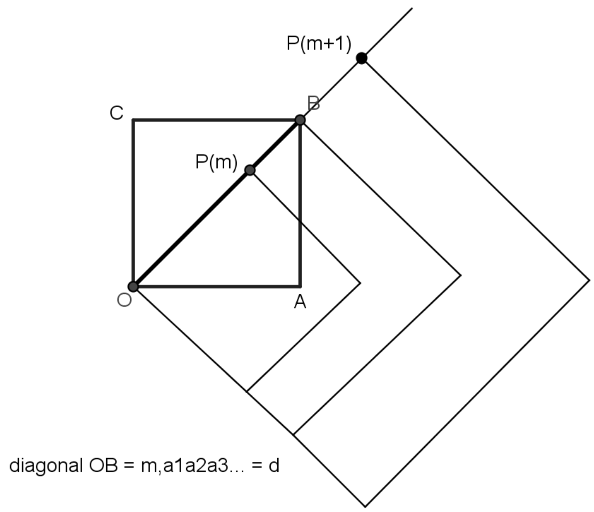
Exemplo:

Estimando a diagonal do quadrado.

A diagonal do quadrado é um segmento de reta, sabemos que existe um real absoluto, d, que mede seu comprimento: $d = \mid OB \mid$. Sendo d um real absoluto, ele é uma lista infinita de dígitos, digamos:

$d = m, a_1a_2a_3\ldots,$

sabemos que essa lista não é periódica. Para determinarmos os valores desta lista de dígitos, observamos o natural m que mede um segmento menor do que OB, enquanto $m+1$ mede um segmento maior do que OB. construímos então quadrados de diagonais m e $m+1$, obtendo, respectivamente, um quadrado menor e um quadrado maior do que o quadrado de diagonal OB. Observe abaixo:



Utilizando a versão geométrica do Teorema de Pitágoras, obtemos

$m^2 \leqslant 2 \leqslant (m+1)^2.$

Sendo m um número natural, a única possibilidade para ele a expressão acima é $m = 1$.

Do mesmo modo, a_1 deve ser um dígito tal que

$(1, a_1)^2 \leqslant 2 \leqslant (1, a_1 + \dfrac{1}{10})^2.$

Temos dez possibilidades para o valor de $a_1 \in \{0, \ldots, 9\}$. O valor que serve para a inequação acima é $a_1 = 4$, pois $(1,4)^2 = 1{,}96$ e $(1,5)^2 = 2,25$. Concluímos assim que

$d = 1, 4\ldots$

Determinando a_2, temos que

$(1, 4a_2)^2 \leqslant 2 \leqslant (1, 4a_2 + \dfrac{1}{100})^2$, de modo que, após dez tentativas, chegamos a conclusão que $a_2 = 1$. Assim,

$d = 1, 41\ldots.$

Continuando dessa forma, podemos obter aproximações racionais de $d = \mid OB \mid$ tão boas quanto desejarmos; dito de forma precisa, podemos determinar o dígito a_n, seja qual for o n dado.

4.8 Números reais

Nesta seção queremos construir um campo numérico que deve ter uma adição e uma multiplicação, uma relação de ordem, que seja uma extensão do campo dos números racionais, obedecendo o assim chamado Princípio da Permanência de Hankel. Veremos também que os números reais resolvem a insuficiência aritmética dos racionais. Por fim verificaremos a estrutura de corpo ordenado completo do números reais.

4. 8. 1 Localização Geométrica de pontos na reta

É de fundamental localizarmos pontos na reta. Para isso necessitamos selecionar um ponto da reta, que será nossa referência ou origem (ponto O). Dado um ponto P da reta, consideramos a distância de P a O, ou seja, o comprimento ou medida de OP, como localizador de P. Essa distância está bem definida, e é dada por um número real absoluto, $x = \mid OP \mid$. Mas, esse número x ainda não determina o ponto P de maneira unívoca, pois o seu simétrico P' em relação à origem também satisfaz $\mid OP' \mid = x$. Essa situação está resolvida quando acrescentamos a informação acerca do lado da origem em que está o ponto P.

Definição 4.8.1. *Um eixo cartesiano é uma reta euclidiana onde se escolhem uma orientação e uma unidade de medida.*

Um eixo cartesiano é formado por uma reta euclidiana r, e pela escolha de dois pontos distintos sobre a mesma, denotados por O e U. O ponto O é chamado de origem do eixo. O ponto U é chamado de ponto unitário do eixo, ele determina uma unidade de medida, OU, para os segmentos do eixo e determina também um sentido de percurso, ou orientação para o mesmo. O sentido de percurso que vai de O para U é chamado de sentido positivo, enquanto o sentido oposto (de U para O) é chamado de sentido negativo.

Denotaremos por (r, O, U) o eixo determinado pela reta r, pela origem O e pelo ponto unitário U, ficando estabelecido que isto determina OU como unidade de medida.

Exemplo:

O ponto U está à direita e à distância um da origem, enquanto que seu simétrico em relação a esta origem está a esquerda dela à distância também um. Geralmente, dado um eixo (r, O, U), caminhando no sentido positivo, marquemos sucessivamente os pontos $U_1, U_2, U_3, \ldots$ tais que $\mid UO_n \mid = n$. Observe que $U_1 = U$. Denotemos U_n' o simétrico de U_n em relação à origem.

Os pontos da rede $\ldots, U_2', U_1', O, U_1, U_2, \ldots$, assim construída, podem ser localizados do seguinte modo:

- cada U_n está à direita da origem e à distância de n unidades da mesma;

- cada $U_n{}'$ está à esquerda da origem e à distância de n unidades da mesma.

4. 8. 2 Localização algébrica dos pontos na reta: números reais

Definição 4.8.2. *A cada número real absoluto não nulo, x, associaremos dois novos objetos matemáticos: $+x$ e $-x$; e assim denominaremos*

* *$+x$ de número real positivo;*

* *$-x$ de número real negativo.*

O zero dos reais absolutos não é nem real positivo, e nem real negativo.

O número real absoluto x envolvido será denominado valor absoluto de $+x$ e de $-x$, e $|+x|=|-x|=x$.

$\mathbf{R}_+$ = conjunto dos números reais positivos ou conjunto dos reais absolutos, não nulos, precedidos do sinal $+$;

$\mathbf{R}_-$ = conjunto dos números reais negativos ou conjunto dos reais absolutos, não nulos, precedidos do sinal -.

Definição 4.8.3. *O conjunto dos números reais relativos, ou conjunto dos números reais, é denotado por* $\mathbf{R}$ *e consiste no conjunto de todos os números reais positivos, negativos e o zero:*

$\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

Ademais, a igualdade em $\mathbf{R}$ é assim convencionada:

sendo a e b números reais, diremos que eles são iguais, $a = b$, se, e somente se:

- ou ambos forem nulos;

- ou tiverem o mesmo sinal e o mesmo valor absoluto.

Exemplo:

Cada inteiro negativo está associado a um real negativo, ou seja, $-1 = -1,000\ldots$, $-2 = -2,000\ldots$, etc. Assim, todo inteiro negativo é um número real negativo. Semelhantemente, todo racional negativo, por meio de sua expansão decimal, está associado a um real negativo, ou seja, $-1/2 = -0,5000\ldots$, $-2/3 = -0,666\ldots$, etc. Assim, todo número racional negativo é um número real negativo. Logo, surge a ideia de identificar os inteiros positivos e os racionais positivos com os números reais.

Teorema fundamental da geometria analítica

Teorema 4.8.1. *A correspondência que associa a cada ponto de um eixo cartesiano (r, O, U) a coordenada cartesiana deste ponto é uma correspondência biunívoca entre a reta r e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.*

Cada ponto Q da reta tem uma única coordenada, $x(Q)$. E, reciprocamente, para cada número real x, existe um único ponto Q da reta, tal que a coordenada de Q seja x.

4. 8. 3 Números reais como expansões decimais

- Expansão decimal de números reais quaisquer.

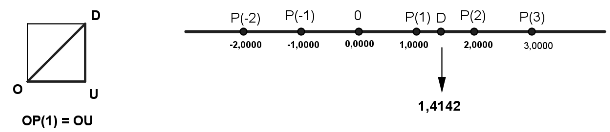


Figura 4.5: Correspondência biunívoca entre a reta r e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais

Intuitivamente, um número real é o resultado que se obtém colocando um sinal $(+, ou-)$ a um número real absoluto. Todo número real absoluto pode ser representado por expansão decimal, logo os reais ficam naturalmente dotados de uma representação deste tipo.

- Significado da expansão decimal dos números reais.

A expansão decimal de um número real é semelhante a expansão decimal de um número real absoluto, diferenciando-se apenas pela necessidade de levar em conta o sinal.

Exemplo:

Escolhido um eixo cartesiano, podemos interpretar o real positivo $+0,250000\ldots$ como sendo a coordenada de um ponto P sobre o eixo, que é localizado da seguinte maneira: para ir da origem do eixo até P, tenho de caminhar para direita dois décimos da unidade e mais cinco centésimos da unidade. Semelhantemente, $-0,250000\ldots$ é a coordenada de um ponto P', que é localizado do seguinte modo: para ir da origem do eixo até P', tenho que caminhar para esquerda dois décimos da unidade e mais cinco centésimos da unidade. Os pontos P e P' são simétricos em relação à origem.

- Duplicidade de expansão.

Certos números reais absolutos tem uma dupla representação decimal(uma expansão 0-terminante e outra 9-terminante), logo é importante definimos a relação de igualdade entre números reais em termos de suas expansões decimais.

Teorema 4.8.2. *Sendo a e b números reais, temos que eles serão iguais se, e somente se*

- ou $a = 0$ e $b = 0$;

- ou a e b são reais positivos e, assim da forma

$a = +m, a_1a_2a_3\ldots$ *e* $b = +M, b_1b_2b_3\ldots,$

ou, então ambos são reais negativos e, dessa forma

$a = -m, a_1a_2a_3\ldots$ *e* $b = -M, b_1b_2b_3\ldots,$

onde $m, M \geqslant 0$ são inteiros; os a_k e os b_k são dígitos; pelo menos um dentre m e os a_k é não nulo, e ao menos um dentre M e os b_k é não nulo. Em qualquer situação vale a seguinte igualdade entre números reais absolutos:

$m, a_1a_2a_3\ldots = M, b_1b_2b_3\ldots$

Assim, +0,25000... = +0,24999..., -1 = -1,000...= -0,999....

Definição 4.8.4. *Número irracional é todo número real que não é um número racional. Denotado por $\mathbb{I}$, o conjunto dos números irracionais.*

Assim, o conjunto dos números reais está dividido em duas classes disjuntas:
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Vimos alguns números irracionais positivos e, colocando um sinal negativo no valor absoluto dos mesmos, obtemos números irracionais negativos:

-0,10100100010000100000...; -012012120121212...; -0,1010010000010000000000000100....

Teorema 4.8.3. *Os números reais podem ser caracterizados em termos de suas expansões decimais, da seguinte forma:*

- os números racionais são números reais que têm, ao menos, uma expansão decimal periódica;

- os números irracionais têm exatamente uma expansão decimal e ela não é periódica.

4. 8. 4 Ordenação dos números reais

Nesta seção, mostraremos como ordenar, somar e multiplicar os números reais, fazendo uma extensão, segundo o Princípio de Permanência de H. Hankel[4]. Iremos definir uma ordem($<$), uma adição($+$) e uma multiplicação(.) em $\mathbb{R}$. Para isso, estenderemos as correspondentes ordenações e operações aritméticas em $\mathbb{Z} e \mathbb{Q}$, preservando ao máximo suas propriedades.

Queremos construir um campo $[\mathbb{R}, <, +, .]$.

A expansão decimal de um número real absoluto nos diz até quantas unidades, até quantos décimos, até quantos centésimos, até quantos milésimos, etc. cabem no mesmo. Particularmente, dado um real absoluto $x = m, a_1a_2a_3\ldots$, podemos escrever:

$$m, a_1a_2a_3\ldots a_n \leqslant x \leqslant m, a_1a_2a_3\ldots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Desse modo, a definição de expansão decimal já traz embutida uma relação de ordem entre real absoluto x e os números racionais que se obtém truncando sua expansão decimal.

Logo podemos estabelecer uma relação de ordem entre dois reais absolutos quaisquer, a partir da comparação entre as respectivas expansões decimais. Assim, dados dois números reais absolutos distintos x e y, escrevendo suas expansões decimais:

$x = m, a_1a_2a_3\ldots$ e $y = M, b_1b_2b_3\ldots$

Para sabermos que é o maior entre x e y, comparemos inicialmente m com M.

- Se $m < M$, então dizemos que x é menor do que y e escrevemos $x < y$.
- Se $M < m$, então dizemos que y é menor do que x e escrevemos $y < x$.
- Se $m = M$, então comparamos $a_1 com b_1$. Se tivermos $a_1 < b_1$, então $x < y$, e se $b_1 < a_1$, então $y < x$. Resta a possibilidade $a_1 = b_1$, assim: $m = M$ e $a_1 = b_1$. Nesse caso, comparamos $a_2 com b_2$, aplicando o mesmo critério. Se $a_2 = b_2$, então comparamos

[4]Herman Hankel, matemático alemão que por cerca de 1860 introduziu a ideia de número formal.

$a_3 com b_3$, e assim por diante. Pode acontecer de termos muitos dígitos da representação decimal de x iguais aos correspondentes dígitos da representação decimal de y, mas como $x \neq y$, ocorrerá um primeiro valor de n para o qual $a_n \neq b_n$. Assim, teremos $a_i = b_i$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Então: $x < y$, se $a_n < b_n$, ou $y < x$, se $b_n < a_n$.

Definição 4.8.5. *Dados dois números reais absolutos, escrevemos $x < y$ (x é menor do que y), ou $y > x$ (y é maior do que x), se e somente se:*

** $x \neq y$;*

** e, sendo x e y representados por*

$x = m, a_1 a_2 \ldots$ e $y = M, b_1 b_2 \ldots,$

tivermos: ou $(m < M)$, ou ($m = M$, mas $a_n < b_n$, onde n é o primeiro índice i tal que $a_i \neq b_i$.

A definição acima não permite afirmar que 0,999... $<$ 1,000...; pois essas expansões decimais representam o mesmo número racional, logo x não é diferente de y e a primeira parte definição acima não se aplica.

A definição de ordem entre os reais absolutos está bem definida, na medida em que a conclusão de ordem relativa entre dois números absolutos dados, independe das expansões decimais usados na sua representação.

Observando o seguinte exemplo:

Seja $x = \dfrac{1}{4}$, achemos quais y verificam $x < y$, temos que x tem duas representações decimais: 0,250... e 0,24999.... Aplicando a definição com a segunda expansão temos que é impossível termos algo do tipo 0,24999... $< y = 0,24abc\ldots$. Como 0,24999... $=$ 0,25000..., a próxima possibilidade a examinar é 0,24999... $< y = 0,25abc\ldots$, com ao menos um dígito não nulo entre *a*,*b*, *c*... , possibilidade esta que é sempre verdadeira.

Definição 4.8.6. *Sendo x e y dois números reais distintos, escreveremos $x < y$ e dizemos x é menor do que y quando, e somente quando:*

- ou ambos tem o sinal + e verificam $|x| < |y|$;

- ou ambos tem o sinal - e verificam $|y| < |x|$;

- ou x é negativo e y positivo.

Obs: Sendo x e y números reais absolutos, então verificamos que $x \leqslant y$ (ordem dos reais absolutos) $\iff +x \leqslant +y$ (ordem de números reais). Com $+x$ é identificado como x, podemos então dizer:

$x \leqslant y$ como reais absolutos) $\iff$ $x \leqslant y$ como de números reais)

assim a ordem dos números reais estende a ordem dos números reais absolutos. Particularmente, podemos dizer que os números absolutos são os números reais $x \geqslant 0$.

A ordem entre números reais tem as seguintes propriedade:

I) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

II) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x \Rightarrow$ x = y, para todo x, y $\in \mathbb{R}$;

III) $x \leqslant y$ e $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$, para todo x, y, $z \in \mathbb{R}$.

A ordem entre os números reais verifica a Lei da Tricotomia: para cada dois reais quaisquer, x e y, vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:

ou $x = y$, ou $x < y$, ou $y < x$.

Teorema 4.8.4. *Consideremos dois racionais positivos, $r \neq s$, representados respectivamente, pelas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde a, b, c e d são números inteiros positivos e sejam, r $= m, a_1a_2a_3\ldots$ e $s = M, b_1b_2b_3\ldots$ suas expansões decimais (não 9-terminantes). Assim, temos que:*

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ na ordem dos números racionais $\Longleftrightarrow m, a_1a_2a_3... < M, b_1b_2b_3...$ na ordem dos números reais.

Demonstração: $\Longrightarrow$

Pela divisão Euclidiana, temos:

$$\frac{a}{b} = m + \frac{R_1}{b},\ \frac{c}{d} = M + \frac{R_2}{d},\ \text{com } 0 \leqslant \frac{R_1}{b}, \frac{R_2}{d} < 1,$$

assim, na ordem dos racionais: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow m \leqslant M$, logo teremos duas possibilidades a examinar:

* $m < M$

Neste caso, diretamente da definição de ordem entre reais, temos que

r $= m, a_1a_2a_3\ldots < M, b_1b_2b_3\ldots =$ s.

* $m = M$

Neste caso, como os dois racionais são distintos, deve existir uma primeira casa onde as expansões terão dígitos diferentes, ou seja, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ e $a_3 \neq b_3$. Então, basta mostrarmos que a hipótese $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow a_3 < b_3$.

Supondo $a_3 > b_3$, veremos que isso nos leva a uma impossibilidade.

A divisão Euclidiana produz

$$\frac{a}{b} = m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + A,\ \frac{c}{d} = M + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + B,$$

temos que, na ordem dos racionais, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ implica $A < B$, e supondo que $a_3 > b_3$, nos levaria ao resultado absurdo:

$$A \geqslant \frac{a_3}{1000} \geqslant \frac{1 + b_3}{1000} > B, \text{ portanto } A > B.$$

$\Longleftarrow$

Veremos agora, que $m, a_1a_2a_3... < M, b_1b_2b_3\ldots$, na ordem dos reais $\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, na ordem dos racionais $\iff ad < bc$.

* $m < M$

Temos que $M = m + k$, com $k \geqslant 1$. Logo, a divisão Euclidiana de $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ produz:

$a = bm + R_1$ e $c = dM + R_2 = dm + dk + R_2$, de modo que: $ad = bdm + dR_1$ e $bc = bdm + bdk + bR_2$. Logo, temos que

$ad < bc \iff dR_1 < bdk + bR_2$.

Portanto, basta observar que $0 \leqslant R_1 < b$ implica

$0 \leqslant dR_1 < bd \leqslant bdk \leqslant bdk + bR_2$

Logo, $dR_1 < bdk + bR_2$

* $m = M$

Neste caso, $m, a_1a_2a_3 \ldots < m, b_1b_2b_3 \ldots$, logo, existe uma primeira casa decimal, por exemplo a terceira, tal que: $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ e $a_3 < b_3$. Assim, basta mostrar que isso implica $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, na ordem dos racionais. Como temos $1 + a_3 \leqslant b_3$, segue que:

$$\frac{a}{b} < m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{1}{1000} \leqslant \mathrm{m} + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{b_3}{1000} \leqslant \frac{c}{d}. \qquad \square$$

4. 8. 5 Propriedade do Contínuo dos números reais

Nesta seção combinaremos o Teorema Fundamental da Geometria Analítica com a ordenação dos números reais, de forma a produzir uma versão numérica do Postulado do Contínuo.

Afirmamos que dados números reais distintos x e y, tem-se $x < y$, se e somente se, no eixo cartesiano, x for coordenada de um ponto que está à esquerda do ponto que tenha y para coordenada. ou seja,

sendo $x = x(P)$ e $y = x(Q)$, então: $x < y \iff P$ à esquerda de Q. Com a ordenação do conjunto $\mathbb{R}$ podemos introduzir o conceito de intervalo, o qual é a versão numérica de segmento de reta do eixo Euclidiano.

Definição 4.8.7. *Sendo x e y números reais e $x \leqslant y$, intervalo fechado de extremos x e y é o conjunto dado por*

$[x, y] = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leqslant z \leqslant y\}$.

Definição 4.8.8. *Uma sequência de intervalos fechados $[x_n, y_n]$ é encaixante se e somente se, verificarmos que:*

$\ldots \subseteq [x_n, y_n] \subseteq \ldots \subseteq [x_1, y_1] \subseteq [x_0, y_0]$.

Definição 4.8.9. *Uma sequência encaixante de intervalos fechados $[x_n, y_n]$ é dita evanescente se e somente se, a correspondente sequência encaixante de segmentos de reta $P(x_n)P(y_n)$ for evanescente.*

Teorema 4.8.5. *Para cada sequência evanescente de intervalos, $[x_n, y_n]$, existe exatamente um número real x pertencente a cada um dos intervalos da sequência. Existe, exatamente um $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \in [x_n, y_n]$, pata todo $n \in \mathbb{N}$.*

A Propriedade do Contínuo é uma propriedade importantíssima do conjunto dos números reais.

4. 8. 6 Adição de números reais

- Adição de dois reais positivos

Dados x e y reais positivos, com expansões decimais

$x = m, a_1a_2\ldots$ e $y = M, b_1b_2\ldots$

sejam, para cada $n \geqslant 1$, os números racionais

$x_n = m, a_1a_2\ldots a_n$ e $y_n = M, b_1b_2\ldots b_n$.

Da definição de expansão decimal, temos que:

$$x_n \leqslant x \leqslant x_n + \frac{1}{10^n}$$

$$y_n \leqslant y \leqslant y_n + \frac{1}{10^n}.$$

Sabemos que, os x_n e y_n são números racionais e desse modo, no caso particular em que x e y também são racionais, das desigualdades acima temos [5], na ordem dos racionais:

$$x_n + y_n \leqslant x + y \leqslant x_n + y_n + \frac{2}{10^n}.$$

Assim, se x e y forem racionais, a soma $x + y$ estará em cada elemento da sequência de intervalos $[x_n + y_n, x_n + y_n + \frac{2}{10^n}]$, que é encaixante e evanescente, e pela Propriedade do Contínuo, só podemos ter $x + y$ como elemento comum. Dessa forma, o encaixante sai imediatamente das desigualdades a seguir, e a evanescência é imediata:

$$x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x \leqslant x_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant x_n + \frac{1}{10^n}$$

$$y_n \leqslant y_{n+1} \leqslant y \leqslant y_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant y_n + \frac{1}{10^n}.$$

Fica natural definirmos a soma $x + y$, no caso de x e y reais positivos, como sendo o único número real comum a sequência de intervalos encaixante e evanescente que vimos acima.

Definição 4.8.10. *Dados x e y números reais positivos, com expansões decimais*

$x = m, a_1a_2\ldots$ *e* $y = M, b_1b_2\ldots$

sejam, para cada $n \geqslant 1$, os números racionais

$x_n = m, a_1a_2\ldots a_n$ *e* $y_n = M, b_1b_2\ldots b_n$.

[5] Para a, b, c, d racionais, $a \leqslant b$ e $c \leqslant d$ implicam $a + c \leqslant b + d$.

Assim sendo, a adição dos números reais positivos x e y produz um resultado chamado soma, que é denotado por $x + y$, e é definido como sendo o único número real comum a todos os elementos da sequência de intervalos encaixantes e evanescentes:

$[x_n + y_n, x_n + y_n + \dfrac{2}{10^n}]$.

A definição acima não dá explicitamente a expansão decimal $x + y$ em termos de expansões decimais de x e de y. Mas, ela nos fornece aproximações racionais de de $x + y$ tão boas quanto desejarmos. De fato, observe que, x_n+y_n e $x_n+y_n+\dfrac{2}{10^n}$ são aproximações racionais, por falta e por excesso, para o número $x + y$, e que o erro $\dfrac{2}{10^n}$ pode ser tão pequeno quanto se queira. Logo, esse procedimento é satisfatório.

Exemplo:

Vamos somar 0,58000... e 0,333000.... Aplicando a definição, obtemos a sequência de intervalos evanescentes:

$[0, 8; 1, 0] \supset [0, 91; 0, 93] \supset [0, 913; 0915] \supset [0, 9130; 0, 9132] \supset [0, 91300; 0, 91302] \supset \ldots$

podemos ver que $0, 58000\ldots + 0, 3330000\ldots = 0, 9130000\ldots = 0, 913$.

Exemplo:

Vamos obter o valor da soma $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}$ de números reais, de modo que o valor da soma tenha um erro de no máximo uma unidade na terceira casa decimal.

Aplicando a definição e escrevendo as respectivas aproximações, teremos:

$x_1 + y_1 = 0{,}3 + 0{,}6 = 0{,}9 \to [0{,}9;1{,}1] \to \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \simeq 1{,}0 \pm 0{,}1$

$x_2 + y_2 = 0{,}33 + 0{,}66 = 0{,}99 \to [0{,}99;1{,}01] \to \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \simeq 1{,}00 \pm 0{,}01$

$x_3 + y_3 = 0{,}333 + 0{,}666 = 0{,}999 \to [0{,}999;1{,}001] \to \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \simeq 1{,}000 \pm 0{,}001$.

- Adição de dois reais negativos

Definição 4.8.11. *A adição de dois números reais negativos, x e y, produz uma soma $x + y$ que é obtida por meio da adição dos reais positivos $\mid x \mid$ e $\mid y \mid$:*

$x + y = -\ (\mid x \mid + \mid y \mid)$.

- Adição de dois reais de sinais opostos

No caso de x e y serem números reais e com mesmo sinal, é imediato da definição que a adição é uma operação comutativa. A adição também é comutativa no caso dos números racionais quaisquer, no caso em que x e y tenham sinais opostos, também essa propriedade contínua valendo.

Definição 4.8.12. *Dados x número real positivo e y real negativo, com expansões decimais*

$x = m, a_1 a_2 \dots$ *e* $y = -M, b_1 b_2 \dots$,

sejam - pelas expansões de x *e* $\mid y \mid$, *e para cada* $n \geqslant 1$ *- os números racionais:*

$x_n = a_1 a_2 \dots a_n$ *e* $\mid y \mid_n = M, a_1 a_2 \dots b_n$.

Dessa forma, a adição do número real positivo x e o real negativo y produz um resultado chamado soma, denotado por $x + y$, e é definido como sendo o único número real comum a todos os elementos da sequência de intervalos encaixante e evanescente:

$[x_n - \mid y \mid_n - \frac{1}{10^n}, x_n - \mid y \mid_n + \frac{1}{10^n}]$.

Precisamos mostrar que esta definição está bem fundamentada e para isso mostraremos que a sequência de intervalos envolvida é encaixante e evanescente. Particularmente, no caso de x e y serem racionais, ela coincide com a soma $x + y$ de racionais. Assim, estamos estendendo a adição dos racionais para os reais.

Para as expansões decimais de x e $\mid y \mid$, valem as seguintes desigualdades na ordem dos reais:

$x_n \leqslant x \leqslant x_n + \frac{1}{10^n}$

$\mid y \mid_n \leqslant \mid y \mid \leqslant \mid y \mid_n + \frac{1}{10^n}$.

No caso particular em que x e y são números racionais, a segunda desigualdade acima pode ser escrita como:

$- \mid y \mid_n - \frac{1}{10^n} \leqslant - \mid y \mid \leqslant - \mid y \mid_n$,

de modo que, pelas propriedades da ordem entre racionais, obtemos;

$(x_n - \mid y \mid_n) - \frac{1}{10^n} \leqslant x - \mid y \mid \leqslant (x_n - \mid y \mid_n) + \frac{1}{10^n}$.

Como y = - $\mid y \mid$:

$(x_n - \mid y \mid_n) - \frac{1}{10^n} \leqslant x + y \leqslant (x_n - \mid y \mid_n) + \frac{1}{10^n}$,

e assim vemos que, se x e y fossem racionais,

$x + y \in [x_n - \mid y \mid_n - \frac{1}{10^n}, x_n - \mid y \mid_n + \frac{1}{10^n}]$, para todo $n \geqslant 1$.

Pela propriedade do contínuo, e como a sequência acima é encaixante e evanescente, somente $x + y$ pode ser elemento comum a todos os intervalos. Assim, o efeito encaixante sai imediatamente das propriedades da ordem dos racionais e da soma das desigualdades:

$x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant x_n + \frac{1}{10^n}$

$- \mid y \mid_n - \frac{1}{10^n} \leqslant - \mid y \mid_{n+1} - \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant - \mid y \mid_{n+1} \leqslant - \mid y \mid_n$,

o que resulta em:

$x_n - \mid y \mid_n - \dfrac{1}{10^n} \leqslant x_{n+1} - \mid y \mid_{n+1} - \dfrac{1}{10^{n+1}} \leqslant x_{n+1} - \mid y \mid_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}} \leqslant x_n - \mid y \mid_n$
$+\dfrac{1}{10^n}$, e a evanescência é imediata.

Exemplo:

Somar $1,222\ldots + (-2,111)$. Procedendo como o indicado, obtemos:

$x_1 - \mid y \mid_1 = 1,2 - 2,1 = -0,9 \to [-1,0; -0,8]$

$x_2 - \mid y \mid_2 = 1,22 - 2,11 = -0,89 \to [-0,90; -0,88]$

$x_3 - \mid y \mid_3 = 1,222 - 2,111 = -0,889 \to [-0,890; -0,888]$

$x_4 - \mid y \mid_4 = 1,2222 - 2,1110 = -0,8888 \to [-0,8889; -0,8887]$

prosseguindo de forma semelhante, temos uma sequência encaixante e evanescente:

$[-1,0; -0,8] \supset [-0,90; -0,88] \supset [-0,890; -0,888] \supset [-0,8889; -0,8887] \supset [-0,88879; -0,88877] \supset [-0,888778; -0,888779] \supset \ldots.$

De onde se pode observar que 1,222... $+ (-2,111) = -0,888777\ldots$.

Teorema 4.8.6. *A adição de números reais é compatível com a relação de ordem, ou seja, sendo a, b, $c \in \mathbb{R}$:*

$a < b \iff a + c < b + c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Por hipótese, $b - a > 0 \Rightarrow b - a + c - c > 0 \Rightarrow b + c - a - c > 0 \Rightarrow b + c - (a + c) > 0 \Rightarrow b + c > a + c$. Para demonstrarmos a volta, utilizamos a lei do corte.
□

4. 8. 7 Multiplicação de números reais

- Multiplicação de reais positivos

Lema 4.8.1. *Sendo x e y dois números racionais positivos, temos:*

$x_n y_n \leqslant xy \leqslant (x_n + \dfrac{1}{10^n})(y_n + \dfrac{1}{10^n})$,

de modo que o produto xy sempre está em cada elemento da sequência de intervalos $[x_n y_n, (x_n + \dfrac{1}{10^n})(y_n + \dfrac{1}{10^n})]$, a qual é encaixante e evanescente.

Demonstração: Da definição de expansão decimal, temos que:

$x_n \leqslant x \leqslant x_n + \dfrac{1}{10^n}$, $y_n \leqslant y \leqslant y_n + \dfrac{1}{10^n}$.

Todos os valores acima são números racionais, multiplicando as desigualdades acima obtemos [6], na ordem dos números racionais:

$x_n y_n \leqslant xy \leqslant (x_n + \dfrac{1}{10^n})(y_n + \dfrac{1}{10^n})$,

de modo que xy $\in [x_n y_n, (x_n + \dfrac{1}{10^n})(y_n + \dfrac{1}{10^n})]$, para todo n.

[6] Para a, b, c, r racionais positivos, $a \leqslant b$ e $c \leqslant d$ implicam $ac \leqslant bd$.

Provaremos que essa sequência é encaixante e evanescente.
O encaixante sai imediatamente pela multiplicação das desigualdades conhecidas:
$x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}} \leqslant x_n + \dfrac{1}{10^n}$

$y_n \leqslant y_{n+1} \leqslant y_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}} \leqslant y_n + \dfrac{1}{10^n}.$
Por sua vez, a evanescência sai de:
$(x_n + \dfrac{1}{10^n})(y_n + \dfrac{1}{10^n}) - x_n y_n = (x_n + y_n)\dfrac{1}{10^n} + \dfrac{1}{10^{2n}} \leqslant (m + M + 2)\dfrac{1}{10^n} + \dfrac{1}{10^{2n}} =$

$= (m + M + 2 + \dfrac{1}{10^n})\dfrac{1}{10^n} \leqslant (m + M + 3)\dfrac{1}{10^n}.$
Assim, como queremos estender a multiplicação de números racionais para números reais, o Lema acima mostra que é natural definirmos o produto $x.y$, no caso de x e y reais positivos, como sendo o único número real comum a sequência de intervalos encaixante e evanescente que encontramos nesse lema. □

Definição 4.8.13. *Dados x e y números reais positivos, com expansões decimais $x = m, a_1a_2\ldots$ e $y = M, b_1b_2\ldots$, sejam, para cada $n \geqslant 1$, os números racionais $x_n = m, a_1a_2\ldots a_n$ e $y_n = M, b_1b_2\ldots b_n$.*

Assim, a multiplicação dos números reais positivos x e y produz um resultado chamado produto, o qual é denotado por $x.y$, ou xy, e é definido como sendo o único número real comum a todos os elementos da sequência de intervalos encaixante e evanescente:
$[x_n y_n, (x_n + \dfrac{1}{10^n})(y_n + \dfrac{1}{10^n})].$

Exemplo:

Verificando a multiplicação de 3 por $\dfrac{2}{3}$, como números reais, obtemos como produto o número 2. Assim:

x_1y_1 = 3,0 x 0,6 = 1,8 e 3,1 x 0,7 = 2,17 → [1,8;2,17]
x_2y_2 = 3,00 x 0,66 = 1,98 e 3,01 x 0,67 = 2,0167 → [1,98;2,0167]
x_3y_3 = 3,000 x 0,666 = 1,998 e 3,001 x 0,667 = 2,00167 → [1,998;2,00167]
x_4y_4 = 3,0000 x 0,6666 = 1,9998 e 3,0001 x 0,6667 = 2,000167 → [1,9998;2,000167].
assim concluímos que o produto é 2.

Exemplo:

Verifiquemos que o quadrado de $\dfrac{1}{3}$, interpretado como produto de reais, é $\dfrac{1}{9}$. Assim:

$x_1^2 = 0,3^2 = 0,09$ e $0,4^2 = 0,16$ → [0,09;0,16]
$x_2^2 = 0,33^2 = 0,1089$ e $0,34^2 = 0,1156$ → [0,1089;0,1156]
$x_3^2 = 0,333^2 = 0,11089$ e $0,334^2 = 0,11156$ → [0,11089;0,11156]
$x_4^2 = 0,3333^2 = 0,111089$ e $0,3334^2 = 0,111156$ → [0,111089;0,111156]

e continua num padrão regular, assim podemos afirmar que

$(\frac{1}{3})^2 = 0,111\ldots = \frac{1}{9}$.

Exemplo:

Usando a definição acima, determinaremos o produto do número

racional 1,414414414... pelo irracional 3,010010001..., com erro de, no máximo, uma unidade da terceira casa decimal.

Aplicando a definição:

$n = 1 \rightarrow$ 1,4 x 3,0 = 4,2 e 1,5 X 3,1 = 4,65 $\rightarrow$ [4,2;4,65]

$n = 2 \rightarrow$ 1,41 x 3,01 = 4,2441 e 1,42 X 3,02 = 4,2884 $\rightarrow$ [4,2441;4,2884]

$n = 3 \rightarrow$ 1,414 x 3,010 = 4,25614 e 1,415 X 3,011 = 4,26057 $\rightarrow$ [4,25614;4,26057]

$n = 4 \rightarrow$ 1,4141 x 3,0100 = 4,25644... e 1,4142 X 3,0101 = 4,25688... $\rightarrow$ [4,25644...;4,25688...].

Logo, o produto xy = 4,256..., com erro menor do que 0,001.

- Multiplicação por real negativo

Definição 4.8.14. *Sejam x e y dois números reais, tais que, ao menos um deles é negativo. O produto obtido $x.y$ é obtido usando a definição 4.6.8 e o exercício acima, segundo as seguintes possibilidades lógicas:*

- se $x \geqslant 0$ e $y < 0$, temos: $x.y$ = -($x.\mid y \mid$);
- se $x < 0$ e $y \geqslant 0$, temos: $x.y = -(\mid x \mid .y)$;
- se $x < 0$ e $y < 0$, temos: $x.y = \mid x \mid . \mid y \mid$.

A operação de multiplicação é compatível com a ordem dos números reais. O Teorema abaixo, generaliza, para os números reais, a compatibilidade da multiplicação, com a ordem dos números racionais.

Teorema 4.8.7. *A multiplicação de números reais é compatível com a relação de ordem, ou seja, sendo a, $b \in \mathbb{R}$:*

$a < b \iff a.c < b.c$, para todo c real positivo.

Demonstração: Por hipótese, $b - a > 0 \Rightarrow (b - a).c > 0 \Rightarrow bc - ac > 0 \Rightarrow bc > ac$. □

- Raiz quadrada de um número real positivo

Definição 4.8.15. *Raiz quadrada de um número r, é qualquer número x tal que $x^2 = r$.*

Definição 4.8.16. *Raiz quadrada aritmética ou principal de um número real r, é qualquer $x \geqslant 0$, se existir, $x^2 = r$.*

Notação: $x = \sqrt{r}$ sempre indica a raiz quadrada aritmética de r.

Pelo visto acima, zero tem uma única raiz quadrada aritmética: $\sqrt{0} = 0$. Nenhum real negativo tem raiz quadrada aritmética; ou seja, $\sqrt{x}$ não está definida para $x < 0$. Ao contrário, o teorema seguinte diz que $\sqrt{x}$ sempre está definida para $x > 0$.

Teorema 4.8.8. *Todo número real positivo ou nulo tem uma, e somente uma, raiz quadrada aritmética.*

Foi visto anteriormente no capítulo 3, utilizando os pares de Cauchy, como determinar a $\sqrt{2}$, de modo que não o faremos neste capítulo. Vimos também a unicidade da raiz quadrada aritmética.

Corolário 4.8.1. *I) Todo número real $r > 0$ tem exatamente duas raízes quadradas, e elas sempre podem ser escritas em termos de sua raiz quadrada aritmética: $+\sqrt{r}$ e $-\sqrt{r}$;*

II) O zero tem apenas uma raiz quadrada:$\sqrt{0} = 0$;

III) Nenhum número real $r < 0$ tem raiz quadrada em $\mathbb{R}$.

O quadrado r^2 de um número real r tem uma, e somente uma, raiz quadrada aritmética: $\sqrt{r^2} =\mid r \mid$.

Por outro lado, $\mid r \mid$ e - $\mid r \mid$ são suas raízes quadradas. É errado escrever $\sqrt{4} = \pm 2$, é correto escrever $\sqrt{4} = 2$.

4. 8. 8 Os números reais formam um corpo ordenado

Veremos que o conjunto dos números reais têm a estrutura de corpo ordenado, assim como o conjunto dos números racionais. Mas, o campo dos reais tem a Propriedade do Contínuo e o campo dos racionais não tem essa propriedade.

- Estrutura de corpo $[\mathbb{R}, +, .]$

Teorema 4.8.9. *O campo dos números reais, $[\mathbb{R}, +, .]$, tem um conjunto de propriedades básicas que lhe dão uma estrutura de corpo. Para todos a, b,c $\in \mathbb{R}$:*

I) as operações de adição (+) e multiplicação (.) são fechadas em todo $\mathbb{R}$:

$a + b \in \mathbb{R}$ *e* $a.b \in \mathbb{R}$

II) associatividade das operações:

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a.(b.c) = (a.b).c$

III) existência do elemento neutro:

$a + 0 = a$

$a.1 = a$

IV) existência do inverso:

existe $a' \in \mathbb{R}$ tal que $a + a' = 0$. Ou seja, $a' = -a$. Sendo $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a.a^{-1} = 1$.

V) comutatividade das operações:

$a + b = b + a$

$a.b = b.a$

VI) distributividade da multiplicação:

$a.(b + c) = a.b + a.c$

- Estrutura de corpo ordenado $[\mathbb{R}, +, ., <]$

Teorema 4.8.10. *O campo $[\mathbb{R}, +, ., <]$ tem estrutura de corpo ordenado, ou seja, é um corpo no qual existe uma relação de ordem, $<$, que verifica as propriedades abaixo.*

Sendo a, b, c, $d \in \mathbb{R}$:

I) $a < b \iff a + c < b + c$, para todo $c \in \mathbb{R}$

II) $a < b \iff a.c < b.c$, para todo $c > 0$.

Corolário 4.8.2. *Sendo a, b, c, $d \in \mathbb{R}$:*

I) a relação de ordem é preservada na adição:

$a < b \iff a + c < b + c$, para todo $c \in \mathbb{R}$,

$a \leqslant b \iff a + c \leqslant b + c$, para todo $c \in \mathbb{R}$;

II) a relação de ordem é preservada na multiplicação para os reais positivos:

$a < b \iff a.c < b.c$, para todo $c > 0$,

$a \leqslant b \iff a.c \leqslant b.c$, para todo $c > 0$;

III) a relação de ordem é invertida na multiplicação por reais negativos:

$a < b \iff a.c > b.c$, para todo $c < 0$,

$a \leqslant b \iff a.c \geqslant b.c$, para todo $c < 0$;

- O conjunto dos números reais é denso

Definição 4.8.17. *É chamado de intermediário de dois números reais $x < y$ a qualquer número real z, tal que $x < z < y$.*

Definição 4.8.18. *Um conjunto A de números reais é denso em $\mathbb{R}$ se e somente se, entre cada par de elementos distintos de números reais, exista ao menos um intermediário que esteja em A.*

Teorema 4.8.11. *Entre cada par de números reais existe ao menos um intermediário que é um número racional. Ou seja, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Dados reais $x < y$, escrevamos suas expansões decimais não 9-terminantes do seguinte modo:

$x = a_0, a_1a_2a_3 \ldots < y = b_0, b_1b_2b_3 \ldots$

Pela definição de ordem, segue que existe $n \geqslant 0$, tal que $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots,$ $a_{n-1} = b_{n-1}$ e $a_n < b_n$. Como estamos trabalhando com expansões não 9-terminantes, existe um menor índice $k > n$, tal que $a_k \neq 9$.

Assim, construímos o número racional dado por

$z = c_0, c_1c_2c_3 \ldots c_n \ldots c_k = a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots a_{k-1}c_k,$

onde $c_k = 1 + a_k \leqslant 9$. Afirmamos que $x < z < y$. Logo:

• $x < z$, pois as expansões decimais de x e z coincidem até a casa decimal $k - 1$ e, na casa seguinte, $a_k < c_k$;

• $z < y$, pois as expansões decimais de z e y coincidem até a casa decimal $n-1$ e, na casa seguinte, $c_n = a_n < b_n$. □

Teorema 4.8.12. *Entre cada par de números reais existe ao menos um intermediário que é um número irracional. Assim, o conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Usando a notação da demonstração anterior e construindo o número real $z^{'} = c_0, c_1c_2c_3 \ldots c_k01001000100001 \ldots$.
Afirmamos que $z^{'}$ é irracional e que ele é intermediário entre x e y. Logo:
• $x < z^{'}$, uma vez que, $z < z^{'}$;
• $z^{'} < y$, uma vez que $c_i = a_i = b_i$, para i = 0, 1,..., n-1, e $c_n = a_n < b_n$.

□

- Propriedade arquimediana de $[\mathbb{R}, +, ., <]$

Teorema 4.8.13. *O campo dos números reais possui a propriedade arquimediana: dado um número real $\delta > 0$, para cada escolha de $x \in \mathbb{R}$, sempre será possível encontrar $n \in \mathbb{Z}$, tal que $x < n\delta$.*

Demonstração: O resultado é verdadeiro para os casos $x \leqslant 0$; resta verificarmos os casos em que $x > 0$, cuja expansão decimal é $x = m, a_1a_2a_3 \ldots$, de modo que $x \leqslant m + 1 = inteiro$. Considerando dois casos, de acordo com a racionalidade de δ:
• $\delta =$ número racional positivo. Neste caso, como o campo dos racionais é arquimediano, escolhendo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $m + 1 < n\delta$, podemos afirmar que $x < n\delta$.
• $\delta =$ número irracional positivo. Abortando de forma conveniente a expansão decimal de δ, podemos ver que conseguimos um racional r, tal que $0 < r < \delta$. Pelo raciocínio do caso anterior, encontramos $n \in \mathbb{Z}$, tal que $m + 1 < nr < n\delta$; de modo que $x < n\delta$. □

Obs: A outra propriedade importante do conjunto dos números reais é a Propriedade do Contínuo, a qual foi explanada anteriormente.

4.9 Localizando números irracionais em uma reta numérica

Introdução

O número irracional raiz quadrada de 7 está compreendido entre os números:

a) 2 e 3

b) 13 e 15

c) 3 e 6

d) 6 e 8

Esta é uma questão típica da Prova Brasil de Matemática. As raízes não exatas são, em geral, mal compreendidas pelos alunos. Muitos, ao se depararem com o número, podem argumentar que ele não existe simplesmente porque não representa uma raiz quadrada exata, já que é um número irracional (ou seja, um número decimal com infinitas casas decimais não periódicas).

Mas, já vimos, que essa raiz quadrada existe e é possível aproximá-la desde sua parte inteira até um certo número de casas decimais (se assim se desejar). Associamos também o estudo dos números quadrados perfeitos, que geram as raízes quadradas exatas. O aluno deve intercalar o 7 entre os dois números quadrados perfeitos mais próximos a ele, ou seja, 4 e 9. Matematicamente, podemos escrever $4 < 7 < 9$.

Vimos também que os números irracionais apareceram na história da matemática vinculados a contextos da geometria e de medidas. Dessa maneira, o trabalho com o cálculo de diagonais de quadrados e retângulos, aplicando-se o Teorema de Pitágoras, contribui para a familiarização dos alunos com este novo conceito.

Uma sugestão de atividade interessante é localizar na reta numérica o valor de raízes de índice par. Ela associa a representação dos números irracionais na reta numérica ao trabalho com o Teorema de Pitágoras. Para realizá-la, é preciso utilizar régua e compasso. Vamos usar o valor apenas para ilustrar o método.

Objetivo

Localizar números irracionais em uma reta numérica.

Conteúdos

Números irracionais, números reais, Teorema de Pitágoras.

Público alvo

Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Tempo estimado

1 hora/aula

Material necessário

Papel sulfite, régua, compasso e lápis

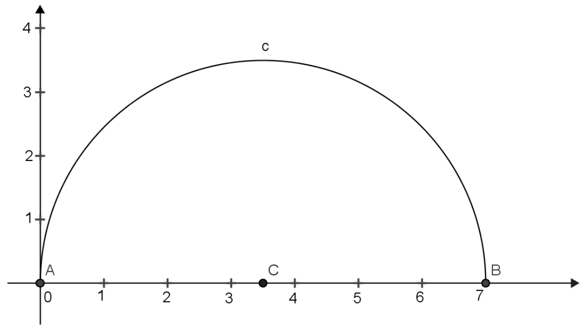
Desenvolvimento

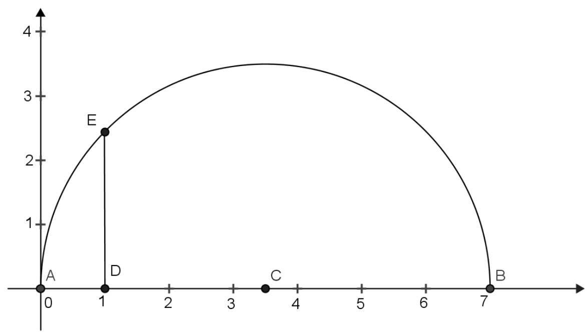
Inicialmente, a turma deverá construir um plano cartesiano e, em seguida, traçar uma semicircunferência de raio 7, de modo que as extremidades do diâmetro sejam os pontos de coordenadas (0,0) e (7,0). Assim, o centro da circunferência estará sobre

$x = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$. Observe a figura abaixo:

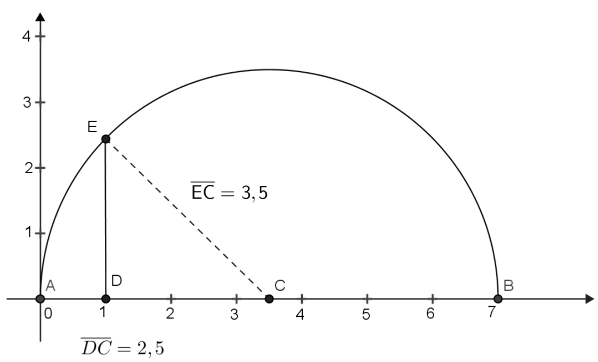
O próximo passo será traçar um segmento perpendicular ao eixo das abscissas no ponto D de coordenadas $(1, 0)$. O ponto de intersecção com a semicircunferência é chamado de E. O segmento DE será apoio na determinação da raiz quadrada procurada. Observe abaixo:

Mostre aos alunos que, no triângulo DEC, há $EC = 3,5$ (raio da semicircunferência), $DC = 2,5$ (ver escala do eixo x). Ao aplicar o Teorema de Pitágoras, será encontrada a





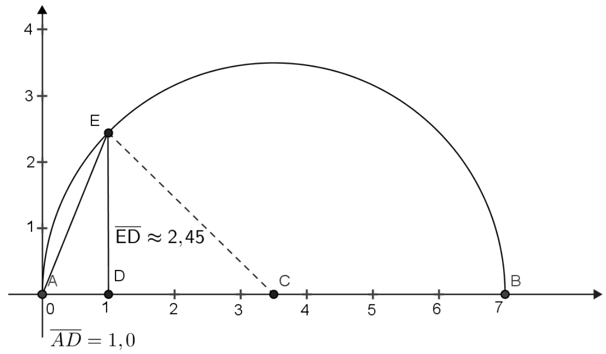
medida aproximada de DE = raiz quadrada de 6 $\approx$ 2,45.

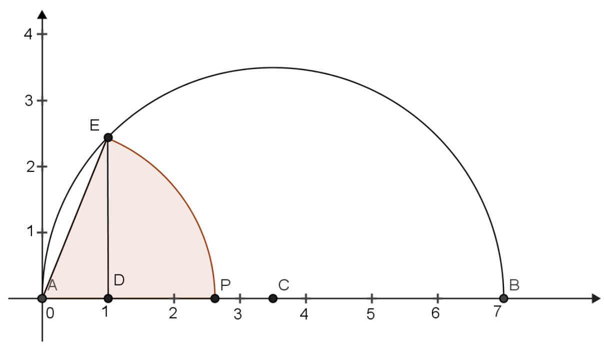


Agora a turma deverá estudar o triângulo ADE. Aponte as medidas dos catetos DE = raiz quadrada de 6 $\approx$ 2,45 e $AD = 1$. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo ADE, a turma descobrirá que a hipotenusa AE mede raiz quadrada de 7 , que é o valor procurado.

Solicite aos estudantes, para localizarem esse valor no eixo das abscissas. Eles deverão abrir o compasso na distância AE. A intersecção com o eixo x (ponto P) determinará a localização na reta numérica, do número irracional raiz quadrada de 7. Nesse momento, você poderá mostrar a aproximação entre inteiros, verificando que a raiz procurada encontra-se entre 2 e 3. $(4 < 7 < 9)$.

Avaliação





Essa atividade permite avaliar conteúdos como o Teorema de Pitágoras e os números quadrados perfeitos, além de mostrar ao aluno que os números irracionais estão relacionados com medidas incomensuráveis, trazendo um sentido prático para este conteúdo. Assim, a aula traz novos sentidos ao número irracional, mostrando ao mesmo tempo sua existência e sua localização na reta numérica.

4.10 Aprofundando o estudo dos números reais

4. 10. 1 Aprofundamento do estudo dos números irracionais

Pelo que já foi visto, a respeito dos números irracionais, podemos apresentar três características equivalentes para o mesmo:

I) são números reais que não são racionais;

II) são números reais cuja expansão é infinita e não-periódica;

III) são números reais que expressam a medida de segmentos da reta Euclidiana incomensuráveis com um segmento de reta unitário, e mais os simétricos destes números.

Infelizmente no Ensino Médio e Fundamental os números irracionais são tratados de forma superficial e não é dada a importância que merecem. Isso gera no discente a sensação de que os números irracionais são menos importantes, anomalias numéricas ou mais uma definição a ser decorada.

Esse tratamento ínfimo dado aos números irracionais consiste, basicamente, na apresentação das características I e II acima, seguidas de alguns exemplos de irracionais com o número π, a diagonal do quadrado de lado unitário, as raízes quadradas $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, e algumas operações com radicais. E o estudo fica por aí, sem o aluno ter a noção satisfatória do que é um número irracional.

Segundo Cydara Ripoll, 2011:

> Diferentemente do estudo dos racionais, que sob o ponto de vista da pesquisa matemática, está essencialmente terminado, existe uma intensa atividade de matemáticos da atualidade buscando descrever e elucidar as propriedades dos vários tipos de números irracionais.

Estudar o irracionais é importantíssimo, pois eles são imprescindíveis, aparecem em diversas áreas do conhecimento e tem se revelado de grande utilidade.

Os irracionais não são anomalias numéricas. Assim como os racionais tem infinitos elementos, podemos listar também infinitos irracionais, por exemplo: $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \ldots$.. E não é só isso: George Cantor, em 1870, provocou um imenso choque na comunidade matemática ao mostrar que a infinitude dos irracionais é muito superior a dos racionais. Ele mostrou que $\mathbb{Q}$ forma um conjunto enumerável [7] enquanto $\mathbb{I}$ tem uma variedade tão grande de números que não pode ser enumerado.

È interessante trabalharmos com os irracionais, mostrando o seu lado desafiador e sua fertilidade matemática. Sabemos que há uma complexidade no seu comportamento e existem diversos enfoques que permitem esclarecer as muitas faces de sua irracionalidade. È importante que o discente trabalhem e manipulem com os irracionais utilizando, diversos exercícios.

Exemplo: Determinando irracionais. Observe a sequência de triângulos retângulos abaixo, iniciada pelo triângulo retângulo isósceles de lado unitário.

Observamos que a medida h_n da hipotenusa tem a seguinte relação: $h_n^2 = n + 1$, dependendo do valor de n, podem ocorrer valores racionais ou irracionais para medida da hipotenusa h_n. É muito importante para o discente trabalhar com esse tipo de situação.

4. 10. 2 Representação aritmética e algébrica dos números reais

Existem dois tipos de representações para os números reais:

I) Aritmética, que consiste na expansão decimal do número ou expansão em base dois ou outra base mais conveniente;

II) Algébrica, que consiste numa fórmula expressando o número real por meio de uma quantidade finita de operações aritméticas básicas e radiciações envolvendo apenas números inteiros;

Exemplo: $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ e $\dfrac{7}{3+\sqrt{11}}$.

[7] Há uma correspondência biunívoca entre os números racionais e os naturais.

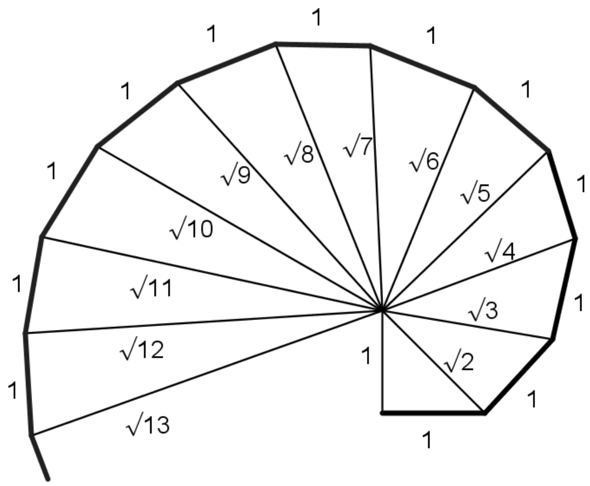


Figura 4.6: O caramujo de Theodoros

Através da "fórmula algébrica" ou representação algébrica dos números reais podemos obter números reais de várias formas:

$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{5}}$; $\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Definição 4.10.1. *Sendo r um número racional e $k = 2, 3, 4, \ldots$, dizemos que $\sqrt[k]{r}$ é um número surdo se esta expressão definir um número real irracional.*

Obs: não basta está no formato $\sqrt[k]{r}$
para ser um número surdo.

Exemplo 1:

$\sqrt[4]{625}$
$= 5$, não é um número surdo.

Exemplo 2:

Todos os irracionais do Caramujo de Theodoros são surdos. Mas, o quociente desses números, apesar de poder ser escrito no formato da definição, nem sempre são surdos. Veja,

$\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} = \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ nem sempre resulta num número irracional.

$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$, é um quociente não surdo.

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\dfrac{6}{9}}$, é um quociente surdo.

Exemplo 3:

Indicando por $[\mathbb{Q}, \sqrt{3}]$ o conjunto

$[\mathbb{Q},\sqrt{3}]=\{a+b\sqrt{3}|a,b\in\mathbb{Q}\}$. Observamos que $[\mathbb{Q},\sqrt{3}]$ é fechado aritmeticamente,isto é, com relação as operações básicas (quociente não nulo) de números da forma $[\mathbb{Q},\sqrt{3}]$ ainda é um número deste conjunto. Combinando $\sqrt{3}$ com números racionais, de todas as formas possíveis, usando as operações aritméticas básicas, obtemos o conjunto $[\mathbb{Q},\sqrt{3}]$.

Podemos ver que $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}\in[\mathbb{Q},\sqrt{3}]$, pois $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-3}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\in[\mathbb{Q},\sqrt{3}]$. Podemos dizer que $[\mathbb{Q},\sqrt{3}]$ é um corpo. E, $\sqrt{5}\notin[\mathbb{Q},\sqrt{3}]$.

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, podemos definir diversos conjuntos, como por exemplo $[\mathbb{Q},\sqrt{5},\sqrt{7}]=\{a+b\sqrt{5}+c\sqrt{7}\mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$.

Existem diversos problemas utilizados em concursos e olimpíadas de matemática, onde os irracionais na sua forma algébrica são bastante explorados. Exemplos:

1) Encontre o valor de $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}}}$ e verifique se o número encontrado é racional ou irracional.

2) No conjunto dos reais encontre o conjunto solução $\sqrt{5-\sqrt{5-x}}=x$.

3) O valor da expressão

$$\sqrt{1+1822\sqrt{1+1823\sqrt{1+1824\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+1993\sqrt{1+1994\sqrt{1+1995.1997}}}}}}}$$ é:

4. 10. 3 Complexidade da expansão decimal dos irracionais

Já sabemos que os números racionais têm expansão decimal finita, ou infinita periódica; enquanto os números irracionais têm expansão infinita não periódica. Essa ideia é suficiente para os racionais, e esclarece muito pouco para os irracionais. Ela não esclarece o quanto complexa pode ser a irregularidade de um irracional, quanto a distribuição dos algarismos de sua expansão decimal.

Definição 4.10.2. *Um número irracional é dito normal se sua expansão decimal apresentar todos os dez algarismos, e se todos os blocos (listas ordenadas) de n algarismos ocorrerem com probabilidade $\frac{1}{10^n}$, para $N = 1, 2, 3, \ldots$. Ou seja: cada algarismo aparece com probabilidade $\frac{1}{10}$; cada par ordenado de algarismos aparece com probabilidade $\frac{1}{100}$; cada trinca ordenada de algarismos aparece com probabilidade $\frac{1}{1000}$.*

Assim para um número irracional ser normal é necessário que em sua expansão decimal apareçam todos os algarismos, bem como todos os possíveis blocos (finitos) de algarismos, e isto com uma probabilidade que depende apenas do tamanho do bloco.

Para um número ser normal não basta examinarmos apenas a uniformidade da distribuição de seus dígitos, precisamos examinar também a uniformidade da distribuição dos blocos de dígitos. é possível decidir a normalidade, embora seja uma tarefa que tende a ser muito difícil.

Exemplo 1:

O número irracional 0,01010010000001000000000000000000000000001..., é um irracional que não é normal, pois não tem todos os dígitos na sua expansão decimal.

Exemplo 2:

Não se conhece nenhum caso de decisão positiva fácil. O primeiro exemplo de número irracional normal foi dado somente por Waclaw Siuerpinski[8], em 1917. Esse, como uma grande maioria de exemplos conhecidos de números normais, tem uma complexa construção. Outros exemplos:

a constante de Champernowne (1933): 0,1234567891011121314151617..., que é obtida obtido escrevendo-se a sequência de números naturais em base dez, este foi o primeiro exemplo simples de um número normal a ser descoberto.

a constante de Copeland-Erdos (1945): 0,23571113171923293113741..., que é obtida concatenando todos os números primos.

É de se observar que ainda não se conseguiu decidir a normalidade de nenhum número irracional que tenha uma ocorrência natural em problemas de matemática, como é o caso de π, $\sqrt{2}$, log 2. Mas, evidências empíricas dizem que tais números são normais.

4. 10. 4 Irracionalidades quadráticas

A família mais conhecida de números irracionais é a dos números do Caramujo de Theodoros, números reais do tipo $\sqrt{n}$, onde n não é um quadrado perfeito. Veremos uma família ainda maior de irracionais, as chamadas irracionalidades quadráticas.

Definição 4.10.3. *Irracionalidade quadrática é todo número irracional que seja raiz de alguma equação quadrática cujos coeficientes sejam números inteiros.*

Exemplo 1:

Sendo n um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito, então $x = \sqrt{n}$ é uma solução irracional da equação quadrática $x^2 - n = 0$. Assim todos os números do Caramujo de Theodoros são irracionalidades quadráticas.

Teorema 4.10.1. *A equação polinomial do segundo grau, $a.x^2 + b.x + c = 0$, onde todos os coeficientes são números inteiros. Então, as raízes dessa equação são irracionalidades quadráticas se e só se, $b^2 - 4ac$ for um número positivo que não seja um quadrado perfeito.*

[8]O pai era um médico. Frequentou a escola em Varsóvia, onde seu talento para a matemática foi rapidamente reconhecida pela sua professora de matemática em primeiro lugar. Este foi um período de ocupação russa da Polônia e foi um momento difícil para a Sierpinski dotado para ser educado na Polônia. Os russos haviam forçado sua língua e cultura sobre os poloneses em grandes mudanças para todas as escolas secundárias implementado entre 1869 e 1874. O objetivo da Rússia era manter o analfabetismo na Polônia o mais alto possível, assim que desanimado aprendizagem e do número de estudantes caiu.

Teorema 4.10.2. *As irracionalidades quadráticas são os números que têm a forma* $\dfrac{m+\sqrt{p}}{n}$ *ou* $\dfrac{m-\sqrt{p}}{n}$*, onde* m *e* n *são inteiros quaisquer, com* $n \neq 0$*, e* p *um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito.*

Exemplo:

Uma outra família de irracionalidades quadráticas é a dos números metálicos, os quais são raízes positivas das equações da forma:

$x^2 - nx - 1 = 0$, onde $n \geqslant 1$ e é um inteiro positivo.

$x_1 = \dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$, $x_2 = \dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}$, para $n \geqslant 1$, n^2+4 não é um quadrado perfeito.

Casos particulares:

para $n = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$, tem apenas uma raiz positiva, o número de ouro, razão entre a diagonal e o lado do pentágono regular;

$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

para $n = 2$, $x^2 - 2x - 1 = 0$, tem apenas uma raiz positiva, o número de prata, $1+\sqrt{2}$;

para $n = 3$, $x^2 - 3x - 1 = 0$, tem apenas uma raiz positiva, o número de bronze, $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

4. 10. 5 Irracionalidades cúbicas

Os matemáticos gregos conheciam apenas irracionalidades quadráticas. Por volta de 1200 DC é que Fibonacci mostrou que essa visão não era completa. O mesmo resolveu uma equação cúbica que foi chamada de cúbica de Fibonacci:

$x^3 + 2.x^2 + 10.x = 20$

Definição 4.10.4. *Irracionalidade cúbica, é qualquer número irracional que seja raiz de uma equação polinomial do terceiro grau e coeficientes inteiros, mas não seja também raiz de uma equação polinomial de grau menor e coeficientes inteiros.*

Teorema 4.10.3. *A equação* $x^3 + 2.x^2 + 10.x = 20$ *não tem raízes no campo das irracionalidades quadráticas.*

Demonstração: Vamos supor por absurdo que a equação $x^3 + 2.x^2 + 10.x = 20$ admita uma irracionalidade quadrática como raiz. Pelo Teorema 4.7.5, podemos escrever tal irracionalidade na forma $\dfrac{m+\varepsilon\sqrt{p}}{n}$,

com $\varepsilon = \pm 1$ e p um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito. Substituindo esse valor na expressão dada acima, e multiplicando todos os termos por n^3, obtemos

$(m+\varepsilon\sqrt{p})^3 + 2n(m+\varepsilon\sqrt{p})^2 + 10n^2(m+\varepsilon\sqrt{p}) = 20n^3$, como $\varepsilon^2 = 1$,

$20n^3 = m^3 + 3m^2\varepsilon\sqrt{p} + 3mp + \varepsilon\sqrt{p}p + 2m^2n + 4mn\varepsilon\sqrt{p} + 2np + 10mn^2 + 10n^2\varepsilon\sqrt{p}$, assim

$20n^3 - m^3 - 3mp - 2m^2n - 2np - 10mn^2 = \varepsilon(3m^2 + p + 4mn + 10n^2)\sqrt{p}$.
Como $3m^2 + p + 4mn + 10n^2 \neq 0$, pois $3m^2 + p + 4mn + 10n^2 > 0$, devido ao fato de $3m^2 + p + 4mn + 10n^2 = (m+n)^2 + (m+n)^2 + m^2 + p + 8n^2 > 0$.
Logo $\sqrt{p}$ é um número racional. Isso é um absurdo, pois p é um inteiro positivo e não é um quadrado perfeito. □

Podemos afirmar através de resultados anteriores que $x^3 + 2.x^2 + 10.x = 20$ tem uma única raiz verdadeira e é uma irracionalidade cúbica. A solução real encontrada para está equação foi 1,3688081078213726352274143300.... . . .

4. 10. 6 Números algébricos

Definição 4.10.5. *Irracionalidade algébrica de grau n (n inteiro $\geqslant 2$), qualquer número real que é raiz de uma equação polinomial de grau n e coeficientes inteiros, mas que não é raiz de nenhuma equação polinomial de grau menor e coeficientes inteiros.*

Obs: O número surdo $x = \sqrt[k]{2}$ verifica a equação $x^k - 2 = 0$, logo os irracionais $\sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \ldots$ formam uma família de irracionalidades algébricas de graus respectivamente, iguais a 2, 3, 4,. . . .

Teorema 4.10.4. *Para cada $n \geqslant 2$, existem irracionalidades algébricas de grau n. Isso é a generalização do teorema de Fibonacci e a utilidade deste Teorema está na possibilidade de se usar o grau de irracionalidade como medida do grau de complexidade da expressão do respectivo número irracional. Ou seja, a noção de grau de irracionalidade nos dá uma escala de complexidade para os números irracionais e que o teorema de Fibonacci nos garante que todos os níveis desta escala são realizados.*

Definição 4.10.6. *Irracionalidade algébrica é todo número irracional que é raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros. Desse modo as irracionalidades vistas até agora são irracionalidades algébricas.*

Teorema 4.10.5. *Cada irracionalidade algébrica tem um grau, ou seja: podemos encontrar um n, tal que ela seja irracionalidade de grau n.*

Definição 4.10.7. *Denominamos número real algébrico todo número real - racional ou irracional - que seja raiz de alguma equação polinomial de coeficientes inteiros:*
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$, *($a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{Z}$, para todo k).*

Como consequência, todo número real é algébrico (equações da forma $mx - n = 0$, com m $\neq 0$ e n inteiro). toda irracionalidade algébrica é um número real algébrico. Assim o conjunto dos números reais algébricos pode ser dividido em duas partes disjuntas:

O corpo dos números racionais e o conjunto das irracionalidades algébricas. Portanto, existem números racionais que estão fora do universo dos números algébricos.

Teorema 4.10.6. *A adição, subtração, multiplicação e divisão de números reais algébricos, bem como a radiciação de algébricos positivos, sempre produz como resultado um número real ainda algébrico.*

Corolário 4.10.1. *O conjunto dos números reais algébricos é um corpo.*

Teorema 4.10.7. *Todo número real que possa ser expresso em termos de uma fórmula algébrica envolvendo números inteiros será um números algébrico.*

Teorema 4.10.8. *Existem números irracionais algébricos que não podem ser expressos por meio de uma fórmula algébrica. Exemplo: raiz real da equação $x^5 - x - 1 = 0$. essa equação tem apenas uma rais real, positiva. essa equação não tem raiz racional, consequentemente sua única raiz é um número algébrico irracional (Teorema de Galois).*

4. 10. 7 Números transcendentes

Veremos agora se existem números irracionais não algébricos, caso existam teremos números transcendendo a capacidade da álgebra. O primeiro matemático que examinou esta situação foi Leonard Euler, em torno de 1750 e pertence a ele a definição abaixo:

Definição 4. 8. 5

Número transcendente é todo número real que não é algébrico.

Assim, todo número transcendente é irracional. Os números transcendentes foram e são um desafio para a comunidade matemática. Um avanço significativo nessa área foi realizado cem anos depois de Euler, quando em 1844, Joseph Liouville demonstrou o resultado abaixo.

Teorema 4.10.9. *Existem números reais (irracionais) não algébricos. Assim, existem números transcendentes.*

A prova de Louville foi mostrar que o número real abaixo, escolhido de forma artfificial sem nenhum uso matemático, é transcendente:

0,110001000000000000000001000. . . .

Veja que trata-se de um número irracional, pois a quantidade de zeros vai crescendo fatorialmente. Ele foi definido da seguinte maneira:

$0, a_1 a_2 \ldots$, onde

a_n é 1 se $n = k!$, para algum natural não nulo k e a_n é 0, caso contrário.

O campo $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser dividido em duas partes disjuntas:

- O conjunto dos números reais algébricos e
- O conjunto dos números reais transcendentes.

Foram precisos aproximadamente mais trinta anos para se descobrir o primeiro transcendente de forma natural. Em 1873, Charles Hermite mostrou que e, a base dos logaritmos naturais, é um número transcendente. Aproximadamente 10 anos depois, em

1882, Ferdinand Von Lindmann, conseguiu mostrar que π também é transcendente. A repercussão da prova da transcendência de π foi um dos maiores acontecimentos, pois um problema de mais de dois mil anos, desde o tempo dos gregos, foi resolvido. Dessa forma, como consequência é impossível realizar a quadratura do círculo usando apenas régua e compasso.

Fazer a quadratura do círculo consiste em construir um quadrado, cujo lado seja um segmento de reta de medida l verificando:

$l^2 = \pi$

A área do quadrado tem de ser igual à do círculo de raio unitário. assim, fazer a quadratura do círculo usando régua e compasso significa construir o lado do quadrado usando apenas esses instrumentos. Ora, prova-se que todos os segmentos que podemos construir com régua e compasso, a partir de um segmento unitário, tem como medida um número algébrico; logo a raiz quadrada de um número transcendente nunca pode ser um número real algébrico.

É importante dizer que, antes da descoberta de que π é um número transcendente, o grande matemático George Cantor, em 1874, fez uma das maiores descobertas de todos os tempos ao demonstrar que:

A grande maioria dos números reais é constituída de números transcendentes.

Esse resultado causou um alvoroço enorme na comunidade matemática. Naquela época, eram conhecidos infinitos números irracionais algébricos, mas, só se conhecia dois exemplos de números transcendentes.

O resultado de Cantor é pouco intuitivo. Mas, expressa um fato importante, quando comparamos o tamanho do conjunto dos números racionais com o tamanho do conjunto dos irracionais.

Sabemos que a quantidade de polinômios é um infinito enumerável, assim as raízes desses polinômios, que são números algébricos, também é um infinito enumerável, assim, mostra-se que a infinitude da quantidade de números algébricos é do mesmo tipo que a do conjunto dos números racionais, ou seja, é um infinito enumerável; enquanto a infinitude da quantidade de números transcendentes é do mesmo tipo que a do conjunto dos números irracionais, é um infinito que não pode ser enumerável (não pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais).

Em 1900, houve a realização de um congresso mundial de matemáticos em Paris, no qual a principal conferência foi feita por David Hilbert, um dos matemáticos mais importantes daquela época. Nessa conferência foi proposto, por Hilbert o seguinte problema:

Decidir se $2^{\sqrt{2}}$ é irracional algébrico, ou irracional transcendente.

A resposta veio em 1930, quando R.Kuzmin e C.L.Siegel provaram, independentemente, o teorema abaixo, que serviu de fonte geradora de números transcendentes.

Teorema 4.10.10. *O número $2^{\sqrt{2}}$ é transcendente e o mesmo ocorre com $a^{\sqrt{n}}$, sempre que a for um número real algébrico não nulo, diferente da unidade, e n for um inteiro positivo não quadrado.*

Quatro anos depois, o russo A. Gelfond generalizou esse teorema para:

Teorema 4.10.11. *O número a^b é transcendente sempre que a for um número algébrico não nulo, diferente da unidade, e b não for um número racional.*

O estudo dos números algébricos e transcendentes originou um novo e importante campo matemático, a Teoria algébrica dos números.

Exemplo:

Mostraremos que o número e é transcendente.

Começaremos definindo o polinômio P dado por, $P(x) = \dfrac{x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \dots (n-x)^p}{(p-1)!}$

(I)

onde $p, n \in \mathbb{N}$, $p > n$. Para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

definiremos os polinômios $Q_k(x) = (k-x)^p$ e $R_k(x) = \dfrac{x^{p-1}(1-x)^p \dots (k-1-x)^p(k+1-x)^p \dots (n-x}{(p-1)!}$

Proposição 4.10.1. *Sejam f e g duas funções deriváveis pelo menos j vezes. Então:*

$D^j(fg) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} D^i f D^{j-i} g$

Demonstração: Realizando a demonstração prova por indução finita começando com $j = 0$. Nesse caso, temos que

$D^j(fg) = fg = D^0 f D^{j-0} g = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} D^i f D^{j-i} g$

então agora supondo que a afirmação seja verdadeira para um certo j vamos mostrar que também deve ser verdadeira para $j+1$. Vamos precisar da seguinte igualdade:

$$\binom{j}{i-1} + \binom{j}{i} = \frac{j!}{(i-1)!(j-i+1)!} + \frac{j!}{i!(j-i)!}$$

$$= \frac{j!i}{i!(j-i+1)!} + \frac{j!(j-i+1)}{i!(j-i+1)!}$$

$$= \frac{j!(i+j-i+1)}{i!(j-i+1)!}$$

$$= \frac{(j+1)!}{i!(j+1-i)!}$$

$= \binom{j+1}{i}$

Lembrando também que $fD^{j+1}g = \binom{j+1}{0} D^0 f D^{j+1} g$ e que $(D^{j+1}f)g = \binom{j+1}{j+1} D^{j+1} f D^0 g$.

Então:

$D^{j+1}(fg) = D^1(D^j(fg))$

$= D^1(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}D^ifD^{j-i}g)$

$= \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}D^1(D^ifD^{j-i}g)$

$= \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(D^{i+1}fD^{j-i}g + D^ifD^{j-i+1}g)$

$= \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}D^{i+1}fD^{j-i}g + \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}D^ifD^{j-i+1}g$

$= \sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}D^{i+1}fD^{j-i}g + \sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}D^ifD^{j-i+1}g + D^{j+1}fD^0g + D^0fD^{j+1}g$

$= \sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i-1}D^ifD^{j-i+1}g + \sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}D^ifD^{j-i+1}g + D^{j+1}fD^0g + D^0fD^{j+1}g$

$= \sum_{i=1}^{j}(\binom{j}{i-1} + \binom{j}{i})D^ifD^{j-i+1}g + D^{j+1}fD^0g + D^0fD^{j+1}g$

$= \binom{j+1}{0}D^0fD^{j+1-0}g + \sum_{i=1}^{j}\binom{j+1}{i}D^ifD^{j+1-i}g + \binom{j+1}{j+i}D^{j+1}fD^{j+1-(j+1)}g$

$=\sum_{i=0}^{j+1}\binom{j+1}{i}D^ifD^{j+1-i}g$

o que conclui e demonstração. $\square$

Demonstração: Fazendo a prova por indução finita começando com $j = 0$. Nesse caso, temos que

$D^j(fg) = fg = D^0fD^{j-0}g = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}D^ifD^{j-i}g$

então agora supondo que a afirmação seja verdadeira para um certo j vamos mostrar que também deve ser verdadeira para $j + 1$. Vamos precisar da seguinte igualdade:

$\binom{j}{i-1} + \binom{j}{i} = \dfrac{j!}{(i-1)!(j-i+1)!} + \dfrac{j!}{i!(j-i)!}$

$= \dfrac{j!i}{i!(j-i+1)!} + \dfrac{j!(j-i+1)}{i!(j-i+1)!}$

$= \dfrac{j!(i+j-i+1)}{i!(j-i+1)!}$

$= \dfrac{(j+1)!}{i!(j+1-i)!}$

$= \binom{j+1}{i}$

Lembrando também que $fD^{j+1}g = \binom{j+1}{0}D^0fD^{j+1}g$ e que $(D^{j+1}f)g = \binom{j+1}{j+1}D^{j+1}fD^0g$. Então:

$D^{j+1}(fg) = D^1(D^j(fg))$

$= D^1(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}D^ifD^{j-i}g)$

$= \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}D^1(D^ifD^{j-i}g)$

$= \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(D^{i+1}fD^{j-i}g + D^ifD^{j-i+1}g)$

$= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} D^{i+1} f D^{j-i} g + \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} D^{i} f D^{j-i+1} g$

$= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} D^{i+1} f D^{j-i} g + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} D^{i} f D^{j-i+1} g + D^{j+1} f D^0 g + D^0 f D^{j+1} g$

$= \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i-1} D^{i} f D^{j-i+1} g + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} D^{i} f D^{j-i+1} g + D^{j+1} f D^0 g + D^0 f D^{j+1} g$

$= \sum_{i=1}^{j} (\binom{j}{i-1} + \binom{j}{i}) D^{i} f D^{j-i+1} g + D^{j+1} f D^0 g + D^0 f D^{j+1} g$

$= \binom{j+1}{0} D^0 f D^{j+1-0} g + \sum_{i=1}^{j} \binom{j+1}{i} D^{i} f D^{j+1-i} g + \binom{j+1}{j+i} D^{j+1} f D^{j+1-(j+1)} g$

$= \sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} D^{i} f D^{j+1-i} g$

o que conclui e demonstração.

Com essa proposição, tendo $P = Q_k R_k$ calcularemos $D^j P$. Mas, $D^0 Q_k(k) = 0$ e se $0 < i < p$, então $D^i Q_k(k) = (-1)^i p(p-1)\dots(p-i+1)(k-x)^{p-i}$, logo $D^i Q_k(k) = 0$. Então se $0 \leqslant j < p$ temos

$D^j P(k) = D^j(Q_k R_k)(k) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} D^i Q_k(k) D^{j-i} R_k(k)$

donde,

$D^j P(k) = 0$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$

A menor potência de x em P é $p-1$ e a maior é $p-1+np$. Para obter o coeficiente de x^{p-1} temos que multiplicar em cada fator do produtório

$(\prod_{k=1}^{n} (k-x))^p$

a parcela da esquerda, isto é, o número k e depois dividir o resultado por $(p-1)!$, obtendo $\dfrac{(n!)^p}{(p-1)!}$. Por outro lado a partir desse mesmo produtório obtemos os numeradores de todos os outros coeficientes de P, e estes numeradores são portanto inteiros que denotaremos por b_i com certos índices i. Feito esse comentário podemos escrever

$P(x) = \dfrac{b_{p-1} x^{p-1} + b_p x^p + \dots + b_{p-1+np} x^{p-1+np}}{(p-1)!}$

$b_{p-1} = (n!)^p$

Com esse formato podemos ver que para $0 \leqslant j < p-1$ todas as parcelas de $D^j P(x)$ terão alguma potência natural de x, logo $D^j P(0) = 0$. Além disso em $D^{p-1} P(x)$ a primeira parcela será $\dfrac{(n!)^p (p-1)!}{(p-1)!} = (n!)^p$ e todas as outras parcelas terão alguma potência natural de x, logo $D^{p-1} P(0) = (n!)^p$. Convém mostrar que para $i \geqslant p$ a função $D^i P$ assume valores inteiros múltiplos de p quando calculada num inteiro.

$D^i(\dfrac{b_{p-1} x^{p-1}}{(p-1)!}) = 0$

Se $j \in \{1, 2, \dots, np\}$, assim:

$D^i(\dfrac{b_{p-1+j} x^{p-1+j}}{(p-1)!}) = 0$ se $i > p - i + j$

$D^i(\frac{b_{p-1+j}x^{p-1+j}}{(p-1)!}) = \frac{b_{p-1+j}(p+j-1)(p+j-2)...(p+j-i)x^{p-1+j-i}}{(p-1)!}$, c.c.

No segundo caso como $i \leqslant p-1+j$ estamos multiplicando i naturais consecutivos no numerador, e sabemos que esse produto é múltiplo de $p!$, o que implica que a parcela em questão será um múltiplo de p sempre que x for inteiro. Logo,

$p|D^ip(x)$ sempre que $x \in \mathbb{Z}$, $i \geqslant p$

Definimos agora o polinômio F por,

$F = \sum_{i=0}^{p-1+np} D^ip$

A partir de agora vamos acrescentar a hipótese de que p é primo. Lembrando que $p > n$ vemos que p não divide $(n!)^p$. Se $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ então nossas considerações mostram que $p \mid F(k)$. Por outro lado, nossas considerações também mostram que p não divide $F(0)$ pois divide todas as parcelas menos uma, mas $F(0)$ é inteiro. Também é importante perceber que por ser $p-1+np$ o grau de P obviamente $D^{p+np}P \equiv 0$. Consideremos então a função G dada pela igualdade,

$G(x) = e^{-x}F(x)$

temos,

$G'(x) = -e^{-x}F(x) + e^{-x}F'(x)$

$= e^{-x}(F'(x) - F(x))$

$= e^{-x}(\sum_{i=1}^{p+np} D^ip(x) \sum_{i=0}^{p-1+np} D^ip(x))$

$= -e^{-x}P(x)$

Aplicando a essa função, que é derivável na reta, o teorema do valor médio entre os pontos 0 e $k \in \mathbb{N}$ obtemos:

$\frac{G(k) - G(0)}{k-0} = -e^{-\varphi_k}P(\varphi_k)$

onde $\varphi_k \in (0, k)$. Isto é, multiplicando ambos os lados por ke^k,

$F(k) - e^kF(0) = -ke^{k-\varphi_k}P(\varphi_k) = \epsilon_k$

Fazendo agora as últimas observações sobre ϵ_k quando $1 \leqslant k \leqslant n$ antes de enunciar e demonstrar o teorema. Nesse caso, $e^{k-\varphi_k} < e^k \leqslant e^n$ pois, $\varphi^k > 0$. Também $k(\varphi_k^{p-1}) < k(k^{p-1}) = k^p \leqslant n^p$, pois $\varphi_k < k$. Por fim, $(1-\varphi_k)^p(2-\varphi_k)^p \ldots (n-\varphi_k)^p < (n!)^p$. assim substituindo na equação (I) na definição de ϵ_k vemos que,

$\mid \epsilon_k \mid < \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} = e^n n(n!)\frac{(n(n!))^{p-1}}{(p-1)!}$

e como sabemos que,

$$\lim_{p\to\infty, p\in\mathbb{N}} \frac{(n(n!))^{p-1}}{(p-1)!} = 0$$

concluímos que,

$$\lim_{p\to\infty, p\in\mathbb{N}} \mid \epsilon_k \mid = 0$$

Feremos agora, a demonstração por contradição.

Teorema 4.10.12. *O número e é transcendente.*

Demonstração: Vamos supor que e é algébrico, ou seja, existe um polinômio H de grau $n > 0$ com coeficientes racionais tal que $H(e) = 0$.
$H(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$
Não há perda de generalidade em considerar que os $c_i's$ são inteiros pois podemos multiplicar H por um múltiplo comum de todos os denominadores dos $c_i's$ e e continuará sendo raiz. Também podemos, se necessário multiplicar H por -1 para obter $c_0 \geqslant 0$. Finalmente se tivéssemos $c_0 = 0$, haveria um $i_0 = \min\{\text{i tais que } c_i \neq 0\}$ e teríamos $H(x) = c_{i0}x^{i0} + \ldots + c_nx^n$ então poderíamos dividir H por x^{i0} e ainda teríamos um polinômio com coeficientes inteiros e raiz e porém com o coeficiente independente não nulo. Então podemos supor $c_0 > 0$. Voltando ao nosso polinômio P podemos supor que $p > c_0$.
$q = c_0F_0 + c_1F_1 + \ldots + c_nF_n$
é um número inteiro, como já vimos. Também, $0 < c_0 < p$, $p|F(k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, p não divide $F(0)$ e os $c_i's$ são inteiros logo p não divide q Pela definição de e_k
$e_k = F(k) - e^kF(0)$
vemos que,
$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n = c_1F_1 + \ldots + c_nF_n - c_1e^1F(0) - \ldots - c_ne^nF(0) =$
$(-c_1e - \ldots - c_ne^n)F(0) + c_1F(1) + \ldots + c_nF(n) = c_0F(0) + \ldots + c_nF(n) = q$
Logo, se escolhermos p suficientemente grande teremos $\mid e_k \mid$ suficientemente pequeno para ter $\mid q \mid < 1$ o que implica que $q = 0$ uma vez que q é inteiro. Mas isso seria um absurdo pois p não divide q. Como nossa única hipótese foi que e seria algébrico vemos que isso não pode ser verdade, ou seja, e é transcendente.

□

4.11 A Teoria de Cantor

Será que há tantos números irracionais quanto racionais? Esta pergunta parece estranha pois sabemos que existem infinitos números racionais e irracionais. Como então falar de "quantidade" de infinitos elementos? Matemáticos perceberam que há, qualidades diferentes de infinitos. Mas especialmente o matemático G. Cantor que se dedicou à Teoria dos Conjuntos,explicou essa situação. Percebeu-se que os números inteiros $\mathbb{Z}$ podem ser “enumerados”. Portanto enumerar é estabelecer uma correspondência bijetora entre os números naturais $\mathbb{N}$ e os elementos do conjunto. Veremos a Teoria de Cantor:

Podemos imaginar pontos distribuídos ordenadamente sobre uma recta ou eixo ordenado. Se todos os racionais forem colocados sobre essa recta será impossível encontrar “buracos” nessa linha: entre dois números, por exemplo $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, existe um outro número, $\frac{7}{12}$; entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{7}{12}$ existe $\frac{13}{24}$, e entre estes existe ainda outros, e assim sucessivamente... Isto é, parece que os pontos estão unidos entre si. Na terminologia de Cantor, existe uma correspondência biunívoca entre todos os pontos da linha e todos os números racionais.

Este sistema de números - os racionais - era aquele que Pitágoras acreditava que regia o Universo. No entanto, até Pitágoras sabia que este sistema estava incompleto: há pontos da reta que não estão preenchidos por pontos associados a números racionais, como vimos, marcando sobre ela a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos meçam uma unidade. O ponto determinado pelo comprimento da hipotenusa, $\sqrt{2}$, não tem equivalente numérico no sistema racional de números. Assim, nem todos os pontos da linha estavam efetivamente preenchidos pelo que não há correspondência biunívoca entre todos os pontos e todos os números.

O comprimento da hipotenusa é irracional; para preencher as lacunas na linha, os números irracionais têm de ser introduzidos no sistema. Mas com que fundamento, para além da conveniência e da necessidade, é que eles são introduzidos? E será que a sua admissão resulta no preenchimento de todos os espaços? Foram estas as questões que Cantor se propôs responder, e ao respondê-las transformou radicalmente a ideia acerca daquilo do que o é número.

A abordagem do problema que Cantor utilizou foi tão simples que a sua solução chegou a ser considerada por muitos como simplesmente ridícula. Cantor começou por contar todos os inteiros, todos os números racionais, e todos os números reais. Obviamente, não pode contar todos os números, porque há um número infinito de cada tipo, mas Cantor não estava interessado em saber exatamente quantos números existem; ele quis descobrir quantos de cada tipo estavam em relação com os de outros tipos. Para isso seguiu o caminho que seguiria qualquer pessoa que não soubesse contar. Se lhe fossem dadas duas caixas com bolas e lhe perguntassem qual tinha mais, ela poderia facilmente descobrir tirando simultaneamente uma bola de cada caixa; se uma caixa ficasse vazia antes da outra, essa caixa tinha menos bolas; se ambas ficassem vazias ao mesmo tempo, elas continham a mesma quantidade de bolas.

Cantor fez a mesma coisa, mas em vez de usar bolas usou números; e em vez de usar caixas usou aquilo a que ele chamou conjuntos ou classes. Um conjunto ou classe é simplesmente uma coleção de coisas semelhantes, podem ser maçãs, bolas, pessoas, linhas, pontos, números, etc. Cantor decidiu que os membros dos conjuntos com que trabalharia seriam todos números, tendo uma propriedade em comum. Assim, os membros de um conjunto seriam os números pares, de outro os ímpares, de outro os inteiros, e assim sucessivamente. Cantor procedeu então à comparação do "tamanho" ou cardinalidade destes conjuntos emparelhando os seus elementos. Se cada elemento de um conjunto pudesse ser emparelhado com um único elemento de um outro conjunto, então os conjuntos teriam ambos a mesma cardinalidade.

Tomando o conjunto dos números naturais, emparelhou os seus elementos com os do conjunto dos números ímpares, e descobriu que há tantos inteiros quantos os números inteiros ímpares. Isto pode ser visto na tabela que se segue:

Naturais	Inteiros ímpares
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
...	...
n	2n+1

Para cada número natural há um número ímpar correspondente, o dobro mais um. Assim, Cantor chegou à notável conclusão de que, quando estamos a considerar quantidades infinitas, o todo nem sempre é maior do que cada uma das suas partes. Qualquer conjunto infinito cujos membros sejam qualquer subconjunto de números naturais, têm exatamente a mesma cardinalidade que o conjunto de todos os números naturais. Por exemplo, há tantos quadrados quantos os números naturais, há tantos cubos quantos os números divisíveis por 100, há tantos ímpares quantos os múltiplos de 2000, existindo tantos elementos nestes subconjuntos considerados como em todo o conjunto dos números naturais.

Naturais	Quadrados	Cubos	Divisíveis por 100	Múltiplos de 2000
1	1	1	100	2000
2	4	8	200	4000
3	9	27	300	3000
4	16	64	400	8000
5	25	125	500	10000
...	...	...	...	...
n	n^2	n^3	100.n	2000.n

Cantor descobriu algo que parece agora bastante óbvio: não existe nenhum conjunto infinito que seja "mais pequeno", isto é que tenha menor cardinalidade, do que o conjunto dos números naturais. Para representar o número de elementos existentes neste conjunto, Cantor adotou o termo aleph zero, que se representa por $\varkappa_0$. Aleph é a primeira letra do alfabeto hebraico. Para distinguir este novo número dos números finitos, ele designou-o como transfinito. No entanto, $\varkappa_0$ é tanto um número como 1 ou como 36, ou qualquer outro número.

Em seguida, Cantor questionou-se se existiriam outros números transfinitos, isto é, será que existem conjuntos infinitos cuja cardinalidade seja maior do que a do conjunto dos números inteiros?

$\varkappa_0$ $\varkappa_1$ $\varkappa_2$ ...

Aparentemente, parecem existir mais números racionais, visto que incluem as fracções, do que números inteiros. No entanto, Cantor emparelhou os elementos dos dois conjuntos e descobriu que tinham a mesma cardinalidade. Há tantas fracções e números inteiros juntos quantos os números inteiros apenas.

Antes de considerarmos os números reais, que inclui o conjunto dos irracionais, é bom recordar alguma da teoria que Cantor já tinha à sua disposição na altura.

Em 1844, J. Liouville provou que existem duas categorias de números irracionais: os algébricos e os transcendentes. Um número algébrico é aquele que pode ser raiz de uma equação algébrica; uma vez que existem infinitas equações algébricas, existe também um número infinito de suas raízes, racionais e irracionais. No entanto, há números que nunca podem ser raízes de uma equação algébrica; por exemplo, é impossível formular uma equação que tenha π como raiz, porque este número só surge através do uso de processos infinitos de análise, nunca através de processos algébricos finitos. As equações não algébricas como por exemplo exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas não têm, por regra, raízes que sejam números algébricos. Os números não algébricos denominam-se transcendentes, e os seus representantes mais conhecidos são π e e.

Números reais: união dos números racionais com os irracionais;

Números irracionais: união dos números irracionais algébricos com os irracionais transcendentes.

Para comparar a cardinalidade do conjunto dos números inteiros com a dos números reais, Cantor fez a distinção entre os números algébricos e o mais abrangente conjunto dos reais, que comporta também os transcendentes. Primeiro tentou emparelhar os inteiros com os algébricos. Através de um engenhoso método de ordenação das equações algébricas com base nos expoentes dos seus coeficientes, Cantor conseguiu mostrar que as suas raízes, isto é, os números algébricos, podiam ser emparelhados com os números inteiros. Portanto, o conjunto dos números algébricos tem a mesma cardinalidade do dos inteiros.

Até aqui a procura de um infinito de dimensão superior ao dos inteiros parecia não conduzir a lado nenhum. Todos os conjuntos pareciam ter a mesma cardinalidade, mas Cantor surpreendeu todos - e a si próprio - quando tentou emparelhar o conjunto dos números reais com o dos inteiros e descobriu que era maior, aliás, muito maior. A cardinalidade superior do conjunto dos reais deve-se aos números transcendentes que contém. Quando foram descobertos, pensava-se que estes números eram raros, mas Cantor provou exatamente o contrário: não só eles são comuns, como existem em muito maior quantidade do que qualquer outra espécie de números.

A sua demonstração de que o conjunto dos números reais é "maior" do que o dos inteiros (ou que o dos racionais e até mesmo dos algébricos) é muito simples.

Primeiro, Cantor admitiu que existia uma correspondência perfeita entre todos os inteiros e todos os números reais de 0 a 1. (Se existir uma correspondência entre todos os inteiros e todos os reais de 0 a 1, existirá também uma correspondência entre todos os inteiros e todos os reais positivos). Para fazer esta correspondência, é preciso listar todos os números reais. Cantor assumiu que esta listagem podia ser feita, escrevendo todos esses números sob a forma de dízimas infinitas, como por exemplo:

Dízimes infinitas
0,1845306726...
0,2185630901...
0,2712312765...
0,4981212769...
0,7465650987...
0,9398878321...
0,9416665438...

Depois, através de um processo de diagonalização, mostrou que esta lista não contém todos os números reais, isto é, por mais exaustiva que seja a nossa lista, há sempre números reais em falta. Por exemplo, um número real diferente de todos os listados pode ser formado do seguinte modo: escolhendo para primeiro dígito um qualquer diferente do primeiro dígito do primeiro número listado, para segundo dígito um qualquer diferente do segundo dígito do segundo número listado, para terceiro um que seja diferente do terceiro dígito do terceiro número listado, e assim sucessivamente. O número resultante terá de ser diferente de todos os que estão na lista porque difere de cada um deles em pelo menos um dígito - o que significa que ele próprio não está na lista. Assim sendo, a suposição de que todos os números reais podiam ser listados e portanto emparelhados com os inteiros está errada, porque conduz a uma contradição.

Desta forma Cantor provou que o conjunto dos números reais é "maior" do que o conjunto dos números inteiros. Mais, o processo de diagonalização pode ser usado para provar que é sempre possível encontrar conjuntos maiores e maiores - que não existe o conjunto infinito maior de todos. Assim, os números transfinitos (ou ordens de infinito), tal como os números finitos usuais, são infinitos. Cantor chamou a este segundo número transfinito - aquele que representa a cardinalidade dos números reais - C. Ainda não se conseguiu provar se C é mesmo o número transfinito a seguir a κ_0, ou se existem outros números transfinitos entre eles. Sabe-se, no entanto, que existem números transfinitos maiores do que C.

Enumerabilidade dos números racionais e Inumerabilidade dos números irracionais

É surpreendente que o conjunto dos números racionais $\mathbf{Q}$ é enumerável. Vejamos como estabelecer uma enumeração. Tomando os racionais positivos. Se estabelecermos uma enumeração destes poderemos enumerar todos os números racionais procedendo como foi feito acima com os números inteiros. Procedamos, então, da seguinte maneira: agrupando todos os números racionais positivos de modo que, em cada grupo, a soma dos termos (numerador e denominador) da fração irredutível que o representa seja a mesma; todo número que já figura num grupo anterior será retirado:

1º grupo : soma 2 : $\frac{1}{1}$

2º grupo : soma 3 : $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$

3º grupo : soma 4 : $\frac{1}{3}, \frac{3}{1}$ (elimina-se o $\frac{2}{2} = 1$, que já apareceu)

4º grupo : soma 5 : $\frac{1}{4}, \frac{4}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

5º grupo : soma 6 : $\frac{1}{5}, \frac{5}{1}$, elimina-se o que já apareceu. E assim por diante.

Colocando estes grupos um depois do outro e fazendo corresponder a cada número do grupo um número natural (colocando-os em "fila"):

1 - $\frac{1}{1}$; 2 - $\frac{1}{2}$; 3 - $\frac{2}{1}$; 4 - $\frac{1}{3}$; 5 - $\frac{3}{1}$; 6 - $\frac{1}{4}$; 7 - $\frac{4}{1}$; 8 - $\frac{2}{3}$; 9 - $\frac{3}{2}$; 10 - $\frac{1}{5}$; 11 - $\frac{5}{1}$, etc.

Dessa forma tomando um racional positivo $\frac{m}{n}$, na forma irredutível, qualquer. Este número está no grupo da soma $m + n$ e dentro deste grupo ocupa um lugar determinado; assim corresponde-lhe um número natural e só um. Reciprocamente, na correspondência acima estabelecida a cada número natural corresponde um número racional e um só. Portanto, este conjunto é do tipo enumerável.

O conjunto dos números irracionais é também enumerável? Esta situação ficou em aberto por muito tempo. Somente em 1874, o matemático G. Cantor respondeu a pergunta de uma forma muito interessante, usando a representação decimal. Primeiramente sabemos que todo número real tem uma única representação decimal infinita (podemos tomar 0,4999…, no lugar de 0,5). Supondo que possamos enumerar todos os números reais. Portanto também podemos enumerar os números reais entre 0 e 1. Os números reais entre 0 e 1 podem ser escritos na sua forma $0, b_1b_2b_3b_4\ldots$, onde b_k são algarismos de 0 a 9. Se tais números estão enumerados, ou seja, em "fila", cada um ocupando uma posição.

$1 \mapsto 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\ldots$

$2 \mapsto 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\ldots$

$3 \mapsto 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\ldots$

$4 \mapsto 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\ldots$

$5 \mapsto 0, a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\ldots\ldots\ldots$

Note que a_{ik} denota o algarismo da k-ésima casa decimal da representação decimal do número que ocupa a i-ésima posição. Agora vamos criar um número real $0, b_1b_2b_3b_4\ldots$, da seguinte forma: cada $b_k = a_{kk} + 1$, quando a_{kk} é diferente de 9 e $b_k = 0$, se a_{kk} é igual a 9. Por exemplo, se $a_{11} = 1$ então fazemos $b_1 = 2$, se $a_{22} = 0$, então $b_2 = 1$, se $a_{33} = 9$, então colocamos $b_3 = 0$, e assim por diante. Criamos assim um número real entre 0 e 1. Portanto ele tem que estar na lista que fizemos acima, isto é, ele tem que estar em correspondência com um número natural. Imaginando que $0, b_1b_2b_3b_4\ldots$ ocupa o 5º lugar, isto é, $0, b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots = 0, a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\ldots$; Para que tais números sejam iguais, cada casa decimal correspondente deve ser igual, ou seja, $b_1 = a_{51}$, $b_3 = a_{53}$, $b_4 = a_{54}$, $b_5 = a_{55}$, $b_6 = a_{56}$, etc. Mas b_5 não é igual a a_{55}. Em geral se $0, b_1b_2b_3b_4\ldots$ ocupasse o k-ésimo lugar, isto é, $0, b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots = 0, a_{k1}a_{k2}a_{k3}a_{k4}a_{k5}a_{k6}\ldots$ então teríamos $b_1 = a_{k1}$,$b_2 = a_{k2}$, $b_3 = a_{k3}$, $b_4 = a_{k4}$, $b_5 = a_{k5}$, $\ldots$, $b_K = a_{kK}$, etc. Mas $b_k = a_{kk}$. Temos uma contradição aqui, que foi gerada pelo fato de querermos colocar o número $0, b_1b_2b_3b_4\ldots$, na lista. Então ele não pode fazer parte da lista. Mostramos que existe um número real entre 0 e 1 que não tem um correspondente número natural. Portanto não podemos enumerar todos os números reais entre 0 e 1. Conclusão: não é possível encontrar uma enumeração dos números reais, ou seja, o conjunto dos números reais não é enumerável. A demonstração apresentada é conhecida como o método da diagonal de Cantor, em homenagem ao seu criador.

Considerações Finais

Durante a realização deste trabalho foi possível perceber que a construção dos números reais, na época de Cauchy, era uma necessidade e atualmente os números reais desempenham um papel importantíssimo em diversas áreas do conhecimento (engenharia, física, matemática, química, estatística, etc), ou seja, são imprescindíveis. Deste modo esse método das sequências dos pares de Cauchy e possíveis equivalências, proporcionam um entendimento satisfatório do conjunto dos números reais e sua construção.

Neste trabalho procuramos fazer uma abordagem simples da construção dos números reais, pois embora sejam muito importantes, os números reais são explicados de forma deficiente no ensino médio e superior, deixando diversas lacunas quanto ao seu entendimento por parte de docentes e discentes.

Acreditamos que tanto o enfoque da realização desse trabalho, com a utilização dos pares de Cauchy, por exemplo, como o desvendamento da expansão decimal de um número real, pode servir para a melhoria do ensino-aprendizagem e possivelmente servir de elemento motivador para alunos e professores que busquem aprimorar seus conhecimentos no processo de construção e explicação sobre os números reais nos seus diversos desdobramentos.

Referências Bibliográficas

[1] ALVARENGA, C. W. M.*Construção dos números reais*- UnB. Brasília. Disponível em: <http//www.mat.unb.br/grad/pet/CNR NET.pdf.doc>. Acesso em: 15 jan. 2013.

[2] CRISTINA, C.*Desvendando os números reais* - IME. USP. São Paulo. Disponível em: <http//www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/cristina.cerri.pdf>. Acesso em: 01 fev. 2013.

[3] Lopes, P.C.R. *Construção dos Números Reais* - Universidade da Madeira. Funchal. Madeira. Disponível em: <http://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/179/1/MestradoCristinaLopes.pdf>. Acesso em: 01 fev. 2013.

[4] *A Matemática de Cantor* - São Paulo. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/teoriamatem.htm>. Acesso em: 01 abr. 2013.

[5] http://www. educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/index.html. Acesso em: 10 abr. 2013.

[6] httt://www.matematica.br. Acesso em: 20 abr. 2013.

[7] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/. Acesso em: 22 abr. 2013.

[8] DANTE, L.R. *Tudo é Matemática*. Coleção do Ensino Fundamental. BBM: São Paulo: Ática, 2009.

[9] DANTE, L.R. *Matemática*. Ensino Médio volume único. BBM: São Paulo: Ática, 2009.

[10] COURANT,R. e ROBBINS, H. *O que é matemática?*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTDA, 2000.

[11] LIMA, E.L. *Curso de análise*. Rio de Janeiro; vol 1; 12ª Ed.

[12] LIMA, E.L. *Análise Real - Funções de uma variável.* Vol 1, 9ª Ed.Rio de Janeiro: IMPA 2007.

[13] Caraça, B. *Conceitos Fundamentais de Matemática.* 4ª Ed, Gradiva, Lisboa: 2002.

[14] Eves, H. *Introdução a História da Matemática.* 3ª Ed, da Unicamp, Campinas: 2002.

[15] Figueiredo, D.G. *Números Irracionais e Transcendentes, Coleção de Fundamentos da Matemática Elementar.* da SBM, Rio de Janeiro: 1985.

[16] Niven, I. *Números: Racionais e Irracionais, Coleção de Fundamentos da Matemática Elementar.* da SBM, Rio de Janeiro: 1984.

[17] *Artigos da Revista do Professor de Matemática.* da SBM, São Paulo. (vol 2, 6, 7, 8, 10 etc)

[18] Djairo G. F. *Números irracionais e Trancendentes.* 3ª Ed., da SBM, Rio de Janeiro: 2002.

[19] COSTA, C., TRALEA, P. *Argumentação e conceito de prova em Matemática.* Rio de Janeiro: UFF-Universidade Federal Fluminense, 2007.

[20] Bourbaki, N. *Elementos de Historia da las Matematicas.*Alianza Universidad.

[21] Weierstrass, K. *Einleitung in die Theorie der analytischen Funkitionen.* 1878/1988.Nachschrift der Vorlesung Berlin 1878 von A. Hurwitz. Ed. by P. Ullrich. Braunschweig: Vieweg. In [13], pp. 295 - 296.

[22] Epple, Moritz. *The End of the Science of Quantity: Foundations of Analysis.* 1860 - 1910. In [23], Chap. 10, pp. 291 - 323.

[23] Dugac, Pierre. *Éléments d?analyse de Karl Weierstrass. In Archive for the History of Exact Sciences.* 1973. Vol. 10, n.o 1/2. Berlin: Springer-Verlag. pp. 41 - 176.

[24] Cantor, J. *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Mathematische Annalen.* 1872. 5. In [13], p. 306.

[25] Burton, D. M. *The History of Mathematics an Introduction.* New York: The MacGraw-Hill Companies, Inc.

[26] Heine, E. *Die Elemente der Functionenlehre. Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1872. 74. In [22], p. 299.

[27] Real, L. N. *Dos números racionais aos números reais. In Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.* 1951. Vol. 1. Lisboa: Tipog. Matemática, LTD, pp. 59 - 135.

[28] Méray, C. *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données. In Revue des Sociétes Savantes des departements, Section sciences mathématiques, physiques et naturelles.* 2eme série. Tome IV. Paris: Imprimerie Impériale.

[29] Méray, C. *Nouveau Précis d?Analyse Infinitésimal.* 1872. F. Savy, Libraire - Éditeur: Paris.

[30] Méray, C. *Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calculinfinitésimal et sur la théorie de développement des fonctions en séries. In Revue des Sociétes Savantes des departements, Section sciences mathématiques, physiques et naturelles.* 1868. 37, pp. 133 - 138.

[31] Méray, C. *Sur le sens qu?il convient d?attacher à l?expression nombre incommensurable et sur le critérium de l?existence d?une limite pour une quantité variable de nature donnée. In Annales Scientifiques de l?École Normale Supérieure.* 1887. IV (3), pp. 342 - 360.

[32] Dedekind, R. *Continuity and irrational numbers, English transl. 1901.*. 1872. In Essays on the Theory of Numbers, Dover, New York, 1963. pp. 1 - 24.

[33] Euclid. *The thirteen books of The Elements.*. 1956.2.nd Ed. Vol. II. New York: Dover Publications, Inc.

[34] sinaceur, M. *La méthode mathématique de Dedekind. In Revue d?Historie des Sciences.*. 1979. XXXII (2), pp. 107 - 142.

[35] Gardies, J. L. *Eudoxe et Dedekind. Revue d´Histoire des Sciences.*. 1984. XXXVII (2), pp. 111 - 125.

[36] Stein, H. *Eudoxus and Dedekind: on the ancient greek theory of ratios and its relation to modern mathematics.*. 1990. In Synthese, 84, pp. 163 - 221.

[37] Corry, L. *La teoria de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind.* 1994. In Mathesis, Vol. 10, pp. 1 - 24.

[38] Dugac, P. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques.* 1976. Paris: Virn. 147 148 Bibliografia.

[39] Hilbert, D. *Fundamentos da Geometria. Tradução Portuguesa de 1947.* 1930. baseada na 7a Ed.; re-edição Gradiva 2003, revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira com apêndices do autor e suplementos.

[40] Guimarães, A. A. *Dos números naturais aos números racionais*. 1947. In Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática. Vol. 1. Lisboa: Tipog. Matemática, LTD, pp. 1 - 22.

[41] Martins. A. P. M. F. *As construções do Sistema dos Números Reais por Dedekind, Weierstrass e Méray*. 2004. Tese de Mestrado. Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto.

[42] http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/como-localizar-numeros-irracionais-reta-numerica-494389.shtml. Acesso em: 11 mai. 2013.

[43] Lima. E. L. *Números e Funções Reais*. 2013.1ª Ed. Coleção PROFMAT. SBM. Rio de Janeiro.