UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PROPRIEDADES DE FRATTINI EM PC-GRUPOS

Cleber Pereira

Rio Branco - 2014

PROPRIEDADES DE FRATTINI EM PC-GRUPOS

Cleber Pereira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Interinstitucional CAPES/FUNTAC/UFAM/UFAC como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração: Álgebra.

Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM
Orientador: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

Rio Branco, Junho de 2014

PROPRIEDADES DE FRATTINI EM PC-GRUPOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Interinstitucional CAPES/FUNTAC/UFAM/UFAC como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração: Álgebra.

BANCA EXAMINADORA:

- **Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos, Presidente**
  Universidade Federal do Acre - UFAC
- **Prof. Dr. Sérgio Brazil Júnior, Membro**
  Universidade Federal do Acre - UFAC
- **Prof. Dr. Antônio Carlos Tamarozzi, Membro**
  Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Rio Branco, Junho de 2014

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P436p

Pereira, Cleber

Propriedades de Frattini em PC-Grupos / Cleber Pereira. 2014
60 f.: 31 cm.

Orientador: José Ivan da Silva Ramos
Dissertação (Mestrado em Matemática - Álgebra) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Propriedades de Frattini. 2. PC-Grupos. 3. Nilpotência. 4. Supersolubilidade. I. Ramos, José Ivan da Silva II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela vida, saúde, capacidade de estudar e por estar presente em todos os momentos da realização desse trabalho.

À minha esposa Daiane, pelo carinho, alegria, confiança, companheirismo e por estar sempre junto de mim me confortando nos momentos difíceis, apoiando e incentivando, mesmo na minha ausência.

Aos meus filhos, Carlos Gabriel e Maria Eduarda, por tornarem meus dias mais felizes.

Aos meus pais, Carlos e Marli, por tudo que fizeram por mim. Pelo carinho, cuidado, incentivo e por terem acreditado no meu esforço e capacidade de vencer mesmo nas dificuldades na vida estudantil.

Aos Meus irmãos, Adriano e Poliany, por fazerem parte da minha vida.

Aos meus avós, José Tomazini e Aparecida, pelo carinho, atenção e confiança que me atribuem.

Aos meus tios, primos e amigos que fazem parte das conquistas adquiridas. E, que não me deixam esquecer a minha origem simple. Em especial, ao meu tio Antônio Tirroli *(in emmorian)*, que foi um referencial.

Aos membros da banca examinadora da defesa de dissertação, professores Dr. Antônio

Carlos Tamarozzi, José Ivan da Silva Ramos e Sérgio Brazil Júnior, pelas sugestões dadas para melhoria desta dissertação escrita. Ao meu orientador, professor José Ivan da Silva Ramos, pela dedicação e confiança em mim depositados, por todas as lições e ensinamentos fornecidos durante a realização deste trabalho e pela competência ao auxiliar-me nos momentos de dúvidas e dificuldades.

Aos amigos e professores, que contribuíram direta e indiretamente na minha formação acadêmica, pelo apoio e pela consideração. Em especial, aos professores José Ivan da Silva Ramos, pela atenção e disponibilidade em oferecer ajuda para realização deste trabalho, ao professor José Kenedy Martins, pela disponibilidade de tempo, a professora Flávia Morgana, e o professor Sérgio Brazil, pelas sugestões e conselhos, pela confiança a mim transmitidos.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço aos meus amigos da turma de mestrado, Josean, José Roberto e Márcio que foram de grande importância em todas as etapas deste trabalho, pela companhia nos momentos de descontração e, principalmente, nos momentos de estudo.

Resumo

Depois de descrevermos algumas importantes classes de grupos, verificamos que local nilpotência e local supersolubilidade são propriedades de Frattrini de PC-grupos, grupos cujas classes de conjugação são policíclicas por finito. Particularmente, verificamos que se G é um PC-grupo então $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ é localmente nilpotente (supersolúvel) se, e somente se, G é localmente nilpotente (supersolúvel).

Abstract

After describing some important classes of groups, we found that nilpotência site and supersolubilidade site are properties of Frattrini PC-groups, groups whose conjugacy classes are polycyclic by finite. Particularly, we note that if G is a PC-group then $\frac{G}{\Phi(G)}$ is locally nilpotent (supersolúvel) if and only if G is locally nilpotent (supersolúvel).

Lista de Símbolos

$\|G\|;\ O(g) = \|\langle g\rangle\|$	: ordem do grupo G; ordem do elemento $g \in G$
$A \subset B$	: A é subconjunto próprio de B
$A \subseteq B$	: A é subconjunto de B
$H \leq G$	: H é subgrupo do grupo G
$H < G$	: H é subgrupo próprio do grupo G
$N \trianglelefteq G$	: N é subgrupo normal do grupo G
$N \trianglelefteq \trianglelefteq G$	: N é subgrupo subnormal do grupo G
$M \lessdot G$	: M é subgrupo maximal do grupo G
$\langle g\rangle \leq G$	: subgrupo de G gerado pelo elemento $g \in G$
$\langle X\rangle$	: subgrupo gerado pelo conjunto X
$\|G : H\|$	: o índice do subgrupo H em G
G'	: o subgrupo comutador de G
g^h	: $h^{-1}gh$, conjugado de g por h
$[g, h]$	: $g^{-1}h^{-1}gh = g^{-1}g^h$, comutador de g e h
$a^G;\ \langle a^G\rangle$	: $\{a^g; g \in G\}$; o subgrupo gerado pelo fecho normal de a
$[A, B]$	: o subgrupo comutador de A e B
$C_G(x)$	: centralizador de x em G
$C_G(X)$	: centralizador de X em G
$N_G(X)$	: normalizador de X em G
nG	: conjunto dos subgrupos normais de G
mG	: conjunto dos subgrupos maximais de G

$Z(G)$	: centro do grupo G
$G_1 \cong G_2$	: o grupo G_1 é isomorfo ao grupo G_2
XY	: $\{xy : x \in X \text{ e } y \in Y\}$ o produto de X por Y
$\frac{G}{N}$	: grupo quociente de G por N, quando $N \trianglelefteq G$
H^G	: fecho normal de H em G
$Aut(G)$	: grupo dos automorfismos de G
$Fit(G)$	: subgrupo de Fitting de G
$\Phi(G)$	: subgrupo de Frattini de G
$\mathfrak{A}$	: classe dos grupos abelianos
$\mathfrak{G}_n$	: classe dos grupos n-gerados
$\mathfrak{G}$	: classe dos grupos finitamente gerados
$\mathfrak{F}$	: classe dos grupos finitos
$\mathfrak{N}$	: classe dos grupos nilpotentes
$\mathfrak{N}_c$	: classe dos grupos nilpotentes com classe de nilpotência $\leq c$
$\mathfrak{N}G$	: conjunto dos subgrupos nilpotentes de G
$\mathfrak{S}\mathfrak{S}$	: classe dos grupos supersolúveis
$\mathfrak{P}$	: classe dos grupos policíclicos
$\mathfrak{P}\mathfrak{F}$	: classe dos grupo policíclico-por-finito
$\mathfrak{L}\mathfrak{N}$	: classe dos grupos localmente nilpotentes
$\mathfrak{L}\mathfrak{S}\mathfrak{S}$	: classe dos grupos localmente supersolúveis
$\mathfrak{X}^{\infty}$	: classe dos poli-$\mathfrak{X}$ grupos
$L\mathfrak{X}$	: classe dos localmente-$\mathfrak{X}$ grupos
$H\mathfrak{X}$	: classe dos hiper-$\mathfrak{X}$ grupos

Sumário

Introdução

As principais discussões deste trabalho tratam de grupos G com classes de conjugação policíclicas-por-finito, i. é., para cada $x \in G$, o grupo $\dfrac{G}{C_G(\langle x^G \rangle)}$ é policíclico-por-finito.

Se $\mathfrak{X}$ é uma propriedade de grupos, dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma propriedade de Frattini se G é $\mathfrak{X}$-grupo sempre que $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ é $\mathfrak{X}$-grupo.

Um estudo mais detalhado dos PC-grupos foi feito em 1990, por F. de Giovani, S. Franciosi e M. J. Tomkinson, apresentado no artigo intitulado: "Groups with Polycyclic-by-finite Conjugacy Classes". E, em 1996, F. de Giovani e S. Franciosi fizeram um estudo aprofundado de propriedades de Frattini em grupos com classe de conjugação policíclica-por-finito, no artigo que recebeu o nome: "Properties of Groups with Polycyclic-by-finite Conjugacy Classes". Artigo ao qual nos baseamos para realizarmos nosso trabalho.

Provaremos que para PC-grupos, nilpotência local e supersolubilidade local são propriedades de Frattini. Conhecido é que, para grupos finitos, nilpotência e supersolubilidade são propriedades de Frattini.

No capítulo 1, realizaremos uma breve descrição de algumas propriedades de grupos. Destacaremos os grupos noetherianos, nilpotentes, localmente nilpotentes, policíclicos, localmente policíclicos, supersolúveis e localmente supersolúveis. Além da descrição, mostraremos o fechamento dessas propriedades para subgrupos quocientes e produto direto (de dois fatores). Dedicaremos um parágrafo para $\Phi(G)$, o subgrupo de Frattini de um dado grupo G. Devido a Hirsch e Plotikin, provaremos que local nilpotência é uma propriedade radical. De maneira análoga mostraremos que em todo grupo G sempre existe o maior subgrupo normal localmente policíclico.

No capítulo 2, mostraremos que subgrupos, quociente e produtos direto de subgrupos de PC-grupo são PC-grupos. E que G é um PC-grupo, se e somente se, G é coberto por subgrupos normais policíclico-por-finito. Mostraremos também que nilpotência local e supersolubilidade local são propriedades de Frattini que é o nosso principal resultado. E terminamos o capítulo com algumas conseqüências desses resultados.

Capítulo 1

Preliminares

Inicialmente apresentaremos a definição de classes de grupos. Dentre essas classes de grupos citaremos as classes dos grupos nilpotentes e supersolúveis e destacaremos as classes dos grupos localmente nilpotente e localmente supersolúveis. Mostraremos que nilpotência e supersolubilidade são fechadas a subgrupos, quocientes e produto direto de um número finito de subgrupos. Na classe $L\mathfrak{N}$ mostraremos que o produto de dois subgrupos normais localmente nilpotentes é localmente nilpotente, um resultado de Hirsch-Plotikin que mostra que existe um único subgrupo normal localmente nilpotente maximal contendo todos os subgrupos normais localmente nilpotentes de G. E na classe dos grupos localmente supersolúveis mostraremos que um grupo $G \in L\mathfrak{S}\mathfrak{S}$ satisfaz Max-n se, e somente se, é supersolúvel.

Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma classe ou propriedade de grupos se para cada grupo G podemos decidir se G possui ou não a propriedade $\mathfrak{X}$, ou seja, $G \in \mathfrak{X}$ ou $G \notin \mathfrak{X}$. Comumente dizemos que G é um $\mathfrak{X}$-grupo se G possui a propriedade $\mathfrak{X}$.

Definição 1.1. *Seja $\mathfrak{X}$ uma classe ou propriedade de grupos.*

i) *Dizemos que G é um grupo poli-$\mathfrak{X}$ se, e somente se, em G existe uma cadeia subnormal*

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq G_n = G$$

onde cada quociente $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ é um $\mathfrak{X}$-grupo, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Indicamos por $\mathfrak{X}^{\infty}$ a *classe dos poli-$\mathfrak{X}$ grupos;*

ii) *Sejam $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ propriedades de grupos. Um grupo G é dito $\mathfrak{X}$-por-$\mathfrak{Y}$, se em G existe um subgrupo normal N, tal que N possui a propriedade $\mathfrak{X}$ e $\dfrac{G}{N}$ possui a propriedade $\mathfrak{Y}$. Indicamos a classe dos grupos $\mathfrak{X}$-por-$\mathfrak{Y}$ por $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$;*

iii) *Um grupo G é dito localmente-$\mathfrak{X}$ grupo se, e somente se, todo subgrupo de G finitamente gerado é um $\mathfrak{X}$-grupo. Indicamos a classe dos localmente-$\mathfrak{X}$ grupos por $L\mathfrak{X}$;*

iv) *Um grupo G é dito hiper-$\mathfrak{X}$ grupo, se toda imagem homomorfica não-trivial de G possuir um $\mathfrak{X}$-subgrupo normal não-trivial. Em outras palavras, para todo $N \lhd G$ existe um $M \trianglelefteq G$ com $N < M$ e $\dfrac{M}{N} \in \mathfrak{X}$. Indicamos a classe dos hiper-$\mathfrak{X}$ grupos por $H\mathfrak{X}$.*

Exemplo 1.1. *Com as definições acima, considerando as classes $\mathfrak{P}$ (policíclico), $\mathfrak{F}$ (finito), $\mathfrak{A}$ (abeliano), $\mathfrak{S}$ (solúvel), $\mathfrak{S}\mathfrak{S}$ (supersolúvel) e $\mathfrak{N}$ (nilpotente), surgem as classes de grupos: hiperabelianos, hipercentrais, localmente finitos, localmente solúveis, localmente supersolúveis, localmente policíclicos, localmente nilpotentes, policíclicos-por-finito e hiperabelianos-por-(localmente finito). Particularmente, se $G \in L\mathfrak{S}\mathfrak{S}$, todo subgrupo finitamente gerado de G é supersolúvel. E se $G \in \mathfrak{P}\mathfrak{F}$, nele existe um subgrupo normal N policíclico de índice finito. Claramente temos que os grupos policíclicos e os grupos finitos pertencem à classe $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$.*

Definição 1.2. *Se n é um inteiro positivo, dizemos que um grupo G é n-gerado se ele é gerado por um n-subconjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de G. Um grupo G é dito finitamente gerado se ele for n-gerado para algum $1 \leq n \in \mathbb{N}$.*

Se $\{X_\lambda/\lambda \in \Lambda\}$ é um conjunto de subgrupos de G, o *subgrupo gerado* pelos $X_\lambda's$, com $\lambda \in \Lambda$, é definido por $\langle \cup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \rangle$. Este conjunto será escrito, por $\langle X_\lambda/\lambda \in \Lambda\rangle$ ou no caso de um conjunto finito $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, escrevemos $\langle X_{\lambda_1}, ..., X_{\lambda_n}\rangle$. Indicamos por $\mathfrak{G}_n$ e $\mathfrak{G}$ as classes dos grupos n-gerado e finitamente gerado, respectivamente.

Observação 1.1. *A classe $\mathfrak{G}$ dos grupos finitamente gerados é fechada a quociente.*

Demonstração: *Se $G = \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ e se $N \trianglelefteq G$, então temos* $\dfrac{G}{N} = \langle x_1N, x_2N, ..., x_nN\rangle$.

Portanto, todo quociente de G é finitamente gerado. ■

Observação 1.2. *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal em G tal que que $\dfrac{G}{N}$ é n-gerado, digamos $\dfrac{G}{N} = \langle x_1N, x_2N, ..., x_nN\rangle$. Então temos $G = NH$, com $H = \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$*

Em geral, a classe $\mathfrak{G}$ dos grupos finitamente gerados não é fechada a subgrupos. No entanto, sob certas condições vale o seguinte

Teorema 1.1 (Schreier)**.** *Seja G um grupo finitamente gerado e H é um subgrupo de G com índice finito. Então H é finitamente gerado.*

Demonstração: Se $|G : H| = r$, com $r \in \mathbb{N}$, temos que $G = Ht_1 \dot{\bigcup} Ht_2 \dot{\bigcup} ... \dot{\bigcup} Ht_r$, com $t_1 = 1$, é a união disjunta de r classes laterais (à direita de H em G). Temos também $G = \langle X\rangle$, com $X \subseteq G$ e $|X| < \infty$.

Agora, consideremos o conjunto $T(X \cup X^{-1})T^{-1}$, onde $T = \{t_1, t_2, ..., t_r\}$ é o conjunto dos representantes das classes laterais citadas acima. Esse conjunto é claramente finito.

Além disso, para todo $a \in H \leq G$, sendo G finitamente gerado por X, existem um inteiro s e elementos $x_1, x_2, ..., x_s$ em $X \cup X^{-1}$, com $a = x_1x_2...x_s$.

Para todo $g \in G$ e todo $i = \{1, 2, ..., r\}$, existem $h = h(i, g) \in H$ e $j = (i, g)$ tais que $t_ig = ht_j$. Assim, $h = t_igt_j^{-1} \in TgT^{-1}$ e como $G = \langle X\rangle$, g é um produto de elementos do conjunto $X \cup X^{-1}$ e por isso, vale que $h \in \langle T(X \cup X^{-1})T^{-1}\rangle$. Logo, para cada um dos $x_j's$ acima vão existir $h_j's$ em $T(X \cup X^{-1})T^{-1}$ e $t_{i_j}'s$ em T, de modo que $t_1x_1 = h_1t_{i_1}$ e $t_{I_j}x_{j+1} = h_{j+1}t_{i_{j+1}}$, com $j = 1, 2, ..., s-1$. Portanto, podemos escrever a igualdade $a = t_1a = t_1x_1x_2...x_s = (t_1x_1)x_2...x_s = (h_1t_{i_1})x_2...x_s = h_1(t_{i_1}x_2)x_3...x_s = h_1(h_2t_{i_2})x_3...x_s = h_1h_2(t_{i_2}x_3)x_4...x_s$. Em finitos passos teremos $a = h_1h_2...h_{s-1}h_st_{i_s}$, se e somente se, $t_{i_s} = h_s^{-1}...h_2^{-1}h_1^{-1}a \in H$, já que os $h_j's$ e a são elementos de H. Então $t_{i_s} \in H$ e assim $t_{i_s} = t_1 = 1$. Consequentemente, $a = h_1h_2...h_s$ pertence a $\langle T(X \cup X^{-1})T^{-1} \cap H\rangle$. Segue que $H \leq \langle T(X \cup X^{-1})T^{-1} \cap H\rangle$ e obviamente, $\langle T(X \cup X^{-1})T^{-1} \cap H\rangle \leq H$. Portanto, vale que H é finitamente gerado pelo conjunto (finito) $T(X \cup X^{-1})T^{-1}$. ■

Se G é um grupo, indicamos por $P(G) = \{W/W \subseteq G\}$ o *conjunto das partes de* G. Todo subconjunto F de $P(G)$ é denominado de uma *família* de subconjuntos de G.

Por $\mathfrak{X}G = \{H \leq G/H \in \mathfrak{X}\}$ denotamos a *família dos* $\mathfrak{X}$*-subgrupos de* G, isto é, a família dos subgrupos de G que possuem a propriedade $\mathfrak{X}$.

Definição 1.3. *Sejam G um grupo e $C \subset P(G)$ uma família de G. Dizemos que C é uma cadeia se, e somente se, valem as seguintes condições:*
i) $C \neq \emptyset$*;*
ii) $\forall X, Y \in C$*, vale que* $X \leq Y$ *ou* $Y \leq X$*.*

Definição 1.4. *Dados um conjunto A e $\mathcal{M} \subseteq P(A)$ uma família de subconjunto de A. Um elemento $M \in \mathcal{M}$ (caso exista) é dito*
i) *o maior elemento de $\mathcal{M}$ se $X \subseteq M$ para todo $X \in \mathcal{M}$;*
ii) *um elemento maximal de $\mathcal{M}$ se $M \subseteq X \in \mathcal{M}$ implica que $X = M$. Denotamos por $M \lessdot \mathcal{M}$.*

Podemos observar que um maior elemento $M \in \mathcal{M}$ (caso exista) é único e ele é o único elemento maximal de $\mathcal{M}$. Se não existe um maior elemento em $\mathcal{M}$, podem existir vários elementos maximais em $\mathcal{M}$ (ou nenhum).

Indicamos por $m\mathcal{M} = \{M/M$ é elemento maximal de $\mathcal{M}\}$ o conjunto dos elementos maximais de $\mathcal{M}$. Podemos ter $m\mathcal{M} = \emptyset$ mesmo se $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

Exemplo 1.2. i) *Seja G um grupo abeliano. Então $M \lessdot G$ se, e somente se, $|G : M| = p$, com p primo;*
ii) *O grupo aditivo $(\mathbb{Q}, +)$ dos números racionais não possui subgrupos maximais: Todo subgrupo próprio de $\mathbb{Q}$ tem índice infinito;*
iii) *Seja $G = S_A$, o grupo simétrico sobre A com $|A| \neq 2$. Seja $k \in A$. Então*

$$M = G_k = \{g \in G/kg = k\} \lessdot G.$$

Associando-se $\alpha : Mg \longrightarrow kg$ temos que α é uma bijeção de $G : M$ sobre A. Particularmente a cardinalidade $|A| = |G : M|$. Ainda, se $|A| = n < \infty$, então $|G : M| = n$. Portanto, sobre o índice de qualquer subgrupo maximal, não podemos estabelecer nenhuma restrição.

Demonstração: i) Se G é abeliano, então todo subgrupo de G é normal. Se temos $M \lessdot G$, então $\dfrac{G}{M}$ é um grupo não trivial sem subgrupos próprios se, e somente se, $\left|\dfrac{G}{M}\right| = |G : M| = p$, com p primo.

ii) Suponhamos que $U < \mathbb{Q}$ e $|\mathbb{Q} : U| = n < \infty$. Considere

$$\begin{aligned} \varphi_n : \quad & \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ & r \longmapsto nr \end{aligned}$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$. Temos que φ_n é um endomorfismo de $(\mathbb{Q}, r)$. Para todo $r \in \mathbb{Q}$, temos $n(r + U) = nr + U = U$ (identidade), para todo $r + U \in \dfrac{\mathbb{Q}}{U}$. Logo, $nr \in U < \mathbb{Q}$ e φ_n não é sobrejetor: $\varphi_n(G) \subseteq U < \mathbb{Q}$. Isto contradiz o fato de que para todo $r \in \mathbb{Q}$, $r = \varphi_n\left(\dfrac{r}{n}\right)$, ou seja, φ_n é sobrejetor. Logo, $|G : U| = \infty$.

iii) Claro que $M \lessdot G$, pois $|A| \neq 2$. Seja $X \leq G$, com $M < X \leq G$. Existe $g_0 \in X \backslash M$, com $kg_0 \neq k$. Seja g um elemento qualquer de G. Se $kg = k, g \in M \subseteq X$ e $X = G$.

Suponhamos que $kg \neq k$. Seja a permutação $y = (kgkg_0)(k) \in M$. Temos $kg_0y = kg$ e daí $k = kgy^{-1}g_0^{-1}$ onde $gy^{-1}g_0^{-1} \in M \subseteq X$. Daí, $g \in Xg_0y \subseteq X$ e $X = G$.

$\alpha : Mg \longrightarrow kg$ é uma bijeção: De fato,

(a) Para todo $g_1, g_2 \in G$, temos

$$Mg_1 = Mg_2 \Leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in M \Leftrightarrow kg_1g_2^{-1} = k \Leftrightarrow kg_1 = kg_2.$$

Logo, α é injetiva.

(b) Para todo $l \in A$, defina $g_l = (kl)$ então $\alpha : Mg_l \longrightarrow kg_l = l$ e daí a sobrejetividade. Portanto α é bijetiva. ■

Definição 1.5. *Dizemos que uma família F de subconjuntos de um grupo G é indutivamente ordenada se, e somente se, F sempre contém $\bigcup_{W \in C} W$, a união dos termos de* *qualquer cadeia C dentro de F.*

Exemplo 1.3. *Seja G um grupo e seja*

$$F = \{H / H \trianglelefteq G \text{ e } H \in L\mathfrak{N}\}$$

a família dos subgrupos normais localmente nilpotentes de G. Para qualquer cadeia C de F, consideremos a união $L = \bigcup_{A \in C} A$. Segue de breves argumentos que $L \trianglelefteq G$. Agora, dados finitos elementos $l_1, l_2, ..., l_k \in L$, com $k \in \mathbb{N}$, vale que na pior das hipóteses, cada $l_i \in A_i$, onde cada A_i é um elemento da cadeia C, para todo $i = 1, 2, ..., k$. Portanto, temos que $l_1, l_2, ..., l_k \in A_j$, para algum $j \in \{1, 2, ..., k\}$. Como $A_j \in F$, segue que o subgrupo $\langle l_1, l_2, ..., l_k \rangle$ é nilpotente. Segue então que $L \in F$ e a família F é indutivamente ordenada.

Para investigar grupos mais gerais podemos usar o seguinte

Lema 1.1 (Lema de Zorn)**.** *Toda família de subgrupos indutivamente ordenada possui um elemento maximal.*

Olhando novamente para o Exemplo 1.3, pelo Lema de Zorn, o conjunto mF dos subgrupos maximais de F é não vazio. Ou seja, para todo grupo G podemos considerar um maior subgrupo normal localmente nilpotente.

Definição 1.6. *Uma família $\emptyset \neq \mathcal{M} \subseteq P(A)$ satisfaz a condição maximal, se qualquer cadeia $C \subseteq \mathcal{M}$ possui um maior elemento.*

Neste sentido fazemos a

Definição 1.7. *Seja G um grupo.*

i) *Se $\mathcal{S}$ consiste de todos os subgrupos de G, dizemos que G satisfaz a condição maximal quando $\mathcal{S}$ satisfaz a condição maximal; analogamente, dizemos que G satisfaz a condição minimal quando $\mathcal{S}$ satisfaz a condição minimal. Denotamos estas condições por Max e Min, respectivamente;*

ii) *Se $\mathcal{N}$ consiste de todos os subgrupos normais de G, dizemos que G satisfaz a condição maximal sobre os subgrupos normais quando $\mathcal{N}$ satisfaz a condição maximal. Analogamente, dizemos que G satisfaz a condição minimal sobre os subgrupos normais quando $\mathcal{N}$ satisfaz a condição minimal. Denotamos estas condições por Max-n e Min-n, respectivamente;*

iii) *Se $\mathfrak{A}$ consiste de todos os subgrupos abelianos de G, dizemos que G satisfaz a condição maximal sobre subgrupos abelianos quando $\mathfrak{A}$ satisfaz a condição maximal. Analogamente, dizemos que G satisfaz a condição minimal sobre subgrupos abelianos quando $\mathfrak{A}$ satisfaz a condição minimal. Denotamos estas condições por Max-ab e Min-ab, respectivamente.*

Teorema 1.2. *As classes Max, Max-n, Min ou Min-n são fechadas para subgrupos e extensões.*

Demonstração: Faremos a demonstração para a classe Max.

Sejam G um grupo e $H \leq G$. Considere $H_1 \leq H_2 \leq ...$ uma série ascendente infinita de subgrupos subnormais de H. Agora $H_i \cap G$ é subnormal em G. Se G satisfaz a condição Max, então existe $n > 0$ tal que $H_n \cap G = H_{n+1} \cap G$. De onde segue que $H_n = H_{n+1}$. Portanto, a série dada possui um elemento maximal, logo, H satisfaz a condição Max.

Seja N um subgrupo normal de G. Suponhamos que N e $\dfrac{G}{N}$ possui a condição maximal e seja $G_1 \leq G_2 \leq ...$ uma série ascendente infinita de subgrupos subnormais de G. Agora $G_i \cap N$ é subnormal em N e $\dfrac{G_iN}{N}$ é subnormal em $\dfrac{G}{N}$. Portanto, existe um $r > 0$ tal que $G_r \cap N = G_{r+1} \cap N$ e $G_rN = G_{r+1}N$. Daí, seque que $G_r = G_{r+1}$. Assim, a série possui elemento maximal e, portanto, G satisfaz a condição Max. $\blacksquare$

Na direção dos grupos maximais temos a seguinte

Observação 1.3. *Sejam G um grupo, $U < G$ um subgrupo próprio de G e $x \in G \backslash U$. Pondo $V = \langle U, x \rangle$, temos $U < V$. Então existe M com $U \leq M \lessdot G$. Particularmente, se $G = \langle U, x \rangle$, então existe subgrupo maximal M em G com $U \leq M \lessdot G$.*

Demonstração: Considere a família

$$\mathcal{M} = \{X / U \leq X \leq V, x \notin X\}.$$

Temos $U \in \mathcal{M}$ e assim $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ uma cadeia e $J = \bigcup_{Y \in \mathcal{C}} Y$. Claramente, $U \leq J \leq V$ e $x \notin J$, senão x está em algum $Y \in \mathcal{C}$. Logo $J \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{M}$ é indutivamente ordenada.

Seja M um elemento maximal em $\mathcal{M}$ (pelo Lema de Zorn). Então $U \leq M \leq V$ com $x \notin M$. Particularmente, temos $M < V$.

M é maximal em V: Seja $M < L \leq V$. Então $L \notin \mathcal{M}$ com $U \leq L \leq V$ e assim, $x \in L$.

Agora, $V = \langle U, x \rangle \leq L \leq V$ e $V = L$, o que nos dá $M \lessdot V$. ■

Definição 1.8. *Dizemos que um grupo G é noetheriano (ou satisfazendo a condição maximal para subgrupos) se ocorre(m) uma (todas) da (as) propriedade (s) seguintes:*

i) *Toda família não vazia de subgrupos de G possui um elemento maximal;*

ii) *Toda cadeia ascendente $U_0 \leq U_1 \leq ... \leq U_n \leq ...$ de subgrupos de G é finita;*

iii) *Todo subgrupo de G é finitamente gerado.*

Lema 1.2 (de Dedeking). *Sejam H, K, L subgrupos de G, com $L \leq H$, então temos que: $L(H \cap K) = H \cap LK$ e $(H \cap K)L = H \cap KL$.*

Vale lembrar que, em geral $KL \neq LK$, isto é, tanto LK e KL quanto $H \cap KL$ e $H \cap LK$ não precisam ser subgrupos de G.

Demonstração: Mostraremos que $L(H \cap K) = H \cap LK$. Claro que $L(H \cap K) \subseteq H \cap LK$. Seja $x = h = lk \in H \cap LK$, com $h \in H, k \in K$ e $l \in L$. Segue que $k = l^{-1}h \in H \cap K$, pois

$L \leq H$ e daí $x \in L(H \cap K)$. Logo, $H \cap LK \subseteq L(H \cap K)$ e, portanto, $L(H \cap K) = H \cap LK$. ■

Proposição 1.1. *Seja G um grupo, $N \trianglelefteq G$. Então G é noetheriano se, e somente se, N e $\frac{G}{N}$ são noetherianos.*

Demonstração: Consideremos uma cadeia ascendente de subgrupos de G

$$H_1 \leq H_2 \leq ... \leq H_i \leq ... \leq G$$

Como N e $\frac{G}{N}$ são noetheriano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H_i \cap N = H_n \cap N$ e $H_iN = H_nN$, para todo $i \geq n$. Agora,

$$H_i = H_i \cap (H_iN) = H_i \cap (H_nN) = H_n(H_i \cap N) = H_n(H_n \cap N) = H_n, \forall\ i \geq n;$$

ou seja, a cadeia considerada é finita. Portanto G é noetheriano.

Agora, seja $N \trianglelefteq G$. Se G é noetheriano, então existe uma cadeia ascendente finita

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$$

de subgrupos de G. Consideremos $N_i = N \cap G_i$ para $i = 0, 1, ..., n$. Assim, temos uma cadeia ascendente finita

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq ... \leq N_n = N$$

de subgrupos de N.

Em $\frac{G}{N}$ podemos construir uma cadeia ascendente finita

$$\frac{N}{N} = \frac{G_0N}{N} \leq \frac{G_1N}{N} \leq ... \leq \frac{G_nN}{N} = \frac{G}{N}$$

de subgrupos de $\frac{G}{N}$. Portanto, N e $\frac{G}{N}$ são noetherianos. ■

1.1 Grupos Nilpotentes

Definição 1.9. *Um grupo G é dito nilpotente se em G existe uma série finita de subgrupos*

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_{n-1} \leq G_n = G$$

tal que $G_i \trianglelefteq G$ *e* $\dfrac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_{i-1}}\right)$ *para todo* $i = 1, 2, ..., n$.

Indicamos por $\mathfrak{N}$ a *classe* dos grupos nilpotentes.

Proposição 1.2. *A classe* $\mathfrak{N}$ *dos grupos nilpotentes é fechada a subgrupos, quocientes e produtos diretos de dois fatores.*

Demonstração: Sejam G um grupo nilpotente com $cl(G) = c$ e $H \leq G$. Sendo G nilpotente de classe c, temos que existe uma série

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_{c-1} \leq G_c = G,$$

onde $G_i \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_{i-1}}\right)$, para $i = 1, ..., c$. Considere a série

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_{c-1} \leq H_c = H,$$

onde $H_j = G_j \cap H$, para $j = 0, 1, ..., c$. Temos que $H_j \trianglelefteq H$, para todo $j = 0, 1, ..., c$, pois $G_j \trianglelefteq G$.

Vamos mostrar que $\dfrac{H_i}{H_{i-1}} \leq Z\left(\dfrac{H}{H_{i-1}}\right)$, para todo $i = 1, 2, ..., c$.

Sejam xH_{i-1}, hH_{i-1} elementos quaisquer de $\dfrac{H_i}{H_{i-1}}$. Temos que $[xH_{i-1}, hH_{i-1}] = [x, h]H_{i-1}$. Agora, $x \in H_{i-1}$ e daí $x \in G_{i-1}$ e $h \in H$, ou seja, $h \in G$, logo $[x, h] \in G_{i-1} \cap H = H_{i-1}$, isto é, $[xH_{i-1}, hH_{i-1}] = H_{i-1}$, ou seja, $xH_{i-1} \in Z\left(\dfrac{H}{H_{i-1}}\right)$ e daí $\dfrac{H_i}{H_{i-1}} \leq Z\left(\dfrac{H}{H_{i-1}}\right)$.

Agora, seja $N \trianglelefteq G, cl(G) = c$ e considere a série

$$\frac{N}{N} = \frac{G_0N}{N} \leq \frac{G_1N}{N} \leq ... \leq \frac{G_{c-1}N}{N} \leq \frac{G_cN}{N} = \frac{GN}{N}.$$

Temos que $\dfrac{G_iN}{N} \trianglelefteq \dfrac{G}{N}$, pois $G_i \trianglelefteq G$ e $N \trianglelefteq G$. Daí, $G_iN \trianglelefteq G$ e pelo teorema da correspondência temos o resultado. Assim, basta mostrar que $\dfrac{\frac{G_iN}{N}}{\frac{G_{i-1}N}{N}} \leq Z\left(\dfrac{\frac{G}{N}}{\frac{G_{i-1}N}{N}}\right)$, isto é, temos $\dfrac{G_iN}{G_{i-1}N} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_{i-1}N}\right)$.

Sejam $xG_{i-1}N \in \dfrac{G_iN}{G_{i-1}N}$ e $gG_{i-1}N \in \dfrac{G}{G_{i-1}N}$ elementos quaisquer. Temos então, que $[xG_{i-1}N, gG_{i-1}N] = [x, g]G_{i-1}N$. Agora, $x \in G_iN$ e $g \in G$, isto é, $x = hn$, onde $h \in G_i$ e $n \in N$. Temos então $[x, g] = [hn, g] = [h, g]^n[n, g] \in G_{i-1}N$. Assim, segue que $xG_{i-1}N \in Z\left(\dfrac{G}{G_{i-1}N}\right)$ e daí, $\dfrac{G_iN}{G_{i-1}N} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_{i-1}N}\right)$.

Finalmente, consideremos $G = M \times N$, onde M e N tem classe de nilpotência igual a c. Desta forma existe uma série

$$1 = M_0 \leq M_1 \leq ... \leq M_c = M,$$

com $M_i \trianglelefteq M$ e $\dfrac{M_i}{M_{i-1}} \leq Z\left(\dfrac{M}{M_{i-1}}\right)$ em M, para todo $i = 1, 2, ..., c$ e uma série

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq ... \leq N_c = N,$$

com $N_i \trianglelefteq N$ e $\dfrac{N_i}{N_{i-1}} \leq Z\left(\dfrac{N}{N_{i-1}}\right)$ em N, para todo $i = 1, 2, ..., c$.

Considere a série

$$1 = M_0N_0 \leq M_1N_1 \leq ... \leq M_{c-1}N_{c-1} \leq M_cN_c = MN = G,$$

temos $M_iN_i \trianglelefteq G$ e $\dfrac{M_iN_i}{M_{i-1}N_{i-1}} \leq Z\left(\dfrac{G}{M_{i-1}N_{i-1}}\right)$. De fato, se $M_i \leq Z(M), N_i \leq Z(N)$, então $M_iN_i \leq Z(MN) = Z(G)$, já que

$$[M_iN_i, MN] = [M_i, MN][N_i, MN] = [M_i, M][M_i, N][N_i, M][N_i, M] \leq M_{i-1}N_{i-1} \Leftrightarrow$$
$$\frac{M_iN_i}{M_{i-1}N_{i-1}} \leq Z\left(\frac{MN}{M_{i-1}N_{i-1}}\right).$$

Portanto, a classe $\mathfrak{N}$ dos grupos nilpotentes é fechada a subgrupos, quocientes e produto direto de dois fatores. ■

Observação 1.4. *A classe $\mathfrak{N}$ não é fechada a extensões de subgrupos. Um contra exemplo é o grupo simétrico S_3, onde temos que os grupos A_3 e $\dfrac{S_3}{A_3}$ são nilpotentes, porém S_3 não é nilpotente.*

O seguinte resultado nos diz que a classe dos grupos nilpotentes finitamente é fechada para subgrupos.

Proposição 1.3. *Seja G um grupo nilpotente finitamente gerado. Então todo subgrupo de G é finitamente gerado.*

Demonstração: Seja $G = \langle g_1, g_2, ..., g_t\rangle$ e podemos supor que $G \in \mathfrak{N}_c \backslash \mathfrak{N}_{c-1}$, com $c \geq 2$. Se

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_c = G$$

é uma série central de G, então

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_c = G$$

e $G_2 \nleq Z(G)$ (pois $G \notin \mathfrak{N}_{c-1}$). Coloquemos $R = G_2$ e $N = [G_2, G]$, isto é, substituímos G_1 por $[G_2, G] > 1$. Temos que $\dfrac{G}{N} = \langle g_1N, g_2N, ..., G_tN\rangle$ é finitamente gerado e que o grupo $\dfrac{G}{N}$ tem classe de nilpotência $cl\left(\dfrac{G}{N}\right) = c - 1$. Por hipótese de indução podemos supor que $\dfrac{G}{N}$ é Noetheriano. Logo todos os quocientes $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ são finitamente gerados para $i = 2, ..., c$ (2^{o} Teorema do Isomorfismo). Particularmente $\dfrac{R}{N} = \dfrac{G_2}{[G_2, G]}$ é finitamente gerado, digamos

$$\frac{R}{N} = \langle r_1N, r_2N, ..., r_sN\rangle$$

com certos $r_1, r_2, ..., r_s \in R$. Falta provar que N é finitamente gerado: Temos $N \leq Z(G)$, e $\dfrac{R}{N} \leq Z\left(\dfrac{G}{N}\right)$. Assim, $[g_i, r_j] \in N$, para todo $i = 1, 2, ..., t$ e $j = 1, 2, ..., s$. Afirmamos que

$$N = \langle [g_i, r_j] | 1 \leq i \leq t; 1 \leq j \leq s\rangle,$$

isto é, estes ts comutadores geram N: Coloquemos

$$Y = \langle [g_i, r_j] | 1 \leq i \leq t; 1 \leq j \leq s\rangle,$$

e temos $Y \leq N \leq Z(G)$, particularmente, $Y \trianglelefteq G$.

$\dfrac{R}{N}$ é o maior quociente central de R. Se conseguirmos provar que $\dfrac{R}{Y} \leq Z\left(\dfrac{G}{Y}\right)$, seguirá $N \leq Y$ e daí $Y = N$.

Agora, para todo elemento $u \in R$ temos que $uN \in \dfrac{\langle r_1, r_2, ..., r_s\rangle N}{N}$ e portanto $u \in \langle r_1, r_2, ..., r_s\rangle N$, digamos $u = xn$, com $x \in \langle r_1, r_2, ..., r_s\rangle$ e $n \in N$. Pela definição de Y, x comuta com os geradores g_i de $\dfrac{G}{Y}$, isto é, $[x, g_i] \in Y (1 \leq i \leq t)$. A centralidade de

N em G fornece $[u, g_i] = [xn, g_i] = [x, g_i]^n[n, g_i] = [x, g_i] \in Y$. Logo, $\dfrac{R}{Y}$ é central e temos $Y = [R, G] = N$. ■

Proposição 1.4. *Sejam G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Se $N \leq Z(G)$ e $\dfrac{G}{N}$ é nilpotente, então G é nilpotente. Em particular, se $\dfrac{G}{Z(G)}$ é nilpotente de classe no máximo n, então G é nilpotente de classe no máximo $n+1$.*

Demonstração: Consideremos a série subnormal

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq ... \leq N_r = N$$

de N. Claramente $\dfrac{N_i}{N_{i-1}} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_{i-1}}\right)$, para todo $i = 1, 2, ...r$. Por outro lado, temos que $\dfrac{G}{N} \in \mathfrak{N}$, ou seja, existe uma série ascendente

$$\frac{N}{N} = \frac{G_0}{N} \leq \frac{G_1}{N} \leq ... \leq \frac{G_s}{N} = \frac{G}{N}.$$

Com $\dfrac{G_i}{N} \trianglelefteq \dfrac{G}{N}$ e $\dfrac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z\left(\dfrac{\frac{G}{N}}{\frac{G_{i-1}}{N}}\right)$, para todo $i = 1, 2, ..., s$.

Daí, temos a série

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq ... \leq N_r = N = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_s = G$$

de G, cujos termos são normais em G e os fatores são centrais. Portanto, G é nilpotente. ■

Proposição 1.5 (Teorema de Fitting)**.** *Sejam G um grupo, A, B dois subgrupos normais nilpotentes de classes $cl(A) = a$ e $cl(B) = b$ de G. Então AB é nilpotente de classe $cl(AB) \leq a + b$.*

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que $G = AB$ (já que em AB as hipóteses são válidas). Vamos usar indução sobre as classes de nilpotência.

Se $a = 0$, então $A = 1$ e daí $G = B$ e $cl(G) = 0 + b$.

Se $b = 0$, então $B = 1$ e daí $G = A$ e $cl(G) = a + 0$.

Podemos supor que $a, b \geq 1$, isto é, $A, B > 1$. Daí, $Z(A)$ é não trivial normal característico em A, assim, $Z(A) \trianglelefteq G$. Colocando $Z_1 = Z(A)$, temos que $\dfrac{A}{Z_1}, \dfrac{BZ_1}{Z_1} \trianglelefteq \dfrac{G}{Z_1}$. Daí, temos que $cl\left(\dfrac{A}{Z_1}\right) = a - 1$. Temos também, $\dfrac{BZ_1}{Z_1} \cong \dfrac{B}{B \cap Z_1}$ e, pela proposição 1.4, $cl\left(\dfrac{BZ_1}{Z_1}\right) = b$.

Agora, segue que $\dfrac{G}{Z_1} = \left(\dfrac{A}{Z_1}\right)\left(\dfrac{BZ_1}{Z_1}\right)$, logo, $cl\left(\dfrac{G}{Z_1}\right) = (a-1) + b$, por indução.

Analogamente, colocando $Z_2 = Z(B) \trianglelefteq G$, temos que $\dfrac{B}{Z_2}$ tem classe de nilpotência igual a $b-1$ e $\dfrac{AZ_2}{Z_2}$ tem classe de nilpotência igual a a, logo por indução, $cl\left(\dfrac{G}{Z_2}\right) = a + (b-1)$. Segue então que $cl\left(\dfrac{G}{Z_1 \cap Z_2}\right) = a + b - 1$. Mas, $Z_1 \cap Z_2 \leq Z(G)$, logo, temos que $cl\left(\dfrac{G}{Z(G)}\right) = a + b - 1$, já que $\dfrac{G}{Z(G)} \cong \dfrac{\frac{G}{Z_1 \cap Z_2}}{\frac{Z(G)}{Z_1 \cap Z_2}}$. E assim, $cl(G) = a + b$. ■

Corolário 1.1. *Para todo grupo G e todos os $N_1, N_2, ..., N_r$ subgrupos normais nilpotentes de G, vale que $N_1N_2...N_r$ é nilpotente.*

Demonstração: Sejam $N_1, N_2, ..., N_r$ subgrupos normais nilpotentes de G. Pelo teorema anterior, temos que N_1N_2 é nilpotente. Agora supondo, por indução, que $N_1N_2...N_{r-1}$ é nilpotente, novamente pelo Teorema anterior, temos que $N_1N_2...N_r$ é nilpotente. ■

Já vimos que a classe $\mathfrak{N}$ dos grupos nilpotentes não é fechada a extensão, no entanto, temos o seguinte teorema que nos fornece um importante resultado.

Teorema 1.3 (P. Hall)**.** *Sejam G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Se N e $\dfrac{G}{N'}$ são nilpotentes, então G é nilpotente.*

Demonstração: (*Ver [4], pág.*)

Seja G um p-grupo finito de ordem > 1. Assim, temos que $Z(G) \neq 1$, portanto, $\dfrac{G}{Z(G)}$ é nilpotente por indução na ordem de G. Assim, pela Proposição 1.4., segue que G é nilpotente. Neste sentido, podemos concluir que os P-subgrupos de Sylow de um grupo G

são nilpotentes e, portanto, se G é o produto direto de seus P-subgrupos de Sylow então, pela Proposição 1.2, G é nilpotente.

Seja G um grupo nilpotente de classe c. Se $H \leq G$, então $HZ_i(G) \trianglelefteq HZ_{i+1}(G)$ desde que $\dfrac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z\left(\dfrac{G}{Z_i(G)}\right)$. Portanto, $H = HZ_0(G) \trianglelefteq HZ_1(G) \trianglelefteq ... \trianglelefteq HZ_c(G) = G$ e H é subnormal em G. Se i é o menor inteiro positivo tal que $H \neq H_i$, então $H = H_{i-1} \triangleleft H_i$ e $H_i \leq N_G(H)$. Se M é um subgrupo maximal de G, então $M < N_G(M)$, assim pela maximalidade de M temos $N_G(M) = G$ e $M \trianglelefteq G$. Agora, se P é um Sylow subgrupo de G e P não é normal em G, então $N_G(P) < G$ e, portanto, está contido em um subgrupo maximal M de G. Então $M \triangleleft G$, porém isso contradiz o fato de que se $N_G(P) \leq H \leq G$, então $H = N_G(H)$. Portanto, cada Sylow subgrupo de G é normal e existe exatamente um Sylow p-subgrupo para cada primo p, uma vez que todos são conjugados. O produto de todos os Sylow é claramente um produto direto e é igual a G.

Dizemos que um grupo G é *solúvel* se existe uma série subnormal

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$$

com quociente $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ abeliano, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Assim, claramente a classe $\mathfrak{N}$ dos grupos nilpotentes está contida na classe $\mathfrak{S}$ dos grupos solúveis. E, se G é um p-grupo solúvel fintamente gerado, temos que $\dfrac{G}{G'}$ é um p-grupo (nilpotente) finitamente gerado. Então, $\dfrac{G}{G'}$ é p-grupo policíclico e, por isso, finito. Mas sendo G finitamente gerado e $\dfrac{G}{G'}$ finito, temos que G' é finitamente gerado, o que implica que G' é nilpotente.

Agora, G' é nilpotente finitamente gerado, daí G' é (um p-grupo) policíclico. Logo, G' é finito. Segue então que G é um p-grupo finito e por isso G é nilpotente.

1.2 O subgrupo de Fitting

Definição 1.10. *Para todo grupo G seja*

$$Fit(G) = \prod_{N \in nG \, e \, N \in \mathfrak{N}G} N$$

o gerado de todos os subgrupos normais nilpotentes de G. Tem-se que $Fit(G)$ é um subgrupo característico de G.

O subgrupo $Fit(G)$ chama-se o *o subgrupo de Fitting de G.*

Um grupo G é dito grupo de Fitting, se $Fit(G) = G$, isto é, se G é um produto de subgrupos normais nilpotentes de G. Assim, temos uma descrição alternativa de grupos de Fitting.

Teorema 1.4. *Um grupo G é um grupo de Fitting se, e somente se, todo elemento de G está contido em um subgrupo normal nilpotente de G.*

Se G satisfaz a condição Max-n (ou é finito), o subgrupo $Fit(G)$ de Fitting é nilpotente, e evidentemente é o único maior subgrupo normal nilpotente de G. Claro que $Fit(G)$ pode ser trivial. Por outro lado, se G é um grupo solúvel não trivial, o subgrupo de Fitting de G contém o menor termo não trivial da série derivada e, portanto, não é trivial.

Proposição 1.6. *Para todo grupo G vale que $Fit(G) = \{x \in G/\langle x^G \rangle \in \mathfrak{N}G\}$, isto é, $Fit(G)$ é o conjunto dos elementos de G que geram um subgrupo normal nilpotente de G.*
Demonstração: Se $x \in G$ é tal que $\langle x^G \rangle$ é nilpotente, então temos que $x \in Fit(G)$. Reciprocamente seja $x \in Fit(G)$. Então existem subgrupos $N_1, N_2, ..., N_r$ normais e nilpotentes de G, com $x \in N_1N_2...N_r$ e daí $\langle x^G \rangle \leq N_1N_2...N_r$. Mas pelo Teorema de Fitting, temos que $N_1N_2...N_r \in \mathfrak{N}$ e, pela Proposição 1.2, $\langle x^G \rangle$ é nilpotente. ■

Proposição 1.7. *Se G é um grupo finito, então $Fit(G)$ é a intersecção dos centralizadores dos fatores principais de G.*
Demonstração: Seja

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$$

uma série de G e seja I a interseção de todos os $C_G\left(\dfrac{G_{i+1}}{G_i}\right)$, para todo $i = 0, 1, ..., n$. Então, $[G_{i+1}, I] \leq G_i$ para todo $i = 0, 1, ..., n$. Por isso $\gamma_{i+1}I = 1$ e I é nilpotente: claramente

$I \lhd G$, assim $I \leq Fit(G)$. Por outro lado, temos que $[G_1, Fit(G)] \lhd G$ e $[G_1, Fit(G)] \leq G_1$. Se G_1 é um subgrupo normal minimal de G, ou $[G_1, Fit(G)] = 1$ ou $[G_1, Fit(G)] = G_1$: neste último caso, a comutação repetida com o $Fit(G)$ nos dá $G_1 \leq \gamma_{c+1} Fit(G) = 1$ para algum c, uma contradição. Daí $Fit(G)$ deve centralizar G. Se $n > 1$, a indução em n mostra que $\dfrac{FG_1}{G_1}$ e, portanto, F centraliza $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ se $i \geq 1$. ■

Lema 1.3. *Sejam G um grupo finito e $M \leq G$. Valem:*

i) *se M é subnormal em G, então, $Fit(G) = M \cap Fit(G)$;*

ii) *M é nilpotente e subnormal se, e somente se, $M \leq Fit(G)$.*

Demonstração: i) Podemos considerar dois casos:

Caso 1: Seja M normal em G. Temos que $M \cap Fit(G)$ é normal em M. Como $M \cap Fit(G)$ é nilpotente, temos que $M \cap Fit(G) \subseteq Fit(M)$. Por outro lado, $Fit(G)$ é característico em M, logo $Fit(G)$ é normal em G. Mas $Fit(G)$ é nilpotente, assim $Fit(M) \subseteq Fit(G)$. Claramente temos que $Fit(M) \subseteq M$, logo $Fit(M) \subseteq M \cap Fit(G)$.

Caso 2: Seja M subnormal em G. Consideremos a série

$$M = M_0 \trianglelefteq M_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq M_r = G.$$

Aplicando-se o Caso 1, r vezes, temos $Fit(M_{r-1}) = M_{r-1} \cap Fit(G)$
$Fit(M_{r-2}) = Fit(M_{r-1}) \cap M_{r-2}\ M_{r-1} \cap Fit(G) \cap M_{r-2} = Fit(G) \cap M_{r-2}, ..., Fit(M)$
$M \cap Fit(M_1) = ... = M \cap Fit(G)$.

ii) Suponhamos que $M \leq Fit(G)$. Como $Fit(G)$ é nilpotente, temos que M é nilpotente e subnormal em $Fit(G)$ logo, M é subnormal em G. Reciprocamente, suponhamos que M é nilpotente e subnormal em G. Temos que $Fit(M) = M$. Por (i), segue que $M = Fit(M) = M \cap Fit(G)$ logo, $M \leq Fit(G)$. ■

1.3 Grupos Localmente Nilpotentes

Proposição 1.8. *A classe $L\mathfrak{N}$ dos grupos localmente nilpotentes são fechadas para subgrupos e quocientes.*

Demonstração: Sejam G um grupo localmente nilpotente, H um subgrupo de G e $K \leq H$ um subgrupo finitamente gerado de H. Assim, K também é finitamente gerado em G e, sendo G localmente nilpotente, segue que K é nilpotente. Portanto, H é localmente nilpotente.

Agora, sejam N um subgrupo normal de G e $\frac{K}{N}$ um subgrupo finitamente gerado de $\frac{G}{N}$. Assim, temos que

$$\frac{K}{N} = \frac{\langle k_1N, k_2N, ..., k_rN\rangle}{N} = \frac{\langle k_1, k_2, ..., k_r\rangle N}{N}.$$

Daí, segue que $\frac{K}{N}$ é isomorfo a um subgrupo finitamente gerado de G. Como G é localmente nilpotente, segue que $\frac{K}{N}$ é nilpotente e, portanto, $\frac{G}{N}$ é localmente nilpotente. ■

Utilizando a idéia do conjugado de um elemento de um grupo G, podemos considerar $X \subset G$ e $H \leq G$ e definir o *fecho normal* de X em H como sendo o conjunto $X^H = \langle x^h = h^{-1}xh / x \in X$ e $h \in H\rangle$. Claro que temos $X \subset X^H \lhd \langle X, H\rangle$ e assim, vale que $X^H = X^{\langle X,H\rangle}$.

Antes de verificarmos um importante resultado para a classe dos grupos localmente nilpotentes, temos a

Observação 1.5. *Sejam G um grupo; $H, K \leq G$ e $M, N \subset G$. Então, valem as seguintes igualdades:*

i) $M^K = \langle M, [M, K]\rangle$;

ii) $[M, K]^K = [M, K]$;

iii) $[M, N]^K = [M, K]$, *se* $K = \langle N\rangle$;

iv) $[H,K]=[M,N]^{HK}$, *se* $H=\langle M\rangle$ *e* $K=\langle N\rangle$;

v) *Sejam* H,K *e* L *subgrupos de um grupo* G, *tais que* $K\leq N_G(H)\bigcap N_G(L)$. *Então,* $[HK,L]=[H,L][K,L]$.

Demonstração: i) Mostra-se a partir da identidade $x^k=x[x,k]$;

ii) O subgrupo $[X,K]^K$ é gerado por todo $[x,k_1]^{k_2}$, onde $x\in X$ e $k_i\in K$. Agora temos que $[x,k_1]^{k_2}=[x,k_2]^{-1}[x,k_1k_2]$, assim $[x,k_1]^{k_2}\in[X,K]$ e $[X,K]^K=[X,K]$;

iii) Por (ii) basta mostrar que $[x,k]\in[X,Y]^K,\forall x\in X$ e $k\in K$. Agora vamos escrever $k=y_1^{\epsilon_1}y_2^{\epsilon_2}...y_r^{\epsilon_r}$ com $y_i\in Y$ e $\epsilon_i=\pm1$. Primeiramente $[x,y_1^{-1}]=([x,y_1]^{y_1^{-1}})^{-1}\in[X,Y]^K$, assim $[x,k]\in[X,K]^K$ se $r=1$. Seja $r>1$ e colocando $k'=y_1^{\epsilon_1}y_2^{\epsilon_2}...y_{r-1}^{\epsilon_{r-1}}$, temos então $[x,k]=[x,k'y_r^{\epsilon_r}]=[x,y_r^{\epsilon_r}][x,k']^{y_r^{\epsilon_r}}$, um produto que pertence a $[X,Y]^K$ por indução em n;

iv) Segue de (iii). De fato, sendo $[M,N]=[N,M]^{-1}$, temos que

$$[M,N]^{HK}=([M,N]^H)^K=([N,M]^H)^{-K}=[N,H]^{-K}=[H,N]^K=[H,K];$$

v) De $K\leq N_G(H)$, temos $HK\leq G$. Temos $[HK,L]=\langle[hk,l]/hk\in HK$ e $l\in L\rangle$. Mas $[hk,l]=[h,l]^k[k,l]=[h^k,l^k][k,l]=[h',l'][k,l]$, onde temos que $h'\in H$ e $l'\in L$, pois $K\leq N_G(H)\cap N_G(L)$. Assim, $[HK,L]\leq\langle[H,L],[K,L]\rangle$. Temos que K normaliza $[H,L]$. Temos também, $[K,L]\leq L$ e L normaliza $[H,L]$, pois $[H,L]\trianglelefteq\langle H,L\rangle$. Logo, $[K,L]$ normaliza $[H,L]$. E assim, $\langle[H,L],[K,L]\rangle=[H,L][K,L]$ e daí $[HK,L]\leq[H,L],[K,L]$.

Por outro lado, $H,K\leq HK$ e daí $[H,L]\leq[HK,L]$ e $[K,L]\leq[HK,L]$, logo, $[H,L][K,L]\leq[HK,L]$.

Portanto, $[HK,L]=[H,L][K,L]$. ■

Teorema 1.5 (Hirsch-Plotikin)**.** *Sejam* H *e* K *subgrupos normais localmente nilpotentes de um grupo* G. *Então o produto* HK *é localmente nilpotente.*

Demonstração: Seja $J=\langle h_1k_1,...,h_mk_m\rangle$ um subgrupo finitamente gerado de HK, onde $h_i\in H$ e $k_i\in K$, para $i=1,2,...,m$. Devemos mostrar que J é nilpotente. Para isso, consideremos os seguintes subgrupos: $X=\langle h_1,...,h_m\rangle,Y=\langle k_1,...,k_m\rangle$ e $Z=\langle X,Y\rangle$. Vemos que $J\leq Z$ e assim, basta mostrar que Z é nilpotente. Definimos o conjunto $C=\{[h_i,k_j];i,j=1,...,m\}$. Desde que H e K são normais, temos que $C\subseteq H\cap K$.

Assim $\langle X, C\rangle$ é um subgrupo finitamente gerado de H e, portanto, é nilpotente. Desde que grupos nilpotente finitamente gerado satisfaz a condição maximal (Ver [4], pág. 137), o fecho normal C^X é finitamente gerado e também nilpotente. Assim, $C^X \leq H \cap K$, de modo que $\langle Y, C^X\rangle \leq K$. Portanto, $\langle Y, C^X\rangle$ é nilpotente e finitamente gerado, daí satisfaz a condição maximal. Logo, pela Observação 1.5, temos que $[X, Y] = C^{XY}$ e

$$\langle X, C^X\rangle = \langle X, [X, Y]\rangle = Y^X.$$

Isto mostra que Y^X é nilpotente, e por simetria X^Y é nilpotente. Finalmente, temos que $Z = \langle X, Y\rangle = X^Y Y^X$ é nilpotente pelo Teorema de Fitting. ■

Corolário 1.2. *Em qualquer grupo G existe um único subgrupo normal localmente nilpotente maximal contendo todos os subgrupos normais localmente nilpotentes de G.*

Demonstração: Dado N um subgrupo normal localmente nilpotente de G, consideremos a família

$$F = \{M; N \leq M, M \lhd G \text{ e } M \text{ é localmente nilpotente}\}.$$

Temos que $N \in F$ e então $F \neq \emptyset$. Além disso, dado um subgrupo totalmente ordenado $\{M_i\}_{i\in I}$ de F, podemos ver que $J = \bigcup_{i\in I} M_i$ é um limitante superior de $\{M_i\}_{i\in I}$ em F. Pelo Lema de Zorn, a família F possui um elemento maximal. Dados N_1 e N_2 subgrupos normais de G tais que $N_1 \leq H_1$ e $N_2 \leq H_2$. Pelo Teorema anterior, temos que H_1H_2 é um subgrupo normal localmente nilpotente contendo N_1 e N_2. Logo, a maximalidade de H_1 e H_2 garantem que $H_1H_2 \leq H_1$ e $H_1H_2 \leq H_2$, de onde segue que $H_1 = H_2$ e, portanto, existe um único subgrupo localmente nilpotente maximal que contém todos os subgrupos normais localmente nilpotentes de G. ■

Este resultado é conhecido como *o radical de Hirsch-Plotikin.*

Observação 1.6. *Para todo grupo G, o subgrupo de Fitting de G é localmente nilpotente.*

Demonstração: Sejam $x_1, x_2, ..., x_r \in Fit(G)$ quaisquer elementos. Então, temos que

$\langle x_1^G\rangle, \langle x_2^G\rangle, ..., \langle x_r^G\rangle$ são subgrupos normais nilpotentes de G e pelo Teorema de Fitting $\langle x_1^G\rangle\langle x_2^G\rangle...\langle x_r^G\rangle$ é nilpotente. Mas $\langle x_1, x_2, ..., x_r\rangle \leq \langle x_1^G\rangle\langle x_2^G\rangle...\langle x_r^G\rangle$. Logo, $\langle x_1, x_2, ..., x_r\rangle$ é nilpotente e, portanto, $Fit(G)$ é localmente nilpotente. ■

Um grupo de Fitting, em geral não é nilpotente. E também, nem todo grupo localmente nilpotente é um grupo de Fitting: *A classe dos grupos de Fitting está propriamente entre as classes dos grupos nilpotentes e dos localmente nilpotentes.*

Teorema 1.6 (Mal'cev, McLain). *Todo fator principal de um grupo localmente nilpotente é central.*

Demonstração: Seja N um subgrupo normal minimal de G. É suficiente provar que N é central em G. Se $N \nleq Z(G)$, então existe $a \in N$ e $g \in G$ tal que $b = [a, g] \neq 1$. Visto que $b \in N$ e $N \trianglelefteq G$, temos que $N = \langle b^G\rangle$ pela minimalidade de N. Notamos que $a \in \langle b^{g_1}, ..., b^{g_n}\rangle$ para certos $g_i \in G$. Se $H = \langle a, g, g_1, ..., g_n\rangle$ então temos que H é um subgrupo nilpotente. Seja $A = \langle a^H\rangle$. Então $b \in [A, H]$, e segue que $b^{g_i} \in [A, H]$ e consequentemente $a \in [A, H]$. Temos $A = [A, H]$ e $A = [A,_r H]$ para todo r. Visto que H é nilpotente, segue que $A = 1$ e $a = 1$. Mas isto quer dizer que $b = [a, g] = 1$. Absurdo. Logo, segue o resultado. ■

1.4 Grupos Policíclicos

Proposição 1.9. *A classe dos grupos policíclicos é fechada para subgrupos, quocientes e extensões.*

Demonstração: Sejam G um grupo policíclico e H um subgrupo de G. Em G existe uma cadeia subnormal

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_{r-1} \trianglelefteq G_r = G$$

onde $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ é cíclico, para todo $i = 1, 2, ..., r$. Consideremos $H_i = H \cap G_i$, para todo $i = 1, 2, ..., r$. Assim, temos uma cadeia subnormal

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_{r-1} \trianglelefteq H_r = H$$

onde $\dfrac{H_i}{H_{i-1}} = \dfrac{H_i}{(H \cap G_i) \cap G_{i-1}} \cong \dfrac{G_{i-1}H_i}{G_{i-1}} \leq \dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ (cíclico). Portanto, $\dfrac{H_i}{H_{i-1}}$ é cíclico, para todo $i = 1, 2, ..., r$ e daí H é policíclico.

Além disso, em $\dfrac{G}{N}$ podemos formar uma cadeia subnormal

$$\frac{N}{N} = \frac{G_0N}{N} \trianglelefteq \frac{G_1N}{N} \trianglelefteq ... \trianglelefteq \frac{G_{r-1}N}{N} \trianglelefteq \frac{G_rN}{N} = \frac{G}{N}$$

onde $\dfrac{\dfrac{G_iN}{N}}{\dfrac{G_{i-1}N}{N}} \cong \dfrac{G_iN}{G_{i-1}N} = \dfrac{G_i(G_{i-1}N)}{G_{i-1}N} \cong \dfrac{G_i}{G_{i-1}N \cap G_i} \cong \dfrac{\dfrac{G_i}{G_{i-1}}}{\dfrac{G_{i-1}N \cap G_i}{G_{i-1}}}$ é cíclico, para todo $i = 1, 2, ..., r$. Logo, $\dfrac{G}{N}$ é policíclico.

Sejam $N \trianglelefteq G$, N e $\dfrac{G}{N}$ policíclicos. Por definição temos uma cadeia normal em N,

$$1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq N_{r-1} \trianglelefteq N_r = N$$

onde $\dfrac{N_i}{N_{i-1}}$ é cíclico, para todo $i = 1, 2, ..., r$ e uma cadeia subnormal em $\dfrac{G}{N}$

$$\frac{N}{N} = \frac{L_0}{N} \trianglelefteq \frac{L_1}{N} \trianglelefteq ... \trianglelefteq \frac{L_{t-1}}{N} \trianglelefteq \frac{L_t}{N} = \frac{G}{N}$$

onde $\dfrac{\dfrac{L_j}{N}}{\dfrac{L_{j-1}}{N}} \cong \dfrac{L_j}{L_{j-1}}$ é cíclico, para todo $j = 1, 2, ..., t$.

Daí, em G temos uma cadeia subnormal

$$1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq N_{r-1} \trianglelefteq N_r = N = L_0 \trianglelefteq L_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq L_{t-1} \trianglelefteq L_t = G$$

cujos fatores são cíclicos. Concluímos então que G é policíclico. ■

Observação 1.7. *Um grupo abeliano é policíclico se, e somente se, é finitamente gerado.*

Demonstração: Seja G um grupo abeliano policíclico. Então existe uma cadeia subnormal

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_{r-1} \trianglelefteq G_r = G$$

onde $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ é cíclico, para todo $i = 1, 2, ..., r$. Assim temos

$$\frac{G_1}{G_0} = \langle x_1 \rangle, \frac{G_2}{G_1} = \langle x_2 G \rangle = \frac{\langle x_2 \rangle G_1}{G_1} = \frac{\langle x_2, x_1 \rangle}{G_1}$$

Concluímos então que $G_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$. Procedendo de maneira análoga com os outros fatores desta cadeia, concluímos que $G_n = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle = G$. Então G é finitamente gerado.

Agora desde que tenhamos um grupo abeliano $G = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$, podemos formar uma cadeia

$$1 \leq \langle x_1 \rangle \leq \langle x_1, x_2 \rangle \leq ... \leq \langle x_1, x_2, ..., x_{n-1} \rangle \leq \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle = G$$

Com fatores cíclicos e daí segue-se que G é policíclico. ■

Proposição 1.10. *Seja G um grupo. Então G é policíclico se, e somente se, G é solúvel e noetheriano.*

Demonstração: Sendo G um grupo policíclico, existe nele uma cadeia

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_{r-1} \trianglelefteq G_r = G$$

tal que cada fator $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ é cíclico, para todo $i = 1, 2, ..., r$. Por isso temos claramente que G é solúvel.

Agora podemos proceder por indução sobre o comprimento da cadeia dada para mostrar que G é noetheriano. Se $n = 1$ não há o que fazermos. Por indução o resultado vale em G_{n-1}. Como $\dfrac{G}{G_{n-1}}$ é cíclico ele é noetheriano, concluímos que G é noetheriano.

Seja agora G um grupo solúvel noetheriano. Nele existe uma cadeia subnormal

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_{r-1} \trianglelefteq G_r = G$$

onde $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ é abeliano, $i = 1, 2, ..., r$. Novamente usaremos indução sobre o comprimento da cadeia dada para mostrar que G é policíclico. Se $n \leq 1$, G é abeliano finitamente gerado e assim é policíclico. Agora, $\dfrac{G}{G_{n-1}}$ é abeliano e finitamente gerado, logo é policíclico e, por hipótese indutiva, G_{n-1} também é policíclico. Daí G é policíclico. ■

Apresentamos a seguir um importante resultado para a classe $\mathfrak{PF}$ dos grupos policíclicos-por-finito.

Proposição 1.11. *Seja $G \in \mathfrak{PF}$. Então:*

i) *todo subgrupo e todo quociente de G pertencem a $\mathfrak{PF}$;*

ii) *todo subgrupo maximal U de G tem índice finito.*

Demonstração: i) Sendo G um grupo policíclico-por-finito, em G existe um subgrupo normal P, policíclico de índice finito. Seja H um subgrupo de G. Então $H \cap P$ é um subgrupo normal de H e sendo subgrupo de P ele é policíclico. Além disso, temos que $\dfrac{H}{H \cap P} \cong \dfrac{HP}{P} \leq \dfrac{G}{P}$ (finito). Logo, $H \in \mathfrak{PF}$. Agora, dado $N \trianglelefteq G$, temos $\dfrac{PN}{N} \trianglelefteq \dfrac{G}{N}$ e $\dfrac{PN}{N} \cong \dfrac{P}{P \cap N}$ (policíclico). Mais ainda, $\dfrac{\frac{G}{N}}{\frac{PN}{N}} \cong \dfrac{G}{PN} \cong \dfrac{\frac{G}{P}}{\frac{PN}{P}}$ (finito) e assim $\dfrac{G}{N}$ está em $\mathfrak{PF}$.

ii) Seja $U \lessdot G$. Consideremos a cadeia

$$G \trianglerighteq P = P^{(0)} > P^{(1)} > ... > P^{(r-1)} > P^{(r)} = 1$$

das derivadas de P, $r \geq 1$. Temos que $P^{(i)}$ é característico em P e assim $P^{(i)}$ é normal em G para $i = 0, 1, ..., r$. Agora usamos indução sobre o inteiro r para provar que $|G : U|$ é finito. Se $r = 0$, G é finito e acabou. Seja $r \geq 1$ e $P^{(r-1)} = M$. Assim temos $M \trianglelefteq G, M$ abeliano e, e por indução, a afirmação vale em

$$\frac{G}{M} \trianglerighteq \frac{P}{M} = \frac{P^{(0)}}{M} > \frac{P^{(1)}}{M} > ... > \frac{P^{(r-1)}}{M} > \frac{P^{(r)}}{M} = \frac{M}{M}.$$

Caso 1: Seja $M \leq U$. Então $\dfrac{U}{M} \lessdot \dfrac{G}{M}$ e assim $|G : U| = \left|\dfrac{G}{M} : \dfrac{U}{M}\right| < \infty$.

Caso 2: Seja $M \not\leq U$. Então $MU = G$ e se temos $K = M \cap U$, ele é normal em $G = MU$. Suponhamos agora a existência de $\dfrac{X}{K}$ característico em $\dfrac{M}{K}$, assim temos $X \trianglelefteq G$ e $XU = UX \leq G$. Mas sendo $U \lessdot G$, ocorre que $XU = U$ ou $XU = G$. Se $XU = U$, temos $X \leq U$ e, portanto, $X \leq U \cap M = K$, segue então que $\dfrac{X}{K} = \dfrac{K}{K}$. Caso seja $XU = G$, temos $M = M \cap G = M \cap XU = X(M \cap U) = XK = X$ e assim $\dfrac{X}{K} = \dfrac{M}{K}$. Concluímos então que $\dfrac{M}{K}$ é um grupo abeliano finitamente gerado caracteristicamente simples. Logo ele é um p-grupo finito abeliano elementar para algum primo p. Agora, desde que $\dfrac{M}{K} = \{m_1K, m_2K, ..., m_sK\}$ de ordem s, temos $G = m_1U \dot\cup m_2U \dot\cup ... \dot\cup m_sU$. Isto porque se $m_iU = m_jU, i, j = 1, 2, ..., s$, temos $m_j^{-1}m_i \in U \cap M = K$ e assim $m_iK = m_jK$ contrariando a ordem de $\dfrac{M}{K}$. Além disso, para $mu = g \in G$, com $m \in M, u \in U$, vale que

$gU = muU = mU$ e como $m \in m_iK$ para alguns $i = 1, 2, ..., s$, temos $mK = m_iK$; daí obtemos $m_iU = mkU = mU = gU$.■

1.5 Grupos Localmente Policíclicos

Mostraremos em seguida que a classe $L\mathfrak{P}$ dos grupos localmente policíclicos é fechada a subgrupos e quocientes. Vejamos

Proposição 1.12. *A classe dos grupos localmente policíclicos é fechada para subgrupos e quocientes.*

Demonstração: Sejam G um grupo localmente policíclico e $H \leq G$. Se E é um subgrupo finitamente gerado de H, então E também é um subgrupo finitamente gerado de G. Como G é localmente policíclico, temos que E é policíclico. Portanto, H é localmente policíclico.

Seja N um subgrupo normal de um grupo G localmente policíclico. Seja $\frac{E}{N}$ um subgrupo finitamente gerado de $\frac{G}{N}$. Pela Observação 1.2, existe um subgrupo K finitamente gerado de G tal que $E = KN$. Desde que G é localmente policíclico, segue que K é policíclico. Como a classe $\mathfrak{P}$ é fechada a quociente (Proposição 1.9) temos que $\frac{E}{N} \cong \frac{K}{K \cap N}$ é policíclico. Portanto, $\frac{G}{N}$ é localmente policíclico. ■

Teorema 1.7. *Sejam H e K subgrupos normais localmente policíclicos de um grupo G. Então $J = HK$ é um subgrupo normal locamente policíclico de G.*

Demonstração: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $L = \langle h_1k_1, h_2k_2, ..., h_nk_n \rangle$ um subgrupo de J finitamente gerado. Podemos considerar os subgrupos $X = \langle h_1, h_2, ..., h_n \rangle$ e $Y = \langle k_1, k_2, ..., k_n \rangle$ de modo que tenhamos $L \leq \langle X, Y \rangle = Z$. É suficiente provar que Z é um grupo policíclico.

Consideremos o conjunto $C = \{[h_i, k_j]/i, j = 1, 2, ..., n\}$. Como H e K são normais em G, vale que $C \subset H \cap K$. Portanto, $\langle X, C \rangle$ é um subgrupo de H finitamente gerado e por isso é policíclico. Pela Observação 1.3, temos que $\langle X, C \rangle$ possui condição maximal e, $C^X = \langle C, [C, X] \rangle$ pelo item (i) da Observação 1.5, contido em $\langle X, C \rangle$ é finitamente gerado.

Seguindo, temos $Y, C^X \subset K = K^X$ e assim $\langle Y, C^X \rangle$ é um subgrupo de K finitamente gerado. Logo, $\langle Y, C^X \rangle$ é policíclico. Pelos itens (i) e (iv) da Observação 1.5, segue que $\langle Y, C^X \rangle = \langle Y, C^{XY} \rangle = \langle Y, [X, Y] \rangle = Y^X$ é periódico.

Com argumentos análogos a partir do subgrupo $\langle Y, C \rangle$, concluímos que $X^Y = \langle X, C^Y \rangle$ também é policíclico.

Finalmente temos que $Y^X, X^Y \trianglelefteq \langle X, Y \rangle = Z$, e assim, temos que $Y^X X^Y$ é um subgrupo normal policíclico de $\langle X, Y \rangle = Z$. Mas claramente temos que $Y^X X^Y = Z$, o que mostra que $J = HK$ é um subgrupo normal de G localmente policíclico. ■

1.6 Grupos Supersolúveis

Definição 1.11. *Um grupo G é dito supersolúvel se ele tem uma série normal*

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$$

em que cada fator $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ *é cíclico e cada $G_i \trianglelefteq G$, para todo $i = 0, 1, ..., n-1$.*

Note que todo grupo supersolúvel é solúvel, mas nem todo grupo solúvel é supersolúvel. Por exemplo, o grupo $G = A_4$ é solúvel, pois $1 \triangleleft V \triangleleft A_4$, onde V é o grupo de Klein. Uma vez que $\dfrac{V}{1} \cong V \cong C_2 \times C_2$ é abeliano e não é cíclico e, $\left|\dfrac{A_4}{V}\right| = 3$.

Também não é verdade que $N \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G}{N}$ serem supersolúveis, implica que G é supersolúvel. Por exemplo, A_4 não é supersolúvel, porém V e $\dfrac{A_4}{V}$ são supersolúveis, onde V é o grupo de Klein.

Claramente grupos supersolúveis são policíclicos, particularmente estão na classe dos grupos policíclico-por-finito.

Proposição 1.13. *A classe dos grupos supersolúveis é fechada para subgrupos, quocientes e produto direto (de um número finito).*

Demonstração: Seja G um grupo supersolúvel. Então existe uma série

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_n = G$$

tal que $G_i \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ cíclico, para todo $i = 0, 1, ..., n-1$.

Mostraremos que se $H \leq G$, então H é supersolúvel. Considere a série

$$1 = H_0 \leq H \cap G_1 \leq H \cap G_2 \leq ... \leq H \cap G_n = H$$

Temos que $H \cap G_i \trianglelefteq H$. Logo, a série acima é uma série normal em H. Pelo Teorema do isomorfismo, vale que

$$\frac{H \cap G_{i+1}}{H \cap G_i} = \frac{H \cap G_{i+1}}{(H \cap G_{i+1}) \cap G_i} \cong \frac{G_i(H \cap G_{i+1})}{G_i} \leq \frac{G_{i+1}}{G_i}$$

Como $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ é cíclico para todo $i = 0, 1, ..., n-1$, segue que $\dfrac{H \cap G_{i+1}}{H \cap G_i}$ é um grupo cíclico. Portanto, H é supersolúvel.

Agora, seja N um subgrupo normal de G. Mostraremos que $\frac{G}{N}$ é supersolúvel.

Seja $N_i = NG_i$ e considere

$$\frac{N}{N} = \frac{NG_0}{N} \leq \frac{NG_1}{N} \leq ... \leq \frac{NG_n}{N} = \frac{G}{N}$$

Temos que $NG_i \trianglelefteq NG$ para todo $i = 0, 1, ..., n-1$, logo a série dada anteriormente é normal em $\dfrac{G}{N}$. Além disso, pela Proposição 1.9 (i), o fator $\dfrac{\frac{NG_{i+1}}{N}}{\frac{NG_i}{N}}$ é cíclico para todo $i = 0, 1, ..., n-1$. Daí, $\dfrac{G}{N}$ é supersolúvel.

Finalmente, para provar que o produto direto de um número finito de grupos supersolúveis é supersolúvel, é suficiente considerar o caso de dois fatores. Sejam H e K grupos supersolúveis com as respectivas séries normais $1 = H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_m = H$ e $1 = K_0 \leq K_1 \leq ... \leq K_n = K$ onde o quociente são cíclicos. Então:

$$1 = H_0 \times K_0 \leq H_1 \times K_0 \leq ... \leq H_m \times K_0 \leq H_m \times K_1 \leq ... \leq H_m \times K_n = H \times K$$

é uma série normal de $H \times K$ onde os quocientes são cíclicos. Portanto, $H \times K$ é supersolúvel. ■

Proposição 1.14. *Seja G um grupo. Então:*

i) *Se G é supersolúvel, então G satisfaz a condição maximal de subgrupos;*

ii) *Se G é nilpotente finitamente gerado, então G é supersolúvel.*

Demonstração: i) Se G é um grupo supersolúvel, então G é claramente policíclico e pela proposição 1.3 satisfaz a condição maximal de subgrupos.

ii) Sendo G é um grupo nilpotente existe uma cadeia

$$1 = X_0 \leq X_1 \leq ... \leq X_{r-1} \leq X_r = G$$

com $X_i \trianglelefteq G$ e $\dfrac{X_{i+1}}{X_i} \leq Z\left(\dfrac{G}{X_i}\right)$, para $i = 1, 2, ..., r-1$. Como G é noetheriano, cada $\dfrac{X_i}{X_{i-1}}$ é um grupo abeliano finitamente gerado. Logo existe subgrupos $C_{i1}, C_{i2}, ..., C_{it_i}$ de X_i cada um deles contendo X_{i-1}, $\dfrac{C_{ij}}{X_{i-1}}$ é cíclico para $i = 1, 2, ..., r$ e $j = 1, 2, ..., t_i$ e mais, temos $\dfrac{X_i}{X_{i-1}} = \dfrac{C_{i1}}{X_{i-1}}.\dfrac{C_{i2}}{X_{i-1}}...\dfrac{C_{it_i}}{X_{i-1}}$. Como os quocientes $\dfrac{X_i}{X_{i-1}}$ são centrais em G, $\dfrac{C_{ij}}{X_{i-1}}$ é normal em $\dfrac{G}{X_{i-1}}$ e assim temos $C_{ij} \trianglelefteq G$, para $i = 1, 2, ..., r$ e $j = 1, 2, ..., t_i$. Daí temos uma cadeia

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & = & X_0 & \leq & C_{11} & \leq & C_{11}C_{12} & \leq & ... & \leq & C_{11}C_{12}...C_{1t_1} & = \\
 & = & X_1 & \leq & C_{21} & \leq & C_{21}C_{22} & \leq & ... & \leq & C_{21}C_{22}...C_{2t_2} & = \\
 & = & X_2 & \leq & ... & & & & & & & \\
 & \leq & X_{i-1} & \leq & C_{i1} & \leq & C_{i1}C_{i2} & \leq & ... & \leq & C_{i1}C_{i2}...C_{it_i} & = \\
 & & \vdots & & & & & & & & & \\
 & = & X_i & \leq & ... & & & & & & & \\
 & & \vdots & & & & & & & & & \\
 & \leq & X_r & = & G & & & & & & &
\end{array}$$

de subgrupos normais de G com fatores cíclicos. Portanto G é supersolúvel. ■

Proposição 1.15. *Seja G um grupo e seja N um subgrupo normal de G. Se $\dfrac{G}{N}$ é supersolúvel e N é cíclico, então G é supersolúvel.*

Demonstração: Se $\dfrac{G}{N}$ é supersolúvel, então existe uma série de $\dfrac{G}{N}$,

$$\frac{N}{N} = \frac{H_0}{N} \trianglelefteq \frac{H_1}{N} \trianglelefteq ... \trianglelefteq \frac{H_s}{N} = \frac{G}{N},$$

onde cada fator $\dfrac{\frac{H_i}{N}}{\frac{H_{i-1}}{N}} \cong \dfrac{H_i}{H_{i-1}}$ é cíclico para $i = 1, 2, ..., s$.

Agora, se N é cíclico, seja

$$1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq N_r = N$$

uma série de N. Claramente temos que, cada fator $\dfrac{N_i}{N_{i-1}}$ é cíclico, para todo $i = 1, 2, ..., r$. Logo,

$$1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq N_r = N = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_s = G$$

é uma série de G com fatores cíclicos e, portanto, G é supersolúvel. ■

Proposição 1.16. *Seja G um grupo supersolúvel. Então:*

i) *todo subgrupo maximal U de G tem índice primo;*

ii) *o subgrupo comutador $G' = [G, G]$ de G é nilpotente.*

Demonstração: i) Sabemos que G é policíclico-por-finito e então sendo $U \lessdot G$, pela Proposição 1.4, o índice $|G : U|$ é finito. Pela supersolubilidade de G temos uma cadeia

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_r = G$$

com $G_i \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ é cíclico, $i = 0, 1, ..., r-1$. Consideremos $M = G_1 \trianglelefteq G$, assim $\dfrac{G}{M}(= \dfrac{G_r}{M} \geq \dfrac{G_{r-1}}{M} \geq ... \geq \dfrac{G_2}{M} \geq \dfrac{G_1}{M}\dfrac{M}{M})$ é supersolúvel com cadeia de comprimento $r-1$. Por indução a afirmação vale no grupo $\dfrac{G}{M}$. Agora temos dois casos a considerar.

Caso 1: Seja $M \leq U$. Temos $\dfrac{U}{M} \lessdot \dfrac{G}{M}$ e por indução, $\left|\dfrac{G}{M} : \dfrac{U}{M}\right| = |G : U|$ é primo.

Caso 2: Seja $M \nleq U$. Neste caso temos $MU = UM = G$. Como M é cíclico, concluímos que $U \cap M = D$ é um subgrupo normal característico de M e então D é normal em G. Agora sendo X tal que $D \leq X \leq M$, também temos $X \trianglelefteq G$. Daí, podemos formar o subgrupo $UX = XU$ de G. Mas a maximalidade de U em G nos dá que $UX = U$ e assim $X = DX = (U \cap M)X = UX \cap M = G \cap M = M$. Portanto D é maximal no grupo cíclico M. Logo, o índice $|M : D| = |G : U|$ é primo.

ii) Considerando uma cadeia de subgrupos de G como no item anterior, podemos formar a nova cadeia

$$1 = G_0 \cap G' \leq G_1 \cap G' \leq ... \leq G_{r-1} \cap G' \leq G_r \cap G' = G'$$

Claramente temos $G_i \cap G' \trianglelefteq \trianglelefteq G$ e cada fator $\dfrac{G_{i+1} \cap G'}{G_i \cap G'}$ é cíclico, $i = 0, 1, ..., r-1$. Seja $C_G\left(\dfrac{G_{i+1} \cap G'}{G_i \cap G'}\right) = \{g \in G | [x, g] \in G_i \cap G' \ \forall x \in G_{i+1} \cap G'\}$, o centralizador em G do fator $\dfrac{G_{i+1} \cap G'}{G_i \cap G'}$. Temos $\dfrac{G}{C_G\left(\frac{G_{i+1} \cap G'}{G_i \cap G'}\right)} \lesssim Aut\left(\dfrac{G_{i+1} \cap G'}{G_i \cap G'}\right)$ (abeliano), portanto $G' \subseteq C_G\left(\frac{G_{i+1} \cap G'}{G_i \cap G'}\right)$. Segue-se então que $[G_{i+1} \cap G', G'] \subseteq G_i \cap G'$ e equivalentemente temos $\dfrac{G_{i+1} \cap G'}{G_i \cap G'} \leq Z\left(\dfrac{G'}{G_i \cap G'}\right)$, $i = 0, 1, ..., r-1$ e assim G' é nilpotente. ■

Teorema 1.8. *Se G é um grupo supersolúvel, então $Fit(G)$ é nilpotente e $\dfrac{G}{F(G)}$ é um grupo finito abeliano. Em particular, G' é nilpotente.*

Demonstração: Seja $F = Fit(G)$. Pela proposição 1.14 o grupo G satisfaz a condição maximal e F é finitamente gerado. Portanto, F é um produto de um número finito de subgrupos normais nilpotentes e assim, é nilpotente pelo Teorema de Fitting. Seja $1 = G_0 < G_1 < ... < G_n = G$ uma série normal cíclica em G. Fazendo $F_i = \dfrac{G_{i+1}}{G_i}$ e $C = \bigcap_{i=1,2,...,n} C_G(F_i)$, temos que $Aut(F_i)$ é finito e abeliano, e ainda $[G_{i+1} \cap C, C] \leq G_i \cap C$, onde $G_i \cap C$ forma uma série central de C e C é nilpotente. Portanto, $C \leq F$ e $\dfrac{G}{F}$ é finito e abeliano. ■

1.7 O Subgrupo de Frattini

Definição 1.12. *Um elemento x de um grupo G é dito supérfluo se, e somente se, para todo subconjunto $B \subseteq G$ podemos verificar que se $\langle x, B \rangle = G$, então $\langle B \rangle = G$. (ou se $\langle X \rangle < G$, então $\langle x, B \rangle < G$).*

Denotamos por $\Phi(G) = \{x \in G / x$ é supérfluo $\}$, o conjunto dos elementos supérfluos do grupo G.

Proposição 1.17. *Para qualquer grupo G, temos que $\Phi(G)$ é um subgrupo característico de G.*

Demonstração: Claramente temos que $1 \in \Phi(G)$. Sejam $x, y \in \Phi(G)$ e $B \subseteq G$ tal que $\langle B, xy^{-1} \rangle = G$. Temos então que $G = \langle B, x, y \rangle = \langle B \cup x, y \rangle = \langle B \cup x \rangle$. Assim, segue que $G = \langle B, x \rangle = \langle B \rangle$. Logo $xy^{-1} \in \Phi(G)$ e $\phi(G) \leq G$.

Para $x \in \Phi(G), \alpha \in Aut(G)$ e $B \subseteq G$, temos que se $\langle B, x\alpha \rangle = G$, então temos que $G = G\alpha^{-1} = \langle B\alpha^{-1}, x \rangle$. Mas $x \in \Phi(G)$ e assim $G = \langle B\alpha^{-1} \rangle$, segue então que $G\alpha = G = \langle B \rangle$ e $x\alpha \in \Phi(G), \forall \alpha \in aut(G)$. Analogamente $x\alpha^{-1} \in \Phi(G)$. Daí, temos que

$$\Phi(G)\alpha \subseteq \Phi(G) \ e \ \Phi(G)\alpha^{-1} \subseteq \Phi(G) \Leftrightarrow \Phi(G) \subseteq \Phi(G)\alpha$$

e $\Phi(G)\alpha = \Phi(G), \forall \alpha \in Aut(G)$. Portanto, $\Phi(G)$ é um subgrupo característico de G. ■

Definição 1.13. *Para qualquer grupo G, o subgrupo $\Phi(G)$, consistindo dos elementos supérfluos de G, chama-se o subgrupo de Frattini de G.*

Teorema 1.9. *Sejam G um grupo e $\Phi(G)$ o seu subgrupo de Frattini. Então, vale a seguinte igualdade*

$$\Phi(G) = \bigcap_{M \lessdot G} M$$

Demonstração: Sejam $x \in \Phi(G)$ e M um subgrupo maximal qualquer de G. Temos $M = \langle M \rangle < G$ e $\langle M, x \rangle < G$. Logo, $M \leq \langle M, x \rangle < G$ e sendo $M \lessdot G$, temos $M = \langle M, x \rangle$ e $x \in M$, $\forall M \lessdot G$. Daí, $\Phi(G) \leq \bigcap_{M \lessdot G} M$.

Agora, se $x \in \bigcap_{M \lessdot G} M$ e $x \notin \Phi(G)$, existe $B \subseteq G$ com $\langle B \rangle < G$, porém $\langle B, x \rangle = G$. Pela Observação 1.3, existe M com $\langle B \rangle \leq M \lessdot G$ e $x \notin M$. Assim, temos que $x \notin \bigcap_{M \lessdot G} M$. Absurdo! Logo, $\langle B, x \rangle = G$ e assim, $\langle B \rangle = G$, ou seja, $\bigcap_{M \lessdot G} M \leq \Phi(G)$. Portanto, $\Phi(G) = \bigcap_{M \lessdot G} M$. ■

Corolário 1.3. *Seja G um grupo qualquer e $N \trianglelefteq G$. Então, $\dfrac{\Phi(G)N}{N} \leq \Phi\left(\dfrac{G}{N}\right)$. Em particular, se $N \trianglelefteq \Phi(G)$, então $\Phi\left(\dfrac{G}{N}\right) = \dfrac{\Phi(G)}{N}$.*

Demonstração: Considere $\bar{G} = \dfrac{G}{N}$. Se $\bar{M} \lessdot \bar{G}$, então pelo Teorema da correspondência, existe $M \lessdot G$ com $(N \lhd M)$ tal que $\bar{M} = \dfrac{M}{N}$. Então $\dfrac{\Phi(G)N}{N} \leq \dfrac{M}{N} = \bar{M}$, para todo $\bar{M} \lessdot \bar{G}$. Logo,

$$\frac{\Phi(G)N}{N} \leq \Phi\left(\frac{G}{N}\right)$$

Se $N \trianglelefteq \Phi(G)$, é claro que $\Phi\left(\dfrac{G}{N}\right) = \dfrac{\Phi(G)}{N}$. ■

Observação 1.8. *Para qualquer grupo G vale: $G' \leq \Phi(G) \Leftrightarrow M \lhd G$; para todo $M \lessdot G$ e $|G : M| = p$, p primo.*

Demonstração: Seja $G' \leq \Phi(G)$. Então $G' \leq \Phi(G) \leq M$, para todo $M \lessdot G$. Daí, $\dfrac{M}{G'} \lessdot \dfrac{G}{G'}$, mas $\frac{G}{G'}$ é abeliano e assim, $\dfrac{M}{G'} \lhd \dfrac{G}{G'}$ e $\left|\dfrac{G}{G'} : \dfrac{M}{G'}\right| =$ primo, logo pelo teorema da correspondência, $M \lhd G$ com $|G : M| = p$.

Agora, suponhamos que $M \lhd G$, para todo $M \lessdot G$. Nesse caso, $\dfrac{G}{M}$ é abeliano (de ordem p) e $G' \leq M$ e daí $G' \leq \Phi(G)$. ■

Proposição 1.18 (Wielandt)**.** *Seja G um grupo finito. Então, G é nilpotente se, e somente se $G' \leq \Phi(G)$.*

Demonstração: Usaremos como verdade que se $N \trianglelefteq G$, com G finito, temos que N é nilpotente se, e somente se, $\dfrac{N\Phi(G)}{\Phi(G)}$ é nilpotente.

Seja G um grupo finito e nilpotente. Para todo subgrupo maximal U em G, temos que $U \trianglelefteq G$ e $|G : U| = p$, com p primo. Daí segue que $\dfrac{G}{U}$ é abeliano. Logo, $G' \leq U$, para todo U maximal em G. Portanto, $G' \leq \Phi(G)$.

Agora, se $G' \leq \Phi(G)$, vale que $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ é abeliano portanto, nilpotente. Na observação feita se temos $N = G$, segue então que G é nilpotente. ■

Teorema 1.10 (Baer, McLain). *Se M é um subgrupo maximal de um grupo localmente nilpotente G, então M é normal em G. Equivalentemente $G' \leq \Phi(G)$.*

Demonstração: Se M não é normal em G, então $G' \nleq M$ e existe $c \in G' \backslash M$. Então $G = \langle c, M \rangle$ desde que M é maximal. Agora $c \in \langle g_1, g_2, ..., g_n \rangle'$ para certos $g_1, g_2, ..., g_n$ e todos estes elementos pertencem a $L = \langle c, F \rangle$, para um conveniente subgrupo finitamente gerado F de M. Visto que c não pertence F, podemos achar um subgrupo N de L (Lema de Zorn) que é maximal em relação a propriedade $F < N$ e c não pertencer a N. Se tivermos um subgrupo de L que contém N, este mesmo terá que conter c e assim será igual ao próprio L, logo não temos nenhum subgrupo em L que contém N, assim N é um subgrupo maximal de L. Visto que L é finitamente gerado, temos que L é nilpotente, e como N é maximal em L, N é normal em L. Assim $\dfrac{L}{N}$ é de ordem prima, isto é, $\dfrac{L}{N}$ é cíclico e, portanto, é abeliano e assim, temos $L' \leq N$. Como $c \in N$, contradição pela escola de N. Assim M é normal em G.

Pelo Teorema 1.9 o subgrupo $\Phi(G)$ de Frattini de G é a interseção de todos os subgrupos maximais de G. No nosso caso temos que M é maximal em G, então M é normal em G, ou seja, $\dfrac{G}{M}$ é de ordem prima e assim $G' \leq M$. Portanto, $G' \leq \Phi(G)$. ■

Teorema 1.11 (McLain). *Se o grupo G localmente nilpotente satisfaz Max-n, então G é um grupo nilpotente finitamente gerado.*

Demonstração: Temos que $G_{ab} = \dfrac{G}{G'}$ satisfaz a condição Max-n e então, $\dfrac{G}{G'}$ satisfaz a condição maximal para subgrupos, já que este grupo é abeliano. Assim, o grupo G_{ab} é noetheriano, ou seja, G_{ab} é finitamente gerado. Logo, podemos escreve-lo da seguinte maneira: $G_{ab} = \langle x_1 G', ..., x_k G' \rangle$. Se considerarmos $X = \langle x_1, ..., x_k \rangle$, então dado $g \in G$, temos que $gG' = xG'$, com $x \in X$, ou seja, $g = xg'$, onde $g' \in G'$. Portanto, podemos escrever $G = XG'$, com X um subgrupo de G finitamente gerado, o qual deve ser nilpotente de classe c, digamos. Dado um subgrupo H de G, colocamos $\bar{H} = \phi(H)$, onde $\phi : G \longrightarrow \dfrac{G}{\gamma_{c+2}(G)}$ é o homomorfismo canônico. Portanto, o grupo $\bar{G} = \bar{X}\bar{G}'$ é nilpotente uma vez que $\gamma_{c+2}(\bar{G}) = 1$. Pela Observação 1.8, vemos que $\bar{G}' \leq \Phi(\bar{G})$ e, assim, $\bar{G} = \bar{X}\Phi(\bar{G})$. Notamos que $\bar{G}_{ab}$ é finitamente gerado, pois é isomorfo a X, logo o grupo $\bar{G}$

satisfaz a condição maximal para subgrupos (Ver [4], pág. 137). Em particular, o subgrupo $\Phi(G)$ é fintamente gerado. Como os elementos de $\Phi(G)$ são geradores supérfluos, temos que $\bar{G} = \bar{X}$ e então, $\bar{G}$ é nilpotente de classe no máximo c, de onde $\gamma_{c+1}(G) = \gamma_{c+2}(G)$. Colocando $L = \gamma_{c+1}(G)$, temos $L = [L, G]$. Se $L \neq 1$, então pela condição Max-n existe um subgrupo normal N de G que é maximal satisfazendo $N < L$. Mas $\dfrac{L}{N}$ é um subgrupo normal minimal de $\dfrac{G}{N}$ e, pelo Teorema anterior, temos que $\dfrac{L}{N}$ é central, ou seja, $\dfrac{L}{N} \leq Z\left(\dfrac{G}{N}\right)$. Visto que $N \lhd G$, isto equivale a $L = [L, G] \leq N$, o que é um absurdo! portanto, $L = 1$ e, então, G é nilpotente. Para finalizar, como $\bar{G} = \bar{X}, \gamma_{c+2}(G) = 1$ e X é finitamente gerado, então G é finitamente gerado. ■

Proposição 1.19. *Seja G um grupo finito.*

i) *Se $N \lhd G$, $H \leq G$ e $N \leq \Phi(H)$, então $N \leq \Phi(G)$;*

ii) *Se $K \lhd G$, então $\Phi(K) \leq \Phi(G)$;*

iii) *Se A é um subgrupo normal abeliano de G tal que $\Phi(G) \cap A = 1$, então H é um subgrupo tal que $G = HA$ e $H \cap A = 1$.*

Demonstração: i) Se $N \nleq \Phi(G)$, então $N \nleq M$ para algum subgrupo maximal M de G e, assim $G = MN$. Portanto $H = H \cap (MN) = (H \cap M)N$. Da definição 1.14, temos que $H = H \cap M$ e $H \leq M$. Mas isso nos dá a contradição $N \leq M$. Portanto, $N \leq \Phi(G)$.

ii) Fazendo $N = \Phi(K)$ e $H = K$, o resultado segue de (i).

iii) Escolhemos $H \leq G$ mínimo tal que $G = HA$. Agora $H \cap A \lhd H$ e também $H \cap A \lhd A$ desde que A é abeliano: portanto, $H \cap A \lhd HA$. Se $H \cap A \leq \Phi(H)$, então (i) mostra que$H \cap A \leq \Phi(G) \cap A = 1$. Assim, podemos supor que $H \cap A \nleq M$ para algum M maximal em H, onde $H = M(H \cap A)$ e $G = HA = MA$, uma contradição para a minimalidade de H. ■

Observação 1.9. *Se $G \in Max$ e $S \unlhd \unlhd G$, então $\Phi(S) \leq \Phi(G)$.*

Demonstração: Sendo S subnormal em G, existe uma cadeia subnormal

$$S = S_0 \unlhd S_1 \unlhd ... \unlhd S_n = G.$$

Assim, pela Proposição anterior, item ii), temos que

$$\Phi(S) = \Phi(S_0) \trianglelefteq \Phi(S_1) \trianglelefteq ... \trianglelefteq \Phi(S_n) = \Phi(G).$$

Portanto, $\Phi(S) \leq \Phi(G)$. ■

Proposição 1.20. *Se H é um subgrupo normal e finito de um grupo G e P é um p-subgrupo de Sylow de H, então $G = N_G(P)H$.*

Demonstração: Se $x \in G$, então $P^x \subseteq H$ e P^x é um subgrupo se Sylow de H. Pelo Teorema de Sylow, $P^x = P^h$ para algum $h \in H$. Logo, $xh^{-1} \in N_G(P)$ e, conseqüentemente, $x \in N_G(P)H$. Portanto, $G = N_G(P)H$. ■

O resultado anterior é conhecido como *argumento de Frattini*. Uma aplicação é mostrar que o subgrupo de Frattini de um grupo finito é nilpotente.

Proposição 1.21. *Seja G um grupo. Se $\Phi(G)$ é finitamente gerado e H é um subgrupo de G tal que $G = \Phi(G)H$, então $G = H$.*

Demonstração: Seja $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto de geradores para $\Phi(G)$. Por hipótese temos que $G = \langle H, x_1, x_2, ..., x_n \rangle$. Como os x_i's são elementos supérfluos de G, segue que $G = \langle H \rangle = H$. ■

Agora enunciaremos um resultado que relaciona $Fit(G)$ com $\Phi(G)$ quando o grupo G é finito.

Teorema 1.12. *Sejam G um grupo finito. Então temos:*

i) $Fit(G)' \subseteq \Phi(G) \subseteq Fit(G)$;

ii) $\dfrac{Fit(G)}{\Phi(G)} = Fit\left(\dfrac{G}{\Phi(G)}\right)$.

Demonstração: Sejam $\bar{G} = \dfrac{G}{\Phi(G)}, \bar{F} = Fit(\bar{G})$ e K a imagem inversa de $\bar{F}$ em G.

Se P é um p-subgrupo de Sylow de K, então sua imagem $\bar{P}$ em $\bar{F}$ é um p-subgrupo de Sylow do grupo nilpotente $\bar{F}$. Logo $\bar{P} \lhd \bar{G}$ e, consequentemente, $P\Phi(G) \lhd G$. Assim, da proposição 1.20 segue que $G = \Phi(G)N_G(P)$ e então $G = N_G(P)$ pela Proposição 1.21, ou seja, P é um p-subgrupo de Sylow normal de G. Sendo isto verdade para todo p-subgrupo de Sylow de K, temos que K é nilpotente. (Ver [4], pág.130). Portanto, $K \subseteq Fit(G)$. Por outro lado, a imagem de $Fit(G)$ em $\bar{G}$ é um subgrupo normal e nilpotente de $\bar{G}$ e logo está contido em $\bar{F}$. Assim, $F \subseteq K$ e concluímos que $Fit(G) = K, \Phi(G) \subseteq Fit(G)$ e $\dfrac{Fit(G)}{\Phi(G)} = \bar{F}$.

Falta mostrar que $Fit(G)' \subseteq \Phi(G)$. Sejam M e L como no Lema anterior, $\tilde{G} = \dfrac{G}{L}$ e $\tilde{F}$ a imagem de F em $\tilde{G}$. Certamente $\tilde{F} \subseteq Fit(\tilde{G})$, pois $\tilde{F}$ é um subgrupo normal e nilpotente se $\tilde{G}$. Pelo Lema anterior $Fit(\tilde{G})$ é abeliano, de modo que $\tilde{F}$ também é. Assim, $Fit(G)' \subseteq L \subseteq M$. Como isto é válido para todo subgrupo maximal M de G, concluímos que $Fit(G)' \subseteq \Phi(G)$. ■

Teorema 1.13 (Gaschütz). *Seja G um grupo. Se $\Phi(G) \leq H \unlhd G$, onde H é finito e $\dfrac{H}{\Phi(G)}$ é nilpotente, então H é nilpotente. Em particular $\Phi(G)$ é sempre nilpotente se, e somente se, G é finito.*

Demonstração: Seja P um p-subgrupo de Sylow de H. É suficiente mostrarmos que P é normal em H (Ver [4], pág. 130). Seja $K = P\Phi(G)$. Notamos que $K \leq H$. Como $\dfrac{K}{\Phi(G)}$ é um p-subgrupo de Sylow de $\dfrac{H}{\Phi(G)}$ e este é nilpotente, então $\dfrac{K}{\Phi(G)}$ é característico em $\dfrac{H}{\Phi(G)}$. De onde segue que K é característico em H. Assim, sendo H normal em G segue que K é normal em G. Agora aplicamos as Proposições 1.20 e 1.21 para obtermos $G = N_G(P)K = N_G(P)\Phi(G) = N_G(P)$. Isto mostra que P é normal em G como queríamos demonstrar. ■

Teorema 1.14. *O subgrupo de Frattini de um grupo policíclico é nilpotente.*

Demonstração: Seja G um grupo policíclico. Se $\Phi(G)$ é não nilpotente, então algum quociente finito $\dfrac{\Phi(G)}{N}$ é não nilpotente. Substituindo N pelo seu centro em G, podemos supor que $N \trianglelefteq G$. Mas $\Phi\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{\Phi(G)}{N}$ e um subgrupo de Frattini finito é sempre nilpotente pelo Teorema Gaschütz. Isto é uma contradição. ■

Proposição 1.22. *Seja G um grupo policíclico. Se $G' \leq \Phi(G)$, então G é nilpotente.*

Demonstração: Se G não é nilpotente, então G tem uma imagem finita H não nilpotente (Ver [4], pág 154). Mas, pela Proposição 1.18, $H' \leq \Phi(H)$ e isso implica que H é nilpotente. Uma contradição. Portanto G é nilpotente. ■

Teorema 1.15. *Seja G um grupo tal que o subgrupo de Frattini é finitamente gerado. Então, o $\Phi(G)$ é nilpotente se, e somente se é solúvel.*

Demonstração: Claramente temos que $\Phi(G)$ é solúvel.

Agora, se $\Phi(G)$ é solúvel e finitamente gerado, existe uma série subnormal

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_r = \Phi(G)$$

de $\Phi(G)$ com fatores $\frac{H_i}{H_{i-1}} \leq Z\left(\frac{\Phi(G)}{H_{i-1}}\right)$, para todo $i = 1, 2, ..., r$. Logo, $\Phi(G)$ é nilpotente. ■

1.8 Grupos Localmente Supersolúveis

Relembramos que um grupo G é localmente supersolúvel se todo subgrupo finitamente gerado de G é supersolúvel.

Proposição 1.23. *A classe $L\mathfrak{S}\mathfrak{S}$ dos grupos localmente supersolúveis é fechada a subgrupos, quociente e produto direto (de um número finito de subgrupos supersolúveis).*

Demonstração: Sejam G um grupo localmente supersolúvel e H um subgrupo de G. Para todo subgrupo finitamente gerado K de H, tem-se que K é fintamente gerado em

G. Como G é localmente supersolúvel, temos que K é supersolúvel e, portanto, H é localmente supersolúvel.

Agora, seja G um grupo localmente supersolúvel e N um subgrupo normal qualquer de G. Vamos mostrar que $\frac{G}{N}$ é localmente supersolúvel. Seja $\frac{K}{N}$ um subgrupo finitamente gerado de $\frac{G}{N}$. Daí, $\frac{K}{N} = \langle g_1N, g_2N, ..., g_rN\rangle = \frac{\langle g_1, g_2, ..., g_r\rangle N}{N}$. De onde segue que $\frac{K}{N}$ é isomorfo a um subgrupo finitamente gerado de G. Sendo G localmente supersolúvel segue que $\frac{K}{N}$ é supersolúvel e, portanto, $\frac{G}{N}$ é localmente supersolúvel.

Finalmente, para provar que o produto direto de um número finito de subgrupos localmente supersolúveis é supersolúvel, basta provar para dois fatores. Sejam G um grupo e $H, K \leq G$ localmente supersolúveis. Seja E um subgrupo finitamente gerado do produto direto HK. Assim, $E = \langle h_1k_1, h_2k_2, ..., h_rk_r\rangle = \langle h_1, h_2, ..., h_r\rangle.\langle k_1, k_2, ..., k_r\rangle = H'K'$. Com H' e K' subgrupos finitamente gerados de H e K, respectivamente. Sendo H e K localmente supersolúveis segue que H' e K' são supersolúveis. Logo, pela Proposição 1.13, $E = H'K'$ é supersolúvel e, portanto, HK é localmente supersolúvel. ∎

Proposição 1.24. *Um grupo localmente supersolúvel satisfaz Max-n se, e somente se, é supersolúvel. Consequentemente Max e Max-n coincidem para grupos localmente supersolúveis.*

Demonstração: Desde que o grupo dos automorfismo de um grupo cíclico é abeliano, o subgrupo derivado de um grupo supersolúvel centraliza todos os fatores cíclicos normais e é, por conseguinte, nilpotente. Assim, cada grupo supersolúvel é nilpotente-por-abeliano e tem classe de nilpotência ≤ 2. O resultado segue do Teorema de Mclain. ∎

Capítulo 2

PC-Grupos Localmente Supersolúveis

Neste capítulo descrevemos minimamente a classe dos PC-grupos. Concluímos que um PC-grupo finitamente gerado é policíclico-por-finito.

Como resultado principal mostramos que em um PC-grupo o quociente $\dfrac{K}{K \cap \Phi(G)}$, onde $K \trianglelefteq G$, é localmente nilpotente (localmente supersolúvel) se, e somente se, K é localmente nilpotente (localmente supersolúvel). O que mostra que local nilpotência e local supersolubilidade são propriedades de Frattini de PC-grupos. Tal propriedade definiremos agora

Definição 2.1. *Seja G um grupo e $\mathfrak{X}$ uma propriedade de grupos. Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma propriedade de Frattini se G é um $\mathfrak{X}$-grupo sempre que $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ for um $\mathfrak{X}$-grupo.*

Mostramos no Teorema 1.13 do Capítulo 1, que nilpotência é uma propriedade de Frattini de grupos finitos. Devido a Huppert, se G é finito e todo subgrupo maximal de G tem índice primo, então G é supersolúvel. Isso tem por consequência que $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ é supersolúvel se, e somente se, G é supersolúvel. Portanto, supersolubilidade é também uma propriedades de Frattini de grupos finitos (Ver [4], pág. 276).

Definição 2.2. *Dizemos que um grupo G possui classes de conjugação policíclicas-por-finito (ou é PC-grupo) se para cada elemento x em G o grupo quociente $\dfrac{G}{C_G(\langle x\rangle^G)}$ é* *policíclico-por-finito.*

Proposição 2.1. *A classe dos PC-grupos é fechada para subgrupos e quocientes.*

Demonstração: Para todo elemento $h \in H$ temos que $\langle h\rangle^H \leq \langle h\rangle^G$. Daí, segue que $C_G(\langle h\rangle^G) \leq C_H(\langle h\rangle^H)$. Logo,

$$\frac{H}{C_H(\langle h\rangle^H)} \leq \frac{G}{C_H(\langle h\rangle^H)} \leq \frac{G}{C_G(\langle h\rangle^G)}$$

e, como a classe dos policíclicos-por-finito é fechada a subgrupos (Proposição 1.11) temos que $\dfrac{H}{C_H(\langle h\rangle^H)}$ é policíclico-por-finito e, portanto, H é PC-grupo.

Para todo elemento $x \in \dfrac{G}{N}$ temos que $\langle x\rangle^{\frac{G}{N}} \leq \langle x\rangle^G$. Assim temos que

$$\frac{C_G(\langle x\rangle^G)}{N} \leq C_{\frac{G}{N}}(\langle x\rangle^{\frac{G}{N}}).$$

De onde seque que

$$\frac{\frac{G}{N}}{C_{\frac{G}{N}}(\langle x\rangle^{\frac{G}{N}})} \leq \frac{\frac{G}{N}}{\frac{C_G(\langle x\rangle^G)}{N}} \cong \frac{G}{C_G(\langle x\rangle^G)}.$$

Sendo G um PC-grupo, temos que $\dfrac{G}{C_G(\langle x\rangle^G)} \in \mathfrak{PF}$, e da Proposição 1.11, temos que $\dfrac{\frac{G}{N}}{C_{\frac{G}{N}}(\langle x\rangle^{\frac{G}{N}})} \in \mathfrak{PF}$ e, portanto, $\dfrac{G}{N}$ é PC-grupo. ■

Para obtermos uma caracterização de um PC-grupo podemos utilizar o seguinte lema que envolve o grupo de automorfismos de um grupo policíclicos-por-finito

Lema 2.1. *Seja G um grupo policíclico-por-finito e A um subgrupo do $Aut(G)$. Se A é hiperabeliano-por-(localmente finito), então A é policíclico-por-finito.*

Demonstração: (Ver [3], Lema 2.1).

Teorema 2.1. *O grupo G é PC-grupo se, e somente se, cada conjunto finito de elementos de G está contido num subgrupo normal policíclico-por-finito de G.*

Demonstração: Seja G um PC-grupo. É suficiente mostrar que $N = \langle x^G \rangle$ é policíclico-por-finito para cada $x \in G$. Desde que G é um PC-grupo, $\dfrac{G}{C_G(N)}$ é policíclico-por-finito, portanto, satisfaz a condição maximal, ou seja, é finitamente gerado. Pela Observação 1.2, $G = XC_G(N)$, onde X é finitamente gerado. Assim $N = \langle x^X \rangle$ está contido no subgrupo finitamente gerado $H = \langle X, x \rangle$. Por isso, H é finitamente gerado e $\dfrac{G}{C_G(H^G)}$ é policíclico-por-finito. Como $H \cap C_G(H^G) = C_H(H^G)$ e $\dfrac{H}{C_H(H^G)} \cong \dfrac{HC_G(H^G)}{C_G(H^G)} \leq \dfrac{G}{C_G(H^G)}$, logo, $\dfrac{H}{C_H(H^G)}$ é policíclico-por-finito. Assim, $\dfrac{H}{Z(H)}$ é policíclico-por-finito e, grupo abeliano-por-policíclico finitamente gerado satisfaz a condição maximal para subgrupos normais (Ver [5], Parte 1, Teorema 5.34) e, portanto, H é policíclico-por-finito.

Reciprocamente, suponhamos que cada conjunto finito de elementos de G está contido num subgrupo normal policíclico-por-finito de G. Então G é hiperabeliano-por-(localmente finito). Se $x \in G$, então $\langle x^G \rangle$ é policíclico-por-finito. Por isso, o quociente $\dfrac{G}{C_G\langle x^G \rangle}$ é isomorfo a um grupo hiperabeliano-por-(localmente finito) de automorfismo do grupo policíclico-por-finito $\langle x^G \rangle$ e, portanto, pelo Lema 2.1, é policíclico-por-finito. ■

Uma elementar, mas importante consequência do Teorema 2.1 é o seguinte

Corolário 2.1. *Se G é um PC-grupo e $\dfrac{G}{N}$ é policíclico-por-finito, então existe um subgrupo normal H policíclico-por-finito tal que $HN = G$.*

Demonstração: Sejam G um PC-grupo e N um subgrupo normal de G tal que $\dfrac{G}{N} \in \mathfrak{PF}$. Assim $\dfrac{G}{N}$ satisfaz a condição maximal e, pela Observação 1.2, $G = HN$, com H finitamente gerado, digamos $H = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$. Pelo Teorema anterior cada x_i, está contido em um subgrupo normal N_i policíclico-por-finito, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Como a classe dos policíclicos-por-finito é indutivamente ordenada, existem um subgrupo K normal policíclico-por-finito maximal tal que $H \leq K$. Portanto, pela Proposição 1.11, H é policíclico-por-finito. ■

Lema 2.2. *Seja G um PC-grupo, e seja $\frac{H}{Z(G)}$ um subgrupo policíclico-por-finito de $\frac{G}{Z(G)}$. Então existe um subgrupo normal N de G tal que $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito e $N \cap H = Z(G)$.*

Demonstração: Sendo $\frac{H}{Z(G)}$ um subgrupo policíclico-por-finito de $\frac{G}{Z(G)}$, pela Proposição 1.10, segue que $\frac{H}{Z(G)}$ noetheriano e, portanto, é finitamente gerado. Assim podemos escrever $\frac{H}{Z(G)} = \langle Z(G)h_1, ..., Z(G)h_n \rangle = \frac{Z(G)\langle h_1, ..., h_n \rangle}{Z(G)}$, de onde segue que $H = Z(G)\langle h_1, ..., h_n \rangle$. Como $C_G(H^G) = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(h_i^G), \forall\, h_i \in H$ e G é PC-grupo, segue que $\frac{G}{C_G(H^G)}$ é policíclico-por-finito. Portanto, pelo Corolário 2.1, existe um subgrupo normal K policíclico-por-finito de G tal que $KC_G(H) = G$, já que $C_G(H^G) \leq C_G(H)$. Seja $N = C_G(K)$. Então $N \cap H$ centraliza K e $C_G(H)$ e, portanto, $N \cap H = Z(G)$. E, como $\cap C_G(k^G) = C_G(K^G) \leq C_G(K) = N, \forall\, k \in K$, segue que $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito. ■

2.1 Propriedades de Frattini

Nesta seção, provaremos que nilpotência local e supersolubilidade local são propriedades de Frattini de PC-grupos. Vale primeiramente o seguinte

Teorema 2.2. *Seja G um PC-grupo, e seja K um subgrupo normal de G. Então, temos que $\frac{K}{K \cap \Phi(G)}$ é localmente nilpotente se, e somente se, K é localmente nilpotente. Em particular se $\frac{G}{\Phi(G)}$ é localmente nilpotente, então G é localmente nilpotente.*

Demonstração: Seja E um subgrupo finitamente gerado de K. Como G é um PC-grupo, pelo Teorema 2.1, E está contido dentro de um subgrupo normal policíclico-por-finito de G e assim, pela proposição 1.11, E é policíclico-por-finito. Fazendo $H = EZ(G)$, pelo Lema 2.2, existe um subgrupo normal N de G, tal que $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito e $EZ(G) \cap N = Z(G)$. Pelo Lema de Dedekind, segue que $E \cap N \leq Z(G)$.

Por hipótese temos que $\frac{K}{K \cap \Phi(G)}$ é localmente nilpotente. Fazendo $\bar{G} = \frac{G}{N}$ e

$\bar{K} = \frac{KN}{N}$, temos que $\frac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é localmente nilpotente, já que $\frac{\Phi GN}{N} \leq \Phi(\frac{G}{N})$. Assim, temos que $\frac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é localmente nilpotente e satisfaz a condição maximal, pois $\frac{G}{N}$ é policíclico-por-finito, logo, $\frac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é nilpotente (Ver [4], pág. 360) e assim $\bar{K}$ também é nilpotente. Como $\frac{E}{(E \cap N)} \cong \frac{EN}{N} \leq \frac{KN}{N}$, e $E \cap N \leq Z(G)$, vemos que E é nilpotente. Portanto, K é localmente nilpotente. ■

Evidentemente, temos que quando G é localmente nilpotente e, $\Phi(G)$ é o subgrupo de Frattini de G, $\frac{G}{\Phi(G)} \in L\mathfrak{N}$. Mas nesse resultado, quando $K = G$, concluímos que $L\mathfrak{N}$ é uma propriedade de Frattini de PC-grupo.

Corolário 2.2. *Seja G um PC-grupo. Então o subgrupo de Frattini $\Phi(G)$ de G é localmente nilpotente.*

Demonstração: Fazendo $K = \Phi(G)$, a demonstração segue claramente do Teorema 2.2. ■

Corolário 2.3. *Seja G um PC-grupo tal que o Frattini quociente $\frac{G}{\Phi(G)}$ é (localmente nilpotente)-por-finito, então G é (localmente nilpotente)-por-finito.*

Demonstração: Seja G um PC-grupo tal que $\frac{G}{\Phi(G)} \in (L\mathfrak{N})\mathfrak{F}$. Assim existe um subgrupo normal N de G tal que $\frac{G}{N}$ é finito e $\frac{N\Phi(G)}{\Phi(G)} \cong \frac{N}{N \cap \Phi(G)}$ é localmente nilpotente e, pelo Teorema 2.2, segue que N é localmente nilpotente. Portanto, G é (localmente nilpotente)-por-finito. ■

Corolário 2.4. *Seja G um PC-grupo tal que o Frattini quociente $\frac{G}{\Phi(G)}$ é finito-por-(localmente nilpotente). Então G é finito-por-(localmente nilpotente).*

Demonstração: O Frattini quociente $\frac{G}{\Phi(G)}$ é claramente (localmente nilpotente)-por-finito, de modo que G é (localmente nilpotente)-por-finito pelo Corolário 2.3. Seja K um subgrupo normal localmente nilpotente de índice finito de G. Então existe um subgrupo normal X policíclico-por-finito de G tal que $G = KX$. O grupo $\bar{G} = \dfrac{G}{\mathcal{C}_G(X)}$ é policíclico-por-finito, e $\dfrac{\bar{G}}{\Phi(\bar{G})}$ é finito-por-nilpotente, de modo que $\bar{G}$ é também finito-por-nilpotente (Ver [10]). Assim, $\dfrac{X}{Z(X)}$ é finito-por-nilpotente, de modo que o subgrupo X é também finito-por-nilpotente. Seja E um subgrupo finito característico de X tal que $\dfrac{X}{E}$ é nilpotente. O quociente $\dfrac{G}{E}$ é o produto de dois subgrupos normais hipercentrais, e, portanto, é hipercentral (Ver [5], Parte 1, p. 51). Portanto, G é finito-por-(localmente nilpotente). ■

Temos um resultado análogo ao Teorema 2.2 com relação à classe $L\mathfrak{S}\mathfrak{S}$ dos grupos localmente supersolúveis. Vale o

Teorema 2.3. *Sejam G um PC-grupo e K um subgrupo normal de G. Então, temos que $\dfrac{K}{(K \cap \Phi(G))}$ é localmente supersolúvel se, e somente K é localmente supersolúvel. Em particular se $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ é localmente supersolúvel, então G é também localmente supersolúvel.*

Demonstração: Seja E um subgrupo finitamente gerado de K. Então, sendo G um PC-grupo, pelo Teorema 2.1, E está contido dentro de um subgrupo normal policíclico-por-finito de G e assim, pela proposição 1.11, E é policíclico-por-finito. Pelo Lema 2.2 existe um subgrupo normal N de G tal que $\dfrac{G}{N}$ é policíclico-por-finito e $EZ(G) \cap N = Z(G)$ de onde temos $E \cap N \leq Z(G)$ (Lema de Dedekind). Por hipótese temos que $\dfrac{K}{K \cap \Phi(G)}$ é localmente supersolúvel. Fazendo $\bar{G} = \dfrac{G}{N}$ e $\bar{K} = \dfrac{KN}{N}$, assim temos que $\dfrac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é localmente supersolúvel, já que $\dfrac{\Phi(G)N}{N} \leq \Phi(\bar{G})$.

Temos que $\dfrac{\bar{K}}{(\bar{K} \cap \Phi(\bar{G}))}$ é localmente supersolúvel e satisfaz a condição maximal. Daí, pelo Proposição 1.23, temos que $\dfrac{\bar{K}}{\bar{K} \cap \Phi(\bar{G})}$ é supersolúvel. E por isso, temos que $\bar{K}$ também é supersolúvel. Daí segue então que $\dfrac{E}{(E \cap N)} \cong \dfrac{EN}{N}$ é supersolúvel, já que $\dfrac{EN}{N} \leq \dfrac{KN}{N} = \bar{K}$. Dado que $E \cap N \leq Z(G)$, temos que $E \cap N$ é abeliano finitamente gerado e, pela Observação 1.7, $E \cap N$ é policíclico. Isto implica que existe uma série

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_r = E \cap N$$

onde cada $\dfrac{H_i}{H_{i-1}}$ é cíclico e $H_i \trianglelefteq E$. Logo existe uma série normal em E com quocientes cíclicos, ou seja, E é supersolúvel. Portanto, K é localmente supersolúvel. ■

Similar ao Corolário 2.3 temos o seguinte

Corolário 2.5. *Seja G um PC-grupo tal que o Frattini quociente $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ é (localmente supersolúvel)-por-finito, então G é (localmente supersolúvel)-por-finito.*

E assim, encerramos as discussões do nosso capítulo 2.

Apêndice A

Conclusão e Discussão de Resultados

O resultado principal do artigo que motivou esse trabalho é

Teorema A.1 (S. FRANCIOSI e F. DE GEOVANI). *Seja G um PC-grupo. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) *Se o Frattini quociente $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ é finito, então o centro quociente $\dfrac{G}{Z(G)}$ também é finito;*

ii) *Se o Frattini quociente $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ é minimax, então o centro quociente $\dfrac{G}{Z(G)}$ é policíclico-por-finito;*

iii) *Se o Frattini quociente $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ tem seção abeliana com posto finito, então o centro quociente $\dfrac{G}{Z(G)}$ também tem seção abeliana com posto finito;*

iv) *Se o Frattini quociente $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ tem posto livre de torção, então o centro quociente $\dfrac{G}{Z(G)}$ também tem posto livre de torção;*

v) *Se o Frattini quociente $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ é um π-grupo periódico, onde π é um conjunto de primos, então o centro quociente $\dfrac{G}{Z(G)}$ também é um π-grupo periódico.*

O Teorema acima, mostra, em particular que as propriedades de ser finito, policíclico-por-finito, minimax, periódico, finito com posto livre de torção e seção abeliano de posto finito são propriedades de Frattini de PC-grupos com centros triviais. Note que as mesmas propriedades não são propriedades de Frattini de grupos arbitrários com classes de conjugação policíclicas-por-finito, já que cada grupo abeliano é um PC-grupo.

A nossa leitura mostra que, de saída, a investigação à respeito de uma propriedade $\mathfrak{X}$ de grupos ser ou não propriedade de Frattini, toca em vários conceitos e em alguns resultados não evidentes na teoria dos grupos.

Os resultados dos Teoremas 2.2 e 2.3 mostram que nilpotência local e supersolubilidade local são propriedade de Frattini em grupos cujas classes de conjugação são policíclicas-por-finito. Portanto, deixam claro que o estudo que fizemos contém uma generalização do fato de que, em grupos finitos, nilpotência e supersolubilidade são propriedades de Frattini.

Referências Bibliográficas

[1] S. Franciosi - F. de Giovanni - M. J. Tomkinson, *Frattini Properties of Groups with Polycyclic-by-Finite Conjugacy Classes*, boll. Un. Mat. Ital. B (7) **10-A** (1996), 653-659.

[2] J.C. Beidleman - H. Smith, *On Frattini-like subgroups*, Glasgow Math. J., **35** (1993), 95-98.

[3] S. Franciosi - F. de Giovanni - M. J. Tomkinson, *Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes*, boll. Un. Mat. Ital. B (7) **4** (1990), 35-55.

[4] D. J. S. Robinson, *A Corse in the Theory of Groups,* Springer, New York, 1996.

[5] D. J. S. Robinson, *Finiteness conditions and generalized soluble groups,* Springer, Berlin, 1972.

[6] D. J. S. Robinson, *An Introduction to Abstract Algebra* Walter de Gruyter, Berlin/New York, 2003.