

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

MEDIDA: ÁREA E VOLUME

Jáderson Pará Rodrigues

MANAUS

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Jáderson Pará Rodrigues

MEDIDA: ÁREA E VOLUME

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2014

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R696m	Rodrigues, Jáderson Medida : Área e Volume / Jáderson Rodrigues. 2014 34 f.: il.; 10 cm. Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas. 1. Ensino-Aprendizagem. 2. Geometria Euclídiana. 3. Geometria Plana. 4. Geometria Espacial. 5. Teoremas Clássicos. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título
-------	---

JÁDERSON PARÁ RODRIGUES

MEDIDA: ÁREA E VOLUME

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 06 de outubro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata
Membro

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Membro

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e bênçãos a mim concedidas, por ter mudado minha vida para melhor e por sempre guiar meus passos para realizar com sucesso os meus objetivos.

A meus pais, que sempre foram minha base forte nesta caminhada, o meu muito obrigado por tudo àquilo que me instruíram e por todos os princípios que me foram passados.

Ao meu irmão Jackson Alexandre Pará Rodrigues, por todo seu apoio, sem ele o caminho para realizar esse trabalho seria muito mais difícil.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pela confiança e dedicação, por toda liberdade no desenvolvimento deste estudo e ter acreditado em meu potencial me conduzindo para esta realização, obrigado pelas horas e apoio disponibilizados, obrigado.

A todos meus professores do PROFMAT, pela arte de ensinar, por nos desafiar e acreditar em nossa capacidade de aprender sempre mais.

Enfim, agradeço aos amigos pelo companheirismo nas árduas vitórias conquistadas e todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução dessa Dissertação de Mestrado.

RESUMO

Neste trabalho procuramos fazer uma abordagem de alguns teoremas clássicos da Geometria Euclidiana Plana de maneira mais profunda do que usualmente é feita no ensino médio, pois embora tenham um grande papel na resolução de muitos problemas geométricos, estão de certa forma esquecidos tanto no ensino básico quanto no ensino de graduação. No intuito de resgatar tais teoremas, desenvolvendo assim habilidades em Geometria, Lógica e na matemática como um todo; A partir dos postulados de Euclides e seus principais teoremas exploramos as mais usuais fórmulas de área e volume estudadas no ensino médio, bem como suas propriedades. Para as demonstrações destes teoremas, fizemos o uso de alguns resultados da Geometria Plana e da Geometria Espacial. Acreditamos que tanto o enfoque da realização desse trabalho, como os teoremas clássicos, podem servir para a melhoria do ensino-aprendizagem de Geometria Euclidiana Plana e Espacial, e possivelmente servir de elemento motivador para alunos e professores que busquem aprimorar seus conhecimentos em Geometria nos seus diversos desdobramentos.

Palavras-chave: Ensino -Aprendizagem, Geometria Euclidiana, Geometria Plana
Geometria Espacial, Teoremas Clássicos,

ABSTRACT

In this work, we tried to take a simple approach of some classical theorems of Euclidean geometry Plana in a deeper way than is usually done in high school, because although they have a big role in solving many geometric problems are somewhat forgotten so much in basic education as in undergraduate education. In order to redeem such theorems, thereby developing skills in geometry, logic and mathematics as a whole; From the postulates of Euclid and its main theorems explore the most common formulas for area and volume studied in high school, as well as their properties. For statements of these theorems, we use some results of plane geometry and spatial geometry. We believe that both the approach to carry out this work as the classical theorems can serve to improve the teaching and learning of Euclidean Plane and Space, and possibly serve as a motivator for students and teachers who seek to improve their knowledge in geometry in its various ramifications.

Keywords: Teaching-Learning, Euclidean Geometry, Classical Theorems, Plane Geometry, Space Geometry.

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mathbb{Q}	Conjunto dos números racionais.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\Rightarrow	Implica em.
$=$	Igual.
\neq	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
\geq	Maior ou igual.
\leq	Menor ou igual.
α	ângulo α .
A	Ponto A.
ABC	Triângulo ABC.
$ABCD$	Quadrilátero ABCD.
$s(ABCD)$	Área da figura $ABCD$.
AB	Segmento AB.
\overline{AB}	Medida do segmento AB.
A_{bcd}	Sólido Abcd.
$v(A_{bcd})$	Volume do sólido Abcd.
$v(ABCD)$	Volume do tetraedro de vértices $ABCD$.
$s(A)$	Área da face A de um sólido.
$\sum_{i=1}^n$	Somatório variando de 1 a n .
\square	Indica o fim de uma demonstração.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Um Breve Histórico do Surgimento das medições de área e volume	1
1.2	Motivação e Métodos do Trabalho	3
1.3	Estrutura do Trabalho	3
2	O mundo axiomático das áreas em \mathbb{R}^2	4
2.1	Geometria em \mathbb{R}^2	4
2.2	Definição	4
2.3	Conceitos iniciais	4
2.4	Postulados	5
2.5	Segmentos de Reta	6
2.6	Quadriláteros	7
2.7	Triângulos	9
2.8	Círculo	14
3	Mundo axiomático dos volumes em \mathbb{R}^3	16
3.1	Geometria em \mathbb{R}^3	16
3.2	Definição	16
3.3	Conceitos Iniciais	16
3.4	Postulados	17
3.5	Demonstração do Princípio de Cavalieri	18
3.6	Figuras Planas	19
3.7	Paralelepípedos	19
3.8	Prismas e Cilindros	21
3.9	Pirâmides e Cones	22
3.10	Esfera	25
4	Exercícios	26
4.1	Figuras Planas	26
4.2	Sólidos do Espaço	29

5	Considerações finais	32
	Referências Bibliográficas	33

Capítulo 1

Introdução

1.1 Um Breve Histórico do Surgimento das medições de área e volume

É notório que medir área e volume de figuras bem definidas é um problema recorrente na engenharia e no comércio desde os povos mais antigos da história, desde a invenção da escrita e dos primeiros registros contábeis se faz necessário medir e registrar partes do plano e do espaço. A preocupação com a exatidão das medidas é antiga, Bíblia Sagrada diz:

*Ter dois pesos e duas medidas é objeto de abominação para o Senhor.*¹

E para a sociedade também. Afinal, todo o progresso científico e tecnológico está diretamente atrelado ao uso adequado das medidas.

Desde o antigo Egito existe uma preocupação em se medir com precisão área e volume de mercadorias para o comércio e a construção. De acordo com o livro escrito pelo Grego Heródoto (484 a 425 A.C.) os governantes tiveram que distribuir a terra igualmente entre os agricultores do reino e, com as cheias do Rio Nilo, era necessário refazer constantemente a divisão, isto fez com que desenvolvessem técnicas para fazer a divisão das terras surgindo então a Geometria (medida da terra). O conceito de área surge dessa necessidade de quantificar um pedaço de uma região denominada plano. E o problema de divisão igualitária de terras faz surgir os primeiros problemas de geometria conhecidos.

O Papiro de Rhinds é um dos registros mais antigos conhecidos da matemática, nele já se encontravam problemas de medição de terrenos que periodicamente eram alagados pelas águas do rio Nilo, ou seja, problemas claramente relacionados a medida da área de figuras.

O Papiro de Moscou é um documento egípcio em forma de uma estreita tira de 5,5m de comprimento por 8cm de largura, com 25 problemas matemáticos grafados com escrita hierática. Nele encontramos um dos mais antigos problemas de volume registrados; foi escrito por volta

¹Provérbios Capítulo 20 versículo 10

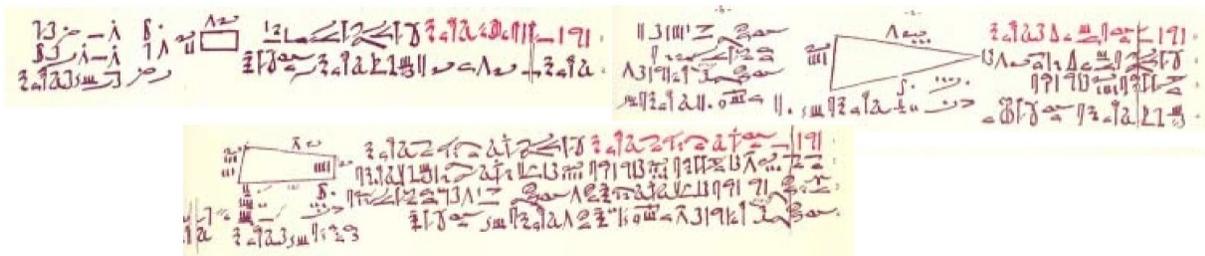


Figura 1.1: Trechos do papiro de Rhinds com problemas da quadratura do retângulo, triângulo e trapézio.

de 1850 a.C por um escriba cuja identidade é desconhecida. .

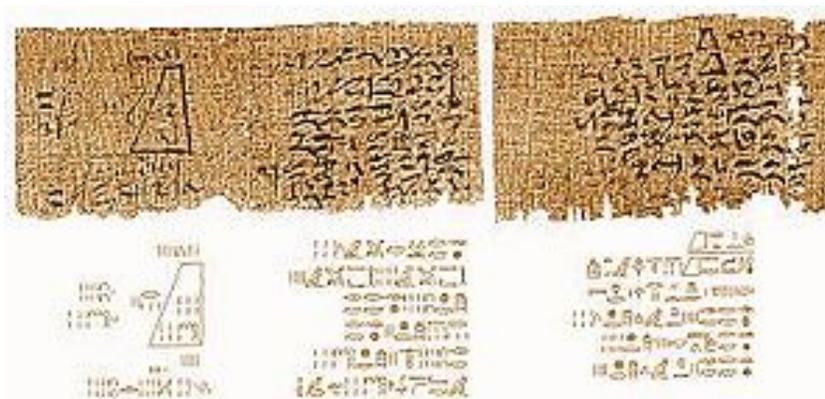


Figura 1.2: Trecho do papiro de Moscou com problema do volume de um tronco de pirâmide

Mais tarde, entre 330 a.C e 275 a.C, viveu o geômetra Euclides, autor de Os Elementos, livro que sistematizou o conhecimento matemático da época e o escreveu de maneira axiomática, que norteia a lógica hoje utilizada em demonstrações [1]. Em Os Elementos temos as principais definições de geometria plana, que podem ser estendidas para geometria espacial.

Também é registrado que Arquimedes de Siracusa (287 a.C. a 212 a.C.) resolveu um problema envolvendo a coroa do rei Hieron, problema que pra ser resolvido precisava do domínio dos conceitos de volume e empuxo.[2]

1.2 Motivação e Métodos do Trabalho

A geometria foi, historicamente, a porta de entrada para o pensamento axiomático de toda matemática moderna; até hoje o estudo da geometria é um importante meio de se desenvolver o pensamento axiomático, ou em outras palavras, o pensamento lógico, onde tomamos alguns argumentos intuitivos como verdades inquestionáveis para a partir dessas verdades se chegar a um mundo lógico bem definido. Infelizmente hoje está em decadência o ensino de Geometria na educação básica brasileira, desse modo, tem-se aumentado o interesse de pesquisadores de Ensino da Matemática em debater esta problemática nas escolas e, até mesmo, nas Universidades.

*Muitos dos meus alunos de licenciatura não tem direito a ideia de que a matemática está em construção. Na verdade, durante o primeiro ano de licenciatura, eles mantêm a visão dos que terminam o ensino médio no Brasil, que também pensam assim.*²

O que o professor Júlio César dos Reis fala a reportagem da revista Cálculo é um exemplo do que normalmente ocorre na formação dos professores brasileiros, e esse trabalho vem atacar esse problema na área de geometria.

1.3 Estrutura do Trabalho

O objetivo desse trabalho é mostrar o mundo da geometria axiomática em sua essência, sem fórmulas pré estabelecidas, mas com verdades intuitivas, e a partir dessas verdades, aqui chamadas de **postulados**, construiremos um mundo lógico onde os conceitos já aprendidos no ensino fundamental e médio sobre medida de área e volume tomem algum sentido, sendo algo mais que apenas a aplicação de fórmulas. Para tal é recomendada a leitura prévia de Os Elementos de Euclides[2], de onde esse trabalho baseia todo conteúdo, é também recomendado o domínio das principais propriedades das figuras geométricas planas, resultantes dos postulados de Euclides, para tal é sugerida a leitura de [3].

²Revista Cálculo, Edição 23, página 24

Capítulo 2

O mundo axiomático das áreas em \mathbb{R}^2

2.1 Geometria em \mathbb{R}^2

Para se calcular a área de uma figura plana deve-se ter em mente alguns conceitos de geometria básica. Nesse trabalho tomaremos por princípio os 23 postulados de Euclides em Geometria Plana, bem como os teoremas oriundos desses postulados. Tomando como base esse norte primeiro faremos a definição formal de área no plano, e tomaremos regras básicas, que aqui chamaremos de postulados, pois não temos como prová-los, apenas acreditamos que eles sejam verdade, e a partir dessa verdade construiremos o nosso mundo com figuras planas mensuráveis.

2.2 Definição

Chamamos de área de uma figura plana, um único número real que representa a parte do plano que determinada figura ocupa. É importante frisar em *um único*, afinal, deixaria de ter a aplicação desejada se uma mesma figura tivesse mais de uma área, desse modo o conceito de área deixaria de ser um conceito de medida, que é o objeto de nossos estudos.

2.3 Conceitos iniciais

Polígonos: Para efeito de ordem um polígono será nomeado de acordo com a ordem de seus segmentos, digamos, por exemplo, um polígono de N lados possui N vértices, nomeemos de $V_1, V_2 \dots V_n$ todos os N vértices desse polígono, de tal modo que vértices de índices consecutivos formem lados do polígono e o único lado que falta seja o lado $V_1 V_n$, sendo assim meu polígono se chamará $V_1 V_2 \dots V_n$

Rotação: É o movimento de uma figura de tal modo que, tomando um ponto fixo no plano P_f e um ângulo orientado $\vec{\alpha}$, todos os pontos finais e iniciais correspondentes da figura formem,

com o ponto P_f como vértice, o ângulo orientado $\vec{\alpha}$.

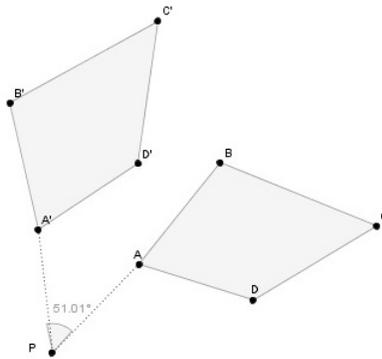


Figura 2.1: Exemplo de rotação de polinômio

Translação: É o movimento de uma figura de tal modo que, tomando um vetor \vec{AB} , todos os pontos finais e iniciais correspondentes, nessa ordem, formem um elemento desse vetor.

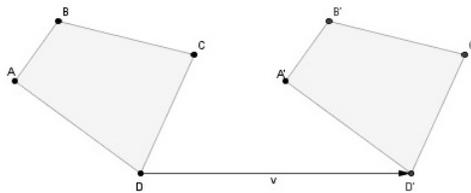


Figura 2.2: Exemplo de translação de polinômio

Inversão: É o movimento de uma figura de tal modo que, tomando uma reta r , a distância dos pontos iniciais e finais a reta r sejam iguais, e o segmento de reta formado pelos pontos inicial e final correspondente sempre tenha medida igual o dobro da distância do ponto inicial à reta r .

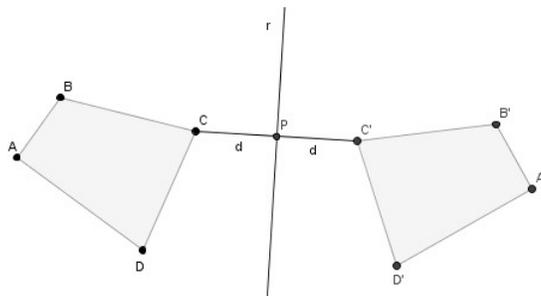


Figura 2.3: Exemplo de inversão de polinômio

2.4 Postulados

Postulado 1. *Um quadrado de lado 1 terá área 1*

Postulado 2. *Qualquer conjunto de pontos onde seja impossível obter um quadrado como subconjunto desse conjunto dado, tem área zero.*

Postulado 3. *Dado um subconjunto de uma figura, sua área será menor ou igual a área da figura inicial.*

Lema 2.1. *Dadas duas figuras semelhantes, a que tiver medidas correspondentes menores, terá área menor.*

Demonstração. No caso de figuras convexas, elas podem ser sobrepostas, onde fica fácil ver que a figura de dimensões menores é subconjunto da de dimensões maiores, em caso de figuras côncavas, basta parcioná-las em figuras convexas, que terão as mesmas propriedades. \square

Postulado 4. *Dada uma figura com área mensurável, rotações, inversões e translações da figura não alteram o valor de sua área.*

Lema 2.2. *Figuras congruentes podem ser sobrepostas por rotações inversões e translações, logo têm áreas iguais.*

Nota: Vale lembrar que essa propriedade é natural e de espaços isomorfos, que por definição não deformam as figuras em suas trajetórias, um bom exemplo de espaço não isomorfo é uma rua parcialmente esburacada, se uma de suas pistas está em bom estado e outra não podemos notar que se fizermos o mesmo trajeto nas duas, gastaremos muito mais energia na que não for plana.

Postulado 5. *Dado duas figuras disjuntas, a área da união entre elas será igual a soma de suas áreas.*

Lema 2.3. *Quando duas figuras têm em comum apenas conjuntos de área nula, a área da união entre elas será igual a soma de suas áreas.*

2.5 Segmentos de Reta

Teorema 2.1. *Dado um segmento de reta qualquer, este terá área zero.*

Demonstração. É fácil ver que qualquer segmento de reta dado podemos desenhar um quadrado $ABCD$ tão pequeno quanto se queira, onde um dos lados, digamos AB esteja contido no segmento dado, contudo, esse mesmo quadrado possui dois segmentos perpendiculares ao segmento dado, BC e DA , logo é impossível desenhar um quadrado inteiramente dentro de um segmento, por [P2] temos que todo segmento tem medida nula de área. \square

2.6 Quadriláteros

Teorema 2.2. *Dado um quadrado qualquer, sua área será igual ao quadrado da medida de seu lado.*

Demonstração. Existem dois casos:

(a) $l \in \mathbb{Q}^+$ ou, (b) $l \notin \mathbb{Q}^+$.

Para (a) primeiramente vamos resolver a particularidade $l = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, nesse caso podemos tomar n^2 quadrados e dispô-los de tal maneira que formem um quadrado unitário:

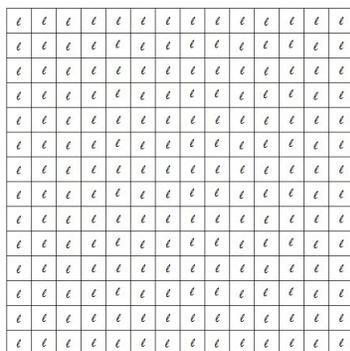


Figura 2.4: Quadrados de lado $l = \frac{1}{n}$, nesse caso, $n = 14$

logo: $n^2 \cdot s(\frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow s(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n})^2$, no caso $l = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, podemos tomar p^2 quadrados de lado $\frac{1}{q}$ e dispô-los de tal maneira que formem um quadrado de lado $\frac{p}{q}$, assim: $s(\frac{p}{q}) = p^2 \cdot s(\frac{1}{q}) = (\frac{p}{q})^2$, ou seja, $\forall l \in \mathbb{Q}^+$, $s(l) = l^2$ sendo l a medida do lado de um quadrado.

(b) $l \notin \mathbb{Q}^+$. Vamos considerar por absurdo $s(l) = x^2$, para algum $x \in \mathbb{R}^+$, tal que, $x \neq l$, sendo assim, consideremos, sem perda de generalidade, $x > l$ isso implica em: $\exists q \in \mathbb{N}$ tal que $x - l > \frac{1}{q}$, logo existirá $p \in \mathbb{N}$ onde $x > \frac{p}{q} > l$, mas $x > \frac{p}{q} \Rightarrow x^2 > (\frac{p}{q})^2 \Rightarrow s(l) > s(\frac{p}{q})$, sendo $s(\frac{p}{q})$ a área do quadrado de lado $\frac{p}{q}$, mas podemos desenhar um quadrado de lado $\frac{p}{q}$ que contenha um quadrado de lado l , logo, por **L3.1** $\frac{p}{q} > l \Rightarrow s(\frac{p}{q}) > s(l)$, absurdo. Então, de todo modo, $s(l) = l^2$ onde $s(l)$ é a área de um quadrado de lado qualquer. \square

Teorema 2.3. *Dado um retângulo qualquer, sua área será cl , onde c é a medida de seu comprimento e l a medida de sua largura.*

Demonstração: Os lados do retângulo são positivos, logo existem dois casos a ser considerados:

$$(a) \frac{c}{l} \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{ou} \quad (b) \frac{c}{l} \notin \mathbb{Q}^+$$

No caso (a), podemos supor inicialmente que $c, l \in \mathbb{N}$, logo existe $u = 1 \in \mathbb{N}$, u é a unidade de medida tal que $c = c \cdot u$ e $l = l \cdot u$, de onde segue que

$$A = cl = cl u^2$$

isto é, o retângulo tem cl quadrados com lados unitários. Caso $c, l \notin \mathbb{N}$ ambos, podemos ainda encontrar um submúltiplo comum u tal que

$$p \cdot u = c \quad \text{e} \quad q \cdot u = l,$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$ e tomamos $u = 1$ a unidade de medida dos lados do retângulo. Pelas considerações acima, a área do retângulo deverá ser

$$A = pq u^2 \quad \implies \quad A = cl.$$

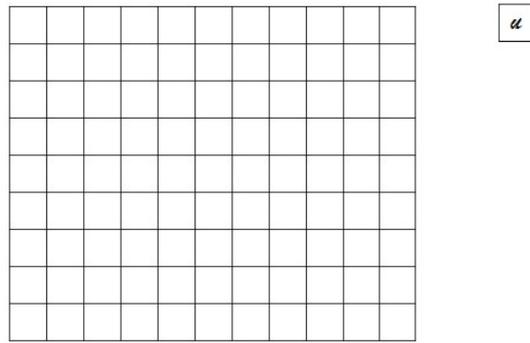


Figura 2.5: Quadrados de lado u , nesse caso $p = 9$ e $q = 11$

No caso (b) precisa remos lançar mão de um lema:

Lema 2.4. *Dados dois retângulos de largura de mesma medida, e comprimento medindo c e c' respectivamente temos que: $s(lc) > s(lc')$ se, e somente se $c > c'$.*

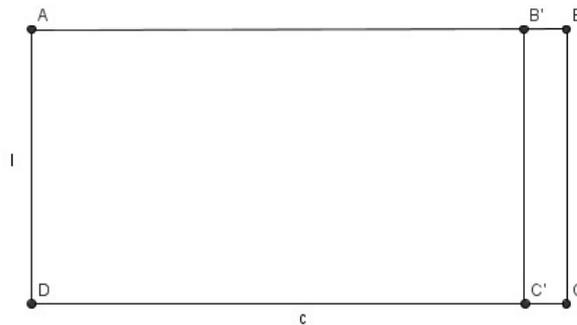


Figura 2.6: Retângulos de lados lc e lc'

Demonstração. Tomemos uma dos retângulos, rotacionemos de modo que suas larguras fiquem paralelas às larguras do outro retângulo, agora translademos o retângulo de modo que uma das larguras coincida com a do segundo retângulo, nesse momento duas coisas podem ocorrer, ou um dos retângulos está inteiramente no interior do outro, ou não, em caso não, façamos a

inversão do primeiro retângulo tomando como reta diretriz a formada pelo segmento comum, desse modo, teremos dois retângulos onde um estará inteiramente dentro do outro, o retângulo inscrito obviamente por A5 terá área menor, e é evidente que c' seu comprimento é menor que c o comprimento do retângulo circunscrito. \square

Continuação do caso (b): $\frac{c}{l} \notin \mathbb{Q}^+$, suponhamos agora, por absurdo que $s(lc)=lX$ onde $X \neq c$, tomemos, sem perda de generalidade $X > c$, ora, existe $n \in \mathbb{N}$ onde $\frac{l}{n} < X - c$, sendo assim existe um $c' = k\frac{l}{n}$, $k \in \mathbb{N}$, de tal sorte que $X > c' > c$, mas $X > c' \Rightarrow Xl > c'l \Rightarrow s(lc) > s(lc')$ e por L2 teremos $c > c'$, um absurdo, sendo assim, $X = c \Rightarrow s(lc) = lc \forall l, c \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.4. *Dado um paralelogramo qualquer, sua área será de medida igual a de um retângulo de comprimento e largura congruentes a um lado e a altura relativa a esse lado, respectivamente.*

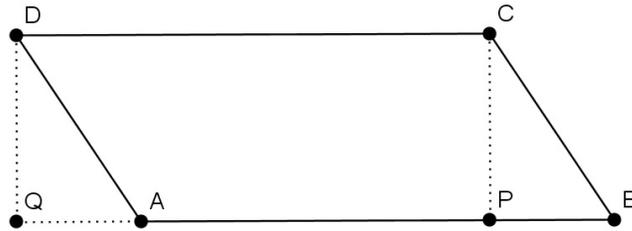


Figura 2.7: É fácil ver que o paralelogramo $ABCD$ tem mesma área que o retângulo $QPCD$

Demonstração. Tomemos um paralelogramo qualquer $ABCD$, onde $AB \parallel CD$, se $ABCD$ é retângulo não há nada a provar, mas se $ABCD$ não for podemos traçar um ponto $P \in AB$ de tal sorte que $PC \perp AB$ ou $PD \perp AB$, tomemos como verdade, sem perda de generalidade, que $PC \perp AB$, sendo assim, podemos traçar um triângulo DAQ onde $AB \parallel AQ$ e $QD \perp AQ$, é fácil ver que DAQ é retângulo em \hat{Q} , desse modo podemos notar que $DAQ \cong CBP$, assim, por P4 podemos transladar o triângulo DAQ em CBP que essa nova figura terá área igual a área do paralelogramo inicial, a nova figura $QPCD$ é um retângulo, é notável que $QP \cong DC \cong AB$ onde QP e AB são o comprimento do retângulo e o lado do paralelogramo respectivamente, e CP é ao mesmo tempo largura do retângulo e altura relativa ao lado AB do paralelogramo. \square

2.7 Triângulos

Teorema 2.5. *Dado um triângulo qualquer, sua área será a metade da área de um paralelogramo com uma das bases congruente à base do triângulo e altura correspondente a essa base também congruente a altura do triângulo.*

Demonstração. Tomemos um triângulo qualquer ABA' , tracemos um ponto B' de tal modo que $AB \parallel A'B'$ e $AA' \parallel BB'$, temos ainda que $AB \equiv A'B'$, assim podemos construir o paralelogramo $ABB'A'$ é fácil ver que a união entre os triângulos ABA' e $BA'B'$ será o paralelogramo, bem como $ABA' \equiv BA'B'$ sendo assim:

$$s(ABA'B') = s(ABA') + s(BAB') \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot s(ABA'B') = s(ABA')$$

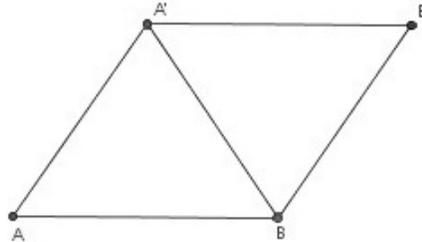


Figura 2.8: É fácil ver que o paralelogramo $ABB'A'$ é formado por dois triângulos equivalentes

Em outras palavras, podemos dizer que o triângulo ABC terá área igual a $s(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{\overline{AB}}$, onde $h_{\overline{AB}}$ representa a altura do triângulo em relação a base AB , e \overline{AB} é a medida dessa base. \square

Lema 2.5. Dado dois triângulos tais que, um de seus segmentos e a altura relativa a esse segmento tenham mesma medida esses triângulos terão mesma área.

Demonstração. Esses triângulos terão metade da área de dois paralelogramos, que teram base e altura relativa a base congruente, logo terão mesma área. \square

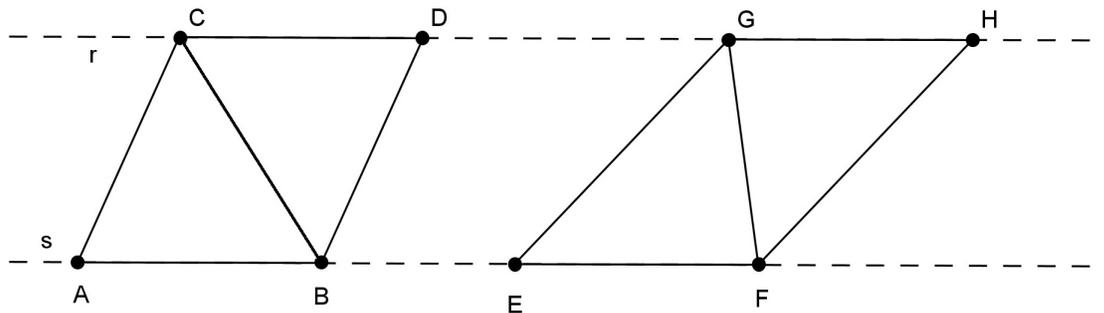


Figura 2.9: Note que se a altura dos triângulos ABC e EFG for igual, as retas r e s serão paralelas

Lema 2.6. Dado um triângulo retângulo qualquer, sua área será igual a metade do produto da medida dos catetos.

Demonstração. Chamemos o triângulo de ABC , retângulo em B tracemos agora o ponto D onde $CD \parallel AB$ e $BC \parallel DA$, Notemos que $ABC \equiv CDA$, e que $ABCD$ é um retângulo de largura \overline{BC} e comprimento \overline{AB} , sendo assim:

$$s(ABCD) = s(ABC) + s(CDA) = 2 \cdot s(ABC) \Rightarrow s(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad \square$$

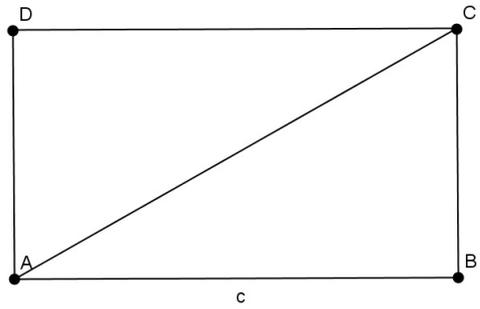


Figura 2.10: Todo triângulo retângulo é metade de algum retângulo

Teorema 2.6. (Teorema de Pitágoras) *Dado um triângulo ABC retângulo em A , teremos a seguinte propriedade: $(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2$.*

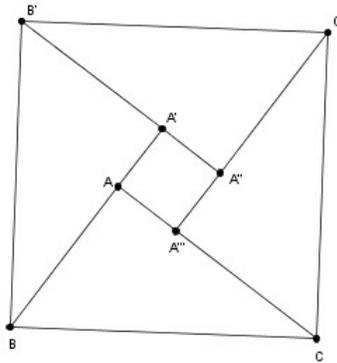


Figura 2.11: A união das 5 figuras menores forma um quadrado

Demonstração. Digamos, sem perda de generalidade, que \overline{AB} é o cateto maior, tracemos a partir do triângulo um quadrado $BCC'B'$ circunscrito de lado \overline{BC} comum, tracemos outro quadrado $AA'A''A'''$ concêntrico ao primeiro quadrado com o vértice A comum ao triângulo dado e $A' \in \overline{AB}$, é fácil ver que $(ABC) \equiv (A'B'B) \equiv (A''C'B') \equiv (A'''CC')$, logo poderemos calcular a área do quadrado maior de duas maneiras: $s(BCC'B') = (\overline{BC})^2$
 ou, $s(BCC'B') = s(AA'A''A''') + s(ABC) + s(A'B'B) + s(A''C'B') + s(A'''CC') =$
 $= (\overline{AA'})^2 + 4 \cdot (\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC}) = (\overline{AB} - \overline{AC})^2 + 4 \cdot (\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC})$, sendo assim:
 $(\overline{BC})^2 = (\overline{AB} - \overline{AC})^2 + 4 \cdot (\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC}) \Rightarrow (\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2$ □

Teorema 2.7. *Dados dois triângulos semelhantes, suas áreas serão proporcionais ao quadrado da razão entre lados correspondentes.*

Demonstração. Chamemos de k a constante de proporcionalidade onde $k = \frac{a_1}{a_2}$, onde a_1 e a_2 são lados maiores correspondentes de dois triângulos semelhantes, tomemos o lado maior desses triângulos, tracemos a altura relativa a esses lados, é fácil ver que as alturas correspondentes

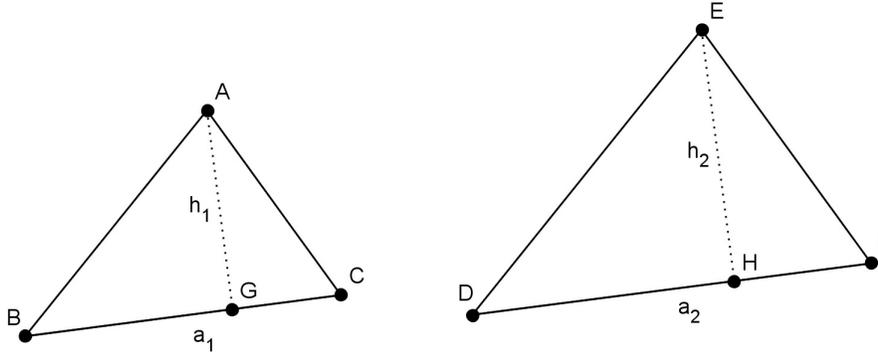


Figura 2.12: É fácil ver que $ABG \simeq DHE$, bem como $ACG \simeq EFH$

a lados correspondentes obedecem a constante de proporcionalidade k , em outras palavras,

$\frac{h_1}{h_2} = k$ logo:

$k = \frac{a_1}{a_2}$ e $k = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow k^2 = \frac{a_1 \cdot h_1}{a_2 \cdot h_2} \Rightarrow k^2 = \frac{\frac{1}{2} a_1 \cdot h_1}{\frac{1}{2} a_2 \cdot h_2} \Rightarrow \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = \frac{s(t_1)}{s(t_2)}$ onde t_1 e t_2 são os triângulos iniciais de lados maiores a_1 e a_2 respectivamente. \square

Lema 2.7. *Dado dois polígonos semelhantes, suas áreas serão proporcionais ao quadrado da razão entre lados correspondentes.*

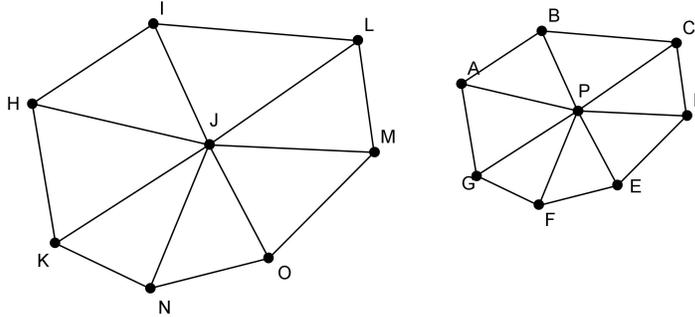


Figura 2.13: É fácil ver que $ABP \simeq HIJ$, bem como $BCP \simeq ILJ$ ou qualquer outro triângulo correspondente e a constante de proporcionalidade é a mesma.

Demonstração. Polígonos semelhantes pode ser fracionado em triângulos dois a dois semelhantes, digamos t_1, t_2, \dots, t_n e t'_1, t'_2, \dots, t'_n respectivamente, então, chamando de k a constante de proporcionalidade e p e p' os polígonos semelhantes teremos:

$$k^2 = \frac{s(t_1)}{s(t'_1)} = \frac{s(t_2)}{s(t'_2)} \dots = \frac{s(t_n)}{s(t'_n)} \Rightarrow k^2 = \frac{s(t_1)+s(t_2)+\dots+s(t_n)}{s(t'_1)+s(t'_2)+\dots+s(t'_n)} = \frac{s(p)}{s(p')} \quad \square$$

Teorema 2.8. *(Fórmula de Heron) Dado um triângulo qualquer, sabendo as medidas de seus lados, sua área será:*

$$s(ABC) = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}, \text{ onde } a, b \text{ e } c \text{ são as medidas dos lados e } p \text{ é o semiperímetro, ou seja: } p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Demonstração. Primeiramente lançaremos mão de um Lema:

Lema 2.8. (Lei dos cossenos) Dado um triângulo qualquer, é válida a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\alpha).$$

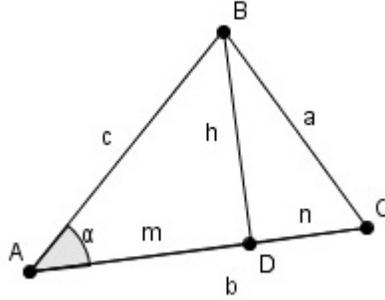


Figura 2.14: Nessa figura temos que $h = BD \perp AC$, $m = AD$, $n = DC$ e ainda $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$

Demonstração. Cosseno nada mais é que a razão entre um cateto adjacente a um ângulo com a hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer, ora é evidente que, por semelhança de triângulos, essa razão será constante e seu valor chamamos de cosseno, nessa figura teremos que $\cos(\alpha)$ é o cosseno do ângulo α . Agora, pela figura dada, temos: $n = b - m$ e pelo teorema de pitágoras temos que $c^2 = m^2 + h^2$ e $a^2 = n^2 + h^2$ assim sendo teremos:

$$(1) n^2 = b^2 - 2.b.m + m^2$$

$$(2) h^2 = c^2 - m^2 \text{ e}$$

$$(3) a^2 = n^2 + h^2$$

Substituindo (1) e (2) em (3) teremos: $a^2 = b^2 - 2.b.m + m^2 + c^2 - m^2$ o que implica em: $a^2 = b^2 - 2.b.m + c^2$, sabemos que $\cos(\alpha) = \frac{m}{c}$ logo: $m = c.\cos(\alpha) \Rightarrow a^2 = b^2 - 2.b.c.\cos(\alpha) + c^2$. □

Continuação: Utilizando a lei dos cossenos teremos: $a^2 = b^2 - 2.b.c.\cos(\alpha) + c^2$, analisando a figura 2.15:

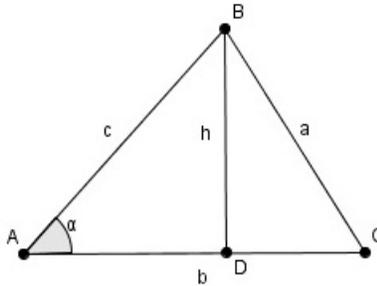


Figura 2.15: Nessa figura temos que $h = BD \perp AC$ e ainda $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$

Notamos que: $\sqrt{c^2 - h^2} = c.\cos(\alpha)$,

logo: $a^2 = b^2 - 2.b.\sqrt{c^2 - h^2} + c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = -2.b.\sqrt{c^2 - h^2}$, o que implica em:

$(a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4.b^2.(c^2 - h^2)$, desenvolvendo essa equação chegaremos em: $(a + b + c).(-a +$

$b + c).(a - b + c).(a + b - c) = 4.b^2.h^2$ o que implica dizer:

$\sqrt{(a + b + c).(-a + b + c).(a - b + c).(a + b - c)} = 2.b.h$, logo:

$\sqrt{(a + b + c).(-a + b + c).(a - b + c).(a + b - c)} = 4.s(ABC)$, sendo assim teremos:

$$s(ABC) = \sqrt{\frac{(a + b + c).(-a + b + c).(a - b + c).(a + b - c)}{16}} = \sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)}.$$

□

Observação: É impressionante que o grego Heron de Alexandria, que viveu em algum ano entre os séculos I e III da era cristã, já conhecia essa fórmula, mesmo sem conhecer conceitos de seno e cosseno, sua fórmula é utilizada como base pra calcular a área de um triângulo qualquer, afinal, basta saber as medidas dos lados, que sua área já está bem definida. Sabendo a área básica do triângulo é possível calcular a área de qualquer polígono, afinal, todo polígono pode ser parcionado em triângulos.

2.8 Círculo

Teorema 2.9. *Dado um círculo qualquer sua área será o produto entre o comprimento da semicircunferência e o raio do círculo dado.*

Demonstração. Tomemos por absurdo que: $S(c_r) \neq \pi r^2$, onde r é o raio do círculo e πr é o semicomprimento da circunferência, consideremos primeiro $S(c_r) < \pi r^2$, ora, então $S(c_r) = AB$ para algum $A < \pi r$ e $B < r$ (prova secundária, se necessário demonstro) tracemos uma reta distando B como $B < r$, a reta interceptará a circunferência em dois pontos, chamemos de P_1 e P_2 , tomemos o ângulo θ' central do círculo definido por P_1 e P_2 , agora tomemos $\theta = 2\pi/n_1$ $n_1 \in \mathbb{N}$ de tal sorte que $\theta = 2\pi/n_1 < \theta'$, esse setor circular formará um apótema B' maior que B , agora qualquer que seja o valor de $2A$ como ele é menor que $2\pi r$, logo existirá polígono regular de n_2 -lados inscrito na circunferência, onde $n_2 l_{n_2} > 2A$, mas tomando $n = \max(n_1, n_2)$ a área do polígono de n -lados será $S(p_n) = n.B'.L_n/2 > A.B' > AB = S(c_r)$, absurdo.

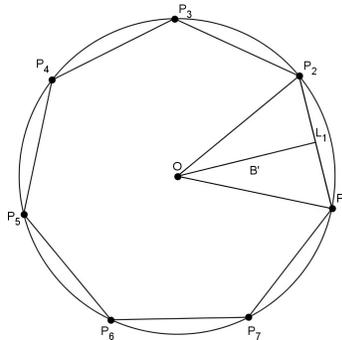


Figura 2.16: Exemplo para um polígono inscrito P_n com $n = 7$

Consideremos agora $S(c_r) > \pi r^2$, tomemos o ângulo central $\alpha = 2\pi/n$ onde $n \in \mathbb{N}$ sabemos que o perímetro do polígono regular circunscrito sempre será maior que o perímetro

da circunferência, o perímetro do polígono regular circunscrito de n -lados será $n \cdot 2r \cdot \text{tg}(\alpha/2)$, logo $n \cdot 2r \cdot \text{tg}(\alpha/2) > 2\pi r = n \cdot \alpha \cdot r \Rightarrow \text{tg}(\alpha/2) > \alpha/2$ fazendo $\theta = \alpha/2$ teremos $\text{tg}(\theta) > \theta$, $\forall \theta < \pi/3$.

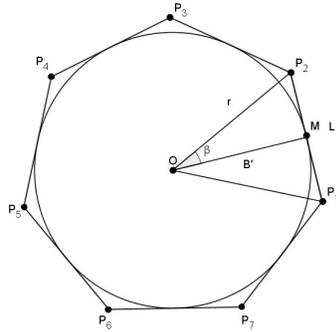


Figura 2.17: Exemplo para um polígono circunscrito P_n com $n = 7$ e $\beta = \frac{\alpha}{2}$

$S(c_r) > \pi r^2$ implica em $S(c_r) = AB$ para algum $A > \pi r$ e $B > r$ (prova secundária, se necessário demonstro), qualquer que seja o valor de $2A$ como ele é maior que $2\pi r$, logo existirá polígono regular de n_1 -lados inscrito na circunferência, onde $n_1 l_{n_1} < 2A$, Agora tomando um raio do círculo é possível traçar um triângulo retângulo com hipotenusa medindo B e com r como cateto maior, tomando o ângulo central θ' do círculo formado pelo cateto maior e hipotenusa, tomemos agora $\theta = 2\pi/n_2$ $n_2 \in \mathbb{N}$ de tal sorte que $\theta = 2\pi/n_2 < \theta'$, mas tomando $n = \max(n_1, n_2)$ a área do polígono de n -lados será $S(p_n) = n \cdot B' \cdot L_n / 2 < A \cdot B' < AB = S(c_r)$, absurdo. \square

Capítulo 3

Mundo axiomático dos volumes em \mathbb{R}^3

3.1 Geometria em \mathbb{R}^3

Semelhante à área, podemos calcular o volume em \mathbb{R}^3 . Para se calcular o volume de um sólido deve-se ter em mente alguns conceitos de geometria espacial, como na unidade anterior, por princípio os 23 postulados de Euclides em Geometria Espacial dessa vez, bem como os teoremas oriundos desses postulados [4]. Tomando como base esse norte primeiro faremos a definição formal de volume no espaço, e tomaremos regras básicas, que aqui chamaremos de postulados, pois não temos como prová-los, apenas acreditamos que eles sejam verdade, e a partir dessa verdade construiremos o nosso mundo com sólidos mensuráveis.

3.2 Definição

Chamamos de Volume de um sólido, um número real positivo que representa a parte do espaço que determinada figura ocupa. É importante frisar que, assim como a área, o volume é único, pois também se trata de uma medida e o conceito de medida tem como principal condição a unicidade de seu valor para determinado elemento.

3.3 Conceitos Iniciais

Rotação: É o movimento de um sólido de tal modo que, tomando uma reta fixa no plano r_f e um ângulo orientado $\vec{\alpha}$, todas as distâncias de pontos finais com a reta r_f e iniciais correspondentes com a reta r_f do sólido sejam congruentes, formem o ângulo orientado $\vec{\alpha}$ e que a reta formada pelos pontos inicial e final seja sempre ortogonal a reta r_f .

Translação: É o movimento de uma figura de tal modo que, tomando um vetor \vec{AB} , todos os pontos finais e iniciais correspondentes, nessa ordem, formem um elemento desse vetor.

Inversão: É o movimento de uma figura de tal modo que, tomando um plano ϕ , a distância dos pontos iniciais e finais a o plano ϕ sejam iguais, e o segmento de reta formado pelos pontos inicial e final correspondente sempre tenha medida igual o dobro da distância do ponto inicial ao plano ϕ .

3.4 Postulados

Postulado 6. *Um cubo de aresta 1 terá volume 1*

Postulado 7. *Qualquer conjunto de pontos onde seja impossível obter um cubo como subconjunto desse conjunto dado, tem volume zero.*

Postulado 8. *Dado um subconjunto de um sólido, seu volume será menor ou igual ao volume do sólido inicial.*

Lema 3.1. *Dados dois sólidos semelhantes, o que tiver medidas menores, terá volume menor.*

Demonstração. No caso de sólidos convexos, elas podem ser sobrepostas, onde fica fácil ver que o sólido de dimensões menores é subconjunto do de dimensões maiores, em caso de sólidos côncavos, basta particioná-los em sólidos convexos, que terão as mesmas propriedades. \square

Postulado 9. *Dado um sólido com volume mensurável, rotações, inversões e translações do sólido não alteram o valor de sua área.*

Lema 3.2. *Sólidos semelhantes podem ser sobrepostos por rotações inversões e translações, logo têm volumes iguais.*

Nota: Vale lembrar que essa propriedade é natural e de espaços isomorfos, no R^3 é mais difícil de se imaginar um espaço não isomorfo, mas podemos exemplificá-lo como uma viagem espacial idealizada por Einstein, onde um viajante em velocidade próxima a da luz tem a sensação de passar o tempo muito mais devagar que uma pessoa em repouso na terra, ao mesmo tempo que a pessoa em velocidade próxima da luz tem volume menor que a em repouso[5].

Postulado 10. *Dado dois sólidos disjuntos, o volume da união entre eles será igual a soma de seus volumes.*

Postulado 11. *(Princípio de Cavalieri para sólidos) Dados dois sólidos disjuntos e um plano, se todo plano paralelo ao plano dado que interceptar um dos sólidos também interceptar o outro sólido e as interseções formem figuras de mesma área, o volume dos sólidos será igual.*

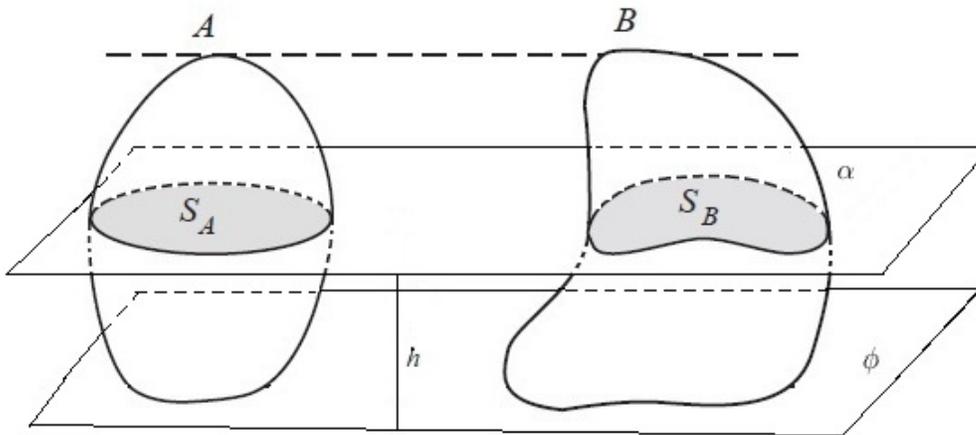


Figura 3.1: Dados os Sólidos A e B e Plano ϕ , se tivermos $s(S_A) = s(S_B)$, onde, $S_A = A \cap \alpha$ e $S_B = B \cap \alpha, \forall \alpha \parallel \phi$, então $v(A) = v(B)$

3.5 Demonstração do Princípio de Cavalieri

O princípio de Cavalieri para sólidos é uma particularidade do *Teorema de Fubini*, que diz:

$$\int_X (\int_Y f(x, y) dy) dx = \int_Y (\int_X f(x, y) dx) dy = \int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) \quad x \in X \text{ e } y \in Y, X \subset D_1 \text{ e } Y \subset D_2$$

Em outras palavras, integral dupla de uma função é igual a integral em duas variáveis, considerando $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, se minha função estiver contida no primeiro octante, teremos que a integral simples uma função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} é o volume abaixo da folha formada pelos ponto $(x, y, f(x, y))$, qualquer sólido limitado pode ser parcionado e rotacionado de tal modo que sempre será a soma ou diferença de duas ou mais integrais dessas folhas.

Como a integral pode ser calculada também como a integral dupla de uma função de duas variáveis, qualquer outro conjunto definido por exemplo $g(x, y)$ de tal modo que: $\int_X f(x, y) dx = \int_X g(x, y) dx$ teremos dois sólidos de volumes iguais, mas $\int_X f(x, y) dx$ é a área da intersecção do sólido com o plano $y = k$ para cada um dos $k \in \mathbb{R}$ onde a função é definida, logo, se para qualquer k esses dois sólido tem áreas iguais teremos: $\int_X g(x, y) dx = \int_X f(x, y) dx \Rightarrow \int_Y (\int_X g(x, y) dy) dx = \int_Y (\int_X f(x, y) dx) dy = \int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y)$.

Logo dois sólidos de secções paralelas a algum plano TODAS de mesma área são sólidos com mesmo volume.

A demonstração de teorema de Fubini é um problema clássico do Cálculo Integral em Várias variáveis, tendo em [6] um de suas demonstações mais usuais. Mas como o objetivo de nosso estudo não é se aprofundar no cálculo diferencial, mas colocar padrão axiomático na geometria estudada no nível médio, é razoável usar o princípio de Cavalieri como axioma, por ser uma coisa extremamente intuitiva, e talvez impossível de se demonstrar sem utilizar de cálculo infinitesimal, o que fugiria de nossos objetivos.

3.6 Figuras Planas

Teorema 3.1. *Dado um subconjunto de um plano qualquer, este terá volume zero.*

Demonstração. É fácil ver que qualquer plano dado podemos desenhar um cubo tão pequeno quanto se queira, onde uma das faces esteja contida no plano dado, contudo, esse mesmo cubo possui arestas perpendiculares ao plano, logo, qualquer que seja o tamanho desse cubo, existirão pontos dele que não se encontrarão no plano, sendo assim, por [P7] temos que todo plano e subconjunto de plano tem medida nula de volume. \square

3.7 Paralelepípedos

Teorema 3.2. *Dado um cubo qualquer, seu volume será igual ao cubo da medida de sua aresta.*

Demonstração. Existem dois casos:

(a) $a \in \mathbb{Q}^+$ ou, (b) $a \notin \mathbb{Q}^+$.

Para (a) primeiramente vamos resolver a particularidade $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, nesse caso podemos tomar n^3 cubos e dispô-los de tal maneira que formem um quadrado unitário, logo:

$n^3 \cdot v(\frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow v(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n})^3$, no caso $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, podemos tomar p^3 cubos de aresta $\frac{1}{q}$ e dispô-los de tal maneira que formem um cubo de lado $\frac{p}{q}$, assim: $v(\frac{p}{q}) = p^3 \cdot v(\frac{1}{q}) = (\frac{p}{q})^3$, ou seja, $\forall a \in \mathbb{Q}^+$, $v(a) = a^3$ sendo a a medida do lado de um cubo dado.

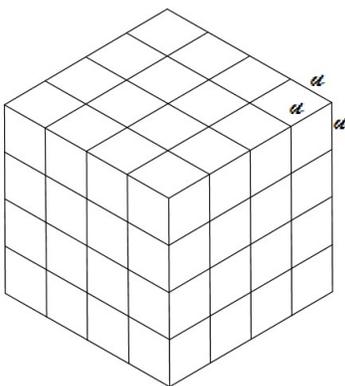


Figura 3.2: u^3 Cubos de aresta $u = \frac{1}{n}$, nesse caso $n = 4$

(b) $a \notin \mathbb{Q}^+$. Vamos considerar por absurdo $v(a) = X^3$, para algum $X \in \mathbb{R}^+$, tal que, $X \neq a$, sendo assim, consideremos, sem perda de generalidade, $X > a$ isso implica em: $\exists q \in \mathbb{N}$ tal que $X - a > \frac{1}{q}$, logo existirá $p \in \mathbb{N}$ onde $X > \frac{p}{q} > a$, mas $X > \frac{p}{q} \Rightarrow X^3 > (\frac{p}{q})^3 \Rightarrow v(a) > v(\frac{p}{q})$, sendo $v(\frac{p}{q})$ o volume do cubo de aresta $\frac{p}{q}$, mas por **L6** $\frac{p}{q} > a \Rightarrow v(\frac{p}{q}) > v(a)$, absurdo. Então, de todo modo, $v(a) = a^3$ onde $v(a)$ é o volume de um cubo qualquer. \square

Teorema 3.3. *Dado um paralelepípedo reto retângulo qualquer, sua área será cla , onde c é a medida de seu comprimento e l a medida de sua largura e a a medida de sua altura.*

Demonstração. Os lados do paralelepípedo são positivos, logo existem dois casos a ser considerados:

$$(a) \frac{c}{l} \text{ e } \frac{a}{l} \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{ou} \quad (b) \frac{c}{l} \text{ ou } \frac{a}{l} \notin \mathbb{Q}^+$$

No caso (a), podemos supor inicialmente que $c, l, a \in \mathbb{N}$, logo existe $u = 1 \in \mathbb{N}$, u é a unidade de medida tal que $c = c \cdot u$, $l = l \cdot u$ e $a = a \cdot u$, de onde segue que

$$V = cla = clau^3$$

isto é, o paralelepípedo reto retângulo tem cla quadrados com lados unitários.

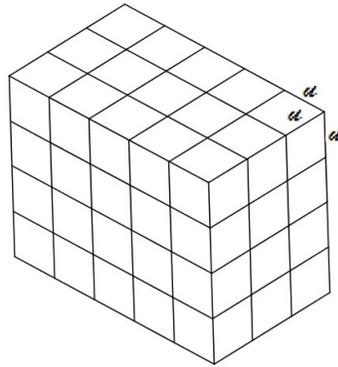


Figura 3.3: pqr Cubos de volume u^3 , nesse caso $p = 3u$, $q = 5u$ e $r = 4u$

Caso $c, l \notin \mathbb{N}$ ambos, podemos ainda encontrar um submúltiplo comum u tal que

$$p \cdot u = c \quad , \quad q \cdot u = l \quad \text{e} \quad r \cdot u = a$$

onde $p, q, r \in \mathbb{N}$ e tomamos $u = 1$ a unidade de medida das arestas do paralelepípedo reto retângulo. Pelas considerações acima, o volume do paralelepípedo deverá ser

$$A = pqr u^3 \quad \implies \quad A = cla.$$

No caso (b) precisaremos lançar mão de um lema:

Lema 3.3. *Dados dois paralelepípedos reto retângulos de largura de mesma medida, comprimento medindo c e c' e altura medindo a e a' respectivamente temos que: $v(lca) > v(lc'a')$ se, e somente se $ca > c'a'$.*

Demonstração. \implies tomemos o sólido lca e suponhamos por absurdo que $ca < c'a'$, mas com isso poderíamos achar $a'' > a$ e $c'' > c$ tal que $c''a'' = c'a'$ partir das arestas do paralelepípedo

lca podemos traçar as arestas do paralelepípedo reto retângulo $lc''a''$, por **P11** $v(lc''a'') = v(lc'a')$, mas $v(lc''a'') \geq v(lca)$, absurdo.

⇐ podemos dividir o sólido lca em dois paralelepípedos reto retângulos, lca'' e lca' ,

$x + a'' = a$ de tal sorte que $c.a'' = c'.a'$ por **P11** teremos $v(lca'') = v(lc'a')$, ora:

$v(lca) \geq (\text{mín}(l, c, x))^3 > 0$ sendo assim:

$v(lca) = v(lca'') + v(lca') > v(lca'') = v(lc'a')$. □

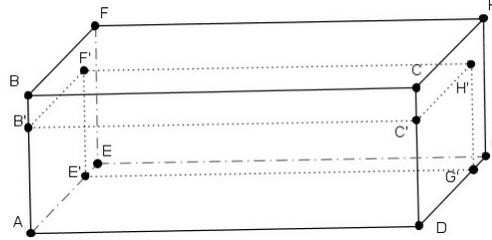


Figura 3.4: É fácil ver que o paralelepípedo $AB'C'DE'F'G'H'$ onde $\overline{AD} = l = \overline{AE'}$, $\overline{AE} = c'' < c = \overline{AE}$ e $\overline{AB'} = a'' < a = \overline{AB}$; é menor que o paralelepípedo $ABCDEFGH$

Continuação do caso (b): $\frac{c}{l}$ ou $\frac{a}{l} \notin \mathbb{Q}^+$, suponhamos agora, por absurdo que $v(lca) = lcX$ onde $X \neq a$, tomemos, sem perda de generalidade $X > a$, ora, existe $n \in \mathbb{N}$ onde $\frac{l}{n} < cX - ca$, sendo assim existe um a' para qual $ca' = k\frac{l}{n}$, $k \in \mathbb{N}$, de tal sorte que $cX > ca' > ca \Rightarrow X > a' > a$,

mas $X > a' \Rightarrow lcX > lca' \Rightarrow v(lca) > v(lca')$ e por **L10** teremos $ca > ca' \Rightarrow a > a'$, um absurdo, sendo assim, $X = a \Rightarrow v(lca) = lca \forall l, c, a \in \mathbb{R}$. □

Lema 3.4. Dado um paralelepípedo p_{rllp} qualquer, seu volume será: $v(p_{rllp}) = h.s(F)$ onde h é distância entre os planos de duas faces F paralelas e $s(F)$ é a área da face.

Demonstração. Tomemos um paralelepípedo reto retângulo lca com as faces lc nos planos das faces F onde: $lc = s(F)$ e $a = h$, nesse caso, qualquer plano paralelo ao plano das faces que seccionar p_{rllp} também seccionará o paralelepípedo construído, formando dois polígonos congruentes aos polígonos das respectivas bases, logo, por **P11** teremos $v(p_{rllp}) = v(lca) = lca = s(F).h$. □

3.8 Prismas e Cilindros

Teorema 3.4. Dado um prisma p_{rm} qualquer, seu volume será: $v(p_{rm}) = h.s(B)$ onde h é distância entre os planos de duas bases B paralelas e $s(B)$ é a área polígono da base.

Demonstração. Tomemos um paralelepípedo reto retângulo lca com as faces lc nos planos das bases B onde: $s(lc) = s(B)$ e $a = h$, nesse caso, qualquer plano paralelo ao plano das faces que seccionar p_{rm} também seccionará o paralelepípedo construído, formando figuras congruentes as respectivas bases, logo, por **P11** teremos $v(p_{rm}) = v(lca) = lca = s(B).h$. □

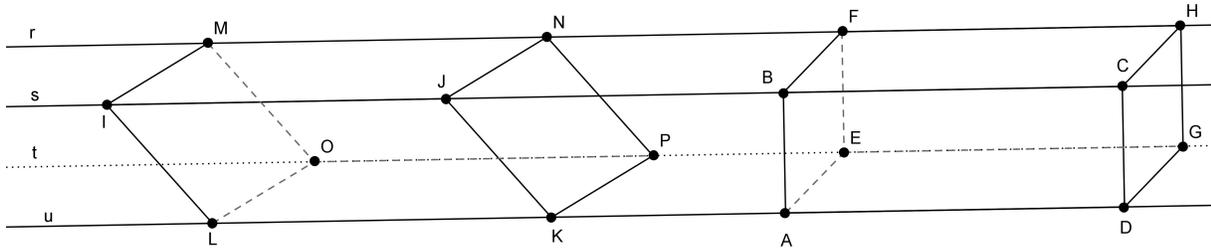


Figura 3.5: Chamemos $IJNM$ de Face F_1 e $LKPO$ de Face F_2 , temos ainda que: $r \parallel s \parallel t \parallel u$; É fácil ver que o paralelepípedo $IJKLMNO$, pelo princípio de Cavalieri, possui mesmo volume que o paralelepípedo reto retângulo $ABCDEFGH$

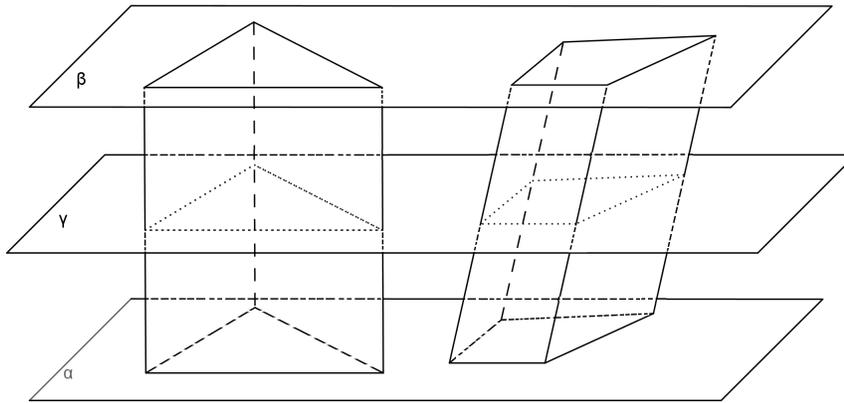


Figura 3.6: Contemple

Lema 3.5. Dado um cilindro c_{il} qualquer, seu volume será: $v(c_{il}) = h \cdot s(B)$ onde h é distância entre os planos de duas bases B paralelas e $s(B)$ é a área da base.

Demonstração. Imediata. □

3.9 Pirâmides e Cones

Teorema 3.5. Dado um tetraedro qualquer, seu volume será igual a um terço de um prisma com uma base comum e altura relativa a essa base igual a altura do tetraedro.

Demonstração. Chamemos os vértices do tetraedro de A, B, C e A' , agora tracemos um ponto B' de tal modo que a reta $r_{A'B'} \parallel r_{AB}$ e $r_{A'A} \parallel r_{B'B}$ e um ponto C' de tal modo que a reta $r_{A'C'} \parallel r_{AC}$ e $r_{A'A} \parallel r_{C'C}$, assim teremos um prisma de faces triangulares ABC e $A'B'C'$,

Tomemos os tetraedros $AA'B'C'$ e $ACB'C'$, $AA'C'$ e ACC' são faces coplanares e de mesma área, tomando-as como base, teremos o vértice B' comum aos dois tetraedros, logo a altura relativa a esse vértice também será igual, assim por **P11** $AA'B'C'$ e $ACB'C'$ terão mesmo volume, tomando agora $AA'B'C'$ e $ABB'C$ e considerando $A'B'C'$ e ABC respectivamente como bases e A e B' como vértices, é fácil notar que as alturas relativas aos vértices e às áreas

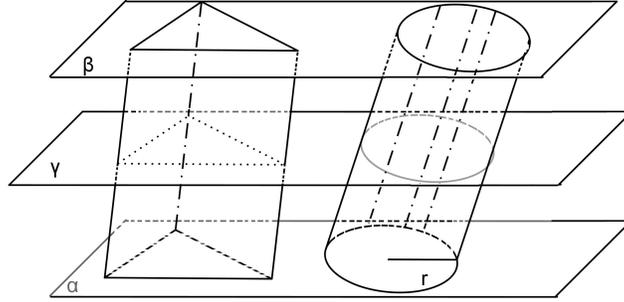


Figura 3.7: Contemple

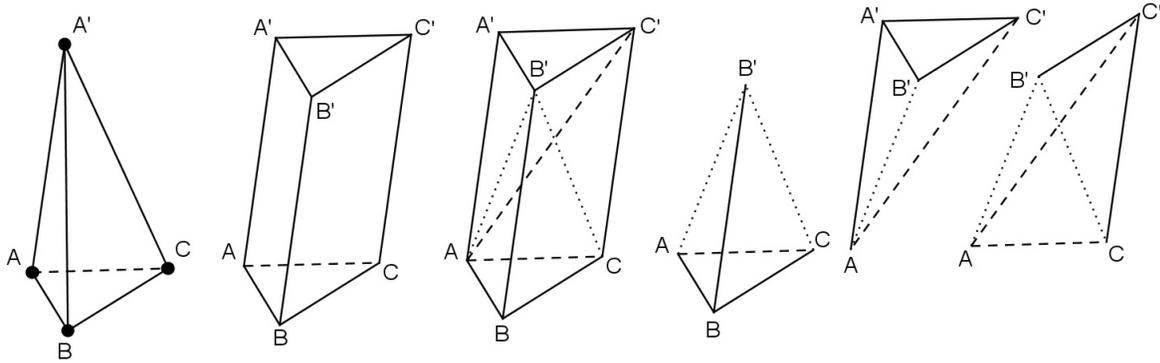


Figura 3.8: Tetraedro dado, prisma e tetraedros finais

de base têm mesma medida, logo, por **P11**, $AA'B'C'$ e $ABB'C$ têm mesmo volume. Como a União entre os três tetraedros forma o prisma teremos:

$$v(p_{rsm}) = v(ACB'C') + v(AA'B'C') + v(ABB'C) = 3.v(ABCA') \Rightarrow v(ABCA') = \frac{1}{3}.v(p_{rsm}) \quad \square$$

Lema 3.6. *Dado uma pirâmide qualquer, seu volume será igual a um terço do volume de um prisma com uma base comum e altura relativa a essa base igual a altura do tetraedro.*

Demonstração. Primeiramente, construamos um tetraedro com base coplanar à base da pirâmide de tal sorte que a base tenha mesma área que a pirâmide dada e os respectivos vértices formem uma reta paralela ao plano das bases. É fácil ver que seccionando qualquer plano paralelo a base que passe pela pirâmide dada, esse plano também seccionará o tetraedro construído, também é fácil ver que os polígonos formados são semelhantes às respectivas bases e a constante de proporcionalidade é a mesma, logo, por **P11** eles possuem mesmo volume, ou seja $v(p_{rm}) = v(t_{tr}) = \frac{1}{3}.v(p_{rm}) = \frac{1}{3}.s(B).h$, onde t_{tr} é o tetraedro construído, p_{rm} o prisma correspondente e h é a distância entre o vértice e o plano da base. \square

Lema 3.7. *Dado um cone circular qualquer, seu volume será igual a um terço de um cilindro com uma base comum e altura relativa a essa base igual a altura do tetraedro.*

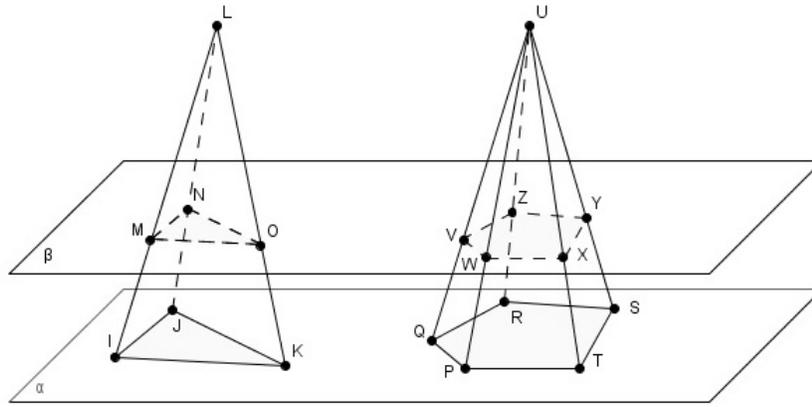


Figura 3.9: Tetraedro e Pirâmide dada

Demonstração. Primeiramente, construímos um tetraedro com base coplanar à base da pirâmide de tal sorte que a base tenha mesma área que o cone dado e os respectivos vértices formem uma reta paralela ao plano das bases. É fácil ver que seccionando qualquer plano paralelo a base que passe pelo cone dado, esse plano também seccionará o tetraedro construído, também é fácil ver que o raio do círculo formado manterá com o raio do polígono da base a mesma proporção de dois lados correspondentes da base do tetraedro, logo:

$$\frac{R_p}{R_b} = \frac{A_p}{A_b} \Rightarrow \left(\frac{R_p}{R_b}\right)^2 = \left(\frac{A_p}{A_b}\right)^2 \Rightarrow \frac{\pi \cdot R_p^2}{\pi \cdot R_b^2} = \frac{A_p^2}{A_b^2} \Rightarrow \frac{s(circ_{R_p})}{s(circ_{R_b})} = \frac{s(trgl_{R_p})}{s(trgl_{R_b})},$$

onde $R, A, circ, trgl$ representam, respectivamente, raio do círculo, lado maior do triângulo, círculo e triângulo, e os índices p, b representam respectivamente, plano paralelo a base e plano da base. Por **P11** os sólidos possuem mesmo volume, ou seja: $v(cil) = v(ttr) = \frac{1}{3} \cdot v(prm) = \frac{1}{3} \cdot s(B) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$, onde ttr é o tetraedro construído, prm o prisma correspondente, cil o cilindro dado e h é a distância entre o vértice e o plano da base. \square

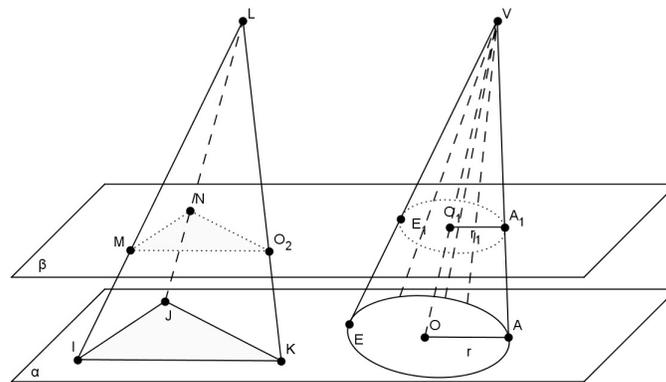


Figura 3.10: Cone e pirâmide com áreas da base iguais

3.10 Esfera

Teorema 3.6. *Dado uma esfera E_{sfr} de raio R e dois cones retos C_{one1} e C_{one2} de raio R e altura R , a soma de seus volumes será igual ao volume de um cilindro C_{il} de altura $2R$ e raio R .*

Demonstração. Tracemos três planos paralelos, ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 de tal sorte que a distância de ϕ_1 para ϕ_2 e de ϕ_2 para ϕ_3 seja R e a distância de ϕ_1 para ϕ_3 seja $2R$, agora coloquemos E_{sfr} com centro em ϕ_2 , C_{one1} com base em ϕ_1 e vértice em ϕ_2 , C_{one2} com base em ϕ_3 e vértice em ϕ_2 e C_{il} com as bases em ϕ_1 e ϕ_3 .

Feita essa construção, é fácil ver que em ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , a soma das áreas seccionadas na esfera e um dos cones é igual a área seccionada do cilindro. Agora se traçarmos um plano ϕ_n paralelo a ϕ_2 de distância menor que R formaremos na intersecção com a esfera um círculo de raio r' onde $R^2 = d^2 + r'^2$ sendo d a distância do plano ϕ_n a ϕ_2 e com o cone o plano ϕ_n formará um círculo de raio d , ora, a soma das áreas será: $\pi r'^2 + \pi d^2 = \pi(r'^2 + d^2) = \pi R^2$, a área da secção do plano ϕ_n com o cilindro, sendo assim, por **P11**, o volume do cilindro dado será igual a soma dos volumes das esferas e cones dados. \square

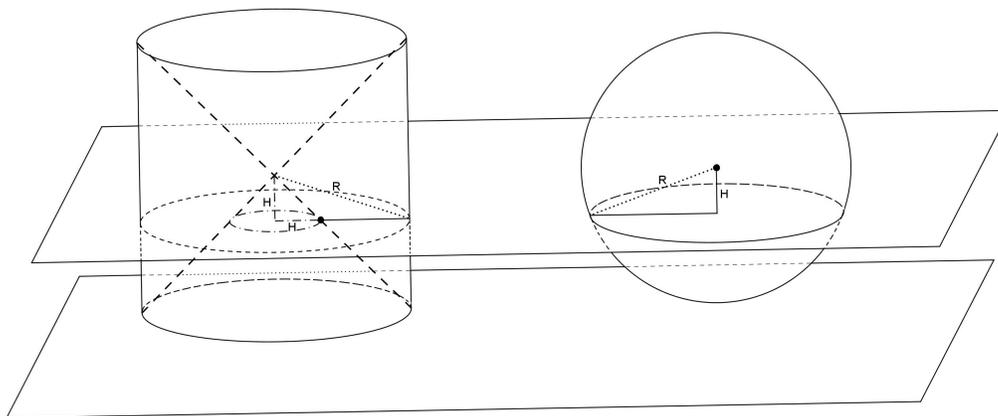


Figura 3.11: Volume da Esfera

Lema 3.8. *Dado uma esfera qualquer, seu volume será igual a quatro terços de π vezes o cubo da medida do raio.*

Demonstração. Tomando as informações do teorema anterior:

$$v(E_{sfr}) = v(C_{il}) - (v(C_{one1}) + v(C_{one2})) = \pi \cdot R^2 \cdot 2R - \left(\frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R + \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R\right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad \square$$

Capítulo 4

Exercícios

Nesse Capítulo trataremos de alguns exercícios executáveis com alunos em sala de aula, como tratam-se de exercícios de alto grau de complexidade, é aconselhável que se passe esse tipo de exercício a alunos com mais afinidade para a matemática de curso superior, apesar de que, apenas com o conteúdo de ensino médio é possível resolvê-los.

4.1 Figuras Planas

Exercício 4.1. *Um losango é um paralelogramo cujos lados são todos congruentes, sabendo o valor das diagonais de um losango qualquer, determine sua área.*

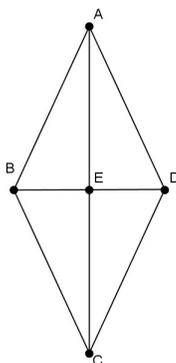


Figura 4.1: $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$

Resolução: é fácil ver no losango da figura que os triângulos ABE , ADE , BCE e CDE são dois a dois congruentes, bem como retângulos, logo a área do losango será: $s(l_{os}) = 4 \cdot s(ABE)$, onde ABE é um triângulo retângulo, teremos então: $s(l_{os}) = 4 \cdot \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BE}}{2} = \frac{2\overline{AE} \cdot 2\overline{BE}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$, chamemos agora \overline{AC} de diagonal D e \overline{BD} de diagonal d , assim teremos: $s(l_{os}) = \frac{D \cdot d}{2}$, cqd.

Exercício 4.2. Um trapézio é um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos e outros dois não paralelos, sabendo o valor dos seus lados paralelos, chamados de B e b e a distância entre esses lados, chamada de h , determine sua área.

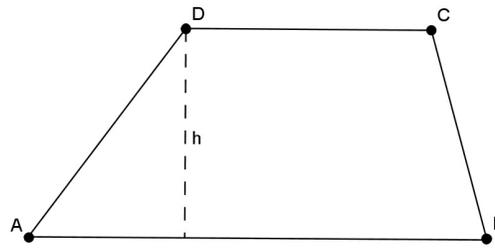


Figura 4.2: $AB \parallel CD$, $\overline{AB} = B$ e $\overline{CD} = b$

Resolução: Tracemos C' de tal sorte que $C'A \parallel CD$ e $\overline{C'A} = \overline{CD} + \overline{AB}$ agora tracemos B' de tal sorte que $B'D \parallel AB$ e $\overline{B'C} = \overline{CD} + \overline{AB}$

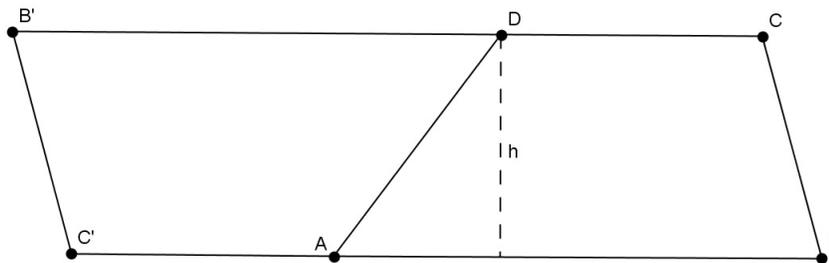


Figura 4.3: $\overline{B'D} = \overline{C'B} = B + b$

Notemos agora que a figura $AC'B'D$ é um trapézio congruente ao primeiro, e a figura $BCB'D$ é um paralelogramo equivalente a união desses dois trapézios, chamemos a área do trapézio de $s(t_{rpz})$ assim teremos: $s(BCB'D) = s(ABCD) + s(AC'B'D) = 2.s(t_{rpz}) \Rightarrow s(t_{rpz}) = \frac{(B + b).h}{2}$

Exercício 4.3. Sabemos pela obra de Arquimedes de Siracusa calcular a área de uma região delimitada por um segmento de reta e um segmento de parábola[7]. No livro *quadratura da parábola* é demonstrado que dada uma parábola segmentada por dois pontos podemos formar um triângulo cujos vértices são os extremos do segmento da parábola e o outro vértice será o ponto médio da distância entre os extremos em relação a reta diretriz, como mostra a figura: Em seu trabalho Arquimedes conseguiu demonstrar tomando os segmentos de parábola delimitados pelos três pontos do triângulo inicial conseguimos formar, pelo mesmo processo de formação do triângulo inicial, dois triângulos, cuja área de cada um é igual a um oitavo da área do triângulo inicial.

Na figura temos que a área dos triângulos hachurados é igual, cada uma, a um oitavo da área do triângulo branco.

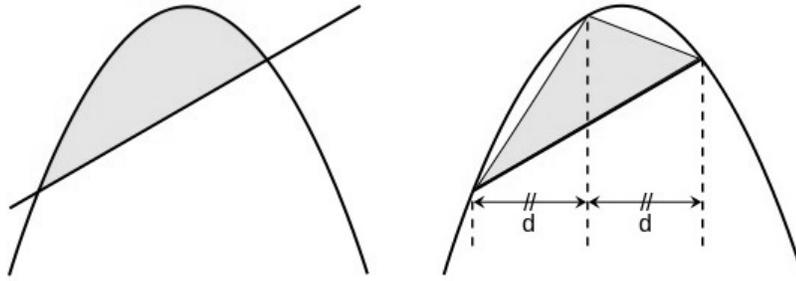


Figura 4.4: Quadratura da parábola

Com base nessa informação demonstre e indique o valor de uma região parabólica qualquer delimitada por uma parábola e um segmento de reta.

Resolução: A área da curva, que chamaremos de c_p , será menor que qualquer quantidade de triângulos, dois a dois com intercessão de medida nula, mas teremos que $\frac{s(T_n)}{8} = s(T_{n+1})$ onde T_n é um triângulo da n -ésima iteração, ora teremos então que a área de todos os triângulos até a n -ésima iteração será: $s(T_1) \sum_{i=1}^n (\frac{1}{4})^{i-1}$, pelo método da exaustão e também por indução podemos notar que $\sum_{i=1}^n (\frac{1}{4})^{i-1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{4})^{n-1}$, logo a área da figura c_p não poderá ser menor que $\frac{4}{3} \cdot s(T_1)$ pois, por absurdo $s(c_p) = X$ onde $X < \frac{4}{3} \cdot s(T_1) \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot s(T_1) - X = k$ para algum $k \in \mathbb{R}^+$, todavia $k > s(T_1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{4})^{t-1}$ para algum $t \in \mathbb{N}$, desse modo, $s(c_p) > s(T_1) \sum_{i=1}^t (\frac{1}{4})^{i-1} = s(T_1) (\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{4})^{t-1}) > \frac{4}{3} s(T_1) - k = X$, absurdo, obviamente $X > \frac{4}{3} \cdot s(T_1)$ é outro absurdo, sendo assim: $s(c_p) = \frac{4}{3} s(T_1)$ o primeiro triângulo formado no enunciado do problema.

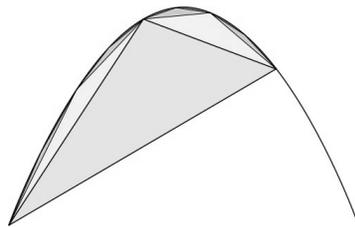


Figura 4.5: Quadratura da parábola

4.2 Sólidos do Espaço

Exercício 4.4. ([8]-p481 adaptado) Dado um octaedro regular, sabendo a medida de sua aresta, determine seu volume.

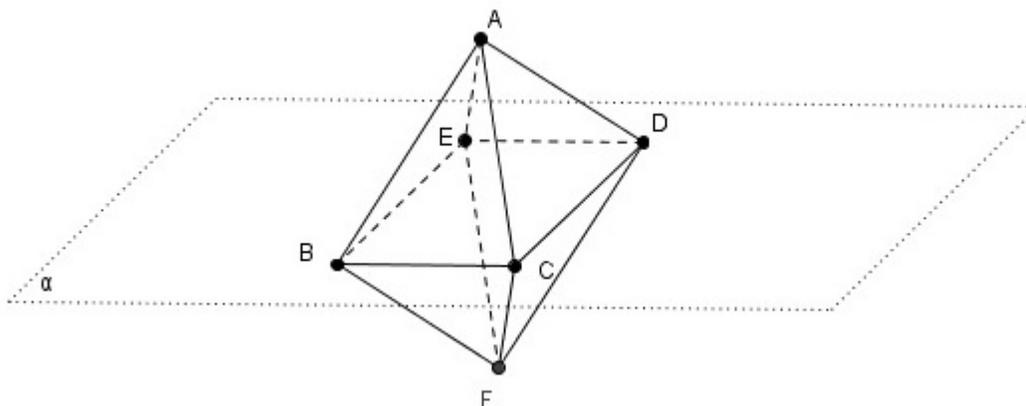


Figura 4.6: $BCDE$ notavelmente é um quadrado, e o plano α divide $ABCDEF$ ao meio, em duas pirâmides de base quadrada.

Resolução: Tomemos três vértices não pertencentes a mesma face do octaedro, no caso da figura os vértices B , C e D , tracemos um plano α por esses vértices, teremos duas pirâmides de base quadrada congruentes, logo, $v(Octa(ABCDEF)) = 2 \cdot v(Piram(ABCDE))$, temos que: $v(Piram(ABCDE)) = \frac{1}{3} \cdot s(BCDE) \cdot h$, agora tracemos o segmento AF , sua intersecção com o plano α será um ponto O , é notável que $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

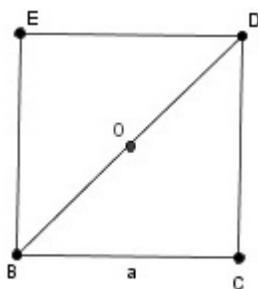


Figura 4.7: $BCDE$ é quadrado e O é ponto médio de BD , então claramente temos $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

E temos ainda, tomando agora o triângulo ABO , que: $h = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Desse modo:

$$v(Octa(ABCDEF)) = 2 \cdot v(Piram(ABCDE)) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot s(BCDE) \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

cqd.

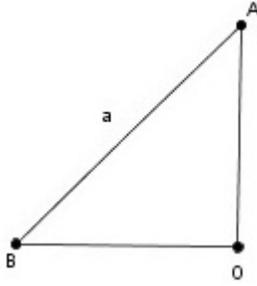


Figura 4.8: ABO é retângulo, e $OB = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$, então $OA = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$

Exercício 4.5. ([9] adaptado) Dado um tronco de pirâmide de base quadrada, sabendo as medidas dos lados das bases e a altura do tronco, determine seu volume.

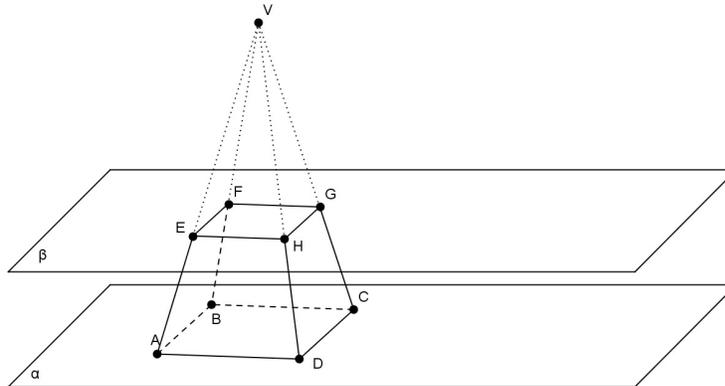


Figura 4.9: $ABCD$ e $EFGH$ quadrados, $AB \parallel EF$ e a altura h é a distância entre os planos α e β

Resolução: Tomemos, por simplicidade, um tronco onde o vértice imaginário tenha projeção nos planos da base pertencente a base. Nomeemos as partes do tronco conforme a figura 31, é fácil ver que a união do tronco dado com a pirâmide de vértice V e base quadrada $EFGH$ será a pirâmide de vértice V e base $ABCD$, logo: $v(Piram(ABCD)) = v(Piram(EFGH)) + v(T_\text{tronco})$, o que implica dizer:

$$v(T_\text{tronco}) = v(Piram(ABCD)) - v(Piram(EFGH)), \text{ logo:}$$

$v(T_\text{tronco}) = \frac{s(ABCD) \cdot (l + h)}{3} - \frac{s(EFGH) \cdot l}{3}$, onde l é a distância entre V e o plano β da base menor do tronco. Chamemos de a e b as medidas dos lados dos quadrados, agora tracemos um plano γ paralelo a AD e que contenha V e seja perpendicular a α e β teremos então nesse plano a seguinte figura:

Pela figura é fácil notar $AB \equiv A'B'$ e $EF \equiv E'F'$, chamemos essas medidas de a e b respectivamente, é notável que $\frac{l}{b} = \frac{l+h}{a}$ o que implica em: $l = \frac{bh}{a-b}$ e $l+h = \frac{ah}{a-b}$ substituindo

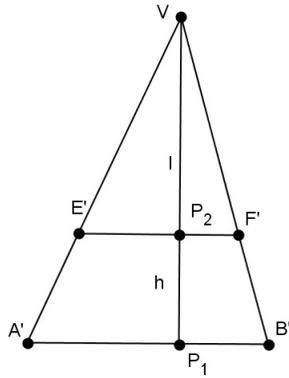


Figura 4.10: $A'B' = ABCD \cap \gamma$, $E'F' = EFGH \cap \gamma$ e $A'B' \perp VP_1$

esses valores na equação do volume teremos:

$$v(T_{ronco}) = \frac{s(ABCD).(l+h)}{3} - \frac{s(EFGH).l}{3} = \frac{a^2.ah}{3(a-b)} - \frac{b^2.(bh)}{3(a-b)} = \frac{h(a^3 - b^3)}{3(a-b)} \implies$$

$$\implies v(T_{ronco}) = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Nota: Utilizando **P11** com algumas adaptações é fácil notar que:

$$v(T_{ronco}) = h \cdot \frac{s(B_{ase}) + \sqrt{s(B_{ase}) \cdot s(b_{ase})} + s(b_{ase})}{3} \text{ onde } s(B_{ase}) \text{ e } s(b_{ase}) \text{ são as áreas das bases maior e menor de um tronco qualquer, respectivamente.}$$

Capítulo 5

Considerações finais

O cálculo de medidas, como pode ser visto em [8] é um trabalho mais computacional que matemático, ideal para um caráter mais generalista, onde se formam alunos de ensino básico que não necessariamente tem interesse em se aprofundar no estudo da matemática, mas o professor precisa ter esse estudo apresentado, todo professor matemático precisa ter uma visão mais axiomática dos teoremas que trabalha em sala de aula, e com a devida transposição didática, pode trabalhar os conceitos desse trabalho em sala de aula.

Referências Bibliográficas

- [1] COMMANDINO, Frederico. *Euclides - Elementos de Geometria*. São Paulo: Edições Cultura, 1944.
- [2] ALLAN, N.D. *Teoremas de Menelaus e Ceva*. Unesp - São Paulo. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/arquimedes/coroa.htm>>. Acesso em: 23 ago. 2014.
- [3] SANTOS, Almir Rogério Silva; VIGLIONI, Humberto Henrique de Barros. *Geometria Euclidiana Plana*. Aracaju: UFS, 2011.
- [4] MACHADO, Paulo Antônio Fonseca. *Fundamentos de Geometria Espacial*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.
- [5] AMORIM, Edgar P. M. *A teoria da Relatividade Espacial*. Joinville: CCT-UDESC, 2011.
- [6] OLIVEIRA, Oswaldo Rio Branco de. *INTEGRAL DUPLA: TEOREMA DE FUBINI E TEOREMA DE MUDANC, A DE VARIAVEIS* Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/oliveira/MAT211INTEGRACAO.pdf>>. Acesso em: 23 agov. 2013.
- [7] *The Quadrature of the Parabola*. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/The_Quadrature_of_the_Parabola>. Acesso em: 23 agov. 2013.
- [8] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática*. Vol 2. São Paulo: Moderna, 1995.
- [9] *Papiro de Moscovo*. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/moscovo.htm>>. Acesso em: 23 agov. 2013.
- [10] REIS, Júlio César dos. *Existe ângulo zero?. Cálculo: Matemática para todos*. Edição 23. São Paulo: Segmento, 06/2013.