

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

*Homotetia e Semelhança de Triângulos : Uma Proposta de Ensino Utilizando
Materiais Concretos e Manipuláveis*

Edson Soares Filho

MANAUS

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Edson Soares Filho

*Homotetia e Semelhança de Triângulos : Uma Proposta de Ensino Utilizando
Materiais Concretos e Manipuláveis*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Programa de Mestrado Profissional em Matemá-
tica da Universidade Federal do Amazonas, como
requisito parcial para obtenção do título de Mestre
em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata

MANAUS

2014

EDSON SOARES FILHO

Homotetia e Semelhança de Triângulos : Uma Proposta de Ensino Utilizando
Materiais Concretos e Manipuláveis

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Programa de Mestrado Profissional em Matemá-
tica da Universidade Federal do Amazonas, como
requisito parcial para obtenção do título de Mestre
em Matemática.

Aprovado em 20 de Outubro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Presidente

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
Membro

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Membro

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela saúde física e mental.

À minha mãe, Dona Edézia Damasceno Soares, pela educação e por ter me colocado no caminho dos números.

Ao meu pai, Sr. Edson Soares Homem (*in memoriam*), pela dedicação como pai de família.

À minha amada esposa, Edilene, pelo companheirismo e incentivo nos momentos mais difíceis durante o curso.

Aos meus amados filhos, Talita, Tammi e Rodrigo, minhas pedras preciosas.

Ao meu orientador Prof. Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata, pela dedicação e paciência no desenvolvimento deste projeto.

Ao Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pela dedicação e incentivo no decorrer do curso.

Ao Prof. Dr. Carlos Wagner do Nascimento, pela amizade e companheirismo.

À Prof^a Dra. Inês Padilha de Oliveira, pelo incentivo e apoio no início deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto, pelo apoio e amizade.

À Prof^a. Dr^a. Flávia Morgana Jacinto, pelo apoio e dedicação.

Aos professores Marcus Marrocos, Disney Douglas e Edson Martins, pelas aulas que muito me enriqueceram.

Aos meus colegas e amigos de turma, pelo compartilhamento de informações e conhecimento durante o curso e em especial ao amigo Rogério Jacinto.

RESUMO

Este trabalho foi motivado pela nossa inquietação como professor-educador, quanto às dificuldades enfrentadas pelos alunos do nono ano do Ensino Fundamental na compreensão do conceito de semelhança de triângulos, bem como à sua aplicação em situações-problema encontradas no cotidiano. Como fundamentação teórica, recorremos à História da Geometria, aos teóricos que estudaram as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem da matemática, as orientações pedagógicas dos Parâmetros Curriculares Nacionais e um estudo das Transformações Geométricas, que preservam as distâncias(isometrias) e as que não preservam as distâncias mas preservam os ângulos(homotetias). A metodologia utilizada foi a pesquisa-ação, que nasce da necessidade de aproximação entre a teoria e a prática e se caracteriza pela intervenção no decorrer do processo. Esta pesquisa foi realizada em duas turmas de uma Escola Estadual, que nos revelou alguns fatores que interferem na construção do conceito de semelhança de triângulos. Para validar nossas hipóteses, desenvolvemos dois modelos diferentes de ministrar o mesmo conteúdo: Um deles introduzindo o conceito de Homotetia e o outro apenas o de semelhança de triângulos, acompanhado de atividades em equipe e individual. Uma das hipóteses está associada à prática docente, que depende dos saberes científicos, dos saberes docentes e dos recursos didáticos utilizados. Como intervenção didática, sugerimos algumas atividades com materiais concretos e manipuláveis que contribuem para a construção do conceito de semelhança de triângulos.

Palavras-chave: Homotetia , Semelhança de triângulos , Materiais concretos, Ensino - aprendizagem.

ABSTRACT

This academic work was motivated by our concern as a teacher-educator, about the difficulties faced by students of the ninth year of Elementary School in understanding the concept of similar triangles, as well as their application in problem situations posed in daily life. As a theoretical basis, we resort to the History of Geometry, to theorists who have studied the difficulties in the process of mathematics teaching and learning, pedagogical guidelines of the National Curriculum Guidelines and a study of Geometric Transformations that preserve distances (isometries) and those that do not preserve distances but preserve angles (homotheties). The methodology was action research, which is born of the need for closer ties between theory and practice and is characterized by the intervention during process. This research was conducted in two groups of a State School, who has revealed some factors that interfere with the construction of the concept of similar triangles. To validate our hypotheses, we developed two ways to teach the same content: the first by introducing the concept of homotheties and the other only through similar triangles, accompanied by activities in groups and individually. One hypothesis is associated with teaching practice, which depends on scientific knowledge, of teaching knowledge and teaching resources used. As didactic intervention, we suggest some activities with concrete manipulatives and contributing to the construction of the concept of similar triangles.

Keywords: Homotheties, similarity of triangle, concrete materials and teaching - learning process,

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\ v\ $	Norma de v .
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\geq$	Maior ou igual.
$\leq$	Menor ou igual.
$\equiv$	Congruente.
$\in$	Pertence a.
$\langle a, b \rangle$	Produto interno de a e b .
$\overrightarrow{AB}$	Reta AB .
$\overline{AB}$	Medida do segmento AB .
AB	Segmento AB .
$\hat{A}$	Ângulo A .
$\text{sen } \theta$	Seno do ângulo θ .
$\text{cos } \theta$	Cosseno do ângulo θ .
A	Área de um Triângulo.

Sumário

Introdução	1
1 Um pouco de história da Geometria	3
2 Fundamentos Matemáticos : Transformações Geométricas	10
2.1 Translações	10
2.2 Rotações	11
2.3 Reflexões	13
2.4 Transformações de semelhança	15
2.5 Homotetias	18
2.6 Semelhança de triângulos	20
3 Fundamentos pedagógicos	23
4 Metodologia do Trabalho	28
5 A Homotetia no ambiente educacional	30
6 Procedimentos Metodológicos	35
7 Análise dos Resultados da Pesquisa	50
Considerações Finais	53
Referências Bibliográficas	54

Introdução

Ao longo de dez anos, ministrando o componente curricular Matemática, na Educação Básica, percebemos uma grande dificuldade dos estudantes em assimilar a noção de semelhança de triângulos, bem como de compreender os critérios de semelhança e a aplicabilidade desse conhecimento matemático no seu cotidiano.

Diante dessa situação e considerando o desempenho de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, pretendemos investigar quais fatores estão interferindo na construção do conceito de semelhança de triângulos e suas propriedades, e alvitrar a introdução do conceito de homotetia, além de atividades práticas com material concreto, que possibilitem um aprendizado mais significativo, explorando a contextualização e interdisciplinaridade.

Nos últimos anos, conforme resultados da Prova Brasil, os estudantes não obtiveram sucesso no componente curricular matemática, demonstrando mau desempenho, em especial, quanto ao descritor D7, cujo tema é Espaço e Forma, estabelecendo: 'Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram.'

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) da Educação Básica preocupam-se com o desenvolvimento de um ensino contextualizado e interdisciplinar que contribua para a relação teoria e prática. Partindo dessa premissa, exames nacionais de larga escala, como a Prova Brasil, por exemplo, buscam verificar se a escola está cumprindo efetivamente o seu papel de ensinar e promover a aprendizagem dos estudantes, procurando desenvolver competências básicas para o exercício da cidadania. Assim, uma alternativa didática que contribui para o aprendizado do estudante é a utilização do material concreto, que deve ser manipulado pelo discente, tornando-se um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático (Reys, 1971).

A metodologia empregada neste trabalho é a pesquisa-ação, pois trata-se de uma pesquisa de base empírica e social, que consiste na descrição, observação e ação de situações reais. Além disso, ela é realizada para resolução ou esclarecimento de um problema que ocorre com os estudantes no qual o pesquisador e os participantes desempenham um papel ativo, executando de fato uma ação, de modo cooperativo e participativo diante da situação em que estão envolvidos. (THIOLLENT, 1998).

O Capítulo 1 apresenta um pouco de história da Geometria, partindo da origem da Matemática Grega, com Tales de Mileto, passando pelos Elementos de Euclides de Alexandria

e, por fim, abordando Felix Klein com a classificação das geometrias, baseada nos grupos de transformações, através do Programa de Erlanger (1872).

No Capítulo 2, faz-se uma exposição das transformações geométricas, destacando-se as isometrias, que preservam as distâncias e as homotetias, que preservam ângulos, mas não preservam as distâncias.

No Capítulo 3, apresentamos a fundamentação teórica pedagógica a respeito dos saberes docentes, das dificuldades de aprendizagem em matemática e a importância da utilização dos materiais concretos e manipuláveis.

No Capítulo 4, apresentamos a metodologia do trabalho, a pesquisa-ação. Definimos e destacamos algumas características da pesquisa-ação.

No Capítulo 5, dedicamo-nos às atividades práticas com material concreto, de situações-problema, visando à aproximação das noções abstratas de Homotetia e semelhança de triângulos com a utilidade desses conceitos em problemas reais.

No Capítulo 6, dedicamo-nos à investigação em sala de aula, acompanhando uma aula com o tema 'Semelhança de Triângulos e aplicações', outra aula com o tema 'Homotetia, semelhança de triângulos e o cotidiano' e, em seguida, uma avaliação de habilidades em resolver problemas que envolvem semelhanças de triângulos.

No Capítulo 7, dedicamos as análises dos resultados da pesquisa, bem como o confronto dos resultados com as hipóteses estabelecidas inicialmente.

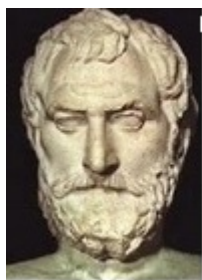
Finalmente, apresentamos as verificações das dificuldades na aprendizagem dos estudantes e as possíveis respostas às questões surgidas durante o desenvolvimento do trabalho.

Capítulo 1

Um pouco de história da Geometria

No início da civilização, o homem descobriu dois conceitos matemáticos: a multiplicidade e o espaço. A primeira noção envolvia a contagem de animais, dias, dentre outras coisas; a segunda envolvia o cálculo de áreas de terras produtivas e volume de água. Essas noções deram origem aos dois principais ramos da matemática: Aritmética e Geometria. A palavra Geometria deriva do grego *geo*, que significa terra, e *metrein*, que significa medida; portanto, medida da terra. A matemática dos egípcios e dos babilônios foi essencialmente baseada na experiência com a natureza. Tradicionalmente acredita-se que a matemática demonstrativa surgiu, pela primeira vez, no século VI a.C.

O Agrimensor Tales de Mileto, foi quem deu um raciocínio lógico a vários resultados elementares sobre círculos e ângulos de triângulos, aplicando a intuição e a experimentação.

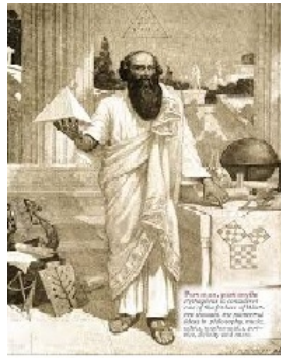


"A coisa mais difícil na vida
é conhecer a si mesmo"
Tales de Mileto

Figura 1.1: Tales de Mileto

Em seguida, surgiu um dos maiores matemáticos gregos: Pitágoras de Samos, nascido em 572 a.C. Ele fundou a Escola Pitagórica que estudava Filosofia, Matemática e Ciências Naturais, e que também era uma sociedade onde eram praticados ritos secretos. Os pitagóricos acreditavam na importância dos números inteiros como base dos fenômenos da natureza. Eles nos deixaram dois importantes resultados: Teorema de Pitágoras e as quantidades irracionais que representaram um enorme golpe contra a supremacia dos números inteiros.

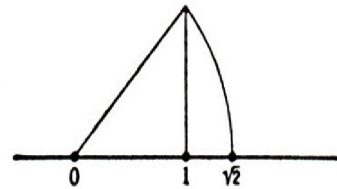
Ao pitagórico Híppasus é atribuída a descoberta de que a medida do lado de um quadrado e a medida de sua diagonal são incomensuráveis, isto é, um quadrado de lado de medida 1 tem uma diagonal de comprimento um número irracional. Ele mostrou que os números



"O número é a substância
de todas as coisas"
Pitágoras de Samos

Figura 1.2: Pitágoras

inteiros eram insuficientes para representar todos os comprimentos geométricos. Essa descoberta estabeleceu uma importância maior da geometria em relação à aritmética em todos os matemáticos gregos seguintes. Por todos os problemas causados por Hippasus, os pitagóricos o levaram para o Mediterrâneo e o mataram lançando-o ao mar, sinalizando, assim, os perigos inerentes ao livre pensamento.



Hippasus de Metaponto

Figura 1.3: Hippasus

Mesmo na austera disciplina da matemática, são atribuídas a Hipócrates de Chios, nascido em 440 a.C., duas contribuições significativas para a geometria. A primeira foi a composição dos primeiros elementos e a segunda foi a exposição lógica desenvolvida dos teoremas de geometria a partir de alguns axiomas e postulados.

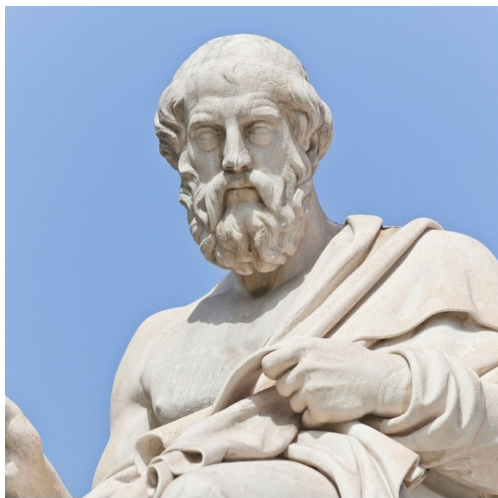
Platão (427 – 347a.C.) estudou filosofia em Atenas com Sócrates. Depois, em suas viagens estudou matemática com Teodoro de Cirene, no norte da África. Ao retornar, em 387 a.C., fundou uma academia. A influência de Platão sobre a matemática não foi devida a descobertas matemáticas, mas sim a sua convicção de que o estudo da matemática fornecia o melhor exercício para a mente. No portal da Academia estava escrito: Que não entre ninguém que não saiba geometria.

Aristóteles, discípulo de Platão, era um filósofo e sua contribuição para a matemática foi a análise das definições e hipóteses matemáticas. A Academia de Platão produziu alguns



Hipócrates de Chios,
escreveu o livro "Os
elementos de
Geometria", que trata
dos problemas
clássicos: A quadratura
do círculo e a
duplicação do cubo.

Figura 1.4: Hipócrates



"Aqueles que contam
a história governam a
sociedade" (Platão
427 - 347 a.C.)

Figura 1.5: Platão

matemáticos importantes, dos quais se destaca Eudoxus (408 – 355a.C.). Com a descoberta dos incomensuráveis, certas provas dos pitagóricos de alguns teoremas de geometria (relacionados a triângulos semelhantes) tornaram-se falsas. Eudoxus desenvolveu a teoria das proporções que contornou esses problemas. Essa teoria se encaminhou diretamente para o trabalho de Dedekind (Corte de Dedekind) no século XIX. Sua grande contribuição foi o método da exaustão, com aplicações na determinação de áreas e volumes de figuras geométricas sofisticadas. Esse processo foi utilizado por Arquimedes na determinação da área de um círculo. O método de exaustão é considerado o precursor geométrico da noção moderna de limite no cálculo integral. Menaecmus (380 – 320a.C.), discípulo de Eudoxus, descobriu as seções cônicas. Há uma história lendária de que Alexandre, o Grande (356 – 323a.C.) teria perguntado ao seu mestre Menaecmus, como poderia aprender geometria de forma concisa, e este teria respondido: Oh rei, por todo o país, existem estradas reais e estradas para os cidadãos comuns, mas na geometria existe um caminho para todos.

Alexandre entrou no Egito e se estabeleceu na Cidade de Alexandria, na foz do

Nílo, em 332 a.C. Essa cidade cresceu rapidamente e atingiu uma população de meio milhão no período de três décadas. O império de Alexandre desmoronou após sua morte. Em 306 a.C., um dos seus generais, Ptolomeu, filho de Lagos, declarou-se rei Ptolomeu I estabelecendo a dinastia ptolomaica. O museu e a biblioteca de Alexandria foram construídos por Ptolomeu I. Alexandria logo seria reconhecida como o centro cultural mais importante do mundo. Em determinado momento, a biblioteca tinha mais 600 mil rolos de papiro. Alexandria mantinha, na metrópole, intelectuais gregos até sua destruição em 641 d.C. pelos árabes.

Dentre os estudiosos atraídos por Alexandria, por volta de 300 a.C. destaca-se Euclides, que fundou uma escola de matemática. Ele escreveu "Os Elementos". Este teve uma profunda influência sobre o pensamento ocidental, uma vez que foi estudado e analisado por séculos. Os Elementos foi dividido em treze livros e continha 465 proposições de geometria plana, geometria sólida e teoria dos números. Sua genialidade não era tanto na criação de uma nova matemática, mas sim na apresentação da matemática antiga, de forma clara, lógica e organizada, fornecendo um método axiomático do conteúdo. Os Elementos possui 23 definições, 5 postulados e 5 noções comuns. Destes, ele provou sua primeira proposição. Todos os resultados subsequentes foram obtidos a partir de uma combinação de suas definições, postulados, axiomas e proposições previamente comprovadas.



"Não existe
caminho real para a
Geometria"
(Euclides de
Alexandria)

Figura 1.6: Euclides

Para ilustrar a abordagem sistemática que Euclides usou em seus elementos, incluímos a seguir um extrato do Livro I, que hoje corresponde a um capítulo:

Definições:

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.

7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo.
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
12. E agudo, o menor do que um reto.
13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
16. E o ponto é chamado centro do círculo.
17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que o círculo em dois.
18. E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo.
19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.
20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.
21. E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.
22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas sejam chamadas trapézios.
23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Noções comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo é maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

Com o aparecimento de diversas geometrias, na segunda metade do século XIX, surge a necessidade de uma codificação e sintetização dessas geometrias com o objetivo de ordená-las e classificá-las. Em 1872, designado para a Faculdade de Filosofia e o Conselho da Universidade de Erlanger, Felix Klein, em sua aula inaugural sobre teoria dos grupos, apresentou uma notável definição de 'uma geometria', que contribuiu para a codificação das geometrias existentes e possibilitou novos horizontes para a pesquisa em geometria. Esse programa de estudos de geometria ficou conhecido como Programa de Erlanger.



Figura 1.7: Felix Klein

De forma sucinta, o Programa de Erlanger defende que a geometria é a investigação das propriedades das figuras que preservam algumas medidas quando submetidas a um grupo de transformações. Para a geometria métrica euclidiana plana, o grupo de transformações é o conjunto de rotações e translações do plano; para a geometria projetiva plana, o grupo de transformações é o conjunto das chamadas transformações projetivas planas; para a topologia, o grupo das transformações é o conjunto de todas as transformações topológicas. Além disso,

cada geometria tem seu grupo de transformações de controle subjacente. Com isso, se alguém criasse uma nova geometria teria a liberdade de escolher os elementos básicos como ponto, reta, círculo, esfera, etc., depois o espaço desses elementos e, finalmente, o grupo de transformações ao qual o espaço está sujeito. O Programa de Erlanger, defende a classificação das geometrias existentes, além da criação e do estudo de novas geometrias.

Por muito tempo a geometria esteve relacionada com o espaço físico, também conhecida como geometria primitiva ou geometria subconsciente. Com a evolução da inteligência humana, surge a geometria científica, que se caracteriza pela generalização.

Capítulo 2

Fundamentos Matemáticos : Transformações Geométricas

Transformações geométricas são objetos matemáticos com muita aplicação nas diversas áreas do conhecimento, como na computação gráfica, nos movimentos e deformações de objetos. Neste capítulo, teremos a oportunidade de fazer um estudo sobre as diversas transformações geométricas, que preservam as distâncias como as translações, rotações e reflexões (isometrias); e as que não preservam as distâncias como as ampliações e reduções (homotetias).

2.1 Translações

A translação é uma transformação que preserva a distância entre quaisquer dois pontos e a direção da reta definida por eles, ou seja:

Definição 2.1. *Sejam dois pontos distintos A e B , do plano π . A transformação $T_{AB} : \pi \rightarrow \pi$ é uma função assim definida : dado $X \in \pi$, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$, é o quarto vértice do paralelogramo que tem $\overline{AB}$ e $\overline{AX}$ como lados. (LIMA,p.18)*

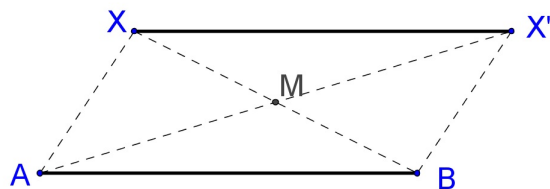


Figura 2.1: paralelogramo

É importante perceber que essa definição de T_{AB} se aplica apenas quando A , B e X são não colineares. Se X pertence à reta AB , sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ fica caracterizada

pelo fato de que os segmentos de reta AX' e BX têm o mesmo ponto médio M . Assim, se quisermos construir X' geometricamente a partir de A , B e X tomamos o ponto médio M do segmento BX e prolongamos o segmento AM até X' de modo que $\overline{MX'} = \overline{AM}$.

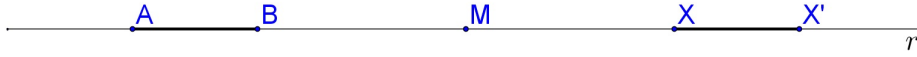


Figura 2.2: Reta r contendo A , B e X

Na definição de T_{AB} , é importante considerar a ordem em que são mencionados os pontos A e B . A translação T_{AB} é diferente de T_{BA} . Na realidade, tem-se que $T_{BA} = (T_{AB})^{-1}$. Na linguagem da Álgebra Linear, podemos definir a translação do seguinte modo:

Definição 2.2. *Seja $B \in \mathbb{R}^2$. Uma translação é uma transformação $T : E^2 \rightarrow E^2$, definida pela expressão $T(X) = X + B$, $T(0) = B$.*

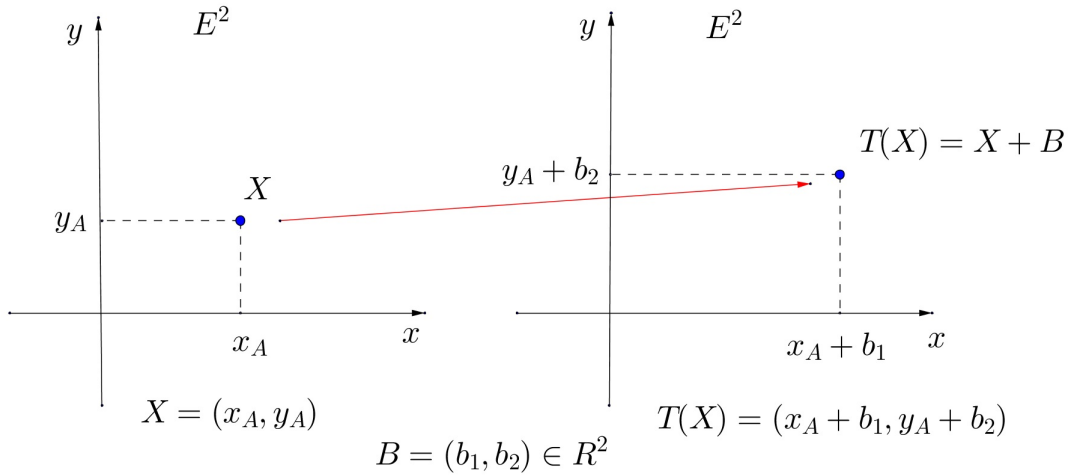


Figura 2.3: Translação $T(X) = X + B$

2.2 Rotações

Outro tipo de transformação que preserva distâncias é a rotação. Aqui, todo o plano é girado sobre algum ponto através de um determinado ângulo. Assim, o tamanho e forma de qualquer figura são mantidos invariantes, mas todos os seus pontos se movem ao longo de arcos de círculos concêntricos. O centro (*que pode pertencer ou não à figura a ser girada*) é o único ponto que permanece fixo, ou seja:

Definição 2.3. Sejam O um ponto tomado no plano π e $\alpha = \widehat{AOB}$ um ângulo de vértice O . A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha}(X) : \pi \rightarrow \pi$, assim definida: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$ em π , $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano π tal que $d(X, O) = d(X', O)$, $\widehat{XOX'} = \alpha$ e o sentido de rotação de A para B é o mesmo de X para X' . (LIMA, p.21)

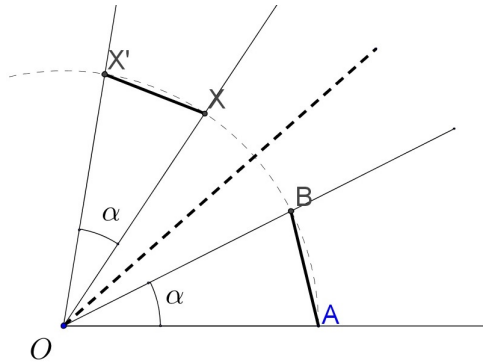


Figura 2.4: Rotação de um segmento AB

Uma outra forma de definir rotação é a seguinte:

Definição 2.4. Uma rotação de ângulo θ com centro na origem é uma transformação linear $R_\theta : E^2 \rightarrow E^2$ que goza da propriedade: para quaisquer $\theta \in \mathbb{R}$, $u \in E^2$ e $v \in E^2$, tem-se:

$$\langle R_\theta \cdot u, R_\theta \cdot v \rangle = \langle u, v \rangle, \det(R_\theta) = 1.$$

Em outras palavras, quando giramos um vetor, a norma do vetor não se altera. Seja $r = \|v\|$, onde $v = (x, y)$.

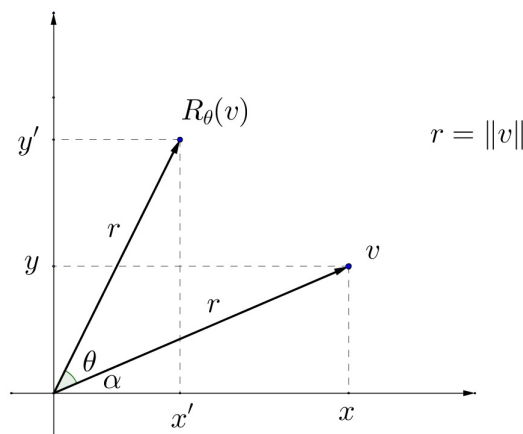


Figura 2.5: Rotação do vetor v

Observando a figura 2.5 e aplicando relações trigonométricas, temos:

$$x' = r \cdot \cos(\alpha + \theta) = r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta) - r \cdot \sin(\alpha) \sin(\theta).$$

Mas,

$$r \cdot \cos(\alpha) = x \text{ e}$$

$$r \cdot \sin(\alpha) = y.$$

Então,

$$x' = x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta).$$

Analogamente,

$$y' = r \cdot \sin(\alpha + \theta) = r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\theta) + r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta).$$

Daí, temos que:

$$y' = y \cdot \cos(\theta) + x \cdot \sin(\theta) = x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta).$$

Assim,

$$R_\theta(x, y) = (x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta), x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta)).$$

2.3 Reflexões

Um terceiro tipo de transformação que preserva a distância é a reflexão sobre uma reta, denominada espelho. Cada ponto no espelho é invariante, ou seja, é a sua própria imagem. Uma definição é a seguinte:

Definição 2.5. *Seja r uma reta no plano π . A reflexão em torno da reta r é a função $R_r : \pi \rightarrow \pi$, assim definida: $R_r(X) = X'$ para todo $X \notin r$ e, para $X \in r$, $R_r(X) = X$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r . Em outras palavras, seja Y o pé da perpendicular baixada de X sobre r . Então, Y é o ponto médio do segmento XX' . (LIMA, p.16)*

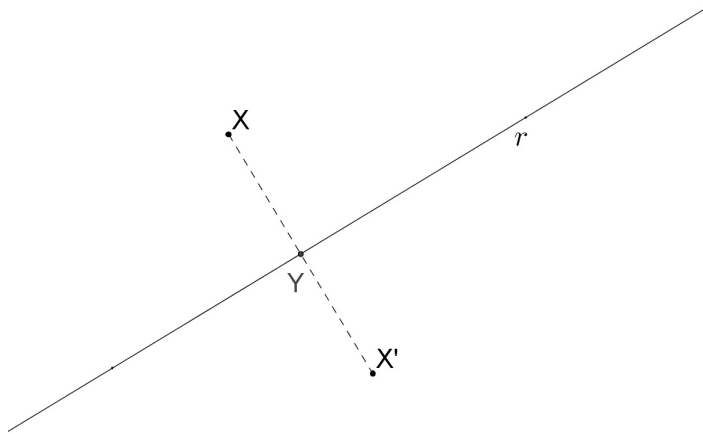


Figura 2.6: Reflexão do ponto X em relação à reta r

Na linguagem da Álgebra Linear, temos:

Definição 2.6. *Reflexão no plano em torno do eixo dos x, é uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(v) = v'$, em que $v = (x, y)$ e $v' = (x, -y)$.*

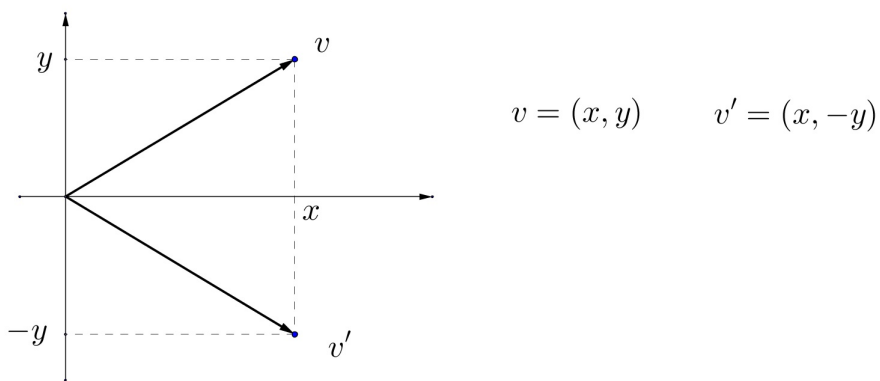


Figura 2.7: Reflexão do vetor v em torno do eixo dos x

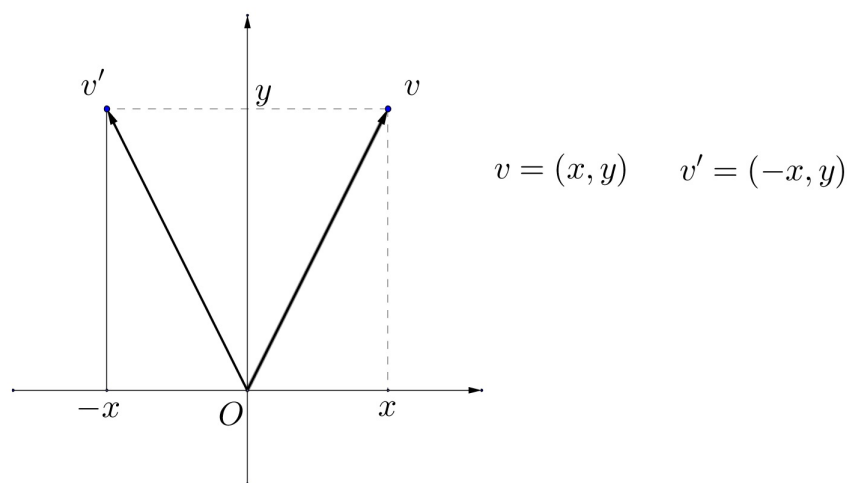


Figura 2.8: Reflexão do vetor v em torno do eixo dos y

Definição 2.7. Reflexão em torno dos eixos dos y é uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(v) = v'$, em que $v = (x, y)$ e $v' = (-x, y)$.

Definição 2.8. Reflexão na origem, é uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(v) = v'$, em que $v = (x, y)$ e $v' = (-x, -y)$.

Definição 2.9. Reflexão em torno da reta $y = x$, é uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(v) = v'$, em que $v = (x, y)$ e $v' = (y, x)$.

Definição 2.10. Reflexão em torno da reta $y = -x$, é uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(v) = v'$, em que $v = (x, y)$ e $v' = (-y, -x)$.

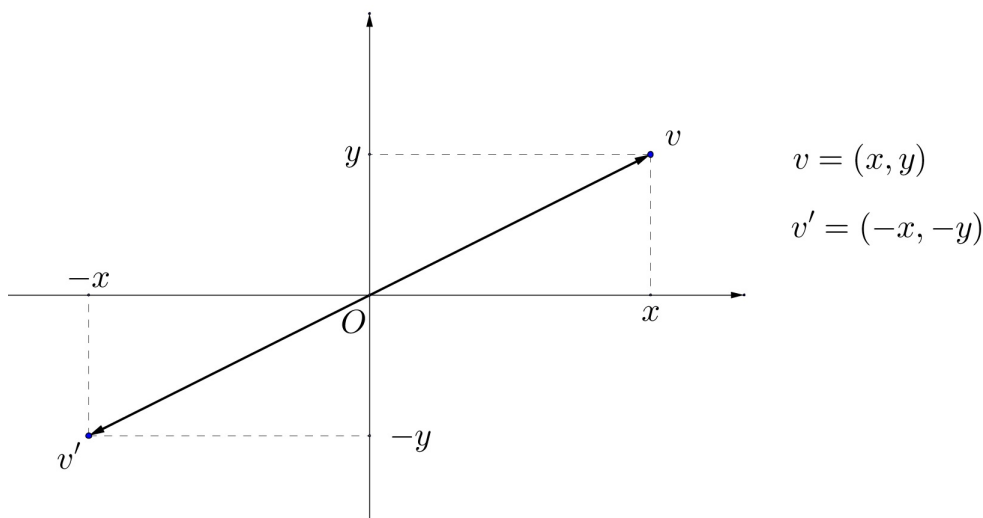


Figura 2.9: Reflexão do vetor v em torno da origem

2.4 Transformações de semelhança

As transformações apresentadas até agora têm uma característica em comum: elas transformam cada figura em uma figura congruente. Todas as transformações que têm a propriedade de preservar distâncias são chamadas de transformações de congruência ou isometrias. É possível, todavia, fazer um bom uso de uma transformação que muda cada figura em uma figura semelhante. Tal semelhança preserva ângulos, embora possa alterar distâncias. Estamos nos referindo às transformações de semelhança.

Definição 2.11. *Sejam F e F' duas figuras geométricas e k um número real positivo. Dizemos que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança k , se existe uma bijeção $\varphi : F \rightarrow F'$, entre os pontos de F e os pontos de F' , tal que*

$$\overline{\varphi(A)\varphi(B)} = k \cdot \overline{AB}, \text{ para quaisquer pontos } A \in F \text{ e } B \in F.$$

A bijeção $\varphi : F \rightarrow F'$, chama-se uma semelhança de razão k entre as figuras geométricas F e F' . Com o intuito de simplificar, utilizaremos a notação $A' = \varphi(A)$ e $B' = \varphi(B)$ as imagens dos pontos A e B , pela bijeção φ .

Toda figura geométrica F é semelhante a si mesma, pois a aplicação identidade $\varphi : F \rightarrow F$, é uma semelhança de $k = 1$. Além disso, se F é semelhante a F' , então F' é semelhante a F , pois se $\varphi : F \rightarrow F'$ é uma semelhança de razão k , então a inversa $\varphi^{-1} : F' \rightarrow F$, é uma semelhança de razão $\frac{1}{k}$. Finalmente, se F é semelhante a F' e F' é semelhante a F'' , então F é semelhante a F'' . De fato, se $\varphi_1 : F \rightarrow F'$ e $\varphi_2 : F' \rightarrow F''$ são semelhantes de razões k_1 e k_2 , respectivamente, então a composta $\varphi_2 \circ \varphi_1 : F \rightarrow F''$ é igual a uma semelhança de razão $k_1 \cdot k_2$. Isso mostra que a semelhança é uma relação de equivalência.

Definição 2.12. *Uma semelhança de razão $k = 1$ é chamada de isometria. Neste caso, dizemos que as figuras F e F' são congruentes.*

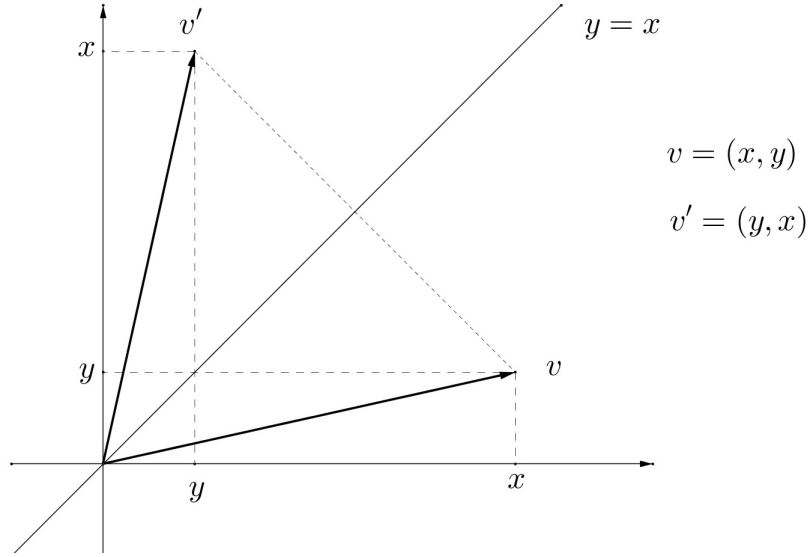


Figura 2.10: Reflexão do vetor v em torno da reta $y = x$

Lema 2.1. *Toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.*

Demonstração:

Sejam $\varphi : F \rightarrow F'$ uma semelhança de razão k e três pontos A, B e C pertencentes a F , tais que C pertence ao segmento AB . Provemos que C' pertence ao segmento $A'B'$. De fato, como $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, temos que: $\overline{A'C'} + \overline{C'B'} = k \cdot \overline{AC} + k \cdot \overline{CB} = k \cdot (\overline{AC} + \overline{CB}) = k \cdot \overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Logo, C' pertence ao segmento $A'B'$.

Definição 2.13. *Seja O um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de centro O e raio r , é o conjunto de todos os pontos do plano tais que $\overline{OP} \leq r$.*

Proposição 2.1. *Toda semelhança $\varphi : F \rightarrow F'$ de razão k transforma todo segmento contido em F num segmento contido em F' .*

Demonstração: Dados um segmento AB contido em F e um ponto C pertencente a AB , o ponto C' pertence ao segmento $A'B'$, em virtude do Lema 2.1. Reciprocamente, dado um ponto C' em $A'B'$, tem-se $C' = \varphi(C)$, onde $C = \varphi^{-1}(C')$. Como φ^{-1} é uma semelhança, segue do Lema 2.1 que o ponto C pertence ao segmento AB . Portanto, φ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos dos segmentos AB e $A'B'$.

Proposição 2.2. *Toda semelhança $\varphi : F \rightarrow F'$ de razão k transforma um círculo de raio r contido em F num círculo de raio kr em F' .*

Demonstração:

Um círculo de centro O e raio r , contido em F , é a reunião de todos os segmentos OX tais que $\overline{OX} = r$. Sua imagem por φ é a reunião dos segmentos $O'X'$ tais que: $\overline{O'X'} = k \cdot \overline{OX}$, ou seja, é o círculo de centro O' e raio kr .

Proposição 2.3. *Toda semelhança $\varphi : F \rightarrow F'$ de razão k transforma pontos interiores a F em pontos interiores a F' .*

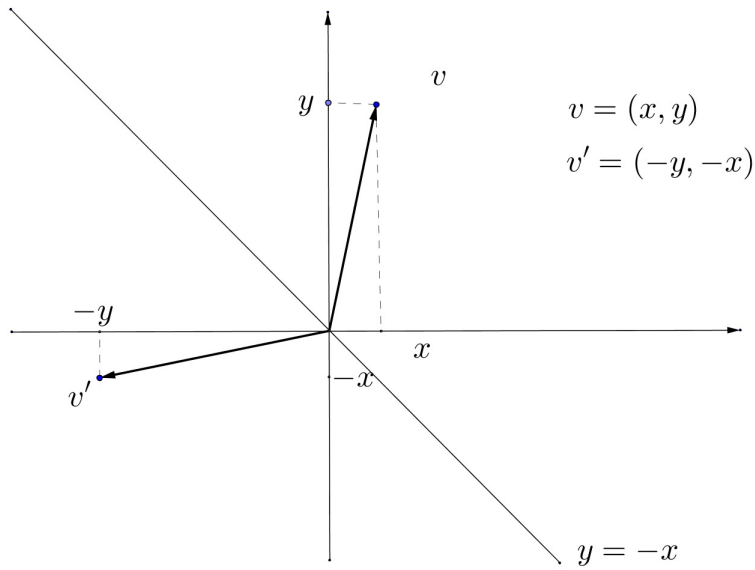


Figura 2.11: Reflexão do vetor v em torno da reta $y = -x$

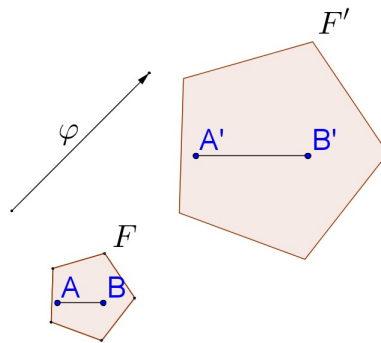


Figura 2.12: Figuras semelhantes

Demonstração:

Dizemos que um ponto X está no interior de uma figura F se é centro de algum círculo inteiramente contido em F . Sua imagem X' , pela proposição 2.2, o centro de um círculo de raio kr contido em F' . Portanto, X' é ponto interior de F' .

Proposição 2.4. Toda semelhança $\varphi : F \rightarrow F'$ de razão k transforma pontos da fronteira de F em pontos da fronteira de F' .

Demonstração: Dizemos que um ponto X pertence à fronteira de uma figura F se $X \in F$, mas não é interior a F . Nesse caso, o ponto X' deve pertencer à fronteira de F' pois, se X' estivesse no interior de F' , então, em virtude da proposição 2.3, $X = \varphi^{-1}(\varphi(X))$ também estaria no interior de F .

Proposição 2.5. Sejam F e F' polígonos. Toda semelhança $\varphi : F \rightarrow F'$ de razão k transforma vértices de F em vértices de F' .

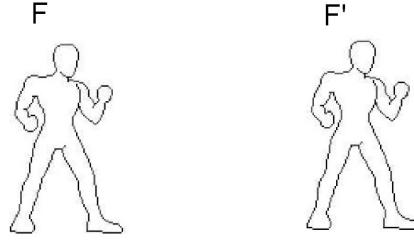


Figura 2.13: Figuras congruentes

Demonstração: Seja X um vértice de F . Em particular, X está na fronteira de F e, pela proposição 2.4, sua imagem X' está na fronteira de F' . Se X' não fosse vértice, X' pertenceria a um lado $A'B'$ de F' , sendo diferente de A' e B' . Mas isso implicaria que X pertence ao lado AB de F , com $X \neq A$ e $X \neq B$, logo X não seria vértice de F .

2.5 Homotetias

Uma transformação de semelhança muito interessante é a homotetia. A partir dela e das isometrias, todas as outras semelhanças podem ser construídas.

Definição 2.14. *Seja um ponto arbitrário O fixado no plano e seja k um número real positivo. Uma homotetia de centro O e razão k é a aplicação φ do plano no plano, tal que $\varphi(O) = O$ e, para todo $X \neq O$, $X' = \varphi(X)$ é o ponto da semirreta S_{OX} tal que $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$.*

Uma homotetia de razão 1 é simplesmente a aplicação identidade. Uma homotetia de centro O transforma toda reta que passa por O em si mesma. Além disso, toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão $\frac{1}{k}$.

Teorema 2.1. *Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou numa reta paralela.*

Demonstração:

Seja φ uma homotetia de centro O e razão k . Note que o caso $k = 1$ é trivial, pois φ é a identidade. Supondo então $k \neq 1$, considere dois pontos quaisquer X e Y . Se X , Y e O são não colineares, pela hipótese:

$\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$ e $\overline{OY'} = k \cdot \overline{OY}$, e sabendo que:

$\text{Área}(\triangle OXY') = k \cdot \text{Área}(\triangle OXY)$ e $\text{Área}(\triangle OYX') = k \cdot \text{Área}(\triangle OXY)$, temos que,

$\text{Área}(\triangle OXY') = \text{Área}(\triangle OYX')$.

Subtraindo de ambos os membros a área do triângulo comum OXY , resulta:

$\text{Área}(\triangle XYX') = \text{Área}(\triangle XYY')$.

Como esses triângulos têm a mesma base XY , da igualdade de suas áreas segue-se que suas alturas são congruentes. Logo, XY é paralelo a $X'Y'$.

Por outro lado, temos que

$$A(\triangle YOX) + A(\triangle YXX') = k.A(\triangle YOX) \quad (2.1)$$

$$A(\triangle YOX) + A(\triangle YXX') + A(\triangle X'YY') = k.A(\triangle OYX') = k.(A(\triangle YOX) + A(\triangle YXX')) \quad (2.2)$$

Subtraindo, obtemos:

$$A(\triangle X'YY') = k.A(\triangle YXX') \quad (2.3)$$

Como XY e $X'Y'$ são paralelos, os triângulos $X'YY'$ e YXX' têm a mesma altura.

Assim, a razão $k = \frac{A(\triangle X'YY')}{A(\triangle YXX')}$, é igual à razão entre suas bases, ou seja, $\frac{X'Y'}{XY} = k$. Isso conclui a demonstração.

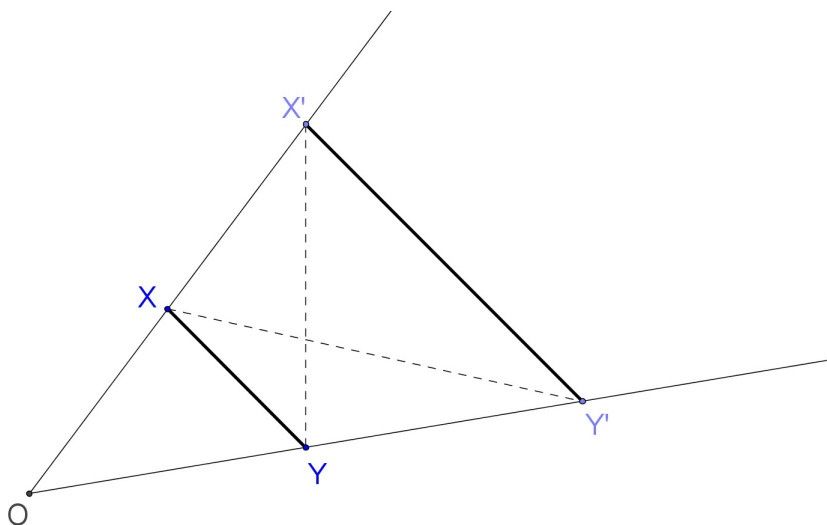


Figura 2.14: Segmentos homotéticos

Corolário 2.1. Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo, que intersecta os outros dois lados, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

Demonstração:

Dado um triângulo ABC , considere uma reta paralela ao lado BC , intersectando os lados AB e AC nos pontos D e E , respectivamente. Afirmamos que os triângulos ABC e ADE são semelhantes. De fato, considere a homotetia φ de centro A e raio $k = \frac{AB}{AD}$. Observe que φ transforma em B e E num ponto C' sobre a semirreta S_{AC} . A imagem de DE por φ é o segmento BC' , paralelo a DE . Assim, C' pertence às retas $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$, isto é, $C' \equiv C$.

Portanto, $\varphi(A) = A\varphi(D) = B$ e $\varphi(E) = C$, ou seja, φ é uma semelhança entre os triângulos ADE e ABC . Em particular, obtemos: $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$.

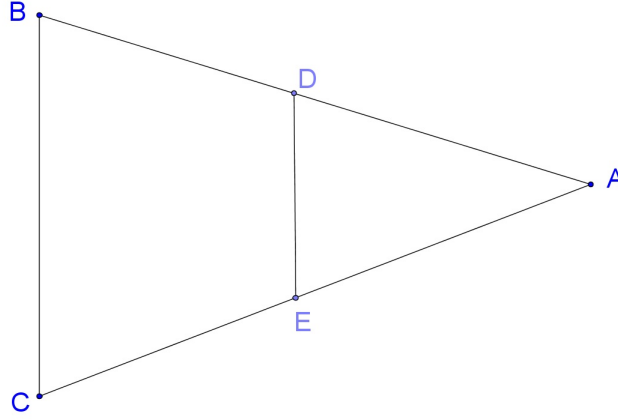


Figura 2.15: Corolário 2.1

Proposição 2.6. Num triângulo $\triangle ABC$, considere um ponto D sobre o lado AB e um ponto E sobre AC tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$. Então, DE é paralelo a BC .

Demonstração:

Considere a homotetia φ de centro A e razão $k = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$. Como $B = \varphi(D)$ e $C = \varphi(E)$, segue do Teorema 2.1 que DE e BC são paralelos.

2.6 Semelhança de triângulos

Teorema 2.2. Dois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais. Reciprocamente, se dois triângulos têm ângulos correspondentes congruentes ou lados correspondentes proporcionais, eles são semelhantes.

Demonstração:

Seja $\varphi : \triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$, uma semelhança de razão k entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, com $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ e $C' = \varphi(C)$.

Então, pela definição de semelhança, temos:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = k, \quad (2.4)$$

ou seja, os triângulos têm os lados correspondentes proporcionais. A fim de provar que os ângulos correspondentes são congruentes, considere a homotetia φ de centro A e razão k , tal que φ transforma o triângulo $\triangle ABC$ no triângulo parcial $\triangle AB''C''$, com $B''C''$ paralelo a BC . Assim,

$$\widehat{B''} \equiv \widehat{B} \text{ e } \widehat{C''} \equiv \widehat{C}. \quad (2.5)$$

No entanto, como $\overline{AB''} = \overline{A'B'} = k \overline{AB}$, $\overline{AC''} = \overline{A'C'} = k \overline{AC}$ e $\overline{B''C''} = \overline{B'C'} = k \overline{BC}$, os triângulos $\triangle A'B''C''$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, portanto, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Reciprocamente, sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, dois triângulos tais que $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Nas retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, considere os pontos B'' e C'' , respectivamente, tais que $AB \equiv A'B''$ e $AC \equiv A'C''$. Como $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, os triângulos $\triangle AB''C''$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes. Isso implica que $\hat{B''} \equiv \hat{B}'$, donde $\hat{B} \equiv \hat{B''}$. Portanto, as retas $\overrightarrow{B''C''}$ e $\overrightarrow{BC}$ são paralelas e, pelo corolário 2.1, os triângulos $\triangle AB''C''$ e $\triangle ABC$ são semelhantes. Como os triângulos $\triangle AB''C''$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, segue pela transitividade, que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes. Sejam agora, dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais que $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$, $\overline{A'C'} = k\overline{AC}$ e $\overline{B'C'} = k\overline{BC}$, para algum número real $k > 0$. A homotetia de centro A e razão k transforma o triângulo $\triangle ABC$ no triângulo $\triangle AB''C''$, cujos lados medem $\overline{AB''} = k\overline{AB}$, $\overline{A'C''} = k\overline{AC}$ e $\overline{B''C''} = k\overline{BC}$. Os triângulos $\triangle AB''C''$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes, pois têm os lados correspondentes congruentes. Como o triângulo $\triangle AB''C''$ é semelhante a $\triangle ABC$, pela transitividade, segue-se que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes.

Veremos, a seguir, condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Corolário 2.2. *Dois triângulos são semelhantes, se dois ângulos correspondentes são congruentes.*

Demonstração:

Sejam ABC e XYZ , dois triângulos, com $\hat{A} \equiv \hat{X}$ e $\hat{B} \equiv \hat{Y}$. Mas, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ = \hat{X} + \hat{Y} + \hat{Z}$. Logo, $\hat{C} \equiv \hat{Z}$, e o resultado segue do Teorema 2.2.

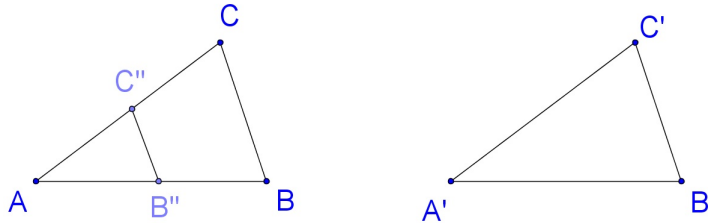


Figura 2.16: Figura do Teorema 2.2

Teorema 2.3. *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$ são semelhantes se $\hat{A} \equiv \hat{X}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{XZ}}$.*

Demonstração:

A partir dos triângulos dados, construímos um triângulo $\triangle HIJ$, tal que $HI \equiv XY$, $\hat{H} \equiv \hat{A}$ e $\hat{I} \equiv \hat{B}$. Pelo corolário 2.2, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle XIJ$, são semelhantes. Assim, $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$. Como $HI \equiv XY$, e que $\frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{XZ}}$ e a igualdade acima implicam que $HJ \equiv XZ$. Como $XY \equiv HI$ e $\hat{X} \equiv \hat{H}$. Daí segue que os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle HIJ$ são congruentes. Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle HIJ$ são semelhantes, segue por transitividade que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$ são semelhantes.

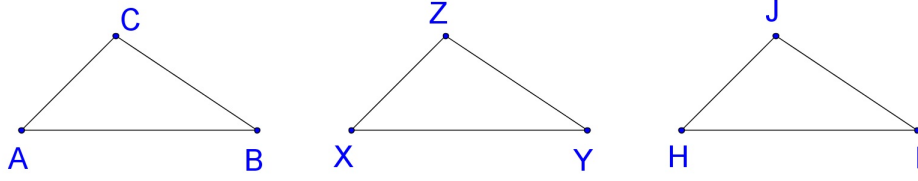


Figura 2.17: Figura do Teorema 2.3

Proposição 2.7. *Em qualquer triângulo retângulo, a altura relativa ao vértice do ângulo reto é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Demonstração:

Dado um triângulo retângulo $\triangle ABC$, com ângulo reto no vértice A , trace a altura AD relativa ao lado BC . Vamos provar que $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC}$. Como AD é perpendicular a BC , os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle ADB$ são retângulos. Como $\widehat{B} + \widehat{BAD} = 90^\circ$ e $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$, temos $\widehat{C} \equiv \widehat{BAD}$. Assim, pelo corolário 2.2, os triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDA$, são semelhantes. Dessa semelhança, decorre que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$, ou seja,

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC} \quad (2.6)$$

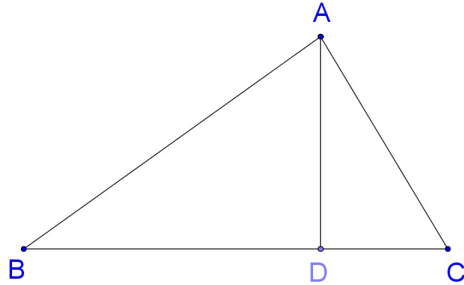


Figura 2.18: Figura da Proposição 2.7

Corolário 2.3. *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Demonstração:

Dado um triângulo retângulo $\triangle ABC$, com ângulo reto no vértice A , trace a altura AD do vértice A ao lado BC . Pela Proposição 2.7, os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ e $\triangle BDA$ são semelhantes. Da semelhança de $\triangle ADC$ e $\triangle BAC$, temos que $\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, e da semelhança entre os triângulos $\triangle BDA$ e $\triangle BAC$, temos que $\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Assim, $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$ e $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$. Portanto,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot (\overline{BD} + \overline{CD}) = \overline{BC}^2. \quad (2.7)$$

Capítulo 3

Fundamentos pedagógicos

As dificuldades de aprendizagem em matemática enfrentadas pelos estudantes do ensino fundamental do 6º ao 9º ano, são muitas e podemos começar com o problema cultural de que a matemática é uma disciplina complicada e só aprende quem é 'gênio'. Outro problema grave é a falta de preparo de alguns professores quanto aos saberes científicos e quanto aos saberes docentes adquiridos na prática em sala de aula, não sabendo aplicar metodologias adequadas para cada clientela. Além disso, a matemática, assim como outras disciplinas, necessita de pré-requisitos adquiridos pelos estudantes em anos anteriores. Destacamos a questão afetiva do estudante no processo de ensino-aprendizagem, por exemplo, uma depressão, decorrentes de problemas familiares e de relacionamento com o educador. Ademais, temos também as dificuldades cognitivas.

Para adquirirmos uma melhor compreensão dessas dificuldades, precisamos fazer um estudo mais aprofundado desses fatores. Esse tema, tem sido objeto de pesquisas, palestras, encontros, com o objetivo de descobrir as origens de tantos problemas no processo de ensino-aprendizagem. Algumas hipóteses são recorrentes, como a deficiência residir no sistema de ensino; a falta de habilidades do educador no processo; a falta de motivação dos alunos durante às aulas; dentre outras citadas no parágrafo anterior. Ao tratarmos dessas dificuldades, observamos inicialmente a questão da etiologia das dificuldades de aprendizagem em matemática (DAM), constata-se que existem muitas interrogações e, com frequência, não existe uma única causa que possa ser atribuída, mas a conjunção de várias causas. Tais causas podem ser buscadas tanto no aluno, como no educador e na metodologia empregada pelo educador. Pelo aspecto aluno, são considerados a memória, a atenção, a atividade perceptivo-motora, a organização espacial, nas habilidades verbais, a falta de consciência, as falhas estratégicas, como fatores responsáveis pelas diferenças na execução matemática (Smith e Strick, 2001).

Outra forma importante para compreender esses problemas refere-se à investigação que busca conhecer se o aluno com dificuldade de aprendizagem possui sintomas diferenciados no modo de processar os dados numéricos, ou se o processamento é semelhante ao de um aluno que não tenha essa dificuldade, existindo, no caso, uma defasagem significativa. Por isso, o diagnóstico deve identificar se os alunos com dificuldades de aprendizagem de matemática

diferem quanto aos conceitos, habilidades e execuções em relação aos seus companheiros de menor ou igual idade, que não apresentam dificuldades de aprendizagem. Trata-se, portanto, de determinar se os que apresentam dificuldades de aprendizagem alcançam seu conhecimento aritmético de maneira qualitativamente distinta daquelas sem essas dificuldades, ou, ao contrário, adquirem esse conhecimento do mesmo modo, porém com ritmo diferente.

Sanchez (2004), destaca que as dificuldades de aprendizagem em Matemática podem se manifestar nos seguintes aspectos:

Dificuldades em relação ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática; do tipo da conquista de noções básicas e princípios numéricos, da conquista da numeração, quanto à prática das operações básicas, quanto à mecânica ou quanto à compreensão do significado das operações.

Dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidade para analisar o problema e raciocinar matematicamente.

Dificuldades relativas à própria complexidade da matemática, como seu alto nível de abstração e generalização, a complexidade dos conceitos e algoritmos. A hierarquização dos conceitos matemáticos, o que implica ir assentando todos os passos antes de continuar, o que nem sempre é possível para muitos alunos; a natureza lógica e exata de seus processos, algo que fascinava os pitagóricos, dada sua harmonia e sua 'necessidade', mas que se torna muito difícil para certos alunos; a linguagem e a terminologia utilizadas, que são precisas, que exigem uma captação (nem sempre alcançada por certos alunos), não só do significado, como da ordem e da estrutura em que se desenvolve.

Podem ocorrer dificuldades mais intrínsecas, como bases neurológicas alteradas. Atrasos cognitivos generalizados ou específicos. Problemas linguísticos que se manifestam na matemática; dificuldades atencionais e motivacionais; dificuldades na memória, etc.

Dificuldades originadas no ensino inadequado ou insuficiente, seja porque a organização do mesmo não está bem sequenciado, ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes; seja porque os conteúdos não se ajustam às necessidades e ao nível de desenvolvimento do aluno, ou não estão adequados ao nível de abstração, ou não se treinam as habilidades prévias; seja porque a metodologia é muito pouca motivadora e muito pouca eficaz. (p. 174)

Dentre os cinco aspectos acima citados, este trabalho se dedica aos tópicos que se referem às dificuldades associadas à prática docente.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática no ensino fundamental estão pautados nos seguintes princípios:

A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar.

A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente.

A atividade matemática escolar não é 'olhar para as coisas prontas e definitivas',

mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.

No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a falar e a escrever sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.

A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.

A seleção e organização de conteúdos não deve ter como critério único a lógica interna da Matemática. Deve-se levar em conta sua relevância social e a contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno. Trata-se de um processo permanente de construção.

O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.

Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo ensino-aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática.

A avaliação é parte do processo de ensino-aprendizagem. Ela incide sobre uma grande variedade de aspectos relativos ao desempenho dos alunos, como aquisição de conceitos, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atividades. Mas também devem ser avaliados aspectos como seleção e dimensionamento dos conteúdos, práticas pedagógicas, condições em que se processa o trabalho escolar e as próprias formas de avaliação.

A Matemática é uma área do conhecimento que estabelece uma vasta quantidade de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, contribuindo para a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

A maioria dos estudantes tem apresentado um baixo rendimento no índice de proficiência em matemática. Algumas avaliações são realizadas em âmbito nacional com o objetivo de identificar o nível de proficiência dos alunos nessa área do conhecimento; é o que faz, por exemplo, o Sistema de Avaliação da Educação Básica-SAEB. Tal avaliação é realizada a cada

dois anos e verifica o conhecimento de alunos em relação às disciplinas Português e Matemática.

Um outro fato importante no processo de ensino-aprendizagem, é a análise das variáveis envolvidas nesse processo, tais como aluno, professor e o saber matemático. Na relação desses três elementos, é fundamental que o professor identifique as principais características da Matemática, seus métodos, suas ramificações e aplicações; conheça a história de vida dos alunos, sua vivência em suas comunidades, observando suas condições sociológicas, psicológicas e culturais; tenha clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a sua prática docente está diretamente ligada a essas concepções.

A priori, acredita-se que o professor de matemática com licenciatura esteja preparado para transmitir o saber matemático aos seus alunos. Todavia, é importante observar como e onde os saberes docentes se desenvolvem. Para Tardif (2005), a relação dos docentes com os saberes não se reduz a uma função de transmissão dos conhecimentos já constituídos. Sua prática integra diferentes saberes, com os quais o corpo docente mantém diferentes relações. Podemos definir o saber docente como um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experiências. Segundo o autor, os saberes da formação profissional é o conjunto de saberes transmitidos pelas instituições de formação de professores. O professor e o ensino constituem objetos de saber para as ciências humanas e as da educação. Os saberes disciplinares correspondem aos discursos, objetivos, conteúdos e métodos a partir dos quais a instituição escolar categoriza e apresenta os saberes sociais por ela definidos e selecionados como modelo de cultura erudita.

Os experienciais são constituídos pelo professor durante o exercício de suas funções e na prática de sua profissão. São saberes específicos, baseados em seu trabalho cotidiano e no conhecimento do seu meio. Nasceram da experiência e são por ela validados. Os saberes docentes influenciam diretamente no processo de ensino-aprendizagem. E, assumindo a abordagem de ensino, no contexto sócio-histórico, compreendemos a importância de considerar a história de vida do aluno e a do professor no processo de ensinar e aprender. A presença física do aluno em sala de aula está imbricada na cultura, nos conflitos, desejos e ideais construídos no seu contexto social. E os saberes, os desejos e as insatisfações do professor também se constituem ao longo de sua trajetória de vida. Por isso, o processo educativo é trilateralmente ativo: o aluno, o professor e o meio existente entre eles são ativos (VIGOTSKI, 2003, p.79). Para o autor, o homem não tem acesso direto aos objetos, mas acesso mediado, por meio de recortes do real, operados pelos sistemas simbólicos de que dispõe, portanto enfatiza a construção do conhecimento como uma interação mediada por várias relações, ou seja, o conhecimento não está sendo visto como uma ação do sujeito sobre a realidade, mas pela mediação feita por outros. Sacristán (2000), enfatiza que, quanto mais ambiciosas forem as pretensões que se tenham para que a instituição escolar cumpra com os alunos, tanto mais complexo e mais ambíguo é o currículo e a preparação do professor nos quais se representarão os conteúdos para alcançar esses objetivos.

Os materiais concretos e manipuláveis são importantes recursos didáticos que auxiliam o professor na sala de aula. Estes materiais tornam as aulas mais dinâmicas e atraentes aos alunos, pois aproximam os conceitos matemáticos com seu alto nível de abstração e generalização, das situações-problema do cotidiano. De acordo com Lorenzato(2006), o professor tem um papel importante no sucesso ou fracasso escolar do aluno, pois não basta o professor dispor de um bom material didático para que se tenha a garantia de uma aprendizagem significativa. Mais importante do que isso é saber utilizar corretamente estes materiais em sala de aula(LORENZATO,2006)

Capítulo 4

Metodologia do Trabalho

A metodologia deste trabalho é a pesquisa-ação, que, por definição, é um tipo de pesquisa participante engajada, em oposição à pesquisa tradicional, que é considerada como independente, não-reativa e objetiva. Como o próprio nome diz, a pesquisa-ação procura unir a pesquisa à ação ou prática (DE KETELE, 1993), isto é, desenvolver o conhecimento e a compreensão como parte da prática. É, portanto, uma maneira de se fazer pesquisa em situações em que também se é uma pessoa da prática e se deseja melhorar a compreensão desta.

A pesquisa-ação nasce da necessidade de aproximação entre a teoria e a prática. Esse tipo de pesquisa se caracteriza pela intervenção na prática de modo inovador já no decorrer do próprio processo de pesquisa e não apenas como possível consequência de uma recomendação na etapa final do projeto.

Um dos precursores na pesquisa-ação foi o psicólogo alemão Kurt Lewin (1890-1947). Na década de 1960, na área de sociologia, rapidamente ganhou terreno a ideia de que o cientista deveria sair do seu isolamento, assumindo as consequências dos resultados de suas pesquisas e colocá-los em prática, para interferir no curso dos acontecimentos. Além de sua aplicação em ciências sociais e psicologia, a pesquisa-ação tem conquistado espaço na área do ensino atualmente. Nela, desenvolveu-se como resposta às necessidades de implementação da teoria educacional na prática da sala de aula. Antes disso, a teoria e a prática não eram percebidas como partes integrantes da vida profissional de um professor, e a pesquisa-ação começou a ser implementada com a intenção de ajudar os professores na solução de seus problemas encontrados em sala de aula, envolvendo-os na pesquisa; por exemplo, possibilitava avaliar empiricamente o resultado de crenças e práticas em sala de aula. Nesse sentido, esse tipo de pesquisa é, sem dúvida, atrativa pelo fato de poder levar a um resultado específico imediato, no contexto do ensino-aprendizagem. Além disso, a pesquisa-ação em sala de aula também se revelou como um instrumento eficiente para o desenvolvimento profissional dos professores. Esse tipo de pesquisa, constitui um meio de desenvolvimento profissional de "dentro para fora", pois parte das preocupações e interesses das pessoas envolvidas na prática, envolvendo-as em seu próprio desenvolvimento profissional (NUNAN, 1993). Na abordagem contrária e tradicional, que é a abordagem de "fora para dentro", um perito de fora traz as novidades ao homem

da prática, na forma de seminários, por exemplo. Estas duas abordagens de desenvolvimento profissional correspondem a dois modos de encarar a natureza da pesquisa (NUNAN, 1993). A primeira, parte do pressuposto de que as verdades científicas existem no mundo externo, cabendo ao cientista apenas descobri-las. Conforme o segundo modo de encarar a natureza da pesquisa, não há verdades científicas absolutas, pois todo conhecimento científico é provisório e depende do contexto histórico, no qual os fenômenos são observados e interpretados. Além disso, os próprios padrões de pesquisa estão sujeitos à mudança, à luz da prática, não havendo, portanto uma metodologia científica universal e histórica. A pesquisa-ação se aproxima mais deste segundo modo de ver a natureza da pesquisa. Se, de acordo com ela, os conhecimentos científicos são provisórios e dependentes do contexto histórico, os professores, como seres humanos da prática educacional, ao invés de serem apenas os consumidores da pesquisa realizada por outros, deveriam transformar suas próprias salas de aula em objetos de pesquisa. Nesse contexto, a pesquisa-ação é o instrumento ideal para uma pesquisa relacionada à prática.

Além da área educacional, a pesquisa-ação pode ser aplicada em qualquer ambiente de interação social que se caracterize por um problema, no qual estão envolvidos pessoas, tarefas e procedimentos.

Capítulo 5

A Homotetia no ambiente educacional

O ensino de Geometria pode ser divertido e interessante. A nossa intenção é propor atividades utilizando material concreto que façam com que o estudante do 9º ano do Ensino Fundamental possa se interessar mais pela Geometria, construindo o seu próprio conhecimento matemático.

ATIVIDADE 1 - Estimando a altura de um edifício

Esta atividade consiste em estimar a altura de um edifício utilizando uma fotografia de um aluno e o edifício. O material utilizado é uma câmera de um telefone celular, uma régua milimetrada e uma trena.



Figura 5.1: O aluno e o edifício

Para realizar esta atividade, precisamos fazer três medidas: Na fotografia, as alturas do edifício e do aluno, com uma régua milimetrada e a altura real do aluno com uma trena.

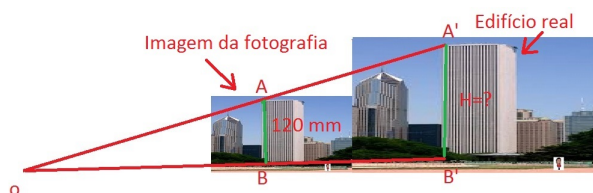


Figura 5.2: O aluno e o edifício

Observando as figuras 5.2 e 5.3 e aplicando o conceito de homotetia, encontramos a altura estimada do edifício.

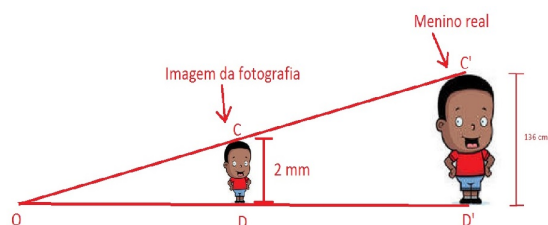


Figura 5.3: Triângulos Homotéticos

ATIVIDADE 2 - Estimando o diâmetro da Lua

Nesta atividade, a Lua vai ser representada por uma esfera de isopor. O material utilizado é uma caixa retangular com cinco faces opacas e uma face de papel impermeável, conforme figura 5.4.

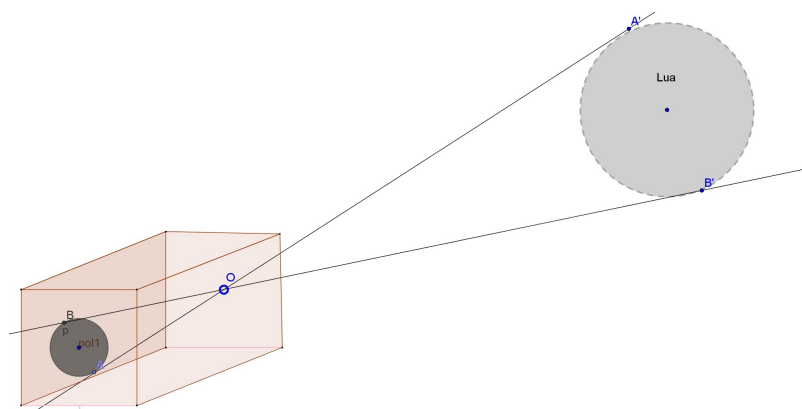


Figura 5.4: Câmara escura com orifício

Para realizar esta atividade, precisamos das seguintes medidas: comprimento do caixa, da distância do orifício até a Lua e o diâmetro da imagem da Lua no fundo da caixa, conforme figura 5.5. Observando a semelhança dos triângulos homotéticos e aplicando a propriedade de semelhança determinamos o diâmetro da Lua.

ATIVIDADE 3 - Estimando o tamanho de uma aranha

Para fazer esta estimativa, vamos utilizar os seguintes materiais: uma aranha, uma lanterna, um anteparo e uma fita métrica. Observando a figura 5.6 e aplicando a propriedade nos triângulos homotéticos, conseguimos calcular o tamanho da aranha, a partir das distâncias da lanterna até a aranha, da aranha até o anteparo e o tamanho da sombra da aranha no anteparo.

ATIVIDADE 4 - Fazendo gravuras com figuras homotéticas

Esta atividade é artística, utilizando folhas de isopor como tela, tinta para isopor, régua, compasso, estilete, lápis e muita criatividade. Observe alguns exemplos: Figuras 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10.

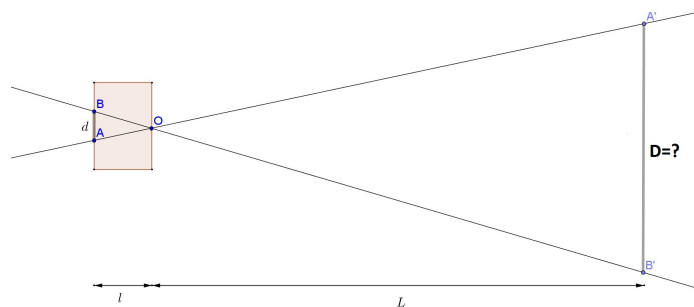


Figura 5.5: Câmara escura com orifício e a Lua

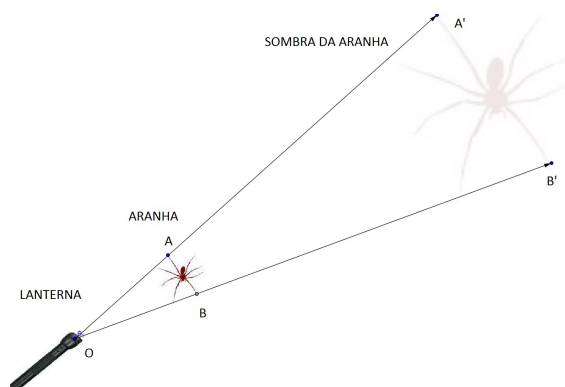


Figura 5.6: Uma aranha e sua sombra

ATIVIDADE 5 - Fazendo esculturas de arame

Nesta atividade o material utilizado é arame fino e flexível, tinta para arame, alicate e uma folha de isopor. Vejamos os exemplos nas figuras 5.11 e 5.12.

ATIVIDADE 6 - Construindo uma sapateira homotética

Nesta atividade são necessárias um pedaço de compensado, serrote, cordas de algodão e uma furadeira elétrica. A figura 5.13 apresenta um modelo.

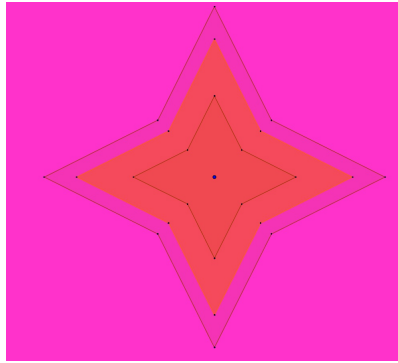


Figura 5.7: Polígonos não convexos

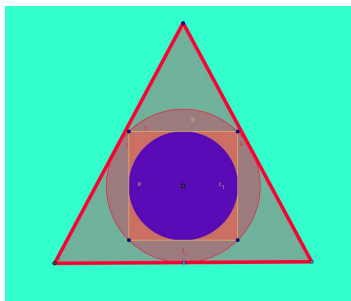


Figura 5.8: Inscrição e Circunscrição



Figura 5.9: A Pipa e os triângulos

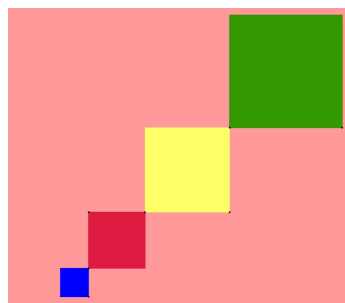


Figura 5.10: Dilatação

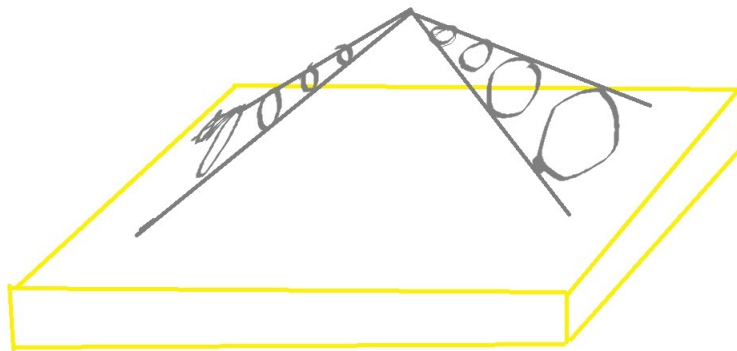


Figura 5.11: Círculos homotéticos

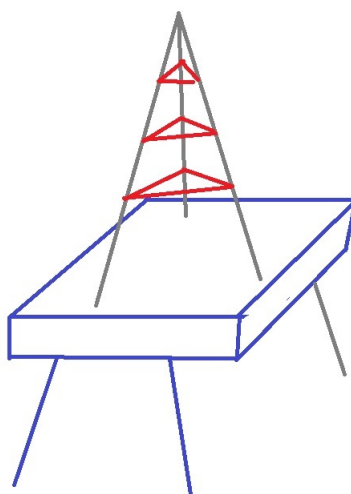


Figura 5.12: Triângulos Homotéticos

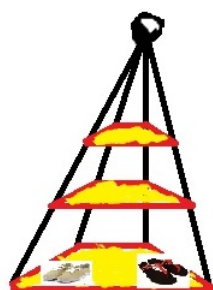


Figura 5.13: Sapateira Homotética

Capítulo 6

Procedimentos Metodológicos

A pesquisa foi realizada numa Escola Estadual, no período de 08 de setembro a 18 de setembro de 2014, nas turmas 9º.A e 9º.B, no turno matutino, do seguinte modo:

1ª. Etapa: Ministração das aulas na turma 9º.A.

Em três aulas, o professor ministrou o conteúdo utilizando o seguinte modelo de aula sobre semelhança de triângulos: O tema da aula foi 'Semelhança de triângulos e aplicações', distribuídas da seguinte maneira:

1ª. Aula : O professor definiu polígonos semelhantes, apresentando alguns exemplos; conceituou triângulos semelhantes, apresentando as propriedades decorrentes da definição; encerrou esta aula com os critérios de semelhança de dois triângulos semelhantes e a resolução de dois exercícios de fixação.

2ª. Aula : O professor propôs uma série de exercícios em duplas. Ele ainda se colocou a disposição dos alunos para tirar as dúvidas existentes.

3ª. Aula : O professor aplicou uma avaliação individual de habilidades adquiridas pelos alunos a respeito de semelhança de triângulos.

Relatório da 1ª aula no dia 08 de setembro:

O professor começou a aula de forma expositiva, utilizando o projetor de slides. Observamos que dos 26 alunos presentes, 11 alunos estavam dispersos e 15 atentos à explicação. No momento das resoluções dos exercícios, apenas 8 alunos estavam motivados a participar da resolução, dando respostas e fazendo perguntas. A figura 5.1, apresenta os slides da aula expositiva.

Relatório da 2ª aula no dia 09 de setembro:

Ao chegar em sala, o professor organizou as duplas de alunos e propôs uma atividade, contendo 5 itens conforme a figura 5.2:

Analisando as 14 duplas presentes, obtemos os seguintes resultados: quatro duplas responderam apenas o primeiro item, identificando a semelhança dos triângulos, mas não conseguindo identificar o caso de semelhança. Seis duplas responderam apenas os dois primeiros itens, sendo que, três duplas acertaram o primeiro item e somente três duplas acertaram os dois itens corretamente. Duas duplas responderam os três primeiros itens, sendo que acertaram

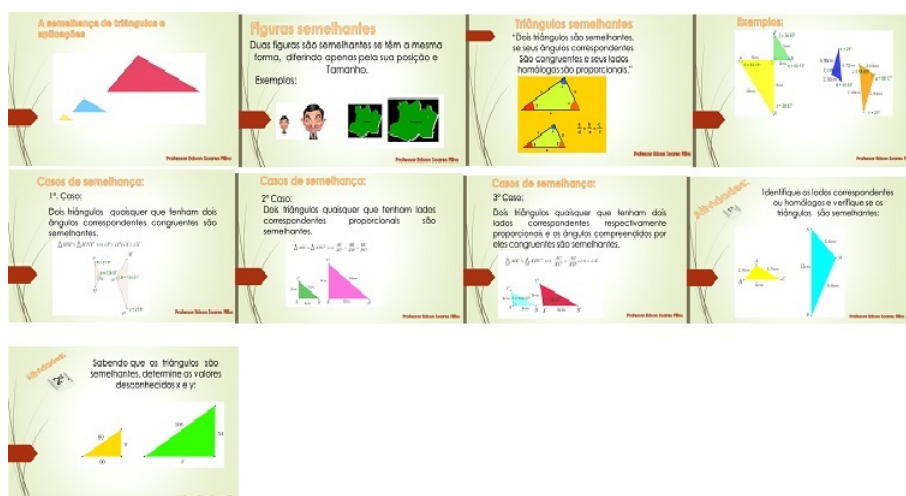


Figura 6.1: Slides da 1ª, Aula

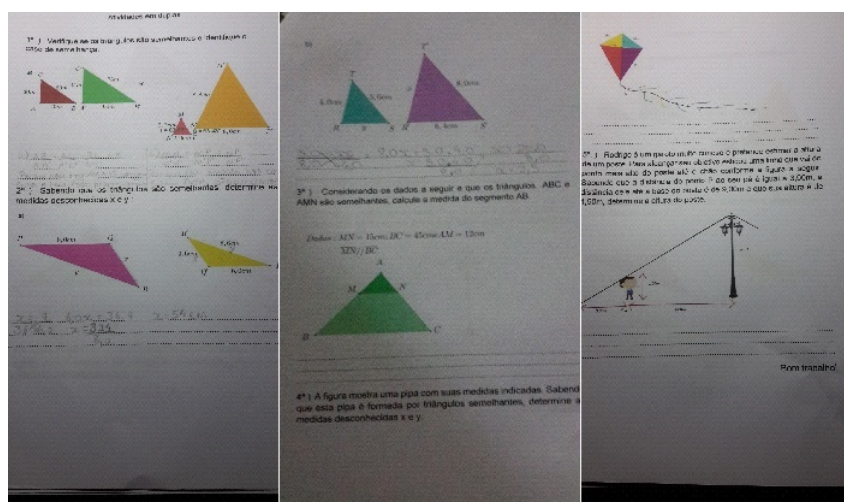


Figura 6.2: Atividades de semelhança de triângulos

apenas os dois primeiros itens. Duas duplas não conseguiram responder nenhum dos itens da atividade.

Relatório da 3ª aula no dia 10 de setembro:

Nesse dia, o professor aplicou uma avaliação individual, contendo 5 itens e obteve os seguintes resultados:

Dos 25 alunos presentes, 4 não conseguiram responder a avaliação, ou por falta de interesse ou por não terem assimilado o conteúdo. 4 conseguiram responder apenas o primeiro item de forma incompleta. 9 conseguiram responder os dois primeiros itens, acertando parcialmente. 6 conseguiram responder os três primeiros itens de forma incompleta. E, apenas 2 alunos responderam a avaliação integralmente, sendo que acertaram os dois primeiros itens, ao passo que os três últimos itens acertaram parcialmente.

Destacamos a avaliação da aluna Isabel, conforme figura 5.3, 5.4 e 5.5.

No primeiro item, a aluna Isabel conseguiu justificar a semelhança dos triângulos

através de cálculos, mas não conseguiu argumentar utilizando o conceito de polígonos semelhantes.

No segundo item, conseguiu encontrar a medida x do triângulo amarelo, aplicando corretamente a propriedade fundamental de triângulos semelhantes.

No terceiro item, classificou corretamente o caso de semelhança dos triângulos da letra "a", mas não conseguiu classificar os triângulos da letra "b".

No quarto item, trocou a ordem das medidas na aplicação da proporção para determinar a medida da altura da árvore.

Finalmente, no quinto item, cometeu o mesmo erro na aplicação da propriedade fundamental de semelhança de triângulos.

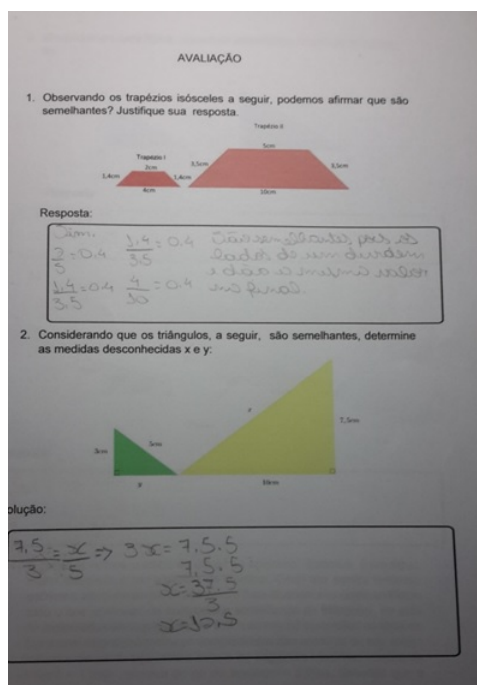


Figura 6.3: Avaliação da aluna Isabel da turma A(1ª parte)

2ª. Etapa: Ministração das aulas na turma 9º.B.

Uma semana depois, o professor se encontrou com a turma 9º.B e, em quatro aulas, executou o segundo modelo de aula sobre semelhança de triângulos. As aulas com o tema 'Homotetia, semelhança de triângulos e o cotidiano' foram distribuídas da seguinte maneira:

1ª. Aula : O professor apresentou o conceito de homotetia, semelhança de figuras semelhantes, semelhança de triângulos e os critérios de semelhança de triângulos. Ele encerrou essa aula com a resolução de dois exercícios.

2ª. Aula : O professor e os alunos realizaram 7 atividades práticas, explorando o material concreto e fazendo a interdisciplinaridade com os componentes curriculares Artes e Física, destacando a relação entre a homotetia e a semelhança de figuras, em particular a semelhança de triângulos.

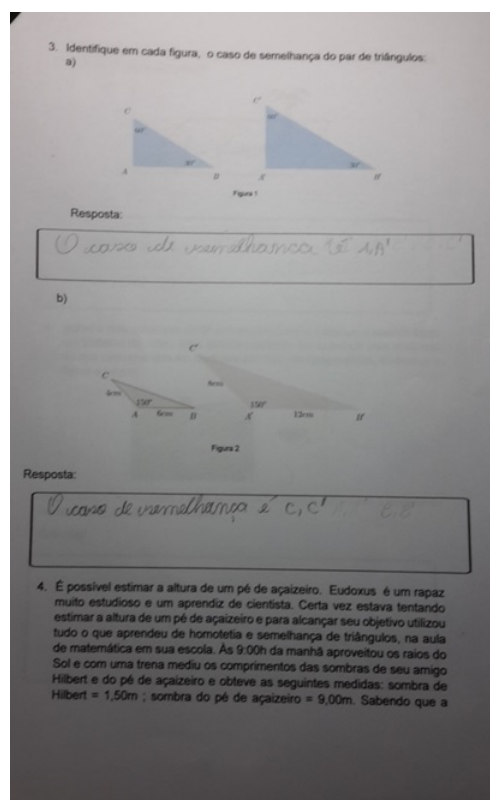


Figura 6.4: Avaliação da aluna Isabel da turma A(2ª parte)

3ª. Aula : Os alunos realizaram, em duplas, uma atividade com a participação do professor para tirar as dúvidas nas resoluções dos exercícios.

4ª. Aula : Os alunos foram submetidos a uma avaliação individual durante 40 minutos.

Relatório da 1ª aula no dia 15 de setembro:

O professor começou a aula na turma 9º.B, utilizando o projetor de slides, conforme a figura 5.6:

Nessa aula, o tema foi 'Homotetia, semelhança de triângulos e o cotidiano'. A abordagem foi diferente da aula ministrada para a turma 9º.A, uma vez que foi introduzido o conceito de homotetia e a sua relação com a semelhança de triângulos. Além disso, o professor utilizou o software GeoGebra, apresentando a homotetia de forma dinâmica, fazendo o valor da razão K de homotetia variar, definindo a dilatação, a contração e a inversão de triângulos. Em seguida, o professor resolveu os dois exercícios propostos no final da aula com a participação de 21 alunos dos 25 presentes durante a exposição.

Relatório da 2ª aula no dia 16 de setembro:

Nesta aula, o professor propôs uma atividade prática com materiais concretos e manipuláveis com 7 equipes de 4 alunos. As equipes escolheram os trabalhos de acordo com a afinidade de cada um. Os trabalhos foram os seguintes:

Equipe 1: Estimativa da altura de uma árvore localizada no pátio da escola, utili-

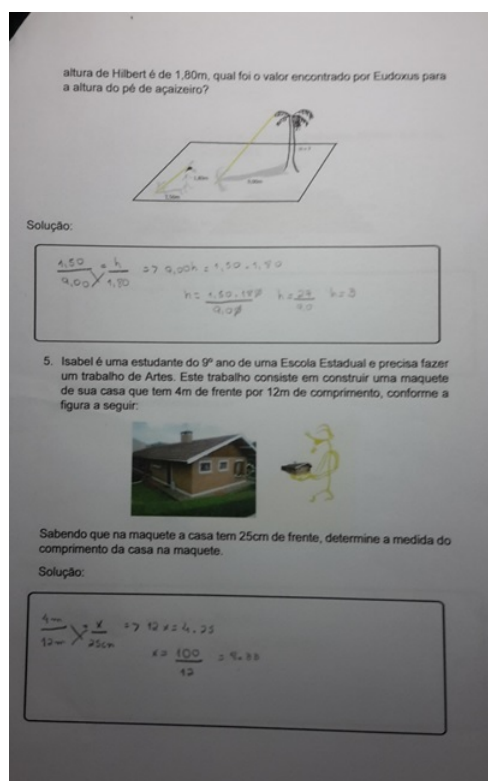


Figura 6.5: Avaliação da aluna Isabel da turma A(3ª parte)

zando as sombras projetadas por uma aluna e pela árvore, conforme figura 6.7:

Nessa atividade, os alunos utilizaram uma trena para medir as sombras da árvore e da aluna Talita (nome fictício) e em seguida a altura da Talita, onde foram obtidos os seguintes valores:

Comprimento da sombra da árvore $L = 744$ cm.

Comprimento da sombra da Talita $l = 133$ cm.

Altura da Talita $h = 163$ cm.

Observando a Figura 5.8 e aplicando a propriedade da semelhança de triângulos, os alunos obtiveram o seguinte resultado:

$$\frac{H}{L} = \frac{h}{l} \Rightarrow \frac{H}{744} = \frac{163}{133}$$

$$133H = (163)(744) \Rightarrow 133H = 121272$$

$$H = \frac{121272}{133} \Rightarrow H = 911,81cm = 9,12m.$$

Equipe 2: Estimativa da altura do prédio da Escola utilizando uma fotografia, conforme Figura 6.9.

Nessa atividade, os alunos tiraram uma fotografia do prédio da Escola e da aluna Tammi (nome fictício), conforme a figura 6.10, e mediram a altura da aluna Tammi, bem como do prédio na fotografia, obtendo os seguintes valores:

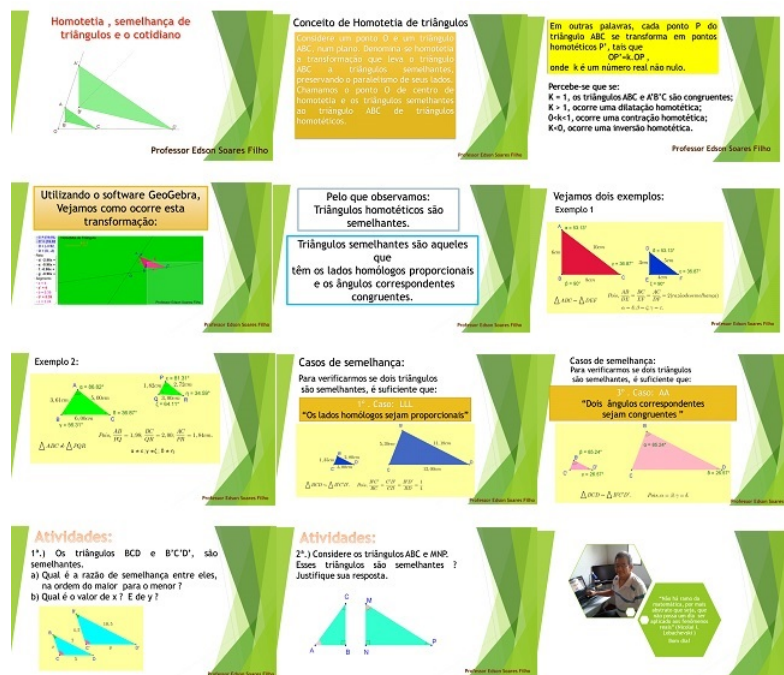


Figura 6.6: Slides sobre Homotetia e Semelhança de Triângulos

Altura do prédio na fotografia $H' = 120mm$.

Altura da aluna Tammi na fotografia $h' = 23mm$.

Altura real da aluna Tammi $h = 153,4cm = 1534mm$.

Altura real do prédio $H = ?$

Aplicando a semelhança das figuras, obtiveram o seguinte resultado:

$$\frac{H}{h} = \frac{H'}{h'} \Rightarrow \frac{H}{1534} = \frac{120}{23}$$

$$23H = 120.1534 \Rightarrow 23H = 184080$$

$$H = \frac{184080}{23} \Rightarrow H = 8003,5mm = 8,0m.$$

Equipe 3: Estimativa do tamanho de uma aranha peçonhenta, utilizando uma lanterna acesa e a projeção da aranha no anteparo, conforme a figura 6.11:

Nessa atividade, os alunos utilizaram uma lanterna, uma aranha confeccionada por eles com papel cartão, uma trena e um dos cantos da sala, conforme Figura 6.12.

Observando que os triângulos são semelhantes e aplicando a propriedade fundamental, conforme a figura 5.13, obtiveram o seguinte resultado:

$$\frac{h}{380} = \frac{102}{700} \Rightarrow 700h = 102.380$$

$$700h = 38760 \Rightarrow h = \frac{38760}{700} = 55,37mm.$$

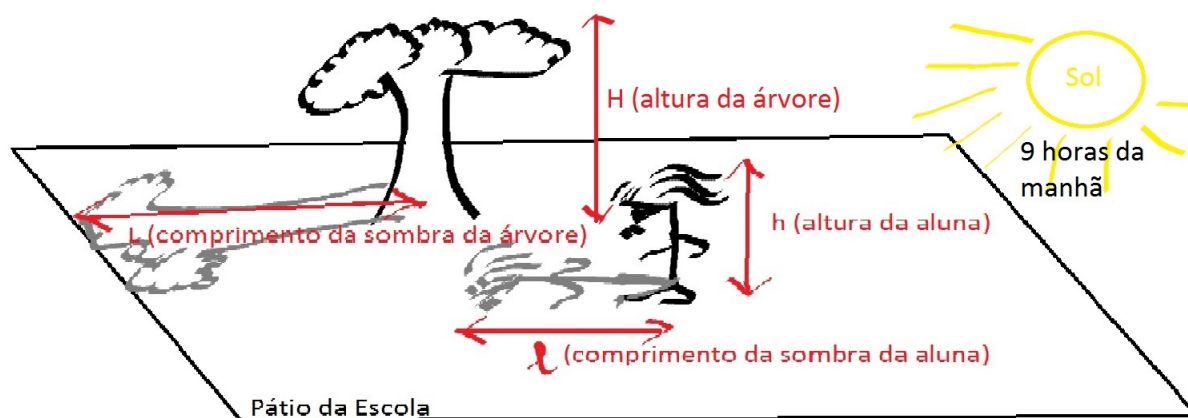


Figura 6.7: Pátio da Escola

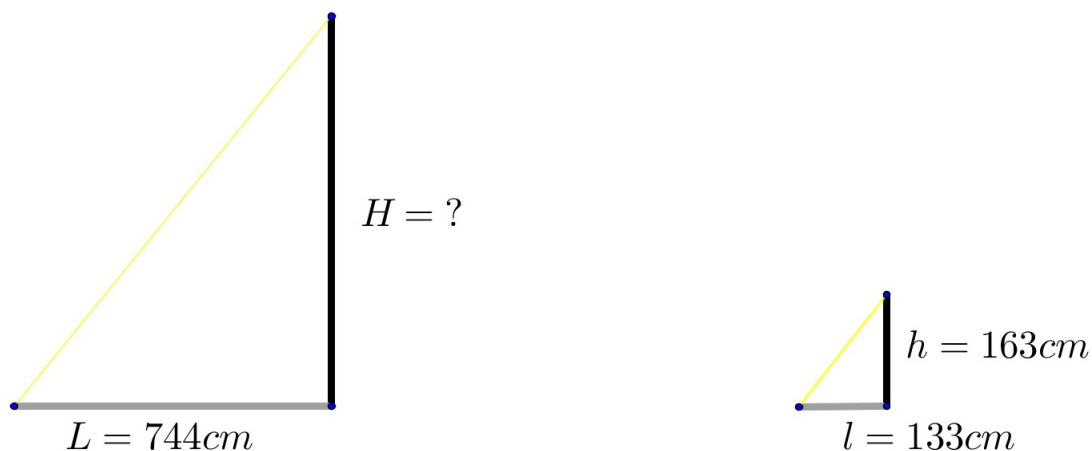


Figura 6.8: Triângulos homotéticos

Equipe 4: Arte abstrata utilizando figuras homotéticas

Nesta atividade, os alunos construíram figuras homotéticas e em seguida pintaram em telas de isopor, conforme Figura 6.14 e 6.15.

Equipe 5 : Estimando o tamanho de uma aranha

Nesta atividade os alunos utilizaram uma câmera fotográfica de celular, uma garrafinha de 45mm de altura e uma régua milimetrada, conforme as Figuras 6.16 e 6.17.

Observando o tamanho real da garrafinha e medindo os tamanhos da aranha e da garrafinha no celular, conforme Figura 6.17, os alunos aplicaram a propriedade da semelhança, obtendo:

$$\frac{L}{45} = \frac{24}{35} \Rightarrow 35L = 1080 \Rightarrow L = \frac{1080}{35} = 30,85mm.$$

Equipe 6 : Artesanato com homotetia

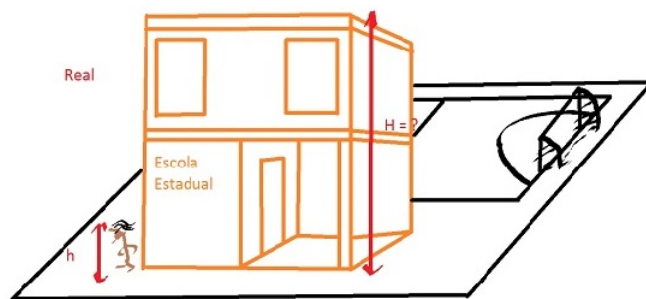


Figura 6.9: O prédio da Escola e uma aluna

Utilizando isopor, tinta para isopor e cordas, os alunos construíram uma sapateira com prateleiras na forma de trapézios homotéticos, conforme a Figura 6.18.

Equipe 7 : Estimando a altura de uma pirâmide

Utilizando uma miniatura de uma pirâmide de papelão, a lanterna de um celular e um boneco, os alunos estimaram a altura da pirâmide, conforme a Figura 6.19. Aplicando a propriedade de semelhança de triângulos, os alunos determinaram a altura da pirâmide do seguinte modo:

$$\frac{H}{250} = \frac{100}{125} \Rightarrow 125H = 250.100 \Rightarrow H = \frac{25000}{125} = 200mm.$$

Durante as atividades, percebemos a participação de cem por cento dos alunos. Aqueles que tinham mais afinidade com Artes desenvolveram as atividades relacionadas à pintura e o artesanato. Já os alunos que gostavam de Ciências foram trabalhar com a atividade que envolvia a aranha, e os que gostavam de cálculo se envolveram com os demais temas.

Relatório da 3ª aula no dia 17 de setembro:

O professor propôs uma atividade em duplas, conforme a Figura 6.20.

Nesta aula o envolvimento dos alunos foi de cem por cento na tentativa de resolver os itens da atividade. Quando não conseguiam, procuravam o professor para ajudá-los.

Relatório da 4ª aula no dia 18 de setembro:

Nesta aula, o professor aplicou uma avaliação individual, conforme as Figuras 5.21, 5.22 e 5.23.

Ao corrigirmos as avaliações dos 26 alunos, obtivemos os seguintes resultados:

Dois alunos responderam somente os dois primeiros itens, sendo que no item 1, justificaram a semelhança dos trapézios com os cálculos das razões entre os lados homólogos, porém não mencionando a congruência dos ângulos correspondentes e no item 2, calcularam corretamente os valores de x e y, deixando os três últimos itens em branco.

Oito alunos responderam a avaliação completa, acertando os dois primeiros itens. Os demais itens não conseguiram aplicar a propriedade da semelhança adequadamente, uma vez que trocaram a ordem dos valores na proporção.



Figura 6.10: Fotografia do prédio da Escola e a aluna

Onze alunos responderam a avaliação completa, acertando os três primeiros itens. Quanto aos dois últimos itens, trocaram a ordem dos valores na proporção.

Cinco alunos responderam a avaliação completa e desenvolveram as resoluções dos itens de forma semelhante a do aluno Rodrigo.

Destamos agora, a avaliação do aluno Rodrigo, que no primeiro item, identificou a semelhança dos trapézios através da proporcionalidade dos lados homólogos, faltando apenas mencionar a congruência dos ângulos correspondentes.

No segundo item, o aluno Rodrigo, calculou corretamente o valor de x , aplicando a propriedade fundamental adequadamente. Já no cálculo do valor de y , aplicou a propriedade de forma incorreta, uma vez que o sentido dos triângulos.

No terceiro item, o aluno Rodrigo classificou corretamente os casos de semelhança dos triângulos.

No quarto item, o aluno Rodrigo aplicou corretamente a propriedade fundamental da semelhança dos triângulos e calculou a altura do pé de açaizeiro.

No quinto item, o aluno Rodrigo calculou corretamente o comprimento da casa na maquete, aplicando a propriedade fundamental da semelhança de triângulos.

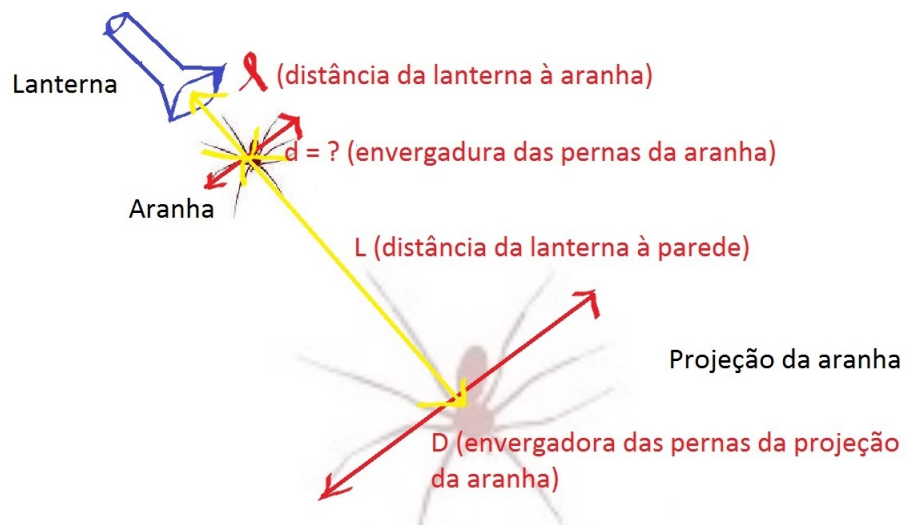


Figura 6.11: Aranha peçonhenta e sua sombra num anteparo

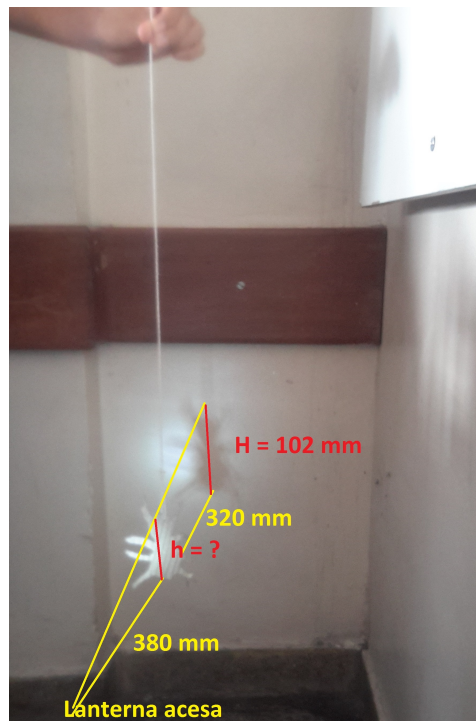


Figura 6.12: Atividade com a lanterna e a aranha

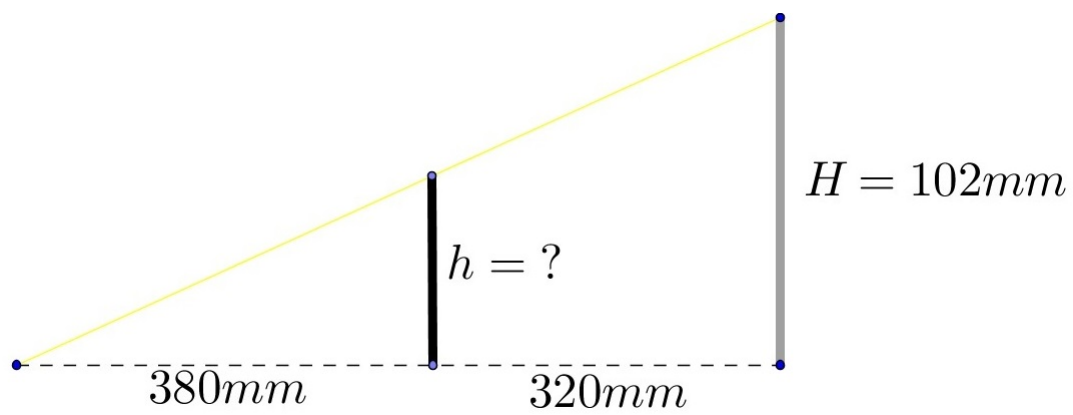


Figura 6.13: Triângulos semelhantes



Figura 6.14: Círculos concêntricos

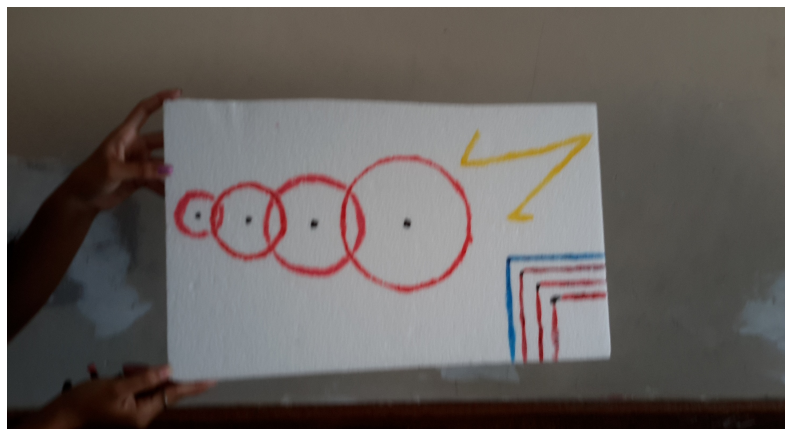


Figura 6.15: Círculos e poligonais homotéticos

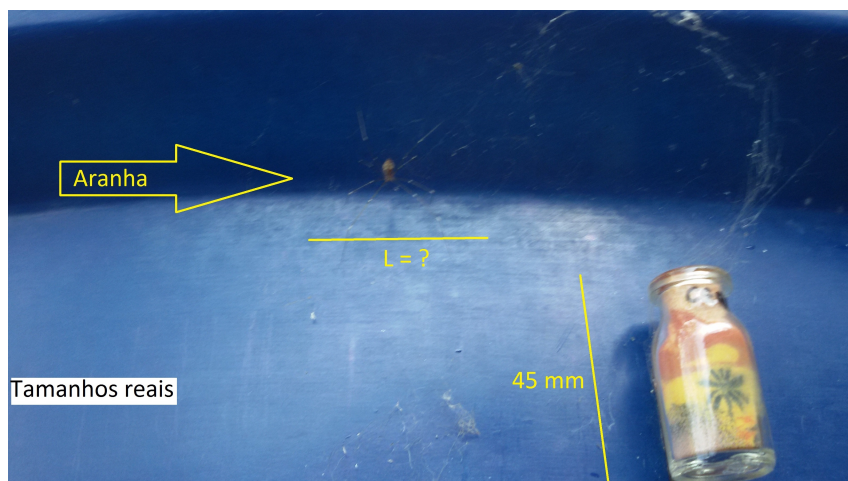


Figura 6.16: Imagem da aranha

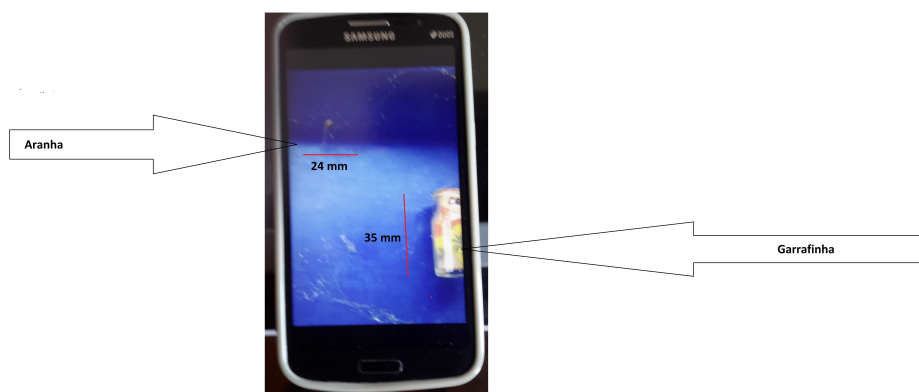


Figura 6.17: Imagem da aranha com ampliação do zoom



Figura 6.18: Sapateira Homotética

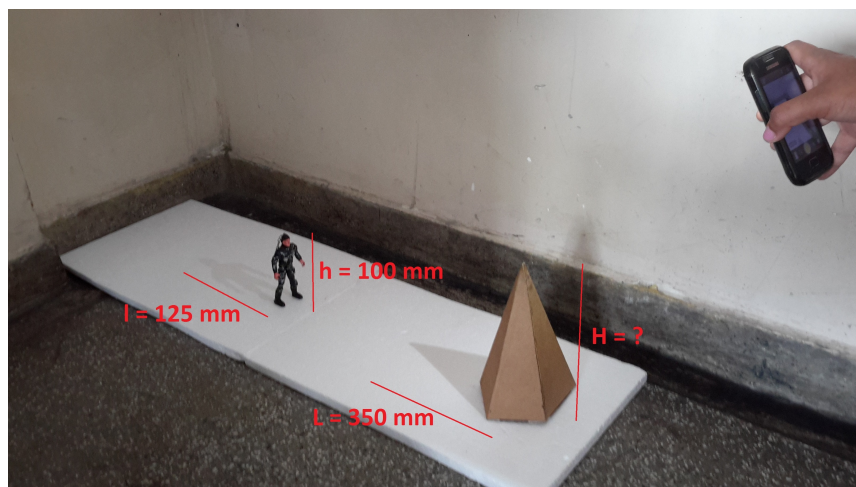


Figura 6.19: A pirâmide e o boneco

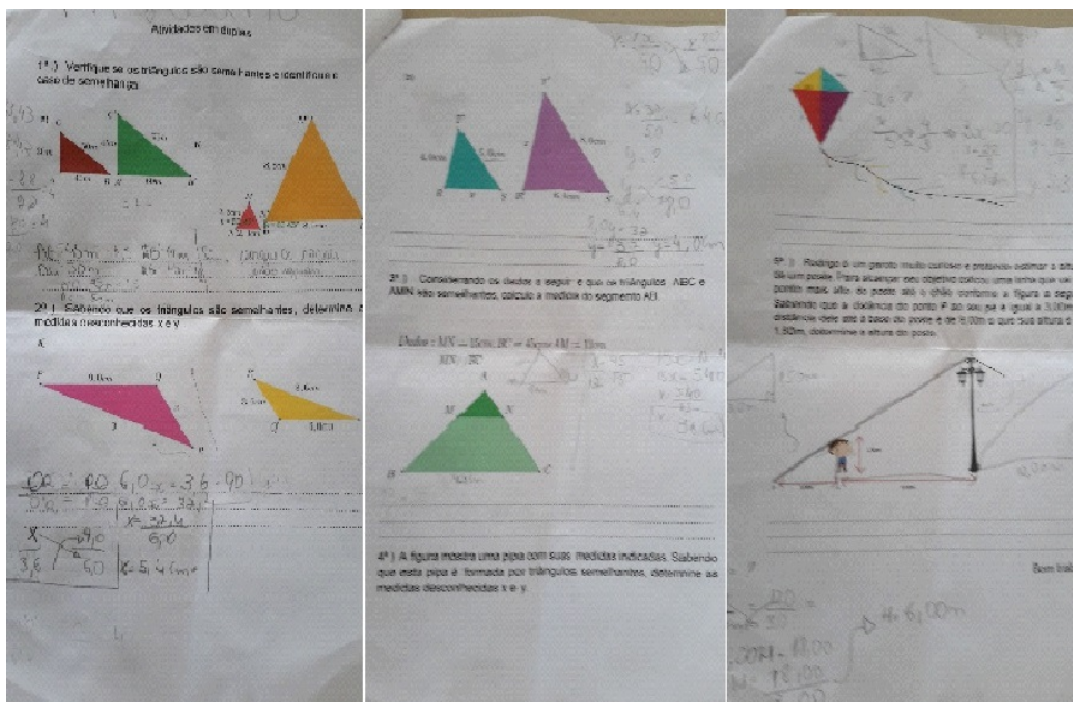


Figura 6.20: Atividade em duplas da turma B

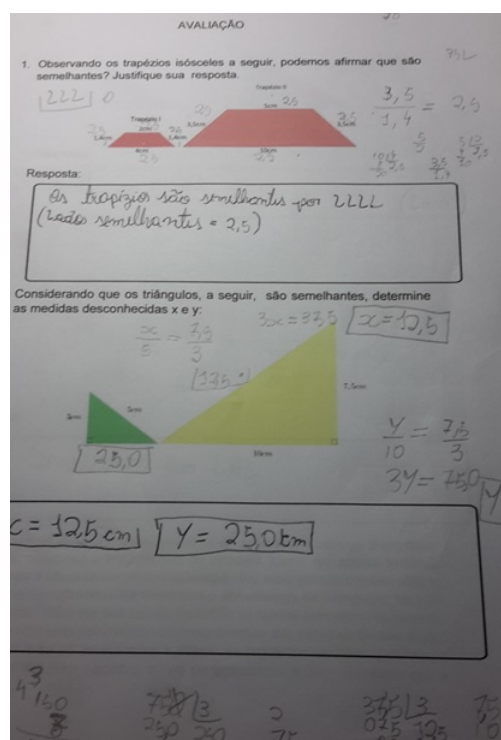


Figura 6.21: Avaliação do aluno Rodrigo da turma B(1ª.Parte)

3. Identifique em cada figura, o caso de semelhança do par de triângulos.

a)

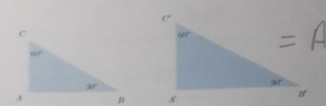


Figura 1

Resposta:

Semelhança = AA

b)

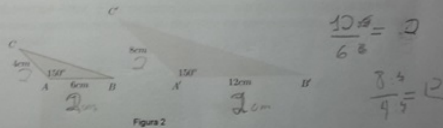


Figura 2

Resposta:

Semelhança por LAL

4. É possível estimar a altura de um pé de açaizeiro. Eudoxus é um rapaz muito estudioso e um aprendiz de cientista. Certa vez estava tentando estimar a altura de um pé de açaizeiro e para alcançar seu objetivo utilizou tudo o que aprendeu de homotetia e semelhança de triângulos, na aula de matemática em sua escola. Às 9:00h da manhã aproveitou os raios do Sol e com uma trena mediu os comprimentos das sombras de seu amigo Hilbert e do pé de açaizeiro e obteve as seguintes medidas: sombra de Hilbert = 1,50m ; sombra do pé de açaizeiro = 9,00m. Sabendo que a

Figura 6.22: Avaliação do aluno Rodrigo da turma B(2ª.Parte)

altura de Hilbert é de 1,80m, qual foi o valor encontrado por Eudoxus para a altura do pé de açaizeiro?



Solução:

$H = 10,80$

5. Isabel é uma estudante do 9º ano de uma Escola Estadual e precisa fazer um trabalho de Artes. Este trabalho consiste em construir uma maquete de sua casa que tem 4m de frente por 12m de comprimento, conforme a figura a seguir:



Sabendo que na maquete a casa tem 25cm de frente, determine a medida do comprimento da casa na maquete.

Solução:

$X = 75\text{cm}$

Handwritten calculations at the bottom: $\frac{4}{12} = \frac{25}{X}$, $4X = 300$, $X = 75$.

Figura 6.23: Avaliação do aluno Rodrigo da turma B(3ª.Parte)

Capítulo 7

Análise dos Resultados da Pesquisa

Essa investigação se desenvolveu em três etapas. Na primeira etapa, acompanhamos o professor, que ministrou em três aulas o tema 'Semelhança de triângulos e aplicações', distribuídas em uma aula expositiva; na aula seguinte, ele propôs aplicações de exercícios de fixação e, na terceira aula, uma avaliação do conteúdo ministrado.

Na segunda etapa, acompanhamos o professor, que ministrou em quatro aulas o tema 'Homotetia, semelhança de triângulos e o cotidiano', distribuídas em uma aula expositiva, na segunda aula houve uma atividade prática em grupos de 4 alunos, a terceira aula foi uma atividade em duplas com resoluções de exercícios, e a quarta aula foi a avaliação dos conteúdos ministrados. Na terceira etapa, ocorreu uma análise das observações em sala de aula e das avaliações.

Na primeira aula da turma A, observamos que, no início 15 alunos dos 26 presentes demonstraram interesse e atenção, mas com o decorrer do tempo, apenas 10 alunos estavam atentos à aula. No término dessa aula, apenas 5 alunos estavam acompanhando a exposição dos conceitos, propriedades e exercícios resolvidos. Diante desse decréscimo do interesse e atenção dos alunos, constatamos que um dos fatores que interferem na assimilação dos conceitos é a linguagem formal dos conceitos e o distanciamento entre o objeto matemático apresentado e o cotidiano do discente. Podemos imaginar que o adolescente é convidado a deixar o Planeta Terra por alguns minutos e visitar um 'planeta estranho'.

Na segunda aula (1ª etapa), houve uma dificuldade muita expressiva para a realização da atividade na forma de lista de exercícios. Os alunos não sabiam nem como começar. Assim, foi inevitável a procura pelo professor para ajudá-los a resolver os itens.

Na terceira aula (1ª etapa), o professor aplicou uma avaliação individual. Quando analisamos as soluções dos itens, confirmamos o que havíamos percebido na execução das atividades da aula anterior, isto é, a não assimilação dos conceitos dos objetos e suas propriedades. Sendo assim, a maioria dos alunos não conseguiu desenvolver nenhum dos itens.

Na segunda etapa, na turma B, observamos que o professor, ao fazer a exposição do conteúdo com a utilização do software GeoGebra e utilizando paralelamente à linguagem formal uma linguagem coloquial, com analogias de situações do cotidiano, 21 alunos dos 25

ficaram atentos e interessados ao conteúdo ministrado. É importante destacar que o professor alternou a utilização do projetor de slides, quadro branco e o diálogo com os alunos. Diante dessa manutenção de cerca de oitenta por cento de alunos concentrados, constatamos que a variação durante a aula com a utilização de recursos como projetor, software e o paralelismo da linguagem formal com a linguagem coloquial contribuem positivamente para que o índice de atenção e interesse se mantenha e, conseqüentemente, ocorre uma melhor compreensão dos conceitos e aplicação das propriedades.

Na segunda aula (2ª etapa), o professor distribuiu os alunos em 7 equipes de 4 alunos, com o objetivo de realizarem atividades práticas na sala de aula e nas dependências da escola. Tais atividades tinham um caráter interdisciplinar-contextual com a utilização de materiais concretos e manipuláveis. Nessa aula, a participação foi total dos alunos. Eles demonstraram muito interesse durante as atividades. Diante desse quadro, constatamos a importância do aluno aprender pelo fazer, do material concreto e de ser um agente ativo no processo de ensino-aprendizagem.

Na terceira aula (2ª etapa), o professor aplicou uma atividade escrita, em duplas. Os alunos executaram-na com relativa facilidade, uma vez que poucos deles procuraram o professor para ajudá-los na resolução das atividades propostas.

Na quarta aula (2ª etapa), o professor aplicou uma avaliação escrita individual e todos responderam pelo menos dois itens corretamente. Analisando as resoluções dos alunos na avaliação, constatamos um resultado muito positivo, pois a maioria havia assimilado os conceitos de Homotetia e semelhança de triângulos, bem como suas propriedades, uma vez que responderam os itens corretamente, argumentando com os conceitos de homotetia e semelhança de triângulos e suas propriedades.

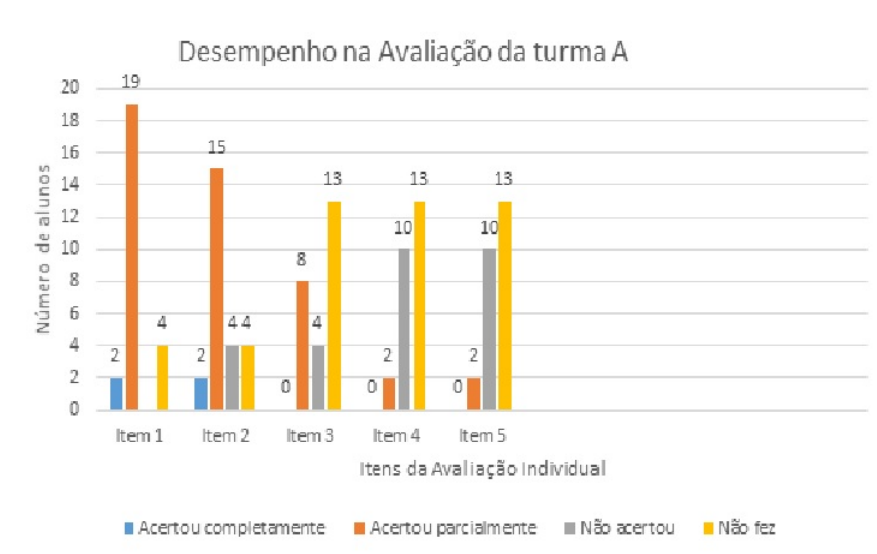


Figura 7.1: Desempenho na Avaliação da turma A

Analisando o gráfico de desempenho dos alunos na avaliação da turma A, percebe-

Desempenho na Avaliação da turma B

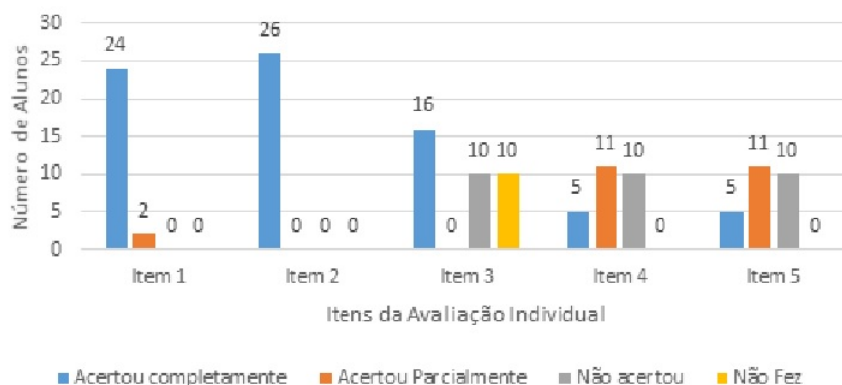


Figura 7.2: Desempenho na Avaliação da turma B

mos que os alunos tiveram bastante dificuldade em responder o item 1, acertando parcialmente, e a partir do item 2, os alunos foram deixando de responder. Já o gráfico de desempenho dos alunos na avaliação da turma B, os itens 1, 2 e 3, foram respondidos corretamente e os itens 4 e 5, tentaram responder mas não conseguiram acertar.

Após os resultados obtidos, constatamos que as hipóteses estabelecidas a priori: sequência inadequada de conteúdos, Linguagem exclusivamente formal, falta de recursos didáticos, falta de motivação e interesse e falta de atividades práticas, foram confirmadas através das observações e dos instrumentos de avaliação em duplas e individual dos alunos.

Diante dessas análises, concluímos que a prática docente é fundamental para a eficácia do processo ensino-aprendizagem. O professor planejando a sua aula, estabelecendo uma sequência lógica dos conceitos, exemplos, propriedades e atividades práticas que ajudem o aluno a construir o seu próprio saber matemático e propondo ao aluno situações-problema para que possa desenvolver suas habilidades, certamente vai obter resultados positivos.

Considerações Finais

O nosso propósito inicial foi investigar os fatores que interferem na compreensão do conceito de semelhança de triângulos e sua aplicação em problemas do cotidiano. Com esse intuito, o processo de investigação foi realizado numa Escola Estadual, situada na zona centro-sul de Manaus, cujos grupos experimentais foram duas turmas de 9º. ano do Ensino Fundamental, onde observamos o processo de ensino-aprendizagem no período de 8 a 18 de setembro de 2014, no turno matutino.

Diante dos resultados obtidos nesta investigação e confrontando com as hipóteses do problema, constatamos que o professor precisa ser um professor-pesquisador da sua prática, pois assim, no decorrer do processo tem a oportunidade de intervir para a melhoria de sua aula. Além disso, o professor deve fazer um paralelo entre a linguagem formal e a coloquial, nas definições dos objetos matemáticos, facilitando a compreensão do aluno.

Ademais, o professor utilizando materiais concretos e manipuláveis, nas atividades práticas, propicia a aproximação dos conceitos matemáticos com seu alto nível de abstração e generalização dos problemas do cotidiano e ajuda o aluno a construir o seu próprio saber matemático.

Por fim, gostaríamos de deixar a possibilidade de continuação desse trabalho, uma vez que há muitos fatos a serem investigados em sala de aula, que precisam ser estudados quanto ao processo de ensino-aprendizagem, como por exemplo, os aspectos cognitivos que se associam diretamente à compreensão dos conceitos, propriedades e seus cálculos; bem como os aspectos psicológicos e sociais dos alunos que influenciam no interesse e atenção durante a aula e o acompanhamento dos responsáveis em seus lares.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl B. História da matemática. Tradução de Elza Gomide. São Paulo : Edgard Blücher, 1974.
- [2] BRASIL, SEF. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [3] COXETER, H. S. M. e GREITZER, S.L. Geometry Revisited. Washington: The Mathematical Association of América. 1967.
- [4] DE KETELE, J.M. Observar las situaciones educativas. Madrid, Narcea, S.A. de ediciones, 1993.
- [5] EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo : Editora UNESP, 2009.
- [6] EVES, Howard. A História da Matemática : Geometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo : Atual Editora, 1994.
- [7] EWBANK, W. A. What? Why? When? How? The Mathematics Laboratory. Alberta, USA, NCTM: Arithmetic Teacher, (1977).
- [8] FIORENTINI, D. e MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. Boletim da SBEM-SP. São Paulo: SBM/SP, Ano 4, n. 7, 1990.
- [9] LEWIN, K. Action research and minority problems. Journal of Social Issues, *n.2*, p. 34 – 36, 1946.
- [10] LIMA, Elon Lages. Isometrias. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática : SBM. 1996.
- [11] LIMA, Elon Lages. Coordenadas no Plano. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática : SBM. 1996.
- [12] LORENZATO, S. Laborat´rio de Ensino de Matemática e Materiais Didáticos Manipuláveis. In: LORENZATO, S.Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

- [13] NUNAN, D. Task-based syllabus design: selecting, grading and sequencing tasks. Tasks in Pedagogical Context. Cleveland. UK: Multilingual Matters, 55 – 66, 1993.
- [14] REYS, R. Considerations for teaching using manipulative materials. Arithmetic Teacher, 1971.
- [15] ROONEY, Anne. A História da Matemática : Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. Tradução de Mario Fecchio. São Paulo : M. Books do Brasil Editora Ltda, 2012.
- [16] SACRISTÁN, J. Gimeno. O currículo: Uma reflexão sobre a prática. Porto Alegre, 2000.
- [17] SANCHEZ, J.N.G Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção psicopedagógica. Porto Alegre: Artmed, 2004.
- [18] SMITH, C. STRICK, L. Dificuldades de Aprendizagem de A a Z. Porto Alegre: Ed. Artmed, 2001.
- [19] TARDIF, Maurice. Saberes docentes e a formação profissional. 2ª edição. Petrópolis: Vozes. 2002.
- [20] THIOLLENT, M. Pesquisa-ação nas organizações. São Paulo: Editora Atlas. 1998.
- [21] TRIPP, D. Critical Incidents in teaching: the development of professional judgement. Londres e Nova York: Routledge, 1993.
- [22] VYGOTSKY, L. S. Psicologia Pedagógica. Porto Alegre: Artmed, 2003.
- [23] YAGLOM, I. M. Geometric Transformations III. The Mathematical Association of América. 1973.