UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

O USO DE LOGARITMOS NO CAMPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Carlos Ronaldo Cardoso de Carvalho

MANAUS
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Carlos Ronaldo Cardoso de Carvalho

O USO DE LOGARITMOS NO CAMPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral

MANAUS
2015

CARLOS RONALDO CARDOSO DE CARVALHO

O USO DE LOGARITMOS NO CAMPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 12 de janeiro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
Presidente

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Membro

Profa. Dra. Jeanne Moreira de Sousa
Membro

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida e bênçãos a mim concedidas por sempre guiar meus passos para realizar com sucesso os meus objetivos.

À meus pais, que sempre foram minha base forte nesta caminhada, o meu muito obrigado por tudo àquilo que me instruíram e por todos os princípios que me foram passados.

À minha esposa Elaine Seabra da Costa, pela dedicação, amor, apoio e principalmente pelo incentivo constante sem o qual eu não estaria concretizando este sonho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral, pela confiança e dedicação, por toda liberdade no desenvolvimento deste estudo e ter acreditado em meu potencial me conduzindo para esta realização, obrigado pelo apoio e pelas palavras de incentivo.

Aos meus professores do PROFMAT, pela arte de ensinar, por nos desafiar e acreditar em nossa capacidade de aprender sempre mais.

Enfim, agradeço aos meus amigos da turma, em particular à Ramina Samoa pela colaboração, incentivo e ajuda na reta final e a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução dessa Dissertação de Mestrado.

"Cavalheiros, que isto certamente seja verdadeiro é absolutamente paradoxal; não podemos entender a fórmula, não sabemos o que significa. Mas conseguimos prová-la e portanto sabemos que deve ser verdade."

(Benjamin Pierce, um dos principais matemáticos de Harward no século XIX, sobre a fórmula de Euler, $e^{\pi i} = -1$)

RESUMO

Neste trabalho procuramos fazer uma abordagem simples da aplicação dos logaritmos no campo dos números complexos e torná-los mais conhecidos, pois embora tenham um grande papel na resolução de muitos problemas, estão de certa forma esquecidos tanto no ensino básico quanto no ensino de graduação. O estudo foi realizado com o propósito de pesquisar uma das inúmeras contribuições que o notável Leonard Euler deixou para a matemática. No intuito de resgatar tais aplicações, desenvolvendo assim habilidades no campo dos Números Complexos, faremos uma viagem mostrando a construção dos Números Complexos (capítulo 2), passando pela definição tradicional de Logaritmos de Números Reais Positivos (capítulo 3) e focando principalmente o capítulo 4 que trata de Logaritmos de Números Reais Negativos. Por fim apresentaremos um capítulo especial mostrando a História do Problema (capítulo 5) e algumas Abordagens no Ensino Médio (capítulo 6). Acreditamos que tanto o enfoque da realização desse trabalho, com a utilização dos Logaritmos, por exemplo, como as operações e aplicações que utilizamos, pode servir para a melhoria do ensino-aprendizagem do uso dos Logaritmos e possivelmente servir de elemento motivador para alunos e professores que busquem aprimorar seus conhecimentos em Logaritmos de Números Reais Negativos nos seus diversos desdobramentos.

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem, Números Complexos, Logaritmos Positivos, Logaritmos Negativos.

ABSTRACT

In this work we make a simple approach to the implementation of logarithms in the field of complex numbers and make them more known, because although they have a big role in solving many problems, are somehow forgotten both in basic education and in undergraduate education. The study was carried out in order to investigate one of the many contributions that the remarkable Leonard Euler left to mathematics. In order to redeem such applications, thus developing skills of Complex Numbers field, we will travel showing the construction of Complex Numbers (Chapter 2), through the traditional definition of logarithms dollars Positive Numbers (Chapter 3) and mainly focusing on (Chapter 4) which deals with logarithms of Real Numbers negatives. Finally we will present a special chapter showing the Problem of History (chapter 5) and some approaches in high school (Chapter 6). We believe that both the approach of carrying out the work, with the use of logarithms, for example, the operations and applications we use, can serve to improve the teaching and learning of the use of logarithms and possibly serve as a motivator for students and teachers that seek to enhance their knowledge of logarithms of Real Numbers negatives in its various developments.

Keywords: Teaching-Learning, Complex Numbers, Positive Logarithms, Negative Logarithms.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Quando se fala em logaritmos, é natural definir-se o seu campo de existência somente para números reais positivos. Surge uma pergunta: Existe logaritmo de um número real negativo?

Foi baseado na trigonometria, números complexos e mantendo as principais propriedades dos logaritmos e exponenciais, que o notável matemático Leonard Euler criou uma teoria para provar a existência de logaritmos para números reais negativos. Euler mostrou que o único número real negativo tem uma infinidade de logaritmos e nenhum deles é real. "Para a teoria dos logaritmos Euler contribuiu não só com a definição em termos de expoentes que usamos hoje, mas com a ideia correta quanto aos logaritmos de números negativos" Boyer [2].

O propósito que se tem então, no presente trabalho, é pesquisar mais uma das maravilhosas contribuições que Euler deixou para a Matemática.

Os logaritmos surgiram no início do século XVII com a finalidade de facilitar as operações matemáticas, consideradas muito complexas. Segundo Lima [14], Jobst Bürgi (1552-1632), um suíço fabricante de instrumentos astronômicos e inventor, foi o matemático que teve as primeiras ideias sobre logaritmos. Mas a enunciação da descoberta foi pelo escocês, teólogo e matemático John Napier (1550-1617), o qual obteve maior influência no desenvolvimento dos logaritmos, sendo considerado por muitos autores, o único matemático a descobrir os logaritmos.

Ficou sugerido, até agora, que a invenção dos logaritmos foi obra de um só homem, mas tal impressão não deve permanecer. Napier foi de fato o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas ideias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente na Suíça por Jobst Bürgi mais ou menos ao mesmo tempo. Na verdade, é possível que a ideia de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi em 1588, o que seria meia dúzia de anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. Porém Burgi só publicou seus resultados em 1620, meia dúzia de anos depois de Napier publicar sua Descriptio, de acordo com Boyer [2].

Na primeira metade do século XVIII, surgiram os primeiros questionamentos sobre logaritmos de um número negativo. Os matemáticos Jean Bernoulli e Leibniz tentaram criar uma teoria que explicasse essa questão, porém, ambos ficaram sem uma definição concreta.

Capítulo 2

Números Complexos

2.1 Necessidade dos Números Complexos

Os números complexos são comumente estudados nos cursos de Álgebra, conforme Ávila [1], ou em cursos que tratam das construções numéricas, aí incluídos os números inteiros, racionais e reais. Vamos fazer aqui uma apresentação desses números, tendo em vista, a necessidade destes números para os capítulos posteriores deste trabalho.

Como se sabe, as raízes de uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

são dadas pela conhecida fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Obtemos, efetivamente, duas raízes, quando o discriminante $b^2 - 4ac$ é positivo e apenas uma se ele for nulo.

Quando o discriminante é negativo, a fórmula acima não conduz a nenhuma raiz real. Neste caso, o trinômio $ax^2 + bx + c$ é sempre diferente de zero, qualquer que seja o valor real que se atribua a x. Por exemplo, se tentarmos resolver a equação

$$x^2 - 6x + 13 = 0,$$

somos levados a

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2},$$

que não representa número real algum.

No entanto, se operarmos formalmente, como se $\sqrt{-1}$ fosse um número, obtemos:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{16(-1)}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1},$$

ou seja, $x' = 3 + 2\sqrt{-1}$ e $x'' = 3 - 2\sqrt{-1}$. Vamos substituir esses "números" na equação original para verificar se eles são realmente raízes. Ao fazermos isto, devemos tratar o símbolo $\sqrt{-1}$ como se ele fosse mesmo um número; em particular, seu quadrado deve ser -1: $(\sqrt{-1})^2 = -1$. Teremos:

$$(x')^2 - 6x' + 13 = (3 + 2\sqrt{-1})^2 - 6(3 + 2\sqrt{-1}) + 13$$

$$= 9 + 12\sqrt{-1} + 4(-1) - 18 - 12\sqrt{-1} + 13 = 0.$$

Do mesmo modo, verificamos que x'' também é raiz.

2.2 Números Complexos

Dessas considerações segue-se que é possível resolver a equação do $2^{\underline{o}}$ grau mesmo no caso em que $b^2 - 4ac < 0$, se operarmos com o símbolo $i = \sqrt{-1}$ como se fosse um número. Na verdade, a motivação maior para a aceitação dos números complexos ocorreu no século XVI, quando os matemáticos descobriram a fórmula geral de resolução de equações do $3^{\underline{o}}$ grau. Aplicada à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, essa fórmula se reduz a

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{-2 + 11\sqrt{-1}}.$$

Sabendo que $x = 4$ é raiz, percebeu-se que as raízes cúbicas aí indicadas devem ser $(2+\sqrt{-1})$ e $(-2+\sqrt{-1})$, respectivamente, o que se comprova elevando-as ao cubo e operando formalmente. Como tal procedimento permitia obter a raiz $x = 4$ pela fórmula, ficou evidente que tal interpretação deveria ser aceita. Portanto, os números complexos entraram na Matemática pela equação do $3^{\underline{o}}$ grau, não do $2^{\underline{o}}$. Ele deve ter a prioridade de que $i^2 = -1$ e deve operar ao lado dos números reais com as mesmas leis formais que regem estes números. Somos assim levados a introduzir os números complexos como sendo os números da forma $a + bi$, como

$$3 + 5i, \quad \frac{2}{3} - 2i, \quad \sqrt{2} + \frac{5}{2}i, \quad -3 - \frac{2}{\sqrt{5}}i.$$

O novo elemento $i = \sqrt{-1}$ é chamado unidade imaginária; a é chamado de parte real e b de parte imaginária do número complexo $a + bi$.

Vemos assim que ao introduzirmos os números complexos, devemos definir adição e multiplicação de maneira que permaneçam válidas as propriedades associativa, comutativa e distributiva que essas operações possuem quando referidas aos números reais. Assim, os números complexos ficam determinados pelas seguintes regras:

I) $i^2 = -1$;

II) $ai = ia; a \in \mathbb{R}$;

III) $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\ b = d$;

IV) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;

V) $(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

O leitor deve notar que a definição de multiplicação é motivada pelo que obteríamos operando formalmente, assim:

$$(a + bi).(c + di) = ac + adi + bic + bidi = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Vejamos alguns exemplos de operações com números complexos:

$$(-5 + 7i) + (3 - 12i) = -2 - 5i;$$
$$(1 - 5i)(3 + 2i) = (3 + 10) + (2 - 15)i = 13 - 13i = 13(1 - i);$$
$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{18}} - i\sqrt{50}\right) = \frac{1}{3} - i\sqrt{100} = \frac{1}{3} - 10i.$$

A *subtração* de números complexos é definida em termos da adição e do oposto de um número. O *oposto* de $z = x + iy$ é o número $-z = (-x) + i(-y)$. Dados então $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, definimos:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

2.3 Os Reais Como Subcorpo dos Complexos

Observe que os números complexos da forma $a + i0$ se comportam, com relação à adição e à multiplicação, do mesmo modo que os números reais a; em outras palavras, fazendo corresponder o número complexo $a + i0$ ao número real a, então à soma $a + b$ corresponderá $(a+b)+i0$, que é o mesmo que $(a+i0)+(b+i0)$; e ao produto ab corresponderá $ab+i0$, que é o mesmo que $(a+i0)(b+i0)$. Isso quer dizer que somar e multiplicar números reais equivale, pela correspondência $a \longmapsto a + i0$, a somar e multiplicar, respectivamente, os números complexos correspondentes, o que nos permite identificar o número real a com o número complexo $a + i0$, já que, do ponto de vista da adição e da multiplicação, seu comportamento é o mesmo. Deste modo, os números complexos se apresentam como uma extensão natural dos números reais.

2.4 O Plano Complexo

Dado o número complexo $z = x + iy$, sua *parte real* x é denotada por **Re** z, e sua *parte imaginária* y, por **Im** z. O plano complexo é o conjunto das representações de todos os números complexos $z = x + iy$ pelos pontos $P = (x, y)$ do plano como mostra a Figura 2.1. É conveniente identificar o número complexo $z = x + iy$ com o ponto $P = (x, y)$, o que é possível através das seguintes definições:

I) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c,\ b = d$;

II) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;

III) $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Percebemos então que $a = (a, 0)$ e $i = (0, 1)$.

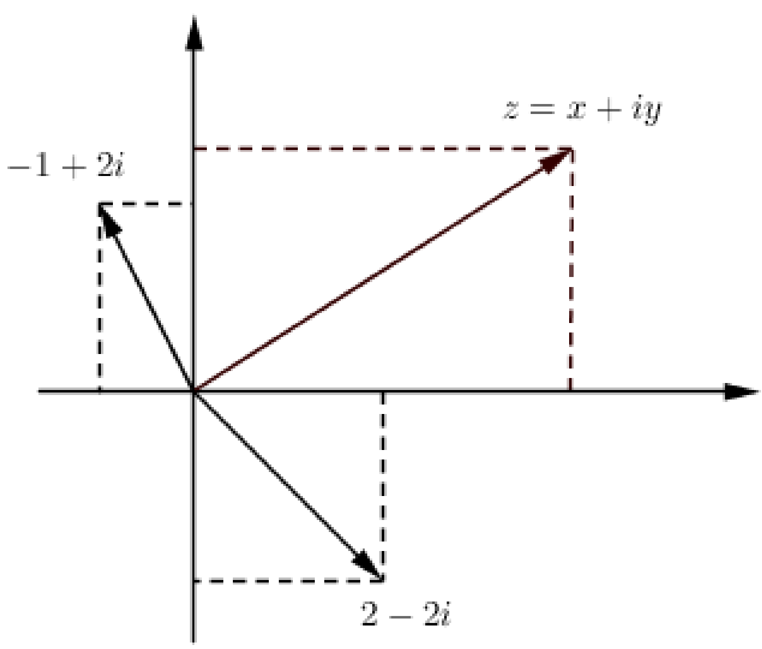

Figura 2.1: Plano Complexo

A representação dos números complexos por pontos do plano é muito útil e de uso frequente. Por meio dela, o número complexo $z = x + iy$ é identificado com o ponto (x, y), ou com o vetor Oz de componentes x e y (Figura 2.1).

As conhecidas regras do paralelogramo para a soma e subtração de vetores se aplicam, então, no caso de soma e subtração de números complexos (Figura 2.2 e Figura 2.3).

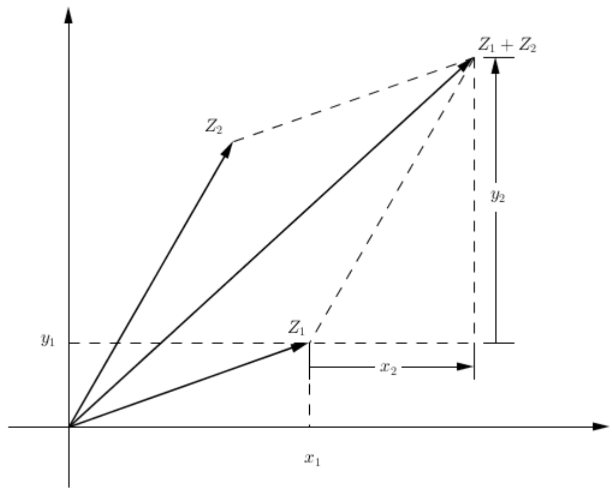

Figura 2.2: Regra do Paralelogramo para a Soma de Vetores

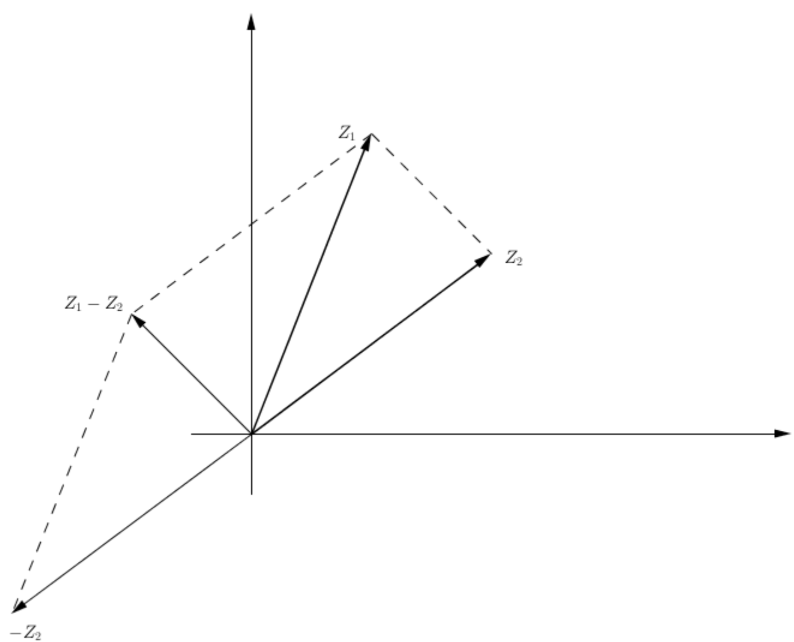

Figura 2.3: Regra do Paralelogramo para a Subtração de Vetores

2.5 Módulo e Complexo Conjugado

Definimos o *módulo*, *valor absoluto* ou *norma* de um número complexo $z = x + iy$ como sendo o número não-negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como se vê, ele é a distância do ponto z à origem.

O *complexo conjugado* de $z = x + iy$ é definido como sendo $\bar{z} = x - iy$.

A Figura 2.4 ilustra um exemplo de complexos conjugados.

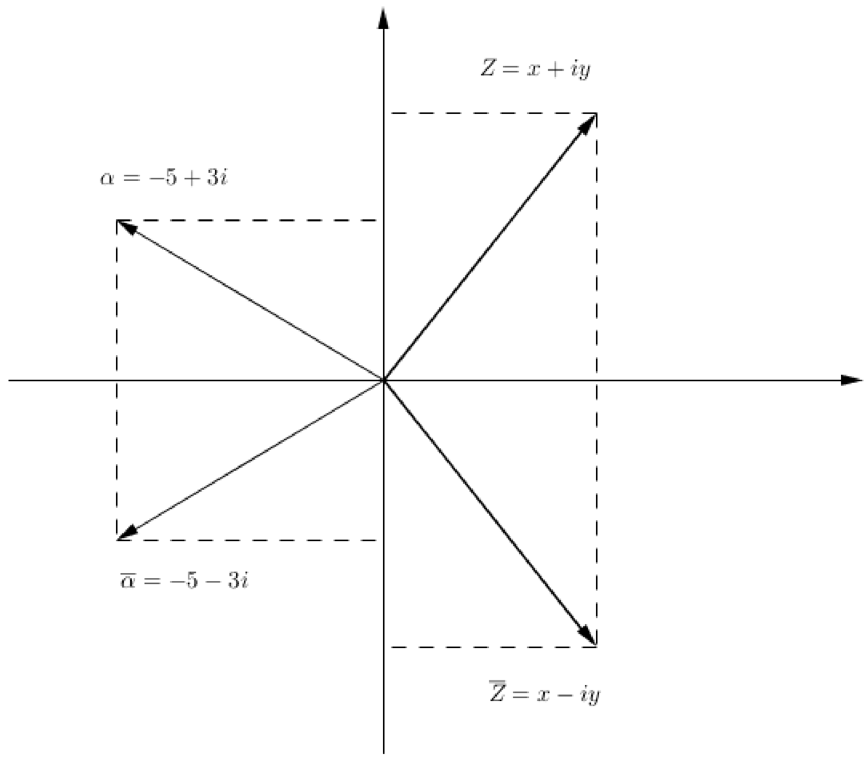

Figura 2.4: Complexos Conjugados

Em termos do módulo e do conjugado, temos:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + i(-xy + yx) = x^2 + y^2,$$

isto é, $z\bar{z} = |z|^2$. Esta propriedade permite calcular o *quociente* $z = z_1/z_2$ de dois números complexos z_1 e z_2, $z_2 \neq 0$, que é definido pela condição $zz_2 = z_1$. Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

Exemplo:

$$\frac{-3+i}{1-2i} = \frac{(-3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5-5i}{1^2+2^2} = -1-i.$$

Em geral, com $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Os números complexos satisfazem as seguintes propriedades:

I) $|z| = |\bar{z}|$;

II) **Re** $z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$;

III) **Im** $z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$;

IV) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

V) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

VI) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Esta última segue da penúltima e da definição de quociente:

$$zz_2 = z_1; \quad logo, \quad \bar{z}\bar{z}_2 = \bar{z}_1, \quad donde \quad \bar{z} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

.

2.6 Representação Polar

Considerando a representação geométrica de um número complexo $z \neq 0$, chama-se *argumento* de z o ângulo θ formado pelo eixo Ox e o vetor Oz (Figura 2.5). Como em Trigonometria, os ângulos são aqui orientados: consideramos positivo o sentido de percurso oposto ao dos ponteiros do relógio.

O argumento de z só pode ser definido quando $z \neq 0$; mesmo nesta hipótese, o argumento só fica determinado a menos de múltiplos inteiros de 2π. Como $x = |z| \cos\theta$ e $y = |z| \mathrm{sen}\, \theta$, temos a seguinte representação de z, conhecida como *representação polar* ou *representação trigonométrica*:

$$z = r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta), \quad r = |z|;$$

r e θ são designados as *coordenadas polares* de z.

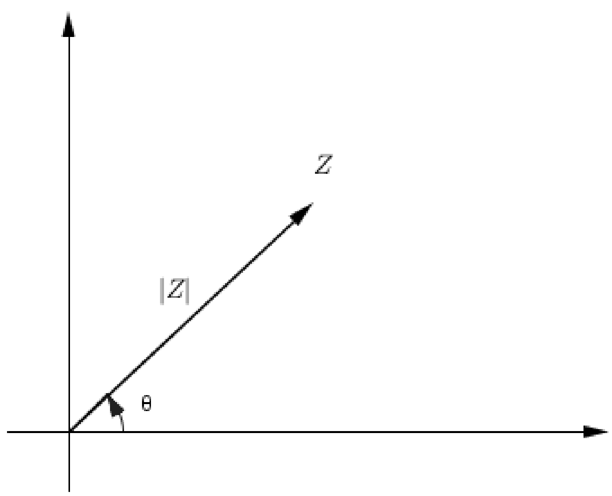

Figura 2.5: Representação Polar

2.7 Fórmulas do Produto e do Quociente

De posse da representação polar, vamos deduzir uma regra muito conveniente para a multiplicação. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \quad e \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

dois números complexos quaisquer. Então,

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1 cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\mathrm{sen}\,\theta_1 cos\theta_2 + \cos\theta_1\mathrm{sen}\,\theta_2)], \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1+\theta_2)].$$

Vemos assim que *o produto de dois números complexos é o número cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a soma dos argumentos dos fatores* (Figura 2.6). Observe que os triângulos de vértices 0, 1, z_1 e 0, z_2, z_1z_2 são semelhantes, o que facilita a construção do produto z_1z_2 a partir dos dados 0, 1 e z_2.

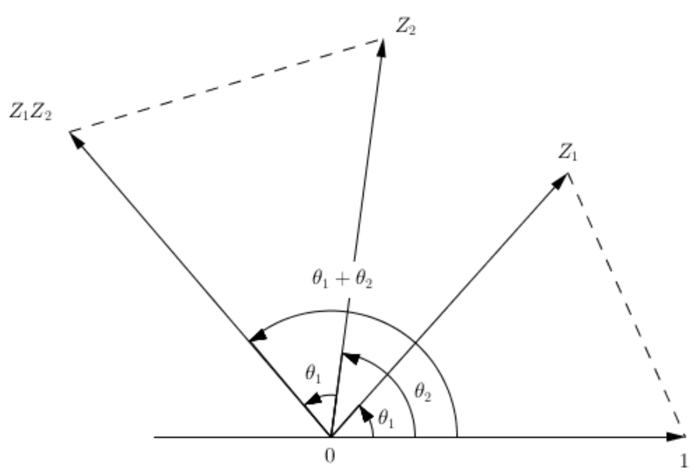

Figura 2.6: Produto de Complexos

Vamos deduzir resultado análogo para a divisão. Como

$$\frac{1}{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta,$$

temos:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1}{\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2)\\ &= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1 cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)],$$

isto é *para dividir números complexos basta fazer o quociente dos módulos e a diferença dos argumentos* (Figura 2.7). Também aqui, como no caso do produto, a construção do quociente é facilitada pela semelhança dos triângulos de vértices 0, 1, $\frac{z_1}{z_2}$ e 0, z_2, z_1.

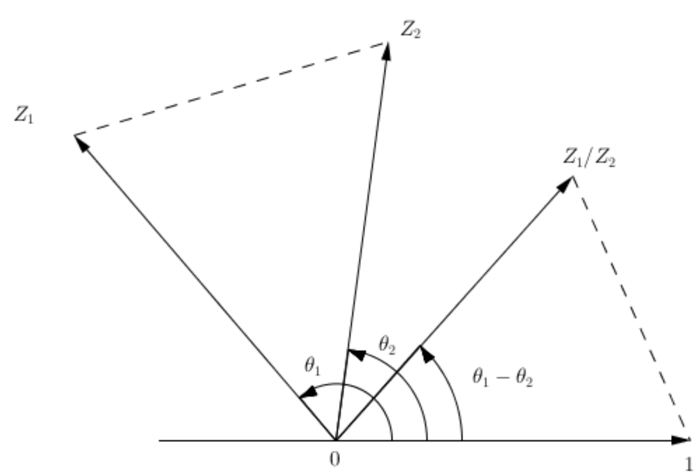

Figura 2.7: Quociente de Complexos

2.8 Fórmula de De Moivre

A fórmula de multiplicação acima estende-se para um número qualquer de fatores. Sendo

$$z_j = r_j(\cos\theta_j + i\,\text{sen}\,\theta_j), \quad j = 1, 2, ..., n,$$

teremos:

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)].$$

A demonstração deste fato é bem simples e pode ser encontrada no livro *Fundamentos de Matemática Elementar* conforme Iezzi [11]. Em particular, quando todos os fatores são iguais e de módulo unitário, obtemos a fórmula seguinte, chamada *fórmula de De Moivre*:

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta.$$

Esta fórmula é válida também para expoentes negativos. De fato,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^{-n} &= \frac{1}{(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta} \\ &= \cos n\theta - i\,\text{sen}\,n\theta = \cos(-n\theta) + i\,\text{sen}\,(-n\theta).\end{aligned}$$

2.9 Propriedades do Valor Absoluto

Segundo Ávila [1], as seguintes propriedades são de verificação imediata:

I) $|z| \geq 0$;

II) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

III) $|z| = |-z|$;

IV) $|\textbf{Re}\, z| \leq |z|$;

V) $|\textbf{Im}\, z| \leq |z|$.

A propriedade
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$
segue da seguinte observação: $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2$. Menos trivial é a *desigualdade do triângulo*,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \tag{2.1}$$

assim chamada por exprimir propriedade geométrica bem conhecida: *a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior ou igual ao comprimento do terceiro lado* (Figura 2.8). Para demonstrá-la, observemos que

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\textbf{Re}(z_1\bar{z}_2) \\
&\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\
&= (z_1 + z_2)^2.
\end{aligned}$$

Daqui segue a desigualdade desejada.

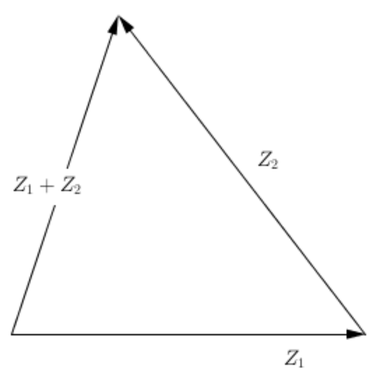

Figura 2.8: Desigualdade Triangular

Como $|-z_2| = |z_2|$, vale também a desigualdade

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

pois
$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Uma terceira desigualdade muito importante é a seguinte:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|. \tag{2.2}$$

Para demonstrá-la, basta observar que

$$|z_1| = |(z_1 + z_2 - z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|.$$

Obtém-se daqui o resultado desejado subtraindo $|z_2|$ do primeiro e último membros.

Trocando z_1 com z_2 em (2.2), obtemos também a desigualdade

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|. \tag{2.3}$$

Pondo agora $|z_1| - |z_2| = a$, as desigualdaddes (2.2) e (2.3) podem ser escritas, respectivamente, $a \leq |z_1 + z_2|$ e $-a \leq |z_1 + z_2|$, donde segue-se que $|a| \leq |z_1 + z_2|$, ou seja,

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|. \tag{2.4}$$

2.10 Raízes n-Ésimas

Diz-se que um número z é *raiz n-ésima* de um dado número complexo a se $z^n = a$. Como veremos logo a seguir, um número complexo não nulo possui n raízes distintas. Para isso, consideremos o número dado a, $a \neq 0$, em sua forma polar: $a = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$; e representemos, também em forma polar, a raiz que desejamos encontrar:
$z = \rho(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$. Utilizando a fórmula de De Moivre, a equação $z^n = a$ assume a forma seguinte:

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\operatorname{sen} n\varphi) = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Como a igualdade de números complexos requer a igualdade das partes reais e das partes imaginárias, separadamente, devemos ter

$$\rho^n \cos n\varphi = r\cos\theta \quad e \quad \rho^n \operatorname{sen} n\varphi = r\operatorname{sen}\theta.$$

Estas equações, por sua vez, equivalem a

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

onde k é um inteiro. Daqui segue-se que ρ é a raiz n-ésima positiva de r, donde

$$z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \tag{2.5}$$

Esta fórmula produz n raízes distintas, quando a k se atribuem os valores $k = 0, 1, ..., n-1$. É importante notar que, qualquer outro valor atribuído a k conduz uma raiz já obtida com um dos valores acima, precisamente aquele que é o resto da divisão de k por n. Vemos, assim, que um número complexo $a \neq 0$ possui n raízes n-ésimas $z_0, z_1, ...z_{n-1}$, todas com o mesmo módulo $\rho = \sqrt[n]{|a|}$ (ver Figura 2.9) e com argumentos

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

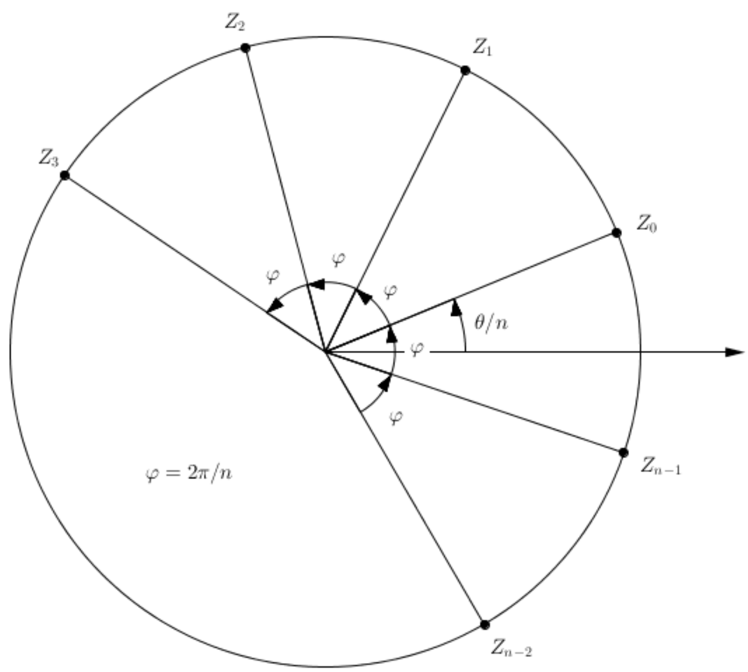

Figura 2.9: Raízes n-Ésimas

2.11 Raízes da Unidade

No caso particular $a = 1$, o ângulo θ assume o valor zero e a fórmula (2.5) se reduz a

$$z = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\, \frac{2k\pi}{n} \right)$$

que são as *raízes n-ésimas da unidade*. Pondo

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i\text{sen}\, \frac{2\pi}{n},$$

e utilizando a fórmula de De Moivre, vemos que as raízes n-ésimas da unidade são dadas por

$$1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}.$$

Observe que, representadas no plano complexo, essas raízes são os vértices de um polígono regular de n lados. A Figura 2.10 ilustra as raízes da unidade no caso $n = 6$. Aqui,

$$\omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\omega^2 = -\overline{\omega}, \qquad \omega^3 = -1, \qquad \omega^4 = -\omega, \qquad \omega^5 = \overline{\omega}.$$

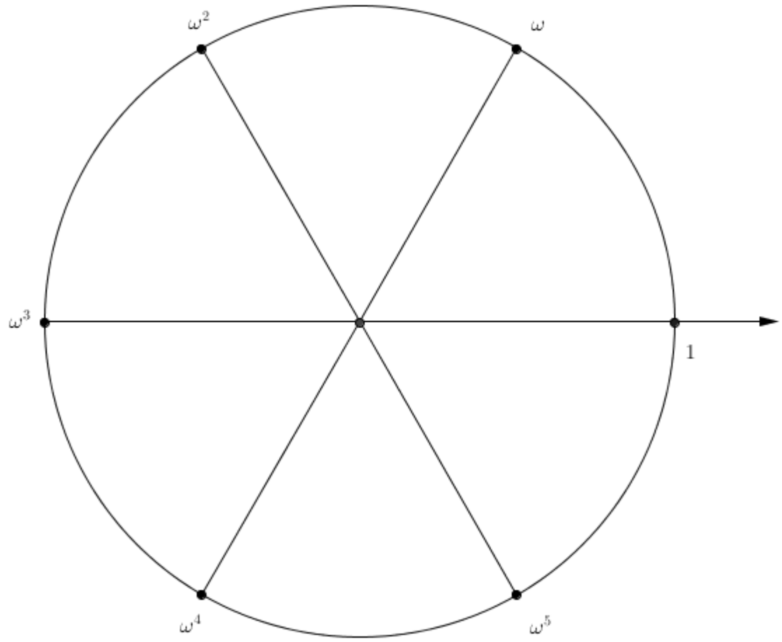

Figura 2.10: Raízes da Unidade

A fórmula (2.5) pode ser escrita assim:

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\text{sen}\,\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}\right),$$

ou seja,

$$a = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\text{sen}\,\frac{\theta}{n}\right)\cdot\omega^k, \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Esta expressão nos diz que *as raízes n-ésimas de um número complexo não nulo podem ser obtidas como o produto de uma de suas raízes particulares,*

$$z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\text{sen}\,\frac{\theta}{n}\right)$$

pelas raízes n-ésimas da unidade, $1, \omega, ..., \omega^{n-1}$.

Como exemplo, seja determinar as raízes cúbicas do número $a = 8$. Uma delas é $z_0 = 2$. As raízes cúbicas da unidade são dadas por $1, \omega, \omega^2$, sendo que agora

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, as raízes cúbicas de 8 são (ver Figura 2.11):

$$z_0 = 2; \qquad z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$z^2 = 2\omega^2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

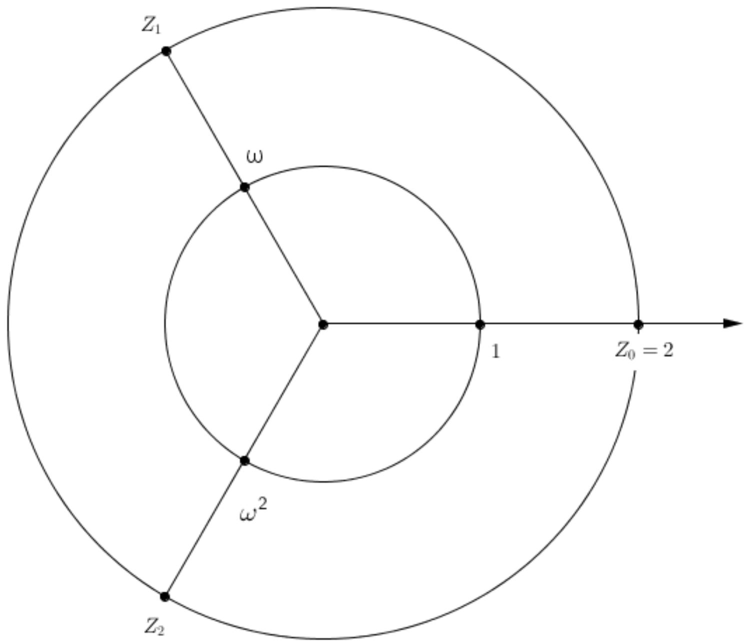

Figura 2.11: Raízes Cúbicas de 8

2.12 Raízes Primitivas

Chama-se *raiz n-ésima primitiva da unidade* qualquer raiz n-ésima $z \neq 1$ tal que n é o menor inteiro positivo tal que $z^n = 1$. É claro que, qualquer que seja n,

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}$$

é raiz primitiva. Ela é a primeira raiz primitiva que ocorre quando percorremos o círculo unitário no sentido anti-horário a partir da unidade real. Mas pode não ser a única raiz primitiva; por exemplo, no caso das raízes triplas da unidade, como vimos há pouco, ω é raiz primitiva, mas ω^2 também é. Já no caso das raízes sêxtuplas, ω e ω^5 são raízes primitivas, enquanto ω^2, ω^3 e ω^4 não o são.

Observação 2.1. *O processo de cálculo de raízes, utilizando a representação trigonométrica, é de caráter geral; mas nem sempre é o mais conveniente.*

Por exemplo, no cálculo da raiz quadrada do número $-7-24i$, é mais fácil proceder assim:

$$\sqrt{-7-24i} = x+iy, \qquad donde \qquad x^2-y^2+2ixy = -7-24i.$$

Mas isto equivale a

$$x^2-y^2=-7, \qquad xy=-12.$$

Resolvendo esta última equação em relação a x e substituindo na primeira, obtemos uma equação quadrática para y^2, cuja solução é $y^2=16$ (como y é real, $y^2>0$). Logo, $y=\pm 4$ e $x=\mp 3$. Finalmente,

$$\sqrt{-7-24i} = \pm(3-4i).$$

Capítulo 3

Logaritmos de Números Reais Positivos

3.1 Definição Tradicional de Logaritmo

A definição dada a seguir, é apresentada na maioria dos livros didáticos diferenciando apenas pela forma de escrita.

Definição 3.1. *Dado um número real $a > 0$, chamamos de logaritmo de um número $b > 0$ na base a, o número y tal que*

$$a^y = b.$$

O número a é chamado de base do logaritmo, b é o logaritmando e y o logaritmo. Escrevemos,

$$y = \log_a b.$$

Assim, $y = \log_a b \Leftrightarrow a^y = b$.

3.2 Propriedades Operatórias

Para enunciarmos as propriedades operatórias de logaritmos, impomos $a, b, c > 0$ e $a \neq 1$. A primeira propriedade é conhecida como propriedade fundamental dos logaritmos.

Teorema 3.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ maiores que 0 e $a \neq 1$.*

Então, as seguintes propriedades valem:

$(P1)$ $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$;

$(P2)$ $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

$(P3)$ $\log_a b^n = n.\log_a b$; com $n \in \mathbb{R}$.

Demonstração: **1.** *Sejam* $\log_a b = x$ *e* $\log_a c = y$. *Então,* $a^x = b$ *e* $a^y = c$. *Daí, temos* $b.c = a^x.a^y = a^{x+y}$.

Então, $log_a(b.c) = \log_a a^{x+y} = x + y$, *provando* $(P1)$.

Agora, para provarmos $(P2)$, *notemos que* $\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. *Daí,*

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a a^{x-y} = x - y$$

Sejam, agora, $\log_a b^n = x$ *e* $\log_a b = y$. *Então,* $a^x = b^n$ *e* $a^y = b$.
Assim, $a^x = (a^y)^n = a^{yn}$, *donde concluímos que* $\log_a b^n = \log_a a^{ny} = n.y$, *provando* $(P3)$.

Exemplo 3.1. *Sejam* x, y *e* z *números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base* k *são números primos positivos satisfazendo*

$$\log_k(x.y) = 49 \qquad e \qquad \log_k\left(\frac{x}{z}\right) = 44.$$

Então, $\log_k(xyz)$ é divisível por 13.

Pela aplicação da propriedade $(P1)$, temos $\log_k x + \log_k y = 49$. Então, existem duas possibilidades para essa soma.

- Primeiro caso: $\log_k x = 2$ e $\log_k y = 47$. Isto se deve ao fato de que se $\log_k y$ fosse um número primo ímpar e diferente de 47, então $\log_k x$ seria par diferente de 2 e não seria primo;
- Segundo caso: $\log_k x = 47$ e $\log_k y = 2$ com justificativa semelhante ao caso anterior.

Agora, usando a propriedade $(P2)$, segue que $\log_k x - \log_k z = 44$, ou seja $\log_k x = \log_k z + 44$, o que exclui a possibilidade de $\log_k x = 2$. Logo $\log_k x = 47$, $\log_k y = 2$ e $\log_k z = 3$.

Concluímos, pela propriedade $(P1)$, que $\log_k(xyz) = \log_k x + \log_k y + \log_k z = 47 + 2 + 3 = 52$ que é um múltiplo de 13.

3.3 Sistema de Logaritmo ou Função Logarítmica

Definição 3.2. *Chamamos de um sistema de logaritmo ou função logarítmica, uma função* $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*, que possui duas propriedades especiais:*

(a) L é crescente, ou seja, se $x < y$, então $L(x) < L(y)$;

(b) $L(x.y) = L(x) + L(y)$, para quaisquer x e y reais positivos.

Em geral, no Ensino Médio, define-se logaritmo, como a função $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, tal que $L(x) = y$ se, e somente se, $a^y = x$. Assim, chamamos de base de um sistema de logaritmos L, ao número a tal que $L(a) = 1$. Esta definição tem alguns inconvenientes.

(1) A definição de função logarítmica não permite apresentar, espontaneamente, o número e como uma base especial que se distingue naturalmente das demais, e "aparece" artificialmente na definição tradicional.

(2) Existe a dificuldade de se estabelecer certas desigualdades fundamentais, por exemplo, $L(1 + x) < x$ (válida para logaritmos de base e).

A seguir, pontuamos algumas propriedades que o sistema de logaritmos apresenta.

Teorema 3.2. *Seja* $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *uma função logarítmica. Então:*

$(P1)$ L é injetiva.

$(P2)$ O logaritmo de 1 é zero.

$(P3)$ Os números reais positivos menores do que 1 tem logaritmos negativos e os números maiores que 1 têm logaritmos positivos.

$(P4)$ Para todo $x > 0$, tem-se $L(1/x) = -L(x)$.

$(P5)$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$, temos $L(x/y) = L(x) - L(y)$.

$(P6)$ Para todo $x \in \mathbb{R}_+$ e $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $L(x^r) = rL(x)$.

$(P7)$ L é ilimitada, superiormente e inferiormente.

Demonstração: 2. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$, com $x \neq y$. Então se $x < y$, temos $L(x) < L(y)$. Da mesma forma, se $y < x$, então $L(y) < L(x)$. Assim, em qualquer hipótese, quando $x \neq y$ conclui-se que $L(x) \neq L(y)$.*
$(P2)$ Segue do item (b) da ***Definição 3.2*** *que $L(1) = L(1.1) = L(1) + L(1)$. Portanto, $L(1) = 0$.*

$(P3)$ Se L é crescente e $0 < x < 1$, segue do item (a) da ***Definição 3.2*** *que $L(x) < L(1) = 0$, sendo que a última igualdade segue da propriedade $(P2)$. Se L é crescente $1 < x$, então também do item (a) da* ***Definição 3.2*** *e da propriedade $(P2)$, segue que $0 = L(1) < L(x)$.*

$(P4)$ Como $x.(1/x) = 1$, para $x > 0$, utilizando o item (b) da ***Definição 3.2****, obtemos $L(x) + L(1/x) = L(1) = 0$, donde $L(1/x) = -L(x)$. Ainda $L(x/y) = L(x.(1/y)) = L(x) + L(1/y) = L(x) - L(y)$ demonstrando $(P5)$.*

$(P6)$ Em primeiro lugar, observamos que a propriedade $L(x.y) = L(x) + L(y)$ se estende para o produto de um número natural r de fatores. Então, $L(x^r) = L(x.x...x) = L(x) + L(x) + ... + L(x) = rL(x)$. Também vale quando $r = 0$, pois para todo número $x \in \mathbb{R}_+$, tem-se que $x^0 = 1$, logo $L(x^0) = L(1) = 0 = 0.L(x)$.

Consideremos, agora, o caso em que $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Como, para todo $x > 0$, temos $x^n.x^{-n} = 1$, segue que $L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0$, e daí $L(x^{-n}) = -L(x^n) = -nL(x)$.

Finalmente, estudaremos o caso geral, em que $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$.
Notemos que $q.L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p.L(x)$, em virtude do que já foi demonstrado.

Da igualdade $q.L(x^r) = p.L(x)$, resulta que $L(x^r) = (p/q).L(x)$, ou seja,

$$L(x^r) = rL(x), r \in \mathbb{Q}.$$

A restrição de que o expoente r seja racional provém do fato de sabermos apenas definir potências com expoente racional.

$(P7)$ Esta propriedade significa que, dados quaisquer números reais a e b, é sempre possível encontrar números positivos x e y tais que $L(x) > b$ e $L(y) < a$.

Para demonstrar que L é ilimitada superiormente, suponhamos que nos seja dado um número real b e que sejamos desafiados a achar um número $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $L(x) > b$. Procederemos da seguinte maneira: escolhemos um número natural n suficientemente grande que

$n > b/L(2)$. Como $L(2)$ é positivo, (Propriedade $P3$), temos $nL(2) > b$. Usando a Propriedade ($P6$), vemos que $nL(2) = L(2^n)$. Portanto, $L(2^n) > b$. Escolhendo $x = 2^n$, o resultado segue. Logo $L(x) > b$.

Para demonstrarmos que L também é ilimitada inferiormente, usaremos que $L(1/x) = -L(x)$, para $x > 0$. Dado qualquer número real a, como vimos acima, podemos encontrar $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $L(x) > -a$. Então, fazendo $y = 1/x$, teremos $L(y) = -L(x) < a$.

Observação 3.1. *Uma função logarítmica L não poderia estar definida para $x = 0$, pois caso contrário, para todo $x > 0$ teríamos $L(0) = L(x.0) = L(x) + L(0)$ e assim, $L(x) = 0$, o que nos dá uma função identicamente nula, contrariando o item (a) da **Definição 3.2**.*

Evidentemente, se $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica e c é uma constante positiva arbitrária, então a função $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por $M(x) = c.L(x)$, é também uma função logarítmica.

O teorema a seguir mostra que existe uma maneira de obtermos funções logarítmicas conhecendo uma delas. Em outras palavras, basta obter uma função crescente $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $L(x.y) = L(x) + L(y)$ e todas as demais funções logarítmicas (ou sistemas de logaritmos) resultarão de L, pela multiplicação por uma constante conveniente. Assim, temos a liberdade de escolher a definição da função L da maneira que nos apareça mais natural e intuitiva que nos permita apresentar demonstrações mais simples.

Teorema 3.3. *Dadas as funções logarítmicas L,$M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = cL(x)$, para todo $x > 0$.*

Demonstração: 3. *Suponhamos, inicialmente, que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Mostraremos que, neste caso, $L(x) = M(x)$, para todo $x > 0$. Como $L(a) = M(a)$, segue que $L(a^r) = M(a^r)$, para todo $r \in \mathbb{Q}$, pois*

$$L(a^r) = rL(a) \qquad e \qquad M(a^r) = rM(a).$$

Suponhamos, por absurdo, que exista algum $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Sem perda de generalidade, seja $L(b) < M(b)$. Escolhemos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $n[M(b) - L(b)] > L(a)$. Então

$$L(a^{1/n}) = L(a)/n < M(b) - L(b).$$

Por simplicidade, escrevemos $c = L(a^{1/n})$. Os números $c, 2c, 3c, ...$, dividem $\mathbb{R}_+$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c. Como $c < M(b) - L(b)$, pelo menos um desses números, digamos mc, pertence ao interior do intervalo $(L(b), M(b))$, ou seja,

$L(b) < mc < M(b)$.

Mas, $mc = mL(a^{1/n}) = L(a^{m/n}) = M(a^{m/n})$.

Logo, $L(b) < L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}) < M(b)$.

Como L *é crescente, a primeira das desigualdades acima implica* $b < a^{m/n}$. *Por outro lado, como* M *também é crescente, a segunda desigualdade implica* $a^{m/n} < b$, *contradição. Logo, tal* b *não existe. Consequentemente, devemos ter* $M(x) = L(x)$, *para todo* $x > 0$.

O caso geral reduz-se ao caso particular acima. Dadas L *e* M, *funções logarítmicas arbitrárias, temos* $L(2) > 0$ *e* $M(2) > 0$, *pois* $2 > 1$. *Seja* $c = M(2) = L(2)$. *Consideremos a função logarítmica* $N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *definida por* $N(x) = cL(x)$. *Como*

$$N(2) = cL(2) = \frac{M(2)}{L(2)}L(2) = M(2),$$

segue que $N(x) = M(x)$, *para todo* $x > 0$, *ou seja, que* $M(x) = cL(x)$, *para todo* $x > 0$.

Teorema 3.4. *Toda função logarítmica* L *é sobrejetiva.*

Demonstração: 4. *Observemos que a função* L *é crescente e ilimitada inferiormente e superiormente (Propriedade* $(P7)$*).*

Observação 3.2. *Segue da propriedade* $(P1)$ *e do Teorema* 3.4, *que toda função logarítmica é bijetora.*

Observação 3.3. *Segue da Observação* 1, *que dada a função logarítmica* $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, *existe um único número* $a > 0$, *tal que* $L(a) = 1$. *Este número é chamado de base do sistema de logaritmos* L.

Observação 3.4. *Se* L_a *e* L_b *são funções logarítmicas,* $L_a(a) = L_b(b) = 1$, *então o Teorema* 3.3 *garante a existência de uma constante* $c > 0$, *tal que* $L_b(x) = cL_a(x)$, *para todo* $x > 0$. *Fazendo* $x = a$, *resulta que* $L_b(a) = c$. *Portanto,* $L_b(x) = L_b(a)L_a(x)$, *que é a fórmula de mudança de base.*

Capítulo 4

Logaritmos de Números Reais Negativos

4.1 Números Negativos têm Logaritmos?

Como Euler conciliou uma controvérsia entre Leibniz e Jean Bernoulli?

Resposta: Números (reais) negativos têm logaritmo complexo, segundo Lima [12]. Mais precisamente, todo número (real) negativo tem uma infinidade de logaritmos e nenhum deles é um número real.

Esta resposta sugere duas novas perguntas:

1ª) Como se define o logaritmo (complexo) de um número real negativo?

2ª) Seria possível organizar uma teoria de logaritmos de tal maneira que todos os números reais (positivos ou não) tivessem logaritmo real?

Para responder a essas perguntas, reexaminaremos os conceitos de logaritmo e exponencial.

Fixemos um número $a > 0$ e consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$. Sabemos que se n é um inteiro positivo então a^n é o produto de n fatores iguais a a, enquanto $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Se $\dfrac{p}{q}$ é um número racional com $q > 0$ então $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

As regras familiares $a^1 = a$ e $a^{x+y} = a^x.\, a^y$ significam que a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$, tem as propriedades seguintes:

$E1.$ $\quad f(1) = a;$

$E2.$ $\quad f(x + y) = f(x).f(y)$

Na realidade, $f(x) = a^x$ é a única maneira possível de se definir uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ com as duas propriedades acima.

Evidentemente, se $a = 1$ então $f(x) = 1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo a função exponencial não tem interesse neste caso. Por isso suporemos $a \neq 1$. Mais precisamente, tomaremos $a > 1$. Então $f : x \to a^x$ será uma bijeção crescente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$. (Se escolhessemos $a < 1$, f seria decrescente.) Assim, f possui uma função inversa $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

A função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}.$, inversa da exponencial de base a, chama-se *função logarítmica* de base a. Tem-se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^+$. Escreve-se $g(y) = \log_a y$ ou (já que fixamos a base a de uma vez por todas) $g(y) = \log y$. Assim, $\log a^x = x$ e $a^{\log y} = y$, por definição. Segue-se que $\log a = 1$ e $\log(xy) = \log x + \log y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Portanto a função logarítmica $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

$L1.$ $g(a) = 1;$
$L2.$ $g(x.y) = g(x) + g(y)$

Na verdade, $g(x) = \log x (= \log_a x)$ é a *única* maneira de se definir uma função contínua $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ com as propriedades $L1$ e $L2$. Esta afirmação (que não provaremos aqui) implica que se podem deduzir todas as propriedades dos logaritmos a partir de $L1$ e $L2$. Um exemplo simples: $L2$ obriga que seja $g(1) = 0$. Com efeito, $g(1) = g(1 \cdot 1) = g(1) + g(1)$.

Costuma causar curiosidade o fato de a função logarítmica estar definida apenas para números reais positivos. Evidentemente, se insistirmos que essa função seja a inversa da exponencial, $\log y$ só poderá ter sentido para valores positivos de y, pois estes são os únicos valores positivos de y, pois estes são os únicos valores assumidos por a^x.

Mas poderíamos abrir mão da igualdade $\log a^x = x$ e tentar simplesmente obter uma função contínua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com as propriedades $L1$ e $L2$ [isto é, $\varphi(a) = 1$ e $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$]. Pela unicidade acima mencionada, teríamos necessariamente $\varphi(x) = \log x$ quando $x > 0$.

De saída, uma dificuldade: se φ cumpre $L1$ e $L2$ então o valor de $\varphi(y)$ não pode estar definido para $y = 0$. Com efeito, neste caso teríamos $\varphi(0) = \varphi(0 \cdot y) = \varphi(0) + \varphi(y)$, donde $\varphi(y) = \varphi(0)$ para todo y, contradizendo $L1$.

Este é, entretanto, o único obstáculo. Removendo o zero do domínio, podemos definir uma função contínua $\varphi : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, pela regra $\varphi(x) = \log |x|$. Então valem $L1$ e $L2$. Na realidade, φ é a única extensão da função $\log$ a $\mathbb{R} - \{0\}$ que mantém essas duas propriedades.

Com efeito, a validez de $L2$ obriga $0 = \log 1 = \varphi(1) = \varphi((-1)(-1)) = \varphi(-1) + \varphi(-1)$, logo $\varphi(-1) = 0$. Daí $\varphi(-y) = \varphi((-1)y) = \varphi(-1) + \varphi(y) = \varphi(y) = \log y = \log|-y|$ para todo $y > 0$.

Aparentemente o problema está resolvido. A regra $\log y = \log(-y)$ permite estender a função logarítmica aos números negativos, de modo que seus valores continuem reais e ainda se tenha que o logaritmo do produto seja a soma dos logaritmos dos fatores. Infelizmente, porém, não vale mais a igualdade $a^{\log x} = x$. Temos apenas $a^{\log x} = |x|$.

O ponto onde chegamos retrata a situação em que se encontrava a teoria dos logaritmos na primeira metade do século 18. Leibniz era de opinião que um número negativo não pode ter logaritmo real porque toda potência de expoente real de um número positivo a é um número positivo. Jean Bernoulli afirmava que números negativos tem logaritmo real. E mais ainda: que $\log(-x) = \log x$. Seguiu-se uma longa controvérsia epistolar (em torno de 1712), onde cada um dos dois alinhava argumentos em favor do seu ponto de vista, assumindo posições mais e mais radicais, sem chegarem nunca a um acordo.

Pelo que vimos acima, suas opiniões (ambas respeitáveis) pareciam irreconciliáveis. Leibiniz olhava para o logaritmo de x na base a como o expoente y tal que $a^y = x$. Jean Bernoulli insistia na validez da regra $\log(xy) = \log x + \log y$. O fato é que estas duas atitudes só podem ser compatíveis quando nos limitamos a considerar logaritmos de números positivos.

Foi aí que Euler, em 1749, escreveu um trabalho com o seguinte título: *Da controvérsia entre os Senhores Leibniz e Bernoulli sobre os logaritmos dos números negativos e imaginários*. Nele, Euler [7] esclareceu definitivamente a questão, formulando a teoria dos logaritmos que nos termos que até hoje são aceitos e realizando o feito de conciliar os pontos de vista, aparentemente antagônicos, de Leibniz e Jean Bernoulli. Vejamos como.

Em primeiro lugar, Euler adotou como base de suas exponenciais e seus logaritmos o número $e = 2,717281... = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Como vimos, esta escolha simplifica grandemente as fórmulas e facilita o desenvolvimento das ideias, conforme Lima [12].

O ponto de partida para a teoria da exponencial e do logaritmo segundo Euler é a definição da potência e^z, onde o expoente $z = x + yi$ é um número complexo. Sabe-se do Cálculo conforme Guidorizzi [10] que para todo número real x, tem-se

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...,$$

as reticências significando que se trata de uma série infinita.

A igualdade acima significa que a soma das n primeiras parcelas do segundo membro é um valor aproximado para e^x e que essa aproximação pode tornar-se tão precisa quanto se deseje, desde que n seja tomado suficientemente grande. Conheciam-se também, desde muito antes de Euler, os desenvolvimentos em série de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, que são:

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

O desenvolvimento em série de e^x para x real sugere de modo evidente a definição da exponencial e^z, onde $z = x + iy$ é um número complexo. Basta por

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$$

No caso particular em que $z = iy$ é um "imaginário puro", levando-se em conta os valores das potências sucessivas de $i = \sqrt{-1}$, uma manipulação bem simples mostra que se tem

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + ...\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + ...\right).$$

Logo $e^{iy} = \cos y + i\operatorname{sen} y$. Esta é a maravilhosa *fórmula de Euler*. Dela resulta que, para $z = x + iy$ arbitrário, tem-se $e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$, ou seja, $e^z = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$.

Lembrando a representação geométrica dos números complexos, isto mostra que se $z = x + iy$ então e^z é o ponto do plano cuja distância à origem é e^x e o segmento que o liga à origem forma um ângulo de y radianos com o eixo das abscissas, conforme Figura 4.1.

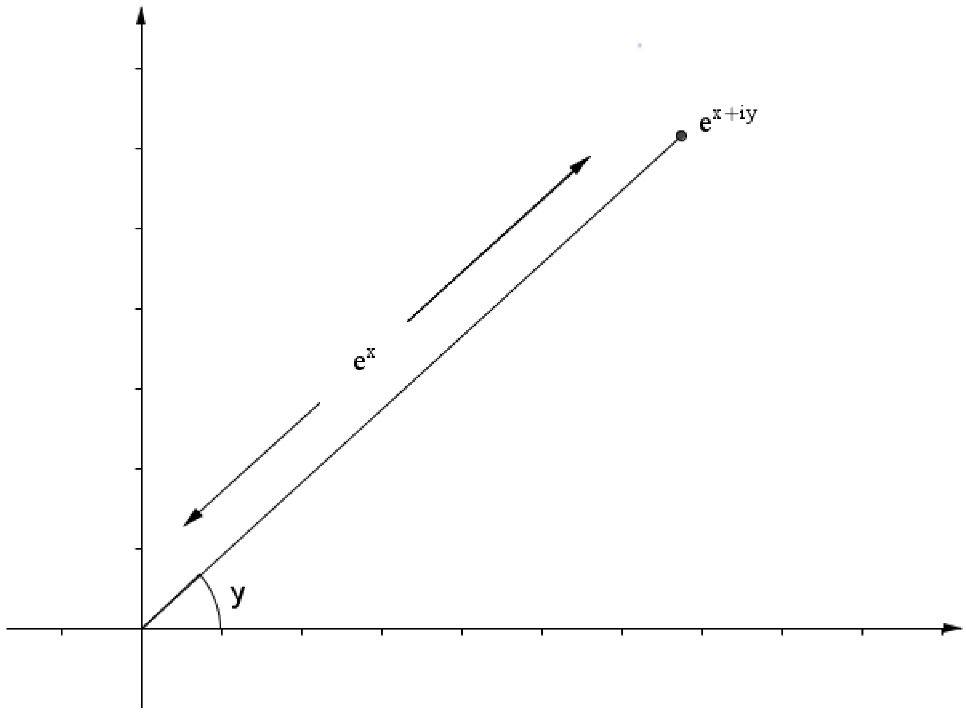

Figura 4.1: Representação Geométrica de e^z

Uma consequência imediata da fórmula $e^z = e^x(\cos y + i\mathrm{sen}\, y)$ é que todo número complexo $w \neq 0$ é da forma $w = e^z$ para algum z, ou seja, que a função $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$, dada por $exp(z) = e^z$, é sobrejetiva. Ela mostra também que exp não é injetiva. Com efeito, tem-se $e^z = e^{z'}$ se, e somente se $z = x + iy$ e $z' = x + i(y + 2k\pi)$, onde k é inteiro.

Euler definiu o logaritmo de um número complexo $w \neq 0$ como um número complexo z tal que $e^z = w$.

Se $w = r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta) = re^{i\theta}$ é a "forma polar" do número complexo w, então $w = e^{\log r}(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta) = e^z$, onde $z = \log r + i\theta$. Como o ângulo θ está definido a menos de um múltiplo inteiro de 2π, e como $r = |w|$, temos $\log w = \log|w| + (2k\pi + \theta)i$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. Isto mostra explicitamente que o logaritmo de um número complexo tem uma infinidade de valores.

4.2 Representação Exponencial

Por volta de 1747, Euler determinou quatro identidades fundamentais para a matemática, sendo a primeira a mais importante. Euler usando estudos sobre funções complexas chegou à conclusão que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\,\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

que é chamada de forma exponencial de um complexo de módulo 1 e argumento θ. Fazendo $\theta = \alpha + \beta$ em (4.1), obtemos:

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha+\beta) + i\text{sen}\,(\alpha+\beta) \\ &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta + i\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + i\text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha \\ &= (\cos\alpha + i\text{sen}\,\alpha) \cdot (\cos\beta + i\text{sen}\,\beta) \\ &= e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \end{aligned}$$

Observamos que a igualdade $e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\,\theta$ se comporta como uma exponencial, então um número complexo cuja forma trigonométrica é $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$ tem representação exponencial $z = \rho \cdot e^{i\theta}$. As outras identidades são:

- $\mathbf{e^{-i\theta}} = \cos\theta - \mathbf{i}\text{sen}\,\theta$

Demonstração: Como $e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\,\theta$, então $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\text{sen}\,(-\theta)$. Sabemos que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\text{sen}\,(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$, portanto:

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\text{sen}\,\theta \tag{4.2}$$

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Demonstração: Como $e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\,\theta$ e $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\text{sen}\,\theta$, somando as igualdades membro a membro, temos:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{4.3}$$

- $\text{sen}\,\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Demonstração: Como $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ e $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$, subtraindo as igualdades membro a membro, temos:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\operatorname{sen}\theta \Longrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{4.4}$$

No ano de 1748, Euler apresenta vários resultados importantes para a matemática de sua época, dentre esses se destaca a identidade numérica obtida quando substituímos $\theta = \pi rad$ na igualdade $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, ou seja:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1 + 0 = -1$$

e, assim,

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{4.5}$$

Essa fórmula é conhecida como fórmula de Euler.

4.3 Operações na Forma Exponencial de Complexos

De acordo com a estrutura de Sonnino e Mirshawka [18], as seguintes operações na forma exponencial de complexos são válidas:

- **Multiplicação**: Dados os complexos $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\theta_2}$, então:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 \cdot e^{i\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

- **Divisão**: Dados os complexos $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\theta_2} \neq 0$, então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot e^{i\theta_1}}{\rho_2 \cdot e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

- **Potenciação**: Dado o complexo $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ e $n \in \mathbb{Z}$, utilizando a propriedade da multiplicação, temos:

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho e^{i\theta}.\rho e^{i\theta}. \ldots .\rho e^{i\theta} = \rho.\rho. \ldots .\rho.e^{i\theta}.e^{i\theta}. \ldots .e^{i\theta} = \rho^n.e^{i\theta+i\theta+\cdots+i\theta} = \rho^n.e^{i(n\theta)}.$$

Exemplo 4.1. *Seja z um número complexo de módulo 1 e de argumento θ, se n é um inteiro positivo, mostre que $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ é real.*

Demonstração: Vamos utilizar a forma exponencial $z = \rho \cdot e^{i\theta}$, como $\rho = 1$, então $z = e^{i\theta}$, logo:

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{(e^{i\theta})^n}{1+(e^{i\theta})^{2n}} = \frac{e^{i(n\theta)}}{1+e^{i(2n\theta)}} = \frac{1}{e^{-i(n\theta)}[1+e^{i(2n\theta)}]} = \frac{1}{e^{-i(n\theta)}+e^{i(n\theta)}} = \frac{1}{2\cos(n\theta)} \in \mathbb{R}.$$

4.4 Aplicações da Forma Exponencial na Trigonometria

A conexão entre números complexos e trigonometria, segundo Neto [16], se estabelece quando um complexo $z = a + bi$ pode ser representado da forma $z = \rho(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta)$ onde $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$, essa representação junto com a fórmula de De Moivre é de fundamental importância para demonstrar diversas identidades trigonométricas. Vamos agora mostrar algumas identidades onde o uso de números complexos simplifica em muito essas demonstrações.

Exemplo 4.2. *Expressar $\cos 5\theta$ e $\mathrm{sen}\,5\theta$ em função de $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\,\theta$, respectivamente.*

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta + i\mathrm{sen}\,5\theta &= (\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta)^5 = \sum_{p=0}^{5}\left[\binom{5}{p}(\cos\theta)^{5-p}(i\mathrm{sen}\,\theta)^p\right] \\
&= \binom{5}{0}cos^5\theta.i^0sen^0\theta + \binom{5}{1}cos^4\theta.i^1sen^1\theta + \cdots + \binom{5}{5}cos^0\theta.i^5sen^5\theta \\
&= cos^5\theta + 5icos^4\theta\mathrm{sen}\,\theta + \cdots + i^5sen^5\theta \\
&= (cos^5\theta - 10cos^3\theta sen^2\theta + 5\cos\theta sen^4\theta) + i(sen^5\theta - 10cos^2\theta sen^3\theta + 5cos^4\theta\mathrm{sen}\,\theta).
\end{aligned}$$

Obtemos assim uma igualdade de dois complexos, então:

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= cos^5\theta - 10cos^3\theta sen^2\theta + 5\cos\theta sen^4\theta \\
&= cos^5\theta - 10cos^3\theta(1-cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-cos^2\theta)^2 \\
&= 16cos^5\theta - 20cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 5\theta &= sen^5\theta - 10cos^2\theta sen^3\theta + 5cos^4\theta\operatorname{sen}\theta \\
&= sen^5\theta - 10(1-sen^2\theta)sen^3\theta + 5(1-sen^2\theta)^2\operatorname{sen}\theta \\
&= 16sen^5\theta - 20sen^3\theta + 5\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.3. *Calcule as somas abaixo:*
(i) $A = senx + sen3x + sen5x + \cdots + sen(2n-1)x$
(ii) $B = cosx + cos3x + cos5x + \cdots + cos(2n-1)x$

Solução: Seja $z = \cos x + i\operatorname{sen} x$, então:

$$z^3 = \cos 3x + i\operatorname{sen} 3x$$

$$z^5 = \cos 5x + i\operatorname{sen} 5x$$

$$\cdots$$

$$z^{2n-1} = \cos(2n-1)x + i\operatorname{sen}(2n-1)x$$

Somando membro a membro as igualdades anteriores, tem-se:

$$[\cos x + \cdots + \cos(2n-1)x] + i[\operatorname{sen} x + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x] = z + \cdots + z^{2n-1} = \frac{z^{2n+1} - z}{z^2 - 1}.$$

Fazendo $w = \dfrac{z^{2n+1} - z}{z^2 - 1}$, temos:

$$w = \frac{\cos(2n+1)x + i\text{sen}\,(2n+1)x - \cos x - i\text{sen}\, x}{\cos 2x + i\text{sen}\, 2x\ - 1} = \frac{[\cos(2n+1)x - \cos x] + i[\text{sen}\,(2n+1)x - \text{sen}\, x]}{\cos^2 x - \text{sen}^{\,2} x + i2\text{sen}\, x \cos x\ - 1}.$$

Utilizando as expressões

$$\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

e

$$\cos p - \cos q = -2\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

chegaremos em:

$$\begin{aligned} w &= \frac{-2\text{sen}\,(n+1)x\text{sen}\,(nx) + 2i\cos(n+1)x\text{sen}\,(nx)}{-2\text{sen}^{\,2} x + 2i\text{sen}\, x\cos x} \\ &= \frac{2i\text{sen}\,(nx)[i\text{sen}\,(n+1)x + \cos(n+1)x]}{2i\text{sen}\, x(i\text{sen}\, x + \cos x)} \\ &= \frac{2i\text{sen}\,(nx)[i\text{sen}\,(n+1)x + \cos(n+1)x]}{2i\text{sen}\, x(i\text{sen}\, x + \cos x)} \cdot \frac{(-i\text{sen}\, x + \cos x)}{(-i\text{sen}\, x + \cos x)}. \end{aligned}$$

Como $\cos x = \cos(-x)$ e $-\text{sen}\, x = \text{sen}\,(-x)$, então:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\text{sen}\,(nx)[\cos(n+1)x + i\text{sen}\,(n+1)x].[\cos(-x) + i\text{sen}\,(-x)]}{\text{sen}\, x} \\ &= \frac{\text{sen}\,(nx)[\cos(nx) + i\text{sen}\,(nx)]}{\text{sen}\, x} = \frac{\text{sen}\,(nx)\cos(nx)}{\text{sen}\, x} + i\frac{\text{sen}^{\,2}(nx)}{\text{sen}\, x} \\ &= \frac{\text{sen}\,(2nx)}{2\text{sen}\, x} + i\frac{\text{sen}^{\,2}(nx)}{\text{sen}\, x}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A = \text{sen}\, x + \text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 5x + \cdots + \text{sen}\,(2n-1)x = \frac{\text{sen}^{\,2}(nx)}{\text{sen}\, x}$$

e

$$B = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2n-1)x = \frac{\text{sen}\,(2nx)}{2\text{sen}\, x}.$$

4.5 O Logaritmo

No caso real, a função logaritmo é a inversa da função exponencial, isto é, um número real y é o logaritmo do número real positivo x, $\log(x) = y$, se, e somente se, $e^y = x$. De acordo com Soares [17], no caso complexo temos um problema pois a exponencial complexa é periódica $e^z = e^{z + 2\pi ij}$, $j \in \mathbb{Z}$. Assim sendo, é preciso ter cautela para invertê-la pois não é possível obter uma única função f satisfazendo $\exp(f(z)) = z$ porque, dada uma tal f, para a função $g(z) = f(z) + 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$, também vale que

$$\exp(g(z)) = \exp(f(z) + 2\pi ik) = \exp(f(z)) \exp 2\pi ik = \exp(f(z)).$$

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, queremos definir o logaritmo de z por

$$\text{se } z = e^w \text{ então } w = \log z.$$

Escreva $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$ e $w = u + iv$. A expressão acima fica

$$re^{i\theta} = e^{u + iv} = e^u e^{iv} \tag{4.6}$$

Primeiramente $|z| = |e^{u + iv}|$ fornece

$$r = e^u \tag{4.7}$$

e temos a única solução $u = \log r$ onde $\log$ é o logaritmo real. De (4.6) e (4.7) resulta que

$$e^{i\theta} = e^{iv}$$

e portanto

$$v = \theta + 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$w = \log z = \log r + i(\theta + 2\pi n)$$

ou

$$\log z = \log |z| + i \arg z.$$

Essa igualdade deixa clara a natureza multiforme do logaritmo pois um número não nulo z tem uma infinidade de argumentos.

Para obtermos uma *função*, somos forçados a nos restringir a domínios em $\mathbb{C}$ nos quais o argumento possa ser determinado univocamente. Tais domínios podem ser obtidos como se segue: tome uma semi-reta fechada emanando da origem,

$L_\phi = \{(t\cos\phi, t\ sen\phi)\ :\ t \leq 0 \in \mathbb{R}\}$, onde $0 \leq \phi < 2\pi$ e ponha

$$\mathcal{D}_\phi = \mathbb{C}\ \setminus\ L_\phi.$$

Para todo $z \in \mathcal{D}_\phi$ temos precisamente um único valor $\arg_\phi z$ satisfazendo $\phi < \arg_\phi < \phi + 2\pi$. Portanto podemos definir uma função, chamada um *ramo do logaritmo*

$$\log : \mathcal{D}_\phi \to \mathbb{C}$$

por

$$\log z = \log|z| + i\arg_\phi z.$$

O ramo do logaritmo definido no domínio $\mathcal{D}_0$, obtido retirando-se de $\mathbb{C}$ o semi-eixo $(x, 0)$, $x \leq 0$, é chamado de *ramo principal*.

Para o ramo principal temos $-\pi < \arg_0 z < \pi$ e afirmamos que $\arg_0 z$ é uma função contínua em $\mathcal{D}_0$. Para ver isso considere os três domínios

$$\mathcal{U}_1 = \{z\ :\ Im(z) > 0\}$$

$$\mathcal{U}_2 = \{z\ :\ Re(z) > 0\}$$

$$\mathcal{U}_3 = \{z\ :\ Im(z) < 0\}$$

Sua união $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3$ é $\mathcal{D}_0$, ver Figura 4.2.

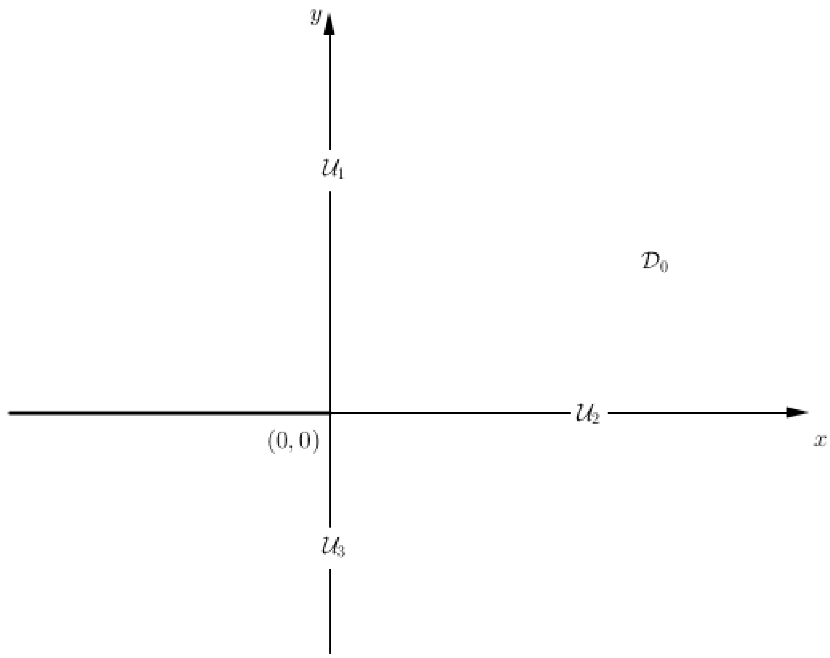

Figura 4.2: Domínio de Definição do Ramo Principal do Logaritmo

Se um número complexo z está em $\mathcal{U}_1$, então seu argumento satisfaz $0 < \arg_0 z < \pi$. Escrevendo $z = x + iy$ temos que

$$\cos(\arg_0 z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\textbf{Re}\, z}{|z|}$$

e podemos tomar

$$\arg_0 z = \arccos\left(\frac{\textbf{Re}\, z}{|z|}\right)$$

que é uma função contínua (a inversa da função $\cos$ no intervalo $(0, \pi)$ tal que $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$). No domínio $\mathcal{U}_2$ temos que $\frac{-\pi}{2} < \arg_0 z < \frac{\pi}{2}$ e

$$\operatorname{sen}(\arg_0 z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\textbf{Im}\, z}{|z|}.$$

Aqui tomamos

$$\arg_0 z = \text{arcsen}\left(\frac{\textbf{Im}\, z}{|z|}\right)$$

onde arcsen é a inversa da função sen no intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e que vale 0 em 0; também uma

função contínua. Para $z \in \mathcal{U}_3$ temos $-\pi < \arg_0 z < 0$. Novamente

$$\cos(\arg_0 z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\textbf{Re}\, z}{|z|}.$$

Aqui fazemos

$$\arg_0 z = \arccos\left(\frac{\textbf{Re}\, z}{|z|}\right)$$

onde $\arccos$ é a inversa da função $\cos$ no intervalo $(-\pi, 0)$ tal que $\arccos(0) = \frac{-\pi}{2}$, uma função contínua. Como $\arg_0 z$ é contínua em cada um dos domínios $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ e $\mathcal{U}_3$, ela o é a união desses domínios e portanto é contínua em $\mathcal{D}_0$.

Com isso em mãos podemos afirmar que o ramo principal do logaritmo é uma função contínua em $\mathcal{D}_0$. Vamos mostrar que ela é holomorfa nesse domínio. Dado $z_0 \in \mathcal{D}_0$ seja $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_0} = z_0$. Então

$$\log'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\log z - \log z_0}{z - z_0} = \lim_{w\to w_0} \frac{w - w_0}{e^{w} - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

Portanto

$$\log'(z) = \frac{1}{z} \text{ qualquer que seja } z \in \mathcal{D}_0.$$

O mesmo argumento utilizado acima mostra que o ramo de $\log$ definido em $\mathcal{D}_\phi$ é holomorfo, qualquer que seja ϕ.

4.6 Potências Arbitrárias

Uma vez definidas as funções exponencial e logaritmo podemos introduzir a

Definição 4.1. *Dados um domínio $\mathcal{D}_\phi$, como acima, e um número $\lambda \in \mathbb{C}$, a função $z \longmapsto z^\lambda$ é definida por*

$$z^\lambda = \exp(\lambda \log z)$$

onde $z \in \mathcal{D}_\phi$ e $\log$ é o ramo do logaritmo definido em $\mathcal{D}_\phi$.

O *ramo principal* da função z^λ é obtido tomando-se o ramo principal do logaritmo na expressão que a define. Notando f esse ramo temos que

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}_0 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^\lambda \end{aligned}$$

é holomorfa em $\mathcal{D}_0$ e sua derivada é (usando a regra da cadeia)

$$f'(z) = \exp(\lambda \log z)\frac{\lambda}{z} = \lambda \frac{\exp(\lambda \log z)}{\exp(\log z)} = \lambda \exp((\lambda - 1)\log z) = \lambda z^{\lambda - 1}.$$

Essa função generaliza a noção usual de potência pois, se n é um inteiro positivo

$$z^n = \exp(n \log z) = \underbrace{\exp(\log z) \cdots \exp(\log z)}_{n \;\; vezes} = \underbrace{z \cdots z}_{n \;\; vezes}$$

.

Já (lembre-se que estamos considerando o ramo principal)

$$\exp\left[\frac{1}{n}\log z\right] = \exp\left[\log \sqrt[n]{r} + i\frac{\arg_0 z}{n}\right] = \sqrt[n]{r}\exp\left[i\frac{\arg_0 z}{n}\right] = \sqrt[n]{z}$$

onde $z = re^{\arg_0 z}$. Portanto,

$$\exp\left(\frac{1}{n}\log z\right)$$

fornece uma raiz n-ésima de z, conforme Churchill [3].

Capítulo 5

História do Problema

5.1 Introdução

Ao longo do século XX, a grande maioria, senão a totalidade dos textos matemáticos trazem uma definição de logaritmo de números reais que exclui a priori os números reais negativos do seu universo de validade, conforme Dias [6], isto é, definem o logaritmo ora como uma das operações inversas da potenciação, ora como a função inversa da exponencial, ou mesmo como a área de uma região do plano delimitada pelo gráfico de uma certa hipérbole, segundo Lima [13]. Nesses três tipos de definições dos logaritmos de números reais, os negativos são excluidos do universo para o qual essas definições se aplicam. Do ponto de vista lógico-matemático hegemônico atualmente, somente quando são definidos os logaritmos dos números complexos, como uma das operações inversas da potenciação, é que também ficam definidos os logaritmos dos números negativos, demonstrados como sendo uma infinidade de imaginários, de acordo com Lima [12].

Todavia, Felix Klein (1849-1925), um dos mais proeminentes matemáticos da sua época, chegou a classificar como "um tanto arbitrária" - até mesmo como "uma convenção autoritária" - as chamadas estipulações que resultam na exclusão dos negativos do domínio real da função logarítmica, uma vez que, de acordo com ele, suas razões não seriam tão evidentes como normalmente se supõe. Ele enfatizou como certas dificuldades eram evitadas e não eram explicadas satisfatoriamente já desde aquele tempo. Portanto, diante das considerações de Klein, não seria estranho que um curioso perguntasse se não seria possível que os logaritmos fossem definidos de alguma outra forma, de modo que os números negativos pudessem ter logaritmos reais.

Ora, como mostra Elon Lages Lima, um proeminente matemático brasileiro, é perfeitamente possível definir uma função no conjunto dos números reais com quase as mesmas propriedades algébricas da função logarítmica usual, de modo que os números negativos sejam incluídos no seu domínio. Ou seja, a função logarítmica não precisa necessariamente ser definida como a inversa da exponencial; é possível defini-la de uma outra forma, de modo que seja preservada a propriedade básica $\log x = \log(-x)$ implique na perda da propriedade $a^{\log x} = x$, que somente valeria na forma $a^{\log x} = |x|$, conforme Lima [12].

5.2 Historiografia dos Logaritmos ou Apologia da Genialidade

Quais definições e propriedades dos logaritmos foram propostas, adotadas e trabalhadas até que fosse institucionalizada a definição hegemônica atual? Como ocorreu o processo de institucionalização da definição hegemônica atual de logaritmo? Quais os atores envolvidos? Quais debates, polêmicas ou controvérsias houve? Em quais fóruns? Quais foram os argumentos apresentados? Quais foram os aceitos? Quais foram os refutados? Quem foi vencedor, quem foi vencido? Como a historiografia responde a essas perguntas?

Essas questões ganham maior relevância ainda quando se nota que as respostas para essas questões históricas ainda não foram apresentadas ou, se foram, normalmente seguem um padrão canônico, estejam contidas em manuais didáticos, em artigos de divulgação, como mostra Lima [12], de atualização ou mesmo em compêndios de história, segundo Eves [9]: Euler é o grande herói, apresentado como o marco definitivo que separa a pré-história da história dos logaritmos, como aquele que separa o erro da verdade, a irracionalidade da racionalidade, como aquele que estabeleceu definitivamente a consistência, a objetividade, a harmonia e a beleza nesse campo da matemática. Tradicionalmente, destaca-se apenas os erros, os equívocos, a ignorância e a insuficiência teórica e metodológica de Leibniz, Bernouilli e D'Alembert, para citar apenas os mais famosos antecessores ou adversários de Euler em relação a esse assunto, enquanto se enfatiza a genialidade, os acertos, a perspicácia e a criatividade do gênio, do herói Euler.

Carl Boyer, por exemplo, constrói sua narrativa referindo-se aos fatos matemáticos bem aceitos atualmente como descobertas e percepções, embora se refira aos logaritmos reais dos números negativos como crenças erradas que dominaram o debate até que o brilhante Euler resolveu definitivamente a questão, esclarecendo a verdadeira natureza dos logaritmos. Para Boyer, os melhores matemáticos do século XVIII, dentre os quais Bernoulli, Leibniz e D'Alembert, deveriam ter percebido a verdade há mais tempo, uma vez que já estava clara diante de seus olhos, mas apenas o cego Euler apresentou a resposta correta para o problema! Portanto, é uma narrativa que põe em lados opostos as crenças de alguns matemáticos do século XVIII, julgadas erradas pela comparação com aquilo que se institucionalizou como correto e verdadeiro posteriormente, exatamente as ideias percebidas e descobertas somente por aquele considerado como o mais brilhante gênio matemático do século, segundo Boyer [2].

5.3 Logaritmos: Uma História de Controvérsias

Os trabalhos que Euler escreveu sobre os logaritmos, contendo importantíssimas inovações na forma de tratá-los, foram escritos, ao que tudo indica e pelo menos parcialmente, sob a influência da discussão do assunto que teve por correspondência com Bernoulli entre 1727 e 1729 e da leitura das cartas trocadas por Leibniz e Bernoulli, que foram publicadas em 1745. No célebre *Introductio in analysin infinitorum*, seu primeiro tratado de análise, escrito entre 1743 e 1744 e publicado em 1748, os logaritmos foram pela primeira vez apresentados sistematicamente como exponenciais, de uma forma muito semelhante àquela que é adotada atualmente, De acordo com Euler [8]. Depois de produzir uma demonstração para a fórmula $\log(\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta) = i\theta$, depois batizada com o seu nome, Euler acreditou ter provado que todos os números possuem infinitos logaritmos imaginários, embora somente os positivos possuam um único logaritmo real. Euler também escreveu dois artigos, o primeiro, *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, em 1747, somente publicados em 1862, enquanto o segundo, *De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*, foi escrito em 1749 e publicado em 1751, como mostra Euler [7]. A abordagem que Euler deu ao assunto nesses dois artigos foi diferente: a demonstração apresentada no segundo artigo, que foi publicado primeiro, é baseada na utilização de infinitésimais, conceito muito discutido na época, assim como os negativos e imaginários, e não conseguiu convencer totalmente os matemáticos; enquanto a demonstração apresentada no primeiro artigo é essencialmente a mesma adotada atualmente, embora não tenha repercutido entre os matemáticos da época, justamente porque somente foi publicado em 1862.

Segundo Taton [19], nesse mesmo período, quando Euler escreveu esses trabalhos, ele manteve uma controvérsia epistolar sobre os logaritmos dos números negativos, desta vez com D'Alembert, que também escreveu um artigo sobre o assunto, conforme D'Alembert [4]. Nas suas cartas, Euler tentou inutilmente convencê-lo sobre a verdade das suas teses, pois D'Alembert nunca concordou com ele, nem jamais desistiu de apresentar novos argumentos a favor de sua própria tese, a saber, que os logaritmos das quantidades negativas eram reais ou que, ao menos, poderiam ser supostos como tais. D'Alembert, na verdade, continuava definindo logaritmo pela correspondência entre os termos de uma progressão aritmética e de outra geométrica, como fizeram Napier e Bürgi, e não adotou a definição da função logarítmica como a inversa da função exponencial, tal como foi proposta por Euler, conforme D'Alembert [5].

Em suma, para concluir, as controvérsias da história dos logaritmos não são tratadas apropriadamente nas narrativas canônicas encontradas nos livros didáticos, compêndios de história da matemática e artigos de divulgação. Tanto a controvérsia entre Leibniz e Bernoulli, quanto a controvérsia entre Euler e D'Alembert, foram marcadas por aspectos de diversas ordens, que variaram dos problemas teóricos específicos relacionados com a adoção da própria definição dos logaritmos e com as propriedades decorrentes da mesma, aos problemas teóricos e filosóficos associados aos conceitos dos números negativos e imaginários ou aos problemas institucionais que envolveram por exemplo D'Alembert e Euler. Esta constatação aponta para a necessidade de se investigar adequadamente a trajetória dessas controvérsias. Afinal de contas, como e por que, os matemáticos da época adotaram as definições propostas por Euler, aceitando suas teses sobre as propriedades dos logaritmos, mesmo com tantas dúvidas, questionamentos e contestações expressivas ainda existindo sobre o assunto?

Capítulo 6

Abordagem no Ensino Médio

Já é do nosso conhecimento que um número complexo $z = a + bi$ fica claramente determinado pelo par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, e esse par pode ser representado num plano denominado de plano de Argand-Gauss, então:

1. Será que seria possível determinar a equação de uma reta que passe pelos afixos de dois complexos z_1 e z_2 $(z_1 \neq z_2)$?

2. Se fossem dados três complexos z_1, z_2 e z_3 não colineares, classificar quanto aos lados o triângulo formado pelos seus afixos sem ter que calcular a distância entre esses afixos?

Daremos a resposta para estas perguntas mais adiante e também apresentaremos outras aplicações de complexos à geometria.

6.1 Equação da Reta por Dois Afixos

Vamos considerar sobre um plano α, um sistema de coordenadas cartesianas e seja a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \alpha \\ z & \longmapsto & (a, b) \end{array}$$

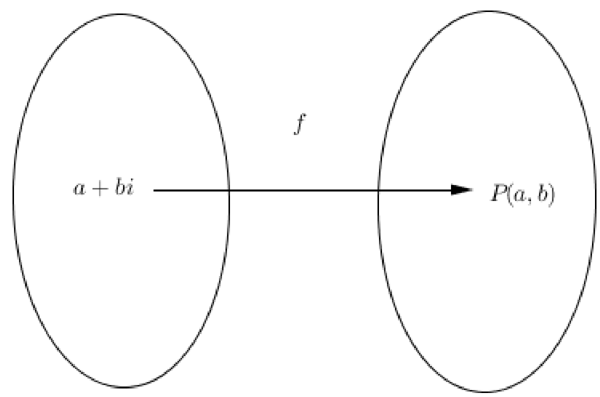

Figura 6.1: Diagrama de Representação da Aplicação $z \longmapsto (a, b)$

Sejam os complexos z_1 e z_2 tais que os pontos P e Q do plano α são definidos respectivamente por $f(z_1)$ e $f(z_2)$, e seja também um ponto $X = f(z)$ qualquer da reta determinada por P e Q, conforme a Figura 6.2.

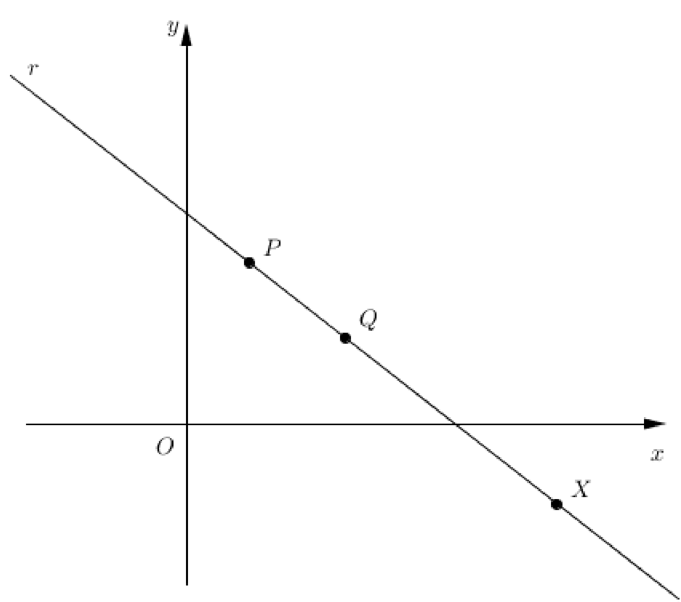

Figura 6.2: Reta r passando por dois afixos

Observamos que o vetor $\overrightarrow{XP}$ é uma combinação linear do vetor $\overrightarrow{QP}$, logo:

$$(X - P) = \lambda(Q - P), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $X_P = z - z_1$ e $Q - P = z_2 - z_1$, teremos que a equação da reta determinada pelos afixos de z_1 e z_2 é dada por $z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$. Daí,

$$z - \lambda(z_2 - z_1) - z_1 = 0. \tag{6.1}$$

Se $\lambda = 0$, temos $z = z_1$ e se $\lambda = 1$, temos que $z = z_2$, ou seja, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ encontraremos um complexo z pertencente à reta s.

Exemplo: *Determine a equação da reta que passa pelos afixos de $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 5 - i$. Verifique também se os complexos $z_3 = 4 - 2i$ e $z_4 = -11 + 7i$ pertencem a essa reta.*

Solução: Vamos inicialmente determinar a equação da reta s que passa pelos afixos de z_1 e z_2.

Temos que $z - \lambda(z_2 - z_1) - z_1 = 0$, logo:

$$z - \lambda(5 - i - 1 - i) - 1 - i = 0 \Rightarrow z - \lambda(4 - 2i) - z_1 = 0$$

que é a equação da reta s.

Vamos verificar se $z_3 \in s$:
$z_3 - \lambda(4 - 2i) - 1 - i = 0 \Rightarrow 4 - 2i - \lambda(4 - 2i) - 1 - i = 0 \Rightarrow 3 - 3i - \lambda(4 - 2i) = 0.$

Segue que $\lambda = \dfrac{3 - 3i}{4 - 2i} = \dfrac{3 - 3i}{4 - 2i} \cdot \dfrac{4 + 2i}{4 + 2i} = \dfrac{9}{10} - \dfrac{3}{10}i \notin \mathbb{R}$, logo $z_3 \notin s$.

Vamos verificar se $z_4 \in s$:

$z_4 - \lambda(4 - 2i) - 1 - i = 0 \Rightarrow -11 + 7i - \lambda(4 - 2i) - 1 - i = 0 \Rightarrow -12 + 6i - \lambda(4 - 2i) = 0.$

Segue que $\lambda = \dfrac{-12 + 6i}{4 - 2i} = \dfrac{-12 + 6i}{4 - 2i} \cdot \dfrac{4 + 2i}{4 + 2i} = -3 \in \mathbb{R}$, logo $z_4 \in s$.

Observe que o complexo

$$\frac{a + bi}{c + di} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

De fato, pois:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Para ser real, devemos ter $\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2} = 0$, ou seja, $bc - ad = 0$ e, consequentemente, $bc = ad$.

6.2 Condição de Alinhamento de Três Complexos

Dados os complexos z_1, z_2 e z_3 tais que $f(z_1) = P$, $f(z_2) = Q$ e $f(z_3) = R$, com P, Q, $R \in \mathbb{R}$, a condição para que esses três pontos estejam alinhados é que exista $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $z_3 - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$, ou seja:
$\lambda = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$(lembrando que se z é real, então $z = \overline{z}$) $\Longleftrightarrow \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left(\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)} = \dfrac{\overline{z_3} - \overline{z_1}}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}$

Daí, segue que:

$$(z_3 - z_1).(\overline{z_2} - \overline{z_1}) - (z_2 - z_1).(\overline{z_3} - \overline{z_1}) = 0.$$

Desenvolvendo, teremos:

$$z_2\overline{z_3} + z_1\overline{z_2} + z_3\overline{z_1} - (z_1\overline{z_3} + z_3\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix} = 0. \tag{6.2}$$

É a condição necessária e suficiente para que z_1, z_2 e z_3 sejam colineares.

Exemplo: *Verifique se os complexos $z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-i$ e $z_3 = 6-7i$ são colineares.*

Solução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+i & 3-i & 6-7i \\ 2-i & 3+i & 6+7i \end{vmatrix} = (3-i)(6+7i) + (6-7i)(2-i) + (2+i)(3+i)$$

$$-(2-i)(3-i) - (3+i)(6-7i) - (6+7i)(2+i) = 0$$

Logo, z_1, z_2 e z_3 são colineares.

Podemos notar que λ necessariamente deve ser um número real. Caso contrário, teremos três afixos que não são colineares. Por exemplo, os complexos $z_1 = 1$, $z_2 = i$ e $z_3 = 1+i$ são tais que

$$\lambda = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{i}{i-1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \notin \mathbb{R}.$$

Assim, concluímos que eles não são colineares.

6.3 Classificação dos Triângulos

Na relação $\lambda = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então z_1, z_2 e z_3 são colineares, caso contrário os seus afixos são vértices de um triângulo. Seja o complexo $\phi = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ denominado de relação simples de três complexos, onde $|\phi| = \dfrac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|}$ e $\arg \phi = \theta$. O ângulo θ é formado pelos lados $\overline{z_1 z_2}$ e $\overline{z_1 z_3}$. Se optássemos por trabalhar com o ângulo formado pelos lados $\overline{z_2 z_3}$ e $\overline{z_2 z_1}$ a relação seria $\phi = \dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$.

Analisaremos o triângulo da Figura 6.3 conforme a relação $\phi = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$:

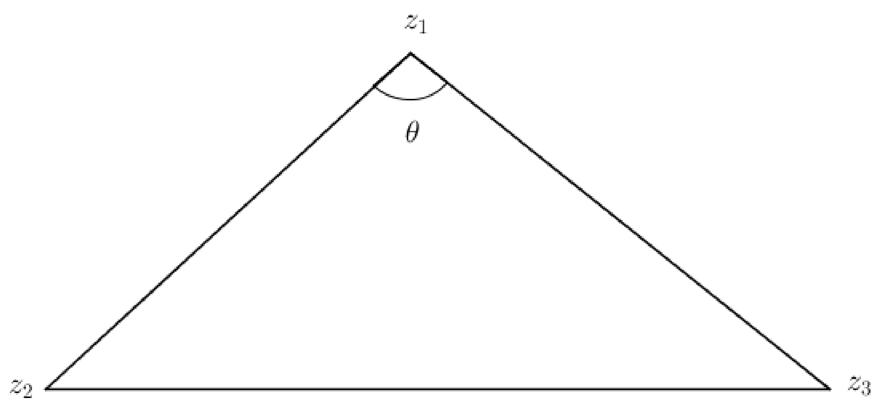

Figura 6.3: Triângulo conforme ϕ

1. Se $|\phi| = 1 \Longrightarrow |z_3 - z_1| = |z_2 - z_1| \Longrightarrow \triangle z_1 z_2 z_3$ é isósceles;

2. Se ϕ for imaginário puro, então $\cos\theta = 0$. De fato, como $\cos\theta = \dfrac{a}{|\phi|}$ e ϕ é imaginário puro, então $a = 0$, uma vez que a é a parte real de ϕ. Dessa forma, $\theta = \dfrac{\pi}{2} rad$ e, consequentemente, $\triangle z_1 z_2 z_3$ é retângulo em z_1;

3. Se ϕ for real, temos a condição de alinhamento e, em consequência, os afixos z_1, z_2 e z_3 não formam um triângulo.

4. Se $\phi = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$, temos que $|\phi| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$, consequentemente

$$|z_3 - z_1| = |z_2 - z_1| \qquad e \qquad \theta = \frac{\pi}{3} rad$$

Dessa forma, $\triangle z_1 z_2 z_3$ é equilátero.

Assim, podemos classificar um triângulo conforme ϕ.

Capítulo 7

Considerações Finais

Vemos portanto que é essencial à natureza dos logaritmos que cada número tenha uma infinidade de logaritmos e que todos esses logaritmos sejam diferentes, não somente entre si mas também de todos os logaritmos dos demais números. Ocorre com os logaritmos o mesmo que com os ângulos ou arcos de círculos; pois como a cada seno ou cosseno corresponde uma infinidade de arcos diferentes, bem assim a cada número convém uma infinidade de logaritmos. Mas é preciso aqui observar uma grande diferença: todos os arcos que correspondem ao mesmo seno ou cosseno são reais, mas todos os logaritmos de um mesmo número são imaginários, com exceção de um único se o número dado for positivo, e todos os logaritmos dos números negativos ou imaginários são, sem exceção, imaginários.

Por exemplo, como $-1 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = e^{\pi i}$, segue que

$$\log(-1) = \pi i + 2k\pi i(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Mais geralmente, se x é qualquer número real positivo então $-x = x(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = e^{\log x} + \pi i$, logo $\log(-x) = \log x + (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Para nenhuma escolha de k se tem um valor real para $\log(-x)$. Por outro lado, se x é ainda um número real positivo e $e^{y+2k\pi i} = x$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, logo todos os números da forma $y + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, são logaritmos de x.Apenas a escolha $k = 0$ fornece um logaritmo real. Os demais são todos complexos.

Euler observa que se interpretarmos o símbolo $\log w$ como significando o conjunto de todos os números complexos z tais que $e^z = w$, então continua válida a fórmula $\log(vw) = \log v + \log w$, com o seguinte significado: um número complexo é um logaritmo de vw(isto é, pertence ao conjunto $\log(vw)$) se, e somente se, é soma de um logaritmo de v com um logaritmo de w.

Para comprovarmos que Euler tinha razão quando dizia ser essencial à natureza dos logaritmos que cada número tenha uma infinidade deles, basta observar que a única função contínua $\varphi : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(wz) = \varphi(w) + \varphi(z)$ e $\varphi(e) = 1$ é a função definida por $\varphi(w) = \log|w|$. Isto significa que, se insistirmos que cada número tenha um só logaritmo (mesmo complexo) então a regra $e^{\log w} = w$ deixa de ser válida.

Esta é em resumo, a solução genial de Euler: admitindo uma infinidade de logaritmos para cada número, tem-se $e^{\log w} = w$, como queria Leibniz, e vale ainda $\log(wz) = \log(w) + \log(z)$, conforme pretendia Jean Bernoulli.

Baseado neste estudo, pode-se concluir que, para cada número real negativo, existe uma infinidade de logaritmos complexos ou imaginários. Nenhum deles é real. Portanto, só tem sentido falar-se em logaritmo de um número real negativo se o seu campo de existência for o conjunto dos números complexos.

Vale ressaltar que, ao contrário do caso real, $f(z) = e^z$ é apenas uma entre as infinitas possibilidades de definir uma função contínua $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $f(1) = e$ e $f(w+z) = f(w).f(z)$. Outras possibilidades são dadas pela fórmula $f(z) = a^y.\,e^z$ onde a é um número real positivo escolhido arbitrariamente e $z = x + yi$.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. *Variáveis Complexas e Aplicações*, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[2] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

[3] CHURCHILL, Ruel V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975.

[4] D'ALEMBERT, J. *Sur les logarithmes des quantités négatives*. Paris: Opuscules mathématiques, 1761.

[5] D'ALEMBERT, J. et al. *Logarithme*. Paris: Panckoucke, 1785.

[6] DIAS, André L.M. *Controvérsias na História da Matemática: A Definição de Logaritmo*. Londrina: ANPUH - XXIII Simpósio Nacional de História, 2005.

[7] EULER, Leonhard. *De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires*. Berlim: Memoires de l'Académie des sciences de Berlim , 1751.

[8] EULER, Leonhard. *Introdution à l'analyse infinitesimale*, tome I. Traduite du latin au français par J.B Labey. Paris: Barrois, 1796.

[9] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: UNICAMP, 1997.

[10] GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um Curso de Cálculo*. Vol 1. São Paulo: LTC, 1994.

[11] IEZZI, Gelson. et al.*Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 1977.

[12] LIMA, Elon L. *Números negativos têm Logaritmos?*. São Paulo: Revista do Professor de Matemática, 1983.

[13] LIMA, Elon L. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[14] LIMA, Elon L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[15] KLEIN, Félix. *Elementary Mathematics from an Advenced Standponit*. New York: Dover, 1885.

[16] NETO, Aref A. et al. *Trigonometria*. São Paulo: Moderna, 1979.

[17] SOARES, Marcio G. *Cálculo em Uma Variável Complexa*, Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

[18] SONNINO, Sérgio; MIRSHAWKA, Victor.*Números Complexos*. São Paulo, 1965.

[19] TATON, René. *Euler et D'Alambert*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1984.