UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{S}^n$ COM CURVATURA DE RICCI CONSTANTE

Adrian Vinícius Castro Ribeiro

MANAUS - 2012

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{S}^n$ COM CURVATURA DE RICCI CONSTANTE

Adrian Vinícius Castro Ribeiro

Dissertação apresentada
ao
Departamento de Matemática
da
Universidade de Federal do Amazonas
para
obtenção do título
de
Mestre em Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM
Orientador: Prof. Dr. José Kenedy Martins

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Manaus, Maio de 2012

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{S}^n$ COM CURVATURA DE RICCI CONSTANTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

BANCA EXAMINADORA:

- **Prof^{o}. Dr. José Kenedy Martins, Presidente**
  Universidade Federal do Amazonas - UFAM

- **Prof^{a}. Dra. Inês da Silva Oliveira**
  Universidade Federal do Amazonas - UFAM

- **Prof^{o}. Dr. Gregório Pacelli**
  Universidade Federal do Ceará - UFC

Manaus, 14 de Maio de 2012

Agradecimentos

Agradeço à Deus, o arquiteto maior do universo e Pai de todas as ciências, pela minha vida, saúde e capacidade de realizar esse trabalho, pela vida de todas as pessoas que tornaram isso possível.

À minha família, em geral aos meus avós, tios e primos pela estabilidade e conforto nos momentos difíceis, pela alegria e confiança depositados em mim. Em especial, agradeço aos meus pais, Aldecy e Luíza, que foram e sempre serão meus heróis, pelo zelo, cuidado, carinho e educação e por terem acreditado e confiado no meu trabalho desde o início. Agradeço à minha namorada Fabiane Mota, pelo carinho e companheirismo e por estar ao meu lado me apoiando e incentivando com amor e compreensão. À minha bisavó Maria de Lourdes, à minha tia Edna Rossy e minha prima Bárbara Rossy (*in memorian*), pelas lembranças e por todos os ensinamentos deixados, a eles dedico.

Aos membros da banca examinadora da defesa de dissertação, professores Gregório Pacelli, Inês Oliveira e José Kenedy Martins, pelas sugestões dadas para melhoria desta dissertação escrita. Ao meu orientador, professor José Kenedy Martins ou simplesmente Akay de Nataraja, pela dedicação e confiança em mim depositados, por todas as lições e ensinamentos fornecidos durante a realização deste trabalho e pela paciência e competência ao auxiliar-me nos momentos de dúvidas e dificuldades.

Aos amigos e professores do Departamento de Matemática, que contribuíram direta e indiretamente na minha formação acadêmica, pelo apoio e pela consideração. Em especial, aos professores Oscar Perdomo, pela atenção e disponibilidade em oferecer ajuda para realização deste trabalho, ao professor José Nazareno, pela amizade e disponibilidade de tempo e auxílio, e aos professores Nilomar Vieira, Sandro Bitar e Flávia Morgana, pelas sugestões e conselhos, pela confiança e inspiração a mim transmitidos.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço aos meus amigos da turma de mestrado, Ivana Bandeira, Geziel Damasceno, Marcos Alcântara, Clebes Brandão, Lauriano de Souza, Francisco Almino, Jefferson Silva, Raphael Costa, Silvia Viviane e Gustavo Neto que foram de grande importância em todas as etapas deste trabalho, pela companhia nos momentos de descontração e, principalmente, nos momentos de estudo.

Resumo

Seja M uma hipersuperfície mínima compacta orientada da esfera unitária Euclideana n-dimensional. Neste trabalho vamos destacar a situação em que a curvatura de Ricci da hipersuperfície é constante, neste caso, devemos ter a curvatura de Ricci constante igual a 1 e a hipersuperfície isométrica a um equador, ou n é ímpar, a curvatura de Ricci igual a $\frac{n-3}{n-2}$ e a hipersuperfície isométrica ao produto de esferas $\mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. A seguir, vamos destacar que existe um número positivo $\epsilon(n)$ tal que se a curvatura de Ricci de uma hipersuperfície mínima imersa pelas primeiras autofunções satisfaz que $\frac{n-3}{n-2}-\epsilon(n) \leq \mathrm{Ric} \leq \frac{n-3}{n-2}-\epsilon(n)$ e a média da curvatura escalar é $\frac{n-3}{n-2}$, então, a curvatura de Ricci da hipersuperfície deve ser constante e, portanto, esta deve ser isométrica a $\mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Palavras-chave: Hipersuperfícies Mínimas, esferas, toro de Clifford.

Abstract

Let M be a compact oriented minimal hypersurface of the unit n-dimensional sphere $\mathbb{S}^n$. In this paper we will point out that if the Ricci curvature of M is constant, then, we have that either $\mathrm{Ric} \equiv 1$ and M is isometric to an equator or, n is odd, $\mathrm{Ric} \equiv \frac{n-3}{n-2}$ and M is isometric to $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Next, we will prove that there exists a positive number $\epsilon(n)$ such that if the Ricci curvature of a minimal hypersurface immersed by the first eigenfunctions M satisfies that $\frac{n-3}{n-2} - \epsilon(n) \leq \mathrm{Ric} \leq \frac{n-3}{n-2} - \epsilon(n)$ and the average of the scalar curvature is $\frac{n-3}{n-2}$, then, the Ricci curvature of M must be constant and therefore M must be isometric to $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Keywords: Minimal hypersurfaces, spheres, Clifford tori.

Sumário

Introdução

Neste trabalho vamos considerar uma imersão mínima $\phi : M^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ de uma variedade $(n-1)$-dimensional, compacta, orientada na esfera unitária $\mathbb{S}^n$. Os exemplos mais triviais dessas imersões são os *equadores*, ou seja, as totalmente geodésicas $\mathbb{S}^{n-1}$'s em $\mathbb{S}^n$ e as *hipersuperfícies de Clifford*, ou seja, os produtos de esferas $\mathbb{S}^q(\sqrt{\frac{q}{n-1}}) \times \mathbb{S}^l(\sqrt{\frac{l}{n-1}})$, com $q+l = n-1$. Uma das questões mais interessantes na geometria das subvariedades mínimas da esfera Euclideana unitária $\mathbb{S}^n$ é obter condições sob as quais estas são totalmente geodésicas ou toros de Clifford. Essas condições geralmente envolvem resultados relacionados às "*estimativas*" sobre as curvaturas seccionais, de Ricci ou escalar (ou equivalentemente sobre o quadrado da norma da segunda forma fundamental). Neste trabalho vamos apresentar uma estimativa sobre a média integral da norma do operador de Weingarten, a qual denotaremos por $\overline{m} = \frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M ||A||^2 dV$, com objetivo principal de demonstrar o teorema principal do artigo publicado por Oscar Perdomo em 2004: "*Rigidity of Minimal Hypersurfaces of Spheres with Constant Ricci Curvature*". Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema Principal (O. Perdomo, 2004 [14])**.** *Seja M^{n-1} uma hipersuperfície mínima, compacta, orientada e imersa em $\mathbb{S}^n$ pelas primeiras autofunções do laplaciano. Denote por $\{\kappa_i\}_{i=1}^{n-1}$ as curvaturas principais de M em p. Se M não é totalmente geodésica e $\kappa_i^2 \leq \frac{||A||^2}{2}$ para todo $p \in M$ e todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, então $\frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M ||A||^2 dV \geq (n-1)$ com igualdade apenas se M é isométrica a uma hipersuperfície de Clifford.*

Para isto, vamos nos basear em alguns resultados clássicos sobre rigidez. Primeiramente, em 1968, James Simons classificou o quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície mínima da esfera [15]: "*Se $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície mínima, então ou $||A||^2 \equiv 0$, ou $||A||^2 \equiv n-1$, ou $||A||^2(p) > n-1$ para algum $p \in M$*". Em 1970, do Carmo, Chern e Kobayashi [6] e, em 1969, Lawson [8], provaram de forma independente o seguinte resultado: "*Seja $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ mínima, compacta orientada com $||A||^2 \equiv n-1$, então M é uma hipersuperfície mínima de Clifford, ou seja, é um produto de esferas $\mathbb{S}^q(r_1) \times \mathbb{S}^l(r_2)$ com $q+l = n-1$ e raios r_1, r_2 apropriados.*" Neste caso, M deve ter necessariamente duas curvaturas principais κ_1, κ_2, sendo as multiplicidades destas determinadas pelas dimensões q e l. Por outro lado, em 1969, Tsunero Otsuki provou a seguinte recíproca [13]: "*Se $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ é fechada com duas curvaturas principais κ_1 e κ_2 e, suas respectivas multiplicidades $q, l \in \mathbb{N}$, satisfazem $q, l > 1$, então $M = \mathbb{S}^q(\sqrt{\frac{q}{n-1}}) \times \mathbb{S}^l(\sqrt{\frac{l}{n-1}})$.*"

Um dos operadores mais importantes agindo sobre as funções de classe C^∞ de uma variedade Riemanniana é o operador de Laplace-Beltrami, mais frequentemente conhecido como *Laplaciano.* Há várias décadas, a investigação sobre o espectro do laplaciano tem sido uma questão central no estudo da geometria, por exemplo, a geometria das subvariedades mínimas na esfera unitária está intimamente relacionada com o problema de autovalor. Se M é compacta, conexa com $\partial M = \emptyset$, o laplaciano é dado por $-\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$, $f \in C^\infty(M)$. É conhecido que Δ é um operador elíptico e o seu espectro é discreto e ordenado de forma crescente

$$\{0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k, \uparrow \infty\}$$

com cada autovalor repetido um número de vezes igual à sua multiplicidade. Como de costume, denotamos por λ_1 o *primeiro autovalor de M*. Combinando isto com o teorema de Takahashi [16]: "*Se $\phi : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ é uma imersão isométrica. Então M é mínima se, e somente se, $-\Delta\phi = (n-1)\phi$.*" obtemos que λ_1 não pode ser maior do que $n-1$, isto é, $\lambda_1 \leq n-1$. Um importante resultado da análise é a seguinte caracterização variacional para o primeiro autovalor do laplaciano de uma variedade Riemanniana compacta [5]: "*Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Então, o primeiro autovalor do Laplaciano λ_1 satisfaz*

$$\lambda_1 = \min \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV}{\int_M f^2 dV},$$

em que $f \in C^\infty(M)$ com $\int_M f dV = 0$."

Em 1982, S. Yau apresentou a seguinte conjectura [18]: "*O primeiro autovalor de qualquer hipersuperfície mínima M^{n-1} mergulhado em $\mathbb{S}^n$ é $\lambda_1 = n-1$.*" Até o momento, a conjectura de Yau está longe de ser resolvida. Porém, em Janeiro de 2012, Z. Tang e W. Yan provaram o problema restrito para hipersuperfícies isoparamétricas: "*Seja $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ mínima, fechada e isoparamétrica, então $\lambda_1 = n-1$.*" Como consequências do teorema principal, vamos destacar que, para uma hipersuperfície mínima com curvatura de Ricci constante, devemos ter curvaturas principais constantes (M isoparamétrica) com, ou $\mathrm{Ric} \equiv 1$ e M deve ser a totalmente geodésica $\mathbb{S}^{n-1}$, ou n deve ser ímpar, $\mathrm{Ric} \equiv \frac{n-3}{n-2}$ e M deve ser isométrica a $\mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2})$. A seguir, vamos provar que se o primeiro autovalor do Laplaciano de M é $n-1$ e as curvaturas de Ricci e escalar satisfazem:

$$R \leq \frac{n-3}{n-1} + \frac{2\,\mathrm{Ric}(v)}{n-1}, \quad \forall |v| = 1 \tag{$\star$}$$

então devemos ter $\frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M ||A||^2 dV \geq (n-1)$ com igualdade apenas se M é Clifford. Além disso, vamos provar que existe um número positivo $\epsilon(n)$ tal que se a curvatura de Ricci de $M \subset \mathbb{S}^n$ mínima com $\lambda_1 = n-1$ satisfaz $|\,\mathrm{Ric} - \frac{n-3}{n-2}| \leq \epsilon(n)$, então n deve ser ímpar e M deve ser isométrica a $\mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Capítulo 1

Conceitos Básicos Gerais

Neste capítulo vamos exibir definições, resultados e exemplos da teoria básica geral da geometria Riemanniana, os quais são necessários para o desenvolvimento do trabalho e, além disso, vamos fixar a notação a ser usada posteriormente. Mais precisamente, vamos disponibilizar os conceitos de variedades diferenciáveis, métricas, conexões, curvaturas e as equações fundamentais das imersões isométricas. As demonstrações dos resultados, por conveniência, serão omitidas. Para mais detalhes sobre este capítulo, ver [4], [7], [10] e [17].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1 (Variedade Diferenciável). *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ tais que:*

(1) $\displaystyle\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$

(2) *Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos do $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.*

(3) *A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal relativamente às condições* (1) *e* (2).

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou sistemas de coordenadas) de M em p; $x_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p; Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada *estrutura diferenciável* em M. A condição (3) aparece na definição acima por razões técnicas.

Exemplo 1.1 (Espaço Euclideano). *O espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ de dimensão n é uma variedade diferenciável determinada pela estrutura diferenciável $\{(\mathbb{R}^n, i)\}$, a qual constiste apenas da aplicação identidade em $\mathbb{R}^n$. Tal estrutura é chamada de estrutura diferenciável padrão e o sistema de coordenadas correspondente é chamdado de sistema de coordenadas padrão. No que segue, usaremos sempre este sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 1.2 (Espaço Vetorial Finito). *Seja V um espaço vetorial qualquer de dimensão finita. Qualquer norma em M determina uma topologia em V, a qual independe da escolha da norma. Com esta topologia, V tem uma estrutura diferenciável natural definida como segue: qualquer base ordenada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V define um isomorfismo de espaços vetoriais $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ dado por*

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Esta aplicação é um homeomorfismo, então a estrutura diferenciável consistindo apenas da parametrização $(\mathbb{R}^n, \psi)$ define uma estrutura diferenciável em V.

Exemplo 1.3 (Espaço das Matrizes). *Denote por $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ o espaço das matrizes de ordem $n \times m$ com entrada nos números reais. Sabemos que este é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais de adiçao e produto por escalar. Segue então que $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ é uma variedade diferenciável de dimensão nm. De maneira análoga, o espaço $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ das matrizes com entradas complexas de ordem $n \times m$ é um espaço vetorial de dimensão $2nm$ sobre $\mathbb{R}$ e, então é uma variedade diferenciável de dimensão $2nm$.*

Exemplo 1.4 (Esfera Unitária $\mathbb{S}^n$). *Vamos denotar por $\mathbb{S}^n$ a esfera unitária de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+1}$:*

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ |x| = 1\}$$

Para cada índice $i = 1, \ldots, n+1$, vamos denotar por $U_i^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o conjunto onde a i-ésima coordenada é sempre positiva:

$$U_i^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n \ ; \ x_i > 0\}$$

De forma análoga, U_i^- é o conjunto onde $x_i < 0$Para cada i, defina aplicações $\varphi : U_i^\pm \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\varphi_i^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{n+1})$$

onde o chapéu sobre x_i significa que x_i está omitido. Cada $\varphi_i^\pm$ é uma aplicação contínua, sendo esta um restrição a $\mathbb{S}^n$ de uma aplicação linear em $\mathbb{R}^n$. Temos que esta aplicação é um homeomorfismo sobre sua imagem, a bola unitária $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, pois tem uma inversa contínua dada por

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u_1, \ldots, u_n) = \Big(u_1, \ldots, u_{i-1}, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, u_i, \ldots, u_n\Big).$$

Além disso, para quaisquer ínidices distintos $i < j$, a aplicação transição $(\varphi_j^\pm) \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}$ é dada por

$$(\varphi_j^\pm) \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}(u_1, \ldots, u_n) = \Big(u_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \pm\sqrt{1 = |u|^2}, \ldots, u_n\Big)$$

e o mesmo vale quando $i > j$, $i = j$. Desta forma a família $\{(\varphi_i^\pm), U_i^\pm\}$ define uma estrutura diferenciável para a variedade de dimensão $\mathbb{S}^n$.

Antes de apresentarmos mais exemplos de variedades diferenciáveis, vamos estender para variedades a noção do Cálculo Diferencial.

Definição 1.2 (Aplicação Diferenciável)**.** *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$, se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ em m tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Pela condição (2) da definição 1 temos que a definição deda acima independe da escolha das parametrizações e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é chamada de *expressão de φ nas parematrizações x e y.*

Definição 1.3 (Vetor Tangente)**.** *Seja M uma variedade de diferenciável. Uma aplicação difereciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ é chamada uma curva diferenciável em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0} \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.

Observação 1.1. *Seja M uma variedade diferenciável, vamos mostrar que o conjunto de todos os vetores tangentes em $p \in M$ torna-se um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$. Para isso, escolha uma parametrização $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ em torno de $p = f(0, \dots, 0)$. Então a curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ e a função $\varphi \in \mathcal{D}$ podem ser expressas, respectivamente, por*

$$f^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1, \dots, x_n) \quad e \quad \varphi \circ f(q) = \varphi(x_1, \dots, x_n), \qquad q = (x_1, \dots, x_n) \in U.$$

Então segue que,

$$\alpha'(0)\varphi = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))\Big|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) \varphi.$$

Logo, o vetor tangente $\alpha'(0)$ pode ser expresso como combinação linear dos vetores $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$, os quais são tangentes às curvas coordenadas

$$x_i \longmapsto f(0, \dots, x_i, \dots, 0).$$

Vamos denotar por T_f o espaço vetorial gerado por $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_0\}_{i=1}^n$.

Lema 1.1. *O conjunto T_pM de todos os vetores tangentes a M em m é igual a T_f.*

Segue T_pM é um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$ chamado de *espaço tangente* a M no ponto p e a base $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_0\}_{i=1}^n$ é chamada *base associada* à parametrização f.

Proposição 1.1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.*

Definição 1.4 (Aplicação Diferencial)**.** *A aplicação linear $d\varphi_p$ dada acima é chamada de diferencial de φ em p.*

Definição 1.5 (Difeomorfismo)**.** *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um difeomorfismo se é uma bijeção diferenciável com inversa φ^{-1} diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo.*

Provavelmente, o teorema local mais importante mais no Cálculo é o teorema da função inversa. Sendo um teorema local, este se estende naturalmente à variedades diferenciáveis.

Teorema da Função Inversa. *Suponha M e N variedades diferenciáveis e $\varphi : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se é invertível em todo ponto $p \in M$, então existem vizinhanças $U \subset M$ de p e $V \subset N$ de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \longrightarrow N$ é um difeomorfismo.*

Definição 1.6 (Imersões e Mergulhos)**.** *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis.*

(*a*) *Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_mM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$.*

(*b*) *Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um mergulho.*

(*c*) *Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N. Observe que se $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ é uma imersão, então $p \leq n$ e a diferença $n-m$ é chamada a codimensão da imersão φ.*

Uma importante consequência do teorema da função inversa é o seguinte.

Proposição 1.2. *Suponha que M e N sejam variedades diferenciáveis de mesma dimensão e $\varphi : M \longrightarrow N$ um imersão. Então φ é um difeomorfismo local. Se φ é bijetiva, então φ é um difeomorfismo.*

A seguir vejamos outros exemplos exemplos de variedades.

Exemplo 1.5 (O Fibrado Tangente). *Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Considere*

$$TM = \{(p, v) \ ; \ p \in M, v \in T_pM\}$$

ou seja, TM é o conjunto formado por todos os vetores tangentes a M. Vamos introduzir uma estrutura diferenciável (de dimensão), com esta estrutura TM é chamado de ***fibrado tangente*** *de M.*

Seja $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ uma parametrização de M com $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) \in U_\alpha$. Para $w \in T_{x_\alpha(q)}M$, $q \in U_\alpha$, podemos escrever

$$w = \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}.$$

Defina uma aplicação $X_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ por

$$X_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha, y_1^\alpha, \ldots, y_n^\alpha) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right).$$

Segue que, se $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável para M então $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, X_\alpha)\}$ é uma estrutura difernciável para TM.

Exemplo 1.6 (Superfícies Regulares do $\mathbb{R}^n$). *Um subconjunto $S^k \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície regular de dimensão k em $\mathbb{R}^n$ se para cada $p \in S$ existir uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow S \cap V$ de uma aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $S \cap V$ tais que:*

(*a*) *f é um homeomorfismo diferenciável;*

(*b*) *$(df)_q : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $q \in U$.*

Uma superfície $S^k \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.7 (Orientação). *Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que:*

($\bullet$) *Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo.*

Caso contrário, diz-se que M é não-orientável. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição ($\bullet$) é chamada uma orientação de M e M é, então, orientada. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem a condição ($\bullet$) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz a condição ($\bullet$).

Exemplo 1.7. *A esfera unitária de dimensão n*

$$\mathbb{S}^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é orientável.

Definição 1.8 (Campo de Vetores)**.** *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência $p \longmapsto X(p)$ que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor tangente $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. Dizemos que o campo X é diferenciável se a aplicação $X : M \longrightarrow TM$ é diferenciável.*

Lema 1.2. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo de vetores Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.*

O campo de vetores $Z = [X, Y] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ dado por $[X, Y] = XY - YX$ é chamado de colchete de X e Y, o qual possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.3. *Se X, Y e Z são campos de vetores diferenciáveis em M, α, β são números reais, e f, g são funções diferenciáveis, então valem as seguintes propriedades:*

(*a*) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anti-comutatividade*)

(*b*) $[\alpha X + \beta Y, Z] = a[X, Z] + \beta[Y, Z]$ (*linearidade*)

(*c*) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*)

(*d*) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.2 Métricas Riemannianas

Definição 1.9 (Métrica Riemanniana)**.** *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que $p \longmapsto \langle\ ,\ \rangle_p$ que associa a cada ponto $p \in M$ a um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$, ou seja, uma forma bilinear simétrica positiva definida, no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em p, com $x(x_1, \ldots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Definição 1.10 (Isometria)**.** *Sejam M e N variedade Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado de isometria se:*

($\diamond$) $\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$, *para todo $p \in M$ e para todos $u, v \in T_pM$*

Definição 1.11 (Isometria Local)**.** *Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \longrightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo ($\diamond$).*

Exemplo 1.8 ($M = \mathbb{R}^n$)**.** *Considere $M = \mathbb{R}^n$ o espaço euclideano de dimensão n com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com $e_i = (0, \ldots, 0)$, então a métrica é dada por $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, chamada de geometria metrica euclideana.*

Exemplo 1.9 (Variedades Imersas). *Seja $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ uma imersão, ou seja, tem-se que f é diferenciável e $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se N tem uma estrutura Riemanniana, então f induz uma estrutura Riemanniana em M por*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \quad u, v \in T_pM.$$

Desta forma, como df_p é injetiva segue que $\langle\ \rangle_p$ é bilinear e positivo definida. A métrica em M é então chamada de métrica induzida em M e f é chamada de imersão isométrica.

Exemplo 1.10 (Métrica Produto). *Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ com estrutura diferenciável produto. Sejam $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ e $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$ as projeções naturais. Vamos munir $M_1 \times M_2$ com uma métrica Riemanniana pondo:*

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle_q$$

para todos $(p, q) \in M_1 \times M_2$ e $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$. Como exemplo, temos que o toro $S^1 \times S^1 = T^2$ tem uma estrutura Riemannianna obtida escolhendo no círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ a métrica induzida por $\mathbb{R}^2$ e tomando a métrica produto. O toro T^2 com tal métrica é chamado toro plano.

Definição 1.12 (Curva Parametrizada). *Uma aplicação $c : I \longrightarrow M$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em uma variedade diferenciável M chama-se uma curva parametrizada. Observe que uma curva parametrizada pode admitir auto-intersecções ou pontas.*

Definição 1.13 (Campo ao longo de uma curva). *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ é um aplicação $t \longmapsto V(t)$ que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Dizemos que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M, a função $t \longmapsto V(t)f$ é uma função diferenciável em I.*

O campo vetorial $dc\left(\frac{d}{dt}\right)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$, é chamado *campo velocidade* ou tangente de c. A restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ chama-se um *segmento*. Se M é Riemanniana, definimos o comprimento de um segmento por

$$l_a^b = \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right\rangle} dt.$$

O teorema a seguir garante a existência de métrica Riemannianas.

Teorema 1.1. *Uma variedade diferenciável M, a qual satisfaz os axiomas de Hausdorff e da base enumerável, possui uma métrica Riemanniana.*

1.3 Conexões

Nesta seção vamos indicar por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funçõs reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.14 (Conexão Afim). *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

indicada por $(X, Y) \overset{\nabla}{\longrightarrow} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

A seguir, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.4. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência*

$$V \longmapsto \frac{DV}{dt}$$

que associa a cada campo de vetores V ao longo de um curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$ um outro campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ ao longo da curva c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:

(a) $\dfrac{D}{dt}(V + W) = \dfrac{DV}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$

(b) $\dfrac{D}{dt}(fV) = \dfrac{df}{dt}V + f\dfrac{DV}{dt}$*, onde V é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.*

(c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, ou seja, $V(t) = Y(c(t))$, então $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.

Observação 1.2. *A Proposição acima mostra que a escolha de uma conexão afim ∇ em M dá origem a uma derivada satisfazendo as condições (a) e (b) de campos de vetores ao longo de curvas. A conexão, desta forma, fornece uma forma de derivar vetores ao longo de curvas. Surge de maneira natural a noção de paralelismo.*

Definição 1.15 (Campo Paralelo). *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ é chamado campo paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$*

Proposição 1.5. *Seja* (M, ∇) *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Seja* $c : I \longrightarrow M$ *uma curva diferenciável em* M *e* V_0 *um vetor tangente a* M *em* $c(t_0)$*,* $t_o \in I$*, ou seja,* $V_0 \in T_{c(t_0)}M$*. Então existe um único campo de vetores paralelo* V *ao longo de* c*, tal que* $V(t_0) = V_0$*.*

A partir da proposição acima podemos definir o seguinte objeto.

Definição 1.16 (Transporte Paralelo)**.** *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Seja* $c : I \longrightarrow M$ *uma curva diferenciável em* M *e* V_0 *um vetor tangente a* M *em* $c(t_0)$*. O campo de vetores paralelo* V *ao longo de* $c : I \longrightarrow M$ *tal que* $V(t_0) = V_0$*, é chamado o transporte paralelo de* $V(t_0)$ *ao longo de* c*.*

Definição 1.17 (Conexão compatível com a métrica)**.** *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇ *e uma métrica Riemanniana* $\langle\ ,\ \rangle$*. A conexão é dita ser compatível com a métrica* $\langle\ ,\ \rangle$*, quando para toda curva diferenciável* $\alpha : I \longrightarrow M$ *e quaisquer pares de campos de vetores paralelos* P *e* P' *ao longo de* α*, tivermos* $\langle P, P' \rangle =$ *constante.*

Observação 1.3. *A proposição a seguir garante que se a conexão* ∇ *em uma variedade Riemanianna* M *é compatível com a métrica, então podemos diferenciar produto interno pela regra do produto usual, fato que justifica a definição dada acima.*

Proposição 1.6. *Seja* M *uma variedade Riemanianna. Uma conexão* ∇ *em* M *é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par* V *e* W *de campos de vetores ao longo da curva diferenciável* $\alpha : I \longrightarrow M$ *tem-se:*

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle,\ t \in I.$$

Corolário 1.1. *Uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M *é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$(2) \qquad X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Definição 1.18 (Conexão Simétrica)**.** *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é dita ser simétrica quando:*

$$(3) \qquad \nabla_X Y = \nabla_Y X = [X, Y] \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Observação 1.4. *Em um sistema de coordenadas* (U, x)*, dizer que* ∇ *é simétrica implica que, para todo* $i, j = 1, \ldots, n$*, tem-se*

$$(3') \qquad \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

O teorema a seguir (teorema de Levi-Civita) é o principal resultado desta seção.

Teorema 1.2 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanianna M, existe um única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

(a) *∇ é simétrica.*

(b) *∇ é compatível com a métrica*

Tal conexão é chamada de conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana de M.

1.4 Curvaturas

Definição 1.19 (Curvatura). *A curvatura K de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência $(X,Y) \longrightarrow K(X,Y)$ que associa a cada par $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $K(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$K(X,Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.7. *A curvatura K de uma variedade Riemanniana possui as seguintes propriedades:*

(i) *K é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, ou seja,*

$$K(fX_1 + gX_2, Y_1) = fK(X_1, Y_1) + gK(X_2, Y_1)$$

$$K(X_1, fY_1 + gY_2) = fK(X_1, Y_1) + gK(X_1, Y_2)$$

onde $f, g \in \mathcal{D}(M)$, $\quad X_i, Y_i \in \mathcal{X}(M)$.

(ii) *Para todo par $X, y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $K(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ é linear, ou seja,*

$$K(X,Y)(Z+W) = K(X,Y)Z + K(X,Y)W,$$

$$K(X,Y)fZ = fK(X,Y)Z,$$

onde $f \in \mathcal{D}(M)$, $\quad Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Proposição 1.8 (Primeira Identidade de Bianchi).

$$K(X,Y)Z + K(Y,Z)X + K(Z,X)Y = 0$$

Por questões de conveniência, indentificamos o operador quadrilinear

$$\langle K(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R},$$

que para cada quádrupla $(X, Y, Z, W) \in (\mathcal{X}(M))^4$ associa o número $\langle K(X,Y)Z, W\rangle$, simplesmente por

$$(X, Y, Z, W) = \langle K(X,Y)Z, W\rangle \,.$$

Proposição 1.9. *O operador definido acima possui as seguintes propriedades:*

(*a*) $(X,Y,Z,W) + (Y,Z,X,W) + (Z,X,Y,W) = 0$

(*b*) $(X,Y,Z,W) = -(Y,X,Z,W)$

(*c*) $(X,Y,Z,W) = -(X,Y,W,Z)$

(*d*) $(X,Y,Z,W) = (Z,W,X,Y)$

No que segue, vamos usar a seguinte notação: dado uma espaço vetorial V, indicaremos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $x, y \in V$.

Proposição 1.10. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subspaço de dimensão 2 do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então,*

$$k(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

A definição acima permite definirmos o seguinte objeto.

Definição 1.20 (Curvatura Seccional)**.** *Dado um ponto $p \in M$ e um subspaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $k(x,y) = k(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado **curvatura seccional** de σ em p.*

Lema 1.3. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, com $\dim V \geq 2$. Sejam*

$$K : V \times V \times V \longrightarrow V \quad e \quad K' : V \times V \times V \longrightarrow V$$

aplicações tri-lineares tais que as condições (a), (b), (c) e (d) da proposição 9 sejam satisfeitas para

$$(x,y,z,t) = \langle K(x,y)x, y\rangle \,, \qquad (x,y,z,t)' = \langle K'(x,y)x, y\rangle \,.$$

Se x, y são dois vetores linearmente independentes, vamos escrever,

$$k(\sigma) = \frac{(x,y,z,t)}{|x \wedge y|^2}, \qquad k'(\sigma) = \frac{(x,y,z,t)'}{|x \wedge y|^2},$$

onde $\sigma = [x, y]$ é o subespaço bi-dimensional gerado por x, y. Se para todo $\sigma \subset V$, $k(\sigma) = k'(\sigma)$, então $K = K'$.

Lema 1.4. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação tri-linear $K' : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$ dada por*

$$\langle K'(X,Y,W), Z\rangle = \langle X, W\rangle \langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle \langle X, Z\rangle$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_mM$. Então M tem curvatura seccional constante k se, e somente se, $K = kK'$, onde K é a curvatura de M.

A seguir vamos apresentar algumas combinações das curvaturas seccionais de uma variedade.

Definição 1.21 (Curvatura de Ricci)**.** *Para qualquer vetor unitário qualquer $v \in T_pM$, a curvatura de Ricci de M na direção do vetor $v \in T_pM$ é definida pela média*

$$\mathrm{Ric}_p(v) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} k(v, v_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \langle R(v, v_i)v, v_i\rangle\,,$$

das curvaturas seccionais $k(v, v_i)$, onde $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Definição 1.22 (Curvatura Escalar)**.** *A Curvatura Escalar (ou média) de M no ponto $p \in M$ é definida pela média*

$$K(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}_p(v_i) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j=1}^{n} \langle R(v_i, v_j)v_i, v_j\rangle\,,$$

das curvaturas de Ricci $\mathrm{Ric}_p(v_i)$, onde $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é qualquer base ortonormal de T_pM.

Observação 1.5. *A seguir, vamos mostrar que as definições acima não dependem da escolha das parametrizações. Primeiro, vamos definir uma forma bilinear em T_mM como segue: Sejam $v, w \in T_pM$ e faça*

$$Q(v, w) = \text{traço da aplicação } [z \longrightarrow K(v, z)w].$$

Temos que Q é bilinear e, além disso, escolhendo um vetor unitário $v \in T_pM$ e completando em uma base ortonormal $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de T_pM temos que

$$\begin{aligned} Q(v, w) &= \sum_{i=1}^{n} \langle K(v, v_i)w, v_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle K(w, v_i)v, v_i\rangle \\ &= Q(w, v) \end{aligned}$$

ou seja, isso mostra que $Q(v, w) = Q(w, v)$ e $Q(v, v) = (n-1)\,\mathrm{Ric}_m(v)$; isto prova que $\mathrm{Ric}_p(v)$ (só depende de $v \in T_pM$) é um conceito intrínseco. Por outro lado, a forma bilinear

Q em T_pM corresponde uma aplicação linear auto-adjunta R dada por

$$\langle R(v), w\rangle = Q(v, w)$$

Tomando uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de T_pM, temos que

$$\begin{aligned} \textit{Traço de } R &= \sum_{j=1}^{n} \langle R(v_j), v_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} Q(v_j, v_j) \\ &= (n-1)\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_m(v_j) \\ &= n(n-1)R(m). \end{aligned}$$

o que prova o que foi afirmado. A forma bilinear $\frac{1}{n-1}Q$ é, algumas vezes, chamada de tensor de Ricci.

1.5 Imersões Isométricas

Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ uma imersão. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isso siginifica que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto do $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do espaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$.

Vamos identificar U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ numa soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, então podemos escrever $v = v^T + v^N$, com $v^T \in T_pM$ e $v^N \in (T_pM)^{\perp}$. Neste caso, denominamos v^T a componente tangencial de v e v^N a componente normal de v. Essa decomposição é diferenciável no sentido que as aplicações de TM em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \longmapsto (p, v^T) \quad \text{e} \quad (p, v) \longmapsto (p, v^N)$$

são diferenciáveis. A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X, Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T$. Pelo teorema de existência e unicidade de Levi-Civita, sabemos que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M.

Definição 1.23. *Sejam X, Y campos locais a M, então vamos definir uma aplicação B da seguinte forma*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Segue que $B(X,Y)$ é um campo local em $\overline{M}$ normal a M e $B(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Portanto $B(X,Y)$ está bem definida. Daqui em diante, vamos indicar por $\mathcal{X}(M)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

Proposição 1.11. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, a aplicação $B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Observação 1.6. *Seja $p \in M$ e $\nu \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\nu : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$H_\nu(x,y) = \langle B(x,y), \nu \rangle, \qquad x, y \in T_pM,$$

é, pela proposição anteiror, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.24 (Segunda Forma Fundamental)**.** *A forma quadrática II_ν definida em T_pM por*

$$II_\nu(x) = H_\nu(x,x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em $p \in M$ segundo o vetor normal ν.

Observação 1.7. *Às vezes se utiliza a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação B que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear simétrica, tomando valores em $(T_pM)^{\perp}$. Observe que à aplicação bilinear H_ν fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\nu : T_pM \longrightarrow T_pM$ por*

$$\langle A_\nu(x), y \rangle = H_\nu(x,y) = \langle B(x,y), \nu \rangle.$$

A proposição a seguir relaciona a segunda forma fundamental com a derivada covariante.

Proposição 1.12. *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\nu \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de ν normal a M. Então*

$$A_\nu(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Se $v, w \in T_mM \subset T_m\overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $k(v,w)$ e $\overline{k}(v,w)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por v e w.

Teorema 1.3 (Fórmula de Gauss)**.** *Sejam $m \in M$ e $v, w \in T_mM$ vetores ortonormais. Então*

(1) $$k(v,w) - \overline{k}(v,w) = \langle B(v,v), B(w,w) \rangle - |B(v,w)|^2.$$

Definição 1.25 (Imersão Totalmente Geodésica). *Uma imersão* $f : M \longrightarrow \overline{M}$ *é geodésica em* $p \in M$ *se para todo* $\nu \in (T_pM)^{\perp}$ *a segunda forma fundamental* II_ν *é identicamente nula em* p*, ou seja, se* $A_\nu \equiv 0$ *ou equivalentemente* $B \equiv 0$*. Dizemos que a imersão* f *é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo ponto* $p \in M$*.*

Proposição 1.13. *Uma imersão* $f : M \longrightarrow \overline{M}$ *é geodésica em* $p \in M$ *se, e somente se, toda geodésica* γ *de* M *partindo de* m *é geodésica de* $\overline{M}$ *em* p*.*

Exemplo 1.11. *No caso em que* $\overline{M} = \mathbb{R}^n$*, as variedades totalmente geodésicas são os subespaços lineares de* $\mathbb{R}^n$*. No caso em que* $\overline{M} = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, as variedades totalmente geodésicas são as intersecções* $\sum$ *de subespaços lineares de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *com* $\mathbb{S}^n$*.*

A seguir vamos apresentar uma condição mais fraca do que a condição de totalmente geodésica.

Definição 1.26 (Vetor Curvatura Média). *Sejam* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *uma base ortonormal de* T_pM*. O vetor curvatura média* H *de* M *é definido como sendo*

$$H = \left(\frac{1}{n}\right)[\textit{traço de } B] = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)$$

o qual não depende da escolha da base.

Observação 1.8. *Sejam* $\{e_j\}_{j=n+1}^{p}$ *uma base ortonormal de* $(T_pM)^{\perp}$ *e, por simplicidade, denotemos* A_{e_j} *poe* A_j*, onde* $j = n+1, \ldots, p$*. Observe que, para todo* $i = 1, \ldots, n$*, tem-se*

$$\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i) = \sum_{j=n+1}^{p}\left\langle \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i), e_j \right\rangle e_j$$

Logo,

$$\begin{aligned}
H &= \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)\\
&= \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=n+1}^{p}\left\langle \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i), e_j \right\rangle e_j\\
&= \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=n+1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} \langle B(e_i, e_i), e_j\rangle \right) e_j\\
&= \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=n+1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} \langle A_j(e_i), e_i\rangle \right) e_j\\
&= \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=n+1}^{p}\Big(\textit{traço de } A_j\Big) e_j.
\end{aligned}$$

Definição 1.27 (Imersão Mínima). *Uma imersão $f : M \longrightarrow \overline{M}$ é dita ser mínima se para todo $p \in M$ e todo $\nu \in (T_pM)^{\perp}$ tem-se que $\Big(\text{traço de } A_\nu\Big) \equiv 0$. Ou, de forma equivalente, dizemos que a imersão f é mínima se, e somente se, o vetor curvatura média de f*

$$H = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=n+1}^{p}\Big(\text{traço de } A_j\Big)e_j = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=n+1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle A_j(e_i), e_i\rangle\right)e_j$$

é nulo para todo ponto $p \in M$.

Observação 1.9. *De agora em diante, vamos usar as letras $X, Y, Z, \ldots,$ para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras $\nu, \xi, \eta, \ldots,$ para indicar os campos diferenciáveis normais. Dados X e ν, sabemos que a componente de $\overline{\nabla}_X\nu$ é dada por $(\overline{\nabla}_X\nu)^T = -A_\nu(X)$.*

Definição 1.28 (Conexão Normal). *A componente normal de $\overline{\nabla}_X\nu$ é chamada de conexão normal $\nabla^{\perp}$ da imersão. A saber,*

$$\nabla^{\perp}_X\nu = (\overline{\nabla}_X\nu)^N = \overline{\nabla}_X\nu - (\overline{\nabla}_X\nu)^T = \overline{\nabla}_X\nu + A_\nu(X) \tag{1}$$

Observação 1.10. *Desta forma a conexão normal $\nabla^{\perp}$ possui as propriedades usuais de conexão, as quais são a linearidade em X, aditividade em ν e vale que*

$$\nabla^{\perp}_X(f\nu) = f\nabla^{\perp}_X\nu + X(f)\nu, \qquad f \in \mathcal{D}(M).$$

Definição 1.29 (Curvatura Normal). *De forma análoga ao caso do fibrado tangente, vamos introduzir via conexão normal $\nabla^{\perp}$ uma noção de curvatura no fibrado normal $TM^{\perp}$ a qual será chamada de curvatura normal $K^{\perp}$ da imersão e definida por*

$$K^{\perp}(X,Y)\nu = \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\nu - \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\nu + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\nu.$$

Observação 1.11. *Dada uma imersão isométrica, vamos indicar por $\mathcal{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. Desta forma, a segunda forma fundamental B da imersão pode ser considerada como um tensor*

$$B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^{\perp} \longrightarrow \mathcal{D}(M)$$

definido por

$$B(X,Y,\nu) = \langle B(X,Y), \nu\rangle\,.$$

Observação 1.12. *Segue que a derivação covariante pode ser estendida ao tensor B de forma natural da seguinte maneira:*

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\nu) = X(B(Y,Z,\nu)) - B(\nabla_X Y, Z, \nu) - B(Y, \nabla_X Z, \nu) - B(Y, Z, \nabla^{\perp}_X\nu).$$

O objetivo desta seção é apresentar as seguintes relações:

Proposição 1.14 (Equações de Gauss, Ricci e Codazzi)**.** *Valem as seguintes equações:*

(*a*) *Equação de Gauss:*

$$\left\langle \overline{K}(X,Y)Z,T\right\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle\,. \quad (1.1)$$

(*b*) *Equação de Ricci:*

$$\left\langle \overline{K}(X,Y)\nu,\eta\right\rangle - \left\langle K^{\perp}(X,Y)\nu,\eta\right\rangle = \langle [A_\nu,A_\eta]X,Y\rangle\,, \quad (1.2)$$

onde $[A_\nu,A_\eta] = A_\nu \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\nu$.

(*c*) *Equação de Codazzi:*

$$\left\langle \overline{K}(X,Y)Z,\nu\right\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Y,\nu) - (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\nu). \quad (1.3)$$

Observação 1.13. *A importância das equações de Gauss, Ricci e Codazzi é que, no caso em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, elas desempenham um papel análogo aos das equações de compatibilidade na teoria local das superfícies. Na verdade, as equações de compatibilidade da teoria das superfícies são apenas casos particulares das equações de Gauss e Codazzi.*

Capítulo 2

Conceitos Básicos Específicos

Neste capítulo, primeiramente, vamos apresentar alguns operadores diferenciais em variedades Riemannianas e algumas fórmulas integrais clássicas, a seguir vamos introduzir alguns problemas de autovalor do Laplaciano em variedades e alguns aspecos da análise não linear, bem como o Princípio de Rayleigh e o Princípio da Caracterização Minimax para operadores elípticos. Além disso, vamos disponibilizar alguns resultados clássicos intrínsecos sobre rigidez de variedades na esfera. Alguns resultados serão demonstrados e outros, por questão de conveniência, serão omitidos. Ao leitor mais interessado, ver [2], [3], [5], [20] e [16].

2.1 Operadores Diferenciais

Definição 2.1 (Referencial Geodésico)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional, $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança de p. Uma família $\{e_i\}_{i=1}^n$ de campos de vetores em $\mathcal{X}(U)$ é chamada um referencial geodésico em p se:*

(i) Para cada ponto $q \in U$, tem-se que $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{X}(U)$ são ortonormais;

(ii) Para todos $i, j = 1, \ldots, n$, tem-se $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$.

Observação 2.1. *Dada uma variedade riemanniana M e um ponto $p \in M$ qualquer. Existe uma vizinhança $U \subset M$ de p na qual podemos definir um ferencial geodésico. Basta considerar a vizinhança normal de p. (Ver [4], página* 79*).*

Definição 2.2 (Divergência)**.** *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$. Definimos a divergência de X como sendo uma função* $\operatorname{div} X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\operatorname{div} X(p) = \textit{traço da aplicação linear } \left[Y(p) \longmapsto \nabla_Y X(p)\right], \quad p \in M$$

Definição 2.3 (Gradiente)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$. Definimos o gradiente de f como sendo o campo de vetores ∇f em M definido por*

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, \ v \in T_pM.$$

Observação 2.2. *Em um sistema de coordenadas local* $(x_1, \ldots, x_n)$ *em um vizinhança* $U \subset M$ *de* p*, o divergente é escrito da seguinte maneira*

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|} X_i \right),$$

onde $|g| = \det g_{ij}$*,* $0 \leq i, j \leq n$ *e* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Observação 2.3. *Considere um referencial geodésico* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *em uma vizinhança* $U \subset M$ *de* $p \in M$*. Como* $\nabla f(p) \in T_pM$ *podemos expressá-lo como* $\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f(p), e_i \rangle e_i$*. Desta forma, segue que*

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(f))\, e_i.$$

Além disso, seja $X = \sum_{j=1}^{n} f_j e_j$*, por definição, temos que*

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X(p) &= \textit{traço da aplicação } [Y(p) \longmapsto \nabla_Y X(p)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X(p), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j e_j \right), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \nabla_{e_i} e_j \right)(p) + \sum_{j=1}^{n} [e_i(f_j) e_j](p), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_i(f_j)(p) \langle e_j, e_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_i(f_j)(p)
\end{aligned}$$

Observe que, quando $M = \mathbb{R}^n$*, com coordenadas* $x_1, \ldots, x_n$ *e* $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$*, temos que*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$$

e

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Definição 2.4 (Laplaciano). *Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos o Laplaciano Δ de M como sendo um operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ definido por*

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

Observação 2.4. *Em um sistema de coordenadas local $(x_1, \ldots, x_n)$ em uma vizinhança $U \subset M$ de $m \in M$, temos que o laplaciano é dado por*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right),$$

onde $|g| = \det(g_{ij})$, $0 \leq i, j \leq n$. Agora, considerando um referencial geodésico $\{e_1, \ldots, x_n\}$ em uma vizinhança $U \subset M$ de $m \in M$, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\
&= \left\langle \nabla_{e_i} \left(\sum_{j=1}^{n} (e_j(f)) e_j \right)(p), e_i \right\rangle \\
&= \langle (e_j(f) \nabla_{e_i} e_j + e_i(e_j(f)) e_j)(p), e_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_i(e_j(f))(p) \langle e_j, e_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_i(e_j(f))(p)
\end{aligned}$$

Portanto, se $M = \mathbb{R}^n$, com coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = e_i$ obtemos que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Além disso, se $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(fg)) = \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\frac{\partial (fg)}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) + e_i \left(g \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\
&= f \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + g \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Em outros termos,

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= f(\Delta g) + g(\Delta f) + 2\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f, e_i\rangle \langle \nabla g, e_i\rangle \\
&= f(\Delta g) + g(\Delta f) + 2\left\langle \nabla f, \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla g, e_i\rangle e_i \right\rangle \\
&= f(\Delta g) + g(\Delta f) + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle .
\end{aligned}$$

Se M é uma variedade Riemanniana, associada à métrica Riemanniana de M está associada uma teoria de integração na qual (i) uma função é dita ser mensurável se, para cada carta $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em M, temos que $f \circ x^{-1}$ é mensurável sobre $x(U) \subset \mathbb{R}^n$, (ii) para cobertura $\{x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ de M por cartas com partição da unidade subordinada $\{\phi_\alpha\}$, a medida Riemanniana é dada pela densidade

$$dV = \sum_{\alpha} \phi_\alpha \sqrt{g_\alpha} dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n,$$

onde $dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$ é a densidade da medida de Lebesque em $x_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ e g_α é o determinante definido em para a carta $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Vejamos alguns importantes resultados da análise.

Fórmula de Bochner. *Se M é uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$, então*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = ||\nabla\nabla f||^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

Teorema 2.1 (Teorema da Divergência)**.** *Seja X um campo de vetores de classe C^1 com suporte compacto sobre uma variedade Riemanniana M então,*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dV = 0.$$

Teorema 2.2 (Fórmula de Green)**.** *Sejam h, g funções, respectivamente, de classe C^1 e de classe C^2 em M tais que $h(\nabla f)$ tem suporte compacto. Então*

$$\int_M \Big(h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f\rangle \Big) dV = 0$$

Se assumirmos também que h^2 é de classe C^2 em M e ambas h, f tem suporte compacto, então

$$\int_M \Big(h\Delta f - f\Delta h \Big) dV = 0.$$

Agora vamos assumir que M tem bordo ∂M, com métrica Riemanniana induzida, medida induzida e a densidade da medida sendo denotada por dA. Denote por ν o campo de vetores normal externo em ∂M.

Teorema 2.3 (Teorema da Divergência II). *Seja X um campo de vetores de classe C^1 em $\overline{M}$ com suporte compacto em $\overline{M}$. Então*

$$\int_M (\operatorname{div} X)dV = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle \, dA.$$

Teorema 2.4 (Fórmula de Green II). *Sejam h de classe C^1 e f de classe C^2 em $\overline{M}$ tais que $h(\nabla f)$ tem suporte compacto em $\overline{M}$. Então*

$$\int_M \Big(h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f\rangle\Big)dV = \int_{\partial M} h(\nu f)dA.$$

2.2 Problemas de Autovalor para o Laplaciano

Vamos começar esta seção recordando que um espaço métrico E é dito ser *completo* quando toda sequência de Cauchy em E é convergente. Dizemos que E é um *espaço de Banach* se E é um espaço vetorial normado e completo relativo à sua norma. Em particular, um espaço vetorial munido de produto interno E é um *espaço de Hilbert* se E é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Seja E é um espaço métrico qualquer, o *completamento* de E é um par $(\widehat{E}, f)$, onde $f : M \longrightarrow \widehat{E}$ é uma imersão isométrica, $\widehat{E}$ é completo e $f(E)$ é denso em $\widehat{E}$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. O espaço $L^p(\Omega)$, $0 < p < \infty$, é o espaço das funções $u \in C^\infty(\Omega)$ mensuráveis, cuja potência $|u|^p$ é integrável em Ω, ou seja,

$$L^p(\Omega) = \Big\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \int_\Omega |u|^p < \infty\Big\} \quad \text{com norma} \quad ||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Assumindo, $1 < p < \infty$ e que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto limitado e conexo, então existe uma constante $C = C(n, \Omega)$ tal que para cada função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tem-se a *Desigualdade de Poincaré*:

$$||u - u_\Omega||_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)},$$

e além disso, se $1 < p, q < \infty$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então vale a *Desigualdade de Holder*:

$$||f \cdot g||_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} \cdot ||g||_{L^p(\Omega)}.$$

Com inspiração dado pelo caso Euclideano, vejamos agora, o caso Riemanniano.

Definição 2.5 (Espaço L^2). *Seja M uma variedade Riemanniana, o espaço $L^2(M)$ é o espaço das funções mensuráveis f em M para as quais tem-se $\int_M |f|^2 dV < +\infty$, ou seja*

$$L^2(M) = \left\{ f : M \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; f \in C^\infty(M) \text{ e } \int_M f^2 dV < +\infty \right\}.$$

Em $L^2(M)$, temos o produto interno usual, e a norma induzida, dados por

$$(f,h) = \int_M fh dV, \qquad (f)^2 = \int_M f^2 dV, \quad \text{para } f,h \in L^2(M)$$

Com o produto interno, $L^2(M)$ é um espaço de Hilbert. Nosso interesse principal nesta seção é estudar os seguintes problemas de autovalor:

Problema Fechado. *Seja M fechada e conexa. Encontrar todos os números reais $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais existe uma solução não-trivial $\phi \in C^2(M)$, $\phi \neq 0$, para*

$$-\Delta\phi = \lambda\phi \tag{$*$}$$

Problema de Neumann. *Seja $\overline{M}$ compacta, conexa e com $\partial M \neq \emptyset$. Encontrar todos os números reais $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais existe uma solução não-trivial $\phi \in C^2(M) \cap C^1(M)$ para*

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\phi, & \text{em } M \\ \nu\phi = 0, & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Problema de Dirichlet. *Para $\partial M \neq \emptyset$, $\overline{M}$ compacta e conexa. Encontrar todos os números reais $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais existe uma solução não-trivial $\phi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ para*

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\phi, & \text{em } M \\ \nu\phi = 0, & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Problema de Misto. *Para $\partial M \neq \emptyset$, $\overline{M}$ compacta e conexa, N uma subvariedade aberta de ∂M. Encontrar todos os números reais $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais existe uma solução não-trivial $\phi \in C^2(M) \cap C^1(M \cup N) \cap C^0(\overline{M})$ para*

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\phi, & \text{em } M \\ \nu\phi = 0, & \text{sobre } \partial M - N \\ \nu\phi = 0, & \text{sobre } N \end{cases}$$

A seguir, o principal teorema desta seção:

Teorema 2.5. *Para cada problema de autovalor acima, o conjunto dos autovalores consiste de uma sequência*

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \lambda_k \leq \cdots \uparrow +\infty$$

com cada autoespaço associado de dimensão finita. Autoespações pertencentes à distintos autovalores são ortogonais em $L^2(M)$ e, além disso, $L^2(M)$ é a soma direta de todos os seus autoespaços.

Observação 2.5. *Como $\phi \in C^2(M) \cap C^1(\overline{M})$, então seu autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ é não-negativo. De fato, fazendo $\phi = f = h$ na fórmula de Green, obtemos:*

$$\begin{aligned} \int_M \Big(h\Delta f + \langle \nabla f, \nabla h \rangle\Big) dV &= 0 \;\Rightarrow\; -\lambda \int_M \phi^2 dV + \int_M |\nabla \phi|^2 dV = 0 \\ &\Rightarrow\; \lambda = \frac{\int_M |\nabla \phi|^2 dV}{\int_M \phi^2 dV} \geq 0 \end{aligned}$$

A partir da observação acima obtemos a seguinte definição:

Definição 2.6 (Autovalor do Laplaciano)**.** *Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do Laplaciano com autofunção associada $\phi \in C^2(M) \cap C^1(\overline{M})$ se*

$$\lambda = \frac{\int_M |\nabla \phi|^2 dV}{\int_M \phi^2 dV}.$$

Observação 2.6. *Por definição, temos que $\lambda = 0$ implica que ϕ é constante. Portanto, nos problemas de Neumann e fechado temos que $\lambda_1 = 0$ e nos problemas de Dirichlet e misto tem-se $\lambda_1 \geq 0$.*

Observação 2.7. *A ortogonalidade de autoespaços distintos é uma consequência direta da fórmula de Green*

$$\int_M \Big(h\Delta f - f\Delta h\Big) dV = 0$$

Com efeito, se ϕ, ψ são autofunções associadas aos autovalores distintos λ e τ, temos

$$\begin{aligned} (\lambda - \tau)(\phi, \psi) &= (\lambda - \tau) \int_M \phi \psi dV \\ &= \int_M \Big(\phi(-\tau\psi) - (\psi(-\lambda\phi))\Big) dV \\ &= \int_M \Big(\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi\Big) dV = 0 \end{aligned}$$

Observação 2.8. *Se $\phi_1, \phi_2, \ldots$ é uma sequência ortonormal em $L^2(M)$ de autofunções tais que $\Delta \phi_j = \lambda_j \phi_j$, para $j = 1, \ldots, \infty$, então $\phi_1, \phi_2, \ldots$ é uma sequência ortonormal completa em $L^2(M)$. Em particular, para $f \in L^2(M)$, temos as identidades de Parseval:*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \phi_j)\phi_j \quad e \quad ||f||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \phi_j)^2$$

onde,

$$(f, \phi_j) = \int_M f\phi_j, \quad \forall j = 1, \ldots, \infty.$$

2.3 Método Minimax e de Rayleigh

Para camos de vetores contínuos X, Y em M, definimos o produto interno

$$(X,Y) = \int_M \langle X, Y\rangle \, dV \quad \text{com norma} \quad (X)^2 = \int_M |X|^2 dV$$

e completamos os espaço métrico resultante em um espaço L^2, denotado por $\mathcal{L}^2(M)$. Como de costume, $\mathcal{L}^2(M)$ pode ser interpretado como sendo o espaço de todos os campos X em M tais que $\int_M |X|^2 dV < +\infty$. O produto interno e a norma extedem $\mathcal{L}^2(M)$ a um espaço de Hilbert.

Observação 2.9. *Se $f \in C^1(M)$ e X é um campo de vetores de classe C^1 em M com suporte compacto, como valem*

$$\operatorname{div}(fX) = f(\operatorname{div} X) + \langle \nabla f, X\rangle \qquad e \qquad \int_M (\operatorname{div} X) dV = 0,$$

segue que

$$(\nabla f, X) = -(f, \operatorname{div} X) \tag{2.1}$$

Definição 2.7 (Derivada Fraca)**.** *Dada uma função $f \in L^2(M)$, dizemos que $Y \in \mathcal{L}^2(M)$ é uma derivada fraca de f se*

$$(X, Y) = -(f, \operatorname{div} X)$$

para todos campos de vetores X de classe C^1 com uporte compacto em M.

Observação 2.10. *Sabemos que existe no máximo um tal campo $Y \in \mathcal{L}^2(M)$ e devemos, portanto, escrever*

$$Y = \nabla f.$$

Definição 2.8 (Espaço de Sobolev)**.** *O espaço de Sobolev é o subespaço $\mathcal{H}(M)$ de $L^2(M)$ consttuído de todas as funções $f \in L^2(M)$ as quais possuem derivadas fracas; em $\mathcal{H}(M)$ definimos o produto interno*

$$(f,h)_1 = (f,h) + (\nabla f, \nabla h)$$

com norma induzida

$$(f)_1^2 = ||f||^2 + ||\nabla f||^2.$$

Observação 2.11. *Sabe- que $\mathcal{H}(M)$ é o completamento de $\{f \in C^\infty(M)\ ;\ ||f||_1 < +\infty\}$, na métrica induzida $(\ ,\ )$.*

Definição 2.9 (Integral de Dirichlet)**.** *Em $\mathcal{H}(M)$ consideramos a forma bilinear simétrica D, chamada de Integral de Dirichlet ou Integral de Energia, dada por*

$$D[f,h] = \int_M \langle \nabla f, \nabla h\rangle \, dV, \qquad f, h \in \mathcal{H}(M).$$

Observação 2.12. *No que segue, devemos estar preocupados com a validade da fórmula*

$$(\Delta\phi, f) = -D[\phi, f] \tag{2.2}$$

onde ϕ é usualmente uma autofunção em algum de nossos problemas de autovalor, e f está em algum subespaço de $\mathcal{H}(M)$. Vejamos os seguintes casos:

(a) No Problema Fechado, temos M compacta (em particular $M = \overline{M}$) e (2.2) é válida pela Fórmula de Green

$$\int_M \Big(f\Delta\phi + \langle \nabla\phi, \nabla f\rangle\Big) dV = 0$$

quando $\phi \in C^2(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Portanto, para uma função $\phi \in C^2(M)$ fixa, a fórmula (2.2) define um funcional linear F_ϕ em $C^\infty(M)$ como um subespaço de $\mathcal{H}(M)$, satisfazendo

$$|F_\phi(f)| \leq ||\nabla\phi|| \cdot ||\nabla f|| \leq ||\nabla\phi|| \cdot ||f||_1.$$

Então, F_ϕ é um funcional linear limitado em $C^\infty(M) \subseteq \mathcal{H}(M)$ com norma menor ou igual a $||\nabla\phi||$, e pode ser estendido a um funcional linear limitado em todo $\mathcal{H}(M)$. Logo, (2.2) será válida para $\phi \in C^2(M)$ e $f \in \mathcal{H}(M)$.

(b) Para o Problema de Neumann, a validade da fórmula (2.2) vem da seguinte Fórmula de Green

$$\int_M \Big(f\Delta\phi + \langle \nabla\phi, \nabla f\rangle\Big) dV = \int_{\partial M} f(\nu\phi) dV$$

para $\phi \in C^2(\overline{M})$, satisfazendo $\nu\phi = 0$ em ∂M, e $f \in C^\infty(\overline{M})$. De forma análoga, podemos estender a validade de (2.2) para $f \in \mathcal{H}(M)$.

(c) Para o Problema de Dirichlet, vamos prosseguir como segue: a validade da fórmula (2.2) vem novamente da Equação de Green, apresentada no item (b), para $\phi \in C^2(M)$, satisfazendo $\phi = 0$ em ∂M, e $f \in C^\infty(M)$ com suporte compacto. Porém, a validade de (2.2) será agora estendida para as funções f no complemento das funções de classe C^∞, com suporte compacto em M, em $\mathcal{H}(M)$.

(d) Para o Problema Misto, obtemos a validade de (2.2) quando $\phi \in C^2(M)$ com $\phi = 0$ em $\partial M - N$, $\nu\phi = 0$ em N, e f no complemento das funções das $C^\infty(\overline{M})$ com suporte compacto em $M \cup N$.

Definição 2.10 (Espaço das Funções Admissíveis). *Dados cada problemas de autovalor acima, definimos o espaço das funções admissíveis $\mathfrak{H}(M)$ como sendo:*

(i) $\mathcal{H}(M)$, no caso dos Problemas Fechado e de Neumann;

(ii) o complemento das funções C^∞ com suporte compacto, no caso do Problema de Dirichlet;

(ii) o complemento das funções C^∞ com suporte compacto em $M \cup N$, no caso do Problema Misto.

Definição 2.11 (Domínio Regular e Domínio Normal)**.** *Dizemos que M é um domínio regular se M é conexa, com fecho compacto e bordo C^∞ não-vazio e, dizemos que M é um domínio normal se M é conexa, com fecho compacto e bordo C^∞ por partes não-vazio.*

Princípio de Rayleigh. *Dado um domínio normal com problema de autovalor fixo tendo o espaço de funções $\mathfrak{H}(M)$, e autovalores*

$$\lambda_1 \leq \lambda_1 \leq \cdots , \tag{2.3}$$

onde cada autovalor é repetido um número de vezes igual a sua multiplicidade. Então para qualquer $f \in \mathfrak{H}(M)$, $f \neq 0$, temos

$$\lambda_1 \leq \frac{D[f,f]}{||f||^2} \tag{2.4}$$

com igualdade se, e somente se, f é uma autofunção de λ_1. Se $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ é uma base orotonormal completa de $L^2(M)$ tal que ϕ_j é uma autofunção de λ_j para cada $j = 1, 2, \dots$, então para $f \in \mathfrak{H}(M)$, $f \neq 0$, satisfazendo

$$(f, \phi_1) = (f, \phi_2) = \cdots = (f, \phi_{k-1}) = 0 \tag{2.5}$$

temos a desigualdade

$$\lambda_k \leq \frac{D[f,f]}{||f||^2} \tag{2.6}$$

com igualdade se, e somente se, f é uma autofunção de λ_k.

Demonstração. Pelas considerações feitas na observação 2.12, temos que se ϕ_j é uma autofunção , e $f \in \mathfrak{H}(M)$, então a fórmula (2.2) é verdadeira. Para qualquer função $f \in \mathfrak{H}(M)$ dada, façamos

$$\alpha_j = (f, \phi_j).$$

Para $k > 1$, temos que (2.4) é equivalente a $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. Então, para todos $k = 1, 2, \dots,$ e $r = k, k+1, \dots$, temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq D\left[f - \sum_{j=k}^{r} \alpha_j \phi_j, f - \sum_{j=k}^{r} \alpha_j \phi_j\right] \\
&= D[f,f] - 2\sum_{j=k}^{r} \alpha_j D[f, \phi_j] + \sum_{j,l=k}^{r} \alpha_j \alpha_l D[\phi_j, \phi_l] \\
&= D[f,f] + 2\sum_{j=k}^{r} \alpha_j (f, \Delta\phi_j) - \sum_{j,l=k}^{r} \alpha_j \alpha_l (\phi_j, \Delta\phi_l) \\
&= D[f,f] - \sum_{j=k}^{r} \lambda_j \alpha_j^2
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 < +\infty$$

e

$$D[f,f] \geq \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 \geq \lambda_k \sum_{j=k}^{\infty} \alpha_j^2 = \lambda_k ||f||^2,$$

pelas idetidades de Parseval. ■

Princípio Minimax. *Dados $v_1, \ldots, v_{k-1} \in L^2(M)$, seja*

$$\mu = \inf \frac{D[f,f]}{||f||^2}$$

onde f varia sobre o subespaço (menos a origem) das funções em $\mathfrak{H}(M)$ ortogonais a $v_1, \ldots, v_{k-1}$ em $L^2(M)$. Então, para autovalores dados em (2.3), temos

$$\mu \leq \lambda_k$$

Se $v_1, \ldots, v_{k-1}$ são ortonormais, com cada v_l uma autofunção de λ_l, com $l = 1, \ldots, k-1$, então $\mu = \lambda_k$.

Demonstração. Considere as funções f da forma

$$f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \phi_j,$$

onde $\phi_1, \ldots, \phi_k$ são ortonormais, com cada ϕ_j um autofunção de λ_j, $j = 1, \ldots, k$, e f é ortogonal a $v_1, \ldots, v_{k-1}$ em $L^2(M)$, ou seja,

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (\phi_j, v_l), \qquad l = 1, \ldots, k-1. \tag{2.7}$$

Se pensarmos como sendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ incógnitas e (ϕ_j, v_l) os coeficientes dados, então o sistema (2.7) possui um número de incógnitas maior do que de equações e, portanto, uma solução não-trivial de (2.7) deve existir. Mas, então

$$\mu ||f||^2 \leq D[f,f] = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \alpha_j^2 \leq \lambda_k ||f||^2$$

o que implica a afirmação. ■

2.4 Subvariedades Mínimas em $\mathbb{S}^n$

O estudo de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ é um assunto interessante desde o tempo de Lagrange. Até agora o assunto atrai vários matemáticos. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão p. Considere o operador de Laplace $\Delta : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$. Para $f \in C^\infty(M)$ escolhemos um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_m\}$ em M. Então

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} e_i e_i(f) - (\nabla_{e_i} e_i) f.$$

Em torno de cada ponto p, existem coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_m)$, onde a métrica Riemanniana em M pode ser escrita como $ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$. Se denotarmos $(g_{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ e $g = \det(g_{ij})$, então

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

Qualquer $f \in C^\infty(M)$ satisfazendo $\Delta f = 0$ é chamada um *função hammônica*. Agora vamos estudar as subvariedades mínimas em espaços Euclideanos.

Proposição 2.1. *Seja $\phi : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão isométrica com vetor curvatura média H, então*

$$\Delta \phi = mH,$$

onde $\Delta\phi = (\Delta\phi_1, \ldots, \Delta\phi_m)$.

Demonstração. Observe que $X(\phi) = d\phi(X) \cong X$ para qualquer $X \in TM$. Seja $\{e_i\}$ um referencial de campos ortonormais local. Então

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \sum_{i=1}^{m} e_i(e_i(\phi)) - (\nabla_{e_i} e_i)(\phi) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} \phi - (\nabla_{e_i} e_i)(\phi) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \overline{\nabla}_{e_i} e_i - \nabla_{e_i} e_i - \sum_{i=1}^{m} \left(\overline{\nabla}_{e_i} e_i\right)^N = mH. \end{aligned}$$

■

Corolário 2.1. *Uma imersão isométrica $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão mínima se e somente se cada componente de ϕ é uma função harmônica em M.*

Observação 2.13. *Neste caso, a definição acima reduz-se a $\Delta\phi = 0$. De qualquer modo, esta não é uma equação linear, uma vez que a métrica induzida mudaria quando a imersão ϕ mudasse, e assim o operador Δ o faz.*

Além de subvariedades mínimas no espaço euclidiano, as subvariedades mínimas na esfera são o assunto mais importante nesta teoria. Existe o mergulho canônico da esfera no espaço euclidiano e, para subvariedades mínimas na esfera, também podemos estudar suas funções coordenadas. Veremos também que algumas propriedades de subvariedades mínimas na esfera estão intimamente relacionadas com as propriedades de subvariedades mínimas no espaço Euclidiano.

Seja $M \hookrightarrow \overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$ imersões isométricas com as conexões de Levi-Civita, ∇, $\overline{\nabla}$ e $\overline{\overline{\nabla}}$. Denote por H o vetor curvatura média de M em $\overline{M}$ e $\overline{H}$ o vetor curvatura média para M em $\overline{\overline{M}}$. Escolhamos um rerefencial de campos ortonormais local $\{e_1, \dots, e_m\}$ em M. Então,

$$H = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{\nabla}_{e_i} e_i\right)^{N} = \frac{1}{m}\left(\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{\overline{\nabla}}_{e_i} e_i\right)^{T\overline{M}}\right)^{N} = \frac{1}{m}\left(\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{\overline{\nabla}}_{e_i} e_i\right)^{N}\right)^{T\overline{M}} = \overline{H}^{T\overline{M}}.$$

Se $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$ é totalmente geodésica, então $\overline{\nabla} = \overline{\overline{\nabla}}$ ao longo de $\overline{M}$ e $\overline{H} = \overline{\overline{H}}$, o que significa que se M é uma subvariedade mínima em $\overline{M}$, e $\overline{M}$ é uma subvariedade totalmente geodésica em $\overline{\overline{M}}$, então M é uma subvariedade totalmente geodésica em $\overline{\overline{M}}$.

Se $\phi : M \hookrightarrow \overline{M} \subset \mathbb{R}^N$, da Proposição 2.4 segue que ϕ é uma imersão mínima se e somente se $(\Delta\phi)^{T\overline{M}} = 0$, a saber $\Delta\phi$ é sempre ortogonal a $\overline{M}$.

Teorema 2.6. *Uma imersão isométrica $\phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ é uma imersão mínima em $\mathbb{S}^n$ se e somente se*

$$\Delta\phi = -m\phi.$$

Demonstração. Pelo o que foi discutido acima sabemos que ϕ é uma imersão mínima se e somente se para qualquer $p \in M$, tem-se $\Delta\phi(p)$ é paralelo à direção normal a $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, a saber, $\Delta\phi = \lambda\phi$, onde $\lambda \in C^\infty(M)$. Então,

$$0 = \Delta|\phi|^2 = \langle \phi, \Delta\phi\rangle + |\nabla\phi|^2 = \lambda|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2 = \lambda + |\nabla\phi|^2.$$

Isso siginifica que

$$\lambda = -|\nabla\phi|^2 = -\left\langle \nabla_{e_i}\phi, \nabla_{e_i}\phi\right\rangle = -\left\langle e_i, e_i\right\rangle = -m.$$

■

É interessante ver que para imersões mínimas em $\mathbb{S}^n$ suas funções coordenadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ são autofunções do operador de Laplace em M com respeito ao autovalor $-\dim M$. Reciprocamente, temos o teorema de Takahashi (ver [16]). Seja

$$\mathbb{S}^n(r) = \left\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \sum_{k=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\right\}.$$

Teorema 2.7 (Takahashi, 1966, [16]). *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão m*

e $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *uma imersão isométrica tal que para* $\lambda \neq 0$ *satisfazendo*

$$\Delta\phi = -\lambda\phi.$$

Então

(1) $\lambda > 0$;

(2) $\phi(M) \subset \mathbb{S}^n(r)$, *onde* $r^2 = \frac{m}{\lambda}$;

(3) $\phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^n(r)$ *é uma imersão mínima.*

Demonstração. Seja $\overline{H}$ o vetor curvatura média de M em $\mathbb{R}^{n+1}$. Combinando a Proposição 2.6 com a hipótese do teorema temos que $-\lambda\phi = m\overline{H}$, o que implica que ϕ é um vetor normal de M em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para qualquer vetor X tangente a M tem-se

$$X\langle\phi,\phi\rangle = 2\left\langle \overline{\overline{\nabla}}_X\phi,\phi\right\rangle = 2\langle X,\phi\rangle = 0.$$

Portanto,

$$|\phi|^2 = r^2 = \text{constante}.$$

Além disso,

$$0 = \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \langle\Delta\phi,\phi\rangle + |\nabla\phi|^2 = -\lambda r^2 + m,$$

a saber,

$$\lambda = \frac{m}{r^2} > 0.$$

Isto prova as duas primeiras conclusões do teorema. Também temos que

$$H = (\overline{H})^{T\mathbb{S}^n(r)} = \left(-\frac{1}{m}\lambda\phi\right)^{T\mathbb{S}^n(r)} = 0,$$

e a prova do teorema fica completa. ■

Capítulo 3

Rigidez de Hipersuperfícies Mínimas de Esferas com Curvatura de Ricci Constante

3.1 Preliminares e Resultados Auxiliares

Seja $\phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão mínima de uma variedade compacta orientada de dimensão $(n-1)$ na esfera unitária. Vamos identificar M com o conjunto $\phi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e o espaço T_pM com o subespaço linear $d\phi_p(T_pM)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 3.1 (Funções f_w e l_w). *Seja $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixo. Vamos definir funções $l_w : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f_w : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\begin{cases} l_w(p) = \langle p, w \rangle \\ f_w(p) = \langle \nu(p), w \rangle \end{cases} \quad \textit{para todo } p \in M.$$

Observação 3.1. *Observe que l_w e f_w são, respectivamente, as coordenadas da imersão ϕ e da aplicação de Gauss ν.*

Vamos começar esta seção calculando o gradiente das funções l_w e f_w. Para isto, vamos utilizar a técnica apresentada por J. Alías, A. Brasil Jr. e O. Perdomo em [1]:

Definição 3.2 (Campo w^T). *Para $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixo, definamos o campo de vetores tangente $w^T : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por*

$$w^T(p) = w - l_w(p)p - f_w(p)\nu(p) \quad \textit{para todo } p \in M. \tag{3.1}$$

Observação 3.2. *Claramente, w^T é um campo de vetores tangente em M pois vale que $\left\langle w^T(p), p \right\rangle = 0$ e $\left\langle w^T, \nu(p) \right\rangle = 0$ para todo $p \in M$. Mais precisamente, w^T é a projeção ortogonal do vetor w sobre T_pM. Desta forma, todo vetor $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ admite uma decomposição em termos de $w^T(p)$, $\nu(p)$ e p.*

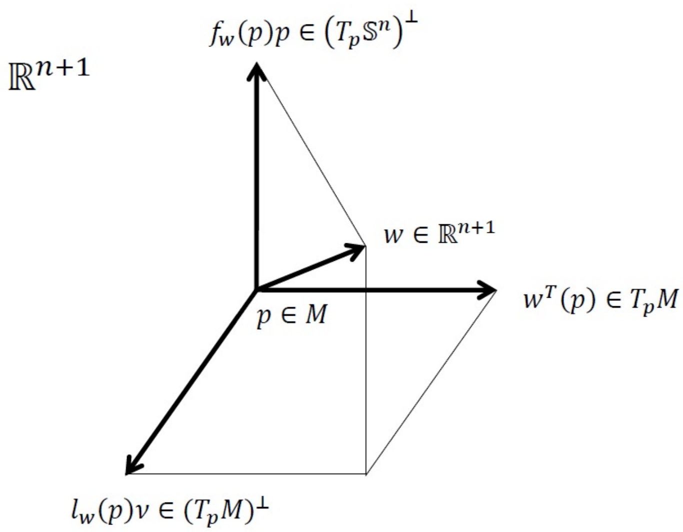

Figura 3.1: *Decomposição de $w \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

Observação 3.3. *Para todo $p \in M$, temos*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{n+1} &= T_p\mathbb{S}^n \oplus (T_p\mathbb{S}^n)^\perp \\ &= T_pM \oplus \underbrace{(T_pM)^\perp \oplus (T_p\mathbb{S}^n)^\perp}_{\overline{T_pM}}\end{aligned}$$

em que $\overline{T_pM}$ denota o espaço normal a M em p, do ponto de vista M subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$. Neste caso, temos que $\overline{T_pM} = [\nu(p), p]$, ou seja, o espaço normal é gerado pelo vetor posição $p \in (T_p\mathbb{S}^n)^\perp$ e pela aplicação de Gauss $\nu(p) \in (T_pM)^\perp$.

Proposição 3.1 (J. Alías, A. Brasil Jr. e O. Perdomo [1])**.** *Se M^{n-1} é uma hipersuperfície suave de $\mathbb{S}^n$ e A denota seu operador de Weingarten com respeito ao campo de vetores normal unitário $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ então, o gradiente das funções l_w e f_w são dados por:*

$$\nabla l_w = w^T \quad e \quad \nabla f_w = -A(w^T). \tag{3.2}$$

Demonstração. Para qualquer vetor $v \in T_pM$, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Observe que

$$\begin{aligned}\langle v, \nabla l_w(p)\rangle &= (dl_w)_p(v) \\ &= \left.\frac{d\,(l_w(\alpha(t)))}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d\,\langle \alpha(t), w\rangle}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \langle \alpha'(0), w\rangle \\ &= \left\langle v, w^T(p)\right\rangle.\end{aligned}$$

Como a igualdade vale para todo $v \in T_pM$ e $w^T(p) \in T_pM$, então, $\nabla l_v(p) = w^T(p)$. Para a função f_w, temos

$$\begin{aligned}
\langle v, \nabla f_w(p)\rangle &= (df_w)_p(v) \\
&= \left.\frac{d(f_w(\alpha(t)))}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left\langle A(v), w^T(p)\right\rangle \\
&= \left\langle v, -A(w^T)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla f_w(p) = -A(w^T)$. ■

Também temos as seguintes expressões para o Laplaciano das funções l_w e f_w.

Proposição 3.2 (J. Alías, A. Brasil Jr. e O. Perdomo [1]). *Se M^{n-1} é uma hipersuperfície suave de $\mathbb{S}^n$ com vetor curvatura média constante H, e A denota o operador de Weingarten com respeito ao campo de vetores normal unitário $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ então, o Laplaciano das funções l_w e f_w são dados por:*

$$-\Delta l_w = (n-1)l_w \quad e \quad -\Delta f_w = ||A||^2 f_w. \tag{3.3}$$

Demonstração. Primeiramente, considere as imersões $(M, \nabla) \xrightarrow{\phi} (\mathbb{S}^n, \overline{\nabla}) \xrightarrow{id} (\mathbb{R}^{n+1}, \widetilde{\nabla})$, onde ∇, $\overline{\nabla}$ e $\widetilde{\nabla}$, denotam, respectivamente, as conexões Riemannianas de M, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, para todos $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{S}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X Y &= \left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)^{T\mathbb{S}^n} + \left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)^{(T\mathbb{S}^n)^\perp} \\
&= \overline{\nabla}_X Y + \left\langle \widetilde{\nabla}_X Y, p\right\rangle p \\
&= (\overline{\nabla}_X Y)^{TM} + (\overline{\nabla}_X Y)^{TM^\perp} + \left\langle \bar{A}_p X, Y\right\rangle p \\
&= \nabla_X Y + \left\langle \overline{\nabla}_X Y, \nu\right\rangle \nu - \langle X, Y\rangle p \\
&= \nabla_X Y + \langle A_\nu X, Y\rangle \nu - \langle X, Y\rangle p
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Observe que, para todos $u, v \in T_pM$, substituindo $X = v$ e $Y = u$ em (3.4) e fazendo o produto interno da equação resultante por ν em ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{\nabla}_v u, \nu\right\rangle = \langle A_\nu v, u\rangle &\implies \left\langle \widetilde{A}_\nu v, u\right\rangle = \langle A_\nu v, u\rangle \\
&\implies \widetilde{A}_\nu = A_\nu \quad \forall\, u, v \in T_pM
\end{aligned}$$

Prosseguindo, de (3.1) e (3.2) temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_v \nabla l_w &= \nabla_v w^T \\
&= \widetilde{\nabla}_v w^T - \left\langle A_\nu v, w^T\right\rangle \nu + \left\langle v, w^T\right\rangle p \\
&= \widetilde{\nabla}_v (w - l_w p - f_w \nu) - \left\langle A_\nu v, w^T\right\rangle \nu + \left\langle v, w^T\right\rangle p
\end{aligned}$$

Como
$$v(l_w)p = \langle \nabla l_w, v \rangle \, p = \left\langle w^T, v \right\rangle p$$
e
$$v(f_w)\nu = \langle \nabla f_w, v \rangle \, \nu = - \left\langle A_\nu v, w^T \right\rangle \nu.$$
Tem-se,
$$\nabla_v \nabla l_w = -l_w(p)v + f_w(p)A_\nu(v).$$
Seja $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de T_pM, então o Laplaciano de l_w no ponto p é dado por:

$$\begin{aligned}
\Delta l_w(p) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} \nabla l_w, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle -l_w(p)e_i + f_w(p)A_\nu(e_i), e_i \rangle \\
&= -l_w(p) \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, e_i \rangle + f_w(p) \sum_{i=1}^{n-1} \langle A_\nu(e_i), e_i \rangle \\
&= -(n-1)l_w(p) + \text{traço}(A_\nu) f_w(p) \\
&= -(n-1)l_w(p) + (n-1)Hf_w(p). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Para a função f_w, de (3.1) e (3.2) temos, para a função $v \in T_pM$ que

$$\begin{aligned}
\nabla_v \nabla f_w &= \nabla_v(-A(w^T)) \\
&= -\nabla_v(A(w^T)) \\
&= -(\nabla_v A)_\nu w^T - A_{\nabla^\perp_X \nu} w^T - A_\nu(\nabla_v w^T) \\
&= -(\nabla_v A)_\nu w^T(p) - A_\nu(\nabla_v w^T).
\end{aligned}$$

Recordemos que a derivada covariante do operador de Weingarten $A : T_pM \longrightarrow T_pM$ é dada por
$$(\nabla_X A)_\nu Y = \nabla_X(A_\nu Y) - A_{\nabla^\perp_X \nu} Y - A_\nu \nabla_X Y$$
Além disso, como o espaço ambiente $\overline{M} = \mathbb{S}^n$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi (1.3) reduz-se a (ver [17] página 70):

$$(\nabla_X A)_\nu Y = (\nabla_Y A)_\nu X \qquad (3.6)$$

logo,

$$\begin{aligned}
\nabla_v \nabla f_w &= -(\nabla_{w^T(p)} A)_\nu(v) - A_\nu(-l_w(p)v + f_w(p)A_\nu(v)) \\
&= -(\nabla_{w^T(p)} A)_\nu v + l_w(p)A_\nu v - f_w(p)A^2_\nu(v), \quad \forall v \in T_pM.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta f_w(p) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i}\nabla f_w, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle -(\nabla_{w^T(p)}A)_\nu e_i + l_w(p)A_\nu e_i - f_w(p)A_\nu^2(e_i), e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle -(\nabla_{w^T(p)})_\nu e_i, e_i\right\rangle + l_w(p)\sum_{i=1}^{n-1}\langle A_\nu e_i, e_i\rangle - f_w(p)\sum_{i=1}^{n-1}\left\langle A_\nu^2(e_i), e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle -(\nabla_{w^T(p)})_\nu e_i, e_i\right\rangle + l_w(p)\text{traço}(A_\nu) - f_w(p)\sum_{i=1}^{n-1}\langle A_\nu(e_i), A_\nu(e_i)\rangle \\
&= -(n-1)\left\langle w^T(p), \nabla H(p)\right\rangle + (n-1)l_w(p)H - ||A||^2(p)f_w(p).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\Delta f_w = (n-1)l_w H - ||A||^2(p)f_w. \tag{3.7}$$

■

Usando a minimalidade de M e a equação de Codazzi (3.6) obtemos as seguintes expressões:

Proposição 3.3. *O gradiente e o Laplaciano das funções l_w e f_w são dados por:*

$$\begin{aligned}
\nabla l_w &= w^T & \nabla f_w &= -A(w^T) \\
-\Delta l_w &= (n-1)l_w & -\Delta f_w &= ||A||^2 l_w
\end{aligned} \tag{3.8}$$

O lema a seguir é baseado na caracterização minimax para operadores elípticos.

Lema 3.1. *Seja $M \subset \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície mínima compacta orientada. Se o primeiro autovalor de Δ em M é $(n-1)$, então para cada função suave $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\int_M f dV = 0$ temos que*

$$(n-1) \leq \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV}{\int_M f^2 dV} \text{ com igualdade se } -\Delta f = (n-1)f. \tag{3.9}$$

Demonstração. Sejam $M \subset \mathbb{S}^n$ mínima e $f \in \mathfrak{H}(M)$, com $\int_M f dV = 0$. Se o primeiro autovalor do Laplaciano em M é $\lambda_1 = (n-1)$, Pelo princípio Minimax, ou Princípio de Rayleigh, obtemos que

$$(n-1) = \min \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV}{\int_M f^2 dV} \quad \Longrightarrow \quad (n-1) \leq \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV}{\int_M f^2 dV}.$$

Pela minimalidade de M e pelo fato de que $\lambda_1 = (n-1)$, a igualdade $(n-1) = \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV}{\int_M f^2 dV}$ ocorre se, e somente se, $f \in \mathfrak{H}(M)$ é uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_1 = n-1$, ou seja, $-\Delta f = (n-1)f$. ■

Nosso teorema principal é baseado na técnica que usa o grupo de aplicações conformes de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{S}^n$; esta técnica foi apresentada por Peter Li e Shing-Tung Yau em [11]. Seja B^{n+1} uma bola aberta unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para cada ponto $g \in B^{n+1}$ consideramos a aplicação

$$F_g(p) = \frac{p + (\mu \langle p, g\rangle + \lambda)g}{\lambda(\langle p, g\rangle + 1)}$$

para todo $p \in \mathbb{S}^n$, onde $\lambda = (1 - |g|^2)^{\frac{1}{2}}$ e $\mu = (\lambda - 1)|g|^{-2}$. Em [12] Sebastián Montiel e Antonio Ros mostraram que F_g é uma transformação conforme de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{S}^n$ e, para cada $v, w \in T_p\mathbb{S}^n$, sua diferencial dF_g satisfaz

$$\langle dF_g(v), dF_g(w)\rangle = \frac{1 - |g|^2}{(\langle p, g\rangle + 1)^2} \langle v, w\rangle .$$

Lema 3.2. *Seja $g \in B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, defina $F_g : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ por $F_g(p) = \frac{p+(\mu\langle p,g\rangle+\lambda)g}{\lambda(\langle p,g\rangle+1)}$ onde $\lambda = (1 - |g|^2)^{\frac{1}{2}}$ e $\mu = (\lambda - 1)|g|^{-2}$. Então F_g é uma aplicação conforme e sua diferencial satisfaz*

$$\langle dF_g(v), dF_g(w)\rangle = \frac{1 - |g|^2}{(\langle p, g\rangle + 1)^2} \langle v, w\rangle , \qquad \forall\ v, w \in T_p\mathbb{S}^n. \tag{3.10}$$

Demonstração. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}
\mu\lambda - \lambda^2 &= \frac{1 - \sqrt{1 - |g|^2}}{|g|^2(1 - |g|^2)} - \frac{1}{(1 - |g|^2)} = \frac{1 - \sqrt{1 - |g|^2} - |g|^2}{|g|^2(1 - |g|^2)} \\
&= \frac{1}{|g|^2}\left[\frac{(1 - |g|^2) - \sqrt{1 - |g|^2}}{(1 - |g|^2)}\right] = \frac{1}{|g|^2}\left[1 - \frac{\sqrt{1 - |g|^2}}{1 - |g|^2}\right] \\
&= |g|^{-2}(1 - \lambda).
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\mu\lambda - \lambda^2 = |g|^{-2}(1 - \lambda). \tag{3.11}$$

A seguir, vamos calcular dF_g, para isto, seja $v \in T_p\mathbb{S}^n$ qualquer, então temos

$$\begin{aligned}
(dF_g)_p(v) &= \frac{\big(v + \mu \langle v, g\rangle g\big)\lambda\big(\langle p, g\rangle + 1\big) - \big(p + \big(\mu \langle p, g\rangle + \lambda\big)g\big)\lambda \langle v, g\rangle}{\lambda^2\big(\langle p, g\rangle + 1\big)^2} \\
&= \frac{\lambda\big(\langle p, g\rangle + 1\big)v - \lambda \langle v, g\rangle p + \mu\lambda \langle v, g\rangle \langle p, g\rangle g - \lambda^2 \langle v, g\rangle g}{\lambda^2\big(\langle p, g\rangle + 1\big)^2} \\
&= \frac{\lambda\big(\langle p, g\rangle + 1\big)v - \lambda \langle v, g\rangle p + \big(\mu\lambda - \lambda^2\big) \langle v, g\rangle g}{\lambda^2\big(\langle p, g\rangle + 1\big)^2}
\end{aligned}$$

Por (3.11), obtemos que

$$(dF_g)_p(v) = \frac{\lambda(\langle p,g\rangle + 1)v - \lambda\langle v,g\rangle p + \langle v,g\rangle(1-\lambda)|g|^{-2}g}{(\langle p,g\rangle+1)^2}. \tag{3.12}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\lambda^2|g|^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) &= \frac{|g|^2}{1-|g|^2} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-|g|^2}}\right)^2 + 2\frac{\sqrt{1-|g|^2}-1}{1-|g|^2}\\
&= \frac{|g|^2}{1-|g|^2} + \left(1 - \frac{\sqrt{1-|g|^2}-1}{\sqrt{1-|g|^2}}\right)^2 + \frac{2\sqrt{1-|g|^2}-2}{1-|g|^2}\\
&= \frac{|g|^2 + 1 - |g|^2 - 2\sqrt{1-|g|^2} + 1 + 2\sqrt{1-|g|^2} - 2}{1-|g|^2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lambda^2|g|^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) = 0 \tag{3.13}$$

Portanto, para $v, w \in T_p\mathbb{S}^n$ quaisquer, de (3.12) e (3.13) obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle (dF_g)_p(v), (dF_g)_p(w)\rangle &= \frac{\lambda^2(\langle p,g\rangle+1)^2\langle v,w\rangle}{(\langle p,g\rangle+1)^4}\\
&\quad + \frac{[\lambda^2|g|^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)]\langle v,g\rangle\langle w,g\rangle|g|^{-2}}{(\langle p,g\rangle+1)^4}\\
&= \frac{1-|g|^2}{(\langle p,g\rangle+1)^2}\langle v,w\rangle.
\end{aligned}$$

Como $g \in B^{n+1}$, segue $1-|g|^2 > 0$ e, portanto, dF_g é uma aplicação conforme. ■

Em [11], Li e Yau provaram que se $\phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ é uma imersão conforme, então existe $g \in B^{n+1}$ tal que $\int_M (F_g \circ \phi) dV = (0, \ldots, 0)$. Neste trabalho vamos precisar do mesmo resultado para uma imersão a qual não necessariamente deve ser conforme.

Lema 3.3 (P. Li & S. Yau [11])**.** *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Se $\phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ é uma aplicação contínua tal que para todo $b \in S^n$, o volume de $\phi^{-1}(b)$ é nulo, então existe $g \in B^{n+1}$ tal que $\int_M (F_g \circ \phi) dV = (0, \ldots, 0)$.*

Demonstração. Para cada conjunto mensurável $T \subset M$ vamos denotar seu volume por $\mathrm{vol}(T)$. Vamos definir a aplicação $H : B^{n+1} \longrightarrow B^{n+1}$ da seguinte maneira

$$H(g) = \frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M (F_g \circ \phi) dV = \frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \left(\int_M \langle F_g \circ \phi, e_1\rangle dV, \ldots, \int_M \langle F_g \circ \phi, e_{n+1}\rangle dV \right).$$

Observe que $H(g) \in B^{n+1}$ pois,

$$
\begin{aligned}
|H(g)|^2 &= \frac{1}{\text{vol}(M)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\int_M (\langle F_g \circ \phi, e_i\rangle)^2\, dV \\
&\leq \frac{1}{\text{vol}(M)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\int_M 1^2 dV\right)\left(\int_M \langle F_g \circ \phi, e_i\rangle^2\, dV\right) \\
&= \frac{1}{\text{vol}(M)}\int_M \left(\sum_{i=1}^{n+1}\langle F_g \circ \phi, e_i\rangle^2\right) dV \\
&= \frac{1}{|M|}\int_M 1dV \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Precisamos mostrar que $H(g) = (0, \ldots, 0)$ para algum $g \in B^{n+1}$. Vamos concluir isso mostrando que H pode ser estendida continuamente a $\partial B^{n+1} = \mathbb{S}^n$ com $H(b) = b$ para todo $b \in \mathbb{S}^n$, uma vez que toda função contínua de $\overline{B^{n+1}}$ em $\overline{B^{n+1}}$ a qual fixa $\partial B^{n+1} = \mathbb{S}^n$ deve ser sobrejetiva.

Usando as hipóteses do lema obtemos que:

$$
\forall b_0 \in \mathbb{S}^n, \quad \lim_{k\to\infty} \text{vol}\left(\left\{p; 1 + \langle \phi(p), b_0\rangle < \frac{1}{k}\right\}\right) = \text{vol}\left(\phi^{-1}(-b_0)\right) = 0 \tag{3.14}
$$

Basta observar que $p \in \phi^{-1}(-b_0)$ se, e somente se, $\phi(p) = -b_0$, assim se $p \in M$ é tal que $1 + \langle \phi(p), b_0\rangle < \frac{1}{k}$, logo,

$$
\begin{aligned}
|\phi(p) - (-b_0)|^2 &= |\phi(p)|^2 + |b_0|^2 + 2\langle \phi(p), b_0\rangle \\
&= 2(1 + \langle \phi(p), b_0\rangle)
\end{aligned}
$$

Donde, tomando k suficiemente grande ($k \to \infty$) observamos que: $|\phi(p) - (-b_0)| < 1 + \langle \phi(p), b_0\rangle < \frac{1}{k} \to 0$, ou seja, ϕ é contínua e $\phi(p) = -b_0$. Portanto, vale (3.14).

Prosseguindo, para cada $b \in \mathbb{S}^n$ e $\delta > 0$ vamos definir $M_\delta(b) = \Big\{p \in M \ / \ 1 + \langle \phi(p), b\rangle < \delta\Big\}$. Fixemos $b_0 \in \mathbb{S}^n$ e $\varepsilon > 0$, por (3.14), para este $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um inteiro positivo k tal que $k > \frac{1}{\varepsilon}$ e $|M_{\frac{1}{k}}(b_0)| < \frac{\varepsilon}{8}\text{vol}(M)$. Um cálculo direto mostra que se $b \in S^n$ e $|b - b_0| < \frac{1}{2k}$ então vale que $M_{\frac{1}{2k}}(b) \subset M_{\frac{1}{k}}(b_0)$. Com efeito, dado $m \in M_{\frac{1}{2k}}(b)$ vale que $1 + \langle \phi(p), b\rangle < \frac{1}{2k}$, donde vale que $|\phi(p) + b| < \frac{1}{2k}$, então temos:

$$
\begin{aligned}
|\phi(p) + b_0| &= |\phi(p) + b + (-b + b_0)| \ \leq \ |\phi(p) + b| + |b - b_0| \\
&< \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \ = \ \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

Portanto, $1+\langle\phi(p),b_0\rangle<\frac{1}{k}$ e, portanto, $M_{\frac{1}{2k}}(b)\subset M_{\frac{1}{k}}(b_0)$. Vamos provar o lema mostrando que existe um número positivo δ tal que para qualquer $g\in B^{n+1}$ com $\left|\frac{g}{|g|}-b_0\right|<\frac{1}{2k}$ e $|g|>1-\delta$ tem - se:

$$\left\langle H(g),\frac{g}{|g|}\right\rangle>1-\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.15}$$

Uma vez que tivermos (3.15), o lema segue observando que:

$$\begin{aligned}\langle H(g),b_0\rangle &= \left\langle H(g),\frac{g}{|g|}\right\rangle+\langle H(g),b_0\rangle-\left\langle H(g),\frac{g}{|g|}\right\rangle\\ &> 1-\frac{\varepsilon}{2}-\left|\left\langle H(g),\frac{g}{|g|}-b_0\right\rangle\right|\\ &> 1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2k}\\ &> 1-\varepsilon\end{aligned}$$

Vamos começar a prova de (3.15). Observe que para todo $p\notin M_{\frac{1}{2k}}\left(\frac{g}{|g|}\right)$ temos:

$$\frac{1}{2k}\leq 1+\left\langle\phi(p),\frac{g}{|g|}\right\rangle=\frac{|g|-1+1+\langle\phi(p),g\rangle}{|g|}.$$

Então,

$$\frac{1}{2k}|g|+(1-|g|)\leq 1+\langle\phi(p),g\rangle$$

e portanto,

$$\frac{1-|g|^2}{|g|\Big(1+\langle\phi(p),g\rangle\Big)}\leq\frac{1-|g|^2}{\Big(\frac{1}{2k}|g|+(1-|g|)\Big)|g|}.$$

Para um $g\in B^{n+1}$ fixo com $|\frac{g}{|g|}-b_0|<\frac{1}{2k}$, vamos usar a desigualdade acima para estimar a função $\left\langle F_g(\phi(p)),\frac{g}{|g|}\right\rangle$ definda no complementar de $M_{\frac{1}{2k}}\left(\frac{g}{|g|}\right)$. Temos:

$$\begin{aligned}\left\langle F_g(\phi(p)),\frac{g}{|g|}\right\rangle &= \frac{\left\langle\phi(p),\frac{g}{|g|}\right\rangle+\Big(\mu\langle\phi(p),g\rangle+\lambda\Big)|g|}{\lambda\Big(\langle\phi(p),g\rangle+1\Big)}\\ &= \frac{\langle\phi(p),g\rangle+(\lambda-1)\langle\phi(p),g\rangle+\lambda|g|^2}{|g|\lambda\Big(\langle\phi(p),g\rangle+1\Big)}\\ &= \frac{1}{|g|}-\frac{1-|g|^2}{|g|\Big(\langle\phi(p),g\rangle+1\Big)}\\ &\geq \frac{1}{|g|}-\frac{1-|g|^2}{|g|\Big(\frac{1}{2k}|g|+(1-|g|)\Big)}\end{aligned}$$

Como a última expressão é indepedente de p e converge para 1 quando $|g|$ vai para 1, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que para todo $p \notin M_{\frac{1}{2k}}\left(\frac{g}{|g|}\right)$, se $1-\delta < |g|$ então

$$\left\langle F_g(\phi(p)), \frac{g}{|g|}\right\rangle > 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Assim para qualquer $g \in B^{n+1}$ com $\left|\frac{g}{|g|} - b_0\right| < \frac{1}{2k}$ e $|g| > 1-\delta$ temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle H(g), \frac{g}{|g|}\right\rangle &= \frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\left(\int_{M\setminus M_{\frac{1}{2k}}\left(\frac{g}{|g|}\right)} \left\langle F_g\circ\phi, \frac{g}{|g|}\right\rangle dV + \int_{M_{\frac{1}{2k}}\left(\frac{g}{|g|}\right)} \left\langle F_g\circ\phi, \frac{g}{|g|}\right\rangle dV\right)\\
&\geq \frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\left(\mathrm{vol}(M) - \mathrm{vol}\left(M_{\frac{1}{2k}}\left(\frac{g}{|g|}\right)\right)\right)\\
&\quad - \frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\mathrm{vol}\left(M_{\frac{1}{2k}}\left(\frac{g}{|g|}\right)\right)\\
&> 1 - \frac{\varepsilon}{4} - 2\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\mathrm{vol}\left(M_{\frac{1}{2k}}\left(\frac{g}{|g|}\right)\right)\\
&> 1 - \frac{\varepsilon}{4} - 2\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\mathrm{vol}\left(M_{\frac{1}{k}}(b_0)\right)\\
&> 1 - \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Isto completa a prova de (3.15) e portanto a prova do lema. ■

3.2 A Média da Norma do Operador de Weingarten

Nesta seção vamos fazer algumas estimativas sobre a média integral do quadrado da norma do operador de Weingarten $\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\int_M ||A||^2 dV$ para hipersuperfícies mínimas que satisfazem a condição $(\star)$. Vamos provar que se a imersão é dada pelas primeiras autofunções, então, $\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\int_M ||A||^2 dV \geq n-1$ com igualdade apenas se M é uma hipersuperfície de Clifford. Vamos começar esta seção apresentando os seguintes lemas.

Lema 3.4. *Seja M uma variedade mínima fechada orientada em $\mathbb{S}^n$. Se $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um vetor fixo tal que a função $1 + f_w(p)$ é sempre positiva em M, então*

$$\int_M ||A||^2 dV = \int_M \frac{1-|w|^2}{(1+f_w)^2}||A||^2 dV + \int_M \frac{|w^T|^2||A||^2 + l_w^2||A||^2 - 2|A(w^T)|^2}{(1+f_w)^2} dV. \tag{3.16}$$

Demonstração. Definamos uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f = \ln(1+f_w)$. Considere $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ uma curva tal que $\alpha(0) = p$ com $\alpha'(0) = v$, então tem-se

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f(p), v\rangle &= \frac{d\Big(f(\alpha(t))\Big)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{(df_w)_p(v)}{1+f_w(p)}\\
&= \left\langle \frac{\nabla f_w(p)}{1+f_w(p)}, v\right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto o gradiente de f é dado por

$$\nabla f = \frac{\nabla f_w}{1+f_w} \tag{3.17}$$

De (3.17) obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div}\nabla f = \frac{-||A||f_w}{1+f_w} - \frac{|\nabla f_w|^2}{(1+f_w)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2||A||^2 f_w(f_w+1)+2|\nabla f_w|^2}{(1+f_w)^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{(2f_w+f_w^2-f_w^2+1-1+|w|^2-|w|^2-l_w^2+l_w^2)||A||^2+2|\nabla f_w|^2}{(1+f_w)^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\Big((1+f_w)^2+(|w|^2-1)-(|w|^2-f_w^2-l_w^2)-l_w^2\Big)||A||^2+2|\nabla f_w|^2}{(1+f_w)^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(||A||^2+\frac{(|w|^2-1)||A||^2-|w^T|^2||A||^2-l_w^2||A||^2+2|A(w^T)|^2}{(1+f_w)^2}\right)
\end{aligned}$$

Como ∇f tem suporte compacto em M, pelo Teorema da Divergência, concluímos que $\int_M(\Delta f)dV = 0$, e, portanto, obtemos o resultado. ■

Lema 3.5. *Sejam $\phi : M \longrightarrow S^n$ uma aplicação suave, $g \in B^{n+1}$ e $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se definirmos $h_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h_i(p) = \langle F_g(\phi(p)), e_i\rangle$ e $s_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $s_i(p) = \langle \phi(p), e_i\rangle$, então*

$$\sum_{i=1}^{n+1}|\nabla h_i|^2(p) = \frac{1-|g|^2}{(1+\langle\phi(p),g\rangle)^2}\sum_{i=1}^{n+1}|\nabla s_i|^2(p) \tag{3.18}$$

Demonstração. Seja $\{v_i\}_{i=1}^{n-1}$ uma base ortonormal de T_pM. Considere uma curva diferenciável $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v_j$. Como

$$\begin{aligned}
dh_i(v_j) &= \frac{d}{dt}\Big(h_i(\gamma(t))\Big)\Big|_{t=0}\\
&= \frac{d}{dt}\Big(\langle F_g(\phi(\gamma(t))), e_i\rangle\Big)\Big|_{t=0}\\
&= \Big\langle (dF_g)_{\phi(p)}(d\phi(v_j)), e_i\Big\rangle
\end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
|\nabla h_i|^2(p) &= \sum_{j=1}^{n-1}\langle\nabla h_i(p), v_j\rangle^2\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}(dh_i(v_j))^2\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\Big(\Big\langle (dF_g)_{\phi(p)}(d\phi(v_j)), e_i\Big\rangle\Big)^2
\end{aligned}$$

Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}|\nabla h_i|^2(p) &= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\left\langle (dF_g)_{\phi(p)}(d\phi(v_j)), e_i\right\rangle\Big)^2\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\Big(\left\langle (dF_g)_{\phi(p)}(d\phi(v_j)), e_i\right\rangle\Big)^2\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}||(dF_g)_{\phi(p)}(d\phi(v_j))||^2 \;=\; \sum_{j=1}^{n-1}||dF_g(\phi(p))||^2||d\phi(v_j)||^2\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1-|g|^2}{(1+\langle\phi(p),g\rangle)^2}||d\phi(v_j)||^2
\end{aligned}$$

Por outro lado observe que se $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow M$ é uma curva diferenciável tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v_j$, então temos que

$$ds_i(v_j) = \frac{d}{dt}\Big(\langle\phi(\lambda(t)), e_i\rangle\Big)\Big|_{t=0} = \langle d\phi(v_j), e_i\rangle\,.$$

Donde,

$$||d\phi(v_j)||^2 = \sum_{i=1}^{n+1}(ds_i(v_j))^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}|\nabla h_i|^2(p) &= \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1-|g|^2}{(1+\langle\phi(p),g\rangle)^2}||d\phi(v_j)||^2\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1-|g|^2}{(1+\langle\phi(p),g\rangle)^2}\sum_{i=1}^{n+1}(ds_i(v_j))^2\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1-|g|^2}{(1+\langle\phi(p),g\rangle)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\langle\nabla s_i(p), v_j\rangle^2\\
&= \frac{1-|g|^2}{(1+\langle\phi(p),g\rangle)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\langle\nabla s_i(p), v_j\rangle^2\right)\\
&= \frac{1-|g|^2}{(1+\langle\phi(p),g\rangle)^2}\sum_{i=1}^{n+1}||\nabla s_i||^2(p)
\end{aligned}$$

■

A seguir, vamos apresentar o Teorema Principal deste trabalho, demonstrado por Oscar Perdomo em [14].

Teorema Principal (O. Perdomo, 2004 [14])**.** *Seja M uma hipersuperfície mínima compacta orientada imersa em $\mathbb{S}^n$ pelas primeiras autofunções do Laplaciano. Denote por $\{\kappa_i(p)\}_{i=1}^{n-1}$ as curvaturas principais de M em p. Se M não é totalmente geodésica e $\kappa_i^2(p) \leq$*

$\frac{||A||^2}{n-2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\kappa_j^2(p)$ *para todo* $p \in M$ *e todo* $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ *então* $\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\int_M ||A||^2 dV \geq (n-1)$ *com igualdade apenas se* M *é um hipersuperfície de Clifford.*

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema principal através dos seguintes passos:

Passo 1: Vamos começar a prova do teorema verificando que a aplicação de Gauss $\nu : M \longrightarrow \mathbb{S}^n$ satisfaz as hipóteses do Lema 3.3. Sabemos que ν é contínua. Vamos mostrar que $\mathrm{vol}(\nu^{-1}(b)) = 0$ para todo $b \in \mathbb{S}^n$.

Com efeito, seja $b \in \mathbb{S}^n$ qualquer, como $T_p\mathbb{S}^n = T_pM \oplus \{b\}$, podemos tomar um vetor $w_0 \in T_pM$ tal que $\langle w_0, b\rangle = 0$. Observe que $\nu^{-1}(b) \subset f_{w_0}^{-1}(0)$. Além disso, f_{w_0} satisfaz uma equação elíptica, a saber, $-\Delta f_{w_0} = ||A||^2 f_{w_0}$. Então o conjunto nodal $f_{w_0}^{-1}(0)$ tem medida nula em M, assim $\mathrm{vol}(\nu^{-1}(b)) = 0$. Como ν satisfaz as hipóteses do Lema 3.3, podemos encontrar $g \in B^{n+1}$ tal que

$$\int_M (F_g \circ \nu) dV = (0, \ldots, 0).$$

Passo 2: A igualdade acima implica que as funções $h_i = \langle F_g(\nu(p)), e_i\rangle$ são perpendiculares à uma função constante, ou seja, $\int_M h_i dV = 0$. Então pelo Lema 3.1, obtemos que

$$\int_M |\nabla h_i|^2 dV \geq (n-1)\int_M h_i^2 dV, \quad \forall i \in \{1,\ldots,n+1\},$$

com igualdade se, e somente, $\Delta h_i = (n-1)h_i$. Somando em ambos os lados da desigualdade, quando, $i = 1,\ldots,n+1$ segue que,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}\int_M |\nabla h_i|^2 dV &\geq (n-1)\sum_{i=1}^{n+1}\int_M h_i^2 dV \\
&= (n-1)\int_M \sum_{i=1}^{n+1}\langle F_g(\nu(m)), e_i\rangle^2 dV \\
&= (n-1)\,\mathrm{vol}(M) \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

com igualdade se, e somente se, $\Delta h_i = (n-1)h_i$.

Passo 3: Por outro lado, pelo Lema 3.5, temos que

$$\sum_{i=1}^{n+1}|\nabla h_i|^2 = \frac{1-|g|^2}{(1+\langle \nu(m), g\rangle)^2}\sum_{i=1}^{n+1}|\nabla f_{e_i}|^2 = \frac{1-|g|^2}{(1+\langle \nu(m), g\rangle)^2}||A||^2. \qquad (3.20)$$

Passo 4: Portanto, usando (3.19), (3.20) e o Lema 3.4, temos

$$\begin{aligned}(n-1)\,\mathrm{vol}(M) &\leq \int_M \frac{(1-|g|^2)||A||^2}{(1+\langle \nu(m), g\rangle)^2} dV \\ &= \int_M ||A||^2 dV - \int_M \frac{|g^T|^2||A||^2 + l_g^2||A||^2 - 2|A(g^T)|^2}{(1+f_g)^2} dV\end{aligned}$$

com igualdade se, e somente se, $-\Delta h_i = (n-1)h_i$. Observe que as hipóteses sobre os valores do operador plano A implicam que

$$\int_M \frac{|g^T|^2||A||^2 + l_g^2||A||^2 - 2|A(g^T)|^2}{(1+f_g)^2} \geq 0$$

com igualdade se, e somente se, $g = 0$. Com efeito, seja $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ uma base ortonormal de T_pM tal que $A(v_i) = \kappa_i v_i$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Como $g^T(p) \in T_pM$ podemos escrever este vetor da seguinte maneira: $g^T(p) = g_1 v_1 + \cdots + g_{n-1} v_{n-1}$. Desta forma, temos

$$|A(g^T)|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} g_i^2 \kappa_i^2 \leq |g^T(p)|^2 \frac{||A||^2}{2}$$

Logo,

$$|g^T(p)|^2||A||^2 + l_g^2||A||^2 - 2|A(g^T)|^2 \geq l_g^2||A||^2 \geq 0 \tag{3.21}$$

com igualdade se, e somente se, $l_g = 0$, ou seja, $g = 0$. Assim, por (3.21) obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M ||A||^2 dV \geq n-1$$

em que a igualdade ocorre se, e somente se, $g = 0$ e $-\Delta h_i = (n-1)h_i$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$.

Passo 5: Observe que $g = 0$ é equivalente a $h_i = f_{e_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$, pois

$$\begin{aligned} h_i(p) &= \langle F_g(\nu(p)), e_i\rangle \\ &= \left\langle \frac{\nu(p) + (\mu\langle \nu(p), 0\rangle + \lambda)0}{\lambda(\langle p, 0\rangle + 1)}, e_i \right\rangle \\ &= \langle \nu(p), e_i\rangle \\ &= f_{e_i}(p)\end{aligned}$$

Prosseguindo, temos que a igualdade $\frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M ||A||^2 dV = n-1$ ocorre se, e somente se, $h_i = f_{e_i}$ e $-\Delta h_i = (n-1)h_i$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$. Logo, tem-se que igualdade

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(M)} \int_M ||A||^2 dV = n-1, \tag{3.22}$$

é equivalente a

$$\begin{aligned}(n-1)f_{e_i} &= (n-1)h_i \\ &= -\Delta h_i \\ &= -\Delta f_{e_i} \\ &= ||A||^2 f_{e_i}\end{aligned}$$

Ou seja, $||A||^2 \equiv n-1$, e, portanto, concluímos que a igualdade $\int_M ||A||^2 dV = (n-1)\operatorname{vol}(M)$ ocorre se, e somente se, M é isométrica a uma hipersuperfície de Clifford. ■

Como consequência do Teorema 3.2 temos os seguintes resultados.

Corolário 3.1. *Se $M \subset \mathbb{S}^3$ é uma toro mínimo compacto imerso pelas primeiras autofunções, então M é um toro de Clifford.*

Corolário 3.2. *Seja M uma hipersuperfície mínima compacta orientada imersa em $\mathbb{S}^n$ pelas primeiras autofunções. Se M não é totalmente geodésica e as curvaturas de Ricci e escalar satisfazem a desigualdade*

$$R \leq \frac{n-3}{n-1} + \frac{2\operatorname{Ric}(v)}{n-1} \text{ para qualquer } v \in TM \text{ com } |v| = 1 \qquad (\star)$$

então $\frac{1}{\operatorname{vol}(M)}\int_M ||A||^2 dV \geq (n-1)$ com igualdade apenas se M é isométrica a uma hipersuperfície de Clifford.

Demonstração. Sejam $\{\kappa_i\}_{i=1}^{n-1}$ os autovalores de A. Seja $\{v_i\}_{i=1}^{n-1}$ uma base ortonormal de T_pM tal que $A(v_i) = \kappa_i v_i$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Pela fórmula de Gauss, Teorema 1.3 página 16, como $\mathbb{S}^n$ tem curvatura seccional constante $\overline{k} \equiv 1$, temos para $i \neq j$ a seguinte expressão curvatura seccional

$$\begin{aligned}k(v_i, v_j) &= \overline{k}(v_i, v_j) + \langle B(v_i, v_i), B(v_j, v_j)\rangle + \langle B(v_i, v_j), B(v_i, v_j)\rangle \\ &= \langle B(v_i, v_i), \nu\rangle \langle B(v_j, v_j), \nu\rangle - \langle B(v_i, v_j), \nu\rangle \langle B(v_i, v_j), \nu\rangle \\ &= 1 + \langle A(v_i), v_i\rangle\langle A(v_j), v_j\rangle - (\langle A(v_i), v_j\rangle)^2 \\ &= 1 + \kappa_i\kappa_j\end{aligned}$$

Logo,

$$k(v_i, v_j) = 1 + \kappa_i\kappa_j, \qquad \text{para } i \neq j \qquad (3.23)$$

Somando em ambos os lados de (3.23), para $j \neq i$ e $i, j = 1, \ldots, n-1$, obtemos que

$$\sum_{j\neq i} k(v_i, v_j) = (n-2) + \kappa_i \sum_{j\neq i} \kappa_j$$

Daí,

$$\kappa_i \left(-\sum_{j \neq i} \kappa_j \right) = (n-2) - (n-2)\,\mathrm{Ric}(v_i) \tag{3.24}$$

Por outro lado, pela minimalidade de M temos que $H = 0$. Em termos das curvaturas principais de M tem-se traço de $A = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i = \kappa_1 + \cdots + \kappa_{n-1} = 0$. Então, para $j \neq i$, segue que $\kappa_i = -\sum_{j=1}^{n-1} \kappa_j$. Logo, tem-se

$$\kappa_i^2 = \kappa_i \left(-\sum_{j=1}^{n-1} \kappa_j \right) \tag{3.25}$$

De (3.24) e (3.25) obtemos a seguinte expressão:

$$\kappa_i^2 = (n-2) - (n-2)\,\mathrm{Ric}(v_i) \tag{3.26}$$

Então somando (3.26) em ambos os lados de $i = 1, \ldots, n-1$, temos

$$\begin{aligned} ||A||^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(n-2) - (n-2)\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ric}(v_i) \\ &= (n-1)(n-2) - (n-2)(n-1)R \\ &= (n-1)(n-2)(1-R) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$||A||^2 = (n-1)(n-2)(1-R) \tag{3.27}$$

Agora, usando as hipoteses do corolário, de $(\star)$ obtemos que

$$-\,\mathrm{Ric}(v) \leq \frac{n-3}{2} - \frac{n-1}{2}R, \qquad \forall\ |v| = 1 \tag{3.28}$$

Desta forma, de (3.26), (3.27) e (3.28), concluímos que

$$\begin{aligned} \kappa_i^2 &= (n-2) - (n-2)\,\mathrm{Ric}(v_i) \\ &\leq (n-2) + (n-2)\left(\frac{n-3}{2} - \frac{n-1}{2}R \right) \\ &= (n-2) + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}R \\ &= (n-2) + \frac{(n-2)(n-3)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{||A||^2}{2} \\ &= \frac{||A||^2}{2} \end{aligned}$$

Portanto, as hipóteses do Teorema 3.2 são satisfeitas e segue o resultado. ■

3.3 Hipersuperfícies Mínimas com Curvatura de Ricci Constante

Vamos começar classificando as hipersuperfícies mínimas em esferas com curvatura de Ricci constante.

Observação 3.4. *Usando a equação* (3.26) *da seção* §3.2 *que a curvatura de Ricci de qualquer hipersuperfície mínima em* $\mathbb{S}^n$ *não pode ser maior que* 1, *pois*

$$\text{Ric} = 1 - \frac{\kappa_i^2}{(n-2)} \leq 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n-1,$$

além disso, se a curvatura de Ricci for constante, então as curvaturas principais de M *também devem ser constantes e estas podem apenas assumir os valores*

$$\kappa_i = \pm \underbrace{\sqrt{(n-2)(1-\text{Ric})}}_{c}.$$

Esta observação força M *ser uma hipersuperfície isoparamétrica, ou seja, temos que* $\kappa_i(p) =$ *const., com uma curvatura principal (quando* c *não muda de sinal):*

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_{n-1} = c \qquad ou \qquad \kappa_1 = \cdots = \kappa_{n-1} = -c$$

ou duas curvaturas principais (quando c *varia de sinal)*

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_{n-1} = \pm c.$$

No primeiro caso, temos que M *é um equador, ou seja, é a totalmente umbílica* $\mathbb{S}^{n-1}$ *em* $\mathbb{S}^n$. *No segundo caso,* M *é uma hipersuperfície de Clifford com duas curvaturas principais* c *e* $-c$, *com respectivas curvaturas multiplicidades,* q *e* l, *maiores que 1, satisfazendo* $q + l = n - 1$, *a saber* $M = \mathbb{S}^q\left(\sqrt{\frac{q}{n-1}}\right) \times \mathbb{S}^l\left(\sqrt{\frac{l}{n-1}}\right)$.

Observação 3.5. *Um cálculo direto mostra que apenas as hipersuperfícies de Clifford com curvatura de Ricci constante são aquelas da forma* $\mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ *com* n *ímpar. Com efeito, se* $M \subset \mathbb{S}^n$ *é mínima com curvatura de Ricci constante, pela Observação* 3.4, *obtemos*

$$\textit{traço de } A = \underbrace{(c + \cdots + c)}_{q-vezes} + \underbrace{(-c - \cdots - c)}_{l-vezes} = 0$$

Desta forma devemos ter $qc = lc$, *ou seja,* $q = l$ *com* $q + l = n - 1$. *Logo,*

$$q = l = \frac{n-1}{2}$$

com n *ímpar e* M *deve ser da forma* $\mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2})$

Observação 3.6. *A partir da equação* (3.26)*:* $\kappa_i^2 = (n-2)(1 - \mathrm{Ric}(v_i))$*, se a curvatura de Ricci for constante, podemos obter a seguinte expressão:*

$$\mathrm{Ric} = 1 - \frac{||A||^2}{(n-1)(n-2)}.$$

Portanto, para M *totalmente geodésica* $\mathbb{S}^{n-1}$*, ou seja,* $||A||^2 = 0$*, devemos ter* $\mathrm{Ric} \equiv 1$ *e para* M *Hipersuperfície de Clifford, ou seja,* $||A||^2 \equiv n-1$*, devemos ter* $\mathrm{Ric} \equiv \frac{n-3}{n-2}$*.*

A partir das observações anteriores, podemos destacar a seguinte caracterização:

Classificação de Hipersuperfícies Mínimas com Curvatura de Ricci Constante. *Seja* M *uma hipersuperfície mínima, orientada, compacta da esfera unitária* $\mathbb{S}^n$*. Se a curvatura de Ricci de* M *é constante, então temos que* $\mathrm{Ric} \equiv 1$ *e* M *é isométrica a* $\mathbb{S}^{n-1}$ *ou,* n *é ímpar,* $\mathrm{Ric} \equiv \frac{n-3}{n-2}$ *e* M *é isométrica a* $\mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2})$*.*

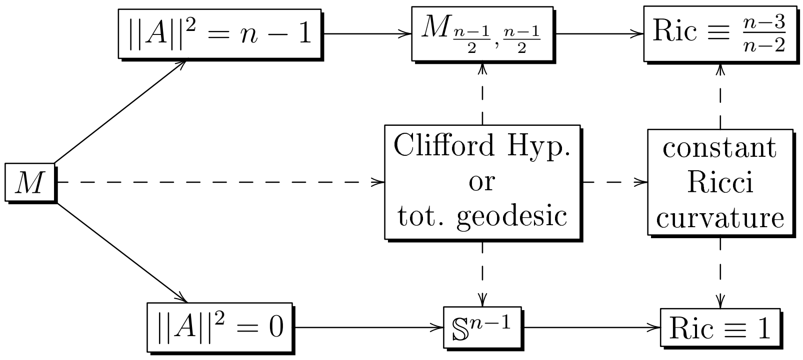

Figura 3.2: *Classificação de* M *com* Ric *Constante.*

Vamos mostrar existe um número positivo $\epsilon(n)$ tal que se $M \subset \mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície mínima imersa pelas primeiras autofunções com $|\,\mathrm{Ric}_p(v) - \frac{n-3}{n-2}| \leq \epsilon(n)$ para todo $(m,v) \in TM$, $|v| = 1$, e com $\int_M ||A||^2 dV = \int_M (n-1)dV$ (ou equivalentemente com $\int_M R dV = \int_M \frac{n-3}{n-1})dV$, então, n deve ser ímpar e M deve ser isométrica a hipersuperfície de Clifford $M_{\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}}$.

Observação 3.7. *Em geral, as hipersuperfícies de Clifford mínimas em* $\mathbb{S}^n$ *são aquelas da forma*

$$M_{ql} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{q+1} \times \mathbb{R}^{l+1} \ ; \ ||x||^2 = \frac{q}{n-1} \ \text{e} \ ||y||^2 = \frac{l}{n-1}\right\}$$

Então, para todo $(x,y) \in M_{ql}$*, temos o seguinte espaço tangente*

$$T_{(x,y)}M_{ql} = \big\{(v,w) \in \mathbb{R}^{q+1} \times \mathbb{R}^{l+1} \ ; \ \langle x, v\rangle = \langle w, y\rangle = 0\big\}$$

E, a aplicação de Gauss $\nu : M_{ql} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ *é dada por*

$$\nu(x,y) = \left(\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{q}}x, -\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{l}}y\right)$$

Como o operador de Weingarten A é dado por $A_{\nu(x,y)}(X) = -(d\nu)_{(x,y)}(X)$, para todo $X \in T_{(x,y)}M_{ql}$, temos as seguintes curvaturas principais

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_q = -\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{q}}, \qquad \kappa_{q+1} = \cdots = \kappa_l = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{l}}$$

Combinando as informações obtidas para as curvaturas principais com a equação 3.26, seja $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_{(x,y)}M_{ql}$ tal que $A(v_s) = \kappa_s v_s$ para todo $s \in \{1, \ldots, n-1\}$, obtemos as seguintes leis de formação para a curvatura de Ricci

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(v_i) &= 1 - \frac{l}{q}\frac{1}{(n-2)}, \quad \textit{para } i \in \{1, \ldots, q\} \\ \mathrm{Ric}(v_j) &= 1 - \frac{q}{l}\frac{1}{(n-2)}, \quad \textit{para } j \in \{q+1, \ldots, l\} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Lema 3.6. *Suponha que existam $q, l \in \mathbb{N}$ com $q + l = n - 1$ e $n \geq 3$, tais que, para qualquer vetor unitário $v \in TM$ tem-se*

$$\left|\mathrm{Ric}(v) - \frac{n-3}{n-1}\right| \leq \epsilon_1(n) = \frac{n-3}{(n-2)(n+1)}.$$

Então, para todo $p \in M$ e todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, vale que

$$\kappa_i^2 \leq \frac{||A||^2}{2}.$$

Demonstração. Seja $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ uma base ortonormal de T_pM tal que $A(v_i) = \kappa_i v_i$. Observe que a limitação sobre a curvatura de Ricci implica a mesma limitação sobre a curvatura escalar R. Com efeito,

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{Ric}(v_i) - \frac{n-3}{n-1}\right| \leq \epsilon_1(n) &\iff \left(\frac{n-3}{n-1} - \epsilon_1(n)\right) \leq \mathrm{Ric}(v_i) \leq \left(\frac{n-3}{n-1} + \epsilon_1(n)\right) \\ &\iff \left(\frac{n-3}{n-1} - \epsilon_1(n)\right) \leq \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ric}(v_i) \leq \left(\frac{n-3}{n-1} + \epsilon_1(n)\right) \\ &\iff \left(\frac{n-3}{n-1} - \epsilon_1(n)\right) \leq R \leq \left(\frac{n-3}{n-1} + \epsilon_1(n)\right) \\ &\iff \left|R - \frac{n-3}{n-1}\right| \leq \epsilon_1(n). \end{aligned}$$

Além disso, tais limitações acima fornecem que

$$-R \leq \frac{n-3}{(n-2)(n+1)} - \frac{n-3}{n-2} \tag{3.30}$$

$$-\mathrm{Ric}(v_i) \leq \frac{n-3}{(n-2)(n-1)} - \frac{n-3}{n-2} \tag{3.31}$$

Combinando (3.27) de §3.2 e (3.30) obtemos que

$$\begin{aligned}||A||^2 &= (n-1)(n-2)(1-R)\\ &\geq (n-1)(n-2)\left(1-\frac{n-3}{n-2}-\frac{(n-3)}{(n-2)(n+1)}\right)\\ &= (n-1)\left(1-\frac{n-3}{n+1}\right)\\ &= 4\frac{n-1}{n+1}.\end{aligned}$$

Logo, teremos

$$2\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{||A||^2}{2}. \tag{3.32}$$

Portanto, usando (3.26), (3.32) e (3.31), concluímos que

$$\begin{aligned}\kappa_i^2 &= (n-2)(1-\mathrm{Ric}(v_i))\\ &\leq (n-2)\left(1+\epsilon(n)-\frac{n-3}{n-2}\right)\\ &= 1+\frac{n-3}{n-2}\\ &= 2\frac{n-1}{n+1}\\ &\leq \frac{||A||^2}{2}\end{aligned}$$

■

Lema 3.7. *Defina o número $\epsilon(n)$ por:*

$$\epsilon(n) = \begin{cases} \epsilon_1(n), & se\ n = 3, 4\\ \dfrac{1}{(n-2)^2}, & se\ n \geq 5\end{cases}$$

Então, vale que $\epsilon(n) \leq \epsilon_1(n)$, para todo $n \geq 3$.

Demonstração. Com efeito. Para $n = 3$ e $n = 4$ valem as igualdades $\epsilon(3) = \epsilon_1(n)$ e $\epsilon(4) = \epsilon_1(4)$. Para $n \geq 5$, a desigualdade

$$\frac{1}{(n-2)^2} \leq \frac{n-3}{(n-2)(n+1)} \tag{3.33}$$

é equivalente a

$$0 \leq n^2 - 6n + 5 \tag{3.34}$$

o que é verdade. ■

Teorema 3.1 (O. Perdomo, 2004 [14]). *Seja $M \subset \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície mínima, compacta e imersa pelas primeiras autofunções. Se a média da curvatura escalar é $\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\int_M RdV = \frac{n-3}{n-2}$ e para qualquer vetor unitário tem-se*

$$\left|\mathrm{Ric}(v) - \frac{n-3}{n-1}\right| \leq \epsilon(n),$$

então n deve ser ímpar e M deve ser isométrica a $\mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Demonstração. Pelo Lema 3.7, temos que, se $|\,\mathrm{Ric}(v) - \frac{n-3}{n-2}| \leq \epsilon(n)$ então $|\,\mathrm{Ric}(v) - \frac{n-3}{n-2}| \leq \epsilon_1(n)$ e, cosequentemente, pelo Lema 3.6, devemos ter $\kappa_i^2 \leq \frac{||A||^2}{2}$ para todo $p \in M$ e todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Pelo Teorema Principal, vale que $\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\int_M ||A||^2 dV \geq n-1$ com igualdade apenas no caso em que M é um hipersuperfície de Clifford. Por outro lado, por hipótese, temos que a média da curvatura escalar é $\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\int_M RdV = \frac{n-3}{n-2}$ o que é equivalente a $\frac{1}{\mathrm{vol}(M)}\int_M ||A||^2 dV = n-1$, ou seja, vale a igualdade e M é uma hipersuperfície de Clifford da forma

$$\mathbb{S}^q(\sqrt{\frac{q}{n-1}}) \times \mathbb{S}^l(\sqrt{\frac{l}{n-1}}) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{q+1} \times \mathbb{R}^{l+1} \ ; \ ||x||^2 = \frac{q}{n-1} \text{ e } ||y||^2 = \frac{l}{n-1}\right\}.$$

Suponhamos que $q \neq l$, com $q + l = n - 1$. Então, podemos assumir que

$$l \geq \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad q \leq \frac{n}{2} - 1 \leq \frac{n-2}{2}.$$

Portanto, $\frac{l}{q} \geq \frac{n}{n-2}$. Por (3.29), segue que, para algum vetor $|v| = 1$, devemos ter $\mathrm{Ric}(v) = 1 - \frac{l}{q}\frac{1}{n-2}$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{n-3}{n-2} - \mathrm{Ric}(v) &= \frac{n-3}{n-2} - 1 + \frac{l}{q}\frac{1}{n-2} \\
&\geq \frac{n-3}{n-2} - 1 + \frac{n}{(n-2)^2} \\
&= \frac{2}{(n-2)^2} \\
&> \epsilon(n)
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, devemos ter $q = l = \frac{n-1}{2}$ com n ímpar e M deve ser isométrica a $\mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times \mathbb{S}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2})$. ∎

Exemplo 3.1. *Vamos considerar a seguinte família de superfícies mínimas de gênero zero estudadas por Lawson em [8]. Para qualquer par de inteiros r e s de inteiros relativamente primos, vamos definir: $T_{rs} = \{\phi(x,y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$, onde $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{rs} \subset \mathbb{S}^3$ é dada por*

$$\phi(x,y) = (\cos rx \cos y, \operatorname{sen} rx \cos y, \cos sx \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} sx \operatorname{sen} y)$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\phi_x(x,y) &= (-r\,\mathrm{sen}\,rx\cos y, r\cos rx\cos y, -s\,\mathrm{sen}\,sx\,\mathrm{sen}\,y, s\cos sx\,\mathrm{sen}\,y)\\
\phi_y(x,y) &= (-\cos rx\,\mathrm{sen}\,y, -\mathrm{sen}\,rx\,\mathrm{sen}\,y, \cos sx\cos y, \mathrm{sen}\,sx\cos y)\\
\phi_{xy}(x,y) &= (r\,\mathrm{sen}\,rx\,\mathrm{sen}\,y, -r\cos rx\,\mathrm{sen}\,y, -s\,\mathrm{sen}\,sx\cos y, s\cos sx\cos y)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

De (3.35)*, obtemos*

$$\begin{aligned}
|\phi_x|^2 &= r^2\cos^2 y + s^2\,\mathrm{sen}^2\,y = E\\
|\phi_y|^2 &= \mathrm{sen}^2\,y + \cos^2 = 1\\
\langle\phi_x,\phi_y\rangle &= 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Isso mostra que $\{\sqrt{E}\phi_x, \phi_y\}$ *determina um referencial ortonormal de campos de vetores tangentes para* $T_{\phi(x,y)}T_{rs}$*, para todos* $x, y \in \mathbb{R}$*. Além disso, temos as seguintes igualdades*

$$\begin{aligned}
\langle\phi_y,\phi_{xy}\rangle &= 0\\
\langle\phi_{xy},\phi_{xy}\rangle &= r^2\,\mathrm{sen}^2\,y + s^2\cos^2 y\\
\langle\phi_x,\phi_{xy}\rangle &= -(r^2+s^2)cosy\,\mathrm{sen}\,y
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Afirmamos que o vetor

$$\nu(x,y) = \frac{r^2-s^2}{rs\sqrt{E}}\,\mathrm{sen}\,t\cos y\phi_x + \frac{\sqrt{E}}{rs}\phi_{xy}$$

define um vetor normal unitário de T_{rs} *como uma subvariedade de* $\mathbb{S}^3$*. Para ver isto, basta observar a partir de* (3.37)*, que*

$$|\nu| = 1 \quad e \quad \langle\nu,\phi_x\rangle = \langle\nu,\phi_y\rangle = \langle\nu,\phi\rangle = 0 \tag{3.38}$$

De (3.38)*, sabemos que* $\langle\nu,\phi_y\rangle = 0$ *logo teremos que* $\langle\nu_x,\phi_y\rangle + \langle\nu,\phi_{xy}\rangle = 0$*. Portanto,*

$$\langle\nu,\phi_{xy}\rangle = -\langle\nu_x,\phi_y\rangle \tag{3.39}$$

Daí, obtemos que

$$1 = \langle\nu,\nu\rangle = \frac{\sqrt{E}}{rs}\langle\nu,\phi_{xy}\rangle = -\frac{\sqrt{E}}{rs}\langle\nu_x,\phi_y\rangle$$

Logo,

$$\langle\nu_x,\phi_y\rangle = -\frac{rs}{\sqrt{E}} = \left\langle -\frac{rs}{\sqrt{E}}\phi_y, \phi_y\right\rangle$$

Portanto,

$$A(\phi_x) = -\nu_x = -\frac{rs}{\sqrt{E}}\phi_y \tag{3.40}$$

De forma análoga, (3.38) *sabemos que* $\langle\nu,\phi_x\rangle = 0$*, donde obtemos*

$$\langle\nu,\phi_{xy}\rangle = -\langle\nu_y,\phi_x\rangle\,. \tag{3.41}$$

Desta forma, de (3.38) *e* (3.41)*, temos*

$$1 = \langle \nu, \nu \rangle = \frac{\sqrt{E}}{rs} \langle \nu, \phi_{xy} \rangle = -\frac{\sqrt{E}}{rs} \langle \nu_x, \phi_y \rangle$$

Logo,

$$\langle \nu_y, \phi_x \rangle = -\frac{rs}{\sqrt{E}} \frac{\langle \phi_x, \phi_x \rangle}{E} = \left\langle -\frac{rs}{\sqrt{E}E} \phi_x, \phi_x \right\rangle$$

Portanto,

$$A(\phi_y) = -\nu_y = \frac{rs}{E}(E^{-\frac{1}{2}}\phi_x) \tag{3.42}$$

Se escrevermos a matriz da transformação linear $A : T_{\phi(x,y)}T_{rs} \longrightarrow T_{\phi(x,y)}T_{rs}$ *na base ortonormal* $\{E^{-\frac{1}{2}}\phi_x, \phi_y\}$,

$$A(E^{-\frac{1}{2}}\phi_x) = rsE^{-1}\phi_y$$
$$A(\phi_y) = rsE^{-1}(E^{-\frac{1}{2}}\phi_x)$$

podemos deduzir que as curvaturas principais de T_{rs} *em* $\phi(x, y)$ *são* $\pm a_{rs}(x, y)$ *onde* $a_{rs} = rsE^{-1}$. *Observe que se* $r = s + 1$, *então* $a_{rs}(x, y)$ *vai uniformemente para* 1 *quando* r *vai para o infinito. Com efeito, temos*

$$\begin{aligned} a_{rs}(x,y) &= \frac{r(r-1)}{r^2\cos^2 y + (r-1)^2 \operatorname{sen}^2 y} \\ &= \frac{r^2 - r}{r^2 - 2r\operatorname{sen}^2 y + sen^2 y} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2}{r}\operatorname{sen}^2 y + \frac{\operatorname{sen}^2 y}{r^2}} - \frac{1}{r - 2\operatorname{sen}^2 y + \frac{\operatorname{sen}^2 y}{r}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{r\to\infty} a_{rs} = 1.$$

Como temos $a^2 = (1 - \mathrm{Ric})$ *então segue que* $\mathrm{Ric} = 1 - a^2$ *e a curvatura de Ricci de* T_{rs} *vai uniformemente para zero quando* $r = s + 1$ *vai para o infinito.*

Observação 3.8. *Para* $n = 3$ *o toro de Clifford é a única superfície mínima com curvatura de Ricci constante igual a* $\frac{n-3}{n-2} = 0$. *O exemplo anterior mostra que existe uma quantidadade infinita de superfícies mínimas imersas em* $\mathbb{S}^3$ *com curvatura de Ricci arbitrariamente próxima de zero e com média da curvatura escalar igual a zero. Pelo corolário* 3.2*, o primeiro autovalor do laplaciano desses exemplos é menor que* 2*, pois devemos ter* $\int_M ||A|^2 \leq 2|M|$. *Portanto, pelo menos para o caso* $n = 3$*, temos que a condição sobre o primeiro autovalor do Teorema* 3.2 *é necessária.*

Referências Bibliográficas

[1] ALÍAS, L. J., BRASIL JR., A & PERDOMO, O., *On the Stability Index of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007) 2685 - 3693. 34, 35, 36

[2] BIEZUNER, R. J., *Notas de Aula: Análise Funcional*, Universidade Federal de Minas Gerais, 2009. 20

[3] BIEZUNER, R. J., *Notas de Aula: Autovalores do Laplaciano*, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006. 20

[4] CARMO, M.P., *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - segunda edição.(Projeto Euclides). 3, 20

[5] CHAVEL, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics. Academisc Press, Inc. (London) 1984. 2, 20

[6] CHERN S. S., DO CARMO, M. & KOBAYASHI, S., *Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length,* Functional Analysis and Related Fields, Proc. Conf. M. Stone, 1970, 59 - 75. 1

[7] DAJCZER, M., *Submanifolds and Isometric Immersions*, Houston, Publish or Perish, 1990. 3

[8] LAWSON, H. B., *Complete Minimal Surfaces in* $\mathbb{S}^3$, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 335 - 374. 1, 54

[9] LAWSON, H. B., *Local Rigidity Theorems for Minimal Hypersurfaces*, Ann. of Math. (2) **89** (1969), 187 - 197.

[10] LEE, JOHN M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Matematics; 628, 1950. 3

[11] LI, P. & YAU, T., *A new conformal invariant and its applications to the Wilmore conjecture and first eigenvalue of compact surfaces*, Invent. Math. **69** (1982), 269-291. 39, 40

[12] Montiel, R & Ros, A., *Minimal Immersion of Surfaces by the First Eigenfunctions and Conformal Area*, Invent. Math. **89** (1969), 187 - 197. 39

[13] Otsuki, T., *Minimal Hypersurfaces in a Riemannian Manifold of Constant Curvature*, Amer. J. of Math. **92** (1970), 145 - 173. 1

[14] Perdomo, O., *Rigidity of Minimal Hypersurfaces of Spheres with Constant Ricci Curvature*, Revista Colombiana de Matemáticas, **38** (2004), 73 - 85. 1, 45, 54

[15] Simons, J., *Minimal Varieties in Riemannian Manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), 62 - 105. 1

[16] Takahashi, T. *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **18** (1966), 380-385. 2, 20, 32

[17] Yano, K. & Kon, M., *Structures on Manifolds*, Series in Pure Mathematics, World Scientific, v.3, 1984. 3, 37

[18] Yau, S. T., Problem Section *Seminar on Differential Geometry*, Ann. Math. Studies **102**, Princeton Univ. Press, 1982. 2

[19] Yan, W. & Tang, Z. *Isoparametric Foliation and Yau Conjecture On The First Eigenvallue*, School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Beijing Normal University, Beijing 100875, China.

[20] Xin, Y., *Minimal Submanifolds and Related Topics*, Nankai Tracts in Mathematics, World Scientific, v.8, 2003. 20