

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UMA CARACTERIZAÇÃO DAS ESFERAS  
EUCLIDIANAS  $S^n$

Francisco Almino Gomes da Silva

MANAUS - 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Francisco Almino Gomes da Silva

UMA CARACTERIZAÇÃO DAS ESFERAS  
EUCLIDIANAS  $S^n$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy

MANAUS - 2012

Francisco Almino Gomes da Silva

UMA CARACTERIZAÇÃO DAS ESFERAS  
EUCLIDIANAS  $S^n$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 4 de Abril de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Prof<sup>o</sup> Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy, Presidente  
Universidade Federal do Amazonas

.....

Prof<sup>a</sup> Dra. Inês Silva de Oliveira, Membro  
Universidade Federal do Amazonas

.....

Prof<sup>o</sup> Dr. José Miguel Martins Veloso, Membro  
Universidade Federal do Pará

.....

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a todos que contribuíram de alguma forma com esse trabalho.

## RESUMO

Nesta dissertação, apresentaremos uma caracterização das esferas euclidianas  $S^n$ .

Sejam  $g$  e  $\gamma$  duas geodésicas parametrizadas que se interceptam em um ponto  $p$  de  $M$ . A essa situação chamaremos de *configuração* e representaremos por  $(g, \gamma)_p$ . Agora consideremos a seguinte condição: Para toda configuração  $(g, \gamma)_p$  e para todo ponto  $q = \gamma(s) \neq p$  existem dois e apenas dois números reais  $t_1$  e  $t_2$ , com  $t_2 < 0 < t_1$ , tais que os pontos  $r_1 = g(t_1)$  e  $r_2 = g(t_2)$  determinam os segmentos geodésicos  $[q, r_1]_\gamma$  e  $[q, r_2]_\gamma$ , de modo que os triângulos geodésicos  $([p, q]_\gamma, [q, r_1]_\gamma, [r_1, p]_g)$  e  $([p, q]_\gamma, [q, r_2]_\gamma, [r_2, p]_g)$  são triângulos isósceles cuja base comum é  $[p, q]_\gamma$ .

Mostraremos que se uma variedade Riemanniana  $M$ , completa, conexa, de dimensão  $n \geq 2$  e orientada satisfaz o axioma acima, então  $M$  é isométrica a  $S^n$ . Em verdade, usaremos o fato que a condição acima é suficiente para que  $M$  seja uma variedade wiedersehen. Daí a caracterização desejada segue-se dos trabalhos de L.W.Green [8], C.T.Yang [1] e J. Kazdan [7].

# ABSTRACT

In this dissertation, we propose a characterization of Euclidean spheres  $S^n$ .

Let  $g$  and  $\gamma$  be parameterized geodesics meeting at a point  $p$  of  $M$ . Such arrangement will be called a *configuration* and denoted by  $(g, \gamma)_p$ . Let us consider the following condition: For any configuration  $(g, \gamma)_p$  and a point  $q = \gamma(s) \neq p$ , there exist two and only two parameters  $t_1 < 0 < t_2$  such that  $r_1 = g(t_1)$  and  $r_2 = g(t_2)$  determine geodesic segments  $[q, r_1]_\sigma$  and  $[q, r_2]_\tau$  in such a way that the geodesic triangles  $([p, q]_\gamma, [q, r_1]_\sigma, [r_1, p]_g)$  and  $([p, q]_\gamma, [q, r_2]_\tau, [r_2, p]_g)$  are both isosceles having  $[p, q]_\gamma$  as a common basis.

We show that if a Riemannian manifold  $M$  is complete, connected, oriented and of dimension  $n \geq 2$  and satisfies the condition above then  $M$  is isometric to  $S^n$ . Actually, the axiom above assures that  $M$  is a Wiedersehen manifold. Hence, the result will follow from L.W.Green [8], C.T.Yang [1] and J. Kazdan [7].

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1 Variedades diferenciáveis . . . . .	2
1.2 Campo de vetores . . . . .	6
1.3 Métricas Riemannianas . . . . .	8
1.4 Conexão afim . . . . .	12
<b>2 Geodésicas em Variedades Riemannianas</b>	<b>15</b>
2.1 Propriedades minimizantes das geodésicas . . . . .	15
2.2 Variedade Riemanniana completa . . . . .	22
2.3 Triângulos geodésicos . . . . .	24
<b>3 Cut Locus (Lugar dos Pontos Mínimos)</b>	<b>27</b>
3.1 Definições e resultados . . . . .	27

<b>Conteúdo</b>	<b>ii</b>
3.2 Alguns exemplos de cut-locus . . . . .	32
<b>4 Uma caracterização das esferas euclidianas <math>S^n</math></b>	<b>36</b>
4.1 Variedade Wiedersehen . . . . .	36
4.2 Axiomas dos triângulos isósceles . . . . .	38
4.3 Uma caracterização das esferas euclidianas $S^n$ . . . . .	40
<b>Bibliografia</b>	<b>51</b>

# Introdução

Em 2007, I. Tribuzy generalizou os resultados obtidos pelo próprio em sua tese de doutorado (ver [4]) e publicados em [3]. Mais precisamente, Tribuzy apresentou uma caracterização dos espaços euclidianos e das esferas euclidianas utilizando essencialmente a noção de convexidade e triângulos geodésicos isósceles em variedades Riemannianas.

Apresentaremos no primeiro capítulo os conceitos e resultados da Geometria Riemanniana que serão essenciais para o desenvolvimento da dissertação. No segundo capítulo abordaremos alguns conceitos e resultados relacionados as geodésicas.

Veremos também o conceito de cut locus (ou lugar dos pontos mínimos) de uma variedade Riemanniana completa, resultados e alguns exemplos.

Por fim, apresentaremos o conceito de variedade Wiedersehen, os axiomas dos triângulos isósceles e uma caracterização das esferas euclidianas.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Variedades diferenciáveis

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos fundamentais e resultados da Geometria Riemanniana que serão essenciais para este trabalho, tendo como referência [9].

**Definição 1.** *Um conjunto  $M$  será dito uma **variedade diferenciável** de dimensão  $n$  se existe uma família de aplicações injetivas  $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  que satisfaz:*

(1) 
$$M = \bigcup_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha)$$

(2) *Para todo  $\alpha, \beta$ , com  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $x_\alpha^{-1}(W)$  e  $x_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as composições  $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$  e  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$  são aplicações diferenciáveis.*

(3) *A família  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  é máxima em relação 1) e 2).*

Dado um ponto  $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ , chamaremos o par  $(U_\alpha, x_\alpha)$  de uma **parametrização** (ou **sistema de coordenadas**) de  $M$  em  $p$ . A imagem  $x_\alpha(U_\alpha)$  será chamada uma **vizinhança coordenada** em  $p$ . Uma família  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  que satisfaz (1) e (2) será chamada uma **estrutura diferenciável** em  $M$ .

Como consequência da definição acima, temos que toda superfície regular do  $\mathbb{R}^3$  são variedades diferenciáveis. De fato, se  $M$  é uma superfície regular do  $\mathbb{R}^3$ , para cada ponto  $p$  de  $M$  existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap M$  de um aberto do  $U \subset \mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap M$ , tais que  $x$  é um homeomorfismo diferenciável e a diferencial  $(dx)_q$  é injetiva para todo  $q \in U$ . E como consequência do teorema da função inversa, a mudança de parametrizações é um difeomorfismo. Assim verifica-se o afirmado.

**Observação 1.** *Uma estrutura diferenciável em  $M$  induz de maneira natural uma topologia em  $M$ . Basta definirmos que um conjunto  $A \subset M$  é um aberto de  $M$  se  $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  para todo  $\alpha$ . Assim temos que, para todo  $\alpha$ , os conjuntos  $A = x_\alpha(U_\alpha)$  são abertos, uma vez que  $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha)) = x_\alpha^{-1}(x_\alpha(U_\alpha)) = U_\alpha$  são abertos de  $\mathbb{R}^n$ , e as aplicações  $x_\alpha$  são contínuas pois leva abertos em abertos.*

**Observação 2.** *No que segue  $M$  denotará uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e sua topologia natural satisfaz os axiomas de Hausdorff e da base enumerável, ou seja, dados dois pontos distintos de  $M$  existem vizinhanças destes pontos que não se intersectam e  $M$  pode ser coberto por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas.*

Agora apresentaremos a noção de diferenciabilidade de aplicações entre variedades diferenciáveis.

**Definição 2.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  variedades diferenciáveis de dimensão  $n$  e  $m$  respectivamente. Uma aplicação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é diferenciável em  $p \in M_1$*

se dada uma parametrização  $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$  em  $\varphi(p)$  existe uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$  em  $p$  tal que  $\varphi(x(U)) \subset y(V)$  e a aplicação  $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável em  $x^{-1}(p)$ . A aplicação  $\varphi$  é diferenciável em um aberto de  $M_1$  se é diferenciável para todos os pontos deste aberto.

A seguir, apresentaremos a noção de vetor tangente a uma variedade diferenciável.

**Definição 3.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Toda aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é chamada uma curva diferenciável em  $M$ .*

**Definição 4.** *Sejam  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$ , com  $\alpha(0) = p \in M$ , e  $\mathfrak{D}$  o conjunto das funções de  $M$  diferenciáveis em  $p$ . O **vetor tangente** a  $\alpha$  em  $p$  é uma aplicação  $\alpha'(0) : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in \mathfrak{D}.$$

Diremos então que um vetor tangente em  $p \in M$  é qualquer vetor tangente de alguma curva  $\alpha$  tal que  $p = \alpha(0)$ . O conjunto dos vetores tangentes a  $M$  em  $p$  será indicado por  $T_pM$ .

A escolha de uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  em torno de  $p$  nos permite expressar o vetor tangente  $\alpha'(0)$  em termos desta parametrização através da igualdade

$$\alpha'(0) = \sum_i^n x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0, \quad (1.1)$$

onde cada  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$  consiste no vetor tangente em  $p$  às curvas coordenadas  $x_i \rightarrow x(0, \dots, x_i, \dots, 0)$ . De acordo com a equação (1.1), temos que todos os vetores de  $T_pM$  podem ser escritos como combinação linear dos vetores  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$  e que com as operações usuais de funções (soma e multiplicação por

um escalar),  $T_pM$  transforma-se em um espaço vetorial de dimensão  $n$  com a base associada a parametrização  $x$ , isto é;

$$T_pM = \left\langle \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\} \right\rangle,$$

é gerado pelo conjunto  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\}$ . Este espaço vetorial é chamado o **espaço tangente** de  $M$  em  $p$ . Observe que a estrutura linear de  $T_pM$  independe da parametrização uma vez que a mudança de parametrização é um difeomorfismo.

Seja  $M$  uma variedade diferenciável e considere o seguinte conjunto

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}.$$

Verifica-se que  $TM$  pode ser munido de uma estrutura diferenciável e portanto é uma variedade diferenciável.

**Definição 5.** O conjunto  $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $2n$  chamado **fibrado tangente** de  $M$ .

**Definição 6.** Uma variedade diferenciável  $M$  é dita **orientável** se  $M$  admite uma estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  que cumpre a seguinte condição:

- (i) para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , a diferencial da mudança de coordenadas  $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$  tem determinante positivo.

Caso contrário, diz-se que  $M$  é **não orientável**. Se  $M$  é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo (i) é chamada uma **orientação** de  $M$  e  $M$  é então dita **orientada**. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem (i) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz (i).

**Exemplo 1.** Se  $M$  pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas  $V_1$  e  $V_2$  de modo que a intersecção  $V_1 \cap V_2$  é conexa, então  $M$  é orientável. Isto ocorre pois, como o determinante Jacobiano da mudança de coordenadas é não nulo, ele não muda de sinal em  $V_1 \cap V_2$ .

**Exemplo 2.** A esfera

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é orientável. De fato, se considerarmos a aplicação estereográfica a partir do pólo norte  $\pi_1$  e depois a partir do pólo sul  $\pi_2$ , as parametrizações  $(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})$  cobrem  $S^n$  e a família  $\{(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})\}$  é uma estrutura diferenciável em  $S^n$ . Observe que a intersecção  $\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^n) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$  é conexa, logo pelo exemplo anterior  $S^n$  é orientável e a família dada determina uma orientação de  $S^n$ .

## 1.2 Campo de vetores

A partir da noção de vetor tangente em uma variedade diferenciável, podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável entre variedades e definir campos de vetores.

**Definição 7.** Sejam  $M_1$  e  $M_2$  variedades diferenciáveis de dimensão  $n$  e  $m$  respectivamente e seja  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $p \in M_1$  e para cada  $v \in T_p M_1$ , considere uma curva diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$  com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Faça  $\beta = \varphi \circ \alpha$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$  dada por  $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$  é uma aplicação linear bem definida, chamada de **diferencial** de  $\varphi$  em  $p$ .

**Definição 8.** *Um campo de vetores diferenciável  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada  $p \in M$  um vetor  $X(p) \in T_pM$ . Em termos de aplicações podemos pensar em tal campo como uma aplicação  $X : M \rightarrow TM$  de  $M$  no fibrado tangente de  $M$ .*

Se considerarmos uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ , podemos expressar  $X(p)$ , para todo  $p \in x(U)$ , na parametrização  $x$  por

$$X(p) = \sum_i^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde os  $a_i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis em  $U$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1, \dots, n}$  é a base associada a  $x$ .

A expressão acima nos permite considerar um campo de vetores como uma aplicação  $X : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{F}$  entre o conjunto das funções diferenciáveis em  $M$  e o conjunto das funções em  $M$ , definida por

$$(Xf)(p) = \sum_i^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde  $f$  representa a expressão de  $f$  na parametrização  $x$ . Assim temos que um campo  $X$  é diferenciável se e só se  $X : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$  é uma aplicação de  $\mathfrak{D}$  em  $\mathfrak{D}$ .

Já que  $X$  é interpretado como um operador em  $\mathfrak{D}$  é natural considerarmos os iterados de  $X$ , obtendo assim o seguinte resultado:

**Lema 1.** *Dados  $X$  e  $Y$  dois campos diferenciáveis de vetores em  $M$ , existe um único campo diferenciável de vetores  $Z$  tal que, para todo  $f \in \mathfrak{D}$ ,*

$$Z(f) = (XY - YX)f.$$

**Definição 9.** O campo diferenciável de vetores  $XY - YX = [X, Y]$  é chamado de *colchete*.

O campo  $[X, Y]$  possui as seguintes propriedades:

**Proposição 1.** Se  $X, Y$  e  $Z$  são campos diferenciáveis em  $M$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f, g \in \mathfrak{D}$ , então:

- (a)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (anticomutatividade),
- (b)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  (linearidade),
- (c)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (identidade de Jacobi),
- (d)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

## 1.3 Métricas Riemannianas

**Definição 10.** Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M$ , um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no  $T_pM$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se dados quaisquer dois campos diferenciáveis de vetores  $X, Y$  em  $M$ , a aplicação  $p \in M \rightarrow \langle X(p), Y(p) \rangle_p$  é de classe  $C^\infty$ . Em termos de parametrização, isso equivale a dizer que, se  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então as funções  $g_{ij}$ , definidas na vizinhança coordenada  $x(U)$  e expressa por

$$g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n),$$

é uma função diferenciável em  $U$ .

As funções  $g_{ij}$  são chamadas **expressão da métrica Riemanniana** no sistema de coordenadas  $x$ .

**Definição 11.** *Uma variedade diferenciável  $M$  com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma **variedade Riemanniana**.*

**Exemplo 3.** *Considere  $M = \mathbb{R}^n$ , sendo  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  identificado com  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  e a expressão da métrica dada por*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Tal espaço  $\mathbb{R}^n$  é chamado **espaço euclidiano de dimensão  $n$** .

**Exemplo 4.** *Seja  $H^n$  o conjunto dos pontos do  $\mathbb{R}^n$  tais que  $x_n > 0$ , isto é,*

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}.$$

Tal conjunto é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  chamado **espaço hiperbólico** (modelo do semi-plano superior). Logo  $H^n$  é uma variedade Riemanniana munida da métrica  $\langle u, v \rangle_p = \frac{u \cdot v}{x_n^2}$ , onde  $p \in H^n$ ,  $u, v \in T_p H^n$  e " $\cdot$ " é o produto interno usual do  $\mathbb{R}^n$ , e cuja a expressão da métrica é

$$g_{ij} = (x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}.$$

Assim como podemos estabelecer uma noção de equivalência entre variedades do ponto de vista da diferenciabilidade através de difeomorfismos, o mesmo pode ser feito do ponto de vista métrico, através de certas aplicações chamadas isometrias.

**Definição 12.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo*

$f : M \longrightarrow N$  é chamado uma **isometria** se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo  $p \in M$  e todo  $u, v \in T_pM$ .

**Definição 13.** Uma aplicação  $f : M \longrightarrow N$  é uma **isometria local** em  $p \in M$  se existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f : U \longrightarrow f(U)$  é um difeomorfismo e

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo  $p \in M$  e todo  $u, v \in T_pM$ . Se  $f$  é uma isometria local para todo  $p \in M$ , dizemos que  $M$  é **localmente isométrica** à  $N$ .

**Exemplo 5.** O cilindro reto do  $\mathbb{R}^3$  é localmente isométrico a um plano do  $\mathbb{R}^3$ . De fato, se considerarmos uma parametrização do cilindro reto dada por

$$Y(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v), 0 < u < 2\pi, -\infty < v < +\infty$$

e uma parametrização de um plano que passa por um ponto  $p_0$  e na direção dos vetores ortonormais  $w_1$  e  $w_2$ , dada por

$$X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Defina  $f = X \circ Y^{-1}$ . Então  $f$  é uma isometria local. Logo o cilindro é localmente isométrico a um plano. O resultado não é válido globalmente pois os mesmos não são homeomorfos.

A seguir veremos que é possível induzir uma estrutura Riemanniana em uma variedade diferenciável através de imersões.

**Definição 14.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$  é uma **imersão** se  $d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$

é injetiva para todo  $p \in M$ . Se além disto,  $\varphi$  é um homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , onde  $\varphi(M)$  tem a topologia induzida por  $N$ , diz-se que  $\varphi$  é um **mergulho**. Se  $M \subset N$  e a inclusão  $i : M \hookrightarrow N$  é um mergulho, diz-se que  $M$  é uma **subvariedade de  $N$** .

Seja  $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$  uma imersão. Se  $N$  tem uma estrutura Riemanniana,  $f$  induz uma métrica Riemanniana  $\langle\langle, \rangle\rangle$  em  $M$  definindo-se

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad \forall p \in M \text{ e } \forall u, v \in T_p M.$$

A métrica  $\langle\langle, \rangle\rangle$  é chamada **métrica induzida** por  $f$ . Neste caso, dizemos que  $f$  é uma **imersão isométrica**.

**Exemplo 6.** *Toda superfície regular do  $\mathbb{R}^3$  é um imersão isométrica.*

**Exemplo 7.** *Considere a esfera unitária  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$  e a inclusão  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A aplicação  $f$  induz uma estrutura Riemanniana em  $S^{n-1}$  dada por*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle u, v \rangle_{f(p)}, \quad \forall u, v \in T_p S^{n-1}.$$

A métrica induzida por  $\mathbb{R}^n$  em  $S^{n-1}$  é chamada **métrica canônica** de  $S^{n-1}$ .

O resultado a seguir é um teorema de existência para métricas Riemannianas, cuja demonstração pode ser encontrar em [9].

**Teorema 1.** *Toda variedade diferenciável de Hausdorff e com base enumerável possui uma métrica Riemanniana.*

## 1.4 Conexão afim

**Definição 15.** *Um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva diferenciável  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma aplicação diferenciável que a cada  $t \in I$  associa um vetor tangente  $V(t) \in T_{c(t)}M$ .*

Denotaremos por  $\mathfrak{X}(M) = \{X | X : M \rightarrow TM, X \in C^\infty\}$ , o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$  e o anel das funções de classe  $C^\infty$  definidas em  $M$  por  $\mathfrak{D}(M) = \{X | X : M \rightarrow \mathbb{R}, X \in C^\infty\}$ .

**Definição 16.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

*definida por  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i)  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ,
- (ii)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
- (iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ,

*para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e todo  $f, g \in \mathfrak{D}(M)$ .*

A proposição abaixo esclarece um pouco a definição de conexão afim.

**Proposição 2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial  $V$  ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  um outro campo vetorial  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , chamada **derivada covariante** de  $V$  ao longo de  $c$ , tal que, se  $W$  é um campo de vetores ao longo de  $c$  e  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em  $I$  então:*

a)  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$

b)  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}.$

c) Se  $V$  é induzido por  $Y$ , isto é,  $V(t) = Y(c(t))$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y.$

*Demonstração.* Ver em [9] pag.57 □

Usando (iii) da definição de conexão afim, escolhendo um sistema de coordenadas  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  em torno de  $p$  e escrevendo  $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$  e

$Y = \sum_{j=1}^n y_j X_j$ , onde  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , teremos que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^n x_i X_i \left( \sum_{j=1}^n y_j X_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j=1}^n x_i X_i (y_j) X_j. \end{aligned}$$

Fazendo  $\nabla_{X_i} Y_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k X_k$ , concluímos que as funções  $\Gamma_{i,j}^k$ , que são chamadas de símbolos de Christoffel da conexão  $\nabla$ , são diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \Gamma_{i,j}^k + X(y_k) \right) X_k.$$

Observe que a expressão local de uma conexão afim nos mostra que  $\nabla_X Y(p)$  depende de  $x_i(p)$ ,  $y_k(p)$  e das derivadas  $X(y_k)(p)$  de  $y_k$  segundo  $X$ .

Seja  $c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  a expressão local de uma curva  $c(t)$  de  $M$ , então podemos expressar localmente um campo de vetor  $V$  ao longo de  $c(t)$  por  $V = \sum_{j=1}^n v^j X_j$ , onde  $v^j = v^j(t)$  e  $X_j = X_j(c(t))$ .

Pela definição de conexão afim e as propriedades (a), (b) e (c) da Proposição 2, a derivada covariante de  $V$  ao longo de  $c(t)$  pode ser expressa por

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k v^j \frac{dx^i}{dt} \right) X_k.$$

**Definição 17.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva  $c : I \rightarrow M$  é chamado **campo paralelo** quando  $\frac{DV}{dt} = 0$ , para todo  $t \in I$ .*

Pela definição de campo paralelo, a equação acima é equivalente ao sistema de  $n$  equações diferenciais em  $v^k$ ,

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k v^j \frac{dx^i}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Como o sistema é linear em  $v^k(t)$ , então existe uma única solução definida para todo  $t \in I$  satisfazendo a condição inicial  $v^k(t_0) = v_0$ .

**Proposição 3.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Seja  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$  e  $V_0 \in T_{c(t_0)}M$ . Então existe um único campo de vetores paralelo  $V$  ao longo de  $c$ , tal que  $V(t_0) = V_0$ .  $V(t)$  é chamado o **transporte paralelo** de  $V(t_0)$  ao longo de  $c$ .*

*Demonstração.* Ver [9] pag.58. □

# Capítulo 2

## Geodésicas em Variedades Riemannianas

### 2.1 Propriedades minimizantes das geodésicas

**Definição 18.** *Uma curva diferenciável por partes é uma aplicação contínua  $c : [a, b] \rightarrow M$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , em  $M$  para a qual existe uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$  de  $[a, b]$  em que as restrições  $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , são diferenciáveis. Dizemos que  $c$  liga os pontos  $c(a)$  e  $c(b)$ .*

**Definição 19.** *Uma curva fechada (regular) é uma aplicação diferenciável  $c : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  de um intervalo fechado da reta em  $M$ , de tal forma que  $c(a) = c(b)$  e todas os vetores tangentes coincide em  $a$  e  $b$ .*

**Definição 20.** *Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma **geodésica** em  $t_0 \in I$  se  $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$  no ponto  $t_0$ . Se  $\gamma$  é uma geodésica para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica. Neste caso, a restrição de  $\gamma$  a  $[a, b]$  é chamado **segmento de geodésica** ligando  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ .*

**Exemplo 8.** *As geodésicas do  $\mathbb{R}^n$  são retas parametrizadas com vetor tangente constante. De fato,*

$$\frac{D}{dt}\gamma'(t) = 0 \iff \gamma''(t) = 0 \iff \gamma(t) = p_0 + tv.$$

**Exemplo 9.** *Os grandes círculos da esfera canônica  $S^n$ , com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, são as geodésicas de  $S^n$ .*

**Exemplo 10.** *Vimos que o cilindro reto é localmente isométrico ao plano e que as geodésicas do plano são as retas. Pelo fato das isométries levarem geodésicas em geodésicas, as geodésicas do cilindro são as imagens, via isometria, das retas do plano. Portanto, as geodésicas do cilindro são retas, hélices e círculos.*

**Definição 21.** *Um **laço geodésico** é uma geodésica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  na qual existem pontos  $t_0$  e  $\bar{t}_0$  pertencentes a  $\mathbb{R}$ , com  $t_0 \neq \bar{t}_0$ , tais que  $\gamma(t_0) = \gamma(\bar{t}_0)$  e  $\gamma'(t_0) \neq \gamma'(\bar{t}_0)$ , ou seja,  $\gamma$  não é injetiva e os vetores  $\gamma'(t_0)$  e  $\gamma'(\bar{t}_0)$  formam um ângulo não nulo. Uma **geodésica fechada** é uma curva fechada que é geodésica em todos os seus pontos. Neste caso  $\gamma'(t_0) = \gamma'(\bar{t}_0)$ .*

Se  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

isto é,  $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = k \neq 0$ , onde  $k$  é constante. Assim o *comprimento de arco*  $s$  de  $\gamma$ , a partir de uma origem fixa, digamos  $t = t_0$ , é então dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = k(t - t_0).$$

**Observação 3.** *Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é,  $k = 1$ , diremos que a geodésica  $\gamma$  está **normalizada**.*

Além disso, em um sistema de coordenadas  $(U, x)$  em torno de  $\gamma(t_0)$ , a curva  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  será uma geodésica se e só se

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = 0,$$

ou seja, satisfaz o sistema de equações diferenciais de 2<sup>a</sup> ordem

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

A existência e unicidade da equação acima satisfazendo condições iniciais  $x_i(t_0)$  e  $\frac{dx_i}{dt}(t_0)$  é garantida pelo seguinte resultado.

**Teorema 2** (Existência e unicidade de geodésicas). *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ , com  $v \neq 0$ . Então existe um  $\varepsilon > 0$  e uma única geodésica  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ .*

Representaremos por  $\gamma_v$  a única geodésica de  $M$  que passa por  $p \in M$  com vetor tangente  $v \in T_p M$ .

**Definição 22.** *A correspondência  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  de  $T_p M$  em  $M$  definida por  $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$  para todo  $v \in T_p M$  tal que 1 está no domínio de  $\gamma_v$  é denominada a **aplicação exponencial** de  $p$  em  $v$ .*

Geometricamente,  $\exp_p(v)$  é o ponto de  $M$  obtido percorrendo-se o comprimento igual a  $|v|$ , a partir de  $p$ , sobre a geodésica  $\gamma_v$  que passa por  $p$  na direção de  $v$  (Figura 2.1).

**Observação 4.** *Um fato importante a respeito da aplicação  $\exp$  é que dado  $p \in M$ , existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $\exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo de uma bola aberta de raio  $\varepsilon > 0$ , em torno da origem do  $T_p M$ , sobre um aberto de  $M$ .*

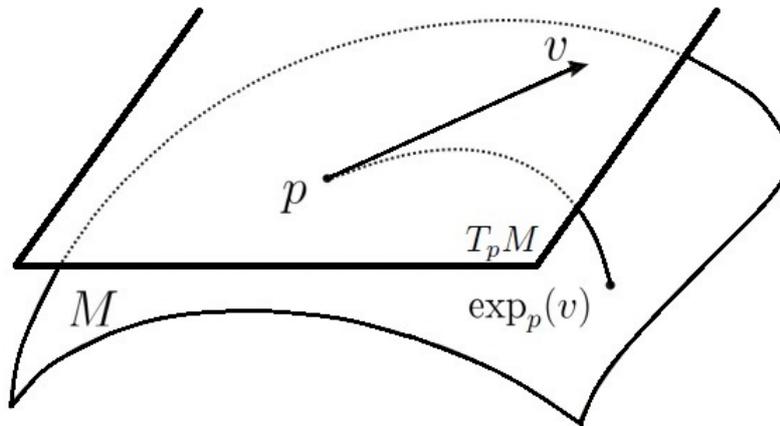


Figura 2.1: A exponencial de  $p$  em  $v$

**Exemplo 11.** Considere a esfera unitária  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . A  $\exp_p(v)$  está definida para todo  $v \in T_p S^2$ . Por exemplo, os pontos dos círculos com raios  $(2n+1)\pi$ , no  $T_p S^2$  são aplicados sobre o antípoda de  $p$ . Já os pontos dos círculos de raios  $2\pi n$  são aplicados em  $p$  (Figura 2.2).

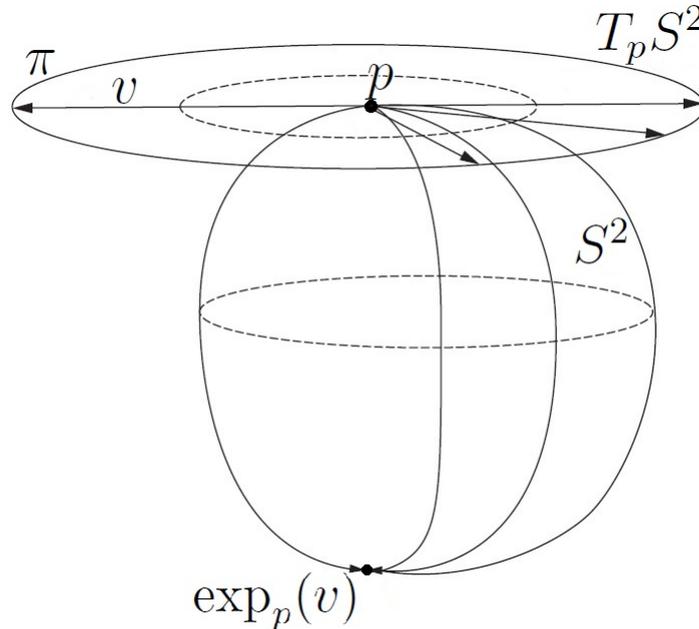


Figura 2.2:

No que segue,  $\ell(\gamma)$  indicará o comprimento de uma curva  $\gamma$ .

**Definição 23.** Diremos que um segmento de geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é **minimizante** se  $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ , onde  $c$  é qualquer curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ .

**Definição 24.** Uma geodésica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é chamada uma **linha** quando  $\gamma$  minimiza o comprimento de arco entre dois quaisquer de seus pontos. Um **raio geodésico** é a restrição de uma geodésica  $\gamma$  ao intervalo  $[0, \infty)$ , que minimiza o comprimento de arco entre dois quaisquer de seus pontos.

**Lema 2** (Lema de Gauss). Seja  $p \in M$  e seja  $v \in T_p M$  tal que  $\exp_p(v)$  esteja definida. Seja  $w \in T_p M \approx T_v(T_p M)$ . Então

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

*Demonstração.* Ver [9] pag.77. □

Pela Observação 4, temos que  $\exp_p$  é um difeomorfismo em uma vizinhança da origem do  $T_p M$ . A imagem de tal vizinhança pela exponencial de  $p$  em  $M$  é chamada uma **vizinhança normal** de  $p$ . A imagem via  $\exp_p$  de uma bola  $B_\varepsilon(0)$  centrada na origem do  $T_p M$  de raio  $\varepsilon > 0$  tal que seu fecho está contido nessa vizinhança, é denominada **bola normal** (ou **geodésica**) e  $\exp_p(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(p)$ . Pelo Lema de Gauss, a fronteira de uma bola normal, denotada por  $S_\varepsilon(p)$  e chamada **esfera normal** (ou **geodésica**), é uma hipersuperfície em  $M$  ortogonal às geodésicas que partem de  $p$ . As geodésicas que partem de  $p$  são chamadas **geodésicas radiais**.

A proposição abaixo nos garante que as geodésicas minimizam o comprimento de arco localmente.

**Proposição 4.** Sejam  $p \in M$ ,  $U$  uma vizinhança normal de  $p$  e  $B \subset U$  uma bola normal de centro  $p$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  um segmento de geodésica

com  $\gamma(0) = p$ . Se  $c : [0, 1] \rightarrow M$  é qualquer curva diferenciável por partes, ligando  $\gamma(0)$  a  $\gamma(1)$  então  $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ . Se vale a igualdade, então  $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$ .

*Demonstração.* Ver em [9] pag.79. □

**Observação 5.** O resultado acima não é global, pois se considerarmos um arco de geodésica suficientemente grande, ele pode deixar de ser minimizante. É o que acontece, por exemplo, com as geodésicas de uma esfera que partem de um ponto  $p$ . Elas deixam de ser minimizantes depois que passam pelo seu antípoda  $-p$ .

A Observação 4 nos garante a existência de uma vizinhança normal para cada ponto  $p \in M$ . De acordo com o Teorema 3.7, em [9] pag.80, o resultado pode ser refinado garantindo para cada  $p \in M$  a existência de uma vizinhança  $W$  de  $p$  que é uma vizinhança normal de cada ponto  $q \in W$ .

**Observação 6.** Segue-se da Definição 23 e pela Proposição 4, que dados dois pontos  $q_1, q_2 \in W$ , existe uma única geodésica minimizante  $\gamma$  de comprimento menor que  $\delta > 0$  ligando  $q_1$  a  $q_2$  em que  $\delta$  é o raio de uma bola centrada na origem do  $T_q M$  na qual a  $\exp_q$  é um difeomorfismo. O conjunto  $W$  é denominado uma **vizinhança totalmente normal**.

**Corolário 1.** Se uma curva diferenciável por partes  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$  então  $\gamma$  é uma geodésica. Em particular  $\gamma$  é regular.

*Demonstração.* Considere  $W$  uma vizinhança totalmente normal de  $\gamma(t)$  com  $t \in [a, b]$ . Pelo que vimos acima, existe um intervalo  $I \subset [a, b]$ , com interior não vazio e  $t \in I$ , tal que  $\gamma(I) \subset W$ . A restrição,  $\gamma_I : I \rightarrow W$  é uma curva

diferenciável por partes ligando dois pontos de uma bola normal. Temos que  $\gamma_I$  tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ . Pela Proposição 4, segue que o comprimento de  $\gamma_I$  é igual ao comprimento de uma geodésica radial ligando esses dois pontos. Pelo fato de que  $\gamma_I$  está parametrizada pelo parâmetro proporcional ao comprimento de arco, vale a igualdade. Então  $\gamma_I$  é uma geodésica em  $I$ , e portanto em  $t \in [a, b]$ .  $\square$

**Observação 7.** *Vimos que dados dois pontos  $q_1, q_2 \in W \subset M$  existe uma única geodésica minimizante  $\gamma$  de comprimento  $< \delta$  ligando  $q_1$  a  $q_2$ . Pode acontecer, entretanto, que uma tal geodésica não esteja contida em  $W$ . Diremos que um conjunto  $S \subset M$  é **fortemente convexo** se para quaisquer dois pontos  $q_1, q_2$  do fecho  $\overline{S}$  de  $S$  existe uma única geodésica minimizante  $\gamma$  ligando  $q_1$  a  $q_2$  e cujo interior está contido em  $S$ .*

**Lema 3.** *Para cada  $p \in M$  existe um número  $c > 0$  tal que qualquer geodésica de  $M$  que é tangente em  $q \in M$  à esfera geodésica  $S_r(p)$  de raio  $r < c$  está fora da bola geodésica  $B_r(p)$  numa vizinhança de  $q$ .*

*Demonstração.* Ver em [9] pag.83  $\square$

**Proposição 5** (Vizinhanças Convexas). *Para cada  $p \in M$  existe um número  $\beta > 0$  tal que a bola geodésica  $B_\beta(p)$  é fortemente convexa.*

*Demonstração.* Considere o número  $c$  dado no Lema 3. Escolha  $\delta > 0$  e  $W$  uma vizinhança normal de cada um de seus pontos de modo que  $\delta < \frac{c}{2}$ . Tome  $\beta < \delta$  tal que  $B_\beta(p) \subset W$ . Provaremos que  $B_\beta(p)$  é fortemente convexa. Sejam  $q_1, q_2 \in \overline{B_\beta(p)}$  e  $\gamma$  a única geodésica de comprimento menor que  $2\delta < c$  ligando  $q_1$  a  $q_2$ . Claramente  $\gamma$  está contida em  $B_c(p)$ , mas se o interior de  $\gamma$  não está contido em  $B_\beta(p)$  então existe um ponto  $q$  no interior de  $\gamma$  onde a distância máxima  $r$  de  $p$  a  $\gamma$  é atingida. Assim  $\gamma$  é tangente em  $q$  à esfera

geodésica  $S_r(p)$ , com  $r < c$ , e os pontos de  $\gamma$  numa vizinhança de  $q$  estarão no fecho de  $B_r(p)$ . Como  $q \in B_c(p)$  implica que  $\gamma$  está contida na bola geodésica  $B_r(p)$  numa vizinhança de  $q$  contradizendo o Lema 3.  $\square$

## 2.2 Variedade Riemanniana completa

Nesta seção, exceto quando explicitamente mencionado, as variedades serão supostas conexas.

**Definição 25.** *Uma variedade Riemanniana  $M$  será denominada (**geodesicamente**) **completa** se para todo  $p \in M$ , a aplicação exponencial  $\exp_p$  está definida para todo  $v \in T_p M$ , isto é, as geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p$  estão definidas para todos os valores  $t \in \mathbb{R}$ .*

Pela *homogeneidade das geodésicas* (ver em [9] Lema 2.6, pag. 71) temos que:

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t) \quad \forall v \in T_p M, \quad \forall \lambda, t \in \mathbb{R}.$$

Supondo  $M$  completa, segue-se que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

**Exemplo 12.**  $\mathbb{R}^n$  com a métrica euclidiana é uma variedade completa, uma vez que as suas geodésicas são as retas que estão definidas para todo  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 13** (Espaço Hiperbólico). *O semi-plano  $H^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$  não é completo com a métrica induzida pelo  $\mathbb{R}^n$  uma vez que a geodésica  $\gamma(t) = (0, 0, \dots, t)$  está definida apenas para  $t > 0$ . Mas utilizando-se a métrica dada por  $\langle u, v \rangle_p = \frac{u \cdot v}{x_n^2}$ , onde  $p \in H^n$  e  $u, v \in T_p H^n$ , o mesmo passa a ser completo.*

**Exemplo 14.** *O cone de uma folha dado por  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  sem seu vértice não é completo pois, as geratrizes não podem ser estendidas para todos os  $t \in \mathbb{R}$  sem atingir o vértice.*

**Observação 8.** *Se removermos qualquer ponto  $p$  de uma variedade Riemanniana completa  $M$ , então  $M - \{p\}$  deixa de ser completa uma vez que as geodésicas que antes passavam por  $p$  não podem ser estendidas para todo parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 26.** *Dados dois pontos  $p, q \in M$ , considere as curvas diferenciáveis por partes ligando  $p$  a  $q$ . Definimos a **distância** de  $p$  a  $q$  como*

$$d(p, q) = \inf\{\ell(\gamma_i) \mid \gamma_i \text{ é uma curva diferenciável por partes ligando } p \text{ a } q\}.$$

**Observação 9.** *Uma variedade Riemanniana  $M$  torna-se um espaço métrico, com a função distância  $d$  definida acima (ver [9] pag.161).*

**Observação 10.** *Se existe uma geodésica minimizante  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$  então  $d(p, q)$  é igual ao comprimento de  $\gamma$  que liga  $p$  a  $q$ .*

O teorema a seguir nos garante algumas condições necessárias e suficientes para que  $M$  seja uma variedade Riemanniana completa.

**Teorema 3** (Hopf e Rinow). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e seja  $p \in M$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a)  $\exp_p$  está definida em todo o  $T_pM$ .
- (b) Os limitados e fechados de  $M$  são compactos.
- (c)  $M$  é completa como espaço métrico.
- (d)  $M$  é geodesicamente completa.
- (e) Se existe uma sucessão de compactos

$$K_n \subset M, K_n \subset \text{int}(K_{n+1}) \text{ e } \bigcup_n K_n = M,$$

tais que se  $q_n \notin K_n$ , então  $d(p, q_n) \rightarrow \infty$ .

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

(f) Para todo  $q \in M$ , existe uma geodésica  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$ , com  $\ell(\gamma) = d(p, q)$

*Demonstração.* Ver [9] pag.162. □

Segue como consequência imediata do Teorema 3 que:

**Corolário 2.** *Se  $M$  é compacta então  $M$  é completa.*

## 2.3 Triângulos geodésicos

Nesta seção apresentaremos a definição de triângulos geodésicos em variedades Riemannianas a qual será de muita importância na apresentação do resultado principal.

**Definição 27.** *Um triângulo geodésico  $T$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é um conjunto formado por três segmentos de geodésicas normalizadas*

$$\gamma_1 : [0, l_1] \rightarrow M, \quad \gamma_2 : [0, l_2] \rightarrow M \quad \text{e} \quad \gamma_3 : [0, l_3] \rightarrow M,$$

tais que

$$\begin{cases} \gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0), & i=1,2; \\ \gamma_3(l_3) = \gamma_1(0). \end{cases}$$

Os segmentos  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  são chamados os **lados** do triângulo e os pontos iniciais (ou finais) desses segmentos geodésicos são chamados os **vértices** de  $T$ . Os ângulos formados pelas tangentes aos vértices são chamados **ângulos internos** dos vértices, ou seja,

$$\sphericalangle(-\gamma'_i(l_i), \gamma'_{i+1}(0)), i = 1, 2 \text{ e } \sphericalangle(-\gamma'_3(l_3), \gamma'_1(0)),$$

onde  $-\gamma'_i(l_i)$  indica a tangente no sentido contrário (Figura 2.3).

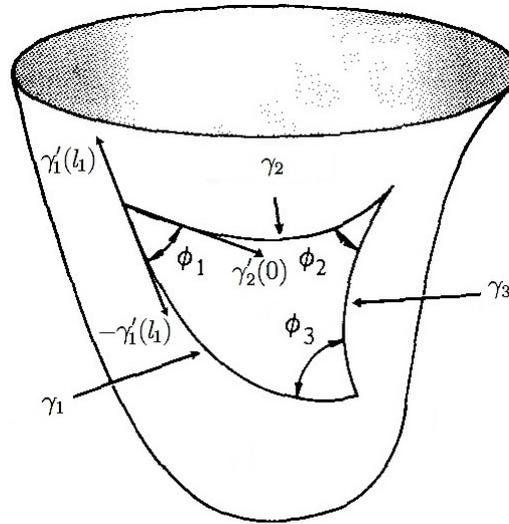


Figura 2.3: O ângulo interno  $\phi_1$  é o ângulo formado pelas tangentes  $-\gamma'_1(l_1)$  e  $\gamma'_2(0)$

Dada uma geodésica  $\gamma(t)$  em  $M$ , tal que  $\gamma(t_0) = p$  e  $\gamma(t_1) = q$ , com  $t_0 < t_1$ . Representaremos o segmento de  $\gamma(t)$  que liga  $p$  e  $q$  por  $[p, q]_\gamma$ . Se  $\gamma(t') = p'$  e  $t_0 < t' < t_1$  dizemos que  $p'$  ocorre depois de  $p$  e antes de  $q$  ao longo de  $\gamma$ .

A palavra *segmento* significará *segmento geodésico* e  $\ell([p, q]_\gamma)$  indicará o comprimento do segmento  $[p, q]_\gamma$ .

Um triângulo geodésico cujos seus vértices são os pontos  $p$ ,  $q$  e  $r$  e

seus lados são os segmentos  $[p, q]_g$ ,  $[q, r]_\gamma$  e  $[r, p]_\sigma$  será indicado pela terna  $([p, q]_g, [q, r]_\gamma, [r, p]_\sigma)$ .

Diremos que um triângulo geodésico é um **triângulo geodésico isósceles** quando possui dois lados com mesmo comprimento. O lado desigual será chamado de **base**.

**Observação 11.** *Se  $r$  é o ponto médio do segmento  $[p, q]_\gamma$  então  $([p, q]_\gamma, [q, r]_\gamma, [r, p]_\gamma)$  é um triângulo isósceles cuja base é  $[p, q]_\gamma$ .*

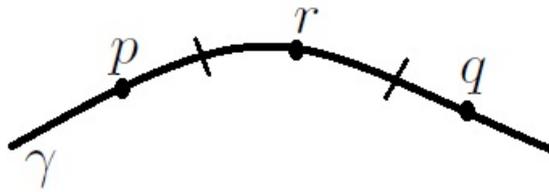


Figura 2.4:

# Capítulo 3

## Cut Locus (Lugar dos Pontos Mínimos)

A noção de cut locus foi introduzida inicialmente para superfícies convexas por Poincaré (1905) sob o nome de *ligne de partage* (linha divisória). Em variedades Riemannianas a noção de cut-locus foi introduzida por J.H. Whitehead (1935), mas foi Klingenberg (1959) que reacendeu o interesse pelo conceito novamente e mostrou sua utilidade.

No que segue,  $M$  é uma variedade Riemanniana completa, conexa, de dimensão  $n \geq 2$ , orientada e as suas geodésicas são normalizadas.

### 3.1 Definições e resultados

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa,  $p$  um ponto de  $M$  e seja  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  uma geodésica normalizada com  $\gamma(0) = p$ . No Capítulo 2,

vimos que se  $t > 0$  é suficientemente pequeno podemos considerar  $\gamma(t)$  dentro de uma bola normal tal que  $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ , isto é,  $\gamma([0, t])$  é uma geodésica minimizante. E se  $\gamma([0, t_1])$  não é minimizante, o mesmo acontece para todo  $t > t_1$ . Pela continuidade de  $\gamma$ , temos que o conjunto dos  $t \in [0, +\infty)$  para a qual  $\gamma$  é minimizante é da forma  $[0, t_0]$  ou  $[0, +\infty)$ . No primeiro caso,  $\gamma(t_0)$  é chamado o **ponto mínimo** de  $p$  ao longo de  $\gamma$ . No segundo caso, diz-se que tal ponto mínimo não existe e  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  é um raio geodésico.

**Definição 28.** *O cut locus de  $p$  é a união dos pontos mínimos de  $p$  ao longo de todas as geodésicas que partem de  $p$ . Denotaremos por  $C(p)$ .*

Como o fato de uma geodésica ser minimizante é independente de seu vetor tangente, podemos restringir o estudo da aplicação  $\rho : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\rho(v) = \sup\{t \in [0, +\infty) \mid \gamma_v(t) \text{ é minimizante em } [0, t], \text{ com } \|v\| = 1\},$$

aos vetores unitários de  $TM$ .

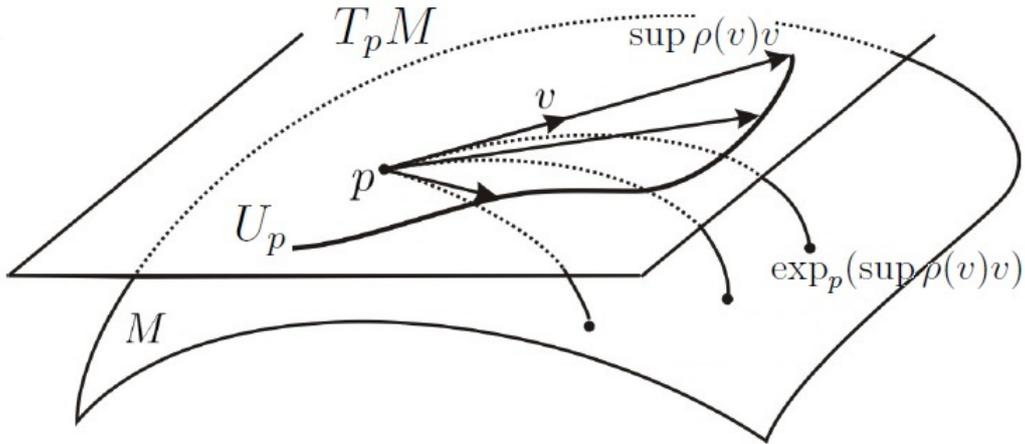
Vimos que para todo  $v \in T_pM$ , existe uma única geodésica  $\gamma$  tal que  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ , com  $\gamma'_v(0) = v$ . Agora considere o seguinte conjunto

$$U_p := \{\rho(v)v \mid \rho(v) < +\infty, v \in T_pM \text{ e } \|v\| = 1\}.$$

Observe que, se  $q \in M$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma_v$ , então

$$q = \gamma_v(\rho(v)) = \exp_p(\rho(v)v),$$

com  $\rho(v) < +\infty$ . Assim o cut locus de  $p$  é  $C(p) = \exp_p(U_p)$ .

Figura 3.1: O conjunto  $U_p$ 

Se considerarmos o conjunto

$$K_p := \{tv \mid 0 \leq t < \rho(v), \quad v \in T_p M \text{ e } \|v\| = 1\},$$

temos que para qualquer ponto  $p \in M$ , os conjuntos  $\exp_p(K_p)$  e  $C(p)$  são disjuntos e

$$M = \exp_p(K_p) \cup C(p).$$

De fato, observe que podemos escrever  $M$  como o conjunto

$$\begin{aligned} M &= \{\exp_p(tv) \mid 0 \leq t \leq \rho(v), \quad v \in T_p M \text{ e } \|v\| = 1\} \\ &= \exp_p(K_p) \cup \exp_p(U_p) = \exp_p(K_p) \cup C(p). \end{aligned}$$

Como tal união é disjunta, o conjunto  $K_p$  pode ser reescrito como o conjunto dos vetores  $v$  do  $T_p M$  tais que  $\exp_p(tv)$  não está no cut locus de  $p$ , isto é,

$$K_p = \{v \in T_p M \mid \exp_p(tv) \in M - C(p)\}.$$

**Proposição 6.** *Suponha que  $\gamma(t_0)$  é o ponto mínimo de  $p = \gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$ . Então*

- (i) *Ou  $\gamma(t_0)$  é o primeiro ponto conjugado de  $p$  ao longo de  $\gamma$ ,*
- (ii) *Ou existe uma geodésica  $\sigma \neq \gamma$  de  $p$  a  $\gamma(t_0)$  tal que  $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$ .*

*Reciprocamente, se (i) ou (ii) se verifica, então existe  $\tilde{t}$  em  $(0, t_0]$  tal que  $\gamma(\tilde{t})$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ .*

*Demonstração.* Ver em [9] pag.296. □

**Corolário 3.** *Se  $q$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ , então  $p$  é o ponto mínimo de  $q$  ao longo de  $-\gamma$ . Em particular,  $q \in C(p)$  se e só se  $p \in C(q)$ .*

*Demonstração.* Se  $q$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de uma geodésica  $\gamma$ , então, pela proposição acima, ou  $q$  é conjugado a  $p$ , ou existe uma geodésica  $\sigma \neq \gamma$ , ligando  $p$  a  $q$ , tal que  $\ell(\sigma) = \ell(\gamma) = d(p, q)$ . Em ambos os casos, o ponto mínimo de  $q$  ao longo de  $-\gamma$  não ocorre depois de  $p$ . Como temos que  $\ell(-\gamma) = d(p, q)$ , concluímos que  $p$  é o ponto mínimo de  $q$  ao longo de  $-\gamma$ . □

**Corolário 4.** *Se  $q \in M - C(p)$  então existe uma única geodésica minimizante ligando  $p$  a  $q$ .*

*Demonstração.* Seja  $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M$  uma geodésica minimizante tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(t_0) = q$ . Suponha que  $p$  e  $q$  são ligados por duas geodésicas minimizantes. Pela Proposição 6, existe  $\tilde{t} \in (0, t_0]$  tal que  $\gamma(\tilde{t})$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ . Como  $q \notin C(p)$ ,  $\gamma(\tilde{t}) \neq q$  e  $\tilde{t} < t_0$ , temos que  $\gamma$  não é minimizante em  $(0, t_0]$ , o que é uma contradição. □

**Observação 12.** *Pelo corolário acima, a  $\exp_p$  é injetiva em uma bola aberta  $B_r(p)$  se e somente se o seu raio  $r$  é menor ou igual a distância de  $p$  a  $C(p)$ , isto é, o raio de injetividade  $i(p)$  de  $M$  em  $p$  é igual a distância de  $p$  a seu cut locus, logo*

$$i(p) = d(p, C(p)) = \inf_{q \in C(p)} d(p, q).$$

Consequentemente,

$$i(M) = \inf_{p \in M} d(p, C(p))$$

é o raio de injetividade de  $M$ .

Se  $M$  é compacto, mostra-se que  $i(M) > 0$ . Pela Observação 4,  $\exp_p$  é um difeomorfismo de  $K_p$  sobre sua imagem  $\exp_p(K_p) = M - C(p)$  em  $M$ . Assim,  $\exp_p(K_p)$  é difeomorfo a uma bola aberta em  $\mathbb{R}^n$  para cada  $p \in M$  e o cut locus de  $M$  é fechado. Logo,  $M$  é obtida pela colagem de bolas abertas sobre os pontos do seu cut locus e, em um certo sentido, isto indica que a topologia de  $M$  está contida no seu cut locus.

**Observação 13.** *Se  $M$  é compacta, seu diâmetro (sup das distâncias entre seus pontos) é finito. Segue-se daí que existe o ponto mínimo de qualquer  $p \in M$  ao longo de qualquer geodésica partindo de  $p$ . O teorema abaixo garante que a recíproca deste fato é também válida.*

**Teorema 4.** *Suponha que  $M$  é completa e que existe  $p \in M$  o qual possui ponto mínimo para toda geodésica partindo de  $p$ . Então  $M$  é compacta.*

*Demonstração.* Ver [9] pag.302. □

Observe que negando o teorema acima obtemos o seguinte resulta:

**Teorema 5.** *Toda variedade Riemanniana completa não compacta  $M$  possui um raio geodésico.*

## 3.2 Alguns exemplos de cut-locus

Em geral, o cut locus é difícil ser calculado pois envolve geodésicas. A seguir daremos alguns exemplos de variedades e seus respectivos cut locus.

**Exemplo 15.** Considere o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Sabemos que as geodésicas do  $\mathbb{R}^n$  são retas, ou seja, são raios geodésicos e portanto  $C(p) = \{\emptyset\}$  para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 16.** Considere a esfera euclidiana  $S^n$ . Via  $T_pM$ , as geodésicas de  $S^n$  são minimizantes até uma distância  $\pi$ . Então para todo  $p \in S^n$ , temos que  $U_p = \partial B_\pi(0)$  é a fronteira de uma bola aberta centrada na origem do  $T_pM$ . Portanto  $C(p) = \exp_p(U_p) = \{\bar{p}\}$  é o antípoda de  $p$ .

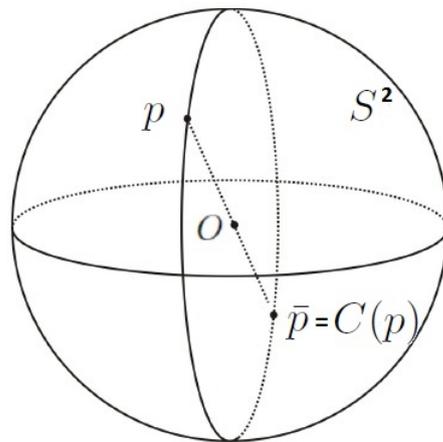


Figura 3.2: Cut locus da esfera  $S^2$

**Exemplo 17.** Seja  $T^2$  o toro plano obtido ao identificar os lados opostos da grade  $\Gamma$  gerada por dois vetores ortogonais  $a$  e  $b$ .

Considere um retângulo  $R$  de  $\Gamma$  e seja  $q$  o ponto central de  $R$ . Para qualquer  $p \in T^2$ , definimos uma aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  que identifica os pontos de  $\Gamma$  com os de  $T^2$ , tal que  $f(q) = p$  (figura 3.3). Identificando  $\mathbb{R}^2$

com  $T_p T^2$ , a aplicação  $g : \mathbb{R}^2 \approx T_p T^2 \rightarrow T^2$  definida por  $g(v) = f(q + tv)$ , com  $t \in \mathbb{R}$  e  $\|v\| = 1$ , coincide com a  $\exp_p$  já que as geodésicas de  $T^2$  partindo de  $p$  podem ser parametrizadas por  $\gamma_v(t) = f(q + tv)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Logo  $\exp_p(tv) = f(q + tv)$  para todos  $t \in \mathbb{R}$  e  $v \in T_p T^2$  com  $\|v\| = 1$ .

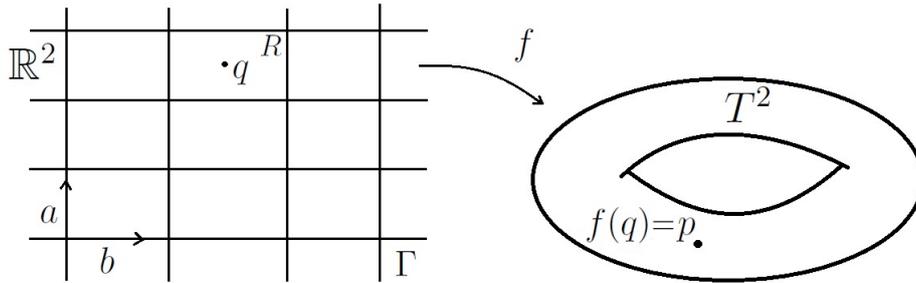


Figura 3.3:

Seja  $p_0 \in T^2$  e  $\bar{p}_0 \in R$  com  $f(\bar{p}_0) = p_0$ . Observe que, em  $T^2$  existem infinitas geodésicas ligando  $p$  a  $p_0$ , onde todas são imagens pela  $f$  dos segmentos, em  $\mathbb{R}^2$ , ligando  $\bar{p}_0$  aos pontos  $q + \lambda$  com  $\lambda \in \Gamma$  (figura 3.4). Entre todas as geodésicas, a mais curta é a projeção do segmento  $[q, \bar{p}_0]$ . De fato, o ponto de  $q + \Gamma$  mais próximo de  $\bar{p}_0$  é  $q$  já que a mediatriz do segmento  $[q_1, q]$ ,  $q_1 \in \Gamma$ , divide o plano  $\mathbb{R}^2$  em dois semi-planos, onde um deles contém  $q$  e  $\bar{p}_0$ .

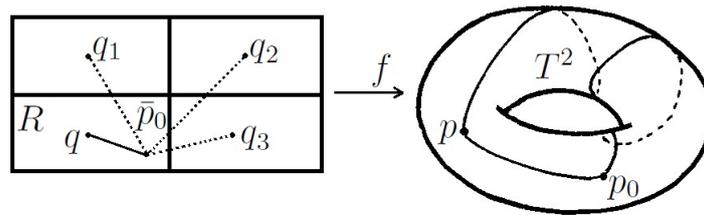


Figura 3.4:

Agora seja  $g$  ( $g = f \circ \gamma$ ) uma geodésica, com  $g(0) = p$ , e seja  $\gamma$  uma geodésica correspondente, em  $\mathbb{R}^2$ , com  $\gamma(0) = q$ . A geodésica  $g$  é minimizante até antes de  $\gamma$  sair de  $R$ , após deixa de minimizar. Assim podemos identificar

$$K_p \approx \text{int}(R) \text{ com o interior de } R, U_p \approx \partial R \text{ com o bordo de } R.$$

Assim

$$\exp_p(K_p) = f(\text{int}(R)) = \{(e^{i\theta}, e^{i\phi}) \in S^1 \times S^1 \mid \theta \neq 0 \text{ e } \phi \neq 0\}$$

e

$$C(p) = f(\partial R) = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1.$$

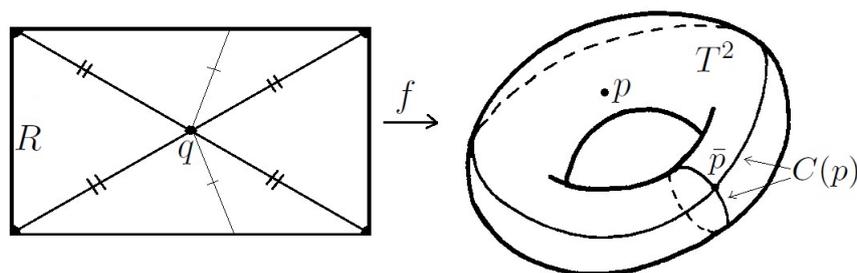


Figura 3.5: Observe que existe uma única geodésica minimizante de  $p$  a qualquer de  $\exp_p(K_p)$ , quatro minimizante de  $p$  a  $\bar{p}$ , e duas minimizantes de  $p$  a outros pontos de  $C(p)$ .

**Exemplo 18.** Considere o cilindro reto  $C$  do  $\mathbb{R}^3$ . Sabemos que  $C$  é localmente isométrico ao plano  $\mathbb{R}^2$  e que isometrias levam geodésicas em geodésicas. Seja  $p$  um ponto qualquer de  $C$  e  $T_p C$  o plano tangente a  $C$  em  $p$ . Identificando  $T_p C \approx \mathbb{R}^2$  e considerando  $R$  a faixa do plano  $\mathbb{R}^2$  que é isométrico a  $C$ , tendo  $q$  como ponto central de  $R$  (Figura 3.6).

Observe que todas as geodésicas (as retas) que passam por  $q$  minimizam a distância entre  $q$  e os pontos do bordo  $\partial R$  de  $R$  e que podem ser parametrizadas por  $g_v(t) = q + tv$ , onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $v$  é um vetor unitário. Como  $f$  é uma isometria,  $f(g_v(t)) = f(q + tv)$  é uma geodésica em  $C$  que passa por  $p$ . Assim a  $\exp_p$  coincide com  $f$  já que

$$\exp_p(tv) = \gamma_v(t) = f(q + tv)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $\gamma_v = f \circ g_v$  e  $\|v\| = 1$ . Como o bordo  $\partial R$  de  $R$  é levado

na reta geratriz  $r$  oposta a  $p$ , temos que as geodésicas  $\gamma$  de  $C$ , que passam por  $p$ , são minimizantes até a reta  $r$ .

Portanto identificando  $K_p \approx \text{int}(R)$  com o interior de  $R$ ,  $U_p \approx \partial R$  com o bordo de  $R$ , temos que

$$C(p) = \exp_p(U_p) = f(\partial R) = r.$$

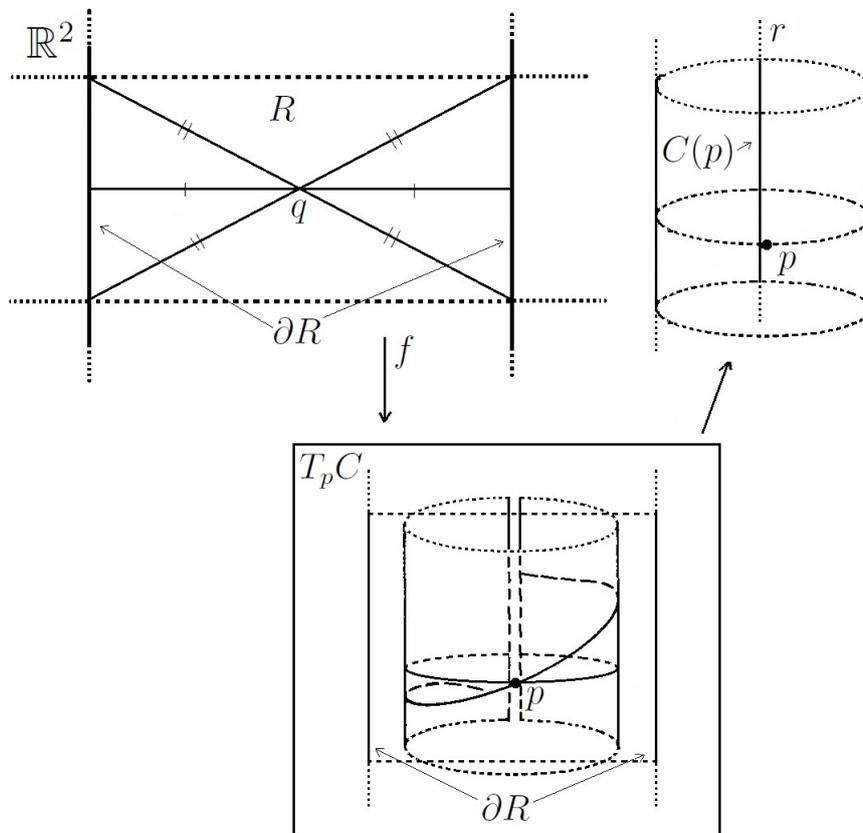


Figura 3.6: O cut locus do ponto  $p$  é a geratriz oposta de  $p$

Observe que existe uma única geodésica minimizante de  $p$  a um ponto de  $\exp_p(K_p)$  e duas minimizantes de  $p$  a um ponto de  $C(p) = \exp_p(U_p)$ .

# Capítulo 4

## Uma caracterização das esferas euclidianas $S^n$

Agora apresentaremos algumas definições e resultados que servirão de suporte para darmos uma caracterização às esferas euclidianas, essencialmente em termos da noção de convexidade e triângulos geodésicos isósceles em variedades Riemannianas.

No que segue denotaremos por  $M$  uma variedade Riemanniana completa, conexa de dimensão  $n$  ( $n \geq 2$ ) e orientada.

### 4.1 Variedade Wiedersehen

O conceito de variedade Wiedersehen foi introduzido pelo matemático austro-húngaro W. Blaschke, por volta de 1920. Inicialmente definido apenas para superfícies do  $\mathbb{R}^3$ , Blaschke definiu que uma superfície  $M$  do  $\mathbb{R}^3$  será dita

Wiedersehen quando partindo-se de um ponto  $p$  de  $M$ , e movendo-se uma distância  $d$  ao longo de qualquer geodésica partindo de  $p$ , todas as geodésicas se encontram novamente em um ponto  $p'$ . Por exemplo, é o que acontece na esfera  $S^2$ . Blaschke conjecturou ainda que tal superfície deve ter curvatura constante, ou seja, ser isométrica a uma esfera euclidiana.

Com a noção de cut locus, uma definição mais precisa foi dada para variedades Riemannianas Wiedersehen.

**Definição 29.** *Uma variedade Riemanniana compacta  $M$  para a qual o cut locus  $C(p)$  de todo ponto  $p \in M$  se reduz a um único ponto é chamada uma variedade Wiedersehen.*

Assim temos o seguinte resultado:

**Teorema 6.** *As variedades Wiedersehen são isométricas às esferas euclidianas  $S^n$ .*

O resultado acima foi inicialmente provado apenas para o caso de dimensão 2 por L.W. Green[8] em 1962. A generalização para dimensão superior só foi finalizado em meados de 1978, após uma sequência de resultados obtidos por M. Berger, J. Kasdan, A. Weinstein e C.T. Yang. Mais precisamente, para  $n > 2$  ímpar, o resultado decorre de C.T. Yang[1] que  $M$  é isométrica à esfera euclidiana  $S^n$  e para  $n > 2$  par, o resultado decorre de J.Kazdan[7] que  $M$  é isométrica à esfera euclidiana  $S^n$ .

**Observação 14.** *A palavra wiedersehen é de origem alemã e significa "ver novamente".*

## 4.2 Axiomas dos triângulos isósceles

**Definição 30.** Considere  $g, \gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  duas geodésicas parametrizadas que se interceptam em um ponto  $p$  de  $M$ , formando um ângulo  $\theta$ . Chamaremos de **configuração** à terna formada por um segmento da geodésica  $g$  (ou pela própria  $g$ ), um segmento da geodésica  $\gamma$  (ou pela própria  $\gamma$ ) e o ângulo  $\theta$ . Representaremos tal configuração por  $(g, \gamma, \theta)_p$ .

Agora considere os seguintes axiomas:

**Axioma 1.** Primeiro Axioma dos Triângulos Isósceles - P.A.T.I

Para toda configuração  $(g, \gamma, \theta)_p$ ,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , e para todo ponto  $q = \gamma(s_0)$ ,  $s_0 > 0$ , existe um único ponto  $r = g(t_0)$ , com  $t_0 > 0$  e um único segmento de geodésica minimizante  $[q, r]_\sigma$  ligando  $q$  a  $r$ , de modo que o triângulo geodésico  $([p, q]_\gamma, [q, r]_\sigma, [r, p]_g)$  é o único triângulo isósceles cuja base é  $[p, q]_\gamma$ .

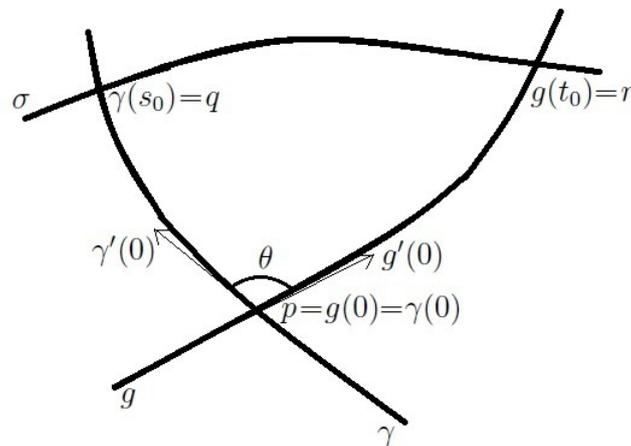


Figura 4.1:  $\ell([q, r]_\sigma) = \ell([r, p]_g)$

I. Tribuzy apresentou em [2] e [5] uma caracterização para o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  usando o Axioma 1. Mais precisamente, Tribuzy mostrou que se uma variedade Riemanniana completa, conexa e orientada  $M$  satisfaz o Primeiro Axioma dos Triângulos Isósceles, então  $M$  é isométrica ao  $\mathbb{R}^n$ .

**Axioma 2.** Segundo Axioma dos Triângulos Isósceles - S.A.T.I

Para toda configuração  $(g, \gamma, \theta)_p$  e para todo ponto  $q = \gamma(s) \neq p$  existem dois e apenas dois números reais  $t_1$  e  $t_2$ , com  $t_2 < 0 < t_1$ , tais que os pontos  $r_1 = g(t_1)$  e  $r_2 = g(t_2)$  determinam os segmentos geodésicos  $[q, r_1]_\gamma$  e  $[q, r_2]_\tau$ , de modo que os triângulos geodésicos  $([p, q]_\gamma, [q, r_1]_\sigma, [r_1, p]_g)$  e  $([p, q]_\gamma, [q, r_2]_\tau, [r_2, p]_g)$  são triângulos isósceles cuja base comum é  $[p, q]_\gamma$ .

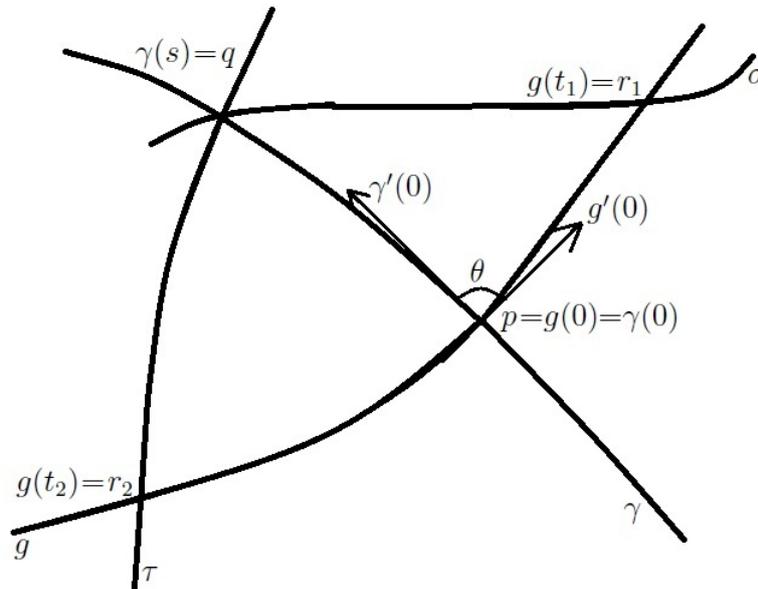


Figura 4.2:  $\ell([q, r_1]_\sigma) = \ell([r_1, p]_g)$  e  $\ell([q, r_2]_\tau) = \ell([r_2, p]_g)$

**Observação 15.** Observe que não é feita restrição alguma sobre o ângulo  $\theta$  para esse caso. Podemos portanto, representar a configuração por  $(g, \gamma)_p$ , sem mencionar o ângulo.

A ideia de criar este segundo axioma surgiu a partir do primeiro axioma. I. Tribuzy questionou o que aconteceria se considerarmos dois triângulos geodésicos isósceles (com as condições apresentadas no Axioma 2) ao em vez de apenas um triângulo geodésico isósceles. Quais variedades irão satisfazer tal axioma?

Na próxima seção mostraremos, o resultado obtido por I. Tribuzy em [2] e [5], que todas as variedades que satisfazem o Axioma 2 são isométricas as esferas euclidianas  $S^n$ .

### 4.3 Uma caracterização das esferas euclidianas

#### $S^n$

Nesta seção apresentaremos uma caracterização das esferas euclidianas  $S^n$  usando o Segundo Axioma dos Triângulos Isósceles. Tal resultado afirma que:

**Teorema Principal** (I. Tribuzy). *Se  $M$  satisfaz o Segundo Axioma dos Triângulos Isósceles (S.A.T.I) então  $M$  é isométrica a esfera euclidiana  $S^n$ .*

A demonstração segue dos seguintes resultados.

**Lema 4.** *Se  $M$  satisfaz o Segundo Axioma dos Triângulos Isósceles (S.A.T.I), então  $M$  é compacta.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4, Capítulo 3, para mostrar que  $M$  é compacta, basta que um ponto de  $M$  possui um ponto mínimo.

Considere um ponto  $p_0 \in M$  fixo. Pela Proposição 5 podemos considerar um  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(p_0)$  é uma bola normal fortemente convexa. Considere agora a esfera geodésica  $S_r(p_0)$  com  $\delta > r > 0$ .

Seja  $g$  uma geodésica partindo de  $p_0$ , e  $p$  o ponto onde  $g$  intercepta  $S_r(p_0)$ . Reparametrizamos  $g$  de tal forma que  $g(0) = p$  e  $g(r) = p_0$ . Agora considere um ponto  $q \in S_r(p_0)$ , com  $q \neq p$ , e seja  $\gamma$  uma geodésica minimizante ligando

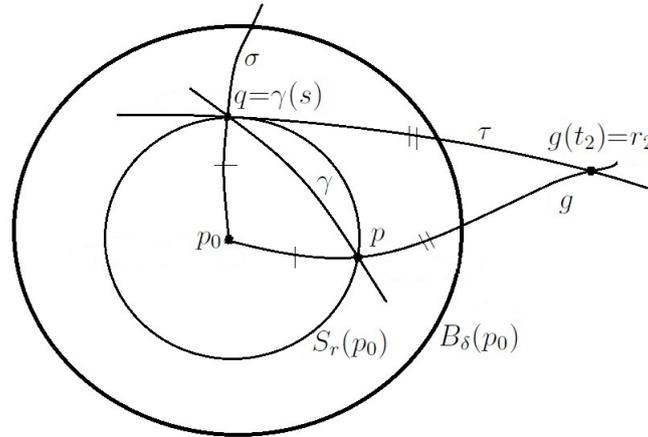


Figura 4.3: a curva por partes  $\lambda = (\sigma \cup \tau)$  que liga  $p_0$  a  $r_2$  passando por  $q$  é uma geodésica quebrada em  $q$

$p = g(0) = \gamma(0)$  a  $q = \gamma(s)$  (Figura 4.3). Com isso, podemos considerar a configuração  $(g, \gamma)_p$ . Pelo S.A.T.I, existem dois e apenas dois número reais  $t_1$  e  $t_2$ , com  $t_2 < 0 < t_1$  tais que  $g(t_1) = r_1$  e  $g(t_2) = r_2$  determinando os segmentos geodésicos  $[q, r_1]_\sigma$  e  $[q, r_2]_\tau$  e dois triângulos geodésicos isósceles

$$([q, r_1]_\sigma, [p, q]_\gamma, [p, r_1]_g) \text{ e } ([p, q]_\gamma, [q, r_2]_\tau, [r_2, p]_g)$$

tendo o segmento geodésico  $[p, q]_\gamma$  como base. Já que  $p$  e  $q$  pertencem a esfera geodésica  $S_r(p_0)$ , por construção,  $t_1 = r$  e  $r_1 = g(t_1) = g(r) = p_0$ . Consequentemente, temos que  $\ell([p_0, r_2]_g) = \ell([p_0, q]_\sigma) + \ell([q, r_2]_\tau)$ , ou seja, o comprimento do segmento  $[p_0, r_2]_g$  igual ao comprimento da geodésica quebrada  $\lambda = (\sigma \cup \tau)$  que liga  $p_0$  a  $r_2$  passando por  $q$ . Como  $M$  é completa, existe uma geodésica de comprimento menor que  $\ell([p_0, r_2]_g)$  ligando  $p_0$  a  $r_2$ , donde segue que o ponto mínimo de  $p_0$  ocorre antes de  $r_2$ , ou seja,  $p_0$  possui um ponto mínimo ao longo de  $g$ .

Portanto, pela arbitrariedade de  $g$ , segue que  $p_0$  possui ponto mínimo ao longo de todas as geodésicas que partem dele. Pelo Teorema 4  $M$  é compacta.  $\square$

### Consequência da Compacidade de $M$

Considere a função  $c : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  que associa cada ponto  $p \in M$  o seu respectivo raio de convexidade de  $M$  em  $p$ , tal que  $c(p)$  é o maior número para o qual a bola  $B_r(p)$ , com  $r < c(p)$  é fortemente convexa. Pelo Teorema de Whitehead (ver [6] pag.103),  $c$  é uma função contínua em  $M$ .

(i) Como  $M$  é compacta e  $c$  é contínua,  $c$  atinge máximo e mínimo em  $\mathbb{R}_+^*$  e existe um número  $\inf(c) = \delta > 0$  tal que para todo  $p \in M$ , a bola  $B_\delta(p)$  é fortemente convexa. Logo existe uma família de bolas convexas  $\{B_r(p)\}_{p \in M}$  em  $M$ , onde  $2r < \delta$ . Assim definido, o fecho das bolas  $B_r(p)$  está contido em  $B_\delta(p)$ . Portanto  $B_r(p)$  é fortemente convexa e a família de abertos  $\{B_r(p)\}_{p \in M}$  cobre  $M$  e  $M$  é compacta, logo podemos extrair uma subcobertura finita para  $M$ , a saber

$$\{B_r(p_1), B_r(p_2), \dots, B_r(p_k)\}.$$

**Lema 5.** *Se  $M$  satisfaz o Segundo Axioma dos Triângulos Isósceles (S.A.T.I), então não existem laços geodésicos em  $M$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que exista uma geodésica  $g$  que forme laços em  $M$ . Usando a compacidade de  $M$  podemos supor que não existem outros laços geodésicos em  $g([t_0, \bar{t}_0])$ , com  $t_0 \neq \bar{t}_0$ , tais que  $g(t_0) = p = g(\bar{t}_0)$  e  $g'(t_0) \neq g'(\bar{t}_0)$ . Pela Proposição 5 podemos considerar uma bola fortemente convexa centrada em  $p$ , digamos,  $B(p)$  e sejam  $g(t_i) = p_i, i = 1, 2, 3, 4$ , os pontos onde  $g$  intercepta o bordo  $\partial B(p)$  de  $B(p)$  (Figura 4.4). Seja  $q = g(\tilde{t})$ , com  $\tilde{t} < t_2$ , o ponto obtido sobre  $g$  de tal forma que  $d(q, p_2) = d(p_2, p_3)$  (diminuindo o raio de  $B(p)$  se necessário). Ligando  $q$  a  $p_3$  através de uma geodésica  $\gamma$  e usando o segmento  $[q, p_3]_\gamma$  obtemos a configuração  $(g, \gamma)_q$ . Pelo

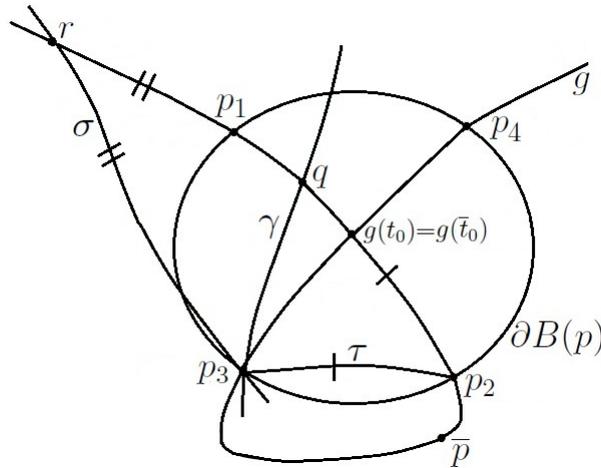


Figura 4.4:  $([q, \bar{p}]_g, [\bar{p}, p_3]_g, [q, p_3]_\gamma)$  é um triângulo geodésico com base  $[p_3, q]_\gamma$

S.A.T.I, existe um ponto  $r = g(\hat{t})$ , com  $\hat{t} < \tilde{t} < t_2$ , tal que os triângulos

$$([p_2, q]_g, [q, p_3]_\gamma, [p_3, p_2]_\tau) \text{ e } ([r, q]_g, [q, p_3]_\gamma, [p_3, r]_\sigma)$$

são triângulos geodésicos isósceles cuja base é  $[q, p_3]_\gamma$ . Agora observe que, se considerarmos o ponto médio  $\bar{p}$  do segmento  $[q, p_3]_g$ , obtemos um outro triângulo geodésico isósceles  $([q, \bar{p}]_g, [\bar{p}, p_3]_g, [q, p_3]_\gamma)$  com mesma base e distinto dos demais, o que contradiz o S.A.T.I. Portanto não existem laços geodésicos em  $M$ . □

**Lema 6.** *Se  $M$  satisfaz o Segundo Axioma dos Triângulos Isósceles (S.A.T.I), então nenhuma geodésica de  $M$  entra e sai duas vezes por quatro pontos distintos do bordo de uma mesma bola fortemente convexa de  $M$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que uma geodésica  $g(t)$  intercepte o bordo de uma bola fortemente convexa  $B_r(p')$ ,  $p' \in M$ , em quatro pontos distintos  $p_i = g(t_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Seja  $p = g(t')$ ,  $t' < t_2$ , obtido de modo que  $d(p, p_2) = d(p_2, p_3)$  e seja  $[p, p_3]_\gamma$  o segmento minimizante de  $\gamma$  que liga  $p$  a  $p_3$ . Considere o configuração  $(g, \gamma)_p$ . O segmento  $[p_2, p_3]_g$  não é minimizante pois tem

pontos fora da bola fortemente convexa  $B_r(p')$ . Logo o segmento  $[p, p_3]_g$  também não é minimizante e  $[p, p_3]_g \neq [p, p_3]_\gamma$  (Figura 4.5). Pelo S.A.T.I,

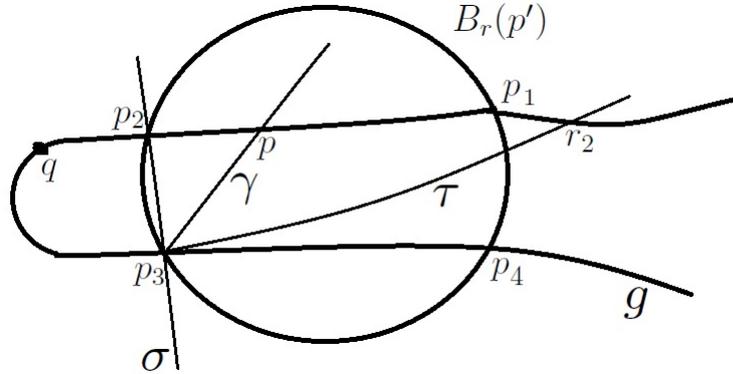


Figura 4.5:  $([p, p_3]_\gamma, [p, q]_g, [q, p_3]_g)$  é um triângulo geodésico isósceles com base  $[p, p_3]_\gamma$

existem dois e apenas dois números reais  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$ , com  $\bar{t}_2 < \bar{t}_1$ , tais que os pontos  $r_1 = g(\bar{t}_1)$  e  $r_2 = g(\bar{t}_2)$  determinam os segmentos  $[p_3, r_1]_\sigma$  e  $[p_3, r_2]_\tau$  de modo que os triângulos geodésicos

$$([p, p_3]_\gamma, [p_3, r_1]_\sigma, [r_1, p]_g) \text{ e } ([p, p_3]_\gamma, [p_3, r_2]_\tau, [r_2, p]_g)$$

são isósceles cuja base comum é  $[p, p_3]_\gamma$ .

Por construção temos que  $g(\bar{t}_1) = r_1 = p_2 = g(\bar{t}_2)$  e  $r_2$  ocorre antes de  $p_2$  em  $g$ . Pelo Lema 5,  $g$  não possui laços geodésicos. Tomando o ponto médio  $q$  do segmento  $[p, p_3]_g$  obtemos o triângulo isósceles  $([p, p_3]_\gamma, [p, q]_g, [q, p_3]_g)$ , distinto dos outros e com mesma base  $[p, p_3]_\gamma$ . O que contradiz o S.A.T.I.  $\square$

**Lema 7.** *Se  $M$  satisfaz o Segundo Axioma dos Triângulos Isósceles (S.A.T.I), então toda geodésica de  $M$  é fechada.*

*Demonstração.* Pela compacidade de  $M$  temos que existe a cobertura finita  $\{B_r(p_1), B_r(p_2), \dots, B_r(p_k)\}$ . Como  $M$  é completa, as geodésicas estão definidas para todo  $\mathbb{R}$ . Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow M$  uma geodésica em  $M$ . Como pelo Lema

5 as geodésicas de  $M$  não formam laços, suponhamos que  $g(t)$  seja injetiva, então:

- (i) Ou  $g$  passa várias vezes por uma das bolas  $B_r(p_i)$  da cobertura.
- (ii) Ou existe um  $t_0 \in \mathbb{R}$  de forma que para todo  $t > t_0$ ,  $g(t)$  está contido em umas das bolas  $B_r(p_i)$  da cobertura.

(i) não pode ocorrer pois contraria o Lema 6.

(ii) é impossível, uma vez que as bolas  $B_r(p_i)$  da cobertura são fortemente convexas. De fato, como pelo Lema 5 não existem laços geodésicos, vão existir outras geodésicas minimizantes, diferentes de  $g$ , ligando pontos de  $g$  dentro da bola  $B_r(p_i)$  em algum momento. O que é um absurdo já que as bolas  $B_r(p_i)$  são fortemente convexas.

Portanto  $g$  não é injetiva, ou seja, existem  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , com  $t_1 \neq t_2$  tal que  $g(t_1) = g(t_2)$ . Mas, como pelo Lema 5 não existem laços geodésicos, então  $g'(t_1) = g'(t_2)$ , o que implica que a geodésica  $g$  é fechada.  $\square$

**Lema 8.** *Se  $M$  satisfaz o Segundo Axioma dos Triângulos Isósceles (S.A.T.I), então para todo  $p \in M$  e qualquer geodésica  $g$  tal que  $g(0) = p = g(2d)$ , o ponto mínimo de  $p$  em relação a  $g$  é o ponto  $p_0 = g(d)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $p$  um ponto arbitrário de  $M$  e  $g(t)$  uma geodésica arbitrária partindo de  $p = g(0)$  e parametrizada pelo comprimento de arco. Pelo Lema 7 temos  $g(t)$  é uma geodésica fechada, logo existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que  $g(2d) = p = g(-2d)$ . O ponto  $p_0 = g(d)$  será chamado o antípoda do ponto  $p$  com relação à geodésica  $g$ .

Denotaremos por  $p'_0 = g(t_0)$  o ponto mínimo de  $p$  com relação a  $g$ . Pela Proposição 6,  $p'_0$  não pode ocorrer após o ponto  $p_0$  pois  $\ell([p, p_0]_g) = \ell([p_0, p]_g)$ .

Vamos provar que  $p'_0 = p_0$ . Suponha que  $p'_0 \neq p_0$ . Como  $\ell([p'_0, p_0]_g) > 0$  existe um ponto  $q = g(\hat{t})$ , com  $t_0 < \hat{t} < d$ , que ocorre depois  $p'_0$  e antes de  $p_0$  ao longo de  $g$ . O fato de que  $g$  não minimiza a distância entre  $p$  e  $q$  implica a existência de uma geodésica minimizante  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$  tal que  $\ell([p, q]_g) > \ell([p, q]_\gamma)$ . Além disso, se o segmento  $[q, p]_g$  é o segmento de  $g$  ligando  $q$  a  $p$  e que passa pelo ponto  $p_0$ , então  $\ell([q, p]_g) > \ell([p, q]_\gamma)$ .

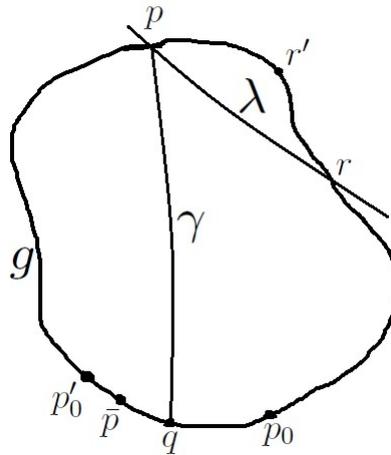


Figura 4.6:

Neste caso, podemos encontrar um ponto  $r$  sobre  $g$  obtido de tal forma que  $\ell([q, r]_g) = \ell([p, q]_\gamma)$ . Seja  $[r, p]_\lambda$  o segmento minimizante da geodésica  $\lambda$  ligando  $r$  a  $p$  e consideremos a configuração  $(g, \lambda)_p$ . Pelo S.A.T.I, existem dois e apenas dois pontos sobre  $g$  tais que obtemos os triângulos isósceles

$$([r, p]_\lambda, [p, \bar{p}]_g, [\bar{p}, r]_g) \text{ e } ([r, p]_\lambda, [r, r']_g, [r', p]_g),$$

onde  $r'$  e  $\bar{p}$  são os pontos médios dos segmentos  $[r, p]_g$  e  $[p, r]_g$  respectivamente e cuja base é o segmento  $[r, p]_\lambda$ . Mas por construção, obtemos também o triângulo isósceles  $([r, p]_\lambda, [p, q]_\gamma, [q, r]_g)$  cuja base é  $[r, q]_\lambda$  e distinto dos demais, o que contradiz o S.A.T.I.

Portanto, temos que  $p'_0 = p_0$ . □

**Lema 9.** *Se  $M$  satisfaz o Segundo Axioma dos Triângulos Isósceles (S.A.T.I), então toda geodésica de  $M$  que passa por  $p$  e  $p_0$  tem o mesmo comprimento.*

*Demonstração.* Considere uma outra geodésica  $\gamma(t)$  que passa por  $p$  e  $p_0$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(s) = p_0$ . Pelo Lema 7,  $\gamma$  é fechada e pelo Lema 8 existe um ponto  $p_1 = \gamma(d_1)$ , o antípoda de  $p$  em relação a  $\gamma$ , que é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ . Isso significa que  $\gamma(2d_1) = p$

Como  $p_0$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $g$ , teremos que: ou  $d < d_1$ , ou  $d = d_1$ . Vamos mostrar que  $d = d_1$ .

Suponhamos que  $d < d_1$ , então ou  $\ell([p, p_0]_\gamma) > d$  ou  $\ell([p_0, p]_\gamma) > d$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que  $\ell([p, p_0]_\gamma) > d$ . Logo existe um ponto  $p' = \gamma(t')$  tal que  $\ell([p, p']_\gamma) = \ell([p, p_0]_g) = d$ . Considere a configuração  $(g, \gamma)_{p_0}$  (Figura 4.7). Pelo S.A.T.I, existem dois pontos sobre  $g$  tais que obtemos dois triângulos isósceles

$$([p', p_0]_\gamma, [p_0, p]_g, [p, p']_\gamma) \text{ e } ([p, p']_\gamma, [p', p_0]_\gamma, [p, p_0]_g)$$

cuja base é  $[p', p_0]_\gamma$ .

Tomando  $r$  como o ponto médio do segmento  $[p_0, p']_\gamma$ , obtemos um outro triângulo isósceles  $([p', p_0]_\gamma, [p_0, r]_\gamma, [r, p']_\gamma)$ , distinto dos demais e com a mesma base  $[p', p_0]_\gamma$ . O que contradiz o S.A.T.I.

Portanto  $d = d_1$  e pela arbitrariedade de  $\gamma$ , todas geodésicas passam por  $p$  e  $p_0$  tem o mesmo comprimento.  $\square$

**Lema 10.** *Toda geodésica que passa por  $p$  também passa por  $p_0$ .*

*Demonstração.* Considere a bola fechada  $B_r(p)$  de centro  $p$  e raio  $r > 0$  contida em uma vizinhança normal de  $p$  e seja  $B_{d-r}(p_0)$  a bola fechada de

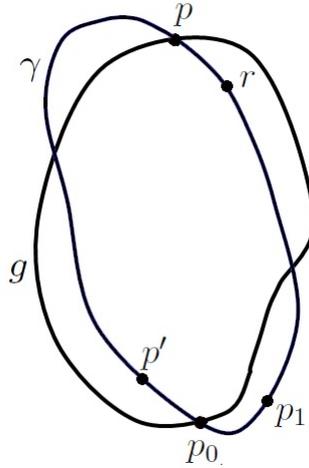


Figura 4.7:

centro em  $p_0$  e raio  $d - r > 0$ .

Denotaremos por  $\Sigma = \partial B_r(p)$  e por  $\Sigma' = \partial B_{d-r}(p_0)$  os bordos das bolas fechadas  $B_r(p)$  e  $B_{d-r}(p_0)$  respectivamente. Temos que, pelo menos os pontos  $p_1 = g(r)$  e  $p_2 = g(-r) = g(2d-r)$  pertencem a  $\Sigma \cap \Sigma'$  (Figura 4.8). Vamos mostrar que  $\Sigma = \Sigma'$ .

Suponha que exista um ponto  $q \in \Sigma'$  no interior de  $B_r(p)$ , então o comprimento do segmento por partes  $[p, q]_\gamma \cup [q, p_0]_\lambda$  que liga  $p$  a  $p_0$  é menor que  $d$ , pois

$$\ell([p, q]_\gamma \cup [q, p_0]_\lambda) = \ell([p, q]_\gamma) + \ell([q, p_0]_\lambda) < r + (d - r) = d.$$

Logo existe uma geodésica ligando  $p$  a  $p_0$  com comprimento menor que  $d$ . O que contradiz o Lema 9. Para o caso em que  $q \in \Sigma$  e está no interior de  $B_{d-r}(p_0)$  a demonstração é análoga.

Agora suponha que existam pontos de  $\Sigma$  fora da bola  $B_{d-r}(p_0)$  e seja  $w \in \Sigma$  o ponto onde a função distância de  $p_0$  a  $\Sigma$  atinja o máximo. Considere o segmento por partes  $[p, w]_{\gamma'} \cup [w, p_0]_{\lambda'}$  que liga  $p$  a  $p_0$ . Como o  $\ell([p, w]_{\gamma'}) = r$

e  $\ell([w, p_0]_{\lambda'}) > d - r$ , já que está fora da bola  $B_{d-r}(p_0)$ , logo o segmento por partes  $[p, w]_{\gamma'} \cup [w, p_0]_{\lambda'}$  tem comprimento maior que  $d$ . Pelo Lema de Gauss, o segmento  $[p, w]_{\gamma'}$  é perpendicular a  $\Sigma$  e o segmento  $[w, p_0]_{\lambda'}$  é perpendicular a  $\Sigma'$  em  $w$  por ser um máximo.

Assim, pelo Lema 7 a curva por partes  $[p, w]_{\gamma'} \cup [p, w]_{\lambda'}$  será fechada que passa por  $p$  e  $p_0$  e tem comprimento maior que  $\ell(g)$ . O que contradiz o Lema 9, logo  $\Sigma = \Sigma'$ .

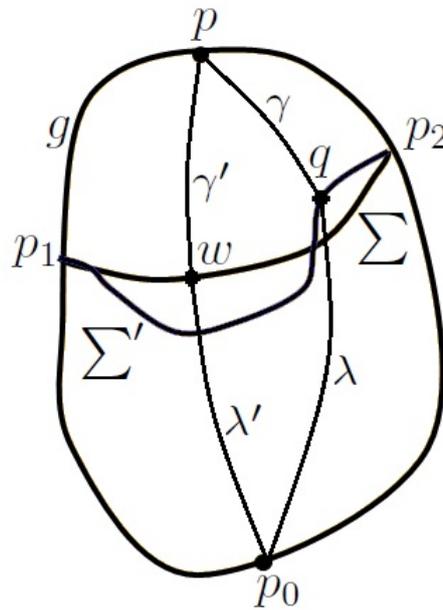


Figura 4.8:

Suponha agora que exista uma geodésica  $g'$  que parte de  $p$  mas não passe por  $p_0$  e seja  $q'$  o ponto onde  $g'$  intercepta  $\Sigma$ . Observe que assim obtemos uma geodésica  $[p, q']_{g'} \cup [q', p_0]_{\sigma}$  quebrada em  $q'$  cujo comprimento é  $d$ , logo existe uma geodésica minimizante ligando  $p$  a  $p_0$  de comprimento menor que  $d$  o que é um absurdo. Portanto todas as geodésicas que passam por  $p$  também passam por  $p_0$ . □

**Demonstração do Teorema Principal.**

*Demonstração.* Suponha que  $M$  seja uma variedade Riemanniana completa, conexa de dimensão  $n$  e orientada que satisfaz o S.A.T.I.

Pelos Lemas 4, 7 e 9 acima temos que  $M$  é compacta, todas suas geodésicas são fechadas e tem o mesmo comprimento. Pelos Lemas 8 e 10, todas geodésicas que partem de um ponto  $p$  qualquer de  $M$  são minimizantes até o seu ponto antípoda  $p_0$ , que é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de todas as geodésicas.

Portanto o cut locus de um ponto  $p$  qualquer de  $M$  é somente o seu ponto antípoda  $p_0$ , ou seja,  $C(p)$  é um conjunto unitário. Assim  $M$  é uma variedade Wiedersehen e pelo Teorema 6,  $M$  é isométrica à esfera Euclidiana  $S^n$ .  $\square$

# Bibliografia

- [1] C.T. Yang, *Odd-dimensional Wiederschen Manifolds are Spheres*, J. Diff. Geometry, 15(1980), 91-95.
- [2] I.A. Tribuzy, *Isosceles Triangle in Riemannian Geometry- A Characterization of the  $n$ -sphere*, Bull Braz Math Soc, Vol. 38, N. 4, 2007, 573-583.
- [3] I.A. Tribuzy, *A Characterization of  $\mathbb{R}^n$* . Archiv der Mathematik, maio 1978.
- [4] I.A. Tribuzy, *Convexidade em Variedades Riemannianas*. PhD thesis, IMPA, Rio de Janeiro, 1978.
- [5] I.A. Tribuzy, V. Ayala, M.M. Diniz and J.M.M. Veloso, *On Characterization of Riemannian Manifolds*, Universidad Catolica del Norte, Vol. 27, N. 2, 2008, 113-144.
- [6] J. Cheeger and D.G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, vol. 9. Amsterdam, 1975.
- [7] J. Kazdan, *An Isoperimetric Inequality and Wiederschen Manifolds*, Seminar on Differential Geometry. Annals of Math. Studies, 102(1982), 143-157.

- 
- [8] L.W. Green, *Auf Wiedersehensflächen*, Annals of Mathematics, Vol. 78, N. 2, 1963, 289-299.
- [9] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro. IMPA, 2008.
- [10] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, vol. 4, Houston, Texas, 1999.
- [11] S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine *Riemannian Geometry*, Springer - Verlag, 1987.