UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE SUPERFÍCIES IMERSAS EM ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE

VANISE DOS SANTOS RODRIGUES

MANAUS

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VANISE DOS SANTOS RODRIGUES

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE SUPERFÍCIES IMERSAS EM ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof^o. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

MANAUS
2008

VANISE DOS SANTOS RODRIGUES

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE SUPERFÍCIES IMERSAS EM ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Manaus, 19 de dezembro de 2008.

BANCA EXAMINADORA

....
Prof^o Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, Orientador
Universidade Federal do Amazonas- UFAM.

....
Prof^o Dr. Victor Ayala Bravo
Universidade Católica del Norte-(UCN-Chile).

....
Prof^o Dr. José Kenedy Martins
Universidade Federal do Amazonas- UFAM.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus.

Ao professor Dr. Renato de Azevedo Tribuzy pelas orientações e ao Professor Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy que foi meu Orientador do PET-Matemática.

Aos professores do Departamento de Matemática pelo incentivo.

Aos companheiros de Mestrado em especial João Batista Ponciano ,Célia Maria Nogueira Batista, Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda.

As amigas Eliana Gato Martins, Vilmara Silva e Maria Clara Emiliano Mendes pela força.

A meu meu pai Pedro Campos Rodrigues e minha mãe Ruth Souza dos Santos pelo carinho e dedicação.

Aos meus irmãos Greyce, Janys e Goutier pela força.

Ao companheiro Raimundo Vale de Souza pela Compreesão.

Aos meus Filhos Philip Floriano Rodrigues Ramkeerat e Yasmim Gabrielle Rodrigues de Souza, aos quais dedico esta dissertação.

RESUMO

REDUÇÃO DE CODIMENSÃO DE SUPERFÍCIES IMERSAS EM ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE

Orientador: Renato de Azevedo Tribuzy
Programa de Pós-Graduação em Matemática

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração detalhada dos resultados obtidos por J.H.Eschemburg e Renato de Azevedo Tribuzy em "Redução de Codimensão de Superfícies", publicado em Geometriae Dedicata no ano de 1989, que permitem reduzir a codimensão de superfícies analíticas, imersas em espaços de curvatura constante, cujo o vetor curvatura média está contido em um subfibrado paralelo do fibrado normal. No caso em que a superfície é homeomorfa a $2-esfera$ a redução de codimensão é obtida sem a hipótese de analiticidade.

ABSTRACT

REDUCTION OF CODIMENSION OF SURFACES IMMERSE IN SPACE OF CONSTANT CURVATURE

The objective of this work is to provide a detailed demonstration of the results obtained by J.H.Eschemburg e Renato Tribuzy on "Reduction of Codimension of Surfaces", published in Geometriae Dedicata", in the year 1989, allowing codimension reduced of surfaces an analytic immerse in space of constant curvature, whose mean curvature vector lies in a parallel subbundle of normal bundle. It the surface is homeomorphic a 2-sphere the reduction of codimension is obtained without the assumption of analyticities.

Sumário

INTRODUÇÃO

O estudo das superfíces mínimas e com vetor curvatura média constante é um campo amplo de pesquisas em Geometria Diferencial.

Históricamente as primeiras bibliografias sobre o estudo das superfícies mínimas registram-se no século $XVIII$, onde destacam-se Euler, Lagrange e Mensnier. Já no século XIX surgem os trabalhos de Scherk, Ennerper, Riemann, Weierstrass e Schwarz. Importantes contribuições foram dadas por Douglas, Radó, Huber, Osserman e mais de 120 pesquisadores conhecidos internacionalmente no século XX.

A seguir apresentaremos alguns resultados relevantes sobre o estudo das superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ com vetor curvatura média constante.

Em 1951, H.Hopf [9] ao estudar as superfícies compactas imersas em $\mathbb{R}^3$, provou o seguinte resultado:

Se $\mathbb{M}$ é uma superfície compacta de gênero zero imersa em $\mathbb{R}^3$ com vetor curvatura média constante. Então $\mathbb{M}$ é isometrica a uma esfera redonda.

Em 1956 A.D Alexandrov [1] estuda o caso mergulho. Neste caso ele prova um resultado importante, no qual introduziu um método conhecido como Principio de Reflexão de Alexandrov, e demonstrou que uma superfície compacta mergulhada em $\mathbb{R}^3$, com curvatura média constante é uma esfera.

A conjectura de que a esfera é a única superfície compacta imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante, atribuída a H. Hopf fez com que vários matemáticos se dedicassem ao estudo da Geomeria das Subvariedades. Porém, em 1986 Wente [14] consegue mostrar a existência de um toro imerso em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante.

As idéias de Hopf foram generalizadas e usadas por Calabi [5] e Chern [11] na teoria das esferas mínimas, usando a hipótese de que o vetor curvatura média é paralelo em $\mathbb{R}^n$.

Considere uma imersão $x : \mathbb{M}^2 \to \mathbb{Q}^n$ de uma variedade 2-dimensional em um espaço com curvatura seccional constante. Dizemos que podemos reduzir a codimensão para $k < n-2$, se existir uma subvariedade totalmente geodésica $(k+2)$-dimensional $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{Q}$ tal que $x(\mathbb{M}) \subset \mathbb{Q}'$.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração detalhada dos resultados obtidos por J.H.Eschemburg e Renato de Azevedo Tribuzy em "Redução de Codimensão de Superfícies"[7], os quais enunciaremos a seguir:

Seja $x : \mathbb{M}^2 \to \mathbb{Q}^n$ *uma imersão analítica, tal que o vetor curvatura média* $\mathbb{H}$ *está contido em um subfibrado paralelo* $\mathbb{E}$ *de* $\mathbb{TM}^{\perp}$. *Então podemos reduzir a codimensão da imersão para* $dim(\mathbb{E})+1$, *ou* $x(\mathbb{M})$ *é mínima em uma subvariedade totalmente umbílica* $(n-dim(\mathbb{E}))$*-dimensional de* $\mathbb{Q}^n$.

Seja $\mathbb{M}$ *uma superfície homeomorfa a* $2-esfera$ *e seja* $x : \mathbb{M} \to \mathbb{Q}^n$ *uma imersão tal que o vetor curvatura média* $\mathbb{H}$ *está contido em um subfibrado paralelo* $\mathbb{E}$ *de* $\mathbb{TM}^{\perp}$. *Então a codimensão da imersão pode ser reduzida para* $dim(\mathbb{E})$ *ou* $x(\mathbb{M})$ *é mínima em uma subvariedade totalmente umbílica* $(n-dim(\mathbb{E}))$*-dimensional de* $\mathbb{Q}^n$.

Na demonstração dos resultados principais observa-se que quando o complemento ortogonal do subfibado paralelo é plano, isto é, o tensor curvatura normal restrito ao complemento ortogonal do subfibrado paralelo é identicamente nulo a redução de codimensão é obtida, através de um resultado básico na teoria de redução de codimensão o teorema de Erbacher [6]. Neste teorema Erbacher afirma que é possível reduzir a codimensão de uma imersão isométrica, desde que, exista um subfibrado paralelo do fibrado normal, tal que, o primeiro espaço normal da imersão esteja inteiramente contido neste subfibrado paralelo.

Seja $x : \mathbb{M}^n \to \mathbb{Q}_{\mathbf{K}}^{n+\ell}$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana* n*-dimensional* $\mathbb{M}$ *em uma variedade Riemanniana* $(n+\ell)$*-dimensional* $\mathbb{Q}$. *Suponha que existe um subfibrado paralelo* $\mathbb{L}$ *de* $\mathbb{TM}^{\perp}$ *de dimensão* $q < \ell$, *tal que* $\mathbb{N}_1(p) \subset \mathbb{L}(p)$ *para todo* $p \in \mathbb{M}$. *Então podemos reduzir a codimensão da imersão para* q.

Por outro lado, quando o complemento ortogonal não é plano. Isto é, o tensor curvatura normal restrito ao complemento ortogonal do subfibrado paralelo não é identicamente nulo, observa-se que o vetor curvatura média está em uma direção paralela e umbílica. Portanto, o vetor curvatura média é paralelo na conexão normal e através do teorema Shing-Tung Yau [13], levando em consideração que a curvatura normal não é nula, concluímos que a imersão é mínima em uma subvariedade totalmente umbílica.

No caso em que a superfície é homeomorfa a $2-esfera$ a redução de codimensão é obtida sem a hipótese de analiticidade.

O teorema Yau [13], a que nos referimos estabelece o seguinte:

Seja $\mathbb{M}$ *uma superfície imersa em um espaço de curvatura constante* $\mathbb{Q}^n_{\mathbf{k}}$*, cujo vetor curvatura média* $\mathbb{H}$ *é paralelo. Então* $\mathbb{M}$ *é mínima em uma hipersuperfície umbílica , ou a imersão está contida em uma subvariedade totalmente umbílica ou totalmente geodésica* $3-dimensional$ *com vetor curvatura média constante.*

O primeiro resultado principal é uma generalização do seguinte resultado, obtido por Chen [3] ao estudar as imersões de superfícies analíticas :

Seja $\mathbb{M}$ *uma superfície analítica completa, simplesmente conexa imersa em um espaço de curvatura constante* $\mathbb{Q}^n_{\mathbf{k}}$*. Se* $\mathbb{M}$ *tem vetor curvatura média normalizado paralelo, então* $\mathbb{M}$ *é mínima em uma hipersuperfície umbílica ou a imersão está contida em uma subvariedade totalmente geodésica* $4-dimensional$ *com vetor curvatura média constante.*

O segundo resultado principal é uma generalização do teorema apresentado por Rodrigues e Tribuzy [7], onde os mesmos demonstram o resultado de Chen sem a hipótese de analiticidade para superfícies homeomorfa a $2-esfera$.

Seja $\mathbb{M}^2$ *uma superfície homeomorfa a* $2-esfera$ $\mathbf{S}^2$ *e* $f:\mathbb{M}^2\to\mathbb{Q}^n_k$ *uma imersão isométrica* C^∞ *com vetor curvatura média paralelo normalizado* $\frac{\mathbb{H}}{\|\mathbb{H}\|}$ *na conexão normal. Então :*

i) f *é uma superfície mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de* $\mathbb{Q}^n_k$ *ou,*

ii) A codimensão pode ser reduzida para 1.

Este trabalho será dividido em 3 capítulos:

No capítulo 1 apresentaremos as definições e propriedades da Geometria Riemanniana importantes para o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 2 introduziremos a noção de fibrados e subfibrados vetoriais. Em seguida, demonstraremos o teorema de Erbacher 3.2.1, que é básico na teoria de redução de codimensão de superfícies imersas em espaços de curvatura constante.

No capítulo 3 demonstraremos detalhadamente os resultados principais do trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as principais definições e propriedades da Geometria Riemanniana, necessárias ao desenvolvimento do trabalho. Os conceitos e resultados apresentados podem ser encontrados em [2].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1.1. Uma Variedade Diferenciável real de dimensão n é um conjunto $\mathbb{M}$ e uma família de aplicações biunívocas

$$x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{M}$$

de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{M}$ tal que:

1. $\mathbb{M} = \cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)$.

2. Para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são diferenciáveis.

O par (U_α, x_α) ou a aplicação x_α com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ são chamados de parametrização ou sistema de coordenadas de $\mathbb{M}$ em p; $x_\alpha(U_\alpha)$ é uma vizinhança coordenada. Uma família $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ satisfazendo 1 e 2 é chamada uma estrutura diferenciável em $\mathbb{M}$.

Denotaremos por $\mathbb{M}^n$ uma variedade diferenciável de dimensão n.

Definição 1.1.2. Sejam $\mathbb{M}^n$ e $\overline{\mathbb{M}}^m$ variedades diferenciáveis reais. Dizemos que uma aplicação $\psi : \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{M}}^m$ é diferenciável em $p \in \mathbb{M}^n$ se dada uma parametrização $\overline{x} : \overline{U} \subset \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{M}}$ em $\psi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}$ em p tal que $\psi(x(U)) \subset \overline{x}(\overline{U})$ e a aplicação $\overline{x}^{-1} \circ \psi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x^{-1}(p)$. ψ é diferenciável num aberto de $\mathbb{M}$ se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Definição 1.1.3. Seja $\mathbb{M}$ uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{M}$ é chamada uma curva diferenciável em $\mathbb{M}$. Suponha que $\alpha(0) = p \in \mathbb{M}$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de $\mathbb{M}$ diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \tfrac{d(f\circ\alpha)}{dt}|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{M}$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 1.1.4. O Espaço Tangente a uma variedade $\mathbb{M}^n$ em um ponto p, representado por $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$ é o conjunto de todos os vetores tangentes às curvas diferenciáveis pertencentes a $\mathbb{M}$ passando por p. Mostra-se que o $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$ é um espaço vetorial de dimensão n e que a escolha de uma parametrização $x : U \to \mathbb{M}$ em p determina uma base associada $\left\{(\tfrac{\partial}{\partial x_1})_0, ..., (\tfrac{\partial}{\partial x_n})_0\right\}$ em $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$, e que a estrutura linear nesse espaço, assim definida, não depende da parametrização x.

Definição 1.1.5. (O Fibrado Tangente). Seja $\mathbb{M}^n$ uma variedade diferenciável real e seja $\mathbb{TM} = \{(p, v); p \in \mathbb{M}, v \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}\}$. Este espaço munido com a estrutura diferenciável $\{U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha\}$ onde $\gamma_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{TM}$ definida por:

$$\gamma_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, r_1, ..., r_n) = (x_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}),$$

$(r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n$, é definido como o fibrado tangente de $\mathbb{M}$.

Proposição 1.1.1. Sejam $\mathbb{M}^n$ e $\overline{\mathbb{M}}^m$ variedades diferenciáveis e seja $\psi : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in \mathbb{M}$ e cada $v \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{M}$ com $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \psi \circ \alpha$. A aplicação $d\psi_p : \mathbb{T}_p\mathbb{M} \to \mathbb{T}_{\psi(p)}\overline{\mathbb{M}}$ dada por $d\psi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.

Definição 1.1.6. A aplicação linear $d\psi_p$ dada pela proposição anterior é chamada diferencial de ψ em p.

Definição 1.1.7. Uma Variedade Complexa de dimensão n é um conjunto $\mathbb{M}$ e uma família de aplicações biunívocas

$$x_\alpha : U_\alpha \subset \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathbb{M}$$

de abertos U_α de $\mathcal{C}^n$ em $\mathbb{M}$ tal que:

1. $\mathbb{M} = \cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)$;

2. Para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathcal{C}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são holomorfas.

As variedades complexas de dimensão n são variedades reais de dimensão $2n$.

1.2 Campos de Vetores

Definição 1.2.1. Um campo de vetores tangentes X definido em um aberto $\mathbf{U}$ de uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ é uma correspondência que a cada ponto $p \in \mathbf{U}$ associa um vetor $X(p) \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de $\mathbf{U}$ no fibrado tangente $\mathbb{TM}$. O campo é diferenciável se a aplicação $X : \mathbf{U} \to \mathbb{TM}$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.1}$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é a base associada a x, $i = 1, \ldots, n$. X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, para qualquer) parametrização.

Às vezes é conveniente utilizar a idéia sugerida por 1.1 e pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathfrak{D} \to \mathfrak{F}$ do conjunto $\mathfrak{D}$ das funções diferenciáveis em $\mathbb{M}$ no conjunto $\mathfrak{F}$ das funções em $\mathbb{M}$, definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \tag{1.2}$$

onde f indica, por abuso de notação, a expressão de f na parametrização x. Observamos que esta idéia de vetor como derivada direcional foi precisamente a maneira como definimos a noção de vetor tangente. É imediato verificar, que a função Xf obtida em 1.2 não depende da escolha da parametrização x. Neste contexto, verificar-se facilmente que X é diferenciável se e só se $X : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$, isto é, $Xf \in \mathfrak{D}$ para todo $f \in \mathfrak{D}$.

A interpretação de X com um operador em $\mathfrak{D}$ permite-nos considerar os interados de X. Por exemplo, se X e Y são campos diferenciáveis em $\mathbb{M}$ e $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Em geral, tais operações não conduzem a campos vetoriais, por envolverem derivadas de ordem superior à primeira. Entretanto, podemos afirmar o seguinte.

Lema 1.2.1. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, $Zf = (XY - YX)f$.

Definição 1.2.2. O campo vetorial Z dado pelo Lema anterior é chamado colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y; Z é evidentemente diferenciável.

1.3 Métricas Riemannianas

Definição 1.3.1. Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in \mathbb{M}$ um produto interno $\langle\ \rangle_p$ (isto é uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, \ldots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\rangle_p = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ é uma função diferenciável em U. É comum omitir o índice p em $<,>$ sempre que não houver a possibilidade de confusão. As funções g_{ij} são chamadas de expessão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}$.

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de $\mathbb{M}$, a função $\langle X\ , Y\rangle$ é diferenciável em V. Uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$, munida de uma métrica Riemanniana é chamada de Variedade Riemanniana. Uma variedade Riemanniana de dimensão 2 é chamada superfície Riemanniana.

1.4 Imersões Isométricas

Definição 1.4.1. Sejam $\mathbb{M}$ e $\overline{\mathbb{M}}$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\psi : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}$ é um difeomorfismo se ela é bijetiva, diferenciável e sua inversa ψ^{-1} é diferenciável.

Definição 1.4.2. Sejam $\mathbb{M}$ e $\overline{\mathbb{M}}$ variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}$ é chamado uma isometria se:

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)} \text{para todo } p \in \mathbb{M},\ u, v \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}.$$

Se existe uma isometria entre $\mathbb{M}$ e $\overline{\mathbb{M}}$ diz-se que tais variedades são isométricas.

Seja $\mathbf{U}$ um aberto de $\mathbb{M}$. Um difeomorfismo $\psi : \mathbf{U} \to \psi(\mathbf{U}) \subset \overline{\mathbb{M}}$ satisfazendo a condição da definição 1.4.2, diz-se uma isometria local. Neste caso, $\mathbb{M}$ é localmente isométrica a $\overline{\mathbb{M}}$.

Definição 1.4.3. Sejam $\mathbb{M}^n$ e $\overline{\mathbb{M}}^m$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\psi : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}$ é uma imersão se $d\psi_p : \mathbb{T}_p\mathbb{M} \to \mathbb{T}_{\psi(p)}\overline{\mathbb{M}}$ é injetiva para todo $p \in \mathbb{M}$.

Observe que se ψ é uma imersão então $m \geq n$ e a diferença $k = m - n$ é chamada codimensão da imersão.

Definição 1.4.4. Seja $\psi : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}$ uma imersão de uma variedade diferenciável de dimensão n em uma variedade diferenciável de dimensão $k = m - n$. Se $\overline{\mathbb{M}}$ tem uma estrutura Riemanniana, ψ induz de maneira natural uma estrutura Riemanniana em $\mathbb{M}$ dado por

$$< v_1, v_2 >_p = < d\psi_p v_1, d\psi_p v_2 >_{\psi(p)},$$

$v_1, v_2 \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}$ e $p \in \mathbb{M}$. Como a diferencial $d\psi$ é injetiva, $<,>$ é positivo definido . As demais condições da definição 1.3.1 são verificadas facilmente. A métrica de $\mathbb{M}$ é chamada de métrica induzida por ψ, e ψ é uma imersão isométrica de $\mathbb{M}$ em $\overline{\mathbb{M}}$.

1.5 Conexões Afins e Riemannianas

No que segue, indicaremos por $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ *o anel das funções reais diferenciáveis definidas em abertos de* $\mathbb{M}$ *e* $\mathfrak{X}(\mathbb{M})$ *o conjunto dos campos de vetores definidos em abertos de* $\mathbb{M}$.

Definição 1.5.1. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \to \mathfrak{X}(\mathbb{M})$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, e que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$
ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$
iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$ onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$.

A parte (iii) da definição anterior nos permite mostrar que a noção de conexão afim é, de fato, uma noção local. Seja $(\mathbf{U}, x)$ um sistema de coordenadas locais em torno de um ponto $p \in \mathbb{M}$

$$x : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}.$$

Escrevendo $X = \sum_i x_i X_i, Y = \sum_j y_j X_j$, onde $X_i = \frac{\partial}{\partial_{x_i}}$ teremos:

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i} (\sum_j y_j X_j) = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_i) X_j.$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k$, onde Γ^k_{ij} são chamados de coeficientes da conexão ∇ em $\mathbf{U}$ ou os símbolos de Christoffel da conexão. Concluímos que Γ^k_{ij} são funções diferenciáveis definidas em $\mathbf{U}$ e que

$$\nabla_X Y = \sum_k (\sum_{ij} x_i y_i \Gamma^k_{ij} + X(y_k)) X_k,$$

o que mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p), y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X.

Proposição 1.5.1. Seja $\mathbb{M}$ uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to \mathbb{M}$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:

i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.
iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Definição 1.5.2. Seja $\mathbb{M}$ uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to \mathbb{M}$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.5.2. Seja $\mathbb{M}$ uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $c : I \to \mathbb{M}$ uma curva diferenciável em $\mathbb{M}$ e V_0 um vetor tangente a $\mathbb{M}$ em $c(t_0)$, $t_0 \in I$, isto é, $V_0 \in \mathbb{T}_{c(t_0)}\mathbb{M}$. Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$; $V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c.

Definição 1.5.3. Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma conexão afim ∇ em $\mathbb{M}$ é:
a) simétrica, se $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$.
b) compatível com a métrica Riemanniana, se $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$.

Teorema 1.5.1. (Levi-Cevita) Dada uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}$, existe uma única conexão afim ∇ em $\mathbb{M}$ satisfazendo as condições:
i) ∇ é simétrica;
ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.
A conexão acima é chamada de conexão de Levi-Cevita ou conexão Riemanniana de $\mathbb{M}$.

Demonstração.

Suponhamos inicialmente a existência de uma tal conexão ∇. Então

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle,$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle,$$

Somando as duas primeiras igualdades, adicionando $\langle \nabla_Y X, Z\rangle - \langle \nabla_Y X, Z\rangle$, subtraindo a terceira e usando a simetria de ∇, teremos

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle \\ &- \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

A equação 1.3 mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica $\langle , \rangle$. Logo, caso exista, ela será única.

Para mostrar a existência, defina ∇ pela equação 1.3. Mostra-se facilmente que ∇ está bem definida e satisfaz às propriedades desejadas.

Para uso posterior escreveremos parte do que foi feito acima através de um sistema de coordenadas $(\mathbf{U}, x)$. Pela equação 1.3 e pela simetria da conexão teremos:

$$\langle X_k, \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l\rangle = \frac{1}{2}\{X_j\langle X_i, X_k\rangle + X_i\langle X_k, X_j\rangle - X_k\langle X_j, X_i\rangle\}$$

Logo,

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\} g^{km}.$$

Onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle$ e $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa que denotaremos por (g^{km}), teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\} g^{km} \tag{1.4}$$

que é a expressão clássica dos simbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij} dados pela métrica. Este resultado será usado na secção 1.7.

1.6 Curvatura

Definição 1.6.1. A curvatura $\mathbf{R}$ de uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}$ é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ uma aplicação

$$\mathbf{R}(X,Y) : \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{M}),$$

dada por:

$$\mathbf{R}(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de $\mathbb{M}$.

Exemplo 1. Seja $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$, então $\mathbf{R}(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Indicaremos por $Z = (z_1, ..., z_n)$ as coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$, então $\nabla_Y Z = (Yz_1, ..., Yz_n)$ *e* $\nabla_X Z = (Xz_1, ..., Xz_n)$. Logo:

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, ..., YXz_n), \ \nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, ..., XYz_n)$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]z_1, ..., [X,Y]z_n).$$

Portanto,

$$\mathbf{R}(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

Proposição 1.6.1. A curvatura $\mathbf{R}$ de uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}$ satifaz as seguintes propriedades:

$i)$ $\mathbf{R}$ é bilinear em $\mathfrak{X}(\mathbb{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{M})$, isto é,

$$\mathbf{R}(fX_1 + gX_2, Y_1) = f\mathbf{R}(X_1, Y_1) + g\mathbf{R}(X_2, Y_1),$$

$$\mathbf{R}(X_1, fY_1 + gY_2) = f\mathbf{R}(X_1, Y_1) + g\mathbf{R}(X_1, Y_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{M}), \ X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$.

ii) Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$, o operador curvatura

$$\mathbf{R}(X, Y) : \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \to \mathfrak{X}(\mathbb{M})$$

é linear, isto é,

$$\mathbf{R}(X, Y)(Z + W) = \mathbf{R}(X, Y)Z + \mathbf{R}(X, Y)W,$$

$$\mathbf{R}(X, Y)fZ = f\mathbf{R}(X, Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(\mathbb{M}),\ Z, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$.

Proposição 1.6.2. (Primeira Identidade de Bianchi)

$$\mathbf{R}(X, Y)Z + \mathbf{R}(Y, Z)X + \mathbf{R}(Z, X)Y = 0$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$

Proposição 1.6.3. Para todo $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ são válidas as relações

a) $\langle \mathbf{R}(X, Y)Z, T\rangle + \langle \mathbf{R}(Y, Z)X, T\rangle + \langle \mathbf{R}(Z, X)Y, T\rangle = 0$.
b) $\langle \mathbf{R}(X, Y)Z, T\rangle = -\langle \mathbf{R}(Y, X)Z, T\rangle$.
c) $\langle \mathbf{R}(X, Y)Z, T\rangle = -\langle \mathbf{R}(X, Y)T, Z\rangle$.
d) $\langle \mathbf{R}(X, Y)Z, T\rangle = \langle \mathbf{R}(Z, T)X, Y\rangle$.

1.7 Curvatura Seccional

Definição 1.7.1. Sejam $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana, $p \in \mathbb{M}$, $\rho \subset \mathbb{T}_p\mathbb{M}$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente e $\{x, y\}$ uma base qualquer de ρ. Definiremos por curvatura seccional de ρ em p ao número real

$$\mathbf{K}(x, y) = \frac{\langle \mathbf{R}(x, y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2} = \mathbf{K}(\rho),$$

onde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$, representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $x, y \in \rho$.

Escreveremos por simplicidade, $\langle \mathbf{R}(x, y)z, t\rangle = (x, y, z, t)$.

Lema 1.7.1. Seja $\mathbf{V}$ um espaço vetorial n-dimensional ($n \geq 2$), munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Sejam $\mathbf{R} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ e $\mathbf{R}^{'} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicações tri-lineares tais que as condições (a), (b), (c) e (d) da proposição 1.6.3 sejam satisfeitas para

$$(x, y, z, t) =< \mathbf{R}(x, y)z, t >$$

e

$$(x, y, z, t)^{'} =< \mathbf{R}^{'}(x, y)z, t > .$$

Se $\{x, y\}$ é uma base de ρ, escrevamos

$$\mathbf{K}(\rho) = \frac{\langle \mathbf{R}(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}, \quad \mathbf{K}'(\rho) = \frac{\langle \mathbf{R}^{'}(x, y)x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}.$$

Se para todo $\rho \subset \mathbf{V}$, $\mathbf{K}(\rho) = \mathbf{K}'(\rho)$, então $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{'}$.

Proposição 1.7.1. Sejam $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana e p um ponto de $\mathbb{M}$. Defina uma aplicação trilinear $\mathbf{R}^{'} : \mathbb{T}_p\mathbb{M} \times \mathbb{T}_p\mathbb{M} \times \mathbb{T}_p\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{T}_p\mathbb{M}$ por

$$\langle \mathbf{R}^{'}(X, Y)Z, W \rangle = \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle,$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}$. Então $\mathbb{M}$ tem curvatura seccional constante igual a K_o se e somente se $\mathbf{R} = K_o\mathbf{R}^{'}$, onde $\mathbf{R}$ é a curvatura de $\mathbb{M}$.

Corolário 1.7.1. Sejam $\mathbb{M}^n$ uma variedade Riemanniana de dimensão n, p um ponto de $\mathbb{M}$ e $\{\ell_1, ..., \ell_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$. Escreva

$$\mathbf{R}_{ijk\ell} =< \mathbf{R}(\ell_i, \ell_j)\ell_k, \ell_\ell >, i, j, k, \ell = 1, ..., n.$$

Então $\mathbf{K}(p, \rho) = \mathbf{K}_0$ para todo $\rho \subset \mathbb{T}_p\mathbb{M}$, se e so se

$$\mathbf{R}_{ijk\ell} = \mathbf{K}_0(\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk})$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Em outras palavras, $\mathbf{K}(p, \rho) = \mathbf{K}_0$ para todo $\rho \subset \mathbb{T}_p\mathbb{M}$ se e so se

$$\mathbf{R}_{ijij} = -\mathbf{R}_{ijji} = \mathbf{K}_0$$

para todo $i \neq j$, e $\mathbf{R}_{ijk\ell} = 0$ nos outros casos.

Capítulo 2

Geometria das Subvariedades

2.1 Espaços de Curvatura Constante

As variedades Riemannianas com curvatura seccional constante $\mathbb{Q}^n_{\mathbf{K}}$ são as mais simples e estão relacionadas com as geometrias euclidiana e não-euclidiana clássica. Estas variedades possuem como propriedade importante um número sulficientemente grande de isometrias locais, isto significa que neste espaço é sempre possível deslocar isometricamente dois triângulos e colocá-los em posições diferentes isometricamente.

Segundo o Teorema de Cartan [2] as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexa com curvatura seccional constante são o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ com curvatura seccional $\mathbf{K} \equiv 0$,ver exemplo 1, a esfera unitária $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura seccional $\mathbf{K} \equiv 1$,ver exemplo 3, e o espaço hiperbólico $\mathbf{H}^n$ de dimensão n, mostraremos a seguir, que possui curvatura seccional constante igual a $\mathbf{K} \equiv -1$.

Considere o semi-espaço do $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathbf{H}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}.$$

Introduza em $\mathbf{H}^n$ a métrica

$$g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial_{ij}}{x_n^2}. \tag{2.1}$$

Para iniciarmos o cálculo da curvatura de $\mathbf{H}^n$ parte do cálculo pode ser feito numa situação mais geral:

Definição 2.1.1. Duas métricas $<,>$ e $<<,>>$ em uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ são conformes se existe uma função $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, positiva, tal que para todo $p \in \mathbb{M}$ e todo $u, v \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}$ se tenha:

$$< u, v >_p = f(p) << u, v >>_p .$$

A métrica 2.1 de $\mathbf{H}^n$ é conforme à métrica usual do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$.
Consideremos em 2.1 $x_n = F$. Logo:

$$g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial_{ij}}{F^2},$$

onde F é uma função positiva diferenciável em $\mathbf{H}^n$.
Indicaremos a matriz inversa de g_{ij} por:

$$g^{ij} = F^2 \partial_{ij}$$

e faremos $\log F = f$.
Derivando $\log F = f$ em relação a j teremos:

$$\frac{F_j}{F} = \frac{\partial}{\partial x_j} f.$$

Façamos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f = f_j$$

Portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} &= -\partial_{ik} \frac{2F_j}{F^3} \\
&= -\partial_{ik} \frac{2F_j}{F} \frac{1}{F^2} \\
&= -2 \frac{\partial_{ik}}{F^2} f_j.
\end{aligned}$$

Para o cálculo dos símbolos de Christoffel, observemos que

$$g^{mk} = F^2 \partial_{mk}.$$

Usando o resultado 1.4 teremos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_m \{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \} g^{mk} \\
&= \frac{1}{2} \sum_m \{ -2 \frac{\partial_{jm}}{F^2} f_i - 2 \frac{\partial_{mi}}{F^2} f_j + 2 \frac{\partial_{ij}}{F^2} f_m \} F^2 \partial_{mk} \\
&= \{ -\partial_{jm} f_i - \partial_{mi} f_j + \partial_{ij} f_m \} \partial_{mk} \\
&= \{ -\partial_{jk} f_i - \partial_{ki} f_j + \partial_{ij} f_k \} \partial_{kk} \\
&= \{ -\partial_{jk} f_i - \partial_{ki} f_j + \partial_{ij} f_k \}.
\end{aligned}$$

Portanto, se os três índices forem distintos obtemos:

$$\Gamma_{ij}^k = 0$$

e se dois índices são iguais, teremos:

$$\Gamma_{ij}^i = -f_j; \Gamma_{ii}^j = f_j; \Gamma_{ij}^j = -f_i; \Gamma_{ii}^i = -f_i.$$

Para o cálculo dos coeficientes da curvatura, observemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ijij} &= \sum_\ell \mathbf{R}_{iji}^\ell g_{\ell j} = \mathbf{R}_{iji}^j g_{jj} = \mathbf{R}_{iji}^j \frac{1}{F^2} \\ &= \frac{1}{F^2}\{\sum_\ell \Gamma_{ii}^\ell \Gamma_{j\ell}^j - \sum_\ell \Gamma_{ji}^\ell \Gamma_{i\ell}^j + \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^j\}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ii}^j = f_{jj}$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^j = -f_{ii}$ teremos:

$$\begin{aligned} F^2\mathbf{R}_{ijij} &= -\sum_\ell^{\ell\neq i,\ell\neq j} f_\ell f_\ell + f_i^2 - f_j^2 - f_i^2 + f_j^2 + f_{jj} + f_{ii} \\ &= -\sum_\ell f_\ell^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{R}_{ijk\ell} = 0$ se os quatro índices forem distintos, e se os três índices forem distintos , teremos:

$$\mathbf{R}_{ijk}^i = -f_k f_j - f_{kj}; \mathbf{R}_{ijk}^j = f_i f_k + f_{ki}; \mathbf{R}_{ijk}^k = 0. \tag{2.2}$$

Calculando a curvatura seccional do plano gerado por $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} &= \frac{\mathbf{R}_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = \mathbf{R}_{ijij}F^4 \\ &= (-\sum_\ell f_\ell^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj})F^2. \end{aligned}$$

Particularizando para o caso $F^2 = x_n^2$, o que implica $\log x_n = f$, obtemos para $i \neq n$ e $j \neq n$

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{1}{x_n^2}x_n^2 = -1.$$

Se $i = n, j \neq n$, teremos

$$\mathbf{K}_{nj} = (-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn})F^2 = \frac{-1}{x_n^2}x_n^2 = -1.$$

Se $i \neq j, j = n$ teremos

$$\mathbf{K}_{in} = -1.$$

Usando 2.2 e o corolário 1.7.1, concluímos que a curvatura seccional de $\mathbf{H}^n$ é constante igual a -1.

2.2 Fórmula de Weingarten

Seja $\psi : \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{M}}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Então para cada $p \in \mathbb{M}$ existe uma vizinhança $\mathbf{U} \subset \mathbb{M}$ de p tal que $\psi(\mathbf{U}) \subset \overline{\mathbb{M}}$ é uma subvariedade. Identificaremos $\mathbf{U}$ como $\psi(\mathbf{U})$ e usando o fato que toda imersão é localmente um mergulho, podemos decompor $\mathbb{T}_{\psi(p)}\overline{\mathbb{M}}$ na soma direta

$$\mathbb{T}_{\psi(p)}\overline{\mathbb{M}} = \mathbb{T}_p\mathbb{M} \oplus (\mathbb{T}_p\mathbb{M})^{\perp},$$

onde $\mathbb{T}_p\mathbb{M}^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$ em $\mathbb{T}_{\psi}(p)\overline{\mathbb{M}}$.

Definição 2.2.1. Um campo vetorial normal ξ definido em conjunto aberto de uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}$ é uma regra que a cada ponto $p \in \mathbb{M}$ associa um vetor $\xi_p \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}^{\perp}$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(\mathbb{M})^{\perp}$ o conjunto de todos os campos vetoriais normais diferenciáveis da imersão ψ.

Se $\xi \in \mathbb{T}\mathbb{M}^{\perp}$ e $X, Y \in \mathbb{T}\mathbb{M}$ podemos determinar :

$$\overline{\nabla}_X\xi = -\mathcal{A}_X\xi + \nabla_X^{\perp}\xi, (\textit{Fórmula de Weingarten}),$$

onde $\nabla^{\perp}$ é a conexão normal do fibrado normal; $-\mathcal{A}_X\xi$ é a componente tangente e $\nabla_X^{\perp}\xi$ é a camponente normal de $\overline{\nabla}_X\xi$.

A aplicação $\mathcal{A}_{\xi} : \mathbb{T}\mathbb{M} \to \mathbb{T}\mathbb{M}$ é chamada *Operador de Weingarten* e é linear e simétrica sobre $\mathcal{D}(\mathbb{M})$, ou seja, $\langle \mathcal{A}_{\xi}X, Y\rangle = \langle X, \mathcal{A}_{\xi}Y\rangle$ para todo $X, Y \in \mathbb{T}\mathbb{M}$.

De maneira análoga ao fibrado tangente, introduz-se a partir de $\nabla^{\perp}$ uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada de curvatura normal definida por:

$$\mathbf{R}^{\perp}(X, Y)\xi = \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}\xi - \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}\xi - \nabla_{[X,Y]}^{\perp}\xi.$$

2.3 Segunda Forma Fundamental

Com as identificações naturais quando $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ a componente tangente de $\overline{\nabla}_X Y$ coincide com a conexão de $\mathbb{M}$ e componente normal da origem a aplicação:

$$\alpha : \mathbb{TM} \times \mathbb{TM} \to \mathbb{TM}^{\perp},$$

definida por:

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

chamada de segunda forma fundamental da imersão ψ. Chamaremos de Fórmula de Gauss a seguinte igualdade:

$$\overline{\nabla}_X Y = \alpha(X, Y) + \nabla_X Y.$$

Definição 2.3.1. Dada uma imersão isométrica $\psi : \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{M}}^{n+q}$, o vetor curvatura média no ponto p em $\mathbb{M}$ é o vetor normal a $\mathbb{M}$ em p definido por:

$$\mathbb{H}(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i, X_i).$$

onde $X_1, ..., X_n$ é uma base ortonormal de $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$. Observamos que para qualquer conjunto de vetores ortonormais $\xi_1, ..., \xi_q \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}$, temos:

$$\mathbb{H}(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\text{traço} \mathcal{A}_{\xi_j}) \xi_i,$$

portanto, o vetor curvatura média não depende da base tangente.

Definição 2.3.2. Dizemos que ψ possui vetor curvatura média paralelo quando $\nabla_X^{\perp} \mathbb{H} = 0$ para todo $X \in \mathbb{TM}$. Conseqüêntemente, $\|\mathbb{H}\|$ é constante ao longo de $\mathbb{M}$.

Definição 2.3.3. Dizemos que a imersão ψ é mínima em $p \in \mathbb{M}$ quando $\mathbb{H}(p) = 0$. A imersão ψ é mínima quando é mínima para todo ponto de $\mathbb{M}$.

Um caso especial ocorre quando a segunda forma fundamental é nula em um ponto $p \in \mathbb{M}$. Então ψ é dita totalmente geodésica em $p \in \mathbb{M}$. Dizemos que ψ é uma imersão totalmente geodésica quando é totalmente geodésica para todo ponto de $\mathbb{M}$.

Proposição 2.3.1. Uma imersão isométrica $\psi : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}^{n+k}$ é dita umbílica em $p \in \mathbb{M}$ quando $A_\xi = \lambda_\xi I$ para todo $\xi \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}^\perp$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e I é a aplicação identidade em $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$.

Proposição 2.3.2. Uma imersão é umbílica se é umbílica em todos os pontos de $\mathbb{M}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) ψ é umbílica em $p \in \mathbb{M}$,

(ii)$\alpha(X,Y) =< X, Y > \mathbb{H}(p)$, para todo $X, Y \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}$,

(iii)$\mathcal{A}_\xi =< \xi, \mathbb{H}(p) > I$ para todo $\xi \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}^\perp$.

2.4 Equações Básicas de uma Imersão Isométrica

Através das fórmulas de Gauss e Weingarten determinamos as equações Gauss, Codazzi e Ricci, que são as equações básicas de uma imersão isométrica.

Lembramos que se $\overline{\mathbb{M}}$ tem curvatura seccional constante igual a $\mathbf{k}_0$, então o tensor curvatura $\overline{\mathbf{R}}$ tem a expressão:

$$\overline{\mathbf{R}}(X,Y)Z = k_0(< Y, Z > X - < X, Z > Y),$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ e $< \, , \, >$ é a métrica de $\overline{\mathbb{M}}$.

Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$, pelas Fórmulas de Gauss e Weingarten teremos:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z &= \overline{\nabla}_Y(\alpha(X,Z) + \nabla_X Z) \\ &= \overline{\nabla}_Y \alpha(X,Z) + \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z \\ &= \nabla^\perp_Y \alpha(X,Z) - \mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X(\alpha(Y,Z) + \nabla_Y Z) \\ &= \overline{\nabla}_X \alpha(Y,Z) + \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z \\ &= \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z). \end{aligned}$$

Novamente pela Fórmula de Gauss,

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X,Y], Z)$$

Calculando

$$\overline{\mathbf{R}}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z$$

Tem-se:

$$\overline{\mathbf{R}}(X,Y)Z = \mathbf{R}(X,Y)Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \alpha([X,Y],Z)$$

$$-\mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X + \mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y\alpha(X,Z), \qquad (2.3)$$

onde $\mathbf{R}$ e $\overline{\mathbf{R}}$ são os tensores curvatura de $\mathbb{M}$ e $\overline{\mathbb{M}}$, respectivamente.

Tomando em 2.3 o produto interno com $W \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ teremos:

$\langle\overline{\mathbf{R}}(X,Y)Z,W\rangle \;=\; \langle\mathbf{R}(X,Y)Z,W\rangle - \langle\mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle + \langle\mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle$, portanto:

$$\langle\mathbf{R}(X,Y)Z,W\rangle \;=\; \overline{\mathbf{R}}(X,Y)Z,W\rangle + \langle\mathcal{A}_{\alpha(Y,Z)}X,W\rangle - \langle\mathcal{A}_{\alpha(X,Z)}Y,W\rangle.$$

Sabendo que:

$$< \mathcal{A}_\xi X, Y > \;=\; < \xi, \alpha(X,Y) >$$

Obtemos a *Equação de Gauss:*

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{R}(X,Y)Z,W\rangle \;&=\; \langle\overline{\mathbf{R}}(X,Y)Z,W\rangle + \langle\alpha(Y,Z),\alpha(X,W)\rangle + \\ &\quad -\langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle.\end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathbf{K}(X,Y) = \langle\mathbf{R}(X,Y)Y,X\rangle$ e $\overline{\mathbf{K}}(X,Y) = \langle\overline{\mathbf{R}}(X,Y)Y,X\rangle$ as curvaturas seccionais em $\mathbb{M}$ e $\overline{\mathbb{M}}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X,Y \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}$, então a equação de Gauss torna-se:

$$\mathbf{K}(X,Y) = \overline{\mathbf{K}}(X,Y) + \langle\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle - \langle\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle$$

Seja $\psi : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$

$$\psi : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$$

uma imersão isométrica e $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{n+m}(= \overline{\mathbb{TM}})$. Portanto, o tensor curvatura $\overline{\mathbf{R}}$ de $\mathbb{R}^{n+m}$ é:

$$\overline{\mathbf{R}}(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

Portanto, a equação de Gauss torna-se:

$$< \mathbf{R}(X,Y)Z, W >=< \alpha(X,W), \alpha(Y,Z) > - < \alpha(X,Z), \alpha(Y,W) > .$$

Por outro lado, tomando a componente normal de $\overline{\mathbf{R}}$ em 2.3 e usando a definição de derivada da segunda forma fundamental dado por :

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z),$$

determinaremos a *Equação de Codazzi*:

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathbf{R}}(X,Y)Z)^{\perp} &= (\mathbf{R}(X,Y)Z)^{\perp} + \alpha(X, \nabla_Y Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \\
&\quad -\alpha([X,Y],Z) + \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) \\
&= \alpha(X, \nabla_Y Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\
&\quad +\nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) \\
&= \alpha(X, \nabla_Y Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) + \\
&\quad \alpha(\nabla_Y X, Z) + \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) \\
&= \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \\
&\quad -(\nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z))
\end{aligned}$$

logo

$$(\overline{\mathbf{R}}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z) \quad .$$

Desde que, $(\overline{\mathbf{R}}(X,Y)Z)^{\perp} = 0$, *obtemos a Equação de Codazzi*

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) \quad = \quad (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z)$$

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ e $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})^{\perp}$, usando a definição de tensor curvatura e utilizando as fórmulas de Gauss e Weingartein obtemos:

$$\overline{\mathbf{R}}(X,Y)\xi \quad = \quad \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \xi - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \xi - \overline{\nabla}_{[X,Y]} \xi$$

Onde:

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\xi &= \overline{\nabla}_Y(-\mathcal{A}_\xi X)+\overline{\nabla}_Y\nabla^\perp_X\xi\\ &= \alpha(Y,-\mathcal{A}_\xi X)+\nabla_Y(-\mathcal{A}_\xi X)-\mathcal{A}_{\nabla^\perp_X\xi}Y+\nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\xi &= \overline{\nabla}_X(-\mathcal{A}_\xi Y)+\overline{\nabla}_X\nabla^\perp_Y\xi\\ &= \alpha(X,-\mathcal{A}_\xi Y)+\nabla_X(-\mathcal{A}_\xi Y)-\mathcal{A}_{\nabla^\perp_Y\xi}X+\nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi,\end{aligned}$$

e

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi \;= -\mathcal{A}_\xi[X,Y]+\nabla^\perp_{[X,Y]}\xi,$$

ou seja,

$$\overline{\mathbf{R}}(X,Y)\xi=\mathbf{R}^\perp(X,Y)\xi+\alpha(X,-\mathcal{A}_\xi Y)+\nabla_X(-\mathcal{A}_\xi Y)-\mathcal{A}_{\nabla^\perp_Y\xi}X$$

$$-\alpha(Y,-\mathcal{A}_\xi X)-\nabla_Y(-\mathcal{A}_\xi X)+\mathcal{A}_{\nabla^\perp_X\xi}Y+\mathcal{A}_\xi[X,Y], \tag{2.4}$$

Tomando em 2.4 o produto interno por $\eta\in\mathfrak{X}(\mathbb{M})^\perp$ obtemos a *Equação de Ricci:*

$$\begin{aligned}\langle\overline{\mathbf{R}}(X,Y)\xi,\eta\rangle &= \langle\mathbf{R}^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle-\langle\alpha(X,\mathcal{A}_\xi Y),\eta\rangle+\langle\alpha(Y,\mathcal{A}_\xi X),\eta\rangle\\ &= \langle\mathbf{R}^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle-\langle\mathcal{A}_\eta X,\mathcal{A}_\xi Y\rangle+\langle\mathcal{A}_\eta Y,\mathcal{A}_\xi X\rangle\\ &= \langle\mathbf{R}^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle-\langle\mathcal{A}_\xi\mathcal{A}_\eta X,Y\rangle+\langle Y,\mathcal{A}_\eta\mathcal{A}_\xi X\rangle\\ &= \langle\mathbf{R}^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle-\langle[\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta]X,Y\rangle\end{aligned}$$

onde $[\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta]=\mathcal{A}_\xi\mathcal{A}_\eta-\mathcal{A}_\eta\mathcal{A}_\xi$.

Quando $\overline{\mathbb{M}}$ tem curvaura seccional constante temos que $\overline{\mathbf{R}}(X,Y)\xi=0$, logo obtemos a *Equação de Ricci:*

$$<\mathbf{R}^\perp(X,Y)\xi,\eta>=<[\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta]X,Y>.$$

Segue da Equação de Ricci que $\mathbf{R}^\perp=0$ se e somente se $[\mathcal{A}_\xi,\mathcal{A}_\eta]=0$ para todo ξ,η, isto é, existe uma base de $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$ que diagonaliza simultâneamente todo $\mathcal{A}_\xi$.

No caso de hipersuperfícies $\psi : \mathbb{M}^n \to \overline{M}^{n+1}$, a equação de Gauss se expressa de forma mais simples. Sejam $p \in \mathbb{M}$ e $\eta \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}^{\perp}$, $|\eta| = 1$, e $\{e_1, ..., e_n\}$ a base ortonormal de $\mathbb{T}_p\mathbb{M}^n$ que diagonaliza o operador de Weingarten, isto é, $\mathcal{A}(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, ..., n$, onde os auto-valores $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são chamados de curvaturas principais da hipersuperfície e os ℓ_i são as direções principais. Então se $i \neq j$

$$\mathbf{K}(e_i, e_j) - \overline{\mathbf{K}}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

De fato

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(e_i), e_j \rangle &= \langle \alpha(e_i, e_j), \eta \rangle \\ \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle &= \langle \alpha(e_i, e_j), \eta \rangle \\ 0 &= \langle \alpha(e_i, e_j), \eta \rangle, \text{ logo } \alpha(e_i, e_j) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \alpha(e_i, e_i), \alpha(e_j, e_j) \rangle &= \langle \langle \alpha(e_i, e_i), \eta \rangle \eta, \ \langle \alpha(e_j, e_j), \eta \rangle \eta \rangle \\ &= \langle \alpha(e_i, e_i), \eta \rangle \langle \alpha(e_j, e_j), \eta \rangle \langle \eta, \eta \rangle \\ &= \lambda_i \lambda_j. \end{aligned}$$

Exemplo 2. Vamos utlilizar este resultado para provar que a curvatura seccional da esfera unitária $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é constante 1.

Orientando $\mathbf{S}^n$ pelo campo normal unitário $N(y) = -y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|y| = 1$, teremos que a aplicação normal de Gauss é igual a $(-I)$, onde I é a identidade de $\mathbf{S}^n$. Portanto $\mathcal{A}$ tem todos os seus valores próprios iguais a 1. Isto significa que para todo $p \in \mathbf{S}^n$, todo $v \in \mathbb{T}_p\mathbf{S}^n$ é um vetor próprio. Usando a equação de Gauss, mostra-se que qualquer curvatura seccional de $\mathbf{S}^n$ é igual a 1.

Capítulo 3

Redução de Codimensão

Neste capítulo introduziremos a noção de fibrados e subfibrados vetoriais. Em seguida, demonstraremos o teorema de Erbacher 3.2.1, que é básico na teoria de redução de codimensão de superfícies imersas em espaços de curvatura constante.

Dizemos que uma imersão $x : \mathbb{M}^n \to \mathbb{Q}^{n+\ell}$ *admite redução de codimensão para* $q < \ell$ *se existir uma subvariedade totalmente geodésica* $\mathbb{Q}^{n+q} \subset \mathbb{Q}^{n+\ell}$*, tal que* $x(\mathbb{M}) \subset \mathbb{Q}^{n+q}$*. A imersão* x *é substancial se a codimensão da imersão não puder ser reduzida. Esta menor codimensão é chamada de codimensão substancial de* x*.*

3.1 Fibrados Vetoriais e Riemannianos

Definição 3.1.1. Sejam $\mathbb{E}$ e $\mathbb{M}$ variedades diferenciáveis e seja $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ é um fibrado vetorial de dimensão k quando, para cada ponto $p \in \mathbb{M}$,

(i) $\pi^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão k.

(ii) existe uma vizinhança aberta U de p em $\mathbb{M}$ e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a $\pi^{-1}(q)$ é um isomorfismo sobre $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, para cada $q \in U$.

Dado um fibrado vetorial $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ e um subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ tal que a restrição $\pi|_{\mathbb{F}} : \mathbb{F} \to \mathbb{M}$ é também um fibrado vetorial, dizemos que $\mathbb{F}$ é um subfibrado vetorial de $\mathbb{E}$ se a inclusão leva $(\pi|_{\mathbb{F}})^{-1}(p)$ linearmente sobre $\pi^{-1}(p)$, para todo $p \in \mathbb{M}$.

Exemplo 3. O Espaço Fibrado Tangente. Seja $\mathbb{M}$ uma variedade diferenciável de dimensão n. Para cada $p \in \mathbb{M}$ seja $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$ o espaço de vetores tangentes a $\mathbb{M}$ em p, e $\mathbb{TM} = \{(p, v_p)/p \in \mathbb{M}, v_p \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}\}$. Se $\pi : \mathbb{TM} \to \mathbb{M}$ é dado por $\pi(p, v_p) = p$ então π é um fibrado vetorial.

Exemplo 4. Espaço Fibrado Normal. Sejam $<, >$ uma métrica riemanniana em $\mathbb{M}^m$ e $\mathbb{N}^n \subset \mathbb{M}^m$ uma subvariedade de $\mathbb{M}$. Dado $p \in \mathbb{M}$, seja $\mathbb{T}_p\mathbb{N}^\perp \subset \mathbb{T}_p\mathbb{M}$ o subespaço de vetores normais a $\mathbb{T}_p\mathbb{N}$; definimos $v(\mathbb{N}) = \{(p, v_p)/p \in \mathbb{N}, v_p \in \mathbb{T}_p\mathbb{N}^\perp\}$ e $\pi : v(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $\pi(p, v_p) = p$. Então π é um fibrado vetorial

Definição 3.1.2. Seja $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ um fibrado vetorial. Para cada $p \in \mathbb{M}$ chamamos o espaço $\mathbb{E}_p = \pi^{-1}(p)$ a fibra de π sobre p. Uma seção local sobre um conjunto aberto $U \subset \mathbb{M}$ é uma aplicação diferenciável $\varepsilon : U \to \mathbb{E}$ tal que $\pi \circ \varepsilon = id_U$; se $U = \mathbb{M}$ dizemos que $\varepsilon : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ é uma seção global ou simplesmente seção de π. Denotaremos por $\Gamma(\pi)$ o conjunto das seções de π.

Definição 3.1.3. Uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ sobre um fibrado vetorial $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ é uma aplicação

$$\langle\ ,\ \rangle : \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to \mathcal{D}(\mathbb{M}),$$

bilinear sobre $\mathcal{D}(\mathbb{M})$, simétrica e positiva definida.

Definição 3.1.4. Um fibrado vetorial $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ munido de uma métrica Riemanniana fixa é chamado fibrado vetorial Riemanniano.

Definição 3.1.5. Seja $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ um fibrado vetorial. Uma conexão linear é uma aplicação $\mathbb{R}-$bilinear

$$\nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$$

$$(X, \varepsilon) \to \nabla_X \varepsilon$$

satisfazendo, para cada $f \in \mathcal{D}(\mathbb{M}),\ X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ e $\varepsilon \in \Gamma(\pi)$, as propriedades

$$\begin{array}{ll} i) & \nabla_{fX}\varepsilon = f\nabla_X\varepsilon, \\ ii) & \nabla_X(f\varepsilon) = X(f)\varepsilon + f\nabla_X\varepsilon. \end{array}$$

Definição 3.1.6. Seja $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ um fibrado vetorial com uma conexão linear ∇. Dizemos que a seção $\varepsilon \in \Gamma(\pi)$ é paralela quando $\nabla_X\varepsilon = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$. Um subfibrado vetorial $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ é dito paralelo se, para toda seção η de $\mathbb{F}$ e todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$, temos que $\nabla_X\eta$ é uma seção de $\mathbb{F}$.

Definição 3.1.7. Seja $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ um fibrado vetorial Riemanniano. Uma conexão linear ∇ é dita compatível com a métrica $\langle\ \rangle$ quando

$$X\langle \varepsilon, \eta \rangle = \langle \nabla_X \varepsilon, \eta \rangle + \langle \varepsilon, \nabla_X \eta \rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ e $\varepsilon, \eta \in \Gamma(\pi)$.

Definição 3.1.8. O tensor curvatura de um fibrado vetorial $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ com conexão linear ∇ é a aplicação $\mathbb{R}-$trilinear

$$R: \quad \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$$

definida por

$$R(X,Y)\varepsilon = \nabla_X \nabla_Y \varepsilon - \nabla_Y \nabla_X \varepsilon - \nabla_{[X,Y]} \varepsilon.$$

Por um abuso de linguagem é comum não nos referirmos à aplicação $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ quando estamos trabalhando com fibrados cuja aplicação é natural, mas sim às variedades $\mathbb{E}$ e $\mathbb{M}$.

3.2 Teorema de Erbacher

Teorema 3.2.1. *[6](Teorema de Erbacher):* Seja $x : \mathbb{M}^n \to \mathbb{Q}_{\mathbf{K}}^{n+\ell}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana n-dimensional $\mathbb{M}$ em uma variedade Riemanniana $(n+\ell)$-dimensional $\mathbb{Q}$. Suponha que existe um subfibrado paralelo $\mathbb{L}$ de $\mathbb{TM}^{\perp}$ de dimensão $q < \ell$, tal que $\mathbb{N}_1(p) \subset \mathbb{L}(p)$ para todo $p \in \mathbb{M}$. Então podemos reduzir a codimensão da imersão para q.

Para demonstrar o teorema de Erbacher usaremos os seguintes lemas:

Lema 3.2.1. *:* Sejam $\mathbb{M}$ e $\overline{\mathbb{M}}$ variedades Riemannianas e $x : \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{M}}^{n+\ell}$ uma imersão isométrica. Se $\mathbb{E}$ é um subfibrado paralelo de $\mathbb{TM}^{\perp}$ e $\mathbb{F}$ é o seu complemento ortogonal em $\mathbb{TM}^{\perp}$ então $\mathbb{F}$ é um subfibrado paralelo de $\mathbb{TM}^{\perp}$.

Demonstração.

Sejam $\xi \in \mathbb{E}$ e $\eta \in \mathbb{F}$ campos diferenciáveis, logo:

$$< \xi, \eta >= 0$$

Derivando em relação ao campo $X \in \mathbb{TM}$ teremos:

$$0 = X < \xi, \eta >=< \nabla^{\perp}_X \xi, \eta > + < \xi, \nabla^{\perp}_X \eta >$$

Como $\mathbb{E}$ é um subfibrado paralelo em $\mathbb{TM}^{\perp}$, $\nabla_X^{\perp}\xi$ não possui componente em $\mathbb{F}$, ou seja,

$$< \nabla_X^{\perp}\xi, \eta >= 0.$$

Portanto:

$$< \xi, \nabla_X^{\perp}\eta >= 0,$$

de onde concluímos que $\nabla_X^{\perp}\eta$ não possui componente em $\mathbb{E}$, ou seja, $\nabla_X^{\perp}\eta \in \mathbb{F}$ para todo $\eta \in \mathbb{F}$, isto é, $\mathbb{F}$ é subfibrado paralelo de $\mathbb{TM}^{\perp}$.

Lema 3.2.2. *:* Seja $x : \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{M}}^{n+\ell}$ e $\gamma : I \to \mathbb{M}$, onde I é um intervalo da reta, tal que $\gamma(0) = p$. Se $\mathbb{E}$ é um subfibrado paralelo de $\mathbb{TM}^{\perp}$, $v_0 \in \mathbb{E}$ e $v(t)$ um campo de vetores paralelos na conexão normal, tal que $v(0) = v_0$. Então $v(t) \in \mathbb{E}$ para todo $t \in I$.

Demonstração.

Por hipótese, $\mathbb{E}$ é um subfibrado paralelo de $\mathbb{TM}^{\perp}$ e $\mathbb{F}$ o complemento ortogonal de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{TM}^{\perp}$ com $v(0) = v_0 \in \mathbb{E}$, queremos mostrar que $v(t) \in \mathbb{E}$ para todo $t \in I$.

Considere um campo de vetores $\omega(\gamma(t)) \in \mathbb{F}$, restrito a γ teremos:

$$< v(0), \omega(\gamma(0)) >= 0$$

Portanto:

$$\gamma'(t) < v(t), \omega(\gamma(t)) >=< \overline{\nabla}_{\gamma'(t)} v(t), \omega(\gamma(t)) > + < v(t), \overline{\nabla}_{\gamma'(t)}\omega(\gamma(t)) >$$

Logo:

$$\gamma'(t) < v(t), \omega(\gamma(t)) >=< v(t), \overline{\nabla}_{\gamma'(t)}\omega(\gamma(t)) >= 0,$$

tendo em vista que $\mathbb{F}$ é paralelo.

Demonstração do teorema de Erbacher:

Analisaremos o caso em que $\mathbf{K} = 0$, ou seja, $\mathbb{Q}^{n+\ell}_{\mathbf{K}} = \mathbb{R}^{n+\ell}$.

Mostraremos que $x(\mathbb{M}) \subset T_p\mathbb{M} \oplus \mathbb{L}$ para $p \in \mathbb{M}$ um ponto arbitrário. Como $\mathbb{L}$ é um subfibrado paralelo de $\mathbb{TM}^{\perp}$, pelo lema 3.2.1, temos que o complemento ortoganal $\mathbb{L}^{\perp}$ de $\mathbb{L}$ também é subfibrado paralelo de $\mathbb{TM}^{\perp}$. Seja $\eta_0 \in \mathbb{L}^{\perp}(p)$ e considere uma curva $\gamma : I \to \mathbb{M}$, onde I é um intervalo da reta, tal que $\gamma(0) = p$. Seja $\eta(t)$ um campo de vetores paralelos na conexão normal tal que $\eta(0) = \eta_0$. Pelo Lema 3.2.2, temos que $\eta(t) \in \mathbb{L}^{\perp}(\gamma(t))t \in I$.

Da Fórmula de Weingarten, obtemos:

$$\overline{\nabla}_{\gamma^{'}(t)}\eta(t) = -\mathbf{A}_{\eta(t)}\gamma^{'}(t) + \nabla^{\perp}_{\gamma^{'}(t)}\eta(t).$$

Como $\eta(t)$ é paralelo, temos que $\nabla^{\perp}_{\gamma^{'}(t)}\eta(t) = 0$ para todo $t \in I$, e para todo $X \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}$ temos:

$$< \mathbf{A}_{\eta(t)}\gamma^{'}(t), X >=< \eta(t), \alpha(\gamma^{'}(t), X) >= 0 \textit{ pois, por hipótese } \mathbb{N}_1(p) \subset \mathbb{L}(p).$$

Como a variedade é conexa e $\overline{\nabla}_{\gamma^{'}(t)}\eta(t) = 0$, temos que $\eta(t)$ é constante.

Sendo $\eta_0 = \eta(0)$, temos que $\eta(t) = \eta_0$ em $\mathbb{R}^{n+\ell}$.

Logo:

$$\frac{d}{dt} < x(\gamma(t) - x(p), \eta_0 >=< d(\gamma^{'}(t)), \eta_0 >= 0.$$

Portanto, $< x(\gamma(t) - x(p), \eta_0 >= 0$ para todo $t \in I$. Como a curva e o vetor $\eta_0 \in \mathbb{L}^{\perp}(p)$ são arbitrários, concluímos que $x(\mathbb{M}) \subset \mathbb{T}_p\mathbb{M} \oplus \mathbb{L}$, que é uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{R}^{n+\ell}$ de dimensão $n + q$.

Para o caso em que $\mathbf{K} > 0$, ou seja $\mathbb{Q}^{n+\ell}_{\mathbf{K}} = \mathbb{S}^{n+\ell}$.

Considere:

$$\widetilde{x} : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}^{n+\ell+1},$$

uma imersão isométrica dada por $\widetilde{x} = iox$, onde $i : \mathbb{S}^{n+\ell} \to \mathbb{R}^{n+\ell+1}$ é a inclusão conônica da esfera no espaço euclideano.

Sejam:

$$\widetilde{\mathbb{T}}_p\mathbb{M}^{\perp} = \mathbb{T}_p^{\perp}\mathbb{M} \oplus ger\{x(p)\},\ \widetilde{\mathbb{L}}(p) = \mathbb{L}(p) \oplus ger\{x(p)\} \text{ e}$$
$$\widetilde{\mathbb{N}}_1 \subset \mathbb{N}_1 \oplus ger\{x(p)\} \text{ onde } \widetilde{\mathbb{N}}_1 \text{ é o primeiro espaço normal de } \widetilde{x} \text{ em p.}$$

Observamos que:

$$\widetilde{\mathbb{N}}_1 \subset \mathbb{L}(p) \oplus ger\{(x(p)\} = \widetilde{\mathbb{L}}(p).$$

Por outro lado, o complemento ortogonal de $\widetilde{\mathbb{L}}$ em $\widetilde{\mathbb{T}\mathbb{M}}^{\perp}$ é igual ao complemento ortogonal de $\mathbb{L}$ em $\mathbb{T}\mathbb{M}^{\perp}$, que é paralelo com relação a conexão normal. Denotando por $\widetilde{\nabla}^{\perp}|_{\widetilde{\mathbb{T}\mathbb{M}}^{\perp}}$ a conexão do fibrado normal $\widetilde{\mathbb{T}\mathbb{M}}^{\perp}$ temos que $\widetilde{\nabla}^{\perp}|_{\widetilde{\mathbb{T}\mathbb{M}}^{\perp}} = \nabla^{\perp}|_{\mathbb{T}\mathbb{M}^{\perp}}$ e portanto, $\widetilde{\nabla}^{\perp}\widetilde{\mathbb{L}} = 0$.

Usando o caso $\mathbf{K} = 0$, podemos reduzir a codimenção da imersão $\widetilde{x}$ para $q+1$.

Observe que:

$$\widetilde{x}(\mathbb{M}) \subset \widetilde{\mathbb{T}}_p\mathbb{M} \oplus \widetilde{\mathbb{L}}(p) = \mathbb{T}_p\mathbb{M} \oplus \mathbb{L} \oplus ger\{x(p)\} = \mathbb{R}_0^{n+q+1}$$

para $p \in \mathbb{M}$, onde $\mathbb{R}^{n+q+1}$ é um subespaço linear afim. Portanto,

$$x(\mathbb{M}) \subset \mathbb{S}^{n+\ell} \cap \mathbb{R}^{n+q+1} \subset \mathbb{S}^{n+q}$$

o que mostra o resultado.

Analisaremos o caso em que $\mathbf{K} < 0$, ou seja, $\mathbb{Q}_{\mathbf{K}}^{n+\ell} = \mathbb{H}^{n+\ell}$.

Para demonstrar este caso procedemos analogamente ao caso $\mathbf{K} > 0$. Considere a imersão $\overline{x} : \mathbb{M} \to \mathbb{L}^{n+\ell+1}$, dada por $\overline{x} = i \circ x$, onde $i : \mathbb{H}_{\mathbf{K}}^{n+\ell} \to \mathbb{L}^{n+\ell+1}$ é a inclusão canônica do espaço hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbf{K}}^{n+\ell}$ no espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+\ell+1}$.

Capítulo 4

Teoremas Principais Sobre Redução de Codimensão

Neste capítulo demonstraremos os resultados principais deste trabalho, que referem-se a redução de codimensão de superfícies imersas em espaços de curvatura constante.

Considere uma imersão $x : \mathbb{M}^2 \to \mathbb{Q}^n$ *de uma variedade 2-dimensional em um espaço com curvatura seccional constante. Dizemos que podemos reduzir a codimensão para* $k < n-2$*, se existir uma subvariedade totalmente geodésica* $(k+2)$*-dimensional* $\mathbb{Q}^{'} \subset \mathbb{Q}$ *tal que* $x(\mathbb{M}) \subset \mathbb{Q}^{'}$*. Vamos equipar* $\mathbb{M}$ *com a métrica induzida. Sejam* $\nabla^{\perp}$ *a conexão do fibrado normal* $\mathbb{TM}^{\perp}$ *e* $\mathbb{H}$ *o vetor curvatura média da imersão, que é metade do traço da segunda forma fundamental.*

Nas demonstrações que seguem, consideremos que o vetor curvatura média está contido em um subfibrado paralelo do fibrado normal. Mostraremos que quando o complemento ortogonal deste subfibrado paralelo é plano, isto é, o tensor curvatura normal restrito ao complemento ortogonal do subfibrado paralelo é identicamente nulo, a codimensão da imersão é reduzida. Caso contrário mostra-se que o vetor curvatura média é paralelo e assim obtemos que a imersão é mínima em uma subvariedade totalmente umbílica. No caso em que a superfície é homeomorfa a 2-esfera a redução de codimensão é obtida sem a hipótese de analiticidade.

4.1 Teoremas Principais

Teorema 4.1.1. Seja $x : \mathbb{M}^2 \to \mathbb{Q}^n$ uma imersão analítica, tal que o vetor curvatura média $\mathbb{H}$ está contido em um subfibrado paralelo $\mathbb{E}$ de $\mathbb{TM}^{\perp}$. Então podemos reduzir a codimensão da imersão para $dim(\mathbb{E})+1$, ou $x(\mathbb{M})$ é mínima em uma subvariedade totalmente umbílica $(n - dim(\mathbb{E}))$-dimensional de $\mathbb{Q}^n$.

Demonstração.

Temos por hipótese que $\mathbb{E}$ é um subfibrado paralelo em $\mathbb{TM}^\perp$, ou seja, para todo campo de vetores em $\mathbb{E}$ a derivada covariante normal desse campo não possui componente no complemento ortogonal de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{TM}^\perp$.

Seja $\mathbb{F}$ o complemento ortogonal de $\mathbb{E}$ em $\mathbb{TM}^\perp$, então pelo lema 3.2.1 $\mathbb{F}$ é um subfibrado paralelo.

Seja $\alpha : \mathbb{TM} \times \mathbb{TM} \to \mathbb{TM}^\perp$ a segunda forma fundamental da imersão x, e $\alpha_{\mathbb{E}}, \alpha_{\mathbb{F}}$ suas componentes em $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$.

Para toda direção normal $\xi \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}^\perp$ seja

$$A_\xi : \mathbb{T}_p\mathbb{M} \to \mathbb{T}_p\mathbb{M}$$

o automorfismo definido por:

$$< \mathbf{A}_\xi(v), w > \;=\; < \alpha(v, w), \xi >$$

Então deveremos analisar :

i) $\mathbb{F}$ é um subfibrado plano, isto é, o tensor curvatura normal restrito a $\mathbb{F}$ é identicamente nulo.

ii) O tensor curvatura normal restrito a $\mathbb{F}$ não é identicamente nulo.

Para demonstrar o teorema no caso (i) usaremos o seguinte lema:

Lema 4.1.1. Seja $x : \mathbb{M}^m \to \mathbb{Q}^n$ uma imersão de uma variedade m-dimensional em um espaço de curvatura seccional constante. Suponha que $\mathbb{H}$ está contido em um subfibrado paralelo $\mathbb{E}$ de $\mathbb{TM}^\perp$, onde o complemento ortogonal $\mathbb{F}$ é plano com respeito a conexão normal. Então podemos reduzir a codimensão da imersão para $dim(\mathbb{E}) + m - 1$.

Demonstração.

Como por hipótese o complemento ortogonal $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ é plano, isto é, o tensor curvatura normal $\mathbb{R}^\perp$ restrito a $\mathbb{F}$ é nulo, pela Equação de Ricci para todo $\xi, \eta \in \mathbb{F}_p$ e para todo $v, w \in \mathbb{T}_p\mathbb{M}$ teremos:

$$\begin{aligned} 0 =< \mathbb{R}^\perp(v, w)\xi, \eta > \;&=\; < [A_\xi, A_\eta]v, w > \\ 0 =< [A_\xi, A_\eta]v, w > . \end{aligned}$$

Fazendo

$$w = [A_\xi, A_\eta]v$$

obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= < [A_\xi, A_\eta]v, [A_\xi, A_\eta]v > \\ &= \|(A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi)v\|. \text{ Ou seja,} \\ A_\xi A_\eta v &= A_\eta A_\xi v. \end{aligned}$$

Portanto, os operadores A_ξ e A_η comutam para todo ξ e $\eta \in \mathbb{F}_p$. Logo as aplicações lineares A_ξ são simultaneamente diagonalizáveis para todo $\xi \in \mathbb{F}_p$. Ou seja existe uma base ortonormal $\ell_1, ..., \ell_m$ de $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$ tal que para cada ξ e $j = 1, ..., m$ existe λ_j satisfazendo:

$$A_\xi \ell_j = \lambda_j \ell_j$$

Logo,

$$< \alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k), \xi > = < A_\xi \ell_j, \ell_k >=< \lambda_j \ell_j, \ell_k >= \lambda_j < \ell_j, \ell_k >= 0$$

portanto, para todo $j \neq k$ teremos $\alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) = 0$.

Denotaremos por $\mathbb{N}_1$ o primeiro espaço normal da imersão gerados pelos valores de α.

$$\mathbb{N}_1 = ger\{\alpha(\ell_j, \ell_k)\}.$$

Afirmamos que:

$$\mathbb{E} + \mathbb{N}_1 \text{ é subfibrado paralelo de } \mathbb{TM}^\perp.$$

De fato, seja $\xi \in \mathbb{F} \cap \mathbb{N}_1^\perp$. Como ξ é ortogonal a $\mathbb{N}_1$ tem-se:

$$< \xi, \alpha(\ell_j, \ell_k) >= 0.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} 0 &= \ell_i < \xi, \alpha(\ell_j, \ell_k) > \\ &= < \nabla^\perp_{\ell_i}\xi, \alpha(\ell_j, \ell_k) > + < \xi, \nabla^\perp_{\ell_i}\alpha(\ell_j, \ell_k) > \end{aligned}$$

consequentemente,

$$< \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \alpha(\ell_j, \ell_k) > \; = \; - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha(\ell_j, \ell_k) > . \tag{4.1}$$

Por outro lado, $\mathbb{E}$ é um subfibrado paralelo. Escrevendo α em função das componentes $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$:

$$< \xi, \alpha(\ell_j, \ell_k) >=< \xi, \alpha_{\mathbb{E}}(\ell_j, \ell_k) + \alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) >= 0$$

como $\xi \in \mathbb{F}$ tem-se:

$$\begin{aligned} < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \alpha_{\mathbb{E}}(\ell_j, \ell_k) + \alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) > \; &= \; - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha_{\mathbb{E}}(\ell_j, \ell_k) > - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) > \text{por } 4.1 \\ &= \; - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) > \end{aligned}$$

consequentemente,

$$< \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \alpha(\ell_j, \ell_k) > \; = \; - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) > . \tag{4.2}$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned} < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \alpha_{\mathbb{E}}(\ell_j, \ell_k) + \alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) > \; &= \; < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \alpha_{\mathbb{E}}(\ell_j, \ell_k) > + < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) > \\ &= \; < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) > \end{aligned}$$

de onde concluímos que:

$$< \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) > \; = \; - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha_{\mathbb{F}}(\ell_j, \ell_k) > . \tag{4.3}$$

Definiremos por:

$$A_{ijk} :=< \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \alpha(\ell_j, \ell_k) >= - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha(\ell_j, \ell_k) > .$$

Pela simetria de α tem-se:

$$A_{ijk} = A_{ikj}.$$

Usando a definição de derivada de tensor em:

$$A_{ijk} \quad = \quad - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i} \alpha(\ell_j, \ell_k) >$$

teremos:

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= - < \xi, (\nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha)(\ell_j, \ell_k) > - < \xi, \alpha(\nabla_{\ell_i}\ell_j, \ell_k) > - < \xi, \alpha(\ell_j, \nabla_{\ell_i}\ell_k) > \\ &= - < \xi, (\nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha)(\ell_j, \ell_k) > \text{ pois } \xi \text{ é ortogonal a } \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

Usando a Equação de Codazzi e a definição de derivada de tensor:

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= - < \xi, (\nabla^{\perp}_{\ell_j}\alpha)(\ell_i, \ell_k) > \\ &= - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_j}\alpha(\ell_i, \ell_k) > + < \xi, \alpha(\nabla_{\ell_j}\ell_i, \ell_k) > \\ &+ \; < \xi, \alpha(\ell_{i,\ell_j} \ell_k) > \\ &= - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_j}\alpha(\ell_i, \ell_k) >=< \nabla^{\perp}_{\ell_j}\xi, \alpha(\ell_k, \ell_i) >= A_{jki}. \end{aligned}$$

Portanto, A_{ijk} é simétrica nos três índices.
Por 3.2 e 3.3 obtemos:

$$\begin{aligned} < \nabla^{\perp}_{\ell_j}\xi, \alpha(\ell_k, \ell_i) > &= < \nabla^{\perp}_{\ell_j}\xi, \alpha_{\mathbb{E}}(\ell_k, \ell_i) > + < \nabla^{\perp}_{\ell_j}\xi, \alpha_{\mathbb{F}}(\ell_k, \ell_i) > \\ &= < \nabla^{\perp}_{\ell_j}\xi, \alpha_{\mathbb{F}}(\ell_k, \ell_i) > . \end{aligned}$$

Consequentemente para todo $k \neq i$

$$\alpha_{\mathbb{F}}(\ell_k, \ell_i) = 0, \text{ pois o referencial diagonaliza } \alpha_{\mathbb{F}}.$$

Logo, $A_{ijk} = 0$ se pelo menos dois índices forem diferentes.

Falta mostrar apenas que $A_{kkk} = 0$ para todo $k = 1, ..., m$.
Tome $\xi \in \mathbb{F} \cap \mathbb{N}_1^{\perp}$ então $< \xi, \mathbb{H} >= 0$, pois $\xi \in \mathbb{N}_1^{\perp}$ e $\mathbb{H} \in \mathbb{N}_1$.
Logo:

$$\begin{aligned} 0 &= \ell_k < \xi, \mathbb{H} > \\ &= < \nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi, \mathbb{H} > + < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_k}\mathbb{H} > \\ < \nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi, \mathbb{H} > &= - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_k}\mathbb{H} > \end{aligned}$$

Observe que $<\xi, \nabla^{\perp}_{\ell_k}\mathbb{H}>= 0$, pois $\xi \in \mathbb{F}$ e $\nabla^{\perp}_{\ell_k}\mathbb{H} \in \mathbb{E}$.
Consequentemente:

$$< \nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi, \mathbb{H} >= 0$$

Usando a definição de vetor curvatura média teremos:

$$\begin{aligned} 0 =< \nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi, \mathbb{H} > &= < \nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi, (\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha(\ell_j,\ell_j) > \\ &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} < \nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi, \alpha(\ell_j,\ell_j) > \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{m}(< \nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi, \alpha(\ell_k,\ell_k) > + < \nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi, \sum_{j\neq k}\alpha(\ell_j,\ell_j) >) \\ &= \frac{1}{m}A_{kkk} + \frac{1}{m} < \nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi, \sum_{j\neq k}\alpha(\ell_j,\ell_j) > . \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$A_{kkk} = - < \nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi, \sum_{j\neq k}\alpha(\ell_j,\ell_j) > \;=\; -\sum_{j\neq k} A_{kjj} = 0.$$

Logo, $\nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi$ é ortogonal a $\mathbb{N}_1$, ou seja, $\nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi \in \mathbb{N}_1^{\perp}$.
Portanto, se $\xi \in \mathbb{F}\cap\mathbb{N}_1^{\perp}$ então $\nabla^{\perp}_{\ell_k}\xi \in \mathbb{F}\cap\mathbb{N}_1^{\perp}$. Logo $\mathbb{F}\cap\mathbb{N}_1^{\perp}$ é subfibrado paralelo, consequentemente $\mathbb{E}+\mathbb{N}_1$ é subfibrado paralelo.

Desde que $\mathbb{N}_1$ é gerado por $\alpha(\ell_j,\ell_j)$, $j = 1,...,m$ e $\sum_{j=1}^{m}\alpha(\ell_j,\ell_j) \in \mathbb{E}$ teremos:

$$dim(\mathbb{E}+\mathbb{N}_1) \leq dim(\mathbb{E}) + m - 1.$$

Portanto, usando o teorema de Erbacher 3.2.1 concluímos que podemos reduzir a codimensão da imersão para $dim(\mathbb{E}) + m - 1$. Assim, segue o resultado da parte (i) do teorema.

Para demonstrarmos o teorema no caso (ii) suponhamos que $\mathbb{F}$ não é subfibrado plano e mostraremos que $x(\mathbb{M})$ é mínima em uma subvariedade totalmente umbílica $(n - dim(\mathbb{E})$-dimensional de $\mathbb{Q}^n$.

Demonstração.

Como $\mathbb{F}$ não é subfibrado plano, existe $q \in \mathbb{M}$ e uma vizinhança $\mathbf{V}$ de q, onde o tensor curvatura normal restrito a $\mathbb{F}$ não se anula, isto é, existem $\sigma, \tau \in \mathbb{F}_q$ e $u, v \in \mathbb{T}_q\mathbb{M}$ tal que:

$$\begin{aligned} 0 \neq < \mathbb{R}^{\perp}(u,v)\sigma, \tau > &= < [A_\sigma, A_\tau]u, v > \\ 0 &\neq < [A_\sigma, A_\tau]u, v > \end{aligned}$$

portanto,

$$A_\sigma A_\tau \neq A_\tau A_\sigma.$$

Consequentemente os operadores A_σ e A_τ não são diagonalizáveis simultaneamente. Por outro lado para todo $\xi \in \mathbb{E}$ teremos:

$$\mathbb{R}^{\perp}(u,v)\xi = \nabla^{\perp}_v \nabla^{\perp}_u \xi - \nabla^{\perp}_u \nabla^{\perp}_v \xi - \nabla^{\perp}_{[u,v]}\xi \in \mathbb{E},$$

pois $\mathbb{E}$ é um subfibrado paralelo.
Usando a Equação de Ricci, para todo $\sigma, \tau \in \mathbb{F}_q$ tem-se:

$$\begin{aligned} 0 = < \mathbb{R}^{\perp}(u,v)\xi, \sigma > &= < [A_\xi, A_\sigma]u, v > \\ 0 &= < [A_\xi, A_\sigma]u, v > \end{aligned}$$

portanto,

$$A_\xi A_\sigma = A_\sigma A_\xi.$$

Analogamente,

$$A_\xi A_\tau = A_\tau A_\xi$$

De onde concluímos que os pares de operadores A_ξ, A_σ e A_ξ, A_τ são diagonalizáveis simultaneamente.

Por outro lado, $A_\sigma A_\tau \neq A_\tau A_\sigma$. Consequentemente A_ξ é um múltiplo do operador identidade. Ou seja, existe uma função real λ_ξ definida em $\mathbf{V}$ tal que:

$$A_\xi = \lambda_\xi I,$$

ou seja, qualquer $\xi \in \mathbb{E}$ é uma direção umbílica na vizinhança de q. Como $\mathbb{H} \in \mathbb{E}$ temos que $\mathbb{H}$ está em uma direção umbílica.

Afirmamos que $\nabla^\perp\mathbb{H}$ tem valores em $\mathfrak{R}.\mathbb{H}$, ou seja, $(\nabla^\perp_X\mathbb{H})_q$ é um múltiplo real de $\mathbb{H}_q$ $\forall X \in \mathbb{T}_q\mathbb{M}$.

Observe que se ξ é uma seção de $\mathbb{E}$ com $\xi \perp \mathbb{H}$ então ξ é normal a $\mathbb{N}_1$, o espaço gerado pelos valores de α.

De fato, sejam ℓ_1, ℓ_2 uma base ortonormal de $\mathbb{T}_p\mathbb{M}$. Como $\xi \in \mathbb{E}_p$ é uma direção umbílica, tem-se:

$$< \alpha(\ell_1, \ell_1), \xi >=< A_\xi \ell_1, \ell_1 >=< \lambda_\xi \ell_1, \ell_1 >= \lambda_\xi < \ell_1, \ell_1 >= \lambda_\xi. \tag{4.4}$$

Analogamente,

$$< \alpha(\ell_2, \ell_2), \xi >= \lambda_\xi. \tag{4.5}$$

Por outro lado,

$$< \alpha(\ell_1, \ell_2), \xi >=< A_\xi \ell_1, \ell_2 >=< \lambda_\xi \ell_1, \ell_2 >= \lambda_\xi < \ell_1, \ell_2 >= 0$$

e

$$\begin{aligned} < \xi, \mathbb{H} >=< \xi, \frac{1}{2}(\alpha(\ell_1, \ell_1) + \alpha(\ell_2, \ell_2)) > &= \frac{1}{2}(< \xi, \alpha(\ell_1, \ell_1) > + < \xi, \alpha(\ell_2, \ell_2) >) \\ &= \frac{1}{2}(2\lambda_\xi) = \lambda_\xi = 0, \text{ pois } \xi \text{ é ortogonal a } \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Como ξ é ortogonal a $\mathbb{N}_1$ teremos:

$$< \nabla^\perp_{\ell_i}\xi, \alpha(\ell_j, \ell_j) >= - < \xi, \nabla^\perp_{\ell_i}\alpha(\ell_j, \ell_j) >$$

Mostraremos que $\nabla^\perp\xi \in \mathbb{E} \cap \mathbb{H}^\perp$:

Como ξ é ortogonal a $\mathbb{H}$ temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \ell_i < \xi, \mathbb{H} > \\ &= < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \mathbb{H} > + < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\mathbb{H} > \end{aligned}$$

portanto,

$$< \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \mathbb{H} > \; = \; - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\mathbb{H} > \tag{4.6}$$

Mas, por 4.4,4.5 e 4.6 teremos:

$$\begin{aligned} < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \mathbb{H} > &= < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \alpha(\ell_j, \ell_j) > \\ &= - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha(\ell_j, \ell_j) > \text{, pois } \xi \text{ é ortogonal a } \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

Usando a definição de derivada de tensor teremos:

$$\begin{aligned} < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \mathbb{H} > &= - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha(\ell_j, \ell_j) > \\ &= - < \xi, (\nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha)(\ell_j, \ell_j) > - < \xi, \alpha(\nabla^{\ell_j}_{\ell i}, \ell_j) > - < \xi, \alpha(\ell_j, \nabla^{\ell_j}_{\ell i}) > \\ &= - < \xi, (\nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha)(\ell_j, \ell_j) > -2 < \xi, \alpha(\nabla^{\ell_j}_{\ell i}, \ell_j) > \\ &= - < \xi, (\nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha)(\ell_j, \ell_j) > \text{, pois } \xi \text{ é normal a } \mathbb{N}_1. \end{aligned}$$

Para $i \neq j$ usando a Equação de Codazzi e a definição de derivada de tensor teremos:

$$\begin{aligned} < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\xi, \mathbb{H} > &= - < \xi, (\nabla^{\perp}_{\ell_j}\alpha)(\ell_i, \ell_j) > \\ &= - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_j}\alpha(\ell_i, \ell_j) > + < \xi, \alpha(\nabla_{\ell_j}\ell_i, \ell_j) > + < \xi, \alpha(\ell_i, \nabla^{\ell_j}_{\ell_j}) > \\ &= - < \xi, \nabla^{\perp}_{\ell_j}\alpha(\ell_i, \ell_j) > = < \nabla^{\perp}_{\ell_j}\xi, \alpha(\ell_i, \ell_j) > = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

De onde concluímos que $\nabla^{\perp}_{\ell_j}\xi$ é ortogonal a $\mathbb{H}$, ou seja, $\nabla^{\perp}_{\ell_j}\xi \in \mathbb{H}^{\perp}$. Logo se $\xi \in \mathbb{E} \cap \mathbb{H}^{\perp}$ então $\nabla^{\perp}_{\ell_j}\xi \in \mathbb{E} \cap \mathbb{H}^{\perp}$.

De 4.6 e 4.7 concluímos que:

$$< \xi, \nabla^{\perp}_{\ell i}\mathbb{H} >= 0$$

portanto, $\nabla^{\perp}\mathbb{H}$ é um múltiplo real de $\mathbb{H}$, ou seja, $(\nabla^{\perp}_{X}\mathbb{H} \subset \mathfrak{R}.\mathbb{H})$. Logo, temos que $\mathbb{H}$ está em uma direção paralela e umbílica. Portanto, pelo lema seguinte temos que o vetor curvatura média é paralelo em $\mathbb{TM}^{\perp}$, ou seja, $\nabla^{\perp}\mathbb{H} = 0$.

Pelo lema seguinte temos que o vetor curvatura média é paralelo.

Lema 4.1.2. *[3]*:Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana $m - dimensional$ e $x : \mathbb{M} \to \mathbb{Q}^n$ uma imersão cujo vetor curvatura média está em uma direção paralela e umbílica, isto é, $\nabla^{\perp}\mathbb{H} \subset \mathfrak{R}.\mathbb{H}$. Então o vetor curvatura média é paralelo.

Demonstração.

Seja p um ponto de $\mathbb{M}$. Considere todas as geodésicas que partem de p. Seja ℓ_i, ℓ_j uma base ortonormal que é transportada paralelamente através de todas essas geodésicas. Então $\nabla_X \ell_j = 0$.

Considere o campo $\mathbf{N} = \frac{\mathbb{H}}{|\mathbb{H}|}$. Observe que $\mathbf{N}$ é paralelo na conexão normal. Logo:

$$< \alpha(\ell_i, \ell_j), \mathbf{N} >=< \alpha(\ell_i, \ell_j), \frac{\mathbb{H}}{|\mathbb{H}|} >= \frac{1}{|\mathbb{H}|} < \alpha(\ell_i, \ell_j), \mathbb{H} > .$$

Como por hipótese $\mathbb{H}$ está em uma direção umbilica teremos:

$$< \alpha(\ell_i, \ell_j), \mathbb{H} >=< A_{\mathbb{H}}\ell_i, \ell_j >= \lambda < \ell_i, \ell_j > \text{ para i,j=1,...m.}$$

Portanto,

$$< \alpha(\ell_i, \ell_j), \mathbf{N} >= \frac{\lambda}{|\mathbb{H}|}. < \ell_i, \ell_j >$$

Chamando $\frac{\lambda}{|\mathbb{H}|} = \ell$, teremos:

$$< \alpha(\ell_i, \ell_j), \mathbf{N} >= \ell < \ell_i, \ell_j >$$

De onde obtemos

$$< \alpha(\ell_i, \ell_j), \mathbf{N} >= 0 \text{ para } i \neq j \ . \tag{4.8}$$

Assim, derivando 4.8 na direção de ℓ_j obtemos:

$$< \nabla^{\perp}_{\ell_j}\alpha(\ell_i,\ell_j),\mathbf{N} > + < \alpha(\ell_i,\ell_j),\nabla^{\perp}\mathbf{N} >= 0$$

Logo,

$$< \nabla^{\perp}_{\ell_j}\alpha(\ell_i,\ell_j),\mathbf{N} >= 0, \text{ pois } \mathbf{N} \text{ é paralelo na conexão normal.} \qquad (4.9)$$

Por outro lado, $< \mathbb{H},\mathbf{N} >=< \alpha(\ell_j,\ell_j),\mathbf{N} >$ derivando na direção de ℓ_i teremos:

$$\begin{aligned} \ell_i < \mathbb{H},\mathbf{N} > &= < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha(\ell_j,\ell_j),\mathbf{N} > + < \alpha(\ell_j,\ell_j),\nabla^{\perp}_{\ell_i}\mathbf{N} > \\ &= < \nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha(\ell_j,\ell_j),\mathbf{N} > . \end{aligned}$$

Agora usando a definição de derivada de tensor teremos:

$$\begin{aligned} \ell_i < \mathbb{H},\mathbf{N} >_p &= < (\nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha)(\ell_j,\ell_j),\mathbf{N} >_p +2 < \alpha(\nabla_{\ell_i}\ell_j,\ell_j),\mathbf{N} >_p \\ &= < (\nabla^{\perp}_{\ell_i}\alpha)(\ell_j,\ell_j),\mathbf{N} >_p, \text{ pois } \nabla_{\ell_i}\ell_j = 0 \text{ em } p. \end{aligned}$$

Usando a Equação de Codazzi obtemos:

$$\ell_i < \mathbb{H},\mathbf{N} > \;=\; < (\nabla^{\perp}_{\ell_j}\alpha)(\ell_i,\ell_j),\mathbf{N} >$$

Usando a definição de derivada de tensor teremos:

$$\ell_i < \mathbb{H},\mathbf{N} > \;=\; < \nabla^{\perp}_{\ell_j}\alpha(\ell_i,\ell_j),\mathbf{N} > - < \alpha(\nabla_{\ell_j}\ell_i,\ell_j),\mathbf{N} > - < \alpha(\ell_i,\nabla_{\ell_j}\ell_j),\mathbf{N} >,$$

Por 4.9 obtemos $\ell_i < \mathbb{H},\mathbf{N} >= 0$ em $p \in \mathbb{M}$.

Logo $< \nabla^{\perp}_{\ell_i}\mathbb{H},\mathbf{N} >= 0$. Como $\nabla^{\perp}\mathbb{H}$ está na direção de $\mathbf{N}$ concluímos que $\nabla^{\perp}\mathbb{H} = 0$ em p. Como p é um ponto arbitrário temos que $\nabla^{\perp}\mathbb{H} = 0$, ou seja, $\mathbb{H}$ é paralelo.

Retornando novamente ao teorema temos que $\mathbb{E} \cap \mathbb{H}^{\perp}$ e $\mathfrak{R}.\mathbb{H}$ são subfibrados paralelos de $\mathbb{TM}^{\perp}$. Assim, α tem valores no subfibrado paralelo $\mathbb{F}+\mathfrak{R}.\mathbb{H}$. Portanto, pelo teorema de Erbacher [6] temos que $x(\mathbb{M}) \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{F}+1}$, ou seja, a imersão está contida em uma subvariedade totalmente geodésica de dimensão menor ou igual $dim(\mathbb{F})+1$. Por outro lado, $\mathbb{H}$ está em uma direção paralela e umbílica. Portanto, $\mathbb{H}$ é paralelo. Logo, segue-se do teorema de Yau [13], abaixo, levando em consideração que a curvatura normal $\mathbf{K}_N \neq 0$, que $x(\mathbb{M})$ é mínima em uma subvariedade totalmente umbilica $(n-dim(\mathbb{E}))-dimensional$ de $\mathbb{Q}^n$ o que finaliza a prova do teorema 4.1.1.

Teorema 4.1.2. ***(Teorema de Yau)[13]:*** Seja $\mathbb{M}$ uma superfície imersa em um espaço de curvatura constante, com vetor curvatura média $\mathbb{H}$ paralelo em $\mathbb{Q}^n_{\mathbf{k}}$. Então $\mathbb{M}$ é uma superfície mínima de uma hipersuperfície umbílica de $\mathbb{Q}^n_{\mathbf{k}}$, ou a imersão está contida em uma subvariedade umbílica de dimensão 3 de $\mathbb{Q}^n$ com curvatura média constante.

Teorema 4.1.3. Seja $\mathbb{M}$ uma superfície homeomorfa a $2-esfera$ e seja $x : \mathbb{M} \to \mathbb{Q}^n$ uma imersão tal que o vetor curvatura média $\mathbb{H}$ está contido em um subfibrado paralelo $\mathbb{E}$ de $\mathbb{TM}^{\perp}$. Então a codimensão da imersão pode ser reduzida para $dim(\mathbb{E})$ ou $x(\mathbb{M})$ é mínima em uma subvariedade totalmente umbílica $(n-dim(\mathbb{E}))$-dimensional de $\mathbb{Q}^n$.

Demonstração.

Vamos usar as mesmas notações anteriores.

Os sistemas de coordenadas conformes compatíveis com a orientação, induzem em $\mathbb{M}$ uma estrutura complexa. Seja $z = x + iy$ um sistema de coordenadas conforme. Ou seja,

$$< \partial_x, \partial_x >= \lambda^2 < (1,0),(1,0) >= \lambda^2$$
$$< \partial_y, \partial_y >= \lambda^2 < (0,1),(0,1) >= \lambda^2$$
$$< \partial_x, \partial_y >= \lambda^2 < (1,0),(0,1) >= 0,$$

onde λ^2 é o coeficiente de conformidade.

Indicaremos por $\mathbb{T}^{\mathcal{C}}\mathbb{M}$ a complexificação do fibrado tangente, ou seja, $\mathbb{T}^{\mathcal{C}}\mathbb{M} = \{X + iY; X, Y \in \mathbb{TM}\}$. Denotaremos também por α a extensão bilinear da segunda forma fundamental definida por:

$$\alpha : \mathbb{T}^{\mathcal{C}}\mathbb{M} \times \mathbb{T}^{\mathcal{C}}\mathbb{M} \to \mathbb{T}^{\mathcal{C}}\mathbb{M}^{\perp},$$

onde $\mathbb{T}^{\mathcal{C}}\mathbb{M}^{\perp} = \{X + iY; X, Y \in \mathbb{T}\mathbb{M}^{\perp}\}$ é o complexificado do fibrado normal.

Chamaremos de $\mathbb{N}_1^{\mathcal{C}}$ o primeiro espaço normal complexificado dos valores gerados por α.

Façamos:

$$\begin{aligned} \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \\ \partial_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \end{aligned}$$

Vamos denotar também por $<\ ,\ >$ a extensão bilinear sobre $\mathcal{C}$ do produto interno ao fibrado tangente complexificado.

$$\begin{aligned} |\partial_z|^2 &= <\partial_{\overline{z}}, \partial_z> \\ &= <\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y), \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)> \\ &= \frac{1}{4}(<\partial_x, \partial_x> - i<\partial_x, \partial_y> + i<\partial_y, \partial_x> + <\partial_y, \partial_y>) \\ &= \frac{1}{4}(<\partial_x, \partial_x> + <\partial_y, \partial_y>) = \frac{1}{4}(|\partial x|^2 + |\partial_y|^2) \\ &= \frac{1}{4}(2|\partial x|^2) = \frac{1}{2}|\partial x|^2 = \frac{1}{2}\lambda^2 \qquad (4.10) \end{aligned}$$

Mostraremos que:

$$\nabla_{\partial_{\overline{z}}}\partial_z = \nabla_{\partial_z}\partial_{\overline{z}} = 0$$

Usando a simetria da conexão Riemanniana obtemos:

$$[\partial_z, \partial_{\overline{z}}] = \nabla_{\partial_z}\partial_{\overline{z}} - \nabla_{\partial_{\overline{z}}}\partial_z.$$

Ou seja:

$$\nabla_{\partial_{\overline{z}}}\partial_z = \nabla_{\partial_z}\partial_{\overline{z}},$$

pois $[\partial_z, \partial_{\overline{z}}] = 0$, tendo em vista que $\partial_z, \partial_{\overline{z}}$ provém de um sistema de coordenadas.

Mostraremos que $\nabla_X\partial_z$ é um múltiplo escalar de ∂_z e $\nabla_X\partial_{\overline{z}}$ é um múltiplo escalar de $\partial_{\overline{z}}$.

Calculando:

$$\begin{aligned}
<\partial_z,\partial_z> &= <\frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y),\frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)> \\
&= \frac{1}{4}(<\partial_x,\partial_x> -i<\partial_x,\partial_y> -i<\partial_y,\partial_x> - <\partial_y,\partial_y>) \\
&= \frac{1}{4}(|\partial_x|^2 - |\partial_y|^2) = 0.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$<\partial_{\overline{z}},\partial_{\overline{z}}>= 0.$$

Derivando $<\partial_z,\partial_z>$ e $<\partial_{\overline{z}},\partial_{\overline{z}}>$ na direção do campo $X \in \mathbb{T}^{\mathcal{C}}\mathbb{M}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
0 = X<\partial_z,\partial_z> &= 2<\nabla_X\partial_z,\partial_z> \\
&= 2<z_1\partial_z + z_2\partial_{\overline{z}},\partial_z> \\
&= 2z_1<\partial_z,\partial_z> +2z_2<\partial_{\overline{z}},\partial_z> \\
&= 2z_2<\partial_{\overline{z}},\partial_z>, \text{ onde } z_1, z_2 \text{ são funções complexas}
\end{aligned}$$

Como $|\partial_z|^2 =<\partial_{\overline{z}},\partial_z>\neq 0$, temos que $z_2 = 0$.
Portanto:

$$\nabla_X\partial_z = z_1\partial_z. \tag{4.11}$$

Analogamente,

$$\nabla_X\partial_{\overline{z}} = u_2\partial_{\overline{z}}, \text{onde } u_2 \text{ é uma função complexa.}$$

Logo:

$$z_1\partial_z = \nabla_{\partial_{\overline{z}}}\partial_z = \nabla_{\partial_z}\partial_{\overline{z}} = u_2\partial_{\overline{z}}$$

Portanto:

$$z_1\partial_z - u_2\partial_{\overline{z}} = 0$$

Mas $\partial_z, \partial_{\overline{z}}$ são linearmente independentes, logo:

$$\nabla_{\partial_{\overline{z}}}\partial_z = \nabla_{\partial_z}\partial_{\overline{z}} = 0 \tag{4.12}$$

Mostraremos que $\alpha(\partial_z, \partial_{\overline{z}})$ é um múltiplo de $\mathbb{H}$. Relembramos que o traço $\alpha = 2\mathbb{H}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha(\partial_z, \partial_{\overline{z}}) &= \alpha(\frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), (\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)) \\
&= \frac{1}{4}(\alpha(\partial_x - i\partial_y), (\partial_x + i\partial_y)) \\
&= \frac{1}{4}(\alpha(\partial_x, \partial_x) + i\alpha(\partial_x, \partial_y) - i\alpha(\partial_y, \partial x) + \alpha(\partial_y, \partial_y)) \\
&= \frac{1}{4}|\partial_x||\partial_y|(\alpha(\frac{\partial_x}{|\partial_x|}, \frac{\partial_x}{|\partial_x|}) + \alpha(\frac{\partial_y}{|\partial_y|}, \frac{\partial_y}{|\partial_y|})) \\
&= \frac{1}{4}|\partial_x|^2(\alpha(\frac{\partial_x}{|\partial_x|}, \frac{\partial_x}{|\partial_x|}) + \alpha(\frac{\partial_y}{|\partial_x|}, \frac{\partial_y}{|\partial_x|})) \\
&= \frac{1}{4}|\partial_x|^2(2.\mathbb{H}) = \frac{1}{2}\lambda^2\mathbb{H}
\end{aligned}$$

Usando o resultado 4.10 obtemos:

$$\alpha(\partial_z, \partial_{\overline{z}}) =< \partial_z, \partial_{\overline{z}} > \mathbb{H}.$$

Observamos que:

$$\nabla^{\perp}_{\partial_z}\alpha(\partial_z, \partial_{\overline{z}}) = \partial_z < \partial_z, \partial_{\overline{z}} > \mathbb{H} + < \partial_z, \partial_{\overline{z}} > \nabla^{\perp}_{\partial z}\mathbb{H}. \tag{4.13}$$

Mostraremos que $\alpha(\partial_{\overline{z}}, \nabla^{\partial_z}_{\partial_z})$ é um múltiplo de $\mathbb{H}$.

$$\begin{aligned}
\alpha(\partial_{\overline{z}}, \nabla^{\partial_z}_{\partial_z}) &= \alpha(\partial_{\overline{z}}, w_1\partial_z) \\
&= w_1\alpha(\partial_{\overline{z}}, \partial_z)
\end{aligned}$$

Por 4.10 obtemos:

$$\alpha(\partial_{\overline{z}}, \nabla^{\partial_z}_{\partial_z}) = w_1 < \partial_{\overline{z}}, \partial_z > \mathbb{H} \text{ com } w_1 \in \mathcal{C} \tag{4.14}$$

Por outro lado,

$$< \partial_{\overline{z}}, \nabla^{\partial_z}_{\partial_z} > \;=\; < \partial_{\overline{z}}, w_1\partial_z >= w_1 < \partial_{\overline{z}}, \partial_z > \text{com } w_1 \in \mathcal{C}.$$

Portanto, usando 4.14 obtemos:

$$\alpha(\partial_{\overline{z}}, \nabla_{\partial_z}^{\partial_z}) = <\partial_{\overline{z}}, \nabla_{\partial_z}^{\partial_z}> \mathbb{H}. \tag{4.15}$$

Mostraremos que $\nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}\alpha(\partial_z, \partial_z) \in \mathbb{E}$. Usando a definição de derivada de tensor obtemos:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}\alpha(\partial_z, \partial_z) &= (\nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}\alpha)(\partial_z, \partial_z) + 2\alpha(\nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\partial_z}, \partial_z) \text{ por 4.12 obtemos:} \\
&= (\nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}\alpha)(\partial_z, \partial_z)
\end{aligned}$$

Usando a equação de Codazzi

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}\alpha(\partial_z, \partial_z) &= (\nabla_{\partial z}^{\perp}\alpha)(\partial_{\overline{z}}, \partial_z) \text{ usando a definição de derivada de tensor,} \\
&= \nabla_{\partial z}^{\perp}\alpha(\partial_{\overline{z}}, \partial_z) - \alpha(\nabla_{\partial_z}^{\partial_{\overline{z}}}, \partial_z) - \alpha(\partial_{\overline{z}}, \nabla_{\partial_z}^{\partial_z}) \\
&= \nabla_{\partial z}^{\perp}\alpha(\partial_{\overline{z}}, \partial_z) - \alpha(\partial_{\overline{z}}, \nabla_{\partial_z}^{\partial_z})
\end{aligned}$$

Por 4.13 e 4.15 obtemos:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}\alpha(\partial_z, \partial_z) &= \partial_z <\partial_{\overline{z}}, \partial_z> \mathbb{H} + <\partial_{\overline{z}}, \partial_z> \nabla_{\partial z}^{\perp}\mathbb{H} - <\partial_{\overline{z}}, \nabla_{\partial_z}^{\partial_z}> \mathbb{H} \\
&= <\nabla_{\partial z}\partial_{\overline{z}}, \partial_z> \mathbb{H} + <\partial_{\overline{z}}, \nabla_{\partial z}\partial_z> \mathbb{H} + <\partial_{\overline{z}}, \partial_z> \nabla_{\partial z}^{\perp}\mathbb{H} - <\partial_{\overline{z}}, \nabla_{\partial_z}^{\partial_z}> \mathbb{H} \\
&= <\partial_{\overline{z}}, \partial_z> \nabla_{\partial z}^{\perp}\mathbb{H} \text{ por 4.10 obtemos:} \\
&= \frac{1}{2}\lambda^2\nabla_{\partial z}^{\perp}\mathbb{H} \in \mathbb{E}.
\end{aligned}$$

Escrevendo α nas componenes $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}\alpha(\partial_z, \partial_z) &= \nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}(\alpha_{\mathbb{E}}(\partial_z, \partial_z) + \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z)) \\
\frac{1}{2}\lambda^2\nabla_{\partial z}^{\perp}\mathbb{H} &= \nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}\alpha_{\mathbb{E}}(\partial_z, \partial_z) + \nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z)
\end{aligned}$$

Podemos observar que o primeiro membro do resultado anterior só possui componentes em $\mathbb{E}$, implicando :

$$\nabla_{\partial_{\overline{z}}}^{\perp}\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) = 0. \tag{4.16}$$

Logo:

$$\partial_{\overline{z}} < \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) >= 2 < \nabla^{\perp}_{\partial_{\overline{z}}} \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) > \ = \ 0.$$

Portanto, $< \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) >$ é uma função holomorfa.

Então a forma diferencial globalmente definida sobre $\mathbb{M}$

$$\Lambda =< \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) > dz^4$$

é holomorfa.

Como $\mathbb{M}$ é homeomorfa a $2 - esfera$ temos que toda forma diferencial holomorfa é identicamente nula, conforme [8].

Logo temos:

$$< \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) > dz^4 = 0$$

implicando que $\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z)$ é um vetor isotrópico, ou seja,

$$< \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) >= 0$$

Devemos analisar:

(i) $\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) \equiv 0$

(ii) $\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) \neq 0$. Neste segundo caso, por 4.16 e usando o teorema de Chern 4.1.4, seguinte, cuja demonstração encontra-se em [11], observamos que os zeros de $\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z)$ são isolados.

Teorema 4.1.4. ***(Teorema de Chern):*** Sejam ω_A e a_{AB} A, B = 1,...,k funções diferenciávis com valores complexos que satisfazem o sistema diferencial:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial \overline{Z}} = \sum a_{AB} \omega_B$$

Suponha que ω_A não são identicamente nulas, então os zeros comuns de ω_A são isolados.

Demonstração do teorema 3.13:

Para demonstrarmos o teorema no caso (i) suponhamos que $\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) \equiv 0$ e mostraremos que a codimensão da imersão pode ser reduzida para $dim(\mathbb{E})$.

Chamaremos $\mathbb{N}_1^C$ o primeiro espaço normal complexificado do subespaço gerado por $\alpha(\partial_z, \partial_z), \alpha(\partial_z, \partial_{\overline{z}}), \alpha(\partial_{\overline{z}}, \partial_{\overline{z}})$.

Mostraremos que $\mathbb{N}_1^{\mathcal{C}} \subset \mathbb{E}$, observe que:

$$\begin{aligned}\alpha(\partial_z, \partial_z) &= \alpha(\frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)) \\ &= \frac{1}{4}(\alpha(\partial_x, \partial_x) - \alpha(\partial_y, \partial_y)) - \frac{i}{2}\alpha(\partial_x, \partial_y).\end{aligned}$$

Projetando em $\mathbb{F}$, teremos:

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) &= \alpha_{\mathbb{F}}(\frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)) \\ &= \frac{1}{4}(\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_x, \partial_x) - \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_y, \partial_y)) - \frac{i}{2}\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_x, \partial_y).\end{aligned}$$

Por hipótese,

$$\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) \equiv 0 \textit{ então } \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_x, \partial_x) = \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_y, \partial_y) \textit{ e } \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_x, \partial_y) = 0$$

isto implica:

$$\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_{\overline{z}}, \partial_{\overline{z}}) = \overline{\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z)} = 0.$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_{\overline{z}}, \partial_z) &= \alpha(\partial_{\overline{z}}, \partial_z) - \alpha_{\mathbb{E}}(\partial_{\overline{z}}, \partial_z) \\ &= < \partial_{\overline{z}}, \partial_z > \mathbb{H} - \alpha_{\mathbb{E}}(\partial_{\overline{z}}, \partial_z) = 0,\end{aligned}$$

pois o único vetor que tem componente em $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$ ao mesmo tempo é o vetor nulo. Portanto, observamos que todos os componentes de α em $\mathbb{F}$ são nulos, logo $\mathbb{N}_1^{\mathcal{C}} \subset \mathbb{E}$. Consequentemente o Teorema de Erbacher 3.2.1, garante que podemos reduzir a codimensão da imersão para $dim(\mathbb{E})$, o que finaliza a prova do teorema no caso (i).

Para demonstrarmos o terema no caso (ii) suponhamos que $\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) \neq 0$ e mostraremos que $x(\mathbb{M})$ é mínima em uma subvariedade totalmente umbílica $(n - dim(\mathbb{E})) - dimensional$ de $\mathbb{Q}^n$.

Por hipótese temos:

$$\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) = \frac{1}{4}(\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_x, \partial_x) - \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_y, \partial_y)) - \frac{i}{2}\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_x, \partial_y) \neq 0.$$

Seja $\{f_1, ..., f_k\}$ um referencial ortonormal de $\mathbb{F}$ e

$$W_A = < \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), f_A >, \text{ A=1,..., k.}$$

Como

$$\frac{\partial W_A}{\partial_{\overline{z}}} = < \nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), f_A > + < \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), \nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} f_A > \text{ por 4.16,}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_A}{\partial_{\overline{z}}} &= < \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), \nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} f_A > \\ &= < \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), \sum_{B=1}^{k} a_{AB} f_B > \\ &= \sum_{B=1}^{k} a_{AB} < \alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z), f_B > . \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial W_A}{\partial_{\overline{z}}} = \sum_{B=1}^{k} a_{AB} W_B \text{ , onde } a_{AB} \text{ são funções complexas.} \tag{4.17}$$

Suponha que $W_A \neq 0$. Portanto, as funções complexas W_A satisfazem o sistema de equações diferenciais 4.17. Pelo teorema de Chern 4.1.4, obtemos que os zeros de $\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z)$ são isolados.

Assim é possível escolher um sistema de coordenadas conformes $\{\ell_1, \ell_2\}$, tal que, através de uma rotação nos eixos coordenados, obtemos que a parte imaginária de $\alpha_{\mathbb{F}}(\partial_z, \partial_z) \neq 0$. Consequentemente em todo ponto de $\mathbb{M}$, menos os pontos isolados, a segunda forma fundamental não é diagonalizável. Logo, o tensor curvatura normal $\mathbb{R}^{\perp} \neq 0$. Aplicando a parte (ii) do teorema 4.1.1, como $\mathbb{H}$ está contido em um subfibrado paralelo $\mathbb{E}$ de $\mathbb{TM}^{\perp}$, temos que $\mathbb{H}$ está em uma direção paralela e umbílica. Logo $\nabla^{\perp}\mathbb{H} \subset \mathbb{R}.\mathbb{H}$, conforme resultado obtido no caso (ii) do teorema 4.1.1. Pelo Lema de Chen 4.1.1, temos que o vetor curvatura média é paralelo. Portanto, como $\mathbb{M}^2$ é uma superfície com vetor curvatura média paralelo em uma direção umbílica em um espaço de curvatura constante, pelo teorema de Yau 4.1.2, concluímos que a imersão $x(\mathbb{M})$ é mínima em uma subvariedade totalmente umbílica de $(n - dim(\mathbb{E})) - dimensional$ de $\mathbb{Q}^n$, concluíndo assim a demonstração do teorema.

Referências Bibliográficas

[1] *Alexandrov,A.,* Uniqueness Theorems for surfaces in the large*, I. Vestnik Leningrad Univ. Math, 1956.*

[2] *CARMO, M.P.,* Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro:Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - segunda edição.(Projeto Euclides)*

[3] *Chen,B.Y.,* "Surfaces with Parallel Normalized Mean Curvature Vector"*,Monatsh , 1980.*

[4] *do Carmo, M., Colares, G.,* On minimal immersions with parallel normal curvature tensor*. Geometry and Topology, Lecture Notes in Mathematics 597. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977.*

[5] *E.Calabi,* "Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres"*,J.Diff.Geom.,1 (1967) pp.111-125.*

[6] *Erbacher, J.A.,* Reduction of the codimension of an isometric immersion*, J.Differential Geometry 5, 1971.*

[7] *Eschemburg,J.H.,Tribuzy, R.,* Reduction of Codimension of Surfaces*, Geometria Dedicata, 1989.*

[8] *Eschenburg,J.H and Tribuzy,R.,*Branch Points of Conformal Mappings of Surfaces*, Math.Ann.279 (1988),621-623.*

[9] *H.Hopf,* Lectures on Differential Geometry in the Large,mimeographed notes*,Stanford University,1956.*

[10] *Rodriguez, L. and Tribuzy, R.,* Reduction of Codimension of Regular Immersions*, Math. Z. 185, 1984.*

[11] *S.S.Chern,* On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvature*,in Problems in Analysis,(ed.Gunning) ,Princeton,N.J.,1970.*

[12] T. Klotz and R. Osserman, "On complete surfaces in E^3 with constant mean curvature",*comment. Math. Helv.,41(1996-67),pp 313-318.*

[13] Yau,S., Submanifolds with constant mean curvature *, I'.Math 96, 1974.*

*[14] Wente, H.C.,*Counterexample to a conjecture of H.Hopf*, Pacific J.Math.121,193-243,1986.*