UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXTENSÕES DE GRUPOS FINITAMENTE APRESENTADOS POR GRUPOS LIVRES

ISMAEL RANGEL FERREIRA LINS

MANAUS
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ISMAEL RANGEL FERREIRA LINS

EXTENSÕES DE GRUPOS FINITAMENTE APRESENTADOS POR GRUPOS LIVRES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requesito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**, área de concentração em **Álgebra**

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sheila Campos Chagas

MANAUS
2010

ISMAEL RANGEL FERREIRA LINS

EXTENSÕES DE GRUPOS FINITAMENTE APRESENTADOS POR GRUPOS LIVRES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**, na área de concentração em **Álgebra**.

Manaus, 16 de Novembro de 2010.

BANCA EXAMINADORA

.....

Prof.ª Dr.ª Sheila Campos Chagas, Presidente

Universidade Federal do Amazonas

.....

Prof.ª Dr.ª Aline Gomes da Silva Pinto, Membro

Universidade de Brasília

.....

Prof. Dr. Jorge Fernandes de Lima Neto, Membro

Universidade Federal do Amazonas/Humaitá

Resumo

EXTENSÕES DE GRUPOS FINITAMENTE APRESENTADOS POR GRUPOS LIVRES

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sheila Campos Chagas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Utilizando a teoria dos fins, J. Stallings mostrou em 1971 que um grupo finitamente gerado com uma infinidade de finais admite uma decomposição ou como um produto livre generalizado não trivial ou como HNN-extensão, tal que os sugbrupos amalgamados (resp. subgrupos associados) são finitos. Em 1972, Karrass, Pietrowiski e Solitar obtiveram uma caracterização das extensões finitas e cíclicas de grupos livres e em 1978, R. Bieri e R. Strebel, caracterizam os grupos quase finitamente apresentados sobre um anel, como sendo uma HNN-extensão com uma letra estável.

O presente trabalho tem o objetivo de dar uma prova clara e detalhada do resultado de G. Baumslag e C. F. Miller III, que inclui como como conseqüência os resultados de Karrass e Bieri:

***Teorema**: Seja G um grupo finitamente apresentado com um quociente livre de posto n. Então G é uma HNN-extensão com n letras estáveis, de um grupo B finitamente gerado e subgrupos associados finitamente gerados.*

Abstract

FINITELY PRESENTED EXTENSIONS BY FREE GROUPS

Using the theory of ends, J. Stallings showed in 1971 that any finitely generated with infinitely many ends has a decomposition either as a non-trivial generalizated free product or as an HNN-extension where the amalgamated (respectively associated) sugbroups are finite. In 1972, Karrass, Pietrowiski e Solitar provide a caracterization for finite and cyclic extension of a free group and in 1978, R. Bieri and R. Strebel described an almost-finitely generated group over a ring as a HNN-extension with a single stable letter.

The present work aims to provide a detailed proof to a result by G. Baumslag and C. F. Miller III that includes as a consequence, the results of Karrass and Bieri:

***Theorem**: Let G be a finitely presented group with a free quocient of rank n. Then G is an HNN-extension with n stable letters, of a finitely generated groupo B finitely generated associated subgroups.*

Conteúdo

1 Tópicos Preliminares **8**

1.1 Grupos Livres 8

1.1.1 Definição 8

1.1.2 Construção de um grupo livre 11

1.1.3 Forma normal em grupos livres 14

1.2 Apresentações de grupos 18

1.3 Transformações de Tietze 25

2 Construções Livres **29**

2.1 Produtos Livres 29

2.1.1 Forma Normal em Produtos Livres 32

2.2 Produtos Livres com Amalgamação 36

2.2.1 Formas Normais em Produtos Livres com Amalgamação 39

3 HNN-extensões e Teoremas de Imersão **43**

3.1 HNN-extensões 43

3.2 Forma Normal em HNN-extensões. Lema de Britton 46

3.3 Teoremas de Imersão 49

4 Teorema Principal **51**

4.1 Demonstração do Teorema Principal 51

4.2 Consequências e Exemplos 54

4.3 Considerações Finais 57

Introdução

A caracterização das extensões de grupos livres provem de um interesse bem mais antigo da topologia algébrica e teoria combinatorial dos grupos: o estabelecimento de condições necessárias e suficientes para que um grupo se decomponha como um produto livre amalgamado ou uma HNN-extensão.

Compreender a necessidade de tal classificação remete-nos a própria motivação que desenvolveu a teoria combinatorial dos grupos. Este ramo situa-se como eixo intermediário entre a teoria de grupos e a topologia e a descoberta do grupo fundamental por Poincaré trouxe à luz novos objetos, a saber, as apresentações de grupos e as teorias de homologia e cohomologia de grupos, que logo depois se desenvolveram paralela e independentente da conexão topológica, tecendo novas idéias e resultados puramente algébricos.

A caracterização de Stallings em 1971 faz uso da noção de estrutura bipolar, cujo detalhes podem ser consultados em [17], de onde parafraseamos a versão para o resultado:

Teorema 0.1 *Um grupo G admite uma estrutura bipolar se e somente se, o mesmo se decompõe ou como um produto livre amalgamado não trivial ou uma HNN-extensão.*

No ano seguinte, Karrass, Pietrowiski e Solitar caracterizam as extensões cíclicas finitas e finitas de grupos livres, tratando cada caso em particular. Do artigo original [3] citamos:

Teorema 0.2 *Seja G um grupo finitamente gerado. Então G é uma extensão finita de um grupo livre H se, e somente se G é uma HNN-extensão.*

Teorema 0.3 *Se G é uma extensão cíclica infinita de um grupo livre H e se G tem centro não trivial Z, então G é uma HNN-extensão cujo grupo base é um produto-árvore de grupos cíclicos infinitos e cujos grupos associados estão contidos nos vértices.*

Um grupo que é uma extensão finita de um grupo livre é chamado *virtualmente livre*. Mais geralmente, dada uma propriedade $\mathcal{P}$ para grupos, um grupo é virtualmente-$\mathcal{P}$ se existe $H \leq G$ tal que $H \in \mathcal{P}$ e o índice $[G : H]$ é finito.

A decomposição como HNN-extensão surge no contexto da estrutura dos subgrupos finitamente apresentados e que são solúveis. Neste sentido, Bieri e Strebel criam a noção de grupo *quase finitamente apresentado*. Se K é um anel comutativo com unidade, um grupo G é quase finitamente apresentado sobre K se existe uma apresentação $G = F/R$, tal que F é um grupo de posto finito e o produto tensorial $R^{ab} \bigotimes_Z K$ é um KG-módulo finitamente gerado. Com isso os autores delineam um dos resultados principais do artigo:

Teorema 0.4 *Seja G um grupo que contém um subgrupo normal N cujo quociente G/N é infinito e seja $t \in G$ um elemento tal que $gp_G(N, t) = G$. Se G é quase finitamente apresentado sobre algum anel K então G é uma HNN-extensão com letra estável t, tal que o grupo base e os subgrupos associados são finitamente gerados e estão contidos em N.*

Num teorema seguinte, os autores consideram uma extensão nilpotente por cíclico infinito. Tal grupo deve ser uma HNN-extensão ascendente, cujo grupo base é nilpotente finitamente gerado.

Capítulo 1

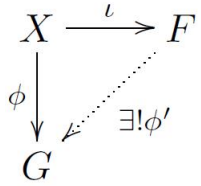
Tópicos Preliminares

1.1 Grupos Livres

A noção de grupo livre é o ponto de partida que adotaremos para desenvolver a teoria básica de apresentações de grupos. Foram pela primeira vez mencionados por Walter Dick como o grupos mais gerais possíveis que se pode obter a partir de um conjunto de geradores que não possuem qualquer relação entre si além das determinadas pela definição de grupo.

1.1.1 Definição

Definição 1.1 *Seja F um grupo, X um conjunto não vazio e uma aplicação $\iota : X \to F$. Dizemos que o par (F, ι) é um grupo livre sobre X se para qualquer grupo G e aplicação $\phi : X \to G$ existir um único homomorfismo $\phi' : F \to G$ tal que o diagrama abaixo é comutativo.*



O conjunto X é chamado de base livre de F e a cardinalidade de X chama-se o posto de F.

O grupo F acima descrito está definido como sendo a solução para um diagrama comutativo. Diz-se que F possui uma propriedade universal. Uma pergunta natural é decidir se tal objeto existe e é único. Daremos uma resposta positiva a essa questão mais adiante.

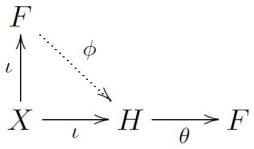
Por enquanto, assumindo a existência de F, vamos deduzir propriedades de um grupo livre que podem ser estabelecidas utilizando apenas a propriedade universal. Observamos que ao considerar $G = F$ no diagrama, segue-se que ι é injetiva, o que nos permite visualizar o conjunto X contido em F, dispensando qualquer referência à ι.

As proposições seguintes fornecem mais informações sobre X:

Proposição 1.2 *Todo grupo livre é gerado pela sua base livre*

Demonstração. Seja (F, ι) um grupo livre sobre X e H o subgrupo de F, gerado pela imagem de X. Pela propriedade universal a aplicação ι induz um homomorfismo $\phi : F \to H$ tal que $\phi\iota = \iota$ em X

Seja $\theta : H \to F$ a inclusão. Então existe uma extensão $\gamma : F \to F$ para a aplicação $\theta\iota$. Por unicidade, γ coincide com $\theta\phi$. Porém, para todo $\iota(x)$, $x \in X$ temos $\theta\phi(i(x)) = \theta(i(x)) = i(x)$.



Desta forma o homomorfismo $\theta\phi$ estende a identidade de $\iota(X)$ assim como a aplicação identidade de F. Novamente por unicidade, $\theta\phi = 1_F$, donde concluímos que $\theta\phi$ é sobrejetiva. Segue-se então que $F = Im(\theta\phi) = Im\phi \subseteq H$. Logo F coincide com H e portanto F é gerado pela imagem de X $\square$

A proposição seguinte mostra que a noção de posto de um grupo livre é bem definida.

Proposição 1.3 *Dois grupos livres F_1 e F_2 são isomorfos se e somente se o posto de F_1 é igual ao posto de F_2*

Demonstração. Para cada $i = 1, 2$, consideramos X_i, as respectivas bases livres dos grupos F_i com respectivas inclusões $\iota_i : X_i \to F_i$ e escrevemos $Y_i = \iota_i(X_i)$. Considere $Hom(F_i, \mathbb{Z}_2)$ o conjunto de todos os homomorfismos de F_i em $\mathbb{Z}_2$. Para quaisquer $\alpha, \beta \in Hom(F_i, \mathbb{Z}_2)$ as regras definidas por

$$(\alpha + \beta)(x) := \alpha(x) + \beta(x)$$
$$(k \cdot \alpha)(x) := k(\alpha(x)), \quad k \in \mathbb{Z}_2$$

são também homomorfismos de F_i em $\mathbb{Z}_2$. Então as operações $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$ e $(\alpha, k) \mapsto k \cdot \alpha$ conferem a $Hom(F_i, \mathbb{Z}_2)$ uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$.

Dado $x \in Y_i$, a aplicação $\alpha_x : F_i \mapsto \mathbb{Z}_2$, $\alpha_x(x) = 1$ e $\alpha_x(y) = 0$ se $y \neq x$ é um homomorfismo. Temos que o conjunto $B_i = \{\alpha_x | x \in X_i\}$ forma uma base para $Hom(F_i, \mathbb{Z}_2)$. De fato, qualquer somatório $\sum_{x \in Y_i} k_x \alpha_x$ igual ao homomorfismo trivial implica em $k_x = 0$ para todo $x \in Y_i$. Logo, B_i é um conjunto linearmente independente em $Hom(F_i, \mathbb{Z}_2)$.

Igualmente, qualquer $\alpha \in Hom(F_i, \mathbb{Z}_2)$ pode ser decomposto em termos de um somatório $\alpha = \sum_{x \in Y_i} k_x \alpha_x$, onde se faz $k_x = 0$ ou $k_x = 1$ convinientemente. Portanto, cada B_i é também um conjunto gerador de $Hom(F_i, \mathbb{Z}_2)$ e assim, $\dim Hom(F_i, \mathbb{Z}_2) = |B_i| = |X_i|$, $i = 1, 2$.

Pela Proposição 1.2, F_1 é gerado por Y_1 e um isormofismo $\phi : F_1 \mapsto F_2$ implica que F_2 é gerado pela imagem $\phi(Y_1)$. Analogamente, verificamos que o conjunto $B_2' = \{\alpha_x | x \in \phi(X_1)\}$, construído da mesma forma que os B_i anteriores, consiste em uma base para $Hom(F_2, \mathbb{Z}_2$. Segue-se então que

$$\dim Hom(F_2, \mathbb{Z}_2) = |\phi(Y_1)| = |X_2| = |X_1|$$

e portanto F_1 e F_2 têm o mesmo posto.

Reciprocamente, se o posto de F_1 é igual ao de F_2, então há uma bijeção $\phi : X_1 \mapsto X_2$ que induz um homomorfimo $\phi' : F_1 \to F_2$. A inversa de ϕ induz um homomorfismo $\psi : F_2 \mapsto F_1$ de tal forma que a composta $\psi\phi'$ estende a identidade de F_1 e $\phi'\psi$ estende a a identidade de F_2. Segue-se então que ϕ' é uma bijeção e $F_1 \cong F_2$ $\square$

Proposição 1.4 *Todo grupo isomorfo a algum grupo livre é também um grupo livre de mesmo posto.*

Demonstração. Sejam (F, ι) um grupo livre sobre X e $\theta : F \to G$ um isomorfismo. Vamos mostrar que G é livre sobre X, considerandos a aplicação $\theta\iota$.

Dado um grupo arbitrário H e uma aplicação arbitrária $\phi : X \to H$, existe um único homomorfismo $\phi' : F \to H$ tal que $\phi = \phi'\iota$. Agora temos $\phi'\theta^{-1}\theta\iota = \phi'\iota = \phi$ em X, portanto o homomorfismo $\phi'\theta^{-1}$ estende ϕ.

Como F é gerado por $\iota(X)$, G é gerado por $\theta\iota(X)$. Seja $\psi : G \to H$ um outro homomorfismo tal que $\psi(\theta\iota) = \phi$ em X então ψ e $\phi'\theta^{-1}$ coincidem em $\theta\iota(X)$, o conjunto gerador de G. Logo ψ é igual a $\phi'\theta^{-1}$ e portanto, G é livre sobre X e a igualdade do posto segue da Proposição 1.3. □

Exemplo 1.5 *Grupos cíclicos infinitos são grupos livres de posto* 1.

Seja C um grupo cíclico infinito gerado por um elemento x. Dado um grupo arbitrário G, ao associamos x a um elemento $g \in G$, a regra $x^i \to g^i$ é um homomorfismo de C em G. Como C é gerado por x, segue-se que esse homomorfismo é único. A Proposição garante que x e x^{-1} são as únicas bases livres de C. □

1.1.2 Construção de um grupo livre

Nosso objetivo é construir um grupo livre cuja base é um conjunto arbitrário X. Além de demonstrarmos a existência e a unicidade (a menos de isomorfismos) de um grupo livre, com tal construção teremos a disposição um objeto concreto que poderemos manipular algebricamente e assim obter mais informações sobre a estrutura desses grupos.

Seja X um conjunto não vazio qualquer. Escrevemos $X^{-1} = \{x^{-1} | x \in X\}$ para denotar um conjunto que está em bijeção com X e disjunto com X. Aqui, x^{-1} representa a imagem de $x \in X$ por tal correspondência biunívoca.

Definição 1.6 *Dado um conjunto X, uma* palavra sobre X *é qualquer sequência finita do tipo $w = (x_1, x_2, ..., x_n)$ onde $n \geq 0$ e $x_i \in X \cup X^{-1}$. O número natural n chama-se*

comprimento da palavra w e se escreve $l(w) = n$. Quando $n = 0$, a sequência é chamada de palavra vazia.

Por simplicidade, escreveremos $w = x_1x_2...x_n$. A palavra vazia será denotada por 1. Igualmente, definimos o *inverso* de w como a palavra $w^{-1} = x_n^{-1}...x_2^{-1}x_n^{-1}$. Por convenção, $1^{-1} = 1$. A igualdade entre palavras sobre X é exatamente a igualdade entre sequências finitas: duas palavras $u = x_1 \dots x_m$ e $v = y_1 \dots y_n$ são iguais se e somente se $m = n$ e $x_i = y_i$ para todo $i \in [1, m]$.

Seja S o conjunto de todas as palavras sobre X. Dadas duas palavras $u = x_1x_2...x_m$ e $v = y_1y_2...y_n$ em S, podemos obter uma nova palavra sobre X através da simples justaposição das duas sequências, a qual se chama o *produto de u por v* e denota-se $uv = x_1x_2...x_my_1y_2...y_n$. Observamos que o produto de qualquer palavra u pela palavra vazia, à direita ou à esquerda é u. Além disso, o produto de palavras sobre X intuitivamente goza da propriedade associativa, isto é,$u(vw) = (uv)w$ para quaisquer u, v e w em S.

Diz-se então que a palavra w é *equivalente* a w' se é possível se obter w' a partir de w através de um número finito de deleções ou insersões de seqüências do tipo xx^{-1} ou $x^{-1}x$. Uma palavra se diz *livremente reduzida* quando não contem qualquer sequência desta natureza.

Segue-se da definição que os pares xx^{-1} e $x^{-1}x$ são equivalentes a palavra vazia para qualquer $x \in X$. Com essas observações, as afirmações a seguir são imediatas:

Lema 1.7 *Seja S o conjunto de todas palavras sobre X. Então:*

a) A relação $\sim$ tal que $u \sim v$, se e somente se, u é equivalente a v, é de equivalência.

b) Se $u \sim u'$ e $v \sim v'$ então $uv \sim u'v'$.

c) O inverso u^{-1} é equivalente ao inverso u'^{-1}.

Teorema 1.8 *Para qualquer subconjunto X não vazio existe um grupo livre cuja base livre é X*

Demonstração. Considere o conjunto S de todas as palavras sobre X e a relação de equivalência $\sim$ do Lema 1. Definimos sobre conjunto quociente $F(X) = S/\sim$ uma

operação sobre as classes de equivalência $[u], [v]$ através da regra:

$$[u] \cdot [v] := [uv]$$

A boa definição desta operação segue imediatamente do item b) do lema anterior. Claramente essa regra é também associativa. A classe [1] da palavra vazia induz um elemento identidade em $F(X)$ e para qualquer palavra $u \in S$ as classes $[u]$ e $[u^{-1}]$ são classes inversas entre si. Segue-se, portanto, que $F(X)$ é um grupo com tal operação sobre as classes de equivalência.

A regra $\iota : X \mapsto F(X)$ tal que $\iota(x) = [x]$ é injetiva. É imediato observar que $F(X)$ é gerado pela imagem de X. Dada uma aplicação $\phi : X \to G$ tomando valores em um grupo arbitrário G, definamos uma correspondência $\phi' : F(X) \to G$ por

$$\phi'([x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}]) = \phi(x_1)^{\alpha_1} \dots \phi(x_n)^{\alpha_n}$$

Se $[u] = [v]$ em $F(X)$ então u é equivalente a v a partir de uma quantidade finita de cancelamantos ou insersões de pares triviais. Tais pares são levados à identidade de G de tal sorte que $\phi'[u] = \phi'[v]$ e com isso, a boa definição de ϕ' segue. Com mesma argumentação sobre as imagens $\phi'[u]$, $\phi'[v]$ e $\phi'[uv]$ obtemos que ϕ' é um homomorfismo.

Como $\iota(x) = [x]$ para todo $x \in X$ então $\phi'\iota = \phi$ em X. Além disso, o fato de que $F(X)$ é gerado pelas classes $[x]$, $x \in X$ implica que qualquer homomorfismo $\psi : F(X) \to G$ tal que satisfaz $\psi\iota = \phi$, coincide com ϕ' no conjunto gerador de $F(X)$ e portanto ψ é igual a ϕ'. Segue-se então que $F(X)$ é um grupo livre sobre X. □

Com a existência de $F(X)$ para X arbitrário, obtemos o:

Teorema 1.9 *Todo grupo é isomorfo a um quociente de um grupo livre.*

Demonstração. Dado um grupo G com um subconjunto gerador X, o qual pode ser o próprio G, sem perca de generalidade. A inclusão $\phi : X \to G$ induz um homomorfismo sobrejetor $\phi' : F(X) \mapsto G$ e pelo Teorema do Isomorfismo, segue-se que $F(X)/\ker\phi' \cong G$. □

1.1.3 Forma normal em grupos livres

Proposição 1.10 *Cada classe de palavras de $F(X)$ admite uma única palavra reduzida*

Demonstração. Seja R o conjunto de todas palavras sobre X que são reduzidas. Pela definição de palavra reduzida, qualquer palavra sobre X é equivalente a alguma palavra reduzida e portanto, cada classe de equvalência de $F(X)$ admite pelo menos uma palavra reduzida.

Para cada $x \in X \cup X^{-1}$ defina uma função $x*$ de R como se segue:

$$\begin{aligned} x^*(x_1 \dots x_n) &= x_1 \dots x_n x \qquad \text{se } x_n \neq x^{-1} \\ x^*(x_1 \dots x_n) &= x_1 \dots x_{n-1} x \quad \text{se } x_n = x^{-1} \end{aligned}$$

Segue-se daí que $x^*(1) = x$ e $x * (x^{-1}) = 1$. A função $(x^{-1})^*$ é a inversa de $x*$. Portanto, há uma aplicação $\phi : X \to Sym(R)$ tal que $\phi(x) = x^*$. Como $F(X)$ é livre, existe uma extensão $\phi' : F(X) \to Sym(R)$. Assim, $F(X)$ age em R.

Essa extensão é tal que, para qualquer classe $[w]$ em $F(X)$, cujo representante é a palavra reduzida $w = x_1 \dots x_n$, a imagem $\phi'[w]$ é obtida pela composição de permutações $\phi(x_1) \dots \phi(x_n)$, onde $\phi(x_j) = x_j*$. Portanto, a ação de $[w]$ sobre a palavra vazia 1 é a palavra reduzida w. Assim se $[u] = [v]$ segue-se que $u = [u] \cdot 1 = [v] \cdot 1 = v$ e unicidade está provada. □

A unicidade de palavras reduzidas nos permite considerar como elementos de $F(X)$ apenas as palavras reduzidas de suas respectivas classes ao invés das próprias classes. É possível definir a noção de uma forma normal no sentido que segue:

Definição 1.11 *Seja G um grupo e subconjunto $X \subseteq G$. Dado $g \in G$, uma forma normal de g sobre X é uma expressão*

$$g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

tal que $n \geq 0$, $x_i \in X$, $x_i \neq x_{i+1}^{\pm 1}$, $\alpha_i \neq 0$ e $1 \leq i \leq n$

Observação 1.12 Com a unicidade de uma palavra reduzida, concluímos que uma forma normal é única nos grupos $F(X)$ do Teorema 1.8. Segue-se daí que qualquer palavra

reduzida de comprimento positivo não pode ser a identidade. A seguir, veremos que a unicidade de uma forma normal é característica de grupos livres .

Teorema 1.13 *Um grupo G é livre sobre um conjunto X se e somente se cada elemento de G admite uma única forma normal sobre X*

Demonstração. Seja G um grupo livre sobre X e seja $F(X)$ o grupo livre obtido no Teorema 1.8. A inclusão de X em F se estende para um isomorfismo $\phi : G \to F(X)$ que leva formas normais de G em formas normais de $F(X)$. Pela unicidade das formas normais em $F(X)$ segue-se a unicidade de formas normais em G.

Reciprocamente, a inclusão de X em G induz um homomorfismo $\psi : F(X) \to G$ sobrejetor, pois G é gerado por X. A unicidade da forma normal em G garante que ψ é injetiva e assim, F é isomorfo a G, o que pela Proposição 1.4, implica que G é livre. □

Como consequência imediata, temos o:

Corolário 1.14 *Num grupo livre sobre um conjunto X, para qualquer subconjunto $Y \subset X$ o subgrupo gerado por Y é grupo livre sobre Y.*

Exemplo 1.15 *O subgrupo comutador de um grupo livre de posto ≥ 2 é um grupo livre de posto infinito.*

Seja F um grupo livre com base X. Como X é o conjunto gerador de F, o subgrupo comutador é gerado pelo conjunto

$$S = \{[x_1, x_2] | x_1, x_2 \in X\}$$

Como F tem posto ≥ 2, S não é trivial. Assim, dados dois comutadores $[x_1, x_2]$ e $[y_1, y_2]$ não triviais, temos que $[x_1, x_2][y_1, y_2] = 1$ se e somente se $x_1 = y_2$ e $x_2 = y_1$, ou seja $[x_1, x_2]^{-1} = [y_1, y_2]$. Portanto, qualquer palavra sobre S de comprimento positivo não é igual a identidade. Segue-se então pelo Teorema 2 que F' é um grupo livre de posto infinito. □

Exemplo 1.16 *Grupos livres não cíclicos possuem subgrupos livres de qualquer posto finito.*

Pelo exemplo anterior, se F é um grupo livre de posto > 1, então F' é um grupo livre de posto infinito. Pelo corolário anterior, para se obter um grupo livre de posto $n \in \mathbb{N}$, basta considerar uma quantidade n de comutadores $[x, y]$ em S. Uma outra possibilidade, é considerar elementos x, y da base livre de F e para cada $n > 0$ considerar o conjunto

$$\beta_n = \{y^{-i}xy^i, 1 \leq i \leq n\}$$

Como cada palavra reduzida sobre β_n não pode ser a identidade, cada β_n gera um grupo livre de posto n. □

Exemplo 1.17 *$SL_2(\mathbb{Z})$ possui um subgrupo livre de posto 2*

O grupo especial linear de grau n sobre $\mathbb{Z}$ é o conjunto de matrizes definido por

$$SL_n(\mathbb{Z}) = \{A \mid det(A) = 1\}$$

Considere o subgrupo S gerado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então verifica-se que para todo $m \in \mathbb{Z}$ vale

$$A^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2m & 1 \end{bmatrix}, B^m = \begin{bmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para ver que nenhuma palavra reduzida sobre $\{A, B\}$ é a matriz identidade I, observamos que dados $m, n \in \mathbb{Z}$, vale $A^m B^n = I$ se, e somente se $m = n = 0$. Igualmente, $B^n A^m = I$ se, e somente se $m = n = 0$. Portanto S é um grupo livre de posto 2 □

Exemplo 1.18 *Quocientes livres e complementos*

Seja N um subgrupo normal não trivial em um grupo G. Um complemento de N é um subgrupo K em G tal que $N \cap K = 1$ e $G = NK$. Se G/N é um grupo livre, vamos mostrar que N admite um complemento. Escrevemos $F = G/N$.

Seja $X = \{xN | x \in G \setminus N\}$ um conjunto de classes laterais de N que geram F. Se fixarmos os representantes de cada classe, a regra $\theta(xN) = x$ de X em G é bem definida.

Então, existe um homomorfismo $\theta' : F \to G$ que estende θ. Como os representantes das classes em X estão fora de N, esse homomorfismo não pode ser sobrejetor. Igualmente, $ker\theta' \cap N = 1$. Agora $ker\theta' = 1$, pois se a palavra reduzida $w = x_1...x_nN$ está em $ker\theta'$ temos

$$\theta'(x_1 \dots x_nN) = \theta(x_1N) \dots \theta(x_nN) = x_1 \dots x_n = 1_G$$

e então $x_1 \dots x_nN = N$, uma contradição. O fato que as classes laterais de N particionam G implica que $K = im\theta'$ é um complemento de N, conforme desejado. □

Inspirados no exemplo, temos a seguinte definição:

Definição 1.19 *Sejam N e G grupos. Uma extensão de N por G é um grupo E que possui um subgrupo normal K tal que $K \cong N$ e $E/K \cong G$.*

1.2 Apresentações de grupos

Uma *apresentação livre* de um grupo G é um homomorfismo sobrejetor π de um grupo livre F em G. O núcleo de π é chamado *conjunto de relatores*. Em particular, se F é gerado por um conjunto X, a imagem $Y = \pi(X)$ é um conjunto de geradores de G. Se denotarmos $R = ker\pi$, a descrição

$$G = \langle Y|R\rangle$$

é chamada uma apresentação de G em termos dos geradores Y e relações definidoras R

Quando Y é um conjunto finito, G se diz *finitamente gerado*. Quando ambos Y e R são finitos então a apresentação é finita e G se diz *finitamente apresentável*. Um grupo é chamado *coerente* quando qualquer subgrupo finitamente gerado é também finitamente apresentado.

Observamos que dado qualquer conjunto R de palavras sobre X determina um grupo G definido pela apresentação $\langle X|R\rangle$, a saber, o grupo quociente do grupo livre F gerado por X determinado pelo fecho normal de R em F.

Proposição 1.20 *Todo grupo admite uma apresentação e todo grupo finito é finitamente apresentável.*

Demonstração. Dado um grupo arbitrário G, considere o grupo livre F gerado pelo conjunto G. Então há um epimorfimo natural $\theta : F \to G$ tal que $F/\ker\theta \cong G$. Agora, observamos que $ker\theta$ coincide com o fecho normal em F do conjunto

$$R = \{xyz^{-1}; x, y, z \in G \text{ } e \text{ } xy = z\}$$

Portanto, R é um conjunto de relatores. Quando G é finito, R é finito e G é finitamente apresentável. □

O estudo de grupos finitamente gerados e de grupos finitamente apresentados consistiu num dos pontos centrais da pesquisa em Teoria dos Grupo no século passado. Entre muitas conjecturas, as mais famosas e intrigantes neste sentido consistem os *problemas de*

decisão de Dehn. Em 1912, Dehn propõe:

i) **Problema da Palavra**. Seja G um grupo finitamente apresentado. Existe algum algoritmo que determine quando uma palavra w em G é a identidade?

ii) **Problema da Conjugação**. Existe algum algoritmo que determine se dois elementos de G são conjugados?

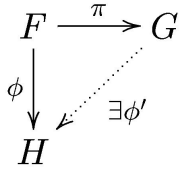
ii) **Problema do Isomorfismo**. Se H é também finitamente apresentado, existe algum algoritmo para determinar de G é isomorfo à H?

Tais problemas foram criados Dehn, assim que este resolve os problemas da palavra e da conjugação para o grupo fundamental de uma variedade bidimensional fechada e orientada, cujo gênero é maior ou igual a dois.

Certos grupos possuem resposta positiva. Em 1955, Novikov mostra um contra-exemplo de um grupo finitamente apresentado para o qual tal algoritmo não existe. No caso dos grupos livres, devido a unicidade da forma normal, para decidir se uma palavra é a identidade, basta reduzí-la ordinariamente. Desta forma, tal palavra somente pode ser a identidade se tiver comprimento positivo.

Vamos agora em direção a um teorema central na teoria das apresentações de grupo: o Teorema de von Dyck.

Lema 1.21 *Sejam F, G e H grupos e homomorfimos $\pi : F \to G$ e $\psi : F \to H$ tais que π é sobrejetor e $\ker \pi \subseteq \ker \psi$ então existe um homomorfismo $\psi' : G \to H$ tal que $\psi'\pi = \psi$.*



Demonstração. Dado $g \in G$, como π é sobrejetiva, existe $f \in F$ tal que $\pi(f) = g$. Definimos ψ' através da regra $\psi'(g) = \psi(f)$. Se existir $f' \in F$ tal que $g = \pi(f')$, a igualdade $\pi(f') = \pi(f)$ implica que $f'f^{-1} \in \ker \pi \subset \ker \psi$, logo $\psi(f') = \psi(f)$. Portanto, ψ' está bem definida. Como ψ é um homomorfismo, então ψ' também é. Da definição de ψ', segue-se a igualdade $\psi'\pi = \psi$ como queríamos demonstrar. □

Teorema 1.22 (von Dick) *Sejam $G = \langle X|R\rangle$ e $H = \langle Y|S\rangle$ grupos tais que $X \subseteq Y$. Se cada relator $r \in R$ equivale à identidade de H, então existe um homomorfismo de G em H que fixa cada simbolo $x \in X$ em H. Em particular, quando X é igual a Y, esse homomorfismo é sobrejetor*

Demonstração. A extensão $\pi : F(X) \to G$ da inclusão de X em G é um epimorfismo tal que $\pi(x) = x$ para todo $x \in X$. Além disso, o fecho normal de R em $F(X)$ é o núcleo de π. A inclusão de X em Y induz um homomorfismo $\psi : F(X) \to H$ tal que $\psi(x) = x$ e $\ker \pi \subseteq \ker \psi$ pois cada $r \in R$ é levado à identidade de H. Pelo lema anterior, existe um homomorfismo induzido $\psi' : G \to H$ tal que $\psi = \psi'\pi$ portanto ϕ' é o homomorfismo desejado. □

A seguir, vamos aplicar o Teorema de von Dick, para obter dois resultados importantes. O primeiro trata de um procedimento simples para se obter apresentações de quocientes de um grupo a partir de uma apresentação dada para o grupo.

Exemplo 1.23 *A apresentação do grupo diedral D_n $n \geq 1$.*

Uma definição clássica para o grupo diedral é considerá-lo como o grupo gerado por $\{r, s\}$, sendo r é rotação r em $2\pi/n$ graus de um polígono P regular de n lados, com centro na origem do plano euclidiano e s a reflexão de P em termos de uma reta que faz ângulo de π/n com o eixo das abscissas. Temos que r e s são transformações lineares de $\mathbb{R}^2$, cujas matrizes de tranformação são:

$$r = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{bmatrix}, \; s = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & -\cos(2\pi/n) \end{bmatrix}$$

Para verificar que o grupo $G = \langle a, b \; ; \; a^n, b^2, ba = a^{-1}b\rangle$ é isomorfo a D_n, utilizamos o Teorema de Von Dick. Por calculos elementares, verifica-se que $r^n = 1$, $s^2 = 1$ e $sr = r^{-1}a$. Portanto, há um homomorfismo sobrejetor $\theta : G \to D_n$.

Agora seja

$$w = r^{\alpha_1} s^{\beta_1} r^{\alpha_2} s^{\beta_2} \dots r^{\alpha_n} s^{\beta_n}$$

uma palavra sobre $\{r, s\}$ que reduzimos, utilizando as relações $r^n = 1$, $s^2 = 1$, de modo que $0 \leq \alpha_j \leq n-1$ e $0 \leq s \leq 1$. Utilizando a 'comutatividade' da relação $sr = r^{-1}a$ e as

relações $r^n = 1$ e $s^2 = 1$, se necessário, obtemos $w = r^k s^l$, com $0 \leq k \leq n-1$ e $0 \leq l \leq 1$. Desta forma, qualquer relação em D_n é derivável das que já mencionamos.

Porém, θ fixa os símbolos $\{a, b\}$, e como os elementos de D_n tem a forma $r^k s^l$, logo $\theta(a^k b^l) = r^k s^l = 1$ implica que $r^k s^l$ é alguma das relações de D_n, logo $a^k b^l$ é uma relação de G. Segue-se então que $ker\theta = 1$ e enfim $D_n \cong G$.□

Corolário 1.24 *Seja $G = \langle X|R\rangle$ um grupo e N o subgrupo normal de G gerado por um conjunto S de palavras sobre X. Então o grupo quociente de G módulo N tem apresentação*

$$G = \langle X|R, S\rangle$$

Demonstração. Definamos H como o grupo que possui a apresentação $H = \langle X|R, S\rangle$. A projeção canônica $\pi : G \to G/N$ associa cada $x \in X$ à classe $xN \in G/N$, portanto, a imagem de X é um conjunto gerador de G/N. Além disso, R é levado a classe trivial de modo que a imagem relator em R é um relator em G/N.

Agora, N é o subgrupo normal em G gerado por S e também o núcleo de π. Então a imagem de S pela projeção canônica consiste em um conjunto adicional de relatores para G/N. Assim, já que R e S são levados à identidade de G/N, pelo Teorema de von Dick, há um homomorfismo induzido $\phi : H \to G/N$. Sendo H e G/N ambos gerados por X, ϕ é sobrejetora.

Resta ver que o núcleo de ϕ é trivial. Seja w uma palavra sobre X tal que $\phi(w) = 1$ então temos que $w \in N$. Como N é fecho normal de S em G podemos espressar w pela equação

$$w = g_1^{-1} s_1 g_1 \dots g_n^{-1} s_n g_n$$

onde $g_i \in G$ e $s_i \in S \cup S^{-1}$. Sendo S um conjunto de relatores de H então w pode ser livremente reduzida à palavra vazia, deletando-se os s_i. Logo, w é equivalente a palavra vazia em H, donde obtemos que ψ é injetora e $H \cong G/N$ □

Exemplo 1.25 Seja $G = \langle X|R\rangle$ um grupo arbitrário. Sabemos que subgrupo comutador G' é um subgrupo normal em G. O quociente $G^{ab} = G/G'$ é chamado de *abelianização* de

G. Em particular sua apresentação é

$$G^{ab} = \langle X | R, [x, y] = 1, x, y \in X \rangle$$

□

Teorema 1.26 (Hall) *Seja N um subgrupo normal de um grupo G tal que G e G/N são finitamente apresentáveis. Então G é finitamente apresentável*

Demonstração. Sejam

$$N = \langle x_1, ..., x_m | r_1 = ...r_k = 1 \rangle$$

$$G/N = \langle y_1 N, ..., y_n N | s_1 = ... = s_t = 1 \rangle$$

apresentações finitas com $x_i, y_j \in G$, para todos i e j.

Como todo $g \in G$ se decompõe sob um produto $g = hn$, $n \in N$ e $h \in G/N$, segue-se que $x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n$ é um conjunto de geradores de G. Tais geradores admitem o seguinte conjunto de relações definidoras:

$$\begin{array}{ll} (i) & r_i(x) = 1 \ \texttt{e} \ s_j(y) = t_j(x), i = 1, ..., k, j = 1, .., l \\ (ii) & y_j^{-1} x_i y_j = u_{ij}(x) \ \texttt{e} \ y_j x_i y_j^{-1} = v_{ij}(x), i = 1, .., m, j = 1, ..., n \end{array} \quad (1)$$

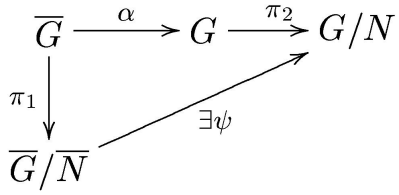
O segundo conjunto de relações de (i) decorre do fato de que $s_j = s_j(x)$ implica em $s_j N = N$, logo $s_j \in N$ e $s_j(y) = t_j(x)$, para algum elemento $t_j(x) \in N = gp_G(x_1, ..., x_n)$

Igualmente como $N \lhd G$, os conjugados $y_j x_i y_j^{-1}$ e $y_j^{-1} x_i y_j$ estão em N e portanto, as relações em (ii) são naturais.

Seja $\overline{G}$ o grupo gerado pelos símbolos $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_m, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_n$ em correspondência com $x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n$, e que satisfazem as mesmas relações de (1). Pelo Teorema de von Dick, existe um homomorfismo sobrejetor $\alpha : \overline{G} \to G$ que fixa os $\overline{x}_i$ e $\overline{y}_j$ para todos i e j.

A restrição de α ao subgrupo $\overline{N} = gp_G(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_m)$ é um isomorfismo de $\overline{N}$ em N, pois as relações entre os x_i só dependem das relações $r_j(x) = 1$, conforme a apresentação de N. Portanto, segue-se que $\overline{N} \cap \ker \alpha = 1$.

Pelas relações em (ii) em termos dos geradores de $\overline{G}$, $\overline{N}$ é normal em $\overline{G}$. Pelo lema anterior, α induz um epimorfismo $\psi : \overline{G}/\overline{N} \to G/N$ tal que $\overline{y}_i \overline{N} \to y_i N$



Como as relações de G/N só dependem dos $s_j(yN)$, então ψ também é injetora. Agora, a igualdade $\overline{N} \cap \ker \alpha = 1$ implica que a restrição $\phi|_K$ é injetora e de acordo com o diagrama acima, α é injetora. Portanto, $K = 1$, $\overline{G} \cong G$ e G é finitamente apresentado. □

Corolário 1.27 *Seja G um grupo que possui uma série de subgrupos normais*

$$G = G_n \geq ... \geq G_1 \geq G_0 = 1$$

tal que cada quociente G_{i+1}/G_i é cíclico para todo $i = 1, ..., n$. Então G é finitamente apresentado.

Demonstração. Seja G não-trivial e $n \geq 1$. Para o caso $n = 1$ a prova é imediata. Caso $n \geq 1$, admitimos que a série normal não tenha fatores triviais. Iniciando por $i = 1$ temos que $G_1 = G_1/1$ e G_2/G_1 são finitamente apresentáveis, pois são grupos cíclicos. Então G_2 é finitamente apresentado, devido ao Teorema de Hall. Repetindo essa observação para $G_i, i > 2$ segue-se que G é finitamente apresentado. □

Observação 1.28 Um grupo G nas hipóteses do corolário acima é chamado de grupo *policíclico*. Quando os quocientes são apenas grupos abelianos (não necessariamente cíclicos), G é chamado de grupo *solúvel*. Grupos policíclicos, por satisfazer a condição maximal para grupos, são tais que qualquer um de seus subgrupos são finitamente gerados. Pelo Exemplo 1.15, grupos livres de posto > 1 não podem ser policíclicos, pois o subgrupo comutador não é finitamente gerado. Para uma exposição sobre tal condição maximal para grupos, indicamos ao leitor consultar [15].

Observação 1.29 A noção de grupo livre dada neste capítulo pode ser generalizada no sentido das variedade de grupos. Uma *classe de grupos* $\mathcal{X}$ é uma classe cujos elementos são grupos e que satisfazem as seguites condições:

i) $1 \in \mathcal{X}$.

ii) se $G \cong G_1 \in \mathcal{X}$ *então* $G \in \mathcal{X}$.

Uma *variedade de grupos* é uma classe de grupos determinada por um conjunto de equações. Mais precisamente, se W é um conjunto de palavras sobre $x_1, x_2, ...$, a variedade determinada por W é a classe de grupos tal que $W(G) = 1$, isto é, as palavras em W quando reescritas em termos de elementos arbitrários de G são sempre triviais.

Cada variedade $\mathcal{B}$ possui grupos $\mathcal{B}$-livres, que satisfazem uma propriedade universal: Seja X um conjunto arbitrário, $F \in \mathcal{B}$ e uma aplicação $\iota : X \to F$. (F, ι) é chamado grupo $\mathcal{B}$-livre sobre X se para qualquer $G \in \mathcal{B}$ e aplicação $\theta : X \to G$ existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ tal que $\theta = \theta'\iota$.

Por exemplo, a variedade determinada por $W = \{\emptyset\}$ é a veriedade dos grupos livres. Quando $W = \{[x_1, x_2]\}$, temos a variedade dos grupos abelianos. Em geral, se F é um grupo livre sobre X e $\mathcal{B}$ a variedade definida por um conjunto W de palavras sobre X então o quociente F/N determinado pelo fecho normal de W em F é um grupo $\mathcal{B}$-livre sobre X. (Ver [12], p. 58.)

1.3 Transformações de Tietze

O Teorema de von Dick também se aplica para mostrar que as chamadas *transformações de Tietze* aplicadas à uma apresentação de um grupo não altera sua classe de isomorfismo. Vamos, a seguir, definir tais transformações.

Definição 1.30 *Dado um grupo $G = \langle X|R\rangle$. Chama-se uma transformação de Tietze as seguintes operações:*

(T_1) - *Inserir um relator r derivável de quaisquer relatores em R*

(T_2) - *Deletar um relator r derivável de quaisquer relatores em R*

(T_3) - *Inserir um símbolo gerador y considerando, para alguma palavra w sobre X, o produto $y^{-1}w$ como um relator.*

(T_4) - *Deletar um gerador y que é uma palavra sobre os demais geradores em X.*

Através das transformações de Tietze concluimos que um grupo pode admitir inúmeras apresentações. É comum, portanto, adaptar uma apresentação através destas transformações de modo a obter uma apresentação mais conviniente, simplificada ou que se enquadre à algum modelo reconhecido.

Exemplo 1.31 *O grupo $G = \langle a, b, c|(ab)^2ab^2 = 1\rangle$ é um grupo livre de posto 2.*

Considerando $x = ab$ e $y = ab^2$, por (T3), podemos inserir novos geradores na apresentação de G:

$$G = \langle a, b, c, x, y|(ab)^2ab^2 = 1, x = ab, y = ab^2\rangle$$

Da definição de x e de y e a primeira relação, segue-se que $x^2y = 1$, e por $(T1)$ obtemos:

$$G = \langle a, b, c, x, y|(ab)^2ab^2 = 1, x = ab, y = ab^2, x^2y = 1\rangle$$

Com isso, a relação $(ab)^2ab^2 = 1$ é derivável dos demais relatores, a qual eliminamos, usando (T2):

$$G = \langle a, b, c, x, y|x = ab, y = ab^2, x^2y = 1\rangle$$

Como $a = xb^{-1} = yb^{-2}$ temos $b = x^{-1}y$ e $a = xy^{-1}x$, portanto, podemos inserir as novas relações por (T1):

$$G = \langle a, b, c, x, y | x = ab, y = ab^2, x^2y = 1, b = x^{-1}y, a = xy^{-1}x \rangle$$

Assim, deletar os geradores a e b, da apresentação:

$$G = \langle c, x, y | x = xy^{-1}xx^{-1}y, y = xy^{-1}x(x^{-1}y)^2, x^2y = 1 \rangle$$

Como as duas primeiras relações são redundantes, podemos eliminá-las através de (T2):

$$G = \langle c, x, y | x^2y = 1 \rangle$$

Agora pondo y em termos de x, usando (T4), eliminamos tal relação, obtendo finalmente:

$$G = \langle c, x | \ \rangle$$

□

Teorema 1.32 (Tietze) *A realização de uma sequência finita de transformações de Tietze sobre uma apresentação de um grupo G conduz a uma apresentação de um grupo isomorfo a G. Reciprocamente, dadas duas apresentações de um grupo G, é possível passar de uma à outra através de uma sequência de transformações de Tietze.*

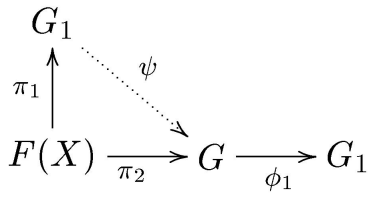
Demonstração. Seja $G = \langle X | R \rangle$ um grupo arbitrário e consideremos as apresentações

$$G_1 = \langle X | R, r \rangle \text{ e } G_2 = \langle X, y | R, wy^{-1} \rangle$$

que foram obtidas a partir da apresentação de G ao aplicar as transformações (T_1) e (T_3) respectivamente.

Vamos mostrar que G é isomorfo a G_1. Pelo Teorema de von Dyck, existem epimorfismos $\phi_i : G \to G_i$, $i = 1, 2$ que fixam X. Seja $\theta_1 : X \to G_1$ uma inclusão e $\pi_1 : F(X) \to G$ e $\pi_2 : F(X) \to G$ os epimorfismos induzidos do grupo livre $F(X)$ em G e G_1.

Como r é derivável de elementos de R então segue-se que $ker\pi_1 \subset ker\pi_2$ e portanto pelo Lema 2 deve existir um homomorfismo $\psi : G_1 \to G$ que satisfaz $\psi\pi_1 = \pi_2$.



As projeções π_i, $i = 1, 2$ fixam cada $x \in X$ em G e em G_1 donde temos $\psi\phi_1 = Id_G$ e portanto ϕ_1 é também injetora, logo $G \cong G_1$

Para a segunda apresentação, definamos F como o grupo livre gerado por $X \cup \{y\}$ e respectivos homomorfismos $\pi_1 : F \to G$ e $\pi_2 : F \to G_2$ induzidos por inclusão. Como em F, $ker\pi_1$ é o fecho normal de $R \cup \{yw^{-1}\}$ e $ker\pi_2$ é o fecho normal de $R \cup \{y\}$, segue-se que $ker\pi_1 \subset ker\pi_2$. Daí, existe um homomorfismo $\psi : G_2 \to G$ tal que $\psi\phi_2 = Id_G$. Assim, ϕ_2 é injetora e $G \cong G_2$

Reciprocamente, dadas duas apresentações $\langle X|R(X)\rangle$ e $\langle Y|R(Y)\rangle$ que definem um mesmo grupo. Vamos obter a segunda apresentação a partir da primeira.

Escrevemos o conjunto de geradores em X em função dos geradores em Y, o que define um conjunto de relações $X = X(Y)$. Do mesmo modo, construimos um conjunto de relações $Y = Y(X)$. O símbolo $Y = Y(X(Y))$ significa que os geradores em Y foram reescritos em função dos geradores de X e este, por sua vez está dado em função dos geradores de Y.

As transformações de Tietze podem ser aplicadas como segue - mais de uma vez em cada etapa se necessário. Iniciando com a apresentação $\langle X|R(X) = 1\rangle$, como $Y \subset G$, podemos inserir os geradores em Y através de $(T3)$:

$$\langle X, Y|R(X) = 1, Y = Y(X)\rangle$$

Agora, escrevemos X em termos dos geradores Y, o que consiste em um conjunto de relações redundantes, as quais podem ser inseridas utilizando $(T1)$:

$$\langle X, Y|R(X) = 1, Y = Y(X), X = X(Y)\rangle$$

Igualmente, podemos reescrever as relações de $R(X)$ em termos de Y e então por $(T1)$ obtemos:

$$\langle X, Y|R(X) = 1, Y = Y(X), X = X(Y), R(X(Y)) = 1\rangle$$

Com a inserção de $R(X(Y))$, $R(X)$ torna-se redundante e pode ser eliminado por $(T2)$:

$$\langle X, Y | Y = Y(X), X = X(Y), R(X(Y)) = 1 \rangle$$

Por $(T1)$ podemos inserir $Y = Y(X(Y))$:

$$\langle X, Y | Y = Y(X), X = X(Y), R(X(Y)) = 1, Y = Y(X(Y)) \rangle$$

Como X está descrito em função de Y, o conjunto $Y = Y(X)$ é redundante e podemos eliminá-lo por $(T2)$

$$\langle X, Y | X = X(Y), R(X(Y)) = 1, Y = Y(X(Y)) \rangle$$

Eliminanos X do conjunto de geradores, através de $(T4)$:

$$\langle Y | R(X(Y)) = 1, Y = Y(X(Y)) \rangle$$

Aplicando $(T1)$, inserimos o conjunto de relações $S(Y)$

$$\langle Y | R(X(Y)) = 1, Y = Y(X(Y)), S(Y) = 1 \rangle$$

Finalmente, $R(X(Y))$ e $Y(X(Y))$ são redundantes e podemos eliminá-los por $(T2)$, obtendo a segunda apresentação, conforme desejado:

$$\langle Y | S(Y) = 1 \rangle$$

□

Daí segue-se naturalmente o

Corolário 1.33 *Duas apresentações finitas de grupo podem ser transformadas de uma para outra através de uma quantidade finita de transformações de Tietze*

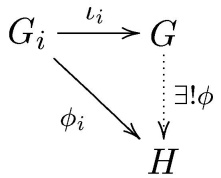
Capítulo 2

Construções Livres

O produto livre de grupos foi idealizado em meados de 1926, independentemente por Schreier e Artin como sendo um grupo formado pelo conjunto de todas as palavras que satisfazem a condição de forma normal, assim como na seção 2.1.1. Em 1933, Kurosh postula que, além das formas normais, o produto livre é o grupo cujo geradores são os mesmos que os geradores de cada grupo da família, e cujas relações são as aquelas herdadas por esses geradores. Assim, não deve existir qualquer relação entre geradores de diferentes fatores da família. No ano seguinte, ele demonstra uma versão do seu famoso teorema para subgrupos e também o teorema da decomposição em subgrupos indecomponíveis.

2.1 Produtos Livres

Definição 2.1 *Seja $(G_i|i \in I)$ uma família não vazia de grupos. O produto livre dos G_i consiste de um grupo $G = *G_i$ e uma coleção de homorfismos $\iota_i : G_i \to G$ tais que para cada grupo H e cada família de homomorfismos $\phi_i : G_i \to H$, existe um único homomorfismo $\phi : G \to H$ tal que $\phi\iota_i = \phi_i$, ou seja, para cada i, o diagrama seguinte é comutativo*



Da definição segue naturalmente o:

Teorema 2.2 *Seja (G, ι_i) um produto livre de uma família não vazia de grupos $(G_i|i \in I)$ tem-se:*

1. *Cada aplicação ι_i é uma imersão de G_i em G.*

2. *O produto livre é gerado pelas imagens das aplicações ι_i.*

3. *O produto livre dos G_i é unico, a menos de isomorfismo.*

Demonstração. (i) Fixamos um índice $j \in I$ arbitrário e definimos $H = G_j$ e uma coleção de homomorfismos $(\phi_i|i \in I)$ de cada G_i em H pondo $\phi_j = Id_{G_j}$ e $\phi_i = 1$ para $i \neq j$. Pela propriedade universal de G, a extensão $\phi : G \to G_i$ satisfaz $\phi\iota_i = \phi_i$ e a injetividade de ϕ_j implica que ι_i também é injetiva, como queríamos demonstrar. Mais adiante, o Teorema das Formas Normais irá nos garantir que as cópias dos G_i em G são duas a duas disjuntas.

(ii) Defina H como o subgrupo de G gerado pelas imagens de todas as ι_i em G. Assim cada G_i mergulha-se em H pelas inclusões $\phi_i = \iota_i$, o que resulta em uma extensão $\phi : G \to H$ tal que $\phi\iota_i = \iota_i$. Agora, seja $\psi : H \to G$ uma inclusão. Então o produto $\psi\phi$ estende a família de homomorfismos $\psi\iota_i$ e para cada $g \in G_i$ vale

$$\psi\varphi\iota_i(g) = \psi\iota_i(g) = \iota_i(g)$$

assim como a identidade de G. Por unicidade, temos $1_G = \psi\phi$, donde

$$G = Im\psi\phi = Im\phi \subset H$$

logo $G = H$.

(iii) Seja (K, τ_i) um outro produto livre da família $(G_i|i \in I)$. Aplicando-se a propriedade universal para G e para K, obtemos extensões $\phi : G \to H$ e $\theta : H \to G$ tais que $\theta\tau_i = \iota_i$ e $\phi\iota_i = \tau$ para todo i. Segue-se daí que a restrição de $\theta\phi$ às imagens dos G_i coincide com a identidade de H, assim como a restrição de $\phi\theta$ às imagens dos G_i coincide com a identidade de G. Por unicidade $\phi\theta = 1_G$ e $\theta\phi = 1_H$ e portanto φ e ψ são isomorfismos. □

Teorema 2.3 *Dada uma coleção de grupos $(G_i|i \in I)$, existe um grupo G que é o produto livre dos grupos G_i.*

Demonstração Sem perca de generalidade, podemos admitir que, para cada par de índices distintos $i, j \in I$, os grupos G_i e G_j são conjuntos dijuntos. Definimos U como a união dos G_i e seja S o conjunto de todas as palavras sobre U.

Uma *operação elementar* sobre uma palavra em S é qualquer uma das ações abaixo:

1. Inserir um elemento identidade de algum dos G_i.

2. Deletar um elemento identidade de algum dos G_i.

3. Trocar dois símbolos consecutivos $g_i g_{i+1}$que pertencem a um mesmo G_i por $g \in G_i$ tal que $g = g_i g_{i+1}$

4. Trocar um símbolo $g \in G_i$ pelo produto de dois símbolos $g_i, g_{i+1} \in G_i$ tais que $g = g_i g_{i+1}$.

Definimos uma relação de equivalência $\sim$ sobre S do seguinte modo: duas palavras u e v são equivalntes se e somente se, é possivel passar de u para v através de uma sequência finita de operações elementares.

A verificação dos fatos seguintes é elementar, e omitiremos os detalhes. A partir desta relação de equivalência, o produto de classes de palavras $[u][v] = [uv]$ é uma operação bem definida em $S/\sim$ e é associativa. A classe [1] da palavra vazia é uma identidade e para cada $u \in S$, $[u^{-1}]$ é um inverso para a classe $[u]$. Definimos G como o quociente $S/\sim$. Assim, G é um grupo com essa operação.

As aplicações $\iota_i(g) = [g]$ são naturalmente homorfismos e as imagens das ι_i geram G. Seja H um grupo arbitrário e uma coleção de homorfismos $\phi_i : G_i \to H$. A regra

$$\phi([g_1 \dots g_n]) = \phi_1([g_1]) \dots \phi_n([g_n])$$

define um homomorfismo de G em H tal que $\phi\iota_i = \phi_i$. Se $\phi' : H \to G$ for um outro homomorfismo tal que $\phi'\iota_i = \phi_i$, esta última igualdade implica que ϕ e ϕ' coincidem nas imagens das ι_i, logo $\phi = \phi'$, pois G é gerado pelas imagens das ι_i. Assim segue-se a

unicidade de ϕ e (G, ι_i) é, de fato, o produto livre dos G_i. $\square$

O teorema a seguir mostra-nos como obter o produto livre de uma familia de grupos com apresentações dadas, assim como afirmado por Kurosh:

Teorema 2.4 *Seja $(G_i|i \in I)$ uma família de grupos com respectivas apresentações $G_i = \langle X_i|R_i\rangle$. O produto livre dos G_i tem apresentação*

$$*G_i = \langle \cup X_i| \cup R_i; i \in I\rangle$$

e tal apresentação é independente das apresentações consideradas.

Demonstração. Para cada $i \in I$, seja F_i o grupo livre gerado por X_i. A família de apresentações dadas implicam na existência de epimorfismos $\pi_i : F_i \to G_i$ tais que para cada $i \in I$, $\ker \pi_i$ coincide com o fecho normal de R_i em F_i. Pelo exemplo anterior, o produto livre $F = *F_i$ é um grupo livre sobre $\bigcup X_i$. Das inclusões $\iota_i : G_i \to G$, segue-se que, as composicações $\pi_i\iota_i$ aplicam cada $F_i \subset F$ em G, logo há uma extensão $\phi : F \to G$. Agora ϕ é sobrejetiva e $ker\phi$ coincide com o fecho normal de $\bigcup R_i$, como queríamos demostrar. A independência das apresentações escolhidas decorre do teorema de Tietze. $\square$

2.1.1 Forma Normal em Produtos Livres

Definição 2.5 *Dada uma coleção de grupos $(G_i|i \in I)$, uma forma normal sobre os G_i é qualquer expressão $g_{i_1}g_{i_2}\ldots g_{i_n}$ tal que $n \geq 0$, $1 \neq g_{i_k} \in G_{i_k}$, $i_k \neq i_{k+1}$ e $h = 1, ..., n$.*

Teorema 2.6 *Cada elemento do produto livre possui uma única forma normal sobre os fatores livres*

Demonstração. Sejam G o produto livre de uma família de grupos $(G_i|i \in I)$ e S o conjunto de todas as formas normais $g_1...g_n$ sobre os G_i. Para cada elemento não trivial $g_r \in G_r$, definimos uma regra ϕ_{g_r} de S em S:

$$\phi_{g_r}(g_1...g_n) = g_1...g_ng_r \quad se\ g_r \neq G_n$$
$$\phi_{g_r}(g_1...g_n) = g_1...g_ng_r \quad se\ g_r \in G_n\ e\ g_ng_r \neq 1$$
$$\phi_{g_r}(g_1...g_n) = g_1...g_{n-1} \quad se\ g_r \in G_n\ e\ g_ng_r = 1$$

Assim, cada $g_r \in G_r$ determina uma permutação em $Sym\ S$, cuja inversa é a aplicação $\phi_{g_r{}^{-1}}$.

Agora, para cada $r \in I$, a função $\phi_r : G_r \to Sym\, S$, $g_r \to \phi_{g_r}$ é um homomorfismo. Pela propriedade universal de G, as aplicações ϕ_i determinam uma extensão $\phi : G \to Sym\, S$ tal que $\phi\iota_i = \phi_r$. Deste modo, ϕ induz uma G-ação em S:

$$\begin{array}{rcl} G \times S & \to & S \\ (g, s) & \to & g \cdot s = \phi_g(s) \end{array}$$

onde $\phi_g = \phi(g)$ é a imagem de $g \in G$ em $Sym\ S$.

A ação de um $g \in G$ sobre a palavra vazia de S é simplesmente a forma normal de g, a qual deve ser única, pois se $g = h$ em G, a ação implica que $g \cdot 1 = h \cdot 1$. □

Com a unicidade da forma normal podemos deduzir propriedades importantes acerca da estrutura de um produto livre. Em particular, segue-se que a interseção entre os fatores é trivial. O corolário a seguir nos conta que a unicidade da forma normal caracteriza os produtos livres.

Corolário 2.7 *Se um grupo H gerado por subgrupos $(G_i, i \in I)$ é tal que cada elemento tem uma única forma normal sobre os G_i então H é o produto livre dos G_i*

Demonstração. Sejam G o produto livre dos G_i. As inclusões dos G_i em H induzem um homomorfismo ϕ de G em H, cuja regra consiste em associar cada forma normal sobre os G_i ao respectivo elemento em H. Claramente ϕ é sobrejetiva, enquanto que, se cada elemento de H possui uma única forma normal sobre os G_i, segue-se que ϕ é injetiva e portanto $G \cong H$.□

Teorema 2.8 *Seja G o produto livre dos grupos G_i, $i \in G$*

(i) Se um elemento $g \in G$ possui forma normal $g_1 \dots g_n$ tal que g_1 e g_n pertencem a fatores livres distintos então g tem ordem infinita.

(ii) Se pelo menos dois fatores livres de G não são triviais então G possui um elemento de ordem infinita

(iii) Um elemento de ordem finita em G é conjugado a elemento de algum dos fatores livres.

Demonstração. (i) e (ii) Dado $m > 0$, qualquer potência de um elemento g é obtida pela justaposição da palavra $g_1 \dots g_n$ por m vezes. Por hipótese, o produto $g_m g_1$ não pode ser reduzido e portanto g^m não pode ser a palavra vazia, então g tem ordem infinita. Se há dois fatores livres não triviais, escolhemos dois elementos não triviais $g_i \in G_i$ $i = 1, 2$, então o produto $g_i g_{i+1}$ tem ordem infinita, o que prova os itens (i) e (ii).

(iii) Vamos realizar indução sobre o comprimenro da forma normal de g. Quando $m = 1$, o resultado é imediato. Suponhamos que o resultado é válido para algum $k < n$. Seja $g = g_1 \dots g_n \in G$ em sua forma normal e que tenha ordem finita. Então, pelo parágrafo anterior, devemos ter $i_1 = i_n$. Além disso, o conjugado $g_1 \dots g_{n-1} = g_n g {g_n}^{-1}$ também tem ordem finita. Como $g_1 \dots g_{n-1}$ tem comprimento menor do que o de g, segue-se pela hipótese de indução que $g_1 \dots g_{n-1}$, e portanto g, é conjugado a um elemento em algum dos fatores livres. □

Proposição 2.9 *Seja G o produto livre dos grupos $(G_i | i \in I)$. Se $1 \neq g \in G_j$ para algum j então o centralizador $C_G(g)$ está contido em G_j. Consequentemente, o centro de um produto livre com dois fatores não triviais é trivial.*

Demonstração Seja $x = x_1 \cdots x_n \in C_G(g)$ em sua forma normal. Podemos assumir que x_1 e x_n não pertencem a G_j simultaneamente. Assim temos $g x_1 \cdots x_n = x_1 \cdots x_n g$, o que pela unicidade da forma normal somente é possível quando $n = 1$ e $x = x_1 \in G_j$.

Se x está no centro de G então x está no centralizador de qualquer $g \in G_j$ para todo j. Como $G_j \bigcap ger_G(G_i | i \in I, i \neq j)$ é trivial, $Z(G)$ também é trivial. □

Exemplo 2.10 *O grupo* $G = \langle a, b | a^4 = 1 = b^6, a^2 = b^3 \rangle$ *não é um produto livre*

De fato, temos que a^2 comuta com a e b, portanto $a \in Z(G)$. Para ver que a^2 não é trivial considere o homomorfismo de G no grupo cíclico $C_{12} = \langle x | x^{12} = 1 \rangle$ estendido pela regra $a \to x^3$, $b \to x^2$. Como a^2 é levado a $x^6 \neq 1$, a não pode ser trivial, como desejávamos. $\square$

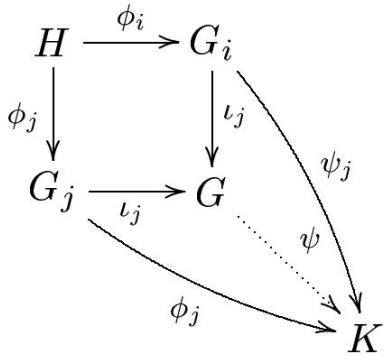
2.2 Produtos Livres com Amalgamação

No contexto da topologia algébrica, os produtos livres com amalgamação surgem naturalmente através do famoso teorema de Seifert-Van Kampen, que nos conta como construir o grupo fundamental de um espaço X a partir dos grupos fundamentais de seus subespaços aberto que são e que possuem interseção conexa por caminhos.

Do ponto de vista grupo-teorético, esses produtos generalizam a noção de produto livre e de grupos livres, sendo muitas vezes referidos como o *produto livre generalizado* ou simplesmente *amálgama*.

Definição 2.11 *Seja H um grupo, uma família de grupos $G_i; i \in I$ e uma coleção de monomorfismos $\phi_i : H \to G_i$. O produto livre dos G_i com subgrupo amalgamado H consiste um grupo G e uma coleção de homomorfimos $\iota_i : G_i \to G$ tais que :*

1. *$\phi_i\iota_i = \phi_j\iota_j$ para todos $i, j \in I$*
2. *Para um grupo K arbitrário e uma coleção de homomorfismos $\psi_i : G_i \to K$ tal que $\psi_i\phi_i = \psi_j\phi_j$ para todos $i, j \in I$ então existe um único homomorfismo $\psi : G \to K$ tal que $\psi\iota_i = \psi_i$ para todo $i \in I$*



Teorema 2.12 *Seja H um grupo e $(G_i|i \in I)$ uma família de grupos como na definição anterior. Então existe um grupo G que é o produto livre dos grupos G_i com subgrupo amalgamado H.*

Demonstração Defina F como o produto livre dos G_i e $\phi_i : G_i \to F$ as inclusões naturais. Neste grupo, consideramos N como o fecho normal em F do conjunto

$$\{{\phi_i}^{-1}(h)\phi_j(h)|h \in H, i, j \in I\}$$

Vamos verificar que o produto livre dos G_i com subgrupo H amalgamado é exatamente o quociente $G = F/N$.

Seja $\pi : F \to F/N$ a projeção canônica. Definimos as aplicações $\iota_i : G_i \to G$ como a restrição de π a cada G_i. Como qualquer produto ${\phi_i}^{-1}(h)\phi_j(h)$ está em N, independentemente dos índices h, i ou j, segue-se que $\pi({\phi_i}^{-1}(h)\phi_j(h))N = N$ e então $\pi(\phi_i(h)) = \pi(\phi_j(h))$ donde obtemos $\iota_i(\phi_i(h)) = \iota_j(\phi_j(h))$ para todo $h \in H$.

Agora, seja K um grupo arbitrário e uma coleção de monomorfismos $\psi_i : G_i \to K$ tais que $\psi_i\phi_i = \psi_j\phi_j$. Pela propriedade universal de F, existe um homomorfismo $\psi : F \to K$ tal que $\psi(g) = \psi_i(g)$ para todo $g \in G_i$. Segue-se que, para qualquer forma normal em F vale:

$$\psi(g_1 \dots g_n) = \psi_{i_1}(g_1) \dots \psi_{i_n}(g_n)$$

Assim, dados $h \in H$ e $i, j \in I$ arbitrários segue-se que:

$$\psi({\phi_i}^{-1}(h)\phi_j(h)) = (\psi_i\phi_i(h))^{-1}\psi_j\phi_j(h) = 1$$

pois, por hipótese, $\psi_i\phi_i = \psi_j\phi_j$. Assim, concluimos que $N \subset \ker\psi$ e portanto $\ker\pi \subset \ker\psi$. Então existe um homomorfismo induzido $\psi' : G \to K$ tal que $\psi'\pi = \psi$ e portanto $\psi = \psi'\iota_i$ para qualquer $i \in I$.

Além disso, dado um homomorfismo $\psi'' : G \to K$ tal que $\psi''\iota_i = \psi$, segue-se que $\psi' \equiv \psi''$ pois, de acordo com o Teorema 2.2, o quociente F/N é gerado pelas imagens das ι_i. Portanto (G, ι_i) é o produto livre dos G_i com subgrupo H amalgamado □

Combinando o Teorema e o Corolário 1.24, segue-se o:

Corolário 2.13 *Seja $G_i; i \in I$ uma família de grupos com respectivas apresentações $G_i = \langle X_i | R_i \rangle$, $i \in I$ e $\phi_i : H \to G_i$, $i \in I$ então o produto livre dos G_i com subgrupo amalgamado H tem apresentação*

$$*_H G_i = \left\langle \bigcup X_i | \bigcup R_i, \phi_i(h) = \phi_j(h); i, j \in I \right\rangle$$

e tal apresentação é independente das apresentações adotadas para os G_is

Vemos então que no exemplo 2.10 que $G = \langle a, b | a^4 = 1 = b^6, a^2 = b^3 \rangle$ é o produto livre entre os grupos cíclicos C_4 e C_6 cujo subgrupo amalgamado é $\langle a^2 \rangle$ através pelo monomorfismo $a^2 \to b^3$.

2.2.1 Formas Normais em Produtos Livres com Amalgamação

Definição 2.14 *Seja G um grupo e $H \leq G$. Uma transversal de H em G é uma coleção T de representantes de classes laterais à direita (ou à esquerda) de H, tal que $T \cap Hg$ é unitário para todo $g \in G$.*

Definição 2.15 *Sejam um grupo H, uma família de grupos $(G_i|i \in I)$ e uma coleção de monomorfismos $\phi_i : H \to G_i$. Dadas transversais T_i fixadas para cada subgrupo $H_i = Im\phi_i$ em cada G_i. A forma normal de um $f \in *G_i$ em termos dos monomorfismos ϕ_i e das transversais T_i é uma expressão*

$$h\overline{g_i}g_2 \dots \overline{g_r}$$

tal que $f \equiv \phi_{i_1}(h)g_1 \dots g_r \bmod N$, onde $r \geq 0$, $h \in H$, $g_k \in G_{i_k}$, $\bar{g_k} \neq 1$, $i_k \neq i_{k+1}$ para $k = 0, ..., r-1$.

Observação 2.16 Para facilitar a leitura da demonstração seguinte, vamos utilizar eventualmente índices superiores à esquerda para indicar a imagem de um elemento por uma aplicação, quando ambos possuirem índices subescritos. Por exemplo, a imagem $\phi_i(h_j)$ deverá ser escrita como $(h_j)^{\phi_i}$.

Teorema 2.17 *Cada $f \in *G_i$ admite uma única forma normal em termos dos monomorfismos $\phi_i : H \to G_i$ e transversais T_i.*

Demonstração. Seja $f = u_1 \dots u_r$ uma forma normal. Para cada subgrupo $H_i = Im\phi_i$, escolhemos uma transversal à direita T_i com representantes $\overline{g_i}$ das classes laterais $H_i g_i$ em G_i, com a convensão que $\overline{1} = 1$ é o representante da classe trivial.

Para $g_r \in G_{i_r}$ escrevemos $g_r = u_r$ e portanto $u_r = h_r^{\phi_r}\overline{g_r}$. Pela definição de N, segue-se que $h_r^{\phi_{r-1}} \equiv h_r^{\phi_r} \ mod\ N$ para qualquer $h_r \in H$, donde obtemos

$$f \equiv u_1 u_2 \dots u_{r-1} h_r^{\phi_{r-1}} \overline{g_r} \ mod\ N$$

Observando que para qualquer j e r vale $h_{r-j}^{\phi_{r-j-1}} \equiv h_{r-1}^{\phi_{r-1}} \ mod\ N$, substituições do tipo $g_{r-j} = u_{r-j} h_{r-j+1}^{\phi_{r-j}} = h_{r-j}^{\phi_{r-j}} \overline{g_{r-j}}$, nos conduz à equivalencia:

$$f \equiv h_1^{\phi_1} \overline{g_1}\ \overline{g_2} \dots\ \overline{g_r} \ mod\ N$$

depois de repetirmos o processo de substituição $r-1$ vezes, provando a existencia da forma normal.

Para a demonstração da unicidade, definimos M como conjunto de todas as formas normais obtidas como anteriormente. Para cada $x \in G_i$ definimos a regra $x^* : M \to M$ que associa cada forma normal $h_1\overline{g_1}\ \overline{g_2}\ldots\ \overline{g_r}$ em M, à forma normal da expressão $h^{\phi_1}\overline{g_1}\ \overline{g_2}\ldots\ \overline{g_r}x$. Como a aplicação $(x^{-1})^*$ é uma inversa para x^*, segue-se que cada x^* é uma permutação de M.

Resta-nos verificar que a regra $x \to x^*$ é um homomorfismo de G_i em $Sym\ M$. Dada uma forma normal $h\overline{g_1}\ \overline{g_2}\ldots\ \overline{g_r}$ arbitária, segue-se que

$$x^*(h\overline{g_1}\ \overline{g_2}\ldots\ \overline{g_r}) = hh_1\overline{g_1(h_2)^{\phi_1}}\ldots\ \overline{g_r(h_{r+1})^{\phi_r}}\overline{x},$$

onde $\bar{x}$ deve ser deletado se $x \in H_r$. Aplicando a imagem $x^*(h\overline{g_1}\ \overline{g_2}\ldots\ \overline{g_r})$ à y^* segue-se:

$$y^*(x^*(h\overline{g_1}\ \overline{g_2}\ldots\ \overline{g_r})) = hh_1k_1\overline{g_1(h_2k_2)^{\phi_1}}\ldots\ \overline{g_r(h_{r+1}k_{r+1})^{\phi_r}}\overline{xy}$$

Para a permutação $(xy)^*$ temos:

$$(xy)^*(h\overline{g_1}\ \overline{g_2}\ldots\ \overline{g_r}) = hl_1\overline{g_1(l_2)^{\phi_1}}\ldots\ \overline{g_r(l_{r+1})^{\phi_r}}\overline{xy}.$$

Das equações $x = h_{r+1}^{\phi_r}\bar{x}$, $\bar{x}y = k_{r+1}^{\phi_r}\bar{x}y$ e $xy = l_{r+1}^{\phi_j}$ segue-se que $l_{r+1} = h_{r+1}k_{r+1}$. Igualmente, as equações

$$\begin{aligned}
&\bar{g_i}h_{i+1}^{\phi_i} = k_i^{\phi_i}\overline{g_ih_{i+1}^{\phi_i}}\\
&\overline{g_ih_{i+1}^{\phi_i}}k_{i+1}^{\phi_i} = k_i^{\phi_i}\overline{g_i(h_{i+1}k_{i+1})^{\phi_i}}\\
&\bar{g_i}l_{i+1}^{\phi_i} = l_i^{\phi_i} = \overline{g_il_{i+1}^{\phi_i}}
\end{aligned}$$

implicam que $l_i = h_ik_i$ para $1 \leq i \leq r$ e portanto $x^*y^* = (xy)^*$, donde concluimos que $x \to x^*$ é um homomorfismo. Consequentemente, existe um homomorfismo ϕ_i de cada G_i em $Sym\ M$.

Seja ϕ a respectiva extensão de $F = *G_i$ em $Sym\ M$. Como ${\phi_i}^{-1}(h)\phi_i(h) \in N$ para todo $h \in H$ e $i, j \in I$, ϕ aplica cada elemento de N à identidade de $SymM$.

Dado $f \in F$, cuja forma normal é $f = h_1\overline{g_1}...\overline{g_r}$, segue-se que

$$f \equiv h_1^{\phi_1}\overline{g_1}\ \overline{g_2}\ldots\ \overline{g_r}\ mod\ N$$

e então

$$\phi(f) = (h_1^{\phi_1}\overline{g_1}\ \overline{g_2}\dots\ \overline{g_r})^{\phi} = (h_1^{\phi_1})^{\phi}\overline{g_1}^{*}\dots\overline{g_r}^{*}$$

que é nada mais que a forma normal de f. Agora, a ação de G em M leva cada par $(f, 1)$ à forma normal de f, e portanto a mesma deve ser única, concluindo a demonstração □

Teorema 2.18 *Seja G o produto livre dos grupos $(G_i|i \in I)$ com subgrupo H amalgamado por monomorfismos $\phi_i : H \to G_i$. Então existem subgrupos $\overline{H}$ e $\overline{G_i}$ $i \in I$, em G tais que $H \cong \overline{H}$, $G_i \cong \overline{G_i}$ e $H = \overline{G_j} \cap \langle \overline{G_i} | i \neq j \rangle$. Além disso G é gerado pelos $\overline{G_i}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.12, o produto livre dos G_i com subgrupo amalgamado H é o quociente do produto livre $F = *G_i$ pelo subgrupo normal N gerado por $\{{\phi_i}^{-1}(h)\phi_j(h)|h \in H, i, j \in I\}$. Escrevemos $G = F/N$.

Os subgrupos desejados são exatamente $\overline{H} = H^{\phi_i}N/N$ e $\overline{G_i} = G_iN/N$. De fato, como ${\phi_i}^{-1}(h)\phi_j(h) \in N$ para quaisquer $h \in H$ e $i, j \in I$, $\overline{H}$ está bem definido. Pela unicidade da forma normal, $H^{\phi_1} \cap N = 1$ e $G_i \cap N = 1$ para todo i donde segue-se que $H \cong \overline{H}$, $G_i \cong \overline{G_i}$. Como F é gerado pelos G_i, G é gerado pelos $\overline{G_i}$. Igualmente, a unicidade da forma normal implica que

$$G_iN \cap \langle G_jN | j \in I, j \neq i \rangle$$

□

Teorema 2.19 *Seja G, o produto livre dos $(G_i|i \in I)$ com subgrupo H amalgamado. Então temos:*

i) Se $g = h\overline{g_1}\dots\overline{g_n}$ é uma forma normal de g e g_1 e g_n pertencem a diferentes G_j, então g tem ordem infinita.

ii) Se pelo menos dois grupos da família não coincidem com H então G tem um elemento de ordem infinita.

iii) Um elemento de ordem finita em G é conjugado de um elemento de algum G_j.

Demonstração. (i) Durante o processo de obtenção forma normal de g^2, podemos mover h para a esquerda, de tal sorte que g^2 tem uma forma normal de comprimento $2n$, portanto $g^2 \neq 1$. Pelo mesmo argumento, vemos g^n não pode ser trivial se $n > 1$. Logo, g tem ordem infinita.

(ii) Basta tomar dois elementos g_i e g_2 fora da imagem H, o que, por (i), $g_i g_j$ tem ordem infinita.

iii) Suponhamos por absurdo que $g = h\overline{g_1}\ldots\overline{g_n}$ tem ordem finita e não é conjugado de nenhum elemento de um dos fatores livres. Então devemos ter $n > 1$. Pelo item (i), obrigatoriamente $i_1 = i_n$ e $n > 2$. Agora o conjugado $\overline{g_n} g \overline{g_n}^{-1}$ possui forma normal $h'\overline{g_1}'\overline{g_2}\ldots\overline{g_n}$, onde $h' \in H$ $g_i' \in G_{i_1}$, o que por (i), define um elemento de ordem infinita, logo g deve ter ordem infinita, contradição. $\square$

Capítulo 3

HNN-extensões e Teoremas de Imersão

Inicialmente proposto por G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann em 1949 para demonstrar certos teoremas de imersão, a HNN-extensão logo assumiu um papel importante na teoria combinatorial dos grupos, sendo alicerce para inúmeras aplicações, em particular, na exibição de um grupo finitamente apresentado que possui resposta negativa ao problema da palavra.

A idéia desta construção é bem similar aos produtos livres com amalgamação, exceto que os subgrupos isomorfos considerados estão contidos em um grupo. Iniciamos nossa exposição através do teorema original de Higman, Neumann e Neumann, onde as HNN-extensões surgiram pela primeira vez

3.1 HNN-extensões

Teorema 3.1 *Seja G um grupo, e $\theta : A \to B$ um isomorfismo entre subgrupos de G. Então existe um grupo G^* contendo G e tal que θ é induzida por uma automorfismo interno de G^*. Em particular, se G é livre de torção, G^* também é.*

Demonstração. Sejam $\langle u \rangle$ e $\langle v \rangle$ grupos cíclicos infinitos. Considere os produtos livres $X = G * \langle u \rangle$ e $Y = G * \langle v \rangle$ e seus respectivos subgrupos $L = \langle G, A^u \rangle$ e $M = \langle G, B^v \rangle$. Pela

unicidade da forma normal em X e em Y, obtemos que $L = G * A^u$ e $M = \langle G * B^v \rangle$.

A aplicação $\varphi : L \to M$ tal que $\varphi(g) = g$ e $\varphi(a^u) = \theta(a)^v$ define um homomorfismo entre os fatores G e A^u de L nos fatores G e B^v de M. Portanto φ se estende como um homomorfismo. Igualmente $\phi : M \to L$, definida por $\phi(g) = g$ e $\phi(b^v) = a^u$ é uma inversa de φ. Logo φ é um isomorfismo.

Podemos construir o produto livre G^* dos grupos X e Y com subgrupo L amalgamado através de ϕ. Em G^*, temos que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in L$, donde segue-se que G está naturalmente imerso em G^*. Além disso, $a^u = \varphi(a^u) = (\theta(a))^v$, logo $a^{uv^{-1}} = \theta(a)$, para todo $a \in A$. Definindo $t = uv^{-1}$ concluimos que θ é induzida por um automorfismo interno, como desejávamos. □

O grupo $G*$ da proposição é a HNN-extensão de G. Porém o conceito de HNN-extensão não se restringe a um único par de subgrupos isomorfos. Podemos definir a HNN-extensão como segue:

Definição 3.2 *Sejam G um grupo, $(A_i; i \in I)$ e $(B_i; i \in I)$ famílias de subgrupos de G, e $\phi : A_i \to B_i$ uma coleção de isomorfismos. A HNN-extensão com grupo base G, letras estáveis t_i, e subgrupos associados A_i e B_i é o grupo*

$$G^* = \langle G, t_i, i \in I | t_i^{-1} a t_i = \phi_i(a_i), a_i \in A_i \rangle$$

Definição 3.3 *Uma HNN-extensão é chamada ascendente quando vale $B = C_i$ ou $B = D_i$ para cada letra stável t_i*

Exemplo 3.4 O grupo $G = \langle a, t | t^{-1} a t = a^2 \rangle$ é uma HNN-extensão ascendente. Basta obseervar que o grupo base B é o grupo cíclico infinito gerado por a. Os grupos associados são B e o subgrupo gerado por a^2. □

Exemplo 3.5 O grupo

$$G_k = \langle a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k | \prod_{j=1}^{k} [a_j, b_j] = 1 \rangle$$

é uma HNN-extensão. Pela relação de G segue-se que $a_1^{-1} b_1 a_1 = b_1 [a_2, b_2] \ldots [a_k, b_k]$ e dessa forma, G é uma HNN-extensão cujo grupo base é o grupo livre gerado por $a_2, ..., a_k$,

$b_1, b_2, ..., b_k$ com letra estável a_1 . Os subgrupos gerados $gr_G(b_1)$ e $gr_G(b_1[a_2, b_2] \dots [a_k, b_k])$ são os subgrupos associados de G, pois ambos geradores não possuem torção, e portanto geram grupos cíclicos infinitos, logo isomorfos. □

3.2 Forma Normal em HNN-extensões. Lema de Britton

O grupo $G*$ do Teorema 3.1 é um grupo gerado por G e pela letra estável t e portanto, qualquer elemento w de $G*$ é uma palavra sobre $G \cup \{t\}$. A relação $t^{-1}at = \phi(a)$, $a \in A$ nos permite reduzir uma palavra sempre que ocorrerem subseqüências do tipo $t^{-1}gt$, $g \in A$ ou tgt^{-1}, $g \in B$. Caso não se verifique tais subseqüências, a palavra se diz *reduzida*.

De modo similar ao produto livre, para uma HNN-extensão existe uma noção de forma normal, que definiremos como segue. Observamos que a definição se restringe ao caso de um único par de grupos associados, mas que pode ser estendida indutivamente, assim como os resultados relacionados.

Definição 3.6 *Seja $G*$ uma HNN-extensão de um grupo G com subgrupos associados A e B e letra estável t e sejam S e T transversais fixas de A e B em G, respectivamente. Uma forma normal é uma sequência*

$$g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1 ..., t^{\varepsilon_n}, g_n \;\; n \geq 0$$

tal que:
i) $g_0 \in G$,
ii) Se $\varepsilon_i = -1$ então $g_i \in S$. Se $\varepsilon_i = 1$ então $g_i \in T$,
iii) Para $i > 0$, se $g_i = 1$ então $\varepsilon_i \neq -\varepsilon_{i+1}$.

Teorema 3.7 *Seja $G*$ uma HNN-extensão de G então:*

1. *Todo elemento de $G*$ pode ser representado por uma única forma normal;*
2. *O grupo G está imerso em $G*$;*
3. *(Lema de Britton) Se a sequência $g_0, t^{\varepsilon_1}, ..., t^{\varepsilon_n}, g_n$ é reduzida e $n \geq 1$ então $g_0 t^{\varepsilon_1} ... t^{\varepsilon_n} g_n$ não é a identidade de $G*$;*

Demonstração. Seja $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n$ uma seqüência reduzida. O processo de obtenção da forma normal se aplica da direita para a esquerda. Podemos supor que a sequência

$$g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_i} g_i t^{\varepsilon_{i+1}} ... t^{\varepsilon_n} g_n$$

satisfaz a condição de forma normal a partir da direita do símbolo g_i. Há dois casos a considerar:

a) Se $\varepsilon_i = -1$, podemos encontrar $a_i \in A$ e $x_i \in S$ tal que $g_i = a_i x_i$. Utilizando a igualdade $t^{-1}a_i = b_i t^{-1}$, para algum $b_i = \theta(a_i)$ obtemos

$$g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_{i-1}} (g_{i-1} b_i) t^{-1} x_i t^{\varepsilon_{i+1}} ... t^{\varepsilon_n} g_n$$

Em particular, se $x_i = 1$ então $g_i \in A$ e segue-se que $\varepsilon_{i+1} = -1$, pois a expressão é reduzida. Pela mesma razão, se $\varepsilon_{i-1} = 1$, devemos ter $g_{i-1} \notin B$ e $g_{i-1}b_i \notin B$. Segue-se que a expressão resultante é reduzida e a partir da direita satisfaz a condição da forma normal.

b) Se $\varepsilon_i = 1$, temos $g_i = b_i y_i$ com $b_i \in B$ e $y_i \in T$. A igualdade $t^{-1}a_i = b_i t^{-1}$, $b_i = \theta(a_i)$, nos dá

$$g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_{i-1}} (g_{i-1} a_i) t y_i t^{\varepsilon_{i+1}} ... t^{\varepsilon_n} g_n$$

Considerando possibilidades análogas ao item (a), temos a expressão resultante é reduzida e a partir da direita satisfaz a condição da forma normal. Portanto após m passos, obtemos uma forma normal para a sequência reduzida dada, o que demonstra a existência da forma normal.

Para a demonstração da unicidade, seja M como o conjunto de todas as formas normais de elementos de $G*$. Dados $g \in G$ e $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n \in M$ a regra

$$\phi_g(g_0 t^{\varepsilon_1} ... t^{\varepsilon_n} g_n) = (g g_0) t^{\varepsilon_1} ... t^{\varepsilon_n} g_n$$

onde a expressão à direita da igualdade é a forma normal da seqüência $g g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n$. Essa regra define uma ação de G em M.

Igualmente, as definições:

$$\phi_t(g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n) = \begin{cases} a t y_o t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n & \text{se } \varepsilon = 1 \\ a t y_o t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n & \text{se } \varepsilon = \pm 1 \text{ e } x_0 \neq 1 \\ (a g_1) t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n, & \text{se } \varepsilon = -1 \text{ e } x_0 = 1. \end{cases}$$

com $g_0 = b y_0$, $b \in B$, $y_0 \in T$ $a = \theta^{-1}(b)$ e

$$(g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n)\phi_{t^{-1}} = \begin{cases} btx_0 t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n & \text{se } \varepsilon = \pm -1 \text{ e } x_0 \neq 1 \\ btx_0 t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n & \text{se } \varepsilon = \pm -1 \text{ e } x_0 \neq 1 \\ (bg_1) t^{\varepsilon_1} g_1 ... t^{\varepsilon_n} g_n, & \text{se } \varepsilon = -1 \text{ e } x_0 = 1. \end{cases}$$

com $g_0 = ax_0$, $a \in S$, $x_0 \in S$ $b = \theta(a)$ definem permutações de M e são mutuamente inversas. Portanto, há um homomorfismo do grupo cíclico infinito $\langle t \rangle$ em $Sym\ M$.

A extensão $\phi' : G * \langle t \rangle \to Sym\ M$ é tal que $\phi'(t^{-1}at) = \phi'(\theta(a))$. Como $G*$ é um quociente de $G * \langle t \rangle$ pelo fecho normal de $N = gp_G(t^{-1}at(a)\theta^{-1} | a \in A)$ então N está contido no núcleo de ϕ'.

Segue-se que o homomorfismo induzido de $G*$ para $Sym\ M$ induz uma ação G em M tal que, para qualquer $w \in G$ em sua forma normal, o par $(w, 1)$ é levado na forma normal de w. Portanto, uma sequência reduzida não trivial não pode ser a identidade de $G*$. Em particular, segue-se também que $G*$ contém G. □

Como consequência dos item (i) e (iii) temos o:

Corolário 3.8 *Numa HNN-extensão, o subgrupo gerado pelas letras estáveis é um grupo livre.*

A seguir, um exemplo de grupo finitamente gerado que não é hopfiano, ou seja, um grupo que é isomorfo a algum de seus quocientes próprios.

Exemplo 3.9 *O grupo $G = \langle a, t | t^{-1}a^2t = a^3 \rangle$ é não hopfiano.*

Demonstração. O grupo G é a HNN-extensão de um grupo cíclico infinito com gerador a, com única letra estável. Observamos que G também é gerado por a^2 e t. Pelo teorema de von Dyck, a regra $\phi(a) = a^2$, $\phi(t) = t$ se estende a um endomorfismo sobrejetor ϕ de G, pois $t^{-1}(a^2)^3t = (a^2)^3$. Agora considere

$$g = (a^{-1}t^{-1}at)^2a^{-1}$$

Então g é uma palavra reduzida de comprimento positivo, a qual, pelo Lema de Britton, não pode ser trivial. Agora $\phi(g) = 1$, portanto $ker\phi \neq 1$ e pelo Teorema do Isomorfismo, segue-se que $G \cong G/ker\phi$ □

3.3 Teoremas de Imersão

Os teoremas de imersão têm importância fundamental para a compreensão da estrutura dos subgrupos em grupos finitamente gerados ou finitamente apresentados. A essência de tais problemas é mostrar que existem grupos finitamente gerados onde é possivel encontrar subgrupos com propriedades imprevisíveis, revelando o quão difícil pode ser os estudos neste sentido.

Após a apresentação dos teoremas clássicos no artigo de 1949, a HNN-extensão serviu como inspiração e ferramenta indispensável para vários outros teoremas de imersão (ver por exemplo [12] ou [17]). No texto original, como consequência do Teorema 3.1, Higman, Neumann e Neumann propõem o seguinte teorema de imersão:

Teorema 3.10 *Todo grupo G pode ser imerso em um grupo G^* tal que todos os elementos de mesma ordem em G são conjugados*

Demonstração Basta cosiderar como subgrupos associados cada par $(A_{a,b}, B_{a,b})$, sendo $A_{a,b}$ o subgrupo cíclico gerado por $a \in G$ e $B_{a,b}$ o subgrupo cíclico gerado por um conjugado b de a. As regras $\theta_{a,b}(a) = b$ são naturalmente isomorfismos. Então a HNN-extensão de G, relativa à essa família de subgrupos é o grupo procurado. □

Teorema 3.11 *Todo grupo G livre de torsão pode ser imerso em um grupo G^{**} cujos elementos $\neq 1$ são conjugados*

Demonstração. Considere a cadeia de grupos $G = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots$, onde cada G_{i+1} é a extensão G_i^* obtida no teorema anterior. Então o elemento maximal

$$G^{**} = \cup G_n$$

satisfaz as condições desejadas. De fato, se g^* e h^* estão em G^{**} existe algum G_n que contém g^* e h^*. Agora se G é livre de torção, indutivamente cada G_n também é. Portanto g^* e h^* têm mesma ordem em G_n e são conjugados em G_{n+1}. □

Teorema 3.12 *Todo grupo enumerável pode ser imerso em um grupo que é gerado por dois elementos de ordem infinita.*

Demonstração Seja $G = \{1 = g_0, g_1, g_2, ...\}$ um grupo de ordem infinita enumerável e seja F o grupo livre gerado pelos símbolos $\{a, b\}$. No produto livre $H = F * G$, consideramos seus subgrupos

$$A = gp_H(a^{b^i} | i \in I) \text{ e } B = gp_H(b^{a^i} g_i | i \in I).$$

Devido a unicidade da forma normal de H, toda palavra reduzida sobre $\{a^{b^i} | i \in I\}$ não pode ser trivial. Segue-se que A é um grupo livre com base $\{a^{b^i} | i \in I\}$. Analogamente, B é um grupo livre sobre $\{b^{a^i} g_i | i \in I\}$. A aplicação $\varphi : A \to B$, $(a^{b^i})^\varphi = b^{a^i} g_i$ se extende naturalmente a um isomorfismo.

Definimos K como a $HNN-$extensão de H com única letra estável t. Neste grupo, o subgrupo $gp_G(a, t)$ contém $b = t^{-1}at = \varphi(a^{b^1})$ e portanto qualquer conjugado $(a^{b^i})t = b^{a^i} g_i$. Logo, $K = gp_G(a, t)$ e $g_i \in K$. Segue-se então que K é um grupo gerado por dois elementos de ordem infinita que contém G. □

Teorema 3.13 *Existe uma infinidade não enumerável de grupos gerados não isomorfos gerados por dois elementos*

Demonstração. Seja S um conjunto de primos. Para cada $p \in S$, considere o produto direto $T_S = \times_{p \in S} C_p$, onde C_p é o grupo cíclico de ordem p. Então o grupo T_S tem um elemento de ordem p se e somente se $p \in S$. Pelo teorema anterior, podemos imergir T_S em um grupo 2-gerado G tal que G possui um elemento de ordem p, se e somente se $p \in S$. Portanto para cada par de conjuntos de primos S e S' distintos, G_S e $G_{S'}$ são grupos não isomorfos. Assim, existem $2^{\aleph_0}$ grupos 2-gerados não isomorfos.
□

Corolário 3.14 *Existe uma infinidade de grupos finitamente gerados que não são finitamente apresentáveis.*

Capítulo 4

Teorema Principal

Passamos agora à demonstração do resultado que motivou essa dissertação.

4.1 Demonstração do Teorema Principal

Teorema 4.1 (Baumslag, Miller III) *Seja G um grupo finitamente apresentado que possui um quociente livre de posto n. Então G é uma HNN-extensão com n letras estáveis, com grupo base B finitamente gerado e subgrupos associados também finitamente gerados.*

Demonstração. Seja $F = G/N$ um quociente de G, livre de posto n. Sendo G é finitamente gerado, podemos escolher um conjunto finito de geradores

$$t_1, ...t_n,\ a_1, ..., a_m$$

tais que $t_1N, ...t_nN$ formam a base livre de F e $a_i \in N$.

A escolha $a_i \in N$ é sempre possivel: suponhamos sem perca de generalidade que $a_1 \notin N$. Então $a_1 \in gN$ para $g \in G \setminus N$ e como F é gerado pelos $t_1, ..., t_n$ temos $gN = t_{i_1}^{\alpha_1} \dots t_{i_k}^{\alpha_k} N$ com $\alpha_i = \pm 1$, logo

$$a_1 = t_{i_1}^{\alpha_1} \dots t_{i_k}^{\alpha_k} n_0,\ n_0 \in N$$

Então segue-se que

$$t_1, ...t_n,\ n_0, \dots, a_n$$

é um novo conjunto gerador de G, conforme afirmamos.

O fato de G ser finitamente apresentado, nos permite definir G em termos de um número finito de geradores e relações definidoras

$$G = \langle t_1, ..., t_n, a_1, ..., a_n | r_1 = 1, ..., r_k = 1 \rangle$$

onde cada relator r_j pode ser expresso como

$$r_j = u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_l v_l$$

com cada u_i sendo uma palavra sobre $t_1, ..., t_n$ e cada v_i é uma palavra sobre $a_1, \dots, a_m$. Além disso $r_j = 1$ em G implica que $r_j N = u_1 \dots u_l N = N$. Como os $t_1, ..., t_n$ formam uma base livre de F temos que $u_1 \dots u_l$ é livremente igual a 1 e portanto $u_l = u_{l-1}^{-1} \dots u_1^{-1}$. Desta forma, rescremos

$$r_j = (u_1 v_1 u_1^{-1})(u_1 u_2 v_2 u_2^{-1} u_1^{-1}) \dots (u_1 u_2 \dots u_{l-1} v_{l-1} u_{l-1}^{-1} u_{l-2}^{-1} \dots u_1^{-1} v_l) \ (1)$$

Como cada v_i é uma palavra sobre os $a_1, ..., a_m$, segue-se que cada r_j pode ser expresso como um produto de conjugados dos a_h por palavras sobre $t_1, ..., t_n$.

Definamos δ como o comprimento máximo de todas as palavras sobre os t_i que aparecem em cada expressão em (1) e seja Ω o conjunto de todas as palavras reduzidas w sobre os t_i tais que $l(w) \leq \delta$.

Para cada $u \in \Omega$ e inteiro $h \in [1, m]$, definamos um símbolo $\beta_{h,u}$ sujeito à relação

$$\beta_{h,u} = u^{-1} a_h u \ ; \ (2)$$

Em particular, temos que $\beta_{h,1} = a_h$ para todo $h = 1, \dots, m$. Assim, usando a transformação de Tietze (T4) podemos inserir os $\beta_{h,u}$ como novos geradores na apresensentação de G obtendo

$$G = \left\langle t_1, ..., t_n, a_1, ..., a_n, \beta_{h,u} | r_1 = 1, ..., r_k = 1, \beta_{h,u} = u^{-1} a_h u \right\rangle$$

onde u percorre Ω e $h \in [1, m]$.

Das relações $\beta_{h,u} = u^{-1} a_h u$, como cada r_j é um produto de conjugados dos a_h por palavras sobre os t_i, então cada r_j é também uma palavra w_j sobre os $b_{h,u}$. O fato de que

$\beta_{h,1} = a_h$ nos permite eliminar os geradores a_h, portanto

$$G = \left\langle t_1, ..., t_n, \beta_{h,u} | w_1 = 1, ..., w_k = 1, \beta_{h,u} = u^{-1}\beta_{h,1}u \right\rangle$$

Agora, dado t_i e $\beta_{h,u}$ arbitrários, da equação (2) temos $t_i^{-1}\beta_{h,u}t_i = t_i^{-1}u^{-1}a_h t_i u = \beta_{h,t_iu}$. Portanto, o conjunto de relações em (2) é equivalente ao conjunto de relações

$$\beta_{h,ut_i} = {t_i}^{-1}\beta_{h,1}t_i, \;\; u \in \Omega, h = 1, \ldots, m$$

Usando a transformação de Tietze (T1), podemos trocar o primeiro conjunto de relações, pelo segundo na apresentação de G e obtemos

$$G = \left\langle t_1, ..., t_n, \beta_{h,u} | w_1 = 1, ..., w_k = 1, \beta_{h,ut_i} = {t_i}^{-1}\beta_{h,1}t_i \right\rangle$$

onde $u \in \Omega$, $ut_i \in \Omega$, $h \in [1, m]$, $i \in [1, n]$

Agora, definimos

$$B = gp_G(\beta_{h,u} | u \in \Omega, h \in [1, m])$$

e como Ω é finito, B é um grupo finitamente gerado. Observe que B pode não ser finitamente apresentado, porém como qualquer relação definidora entre os geradores de B é conseqüências das relações de G, utilizando (T1) tais relações podem ser adcionadas à apresentação de G. Em particular, N é o fecho normal de B em G. Portanto G é uma HNN-extensão de B com n letras estáveis.

Além disso cada subgrupo de G, definidos por:

$$C_i = gp_G(\beta_{j,u} | 1 \leq j \leq k, u \in \Omega \text{ } e \text{ } ut_i \in \Omega)$$

é conjugado em G pela letra letra estável t_i ao subgrupo:

$$D_i = gp_G(\beta_{j,ut_i} | 1 \leq j \leq k, u \in \Omega \text{ } e \text{ } ut_i \in \Omega)$$

e tais subgrupos são exatamente os subgrupos associados de G. Portanto G é uma HNN-extensão com n letras estáveis e com grupo base e subgrupos associados finitamente gerados. □

4.2 Consequências e Exemplos

Corolário 4.2 *Um grupo finitamente apresentado, que admite um quociente cíclico infinito é uma HNN-extensão de um grupo base finitamente gerado com única letra estável e subgrupos associados também finitamente gerados.*

Demonstração. Um grupo cíclico infinito é um grupo livre de posto 1, portanto o resultado é imediato. □

Corolário 4.3 *Seja N um subgrupo normal e coerente de um grupo G finitamente apresentado. Se G/N é um grupo livre de posto n então G é uma HNN-extensão de um grupo finitamente apresentado com n letras estáveis e subgrupos associados finitamente apresentados.*

Demonstração. Como B é finitamente gerado e está contido em N então B é finitamente apresentado, assim como os subgrupos associados. □

Teorema 4.4 *Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de grupos que é fechada para subgrupos e suponha que grupos livres com posto > 1 não satisfazem $\mathcal{P}$. Seja N, subgrupo normal de um grupo finitamente apresentado G. Se os subgrupos finitamente gerados de N pertencem a $\mathcal{P}$ e G/N é livre, então G é uma HNN-extensão ascendente de um grupo base B finitamente gerado, tal que $B \in \mathcal{P}$, com subgrupos associados finitamente gerados. Se N é coerente então B e os subgrupos associados também são finitamente apresentados.*

Demonstração. De acordo com [13] o fecho normal do grupo base de uma HNN-extensão não ascendente possui subgrupos livres de posto > 1, Portanto, se G não fosse ascendente então existiria um subgrupo livre não abeliano em N, logo $N \notin \mathcal{P}$, contradição □

Corolário 4.5 *Suponha que N é um subgrupo normal e localmente policíclico em um grupo G finitamente apresentado. Se G/N é livre, então G é uma HNN extensão ascendente de um grupo policíclico B.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de grupos. Um grupo se diz *localmente* $\mathcal{P}$ se todo subgrupo finitamente gerado está contido em um subgrupo $H \in \mathcal{P}$. Pelo Teorema

4.5, G deve ser uma HNN extensão de um grupo B finitamente gerado tal que $B \subset N$ e como N é localmente policíclico o conjunto gerador de B está contido em um subgrupo policíclico B' de N.

Agora, a propriedade de ser policíclico é fechada para subgrupos e como $B \subseteq B'$ temos que B é policíclico. Então G deve ser uma HNN-extensão ascendente devido ao Teorema 4.8, pois grupos livres de posto > 1 não podem ser policíclicos $\square$

Corolário 4.6 *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade não trivial de grupos e N um subgrupo normal de um grupo finitamente apresentado G. Se G/N é livre e $N \in \mathcal{V}$ então G é um HNN extensão de um grupo finitamente gerado B em $\mathcal{V}$ e subgrupos associados finitamente gerados*

Demonstração. Qualquer variedade de grupos é fechada para subgrupos. Agora se W não é trivial, para qualquer grupo livre de posto > 1 não pode ser $W(F) = 1$. $\square$

Corolário 4.7 *Seja N um subgrupo normal de um grupo G finitamente apresentado. Se N é de torsão e G/N é livre então G é uma HNN extensão ascendente de um grupo de torsão B finitamente gerado e subgrupos associados finitamente gerados. Em particular, se N é localmente finito, então G é uma HNN extensão ascendente de um grupo finito, e portanto N é finito e G é virtualmente livre.*

Demonstração. Ser de torsão é uma propriedade fechada para subgrupos e pelo Teorema , grupos livres não admitem torsão. Obviamente, todo subgrupo de N é de torção, em particular os finitamente gerados. Como G/N é livre, então pelo teorema anterior G é uma HNN-extensão ascendente de um grupo B finitamente gerado e de torção e subsgrupos associados finitamente gerados.

Se N é localmente finito, como B é finitamente gerado, segue-se que B está contido em um subgrupo finito de N, portanto B é finito. Sendo G uma HNN-extensão ascendente, para cada par de subgrupos associados (C_i, D_i) $i \in [1, n]$ temos $C_i = H$ ou $D_i = H$. Mas o fato de H ser finito e $C_i, D_i \leq H$ implica que $C_i = D_i = H$. Assim H contém qualquer conjugado por letras estáveis de G. Pelo lema de Britton , H é normal e $H = N$, pois N é o fecho normal de H em G. Portanto, N é finito.

Agora, o quociente G/N é livre, portanto existe um subgrupo $C \leq G$ tal que $G = NC$, $N \cap C = 1$ e $G/N \cong C$. Segue-se então que $[G : C] = |N| < \infty$, logo G possui um subgrupo de índice finito. □

Exemplo 4.8 *Grupo fundamental de uma superfície orientável de gênero* ≥ 1 *é uma HNN-extensão*

Tal grupo é finitamente apresentado por

$$G_k = \langle a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k | \prod_{j=1}^{k} [a_j, b_j] = 1 \rangle$$

O processo de obtenção da apresentação dada pode ser vista em [16]. Podemos decompor G como uma HNN-extensão com uma letra estável, utilizando o teorema anterior. Considere N o fecho normal dos geradores $a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ em G_k. Dessa forma, o quociente G/N é cíclico infinito e N tem índice infinito em G. É um fato conhecido que em grupos de superfície, qualquer subgrupo de índice infinito é livre (ver [9]). Portanto N é um grupo livre de posto $2k - 1$.

Dessa forma, G é uma HNN-extensão do grupo livre gerado por $a_2, ..., a_k$, $b_1, b_2, ..., b_k$ com letra estável a_1. Da relação na apresentação de G, segue-se que

$$a_1^{-1} b_1 a_1 = b_1 [a_2, b_2] \ldots [a_k, b_k]$$

e portanto $gr(b_1)$ e $gr(b_1[a_2, b_2] \ldots [a_k, b_k])$ são os subgrupos associados de G. □

Exemplo 4.9 O grupo $G = \langle a, s, t | a^t = aa^s, [a, a^s] = 1, [s, t] = 1 \rangle$ admite um quociente G/N livre de posto 1. Para tanto, considere N como o fecho normal do subgrupo gerado por a e s. Então G/N é o grupo cíclico infinito gerado por t e G é uma HNN-extensão de um grupo finitamente gerado. De acordo com [4], G é um grupo metabeliano. Por definição, um grupo metabeliano é aquele cujo grupo comutador é abeliano. Como essa propriedade de grupos é fechada para subgrupos e grupos livres de posto > 1 não podem ser metabelianos , pelo Teorema 2, G é também ascendente. De acordo com [5] o grupo base é o produto entrelaçado de dois grupos cíclicos infinitos, portanto não é finitamente apresentado. □

4.3 Considerações Finais

Ao analisarmos a demonstração do teorema principal e compará-lo com os artigos diretamente relacionados à ele, observamos que a prova dada por Baumslag e Miller é, sem dúvida, mais simples, e cujo resultado é levemente mais geral e abrangente. As demonstrações anteriores são bem mais extensas e utilizam técnicas avançadas, em contraste com os argumentos puramente algébricos e não sofisticados da demonstração de Baumslag e Miller.

Como dito anteriormente, a investigação em busca de condições necessárias e suficientes para um grupo se fatorar como um produto livre amalgamado ou HNN-extensão consistiu em uma temática ativa por múitas décadas. Em particular, o surgimento da teoria de Bass-Serre no fim dos anos 1970, caracteriza os produtos livres amalmagamados e as HNN-extensões como grupos que agem sobre um segmento ou loop, respectivamente. Utilizado a teoria dos grupos agindo em grafos é possivel se obter a versão abstrata para a conjectura de Serre sobre grupos virtualmente livres: Um grupo livre de torção que possui um grupo livre de índice finito é por si um grupo livre.

Apesar da simplicidade de seu enunciado, o teorema que demonstramos e suas consequências nos ofereceram a possibilidade de estar em contato com temas e técnicas importantes da Teoria Combinatorial dos Grupos. Miller, em [14] já exibe o caso em que a extensão é cíclica e livre, cujo resultado é então generalizado para posto finito > 1, no artigo dos autores em 2007. Enfim, a importância das releituras de resultados anteriores com novas demonstrações não consiste em si em apenas oferecer uma via alternativa para tais resultados, mas sim torná-los mais simplificados e abrangentes. É o que fica claramente evidente no nosso caso.

Bibliografia

[1] Baumslag, Gilbert e Miller III, Charles F., *Finitely presented extensions by free groups*, J. Group Theory, 10 (2007), pp 723-729.

[2] Bieri, Robert e Ralph Strebel, *Almost finitely presented soluble groups*, Comment. Math. Helv. 53. (1978), 258-278.

[3] Karrass, A. , Pietrowski, A e Solitar, D.,*Finite and infinite extensions of free groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 61-62.

[4] Baumslag, Gilbert, *A finitely presented metabelian group with a free abelian group of infinite rank*, Australian Math. Soc. 16 (1972), pp. 458-466.

[5] Baumslag, Gilbert, *Wreath products and finitely presented groups*, Math. Z. 75 (1961), 22-28.

[6] Higman, Graham et al. *Embedding theorems for groups*, J. London Math. Soc., 24 (1949), 247-254.

[7] Stillwell, John *The word problem and the isomorphism problemfor groups*, Bulletin AMS 6 (1982), pp 33-56.

[8] Hoare A. et al. *Subgroups of infinite index in Fuchsian groups* , Math. Z. , 125, (1972), 59-69.

[9] Fine B., *On the surface group conjecture*, Scientia, Series A: Mathematical Sciences, Vol. 15 (2007), 1-15, Universidad Técnica Federal Santa María.

[10] Baumslag, Gilbert, *Topics in Combinatorial Group Theory (Lectures in Mathematics)*. Birkhauser, Boston, 1993.

[11] Johnson, D. L., *Presentations of groups*, London Math. Soc. Student Texts 15, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[12] Lyndon, Roger C. e Schupp, Paul E., *Combinatorial Group Theory*, Springer, Nova York (1977).

[13] Magnus, Wilhelm et al., *Combinatorial Group Theory*, Dover, Nova York (1976).

[14] Miller III, Charles F., *Combinatorial Group Theory*, Notas do Workshop on Algebra, Geometry and Topology (1996)(em formato eletrônico).

[15] Robinson, Derek J. S., *A course in the theory of groups*, Springer, Nova York (1996).

[16] Rotman, Joseph, *Introdution to the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, Nova York (1995).

[17] Serre, Jean-Pierre, *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 1980.

[18] Lima, Elon Lages, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, IMPA, Rio de Janeiro (1993).