UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SOBRE A NÃO VALIDADE DA FORMA FRACA DO TEOREMA DE PEANO EM ESPAÇOS DE BANACH COM QUOCIENTE SEPARÁVEL DE DIMENSÃO INFINITA

RAIMUNDO NONATO VIEIRA DE OLIVEIRA

MANAUS - 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RAIMUNDO NONATO VIEIRA DE OLIVEIRA

SOBRE A NÃO VALIDADE DA FORMA FRACA DO TEOREMA DE PEANO EM ESPAÇOS DE BANACH COM QUOCIENTE SEPARÁVEL DE DIMENSÃO INFINITA

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Michel Pinho Rebouças

MANAUS - 2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

O48s Oliveira, Raimundo Nonato Vieira de
Sobre a não validade da forma fraca do teorema de Peano em espaços de Banach com quociente separável de dimensão infinita / Raimundo Nonato Vieira de Oliveira. 2016
40 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Michel Pinho Rebouças
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Espaços de Banach. 2. Espaços de Dimensão Infinita. 3. Quociente Separável. 4. Teorema de Peano.. I. Rebouças, Michel Pinho II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Aos meus pais Ramundo e Deusa e aos meus irmãos Gildo, Luiz, André e João.

RAIMUNDO NONATO VIEIRA DE OLIVEIRA

SOBRE A NÃO VALIDADE DA FORMA FRACA DO TEOREMA DE PEANO EM ESPAÇOS DE BANACH COM QUOCIENTE SEPARÁVEL DE DIMENSÃO INFINITA

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Michel Pinho Rebouças

Prof. Dr. Michel Pinho Rebouças

Orientador - UFAM

Alfredo Wagner M. Pinto

Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto

Membro - UFAM

Marcus Marrocos

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos

Membro - UFABC

Manaus, 11 de Março de 2016.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela a oportunidade de estudar com excelente professores e por mais essa etapa concluída em minha caminhada.

Sou profundamente grato aos meus pais, Raimundo Gomes de Oliveira e Deusa Vieira de Oliveira, pela compreensão durante todos esses anos de ausência, pelo suporte e, principalmente, pela educação, princípios e boas maneiras que a mim foi proporcionados.

Expresso minha sincera gradidão ao professor Roberto Cristóvão pela preciosa orientação no PIBIC 2010-2011 e pela amizade.

Agradeço ao Professor Mário Salvatierra por ter aceitado me orientar nos PIBIC's 2011-2012 e 2012-2013, pela disponibilidade e pela amizade.

Gostaria de externar também meus agradecimentos ao professor Alfredo Wagner pelos valiosos ensinamentos matemáticos durante todos esses anos.

Um agradecimento especial ao professor Marcus Marrocos pelos ricos incentivos para ingressar no mestrado e pelas valiosas sugestões.

Agradeço ao Professor Michel Pinho Rebouças por me ter aceitado como orientando, pela excelente orientação, pela amizade e pela credibilidade depositada em minha pessoa.

E, finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro durante a realização desse trabalho.

Resumo

Neste presente trabalho, faremos o estudo da “não validade” da Forma Fraca do Teorema de Peano em espaços de Banach com quociente separável de dimensão infinita ou, de uma forma mais precisa, mostraremos que se X é um espaço de Banach com quociente separável de dimensão infinita, então existe uma aplicação contínua $f : X \to X$ tal que a equação diferencial autônoma $x' = f(x)$ não tem solução em qualquer ponto.

Palavras-Chave: Espaços de Banach. Espaços de Dimensão Infinita. Quociente Separável. Teorema de Peano.

Abstract

In this present work, we study the “no validity” of Peano Theorem of Weak Form in Banach spaces with separable quotient of infinite dimension, in a more precise way, we show that if X is a Banach space with the quotient separable infinite-dimensional, then there is a continuous map $f : X \to X$ such that autonomous differential equation $x' = f(x)$ has no solution at any point.

Key Words: Banach spaces. Infinite Dimensional Spaces. Quotient Separable. Theorem of Peano.

Sumário

Introdução

Em 1886, o matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) provou que *se* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma aplicação contínua, então a equação diferencial* $x' = f(t, x)$*, com* $x(t_0) = x_0$ *tem uma solução em algum intervalo aberto contendo* t_0*.*

Desde então, passou-se a questionar sua validade em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita. Mas foi preciso um pouco mais de meio século para que uma resposta fosse apresentada ou, mais precisamente, 1950 o matemático francês Jean Alexandre Eugène Dieudonné (1906-1992), usando o espaço de Banach $X = c_0$ (espaço não reflexivo) de dimensão infinita, apresentou uma função contínua e autônoma onde o Teorema de Peano não é válido.

Após a contribuição de Dieudonné, o matemático americano James Yorke apresentou, em 1970, outra função contínua, agora, no espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ (espaço reflexivo), mas desta vez não autônoma, que faz com que o Teorema de Peano não seja válido. Outros dois trabalhos ajudaram de forma mais abrangente a resolver de vez a questão sobre a não validade do Teorema de Peano em espaços de dimensão infinita. No primeiro, datado de 1972, o matemático Arrigo Cellina provou que o Teorema de Peano não vale para espaços não reflexivos, generalizando, portanto, o trabalho de Dieudonné. E, finalmente, em 1975, o matemático russo A. N. Godunov mostrou que o Teorema de Peano é falso em cada espaço de Banach de dimensão infinita.

De posse desses resultados, nada mais natural passar a considerar a Forma Fraca do Teorema de Peano, isto é, *se* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma aplicação contínua, então a equação diferencial ordinária* $x' = f(t, x)$ *tem uma solução em algum intervalo aberto.*

Em 1974, Godunov construiu um contraexemplo para a Forma Fraca do Teorema de Peano no espaço de Hilbert. Em 2003, o matemático russo Stanislav Shkarin mostrou que a Forma Fraca do Teorema de Peano falha para cada espaço de Banach X que tem um subespaço complementado com uma base de Schauder incondicional.

Em 2010, Petr Hájek e Michal Johanis mostraram que *se X é um espaço de Banach com um quociente separável de dimensão infinita, então existe uma aplicação contínua $f : X \to X$ tal que a equação autônomo $x' = f(x)$ não tem solução.* Veremos, neste presente trabalho, os mínimos detalhes desse último resultado.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. No Capítulo 1 são apresentadas as "definições e resultados" da Análise Funcional e Espaços Métricos, afim de facilitar a leitura deste trabalho tornando-o mais claro e autossuficiente.

O Capítulo 2 trata dos "Lemas Auxiliares", os quais foram assim denominados, porque o primeiro é usado na demonstração do segundo e esse, por sua vez, é utilizado na prova do Teorema 3.1. O Lema 2.1 é um análogo da estimativa para o vetor norma de perturbação em um espaço com base de Schauder incondicional. Enquanto o Lema 2.2 trata de provar algumas propriedades da aplicação $\Phi_r : X \to X$, definida por $\Phi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_r\Big(\|Q_k(x)\|\Big) f_k(x) e_k$, já utilizada por Shkarin em [15]. No entanto, como estamos tratando com espaços de Banach sem base incondicional, devemos empregar o Lema 2.1 para provar certas propriedades desta aplicação.

O Capítulo 3 se ocupa dos "Lemas e Teoremas Principais", os quais receberam tais títulos, porque são usado de forma direta na demonstração do Resultado Principal deste trabalho. O primeiro lema permite construir equações autônomas. Já o segundo permite provar o Resultado Principal para espaços com uma base de Schauder e, depois, estende o resultado para uma classe muito maior. Em seguida, temos o Teorema 3.1 que assegura a existência de uma aplicação contínua $g : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que a equação diferencial $x' = g(t, x)$ não tem solução, desde que X seja um espaço de Banach de dimensão infinita com uma base de Schauder. E por último, na Seção 3.1, se encontra o Resultado Principal deste trabablho provado, em 2010, pelos matemáticos Petr Hájek e Michal Johanis, cujo enunciado é o seguinte: *Seja X um espaço de Banach com um quociente separável de dimensão infinita. Então existe uma aplicação contínua $f : X \to X$ tal que a equação autônoma $x' = f(x)$ não tem solução.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo será feita uma breve apresentação dos conceitos e fatos básicos da Análise Funcional e Espaços Métricos, com o objetivo de tornar nosso trabalho mais claro e autossuficiente. Desse modo, deixaremos de apresentar as demonstrações, mas aos leitores interessados em tais provas, recomendamos a leitura de [2] e [11].

1.1 Espaços de Dimensão Infinita

Nada mais natural começar definindo o ambiente onde iremos trabalhar. Nesta seção apresentaremos a definição de espaços de dimensão infinita. Esse tipo de espaço é o ambiente onde o resultado principal desta dissertação reside.

Definição 1.1.1. Seja E um espaço vetorial. Dizemos que E é um *espaço de dimensão infinita* quando, para cada inteiro n dado, existe um número n de elementos linearmente independente em E.

1.2 Espaços Métricos Completos

Definição 1.2.1. Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 1.2.2. Um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.

Definição 1.2.3. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definição 1.2.4. Dizemos que um espaço métrico M é *completo* quando toda sequência de Cauchy em M convergir para um elemento de M.

1.3 Espaços Vetoriais Normados

Definição 1.3.1. Seja E um espaço vetorial real. Uma *norma* em E é uma função real $||\cdot||$: $E \to \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $v \in E$ o número real $\|v\|$, chamado a *norma de* v, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $u, v \in E$ e λ escalar:

N1) Se $v \neq 0$, então $\|v\| \neq 0$;

N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$;

N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Definição 1.3.2. Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial real e $\|\cdot\|$ é uma norma em E.

1.4 Espaços de Banach

Nesta seção apresentaremos o conceito de espaços de Banach. Este importante tipo de espaço métrico faz-se presente em todos os resultados apresentado neste trabalho.

Definição 1.4.1. Um espaço normado X é chamado *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

1.5 Bases de Schauder

Nesta seção apresentaremos a definição de bases de Schauder em um espaço de Banach. Elas fazem-se presente em "quatro" dos "seis" resultados deste trabalho.

Definição 1.5.1. Uma sequência (e_n) no espaço de Banach X é chamada de *base de Schauder* de X se cada $x \in X$ tem uma representação única sob a forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A unicidade da representação permite considerar, para cada $n \in \mathbb{N}$, os funcionais lineares

$$f_n : X \to \mathbb{K}$$

definidos por

$$f_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right) = a_n,$$

que são chamados de *funcional coeficientes* (ou *funcionais coordenadas* ou ainda *funcionais biortogonais associados*).

1.6 Espaço Dual

Definição 1.6.1. Seja $\mathcal{L}(E;F)$ o conjunto das transformações lineares de E em F. As transformações lineares $\varphi : E \to \mathbb{R}$, com valores numéricos, são chamadas funcionais lineares. Escreve-se E^* em vez de $\mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ e o conjunto $E^* = \{\varphi : E \to \mathbb{R} \; ; \; \varphi \text{ é linear}\}$ chama-se o *espaço vetorial dual de* E.

1.7 Anulador

Definição 1.7.1. Sejam E um espaço normado e M um subconjunto não vazio de E. O *anulador* de M é definido por

$$M^{\perp} = \{\varphi \in E^* \; ; \; \varphi(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}.$$

1.8 Operadores Lineares Contínuos

Definição 1.8.1. Sejam E, F espaços vetoriais normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $T : E \to F$ chama-se um *operador linear contínuo* quando é linear, isto é,

(i) $T(x+y) = T(x) + T(y)$ para quaisquer $x, y \in E$ e

(ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e qualquer $x \in E$;

e contínuo, ou seja, para todo $x_0 \in E$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$.

1.9 C. O. L. C.

Teorema 1.1. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \to F$ linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *T é lipschitziano.*

(b) *T é uniformemente contínuo.*

(c) *T é contínuo.*

(d) *T é contínuo em algum ponto de E.*

(e) *T é contínuo na origem.*

(f) $\sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.

(g) *Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demonstração: Veja [2], Teorema 2.1.1., p. 33.■

1.10 Projeção

Definição 1.10.1. Seja X um espaço de Banach. Um operador linear contínuo $P : X \to X$ é uma *projeção* se $P^2 := P \circ P = P$. Note que se $P \neq 0$ é uma *projeção*, então $||P|| \geq 1$.

Exemplo 1.10.1. Seja X um espaço de Banach com uma base de Schauder. Então a aplicação $P_n : X \to X$, definida por

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, é uma projeção, chamadas de *projeções canônicas*. Outros exemplos de projeções são as aplicações $R_n : X \to X$ e $Q_n : X \to X$ definidas, respectivamente, por

$$R_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i \qquad \text{e} \qquad Q_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i x_i$$

Lema 1.1. *Seja (e_n) uma base de Schauder de um espaço de Banach X. Então as projeções canônicas P_n satisfazem:*

(i) $dim(P_n(X)) = n$;

(ii) $P_n P_m = P_m P_n = P_{min(m,n)}$;

(iii) $P_n(x) \to x \in X$ *para todo* $x \in X$.

Demonstração: Veja [6], Lemma 6.2, p. 162.■

Dizemos que os operadores (P_n) são *projeções canônicas* associadas à base de Schauder (e_n) quando satisfazem $(\mathbf{i}), (\mathbf{ii})$ e $(\mathbf{iii})$.

Proposição 1.10.1. *Seja F um subespaço do espaço de Banach X. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe uma projeção* $P : X \to X$ *cuja imagem coincide com* F*. Neste caso dizemos que* P *é uma projeção de* E *sobre* F*.*

(b) F *é fechado e existe um subespaço fechado* G *de* X *tal que* $X = F \oplus G$*, isto é,* $X = F + G$ *e* $F \cap G = \{0\}$*. Neste caso* $F = \{x \in X; P(x) = x\}$ *e* $G = ker(P) = \{x \in X; P(x) = 0\}$*.*

Demonstração: Veja [2], Proposição 3.2.2., p. 61.■

1.11 Subespaço Complementado

Definição 1.11.1. Um subespaço F do espaço de Banach X é *complementado* se satisfaz as condições equivalentes da Proposição 1.10.1. Dizemos que F é λ-complementado, $\lambda \geq 1$, se F é complementado por uma projeção de norma igual a λ.

1.12 O Espaço Quociente

Definição 1.12.1. Seja E um espaço vetorial e N um subespaço de E . O *espaço quociente* de E por N é o espaço vetorial E/N formado pelas classes de equivalências $x + N = \{x + n; n \in N\}$, munido das operações $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$ e $\lambda(x + N) = (\lambda x) + N$.

1.13 Espaços Separáveis

Definição 1.13.1. Um espaço métrico M chama-se *separável* quando contém um subconjunto enumerável e denso.

Capítulo 2

Lemas Auxiliares

Neste capítulo apresentaremos os Lemas Auxiliares, assim denominados, porque o primeiro é usado na demonstração do segundo e esse, por sua vez, é utilizado na prova do Teorema 3.1. Aqui estaremos lidando com espaços de Banach que tem uma base de Schauder. Vamos denotar por $P_k, k \in \mathbb{N}$ as projeções canônicas associadas com uma base de Schauder.

Lema 2.1. *Seja* $\{e_n; f_n\}$ *uma base de Schauder de um espaço de Banach* X *e seja* $(\alpha_n) \subset [0,1]$ *uma sequência real. Suponha que uma destas condições sejam válidas:*

(a) $\|R_n\| = 1$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e* (α_n) *é não decrescente;*

(b) $\|P_n\| = 1$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *(,isto é,* (e_n) *é uma base monótona) e* (α_n) *é não crescente.*
Então

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(x) e_n \right\| \leq \|x\| \;\; para \;\; cada \;\; x \in X.$$

Demonstração: **(a)** Suponha que $\|R_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e que (α_n) seja uma sequência não decrescente. Vamos, inicialmente, provar a afirmação sob a hipótese adicional de que (α_n) é, eventualmente, constante. Ao passar para $R_m(x)$ para um $m \in \mathbb{N}$ adequado, se necessário podemos, sem perda de generalidade, assumir que $\alpha_1 > 0$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = \alpha_N$ para todo $n \geq N$. Considere $y : \mathbb{N} \to X$, definida por

$$y_N = \alpha_N x$$

e

$$y_n = R_n(y_{n+1}) + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} P_n(y_{n+1}) \text{ para } 1 \leq n < N$$

Por indução, mostramos que

$$y_n = \alpha_n P_{n-1}(x) + \sum_{k=n}^{N} \alpha_k f_k(x) e_k + \alpha_N R_N(x) \text{ para } 1 \leq n \leq N.$$

Logo, $y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(x) e_n$. Como $y_{n+1} = R_n(y_{n+1}) + P_n(y_{n+1})$, segue-se que

$$\begin{aligned} y_n &= R_n(y_{n+1}) + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \Big(y_{n+1} - R_n(y_{n+1}) \Big) \\ &= \left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right) R_n\Big(y_{n+1}\Big) + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} y_{n+1}, \text{ para } 1 \leq n < N. \end{aligned}$$

Assim, usando a convexidade da norma, a hipótese e o fato que $0 \leqslant \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \leqslant 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|y_n\| &\leq \left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right) \|R_n\Big(y_{n+1}\Big)\| + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \|y_{n+1}\| \\ &\leq \left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right) \|R_n\| \cdot \|y_{n+1}\| + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \|y_{n+1}\| \\ &= \left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right) \|y_{n+1}\| + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \|y_{n+1}\| \\ &= \|y_{n+1}\| \end{aligned}$$

Como $\|y_N\| = \|\alpha_N \alpha x\| = |\alpha_N| \|x\| = \alpha_N \|x\| \leqslant \|x\|$, resulta que $\|y_1\| \leqslant \|x\|$. Portanto, $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(x) e_n \right\| \leq \|x\|$. Agora, suponha que (α_n) seja uma sequência arbitrária não decrescente e considere $z : \mathbb{N} \to X$, definida por

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) e_k + \alpha_n R_n(x).$$

Então para $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, temos que

$$
\begin{aligned}
z_m - z_n &= \alpha_1 f_1(x)e_1 + \cdots + \alpha_m f_m(x)e_m + \alpha_m R_m(x) - \alpha_1 f_1(x)e_1 - \cdots - \alpha_n f_n(x)e_n - \alpha_n R_n(x) \\
&= \Big(\alpha_{n+1} f_{n+1}(x)e_{n+1} + \cdots + \alpha_m f_m(x)e_m\Big) + \Big(\alpha_m f_{m+1}(x)e_{m+1} + \cdots + \cdots\Big) \\
&- \Big(\alpha_n f_{n+1}(x)e_{n+1} - \cdots - \alpha_n f_m(x)e_m\Big) - \Big(\alpha_n f_{m+1} e_{m+1} + \cdots + \cdots\Big) \\
&= \Big(\alpha_{n+1} - \alpha_n\Big) f_{n+1}(x)e_{n+1} + \cdots + \Big(\alpha_m - \alpha_n\Big) f_m(x)e_m + \alpha_m R_m(x) - \alpha_n R_m(x) \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \Big(\alpha_k - \alpha_n\Big) f_k(x)e_k + \Big(\alpha_m - \alpha_n\Big) R_m(x).
\end{aligned}
$$

Agora, aplicando a primeira parte da prova para o vetor $R_n(x)$ e a sequência (β_k), definida por

$$
\beta_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq n \\ \alpha_k - \alpha_n & \text{se } n < k \leq m \\ \alpha_m - \alpha_n & \text{se } m < k, \end{cases}
$$

obtemos que

$$
\|z_m - z_n\| \leq \|R_n(x)\|.
$$

Logo, a sequência (z_n) é de Cauchy e, portanto, convergente. Como $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, segue-se que

$$
\lim_{n\to\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(x)e_n.
$$

Ainda, pela primeira parte da prova, temos que

$$
\|z_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)e_k + \alpha_n R_n(x) \right\| \leq \|x\|.
$$

Assim, concluímos a demonstração de **(a)**.

Podemos provar **(b)** de forma análoga. Mas neste caso, também podemos mostrar da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n f_n(x)e_n\right\| &= \left\|\sum_{n=1}^{N-1}(\alpha_n-\alpha_{n+1})P_n(x)+\alpha_N P_N(x)\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{n=1}^{N-1}(\alpha_n-\alpha_{n+1})P_n(x)\right\|+\|\alpha_N P_N(x)\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1}|\alpha_n-\alpha_{n+1}|\cdot\|P_n(x)\|+|\alpha_N|\cdot\|P_N(x)\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1}(\alpha_n-\alpha_{n+1})\cdot\|P_n\|\cdot\|x\|+\alpha_N\cdot\|P_N\|\cdot\|x\| \\
&= \sum_{n=1}^{N-1}(\alpha_n-\alpha_{n+1})\cdot\|x\|+\alpha_N\cdot\|x\| \\
&= (\alpha_1-\alpha_N)\cdot\|x\|+\alpha_N\cdot\|x\| \\
&\leq \|x\|.
\end{aligned}$$

Na primeira igualdade adicionamos e subtraimos $\alpha_i f_j e_j$, com $i \in \{2,...,N\}, j \in \{1,...,N-1\}$ e $j < i$. Na segunda e terceira desigualdades utilizamos a desigualdade triangular. Já na quarta, usamos a hipótese de que a sequência (α_n) é não crescente e o fato que P_n é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$. As três últimas são imediatas. Portanto, o lema está demonstrado. ■

Definiremos agora algumas funções que serão úteis para a nossa construção. Definimos a função $\varphi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $r > 0$, por

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in (-\infty,-2r] \\ 2+t/r & \text{se } t \in [-2r,-r] \\ 1 & \text{se } t \in [-r,r] \\ 2-t/r & \text{se } t \in [r,2r] \\ 0 & \text{se } t \in [2r,+\infty). \end{cases}$$

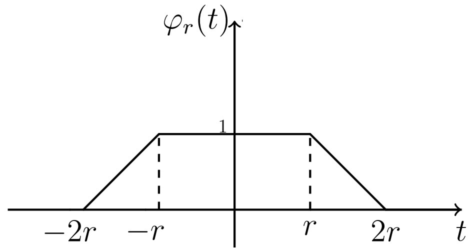

Figura 2.1: Gráfico de φ_r.

Seja X um espaço de Banach com uma base de Schauder $\{e_k; f_k\}$. Definimos a aplicação $\Phi_r : X \to X$ por

$$\Phi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_r(\|Q_k(x)\|) f_k(x) e_k.$$

Note que a aplicação Φ_r está bem definida, já que $\varphi_r(\|Q_k(x)\|) = 1$, para todo k suficientemente grande.

Lema 2.2. *Seja X um espaço de Banach com uma base de Schauder $\{e_k; f_k\}$, satisfazendo $\|R_n\| = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e seja $r > 0$. Então, a aplicação Φ_r tem as seguintes propriedades:*

(i) $Q_n(\Phi_r(x)) = \Phi_r(Q_n(x))$ *para cada* $x \in X$ *e* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) *Se $\|Q_N(x)\| \leq r$ para algum $x \in X$ e $N \in \mathbb{N}$, então $Q_n\Big(\Phi_r(x)\Big) = Q_n(x)$ para todos os $n \geq N$;*

(iii) $\|\Phi_r(x)\| \leq \|x\|$ *para cada* $x \in X$;

(iv) $\|\Phi_r(x)\| < 2r$ *para cada* $x \in X$;

(v) Φ_r *é contínua.*

Demonstração: **(i)** Seja $x \in X$ qualquer. Então

$$\begin{aligned} Q_n(\Phi_r(x)) &= \sum_{k=n}^{\infty} \varphi_r(\|Q_k(x)\|) f_k(x) e_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_r(\|Q_k(Q_n(x))\|) f_k(Q_n(x)) e_k \\ &= \Phi_r(Q_n(x)). \end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade usamos o fato que:

- se $k < n$, então
$$\begin{aligned} f_k(Q_n(x)) &= f_k\left(\sum_{i=n}^{\infty} f_i(x) e_i\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- se $k \geq n$, então
$$\begin{aligned} Q_k(Q_n(x)) &= Q_k\left(\sum_{i=n}^{\infty} f_i(x) e_i\right) \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} f_i(x) e_i \\ &= Q_k(x) \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} f_k(Q_n(x)) &= f_k\left(\sum_{i=n}^{\infty} f_i(x) e_i\right) \\ &= f_k(x). \end{aligned}$$

Já na última igualdade usamos a definição de Φ_r.

(ii) Suponha que $\|Q_N(x)\| \leq r$ para algum $x \in X$ e $N \in \mathbb{N}$. Então $\|Q_k(x)\| \leq r$ para todo $k \geq N$, pois a sequência $\left(\|Q_k(x)\|\right)$ é não crescente. E, pela definição de φ_r, temos que $\varphi_r(\|Q_k(x)\|) = 1$, para todo $k \geq N$. Assim,

$$
\begin{aligned}
Q_n\Big(\Phi_r(x)\Big) &= \sum_{k=n}^{\infty} \varphi_r\Big(\|Q_k(x)\|\Big) f_k(x) e_k \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) e_k \\
&= Q_n(x).
\end{aligned}
$$

(iii) Como a sequência $\Big(\varphi_r(\|Q_k(x)\|)\Big) \subset [0,1]$ é não decrescente concluímos, pelo **Lema 2.1 (a)**, que

$$
\begin{aligned}
\|\Phi_r(x)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_r\Big(\|Q_k(x)\|\Big) f_k(x) e_k \right\| \\
&\leq \|x\|.
\end{aligned}
$$

(iv) Seja $x \in X$ qualquer e $n \in \mathbb{N}$ o menor tal que $\|Q_n(x)\| < 2r$. Então usando a definição de Φ_r, Q_n e as propriedades **(i)** e **(iii)**, respectivamente, temos que

$$
\begin{aligned}
\|\Phi_r(x)\| &= \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \varphi_r\Big(\|Q_k(x)\|\Big) f_k(x) e_k \right\| \\
&= \|Q_n(\Phi_r(x))\| \\
&= \|\Phi_r(Q_n(x))\| \\
&\leq \|Q_n(x)\| \\
&< 2r.
\end{aligned}
$$

(v) Seja $x \in X$ fixo. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|R_n(x)\| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Pela continuidade da projeção R_n existe uma vizinhança U de x tal que $\|R_n(y)\| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ para todo $y \in U$. Além disso, pela continuidade das aplicações envolvidas, podemos escolher uma vizinhança V de x, $V \subset U$, tal que

$$
\left| \varphi_r\Big(\|Q_k(x)\|\Big) f_k(x) - \varphi_r\Big(\|Q_k(y)\|\Big) f_k(y) \right| \|e_k\| < \frac{\varepsilon}{2n}
$$

para todo $y \in V$ e todo $1 \leq k \leq n$. Então usando a desigualdade triangular, o fato que $R_n\Big(\Phi_r(x)\Big) = \Phi_r\Big(R_n(x)\Big)$ e a propriedade (iii), obtemos para qualquer $y \in V$ que

$$
\begin{aligned}
\|\Phi_r(x) - \Phi_r(y)\| &= \Big\|P_n\Big(\Phi_r(x)\Big) - P_n\Big(\Phi_r(y)\Big) + R_n\Big(\Phi_r(x)\Big) - R_n\Big(\Phi_r(y)\Big)\Big\| \\
&\leq \Big\|P_n\Big(\Phi_r(x)\Big) - P_n\Big(\Phi_r(y)\Big)\Big\| + \Big\|R_n\Big(\Phi_r(x)\Big)\Big\| + \Big\|R_n\Big(\Phi_r(y)\Big)\Big\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{n} \varphi_r\Big(\|Q_k(x)\|\Big) f_k(x) e_k - \sum_{k=1}^{n} \varphi_r\Big(\|Q_k(y)\|\Big) f_k(y) e_k\right\| \\
&+ \Big\|\Phi_r\Big(R_n(x)\Big)\Big\| + \Big\|\Phi_r\Big(R_n(y)\Big)\Big\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \Big|\varphi_r\Big(\|Q_k(x)\|\Big) f_k(x) - \varphi_r\Big(\|Q_k(y)\|\Big) f_k(y)\Big| \, \|e_k\| + \|R_n(x)\| + \|R_n(y)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2n} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}
$$

Logo, $\|\Phi_r(x) - \Phi_r(y)\| < \varepsilon$. Portanto, Φ_r é contínua. ■

Capítulo 3

Lemas e Teoremas Principais

Neste capítulo, denotaremos por $\mathcal{S}$ a classe dos espaços de Banach, com a seguinte propriedade: sempre que $X \in \mathcal{S}$, existe uma aplicação contínua $f : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que a equação $x' = f(t, x)$ não tem solução.

Lema 3.1. *Seja X um espaço de Banach que possua um subespaço próprio complementado da classe $\mathcal{S}$. Então existe uma aplicação contínua $f : X \to X$ tal que a equação autônoma $x' = f(x)$ não tem solução.*

Demonstração: Seja Y um subespaço próprio de X complementado pela projeção P tal que $Y \in \mathcal{S}$. Então existe uma aplicação contínua $g : \mathbb{R} \times Y \to Y$ tal que a equação $y' = g(t, y)$ não tem solução. Considere $e \in ker(P)$, $e \neq 0$ e o funcional linear $\varphi : X \to \mathbb{R}$, com $\varphi \in Y^{\perp}$ tal que $\varphi(e) = 1$. Defina a aplicação $f : X \to X$ por

$$f(x) = e + g\Big(\varphi(x), P(x)\Big)$$

que é contínua, pois g, φ e P são contínuas. Suponha que a equação $x' = f(x)$ tenha solução, isto é, que exista uma aplicação $\psi : I \to X$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, tal que $\psi'(t) = f(\psi(t))$ para todo $t \in I$. Então

$$
\begin{aligned}
(\varphi(\psi(t)))' &= \varphi(\psi'(t)) \\
&= \varphi(f(\psi(t))) \\
&= \varphi\Big(e + g\Big(\varphi(\psi(t)), P(\psi(t))\Big)\Big) \\
&= \varphi(e) + \varphi\Big(g\Big(\varphi(\psi(t)), P(\psi\,(t))\Big)\Big) \\
&= \varphi(e) = 1 \ \text{ para } \ \text{todo } \ t \in I
\end{aligned}
$$

Integrando, obtemos que $\varphi(\psi(t)) = t + c$ para $t \in I$ e $c \in \mathbb{R}$. Defina, agora, a aplicação $y : I + c \to Y$ por $y(t) = P(\psi(t-c))$. Assim,

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= P(\psi'(t-c)) \\
&= P(f(\psi(t-c)) \\
&= P\Big(e + g\Big(\varphi(\psi(t-c)), P(\psi(t-c))\Big)\Big) \\
&= P(e) + P\Big(g\Big(\varphi(\psi(t-c)), P(\psi(t-c))\Big)\Big) \\
&= g\Big(\varphi(\psi(t-c)), P(\psi(t-c))\Big) \\
&= g(t, y(t)) \text{ para } t \in I + c.
\end{aligned}
$$

Contradição, pois g não tem solução. Portanto, f não tem solução. ■

Lema 3.2. *Seja X um espaço de Banach cujo quociente pertence a $\mathcal{S}$. Então $X \in \mathcal{S}$.*

Demonstração: Seja $Q : X \to Y$ a aplicação quociente, onde $Y \in \mathcal{S}$. Então existe uma aplicação $g : \mathbb{R} \times Y \to Y$ contínua tal que a equação $y' = g(t, y)$ não tem solução. Considere a aplicação contínua $\psi : Y \to X$, definida por $Q\big(\psi(y)\big) = y$ para todo $y \in Y$. Defina a aplicação $f : \mathbb{R} \times X \to X$ por

$$
f(t, x) = \psi\Big(g\Big(t, Q(x)\Big)\Big)
$$

que é contínua, pois ψ, g e Q são contínuas. Suponha que a equação $x' = f(t, x)$ possua solução, ou seja, que exista uma aplicação $\varphi : I \to X$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, tal que $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. A aplicação $y : I \to Y$, definida por $y(t) = \Big(Q \circ \varphi\Big)(t)$, satisfaz

$$\begin{aligned} y'(t) &= Q\Big(\varphi'(t)\Big) \\ &= Q\bigg(f\Big(t, \varphi(t)\Big)\bigg) \\ &= Q\bigg(\psi\Big(g\Big(t, Q(\varphi(t))\Big)\Big)\bigg) \\ &= g\bigg(t, Q\Big(\varphi(t)\Big)\bigg) \\ &= g\Big(t, y(t)\Big) \text{ para todo } t \in I \end{aligned}$$

Contradição, pois g não tem solução e, portanto, $X \in \mathcal{S}$.■

Teorema 3.1. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita com uma base de Schauder $\{e_k; f_k\}$. Então $X \in \mathcal{S}$.*

Demonstração: Queremos provar que $X \in \mathcal{S}$, isto é, que existe uma aplicação contínua $g : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que a equação $x' = g(t, x)$ não tem solução. Sem perda de generalidade podemos supor que $\|R_k\| = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, já que todo espaço de Banach com uma base de Schauder $\{e_k; f_k\}$ pode ser munido com uma norma equivalente tal que $\|R_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere $a \in X$ tal que $Q_k(a) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina a aplicação $h : \mathbb{R} \times X \to X$ por

$$h(t, x) = \begin{cases} 2t\Phi_1\left(\dfrac{x}{t^2}\right) & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ 2t\Phi_1\left(\dfrac{x - a}{t^2}\right) & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Afirmamos que a aplicação h é contínua. De fato, a continuidade em pontos (t, x) para $t \neq 0$ decorre da continuidade da aplicação Φ_1, enquanto a continuidade em pontos $(0, x)$ segue do fato que a aplicação Φ_1 é limitada. Observe que a aplicação h tem a propriedade de que a equação $x' = h(t,x)$ não tem solução em qualquer intervalo contendo zero. Note também que pelo Lema 2.2 (iv)

$$\|h(t,x)\| \leq 4|t| \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, x \in X. \tag{3.1}$$

Em [15] Shkarin constrói uma equação sem solução, dividindo o espaço em muitas peças de dimensão infinita e usando uma cópia de h em cada uma destas peças deslocado para tempo diferente. Essa divisão é impossível sem o uso da incondicionalidade e, portanto, temos de desenvolver uma abordagem diferente. Vamos espalhar cópias da aplicação h diretamente sobre o eixo do tempo. Para isto, escolha uma sequência (ε_n) tal que $\varepsilon_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1. \tag{3.2}$$

Seja (t_n) uma enumeração dos números racionais tal que $t_i \neq t_j$ para $i \neq j$. Por indução, para cada $n \in \mathbb{N}$, encontramos números $\delta_n,\ u_i^n,\ v_i^n$, para $i \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, que satisfaçam as seguintes condições:

(D1) $\delta_n > 0$ e $\delta_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(D2) $8\delta_n \leq \dfrac{\varepsilon_n}{2}$.

(D3) Para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$ temos o seguinte: Se $t_n \in (u_j^k, u_{j+1}^k)$ para algum $j \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, então

$$2\delta_n < t_n - u_j^k \quad \text{e} \quad 2\delta_n < u_{j+1}^k - t_n.$$

Se $t_n \in (v_{j+1}^k, v_j^k)$ para algum $j \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, então

$$2\delta_n < v_j^k - t_n \quad \text{e} \quad 2\delta_n < t_n - v_{j+1}^k.$$

(D4) Para cada $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ temos o seguinte: suponha que $t_n \in (u_j^k, u_{j+1}^k) \cup (v_{j+1}^k, v_j^k)$ para algum $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então

$$4\delta_n < \frac{1}{2^n}\frac{1}{2^{j+2}}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{j+1}\delta_k\right)^2.$$

(D5) $u_i^n = t_n - \left(\frac{4}{5}\right)^i \delta_n$ e $v_i^n = t_n + \left(\frac{4}{5}\right)^i \delta_n$ para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, u_{-1}^n = -\infty, v_{-1}^n = +\infty$.

Antes de prosseguirmos, faz-se necessário um comentário sobre por que (D3) e (D4) fazem sentido. Seja $k \in \{1, ..., n-1\}$ fixo. Afirmamos que t_n pertence a uma quantidade finita de intervalos do tipo (u_j^k, u_{j+1}^k). De fato, se t_n pertencesse a uma quantidade infinita de intervalos do tipo (u_j^k, u_{j+1}^k) , então por (D5) teríamos $u_j^k \to t_k$ e $u_{j+1}^k \to t_k$. Mas, por hipótese, temos $u_j^k < t_n < u_{j+1}^k$, logo $t_n = t_k$. Absurdo, pois $t_i \neq t_j$ para $i \neq j$. Assim, devemos ter t_n pertencente a uma quantidade finita de intervalos do tipo (u_j^k, u_{j+1}^k). Logo, podemos controlar δ_n de tal forma que

$$2\delta_n < t_n - u_j^k \;\text{ e }\; 2\delta_n < u_{j+1}^k - t_n$$

Analogamente, verificamos o segundo item de (D3) e (D4). Por fim, definimos $g_n : \mathbb{R} \times X \to X$ por

$$g_0(t, x) = 0$$

e

$$g_n(t,x) = g_{n-1}(t,x) + \varphi_{\delta_n}(t-t_n)\Big(h(t-t_n,x) - \Phi_{\frac{\varepsilon_n}{4}}\Big(g_{n-1}(t,x)\Big)\Big)$$

para todo $t \in \mathbb{R}, x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

Observe que todas as aplicações g_n são contínuas, já que ambas h e $\Phi_{\frac{\varepsilon_n}{4}}$ são contínuas. Além disso, para $t \in \mathbb{R}$, com $|t - t_n| \geq 2\delta_n$, temos que $\varphi_{\delta_n}(t - t_n) = 0$ logo,

$$\|g_n(t,x) - g_{n-1}(t,x)\| = \varphi_{\delta_n}(t - t_n)\left\|\Big(h(t-t_n,x) - \Phi_{\frac{\varepsilon_n}{4}}\Big(g_{n-1}(t,x)\Big)\Big)\right\| = 0 < \varepsilon_n.$$

Enquanto que para $t \in \mathbb{R}$, com $|t - t_n| \leq 2\delta_n$, vale o seguinte:

$$\begin{aligned}
\|g_n(t,x) - g_{n-1}(t,x)\| &= \left\|\varphi_{\delta_n}(t-t_n)\Big(h(t-t_n,x) - \Phi_{\frac{\varepsilon_n}{4}}\Big(g_{n-1}(t,x)\Big)\Big)\right\| \\
&\leq \left\|h(t-t_n,x) - \Phi_{\frac{\varepsilon_n}{4}}\Big(g_{n-1}(t,x)\Big)\right\| \\
&\leq \|h(t-t_n,x)\| + \left\|\Phi_{\frac{\varepsilon_n}{4}}\Big(g_{n-1}(t,x)\Big)\right\| \\
&< 4|t-t_n| + \frac{\varepsilon_n}{2} \\
&\leq 8\delta_n + \frac{\varepsilon_n}{2} \leq \frac{\varepsilon_n}{2} + \frac{\varepsilon_n}{2} = \varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Onde nas desigualdades acima, utilizamos as propriedades das funções φ_{δ_n}, (3.1), Lema 2.2 (iv) e a condição (D2). Portanto, $\|g_n(t,x) - g_{n-1}(t,x)\| < \varepsilon_n$ para todo $t \in \mathbb{R}, x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, a sequência de aplicações (g_n) converge uniformemente em $\mathbb{R} \times X$ para uma aplicação contínua $g : \mathbb{R} \times X \to X$. Afirmamos que a equação $x' = g(t,x)$ não tem solução. Vamos provar isso por contradição. Suponha que exista um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma aplicação $y : I \to X$ tal que $y'(t) = g(t, y(t))$ para todo $t \in I$. Encontre $N \in \mathbb{N}$ (existe pela densidade dos números racionais) tal que $t_N \in I$. A fim de simplificar a notação vamos, a partir de agora, denotar $u_i^N = u_i$ e $v_i^N = v_i$ para $i \in \mathbb{N}$. A partir das propriedades das funções φ_{δ_k}, segue-se que

$$g(t,x) = g_N(t,x) \ \text{ para todo } \ x \in X \ \text{ e } \ t \in \mathbb{R} - \Delta, \tag{3.3}$$

onde $\Delta = \bigcup_{k=N+1}^{\infty} (t_k - 2\delta_k, t_k + 2\delta_k)$. De fato, se $t \in \mathbb{R} - \Delta$ então $|t - t_k| > 2\delta_k$ para todo $k > N$. Logo, $\varphi_{\delta_k}(t - t_k) = 0$. Assim,

$$g_{N+1}(t,x) = g_N(t,x) + \varphi_{\delta_{N+1}}(t - t_{N+1})\Big(h\Big(t - t_{N+1}, x\Big) - \Phi_{\frac{\varepsilon_{N+1}}{4}}\Big(g_N(t,x)\Big)\Big) = g_N(t,x).$$

Analogamente, temos que

$$g_{N+2}(t,x) = g_{N+1}(t,x) + \varphi_{\delta_{N+2}}(t - t_{N+2})\Big(h\big(t - t_{N+2}, x\big) - \Phi_{\frac{\varepsilon_{N+2}}{4}}\big(g_{N+1}(t,x)\big)\Big) = g_{N+1}(t,x).$$

Logo, para todo $k > N$ tal que $|t - t_k| > 2\delta_k$, concluimos que

$$g_k(t,x) = g_{k-1}(t,x) = \cdots = g_{N+2}(t,x) = g_{N+1}(t,x) = g_N(t,x).$$

Portanto, (3.3) está demonstrado. Seja $\Delta_j = \Delta \cap (u_j, u_{j+1})$ para $j \in \mathbb{N}$. Então por (D1) e (D3), temos que

$$\Delta_j = \bigcup_{\substack{t_k \in (u_j, u_{j+1}) \\ k > N}} (t_k - 2\delta_k, t_k + 2\delta_k).$$

Seja λ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Então utilizando a definição de medida de Lebesgue e (D4), temos

$$\lambda(\Delta_j) \leq \sum_{\substack{t_k \in (u_j, u_{j+1}) \\ k > N}} 4\delta_k < \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{j+2}}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{j+1}\delta_N\right)^2 < \frac{1}{2^{j+2}}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{j+1}\delta_N\right)^2. \tag{3.4}$$

Além disso, para cada $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, com $|t - t_N| < \delta_N$, existe uma vizinhança $U_{t,x}$ de $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$ e $K_{t,x} \in \mathbb{N}$ tal que

$$Q_k\big(g_N(s,y)\big) = Q_k\big(h(s - t_N, y)\big) \text{ para todo } k \geq K_{t,x} \text{ e } (s,y) \in U_{t,x}. \tag{3.5}$$

De fato, como $Q_n(x)$ converge para zero para todo $x \in X$, segue-se que existe $K_{t,x} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big\|Q_{K_{t,x}}\big(g_{N-1}(t,x)\big)\Big\| < \frac{\varepsilon_N}{4}.$$

Pela continuidade de g_{N-1}, existe uma vizinhança $U_{t,x}$ tal que $(s,y) \in U_{t,x}$ implica

$$\Big\|Q_{K_{t,x}}\big(g_{N-1}(s,y)\big)\Big\| < \frac{\varepsilon_N}{4}$$

e, além disso, $|s-t_N|<\delta_N$. Assim, para $(s,y)\in U_{t,x}$, temos $\varphi_{\delta_N}(s-t_N)=1$ e, portanto, pelo Lema 2.2(ii), temos para $k\geq K_{t,x}$

$$\begin{aligned}
Q_k\Big(g_N(s,y)\Big) &= Q_k\Big(g_{N-1}(s,y)+\varphi_{\delta_N}(s-t_N)\Big(h(s-t_N,y)-\Phi_{\varepsilon_N/4}(g_{N-1}(s,y))\Big)\Big)\\
&= Q_k\Big(g_{N-1}(s,y)\Big)+Q_k\Big(h(s-t_N,y)\Big)-Q_k\Big(\Phi_{\varepsilon_N/4}(g_{N-1}(s,y))\Big)\\
&= Q_k\Big(g_{N-1}(s,y)\Big)+Q_k\Big(h(s-t_N,y)\Big)-Q_k\Big(g_{N-1}(s,y)\Big)\\
&= Q_k\Big(h(s-t_N,y)\Big).
\end{aligned}$$

De (D5) segue-se que existe um índice $i\in\mathbb{N}$ tal que $u_i,v_i\in I$. Uma vez que o conjunto

$$W=\Big\{\Big(t,y(t)\Big);t\in[u_i,v_i]\Big\}\subset\mathbb{R}\times X$$

é compacto, existe uma subcobertura finita $\{U_j\}_{j=1}^m$ de uma cobertura $\Big\{U_{t,y(t)};t\in[u_i,v_i]\Big\}$ de W. Denotando a constante de (3.5) correspondente a U_j por $K_j,\ j=1,...,m$, podemos encontrar $K\in\mathbb{N}$ tal que $K\geq\max\limits_{1\leq j\leq m}K_j$,

$$\Big\|Q_K\Big(y(u_i)-a\Big)\Big\|<\frac{1}{2}(t_N-u_i)^2 \ \text{ e } \ \Big\|Q_K\Big(y(v_i)\Big)\Big\|<\frac{1}{2}(v_i-t_N)^2. \tag{3.6}$$

De (3.5) segue-se que

$$Q_K\bigg(g_N\Big(t,y(t)\Big)\bigg)=Q_K\bigg(h\Big(t-t_N,y(t)\Big)\bigg) \ \text{ para todo } \ t\in[u_i,v_i]. \tag{3.7}$$

Afirmamos que

$$\Big\|Q_K\Big(y(t)-a\Big)\Big\|<(t_N-t)^2 \ \text{ para todo } \ t\in[u_i,t_N). \tag{3.8}$$

Provaremos isso por indução, mostrando que, para $j\geq i$

$$\left\|Q_{K}\Big(y(t)-a\Big)\right\| < \left(1-\frac{1}{2^{j+1}}\right)(t_{N}-u_j)^2 \text{ para todo } t\in[u_j,u_{j+1}]. \tag{3.9}$$

Seja $j \geq i$ e suponha $\left\|Q_{K}\Big(y(u_j)-a\Big)\right\| < \left(1-\frac{1}{2^{j}}\right)(t_{N}-u_j)^2$ a partir da fase de indução anterior (ou a partir de (3.6) para o primeiro passo). Suponha que (3.9) não seja válido e considere

$$S_j = \inf\left\{t\in[u_j,u_{j+1}]; \left\|Q_{K}\Big(y(t)-a\Big)\right\| \geq \left(1-\frac{1}{2^{j+1}}\right)(t_{N}-t)^2\right\}. \tag{3.10}$$

Então $S_j \in (u_j,u_{j+1}]$. Seja $z:\mathbb{R}\to X$, definida por $z(t)=Q_{K}(a)+\dfrac{Q_{K}(y(u_j)-a)}{(t_{N}-u_j)^2}(t_{N}-t)^2$ e encontre $T\in[u_j,S_j]$ tal que

$$\left\|Q_{K}\Big(y(T)\Big)-z(T)\right\| = \max_{t\in[u_j,S_j]}\left\|Q_{K}\Big(y(t)\Big)-z(t)\right\|. \tag{3.11}$$

Então, para $t \neq t_N$, temos

$$\begin{aligned}
z'(t) &= -2\frac{Q_{K}\Big(y(u_j)-a\Big)}{(t_{N}-u_j)^2}(t_{N}-t)\\
&= \frac{2}{(t-t_{N})}Q_{K}(a)+2\frac{Q_{K}\Big(y(u_j)-a\Big)}{(t_{N}-u_j)^2}\frac{(t_{N}-t)^2}{(t-t_{N})}-\frac{2}{(t-t_{N})}Q_{K}(a)\\
&= \frac{2}{(t-t_{N})}\left[Q_{K}(a)+\frac{Q_{K}\Big(y(u_j)-a\Big)}{(t_{N}-u_j)^2}(t_{N}-t)^2-Q_{K}(a)\right]\\
&= \frac{2\Big(z(t)-Q_{K}(a)\Big)}{t-t_{N}}.
\end{aligned}$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} z(T) &= z(u_j) + \int_{u_j}^{T} \frac{2\Big(z(t) - Q_{\scriptscriptstyle K}(a)\Big)}{t - t_{\scriptscriptstyle N}} dt \\ &= Q_{\scriptscriptstyle K}\Big(y(u_j)\Big) + \int_{u_j}^{T} \frac{2\Big(z(t) - Q_{\scriptscriptstyle K}(a)\Big)}{t - t_{\scriptscriptstyle N}} dt. \end{aligned}$$

Como $y'(t) = g\Big(t, y(t)\Big)$ para todo $t \in I$, segue-se que

$$y(T) = y(u_j) + \int_{u_j}^{T} g\Big(t, y(t)\Big) dt$$

e, portanto,

$$Q_{\scriptscriptstyle K}\Big(y(T)\Big) = Q_{\scriptscriptstyle K}\Big(y(u_j)\Big) + \int_{u_j}^{T} Q_{\scriptscriptstyle K}\Big(g\Big(t, y(t)\Big)\Big) dt.$$

Para provar nossa afirmação, mostraremos que $Q_{\scriptscriptstyle K}(y)$ não se afasta muito de z, que é uma solução para a equação "não-perturbada". Usando (3.7), Lema 2.2(ii) e (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} Q_{\scriptscriptstyle K}\bigg(g_{\scriptscriptstyle N}\Big(t, y(t)\Big)\bigg) &= Q_{\scriptscriptstyle K}\bigg(h\Big(t - t_{\scriptscriptstyle N}, y(t)\Big)\bigg) \\ &= Q_{\scriptscriptstyle K}\left(2(t - t_{\scriptscriptstyle N})\Phi_1\Big(\frac{y(t) - a}{(t - t_{\scriptscriptstyle N})^2}\Big)\right) \\ &= \frac{2Q_{\scriptscriptstyle K}\Big(y(t) - a\Big)}{(t - t_{\scriptscriptstyle N})} \text{ para cada } t \in [u_j, S_j]. \end{aligned}$$

De fato, para $t \in [u_j, S_j)$, utilizando (3.7), Lema 2.2(ii) e (3.10), obtemos a igualdade. Mostraremos agora que vale para S_j. Como $S_j = \lim\limits_{n \to \infty} t_n$, onde $t_n \in [u_j, S_j)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}
Q_K\Big(g_N\Big(S_j, y(S_j)\Big)\Big) &= Q_K\Big(g_N\Big(\lim_{n\to\infty} t_n, y(\lim_{n\to\infty} t_n)\Big)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} Q_K\Big(g_N\Big(t_n, y(t_n)\Big)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} Q_K\Big(h\Big(t_n - t_N, y(t_n)\Big)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} Q_K\left(2(t_n - t_N)\Phi_1\Big(\frac{y(t_n)-a}{(t_n-t_N)^2}\Big)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} 2(t_n - t_N)Q_K\Big(\frac{y(t_n)-a}{(t_n-t_N)^2}\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(t_n-t_N)}{(t_n-t_N)^2}Q_K\Big(y(t_n)-a\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2Q_K\Big(y(t_n)-a\Big)}{(t_n-t_N)}\\
&= \frac{2Q_K\Big(y(S_j)-a\Big)}{(S_j-t_N)}.
\end{aligned}$$

Logo, vale para S_j. Portanto, $Q_K\Big(g_N\Big(t, y(t)\Big)\Big) = \dfrac{2Q_K\Big(y(t)-a\Big)}{t-t_N}$ para todo $t \in [u_j, S_j]$

Assim,

$$\begin{aligned}
Q_K\big(y(T)\big) - z(T) &= Q_K\big(y(u_j)\big) + \int_{u_j}^T Q_K\big(g(t,y(t))\big)dt - Q_K\big(y(u_j)\big) - \int_{u_j}^T \frac{2\big(z(t)-Q_K(a)\big)}{t-t_N}dt\\
&= \int_{u_j}^T \left(Q_K\Big(g\big(t,y(t)\big)\Big) - \frac{2\big(z(t)-Q_K(a)\big)}{t-t_N}\right)dt\\
&= \int_{u_j}^T \left(Q_K\Big(g\big(t,y(t)\big)\Big) - Q_K\Big(g_N\big(t,y(t)\big)\Big) + Q_K\Big(g_N\big(t,y(t)\big)\Big) - \frac{2\big(z(t)-Q_K(a)\big)}{t-t_N}\right)dt\\
&= \int_{u_j}^T Q_K\Big(g\big(t,y(t)\big) - g_N\big(t,y(t)\big)\Big)dt + \int_{u_j}^T \left(Q_K\Big(g_N\big(t,y(t)\big)\Big) - \frac{2\big(z(t)-Q_K(a)\big)}{t-t_N}\right)dt\\
&= \int_{u_j}^T Q_K\Big(g\big(t,y(t)\big) - g_N\big(t,y(t)\big)\Big)dt + \int_{u_j}^T \left(\frac{2Q_K\big(y(t)-a\big)}{t-t_N} - \frac{2\big(z(t)-Q_K(a)\big)}{t-t_N}\right)dt\\
&= \int_{(u_j,T)\cap\Delta} Q_K\Big(g\big(t,y(t)\big) - g_N\big(t,y(t)\big)\Big)dt + 2\int_{u_j}^T \frac{1}{t-t_N}\big(Q_K\big(y(t)\big) - z(t)\big)dt,
\end{aligned}$$

Aplicando (3.2) e (3.11) pode-se estimar

$$\begin{aligned}
\|Q_K\big(y(T)\big) - z(T)\| &\leq \int_{\Delta_j} 1dt + 2\|Q_K\big(y(T)\big) - z(T)\| \int_{u_j}^{u_{j+1}} \frac{1}{t_N - t} dt \\
&= \lambda(\Delta_j) + 2\|Q_K\big(y(T)\big) - z(T)\| \log \frac{t_N - u_j}{t_N - u_{j+1}} \\
&= \lambda(\Delta_j) + 2\|Q_K\big(y(T)\big) - z(T)\| \log \frac{5}{4} \\
&< \lambda(\Delta_j) + \frac{1}{2}\|Q_K\big(y(T)\big) - z(T)\|
\end{aligned}$$

e finalmente por (3.11), obtemos

$$\|Q_K\big(y(S_j)\big) - z(S_j)\| \leq \|Q_K\big(y(T)\big) - z(T)\| < 2\lambda(\Delta_j).$$

Usando a desigualdade triangular, a última inequação obtida, a hipótese, (3.4) e (D5), concluímos que

$$\begin{aligned}
\|Q_K\big(y(S_j) - a\big)\| &\leq \|Q_K\big(y(S_j)\big) - z(S_j)\| + \|z(S_j) - Q_K(a)\| \\
&< 2\lambda(\Delta_j) + \frac{\|Q_K\big(y(u_j) - a\big)\|}{(t_N - u_j)^2}(t_N - S_j)^2 \\
&< 2\lambda(\Delta_j) + \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)(t_N - S_j)^2 \\
&< \frac{1}{2^{j+1}}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{j+1} \delta_N\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)(t_N - S)^2 \\
&= \frac{1}{2^{j+1}}(t_N - u_{j+1})^2 + \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)(t_N - S_j)^2 \\
&\leq \frac{1}{2^{j+1}}(t_N - S_j)^2 + \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)(t_N - S_j)^2 \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right)(t_N - S_j)^2,
\end{aligned}$$

uma contradição com (3.10). Logo, (3.8) é verdadeira. Agora de (3.8), concluímos que $\lim\limits_{t \to t_N^-} Q_K\big(y(t)\big) = Q_K(a) \neq 0$. Analogamente ao modo anterior, aproximando do ponto t_N pela direita, substituindo $u_j s$ por $v_j s$ e a por 0, mostramos que $\lim\limits_{t \to t_N^+} Q_K\big(y(t)\big) = 0$. Esses dois fatos contradizem a continuidade de y em t_N. Logo, $g : \mathbb{R} \times X \to X$ não tem solução. Portanto, $X \in \mathcal{S}$. ■

3.1 Resultado Principal

Nesta seção, apresentaremos o resultado principal deste trabalho, o qual foi mostrado em 2010 por Petr Hájek e Michal Johanis.

Teorema 3.2. *Seja X um espaço de Banach com um quociente separável de dimensão infinita. Então existe uma aplicação contínua $f : X \to X$ tal que a equação autônoma $x' = f(x)$ não tem solução.*

Demonstração: Como X/M é um espaço de Banach separável de dimensão infinita, segue que $(X/M)/N$ é um espaço de Banach de dimensão infinita e possui uma base de Schauder(veja [9, Teorema 1.b.7]). Assim, pelo Teorema 3.1, temos que $(X/M)/N \in \mathcal{S}$. Pelo Lema 3.2, segue-se que $X/M \in \mathcal{S}$. Portanto, pelo Lema 3.1, concluímos que existe uma aplicação contínua $f : X \to X$ tal que a equação diferencial $x' = f(x)$ não tem solução.■

Referências Bibliográficas

[1] BARROSO, C. S. ; MARROCOS, M. A. M. ; REBOUÇAS, M. P. An interplay between the weak form of Peano's theorem ans structural aspects of Banach spaces. *Studia Mathematica*, v. 216, p. 219-235, 2013.

[2] BOTELHO, G. ; PELLEGRINO, D. ; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de análise funcional*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Piscataway: Springer, 2010.

[4] CARRERA, W. A. C. *Espaços de Banach com várias estruturas complexas*. 2015. 110 f. Tese de Doutorado - Universidade de São Paulo, São Paulo. 2015.

[5] CONWAY, J. B. *A course in functional analysis*. 2nd ed. Springer-Verlag: New York, 1990.

[6] FABIAN, M. ; HABALA, P. ; HÁJEK, P. ; MONTESINOS, V. ; PELANTE, J. ; ZIZLER, V. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*. CMS Books in Mathematics, v. 8, Springer - Verlag, 2001.

[7] FABIAN, M. ; HABALA, P. ; HÁJEK, P. ; MONTESINOS, V. ; ZIZLER, V. *Banach Space Theory*: the basis for linear and nonlinear analysis. Springer: New York, 2011.

[8] HÁJEK, P. ; JOHANIS, M. On Peano's theorem in Banach spaces. *J. Differential Equations*, v. 249, p. 3342-3351, 2010.

[9] LINDENSTRAUSS, J. ; TZAFRIRI, L. *Classical Banach Spaces I*: sequence space. Springer-Verlag, 1977.

[10] LASOTA, A. ; YORKE, J. A. The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach spaces. *J. Differential Equations*, v. 13, p. 1-12, 1973.

[11] LIMA, E. L. *Espaço métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[12] MENDES, A. C. *A forma fraca do teorema de Peano em espaços de Banach de dimensão infinita*. 2015. 55 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Amazonas, Manaus. 2015

[13] OLIVEIRA, C.R. *Introdução à análise funcional*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[14] REBOUÇAS, M. P. A Conjectura do quociente separável, uma conjectura sobre EDO's em espaços de Banach, uma teoria de aproximação de pontos fixos e contribuições. 2012. 86 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2012.

[15] SHKARIN, S. On Osgood theorem in Banach spaces. *Math. Nachr.*, v. 257, p. 87-98, 2003.

[16] SOTOMAYOR TELLA, J. M. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.