

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

*PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NA GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM
PARA O ENSINO MÉDIO*

Ricardo Santos Fonseca

MANAUS
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Ricardo Santos Fonseca

*PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NA GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM
PARA O ENSINO MÉDIO*

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS

2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

F676p Fonseca, Ricardo Santos
Problemas de Otimização na Geometria : Uma abordagem para o Ensino Médio / Ricardo Santos Fonseca. 2016
34 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Problemas de Otimização . 2. Geometria. 3. Ensino Médio . 4. Matemática . I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

RICARDO SANTOS FONSECA

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NA GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM
PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 04 de agosto de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Membro

Profa. Dr. Valtemir Martins Cabral
Membro

Dedico esta dissertação a minha futura esposa Tacilene Campos Pereira, a quem estive ao meu lado nos momentos difíceis e me ajudou quando mais precisava, me dando todo seu carinho e amor.

AGRADECIMENTOS

A Deus, ser supremo que guia meus passos a quem devo o dom da vida e a dádiva da sabedoria;

A minha mãe e meu pai, que fizeram por mim a coisa mais importante da minha vida, me deram a oportunidade de estudar;

A minha família e meu amigos, que ao longo de minha trajetória sempre me deram o estímulo necessário;

Aos meus amigos Camilo Souza e Nicolas Hatta pela moradia em Manaus durante as aulas do mestrado, sem eles não seria possível concluir o curso.

Ao professor Nilomar Oliveira que foi mais que um professor, coordenador ou orientador durante o mestrado, sempre dedicado e atencioso.

"No fim tudo dará certo, se ainda não deu certo
é porque ainda não chegou ao fim."

RESUMO

Neste trabalho, disserta-se sobre Problemas de Otimização Aplicados à Geometria. Apresenta-se inicialmente um pouco da história de alguns problemas clássicos de otimização em Geometria Euclidiana Plana, como, o Problema Isoperimétrico, o Problema de Heron e o Problema de Steiner. A partir daí, usou-se esse conhecimento para construir definições, teoremas e proposições a respeito da Otimização em Geometria o que proporcionou grandiosas ferramentas para a resolução de problemas que podem ser aplicados no Ensino Médio ou em Olimpíadas de Matemática.

Palavras-chave: Problemas de Otimização; Geometria; Ensino Médio.

ABSTRACT

In this work, lectures on Optimization Problems Applied Geometry. It presents initially a little history of some classic optimization problems in Euclidean Geometry Plana, as the Isoperimétrico Problem, the Heron Problem and the Steiner Problem. From there, he used that knowledge to build definitions, theorems and propositions regarding the Optimization of Geometry which provided grandiose tools for problem solving that can be applied in high school or in Mathematics Olympics.

Key-words: Optimization Problems; Geometry; High School.

Sumário

Introdução	1
1 O Problema Isoperimétrico	3
1.1 Um pouco de história	3
1.2 O Problema de Dido	5
1.3 Abordagem geométrica do problema isoperimétrico	6
2 O Problema de Steiner	10
2.1 Um pouco de história	10
2.2 A solução geométrica do problema de Steiner	13
2.3 Generalização do Problema de Steiner	15
3 O Problema de Heron	18
3.1 Um pouco de história	18
3.2 Solução do Problema de Heron	19
4 Problemas de Otimização	21
4.1 Aplicações do Problema Isoperimétrico	21
4.2 Aplicações do Problema de Steiner	26
4.3 Aplicações do Problema de Heron	30
Considerações Finais	33
Referências Bibliográficas	34

Introdução

O ensino da matemática é de extrema importância no contexto da forma geral dos indivíduos, entretanto pesquisas apontam para uma situação caótica do ensino da matemática no Brasil. Historicamente a matemática é considerada um tema difícil, mas importante dentro do contexto escolar. Ao que se refere à geometria ela é fundamental para os indivíduos interagirem em seu meio. Pois, pode ser considerada como uma ferramenta muito importante para a descrição e interrelação do homem com o meio em que vive, já que é como a parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade. Conforme Rojas [7], a intuição geométrica é conceber de um modo claro as relações geométricas, ou seja, visualizar um caminho de solução. A geometria é um dos ramos da matemática que pode estimular o interesse pelo aprendizado da matemática, pois pode revelar a realidade que rodeia o aluno, dando oportunidades de desenvolver habilidades criativas.

Neste sentido, os problemas de Otimização na Geometria vêm sendo abordados pelos matemáticos desde os primórdios, pois, já na antiguidade os matemáticos demonstravam um grande interesse por esse tipo de problema. Euclides por volta de 300 a.C. em sua obra Elementos, (Livro 6, proposição 27) fala de um problema de maximização, que consiste em achar o maior produto possível de dois números cuja soma era dada. Mais tarde, Zenodorus (200 a.C. a 140 a.C.) estudou a área de uma figura com perímetro fixo e o volume de um sólido com superfície dada.

Este trabalho trata de Problemas de Otimização na Geometria, falando sobre problemas de otimização clássicos, bem como, faz uma abordagem a problemas de otimização que podem ser estudados no ensino médio, ou mesmo serem cobrados em Olimpíadas de Matemática, fazendo assim que desperte o interesse tanto do aluno quanto do professor em buscar se aprofundar mais sobre o tema.

No Capítulo 1 faz-se uma abordagem sobre o *Problema Isoperimétrico* destacando sua abordagem histórica, falando desde o Problema de Dido até fazer sua abordagem em termos geométricos.

No Capítulo 2 apresenta-se o *Problema de Steiner* fazendo sua contextualização histórica,

sua solução geométrica e a generalização do problema.

No Capítulo 3 explora-se o *Problema de Heron* seus aspectos históricos e sua solução geométrica.

No Capítulo 4 apresentam-se Problemas de Otimização na Geometria que poderiam facilmente ser explorados durante alguns conteúdos de matemática no Ensino Médio, destacando-se problemas pertinentes a cidade de Parintins-AM.

No Capítulo 5 faz-se as considerações finais acerca do trabalho.

Capítulo 1

O Problema Isoperimétrico

1.1 Um pouco de história

O problema isoperimétrico é um dos grandes problemas de otimização, pois trata da otimização de áreas de figuras isoperimétricas, ou seja, figuras que tem o mesmo perímetro.

O problema isoperimétrico teve sua origem na Grécia Antiga, por volta do século IX a.C., fundamentada numa lenda, a Lenda de Dido. A lenda conta um episódio das migrações fenícias para o Ocidente mediterrâneo, mas ficou especialmente conhecida devido ao romance entre Dido e Eneias, contada em Eneida de Virgílio (70 a.C. a 19 a.C.) [3].



Figura 1.1: Livro Eneida de Virgílio.
Fonte: [5].

Segundo a lenda, Muto, o rei de Tiro, quando morreu, deu o reino aos seus dois filhos, Pigmalião e Elissa, o nome tírio de Dido. Embora Pigmalião fosse ainda uma criança, foi ele quem o povo escolheu para rei. Elissa casou com seu tio Sicarbas, sacerdote de Hércules, segunda figura do Estado depois do rei. Tentando roubar a enorme fortuna do seu cunhado,

Pigmalião mandou matar Sicarbas. Dido descobriu, ficou horrorizada com o crime, e fugiu. Em segredo, carregou os barcos com tesouros de Sicarbas e fugiu acompanhada por nobres tírios descontentes. Tentando iludir o seu irmão durante a fuga, Dido atirou ostencivamente ao mar sacos cheios de areia, que dizia estarem cheios de ouro e que oferecia à alma de seu marido. Seguiram rumo a África, onde os indígenas os receberam de forma amigável. Dido solicitou um pouco de terra para se estabelecer, então foi oferecida a ela que tomasse tanta quanta pudesse conter numa pele de boi. Aparentemente isso parecia ser uma oferta ridícula, Dido deu um golpe de gênio. Dido mandou cortar uma pele de boi em tiras muito finas que depois de atadas formaram um fio com que delimitou um território bastante vasto. Os indígenas foram obrigados a respeitar a promessa feita, concederam-lhe a terra assim delimitada, deste espaço de terra delimitado Dido ergueu a cidade de Cartago [3].



Figura 1.2: Fio obtido do couro de boi para delimitar o terreno.

Fonte: [5]

Segundo Madeira [3] a cidade de Cartago prosperou e adquiriu uma importância significativa, tal que Iarbas, rei indígena, quis casar com Dido, ameaçando declarar guerra à cidade caso ela recusasse. A rainha Dido, que não podia rejeitar a proposta mas odiava a ideia dessa nova união, pediu um prazo de três meses sob pretexto de acalmar a alma do primeiro marido com sacrifícios. Quando o prazo terminou, subiu para pira fúnebre e suicidou-se.

Baseando-se neste tema Virgílio, mesmo sem se preocupar com a cronologia segundo a qual haveria pelo menos trezentos anos entre a tomada de Troia e a fundação de Cartago, fantasiou uma versão da história fazendo aparecer Eneias na lenda de Dido, na sua obra Eneida. Virgílio conta que o herói Eneias é empurrado por uma tempestade para a costa da África e recolhido pelos habitantes de Cartago. Enquanto reparavam os navios, Eneias usufruiu da hospitalidade da rainha Dido, que pouco a pouco se apaixonou por ele e se tornou sua amante. Quando o rei Iarbas soube do acontecido, conseguiu afastar Eneias, então Eneias partiu sem tornar a ver a rainha. Esta, soube que fora abandonada, ergueu uma enorme pira e suicidou-se entre as chamas [3].

Matematicamente falando, o que vale a pena destacar é como Dido conseguiu um território tão vasto. Segundo Madeira [3] Dido resolveu o seguinte problema:

Dado um fio com determinado comprimento, qual é a maior porção de terra que se consegue delimitar com esse fio? E de que forma se obtém a quantidade máxima?

Alguns autores afirmam que Dido escolheu um local com acesso ao mar, pois sua ideia foi utilizar não só o fio mas também o mar para delimitar a maior porção de terra possível. Por isso, o problema acima é designado por problema de Dido.

1.2 O Problema de Dido

O Problema de Dido também pode ser descrito da seguinte maneira "Dado um determinado comprimento, qual a curva plana, simples e fechada com esse comprimento que delimita a maior área possível?"

Este problema de enunciado simples, mas com uma complexa resolução foi resolvido naqueles tempos míticos, fato que merece um devido destaque. Entretanto somente séculos depois pode ser justificado [3].

A primeira demonstração desta propriedade aparece num comentário de Teão de Alexandria (335 a 405) à obra Almagesto de Ptolomeu (85 a 165) e nos trabalhos de Pappo de Alexandria (290 a 350), mas o seu autor é Zenodoro (200 a.C. a 140a.C.) [3].

Madeira [3] afirma que nessa época, os gregos já sabiam que a circunferência era a solução do referido problema. A demonstração completa só foi conhecida a partir de 1880 apresentada por Weierstrass (1815 a 1897) em um de seus seminários na Universidade de Berlim.

Zenodoro usando o contexto geométrico foi um dos impulsionadores do desenvolvimento do problema, mostrando que, entre os $n - gonos$ de comprimento fixo, o $n - gono$ regular é o que tem a maior área (considerando que o $n - gono$ existe, isto é, supondo que o $n - gono$ podia ser construído com régua e compasso). Destaca-se também a participação de Steiner (1796 a 1863), que apresentou várias demonstrações da propriedade isoperimétrica para a circunferência e para as bolas em espaços euclidianos de dimensões superior, usando a chamada simetrização de Steiner. As demonstrações de Zenodoro e Steiner estão incompletas, visto que, foram obtidas assumindo a existência de solução para o problema. Estas demonstrações são completadas com outros resultados que permitem resolver, de forma rigorosa, o problema isoperimétrico [3].

1.3 Abordagem geométrica do problema isoperimétrico

Antes de provar o problema isoperimétrico deve-se ser observado que em relação aos triângulos com mesma medida, o triângulo retângulo é o que possui maior área. Disto, chega-se a conclusão de que a semicircunferência é a curva plana aberta, com extremos em dois pontos de uma reta, que tem a maior área, daí conclui-se que a circunferência é a curva plana fechada que engloba a maior área. Esse problema será resolvido utilizando alguns resultados que seguem:

Definição 1.1. Uma curva plana é uma função contínua definida em um intervalo I com valores em \mathbb{R}^2 . Seja $P : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva. Os pontos $P(a)$ e $P(b)$ são chamados extremos da curva.

Na figura 1.3 são apresentadas algumas curvas. Na curva (a), os extremos são distintos $P(a) \neq P(b)$ e é denominada figura aberta e ela se autointersecta, isto é, dois valores distintos de t originam o mesmo ponto. Na curva (b), como $P(a) = P(b)$, chamamo-la de fechada, embora ela também se autointersecte num ponto diferente dos extremos. Quando uma curva, por exemplo a curva (c), não possui auto intersecções, além dos extremos, eventualmente, dizemos que a curva é simples, no caso da curva (c) ela é uma curva simples e fechada.

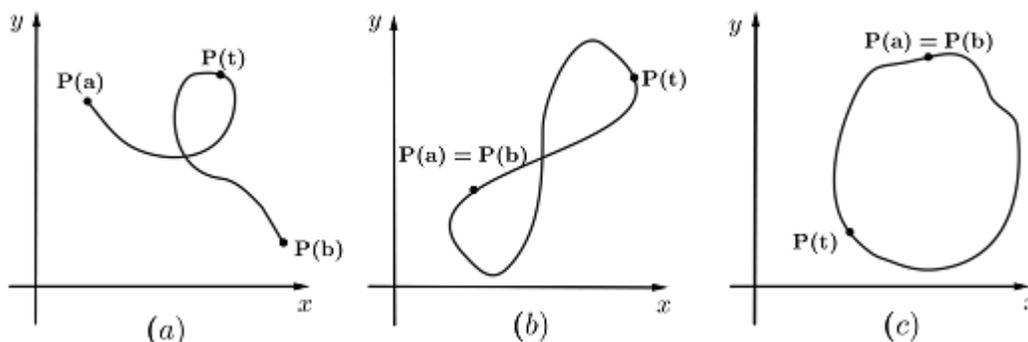


Figura 1.3: Tipos de curvas.

Fonte: [5]

Definição 1.2. Um conjunto convexo é um conjunto com a seguinte propriedade: dados dois de seus pontos, o segmento de reta que os une também está inteiramente contido no conjunto.

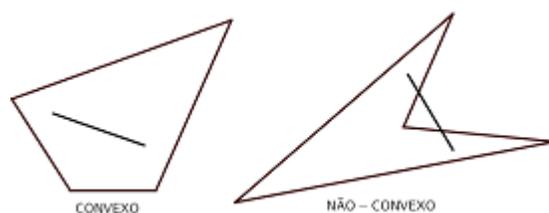


Figura 1.4: Diferença entre figuras convexas e não-convexas.

Proposição 1.1. *Seja F_1 uma figura plana limitada não convexa, cuja fronteira seja uma curva plana simples e fechada, C_1 . Então é possível encontrar uma figura plana convexa, F'_1 , de área maior do que a de F_1 , tal que sua fronteira, C'_1 , seja uma curva plana simples e fechada, de comprimento igual ao de C_1 .*

Demonstração. Como F_1 não é convexa, existem pontos P e Q em F_1 tais que o segmento \overline{PQ} não esteja contido em F_1 . Sendo A e B os pontos de intersecção do segmento \overline{PQ} com C_1 tal que $\overline{AB} \cap C_1 = \{A, B\}$, refletimos uma das partes de C_1 com extremos em A e B em relação à reta que contém \overline{PQ} , obtendo uma nova figura F'_1 , com fronteira C'_1 , de mesmo comprimento que o de C_1 , porém com área maior do que a de F_1 .

Conforme figura 1.5 a seguir:

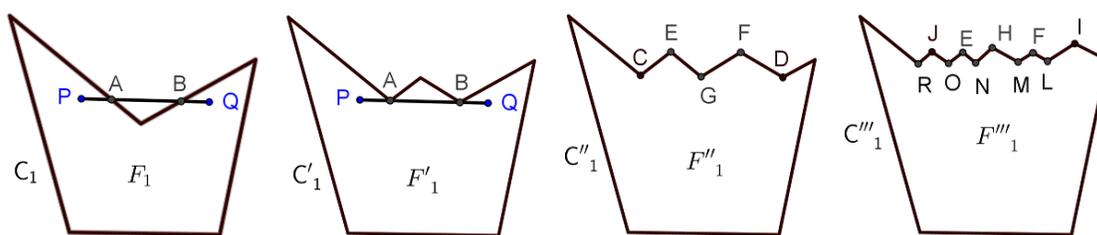


Figura 1.5: Figuras não-convexas.

Caso F'_1 ainda não for convexa, é repetido o raciocínio até ser encontrada uma figura F_2 convexa.

Com base na proposição anterior, conclui-se que figuras isoperimétricas são sempre convexas, e mais, a mesma proposição conduz ao corolário abaixo, cuja demonstração é semelhante, uma vez que o segmento \overline{AB} permanece inalterado na sequência de figuras obtidas de F_1 . \square

Corolário 1.1. *Seja C_1 uma curva plana, simples e aberta, situada de um mesmo lado de uma reta r e com extremos A e B nessa reta. Suponhamos que a curva fechada $C_1 \cup \overline{AB}$ seja fronteira de uma figura limitada, F_1 , não convexa. Então existe uma curva C_2 , plana, simples e aberta, de mesmo perímetro que o de C_1 , com os mesmos extremos A e B em r , tal que $C_2 \cup \overline{AB}$ seja fronteira de uma curva convexa com área maior do que a de F_1 .*

Proposição 1.2. *Dentre todos os triângulos com dois lados de comprimentos fixos, o de maior área é o triângulo retângulo que possui esses lados como catetos.*

Demonstração. Sejam \overline{BC} e \overline{AC} dois segmentos de medidas fixas a e b , respectivamente. Sejam α a medida do ângulo $\angle ACB$ e h a medida da altura do triângulo ABC relativa ao vértice A , como na figura 1.6 a seguir:

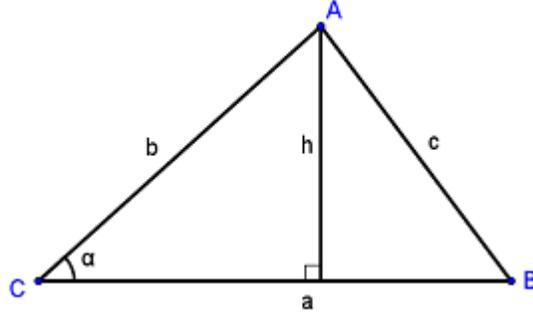


Figura 1.6: Triângulo retângulo.

A área S desse triângulo pode ser calculada por:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{ab \sin \alpha}{2} \quad (1.1)$$

Observa-se que $h = b \sin \alpha$ independentemente de α ser agudo, reto ou obtuso, devendo-se, nesse último caso, observar que $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Como $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ para $0 \leq \alpha \leq \pi$, concluímos que S assume o maior valor possível quando $\sin \alpha = 1$, ou seja, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, como queríamos demonstrar. \square

Proposição 1.3. *Seja F_1 uma figura plana convexa cuja fronteira seja composta por uma curva C_1 plana, simples, aberta, de extremos A e B e de comprimento p , unida com o segmento \overline{AB} . Suponhamos que, nessas condições, F_1 tenha área máxima. Então F_1 é um semicírculo.*

Demonstração. Supondo que F_1 não seja um semicírculo. Então existe um ponto $C \in C_1$ tal que ABC não é um triângulo retângulo, uma vez que, se ABC fosse retângulo para todo $C \in C_1$, F_1 seria um semicírculo. Como F_1 é convexa, os segmentos \overline{AC} e \overline{BC} estão contidos em F_1 , isto é, o triângulo ABC está contido em F_1 . Sejam F_2 e F_3 as figuras sobre \overline{AC} e \overline{BC} , de tal modo que $F_1 = F_2 \cup \triangle ABC \cup F_3$.

Considerando o triângulo $A'B'C'$, retângulo em C' , de tal modo que $A'C' \cong AC$ e $B'C' \cong BC$. Pela proposição 1.2, a área de $A'B'C'$ é maior do que a área de ABC . Considerando então, a figura $F'_1 = F_2 \cup A'B'C' \cup F_3$, denominando sua fronteira por $C_2 \cup A'B'$. Portanto, F'_1 tem fronteira composta por uma curva C_2 plana, simples e aberta, de extremos A' e B' e comprimento p , unida com o segmento $A'B'$. No entanto, a área de F'_1 é maior do que a de F_1 , contrariando a hipótese.

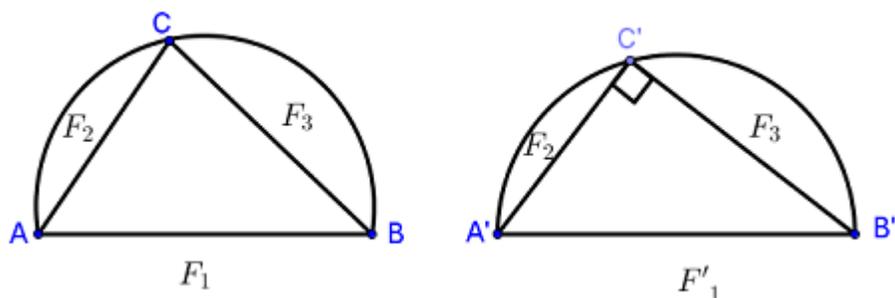


Figura 1.7: Triângulo inscrito em um semicírculo.

Caso F'_1 não seja convexa, pelo corolário 1.1, é possível tomar F'''_1 convexa, com fronteira $C_3 \cup A'B'$ e área maior do que a de F'_1 , contrariando as condições da hipótese, que diz que F_1 tem área máxima. Logo, F_1 é um semicírculo. \square

Teorema 1.1. (Teorema Isoperimétrico): *Dado um comprimento fixo, dentre todas as figuras planas, fechadas, convexas e de perímetro igual a esse comprimento, o círculo é a que possui maior área.*

Demonstração. Supondo que a figura de maior área, F_1 , não seja um círculo. Seja $2p$ o comprimento da fronteira C_1 de F_1 . Tomando os pontos A e B em C_1 de modo que o comprimento da curva, em C_1 , de A até B , seja igual a p . Denominando as duas partes de C_1 , determinadas por A e B , por C_2 e C_3 . Logo, $F_1 = F_2 \cup F_3$, sendo F_2 a figura com fronteira $C_2 \cup AB$ e F_3 a figura com fronteira $C_3 \cup AB$, ambas com área máxima. Assim, F_2 ou F_3 não é um semicírculo e possui área máxima, contradizendo a Proposição 1.3. \square

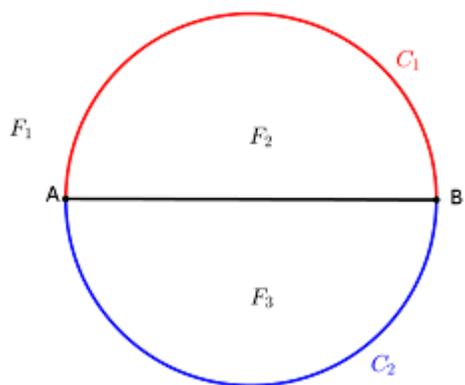


Figura 1.8: Figura de área máxima.

Capítulo 2

O Problema de Steiner

2.1 Um pouco de história

O problema de Steiner, é simples porém instrutivo, basicamente: Dados três pontos A , B e C em um plano, um quarto ponto P no plano é procurado, tal que, a soma $a + b + c$ seja um mínimo, onde a , b , c representam as três distâncias de P a A , B , C respectivamente [2].

Em 1836, Gauss, talvez, tenha sido o primeiro quem formulou um problema com uma extensão deste tipo. Em uma carta a Schuhmacher, Gauss fez a seguinte pergunta: Como uma rede de estradas de ferro de comprimento mínimo, conectando as quatro cidades Bremen, Harburg (hoje uma parte de Hamburg), Hannover e Braunschweig, pode ser criada? Pode-se verificar que a solução é uma rede na qual Bremen, Harburg e Hannover são interconectadas por um ponto de Steiner, e Hannover e Braunschweig são conectadas por uma linha reta [4].



Figura 2.1: Problema proposto por Gauss.

Fonte: [4].

Posteriormente, Jarnić e Kossler, em 1934, propuseram o seguinte problema: Encontrar a

rede mínima interconectando p pontos no plano. Foi estudado o caso particular de p pontos distribuídos como vértices de polígonos regulares.

Mas Courant e Robbins, em seu livro *What is Mathematics?*, de 1941, trataram do problema, sem dar a fama nem a Fermat, nem a Gauss e nem a Jarník e Kossler. Comentando que Steiner o havia estudado no caso $p = 3$, então passaram a chamá-lo *Problema de Steiner*, estendendo tal denominação também para o caso geral. E foi justamente a popularidade desse livro que cristalizou o nome Problema de Steiner e, por outro, impulsionou fortemente o estudo do assunto [4].

O Problema de Steiner chama bastante atenção dos teóricos por ser computacionalmente difícil, mas também por ter grande interesse prático, devido tratar-se de um problema com imensas aplicações. Uma das primeiras aplicações do Problema de Steiner é justamente o problema de Gauss citado anteriormente. O problema de Steiner permite ter uma ideia da grande aplicabilidade área da Indústria, por exemplo [4].

Jacob Steiner (1796 a 1863) foi um dos maiores geómetras da história. Nasceu na Suíça, em Utzenstorf, mas só aos 18 anos frequentou uma escola, em Yverdon, a Escola Estalozzi. Em 1834 foi indicado para ensinar geometria na Universidade de Berlim, onde se tornou professor e fez carreira. Publicou uma quantidade significativa de trabalhos no *Jornal de Crelle* e também algumas obras, nomeadamente *Systematische entwicklungen*, sobre Geometria Projetiva [4].

O Problema de Steiner é um problema antigo que sempre causou o interesse da comunidade científica. Pois, mesmo os matemáticos mais perspicazes e os computadores mais rápidos tiveram algumas dificuldades em encontrar a solução do problema [4].

Matos [4] afirma que o Problema de Steiner tem várias versões, mas todas elas procuram encontrar a rede de tamanho mínimo que liga pontos dados, mudando apenas o conjunto a que pertencem tais pontos. Assim, o Problema pode ser estudado em Teoria de Grafos ou como um problema geométrico, no qual existe uma métrica que define o peso das arestas, como as métricas euclidiana e retilínea.

Courant e Robbins [2] dizem que Steiner começou por estudar a situação apresentada no Problema de Fermat, e após isso, ter generalizado para a situação em que são dados n pontos e se procura o ponto do plano que minimiza a soma das distâncias dos pontos dados a esse ponto. Uma generalização mais interessante é a que permite que sejam acrescentados mais pontos ao conjunto inicial de forma a permitir minimizar o comprimento total da rede inicial. Por exemplo: São dados quatro pontos. Se os quatro pontos forem colineares, a distância mínima entre esses pontos é o comprimento do segmento de reta que une os quatro pontos dados, como

na figura 2.2. Se os quatro pontos dados estiverem posicionados como se observa na figura 2.3, então S é o ponto procurado, uma vez que minimiza a soma das distâncias dos pontos dados a si mesmo. Mas, se os quatro pontos dados estiverem posicionados como se observa na figura 2.4, então será necessário acrescentar dois pontos, S_1 e S_2 , para obter a ligação mais curta entre esses quatro pontos.

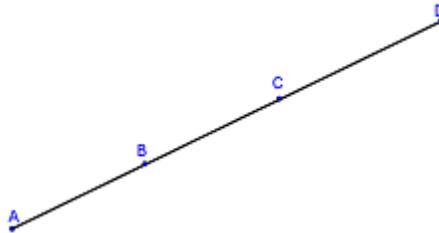


Figura 2.2: Pontos alinhados.

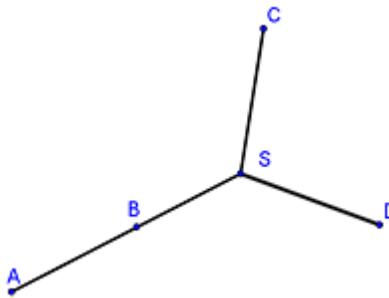


Figura 2.3: Ponto S , minimiza a soma das distâncias dos pontos dados a si mesmo.

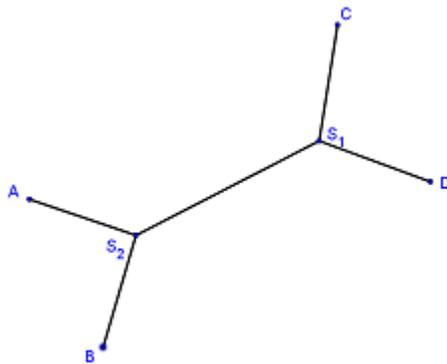


Figura 2.4: Pontos S_1 e S_2 minimizam a soma das distâncias dos pontos aos pontos dados.

2.2 A solução geométrica do problema de Steiner

Proposição 2.1. *O problema de Steiner pode ser descrito da seguinte maneira: Dados três pontos A , B e C em um plano, um quarto ponto P no plano é procurado, tal que, a soma $a+b+c$ seja um mínimo, onde a , b , c representam as três distâncias de P a A , B , C respectivamente [2].*

Como resposta ao problema tem-se: se no triângulo ABC todos os ângulos são menores que 120° , então P é o ponto a partir do qual cada um dos três lados AB , BC , CA subtende um ângulo de 120° . Se, contudo, um ângulo de ABC , por exemplo, o ângulo em C , for igual ou maior do que 120° então o ponto P coincidirá com o vértice C [2].

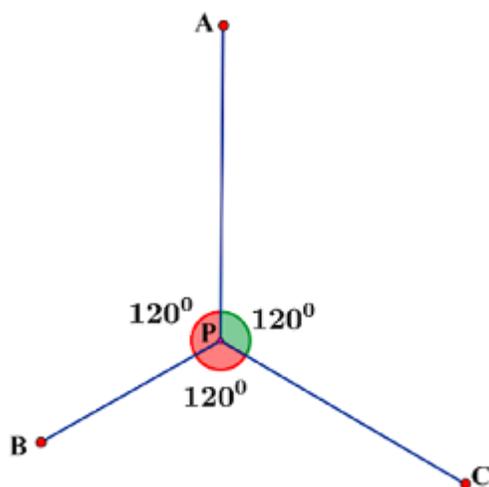


Figura 2.5: Menor soma das distâncias para três pontos.
Fonte: [1].

Courant e Robbins [2] afirmam que supondo que P seja o ponto mínimo procurado, existem as seguintes alternativas: P coincide com um dos vértices A , B , C , ou P difere destes vértices. No primeiro caso, torna-se claro que P deve ser o vértice do ângulo C de ABC , porque a soma $CA + CB$ é menor do que qualquer outra soma de dois lados do triângulo ABC . Assim, para concluir a prova de nossa proposição, deve-se analisar o segundo caso.

Seja K o círculo com raio c em torno de C . Então P deve ser o ponto em K tal que $\overline{PA} + \overline{PB}$ seja mínimo. Se A e B estão fora de K como na figura 2.6, então, pelo problema de Heron, \overline{PA} e \overline{PB} devem formar ângulos iguais com o círculo K e portanto com o raio PC .

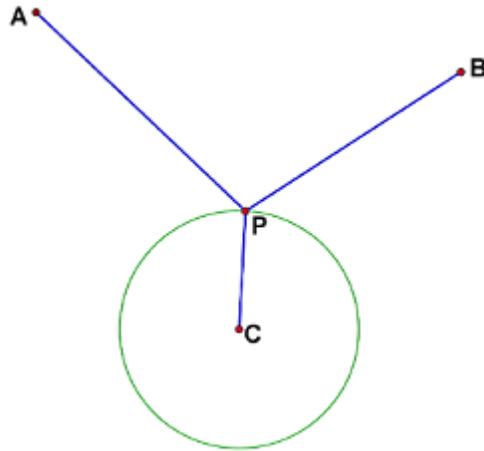


Figura 2.6: Pontos A e B fora do círculo K .
Fonte: [1].

Com o mesmo raciocínio aplica-se a posição de P e ao círculo com o raio a em torno de A . Segue-se que todos os três ângulos formados por \overline{PA} , \overline{PB} e \overline{PC} são iguais e consequentemente iguais a 120° , como afirmado.

Essa prova foi baseada na hipótese de A e B estarem fora de K , e merece ser provado. Se pelo menos um dos pontos A e B , por exemplo A , estivesse sobre ou dentro de K , então, uma vez que P , conforme suposto, não é idêntico a A ou B , teríamos $a + b \geq AB$. Porém, $AC \leq c$, uma vez que A não está fora de K . Portanto: $a + b + c \geq AB + AC$. Mas isso significa que se obtém a soma mais curta de distâncias se P coincidir com A , contrariando a hipótese. Isso prova que A e B estão ambos fora do círculo K .

O fato correspondente é provado de maneira semelhante para as outras combinações B, C com respeito a um círculo de raio a em torno de A , e A, C com respeito a um círculo de raio b em torno de B [2].

O matemático inglês Thomas Simpson (1710 a 1761) criou um modo prático, para obter o ponto mínimo P . Simpson mostrou que o ponto mínimo P é a intersecção de três circunferências circunscritas respectivamente aos triângulos equiláteros construídos sobre cada lado do triângulo ABC , como mostra a figura 2.7 [1].

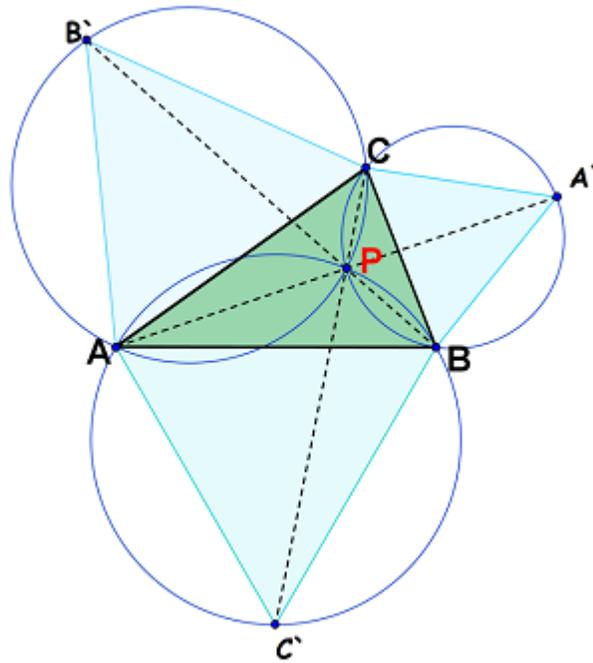


Figura 2.7: Construção de Simpson para obtenção de P .
Fonte: [1].

Simpson também mostrou que o ponto S pode ser obtido, ligando-se, respectivamente, os vértices A , B e C aos vértices externos A' , B' e C' dos triângulos equiláteros BCA' , ACB' e ABC' .

2.3 Generalização do Problema de Steiner

Steiner trabalhou na generalização do problema, uma vez que abandonou a busca por um único ponto P . Steiner passou a procurar 'redes mínimas' de comprimento total mais curto. Mais precisamente: "dados n pontos A_1, A_2, \dots, A_n ; encontre um sistema conectado de segmentos de retas de comprimento total mais curto tal que quaisquer dois pontos dados possam ser unidos por uma poligonal formada por segmentos do sistema"[2] (p. 436). Logo percebe-se que para esse problema, o aspecto da solução, naturalmente dependerá da disposição dos n pontos dados.

Brito [1] afirma que Steiner disse que, no caso de n pontos, haverá no máximo $n - 2$ intersecções múltiplas, em cada uma das quais três segmentos se encontram em ângulos de 120° . A figura 2.8 mostra alguns exemplos de redes mínimas de Steiner.

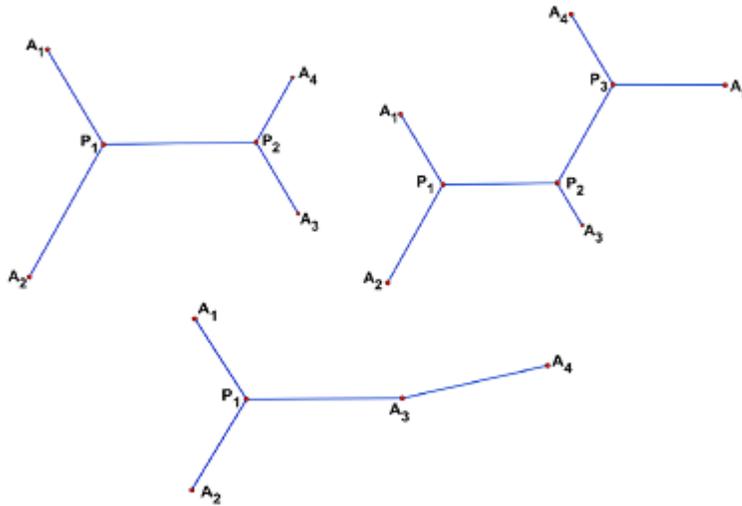


Figura 2.8: Redes de Steiner com várias conexões.
Fonte: [1].

Será analisado apenas o caso da rede mínima que une os vértices de um retângulo. Pois, neste caso, é fácil verificar que a solução consiste em cinco segmentos com duas intersecções múltiplas onde três segmentos se encontram em ângulos de 120° . Pela a figura 2.9, percebe-se que essa rede mínima é tal que as duas interconexões múltiplas em P_1 e P_2 são simétricos em relação aos eixos vertical e horizontal do retângulo [1].

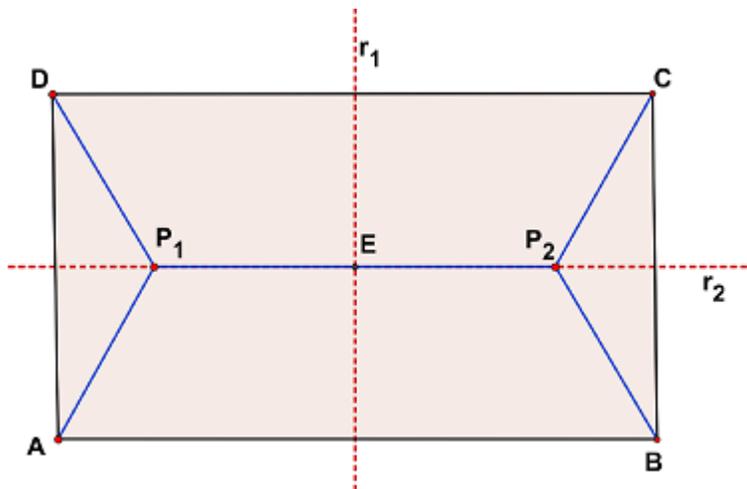


Figura 2.9: Solução do problema de Steiner para os vértices do retângulo $ABCD$.
Fonte: [1].

De fato, seja o retângulo $ABCD$ com eixos de simetria vertical e horizontal r_1 e r_2 , respectivamente, que se intersectam no ponto E . Admita-se que P_1 e P_2 sejam vértices das duas intersecções múltiplas da rede mínima que une A , B , C e D .

Supondo, sem perda de generalidade, que P_1 e P_2 estão localizados em lados diferentes de r_1 . Afirmamos que, nesse caso, P_1 e P_2 devem ser simétricos em relação a r_1 . De fato, se assim não ocorresse, a rede que une ADE teria comprimento diferente da rede que une CBE , mas isso é impossível, pois ADE e CBE são simétricos em relação a r_1 [1].

Utilizando o mesmo raciocínio demonstra-se que, se P_1 e P_2 estão em semiplanos diferentes em relação a r_2 , então P_1 e P_2 devem também ser simétricos em relação a r_2 .

Esse resultado mostra que, dada uma malha ligando os quatro vértices de um retângulo, essa malha terá como eixos de simetria os mesmos eixos horizontal e vertical do retângulo $ABCD$. Logo, para obter a rede mínima que une os vértices de $ABCD$ basta tomar a intersecção E dos eixos de simetria r_1 e r_2 de $ABCD$ e determinar os pontos P_1 e P_2 (pontos de Steiner) dos triângulos ADE e CBE ou dos triângulos ABE e CDE [1].

Capítulo 3

O Problema de Heron

3.1 Um pouco de história

Um dos problemas de Otimização na Geometria mais conhecido é o de Heron de Alexandria, que viveu entre 150 a.C. e 250 d.C. Dentre seus muitos trabalhos, o mais importante é sua obra *A Métrica* escrita em três livros, e só descoberta em 1896 em Constantinopla, por R. Schöne. No seu primeiro livro encontra-se a dedução da famosa fórmula da área de um triângulo em função dos três lados. Heron também se interessava por mensuração em todas as formas, na ótica, na mecânica e na Geodésia [6].

Em seus estudos sobre a ótica Heron estudou a Lei da Reflexão da luz, esta já era conhecida por Euclides e Aristóteles, mas foi Heron quem mostrou, por um argumento geométrico simples, numa obra chamada *Catóptrica* (ou reflexão), que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão é uma consequência do princípio aristotélico que diz que a natureza nada faz do modo mais difícil. Ou seja, se a luz deve ir de uma fonte A a um espelho l e, então, ao olho B de um observador, ela deve seguir o caminho mais curto, e esse caminho mais curto possível é aquele em que os ângulos formados pelo raio de luz incidente com o espelho e raio de luz refletido são iguais.

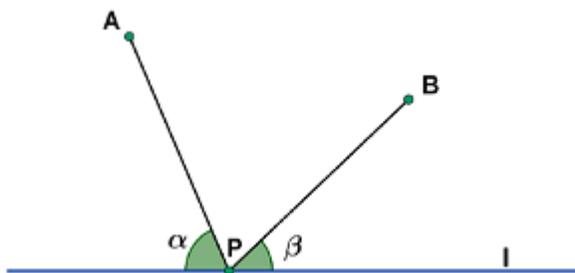


Figura 3.1: Ângulo de incidência e ângulo de reflexão.

Fonte: [6].

3.2 Solução do Problema de Heron

Proposição 3.1. *O problema de Heron diz: Seja uma reta l e dois pontos A e B localizados no mesmo lado de l . Determine um ponto P sobre l de tal forma que a soma seja a menor possível.*

Seja um ponto P qualquer sobre a reta l . Considere os ângulos de medidas α e β , formados em P entre \overline{AP} , \overline{BP} e a reta l , como mostra a figura 3.1.

Observe que, refletindo os segmentos \overline{AP} e \overline{BP} em relação à reta l , obtemos, respectivamente, os segmentos simétricos $\overline{A'P}$ e $\overline{B'P}$. Como $P' = P$, segue que $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} = \overline{A'P} + \overline{B'P}$.

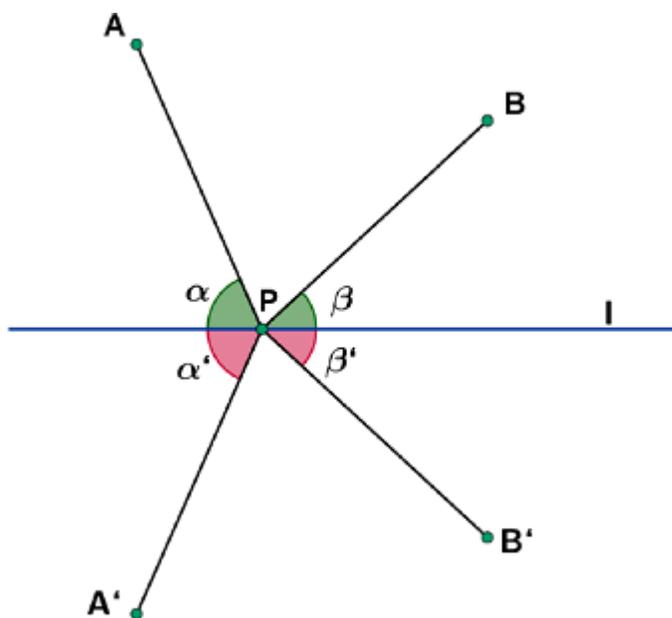


Figura 3.2: Reflexão dos segmentos AP e PB em relação a l .
Fonte: [1].

Verifique que a soma $\overline{AP} + \overline{B'P}$ é minimizada quando A , P e B' estão contidos numa mesma reta. De modo análogo, $\overline{A'P} + \overline{BP}$ é minimizada exatamente quando A' , P e B estão contidos numa mesma reta. Entretanto, em ambos os casos, A , P e B' são colineares ou $A'P$ e B são colineares, quando os ângulos de medidas $\alpha + \alpha'$ e $\beta + \beta'$ são opostos pelo vértice, como ilustra a figura 3.3 [1].

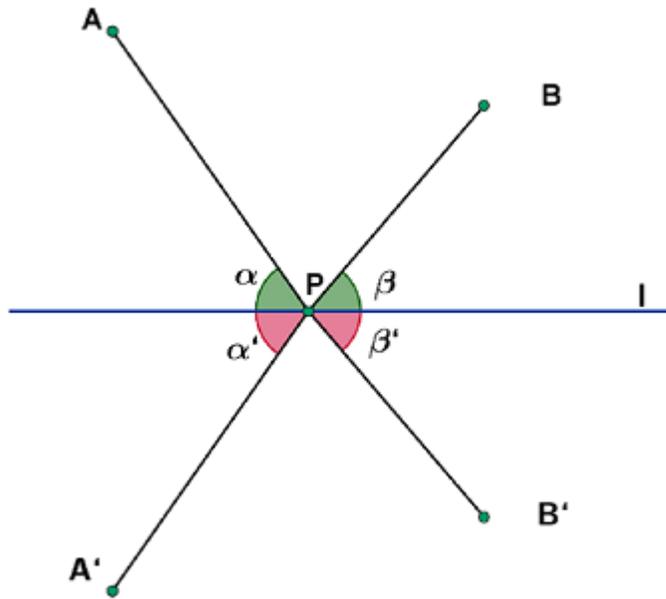


Figura 3.3: Ângulos opostos pelo vértice.
Fonte: [1].

Logo, $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$. Mas $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Segue que $2\alpha = 2\beta$. Portanto, $\alpha = \beta$. Desse modo, concluímos que o ponto P é tal que \overline{AP} e \overline{BP} formam ângulos iguais com a reta l .

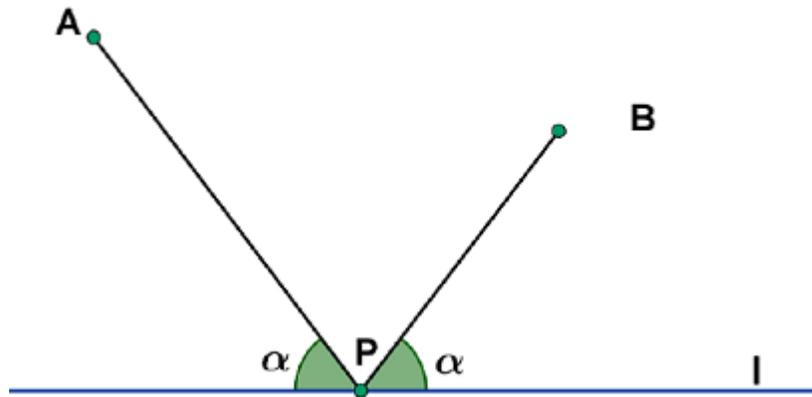


Figura 3.4: Resolução do problema de Heron.
Fonte: [1].

Capítulo 4

Problemas de Otimização

4.1 Aplicações do Problema Isoperimétrico

Aplicação 1. Sejam dados um lado de um triângulo e a soma dos outros dois lados desse triângulo. Encontrar entre todos os triângulos o de área máxima.

Solução:

Seja AB o lado dado do triângulo ABC e seja k a soma dos outros dois lados, ou seja, $AC + CB = k$. O objetivo é encontrar o triângulo ABC de área máxima. O lugar geométrico de todos os pontos C para os quais a soma $AC + CB$ é dada, é a elipse, com focos em A e B com a medida do eixo maior igual à soma $AC + CB$. Logo, basta encontrar em que lugar da elipse C deve estar de modo que a área do triângulo ABC seja máxima.

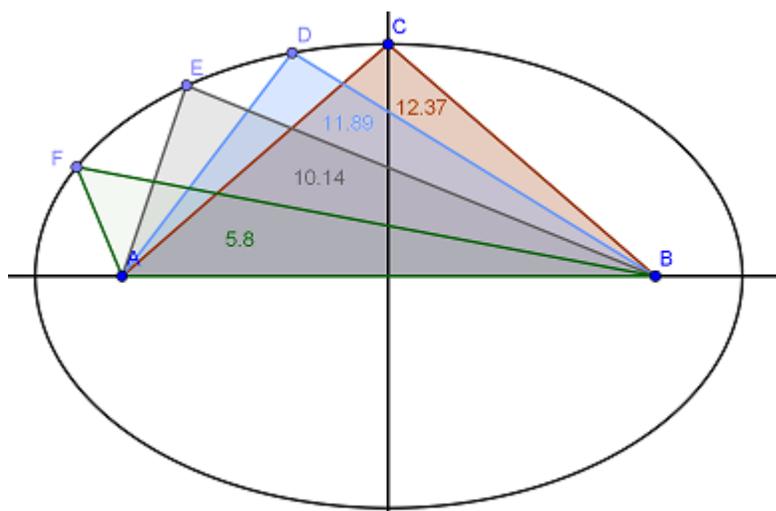


Figura 4.1: O triângulo ABC tem área máxima.

A área máxima é alcançada quando a altura for máxima. A altura máxima é obtida quando ela for a metade do eixo menor, ou seja, a reta perpendicular ao centro O da elipse corta a elipse em um ponto C , fornecendo a maior altura OC .

Como o ponto C está sobre a reta perpendicular à origem, então $AO = BO$, ou seja, O é o ponto médio do segmento AB . Portanto $AC = CB$ e o triângulo procurado é o triângulo isósceles.

Aplicação 2. Entre todos os triângulos de perímetro dado qual o que possui área máxima?

Solução:

Pelo problema anterior os triângulos isósceles são os que têm maior área, fixados a base e o perímetro. Ou seja, pode-se partir de uma base muito pequena e ter uma certa altura do triângulo isósceles em relação a essa base, sabendo que a altura não poderá ser maior do que a metade do perímetro dado, pois, neste caso a área estará próxima de zero.

No início, à medida que for aumentado a base, e a altura diminuindo, a área aumentará. Depois, quando a altura se aproximar de zero, a base não sendo maior do que a metade do perímetro dado pois, pela desigualdade triangular a soma de dois lados de um triângulo é maior do que o terceiro lado, e a área estará novamente próxima de zero. Portanto, podemos perceber que este triângulo de perímetro dado alcança uma área máxima com uma determinada base.

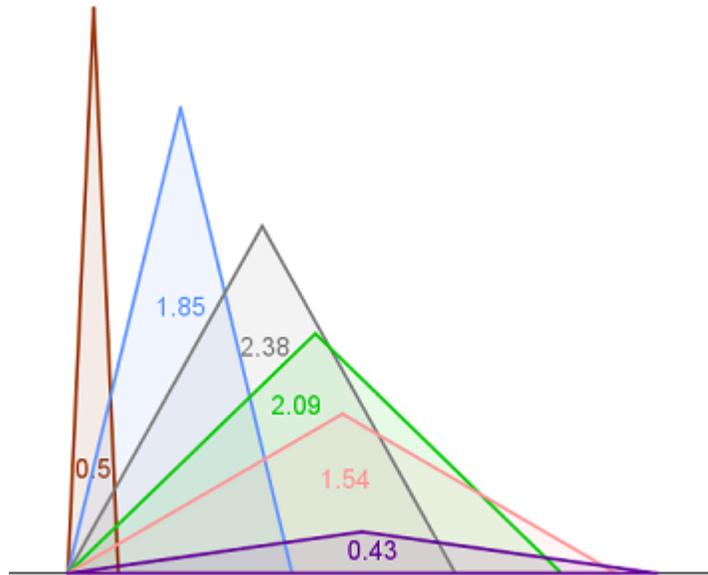


Figura 4.2: Triângulos de perímetro dado.

Seja ABC o triângulo solução. Se fixarmos inicialmente como base o lado AB e a soma dos

outros dois lados desse triângulo estará fixada. O que tem área máxima é o triângulo isósceles, como vimos anteriormente, e então temos que $AC = BC$.

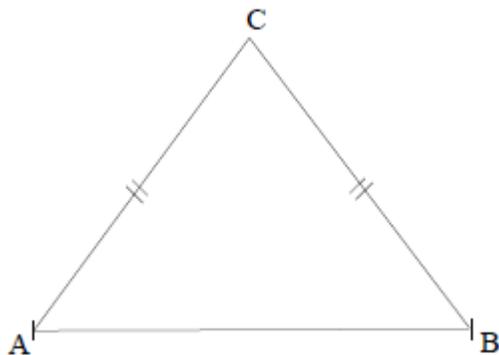


Figura 4.3: Triângulo ABC com base AB .

Agora se olharmos o triângulo ABC , considerando como a base o lado BC , a soma dos outros dois lados estará fixada. O triângulo que tem a maior área continua sendo o isósceles, logo temos que $AB = AC$.

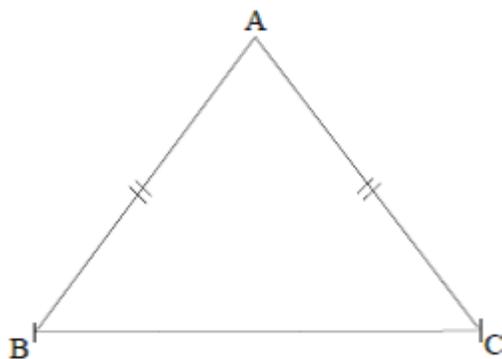


Figura 4.4: Triângulo ABC com base BC .

Portanto, pode-se concluir que $AB = AC = BC$, ou seja, os lados do triângulo são todos iguais. Logo entre todos os triângulos de perímetro dado o que tem a maior área é o triângulo equilátero.

Aplicação 3. Entre todos os retângulos de perímetro dado qual o que possui área máxima?

Solução:

Primeiramente analisa-se se o problema tem solução. Partindo de uma base muito pequena teremos uma certa altura em relação a essa base (o retângulo irá se degenerar quando tivermos a base igual a zero e a altura igual à metade do perímetro dado). À medida que for aumentada a

base pode-se perceber que a altura em relação a essa base diminui (a base não poderá ser maior do que a metade do perímetro dado, pois a altura ficará próxima de zero, ou seja, a área do retângulo estará próxima de zero). Pelo argumento de continuidade percebe-se que a área do retângulo começa muito pequena, vai aumentando e torna-se novamente muito pequena, ou seja, passa por uma base onde atinge a área máxima, e portanto o problema tem solução.

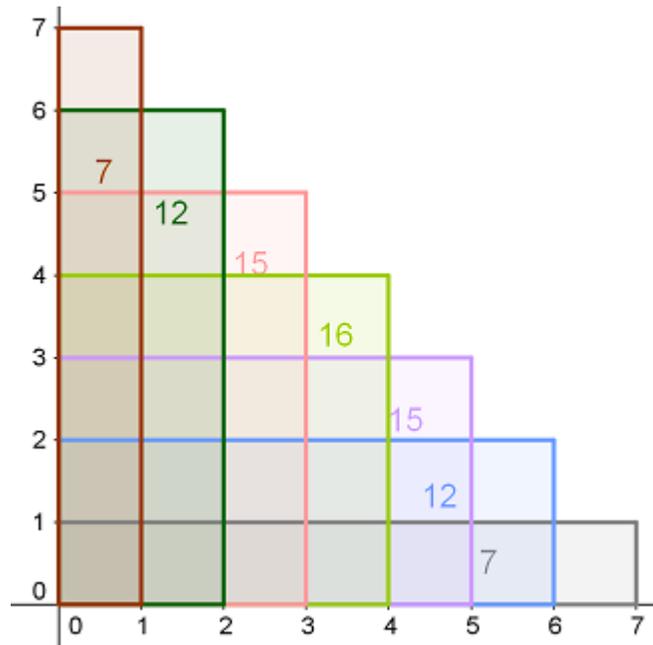


Figura 4.5: Retângulo com área máxima.

A área S de um retângulo pode ser calculada pelo produto da base pela altura. Supondo que o semiperímetro dado seja $p = x + y$, então a área $S = x.y$. O que se quer é maximizar a área S . Então usando média geométrica pode-se calcular este produto geometricamente de uma forma bastante simples. Sejam $AC = x$ e $y = CB$ as medidas de dois segmentos de reta. O segmento de reta que representa o semiperímetro é dada pela junção dos segmentos de medida x e y , ou seja $p = AC + CB = AB$. Obtendo o ponto médio O do segmento \overline{AB} e com um compasso centrado em O e raio $\frac{AB}{2}$, traça-se uma semicircunferência. O segmento vertical traçado para cima a partir de C encontrará um ponto D na semicircunferência. A medida do segmento \overline{CD} corresponde à média geométrica das medidas dos segmentos \overline{AC} e \overline{CB} , ou seja, $(CD)^2$ representa geometricamente a área do retângulo. A maior média geométrica (maior área) será quando CD for igual ao raio da semicircunferência e neste caso $AC = CB$. Portanto tem-se área máxima quando $x = y$, o que nos leva a concluir que o retângulo de perímetro dado que tem área máxima é o quadrado.

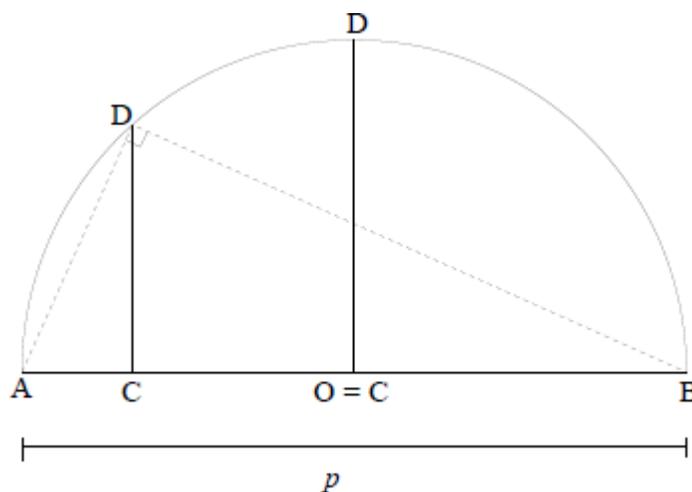


Figura 4.6: Média Geométrica CD .

Fonte: [6].

Partindo-se do quadrado com perímetro igual ao perímetro dado, pode-se mostrar que qualquer outro retângulo de mesmo perímetro tem área menor do que a área deste quadrado.

Então considera-se que o quadrado $ABCD$ tenha o perímetro dado. Inicialmente, traça-se o segmento EF , com a extremidade E no lado AD e a extremidade F no lado BC , paralelo aos lados AB e CD do quadrado. Agora ao transferir os segmentos AE e BF como continuação dos segmentos EF e DC respectivamente, obteremos segmentos EG e DH sendo, $EG = EF + FG = AB + AE$ e $DH = DC + CH = DC + BF$ ($AE = BF = FG = CH$). Agora, se traçarmos o segmento GH podemos perceber que $GH = CF$.

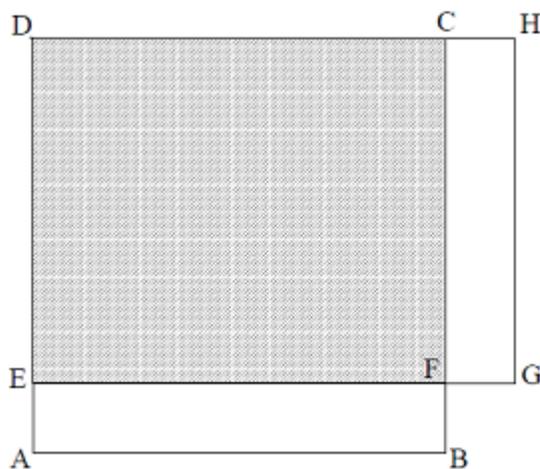


Figura 4.7: O quadrado é o retângulo de área máxima.

Fonte: [6].

O perímetro do quadrado $ABCD$ é igual ao perímetro do retângulo $EGHD$, mas a área do quadrado é maior que a do retângulo. Pois, a área do retângulo $EFCD$ é comum a ambos, mas a área do retângulo $ABFE$ (incluído no quadrado $ABCD$) é maior que a área do retângulo $FGHC$ (incluído no retângulo $EGHD$) pois, $AE = BF = FG = CH$ e $AB = EF > GH = FC = CB - FB = AB - FB$. Analogamente, pode-se tomar E em DC e F em AB e prolongar DA e EF obtendo um retângulo de mesmo perímetro do quadrado $ABCD$, porém com área menor. Portanto o quadrado $ABCD$ é o retângulo de perímetro dado que engloba a maior área.

4.2 Aplicações do Problema de Steiner

Aplicação 4. Uma empreiteira pretende fazer um estudo de qual ponto P na cidade de Parintins a soma das distâncias desse ponto aos três principais centros de ensino da cidade, Universidade do Estado do Amazonas (UEA), Universidade Federal do Amazonas (UFAM) e Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas (IFAM), é a menor possível. Encontre o ponto P .



Figura 4.8: Localização UEA, UFAM e IFAM de Parintins.

Fonte: Google Earth.

Solução:

Para resolver esse problema será utilizado o mesmo princípio de Steiner, logo, sabe-se que o ponto P procurado é o ponto a partir do qual cada um dos três lados AB , BC e CA subtende um ângulo de 120° . A figura abaixo mostra os pontos A (IFAM), B (UEA) e C (UFAM) formando o triângulo ABC .



Figura 4.9: Área determinada pelo triângulo ABC .

Como citado anteriormente, um modo prático, para obter o ponto mínimo P , foi criado por Thomas Simpson (1710 a 1761), ele diz que basta achar a intersecção das três circunferências circunscritas respectivamente aos triângulos equiláteros construídos sobre cada lado do triângulo ABC , como mostram as figuras 4.10 e 4.11.

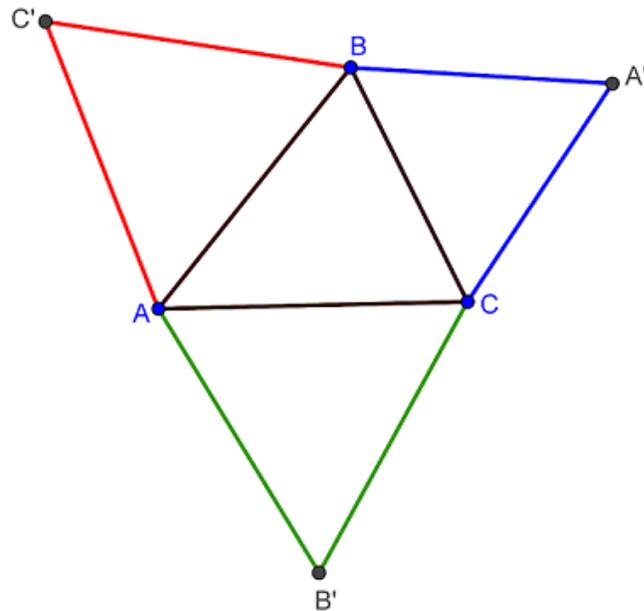


Figura 4.10: Triângulos equiláteros a partir dos lados do triângulo ABC .

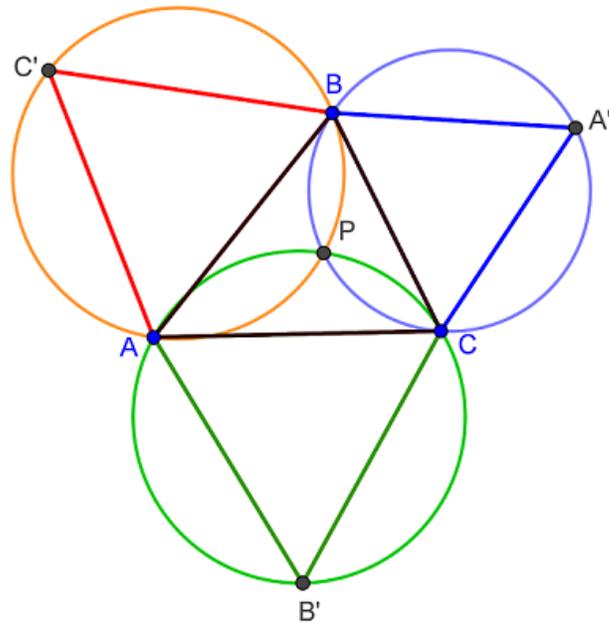


Figura 4.11: Identificação do ponto P .

Como se pode observar foi encontrado o ponto P cuja a soma $PA + PB + PC$ é a menor possível. E conforme figura abaixo esse ponto fornece os ângulos de 120° descritos por Steiner.

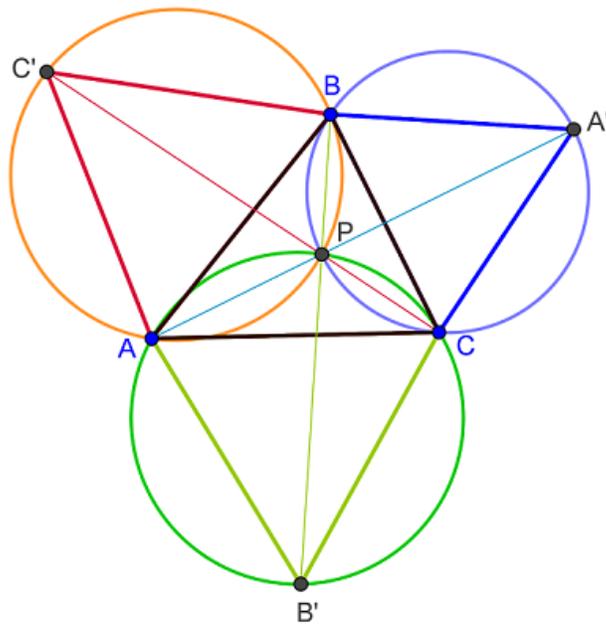


Figura 4.12: Demonstração que os ângulos são de 120° .

Aplicação 5. Em Parintins há uma praça denominada Praça dos Bois, uma referência ao

Festival Folclórico de Parintins. Nessa praça a parte conhecida como lado azul é o principal centro de alimentação da cidade, neste sentido busca-se fazer um estudo de dois pontos ideais para colocar um lanche nesta praça, de modo que a distância desses pontos aos vértices A , B , C , D da praça (figura 4.13) seja mínima.



Figura 4.13: Praça dos Bois de Parintins-AM.
Fonte: Google Earth.

Solução:

Para resolver este problema destacamos os eixos de simetria vertical e horizontal, achando o ponto de intersecção E . Toma-se um dos eixos como ponto de referência, como por exemplo o eixo vertical, a partir daí trabalha-se como se fossem duas partes separadas, assim obtém-se os triângulos ADE e BCE , como mostra a figura 4.14.

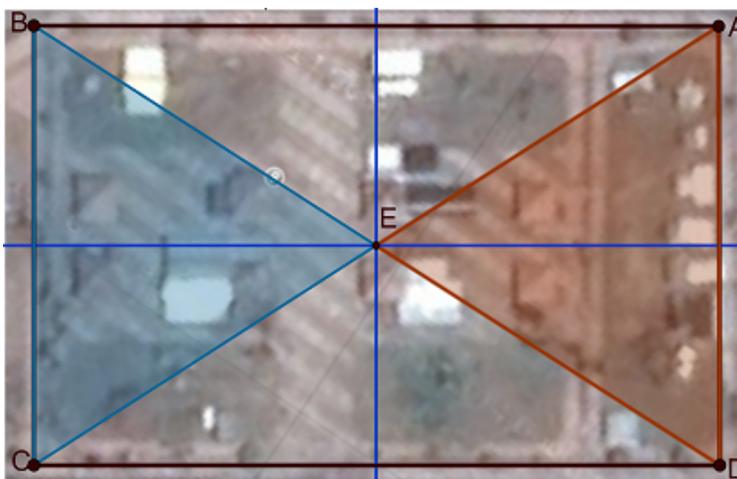


Figura 4.14: Eixos de simetria.

Depois disso, se trabalha os triângulos ADE e BCE como no problema anterior, obtendo assim os pontos P_1 e P_2 , conforme figura abaixo, sendo esses os pontos ideais para colocar um

lanche na Praça dos Bois, de modo que a distância desses pontos aos vértices A, B, C, D da praça seja mínima.

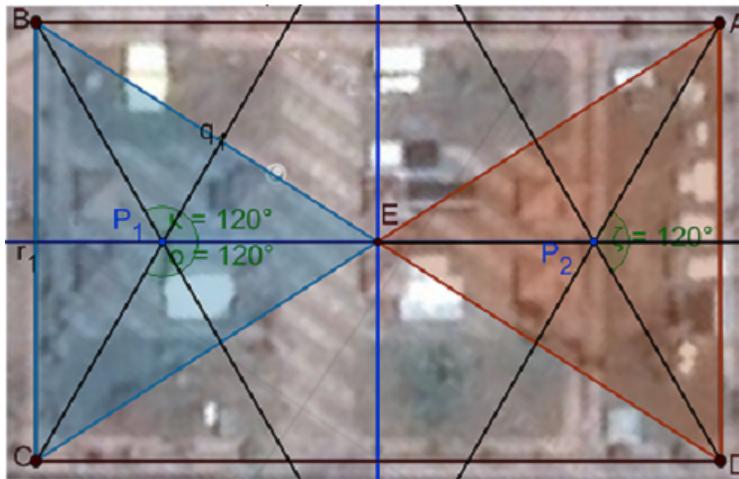


Figura 4.15: Identificação dos pontos que minimizam a distância aos vértices.

Podem ser achados outros dois pontos diferentes de P_1 e P_2 tomando como referência o eixo de simetria horizontal.

4.3 Aplicações do Problema de Heron

Aplicação 6. Um colhedor de tucumã sai da floresta em um determinado ponto. Ele precisa chegar a uma estrada para deixar os tucumãs que colheu, que segue uma linha reta, e voltar para a floresta em outro ponto dado, para colher mais tucumãs. Como ele deve fazer isso para seguir o menor caminho possível?

Solução:

Supondo que o colhedor de tucumã sai da floresta em um ponto A para depois retornar a floresta em um ponto B , sendo o primeiro passo a se fazer é esboçar uma ilustração do problema.

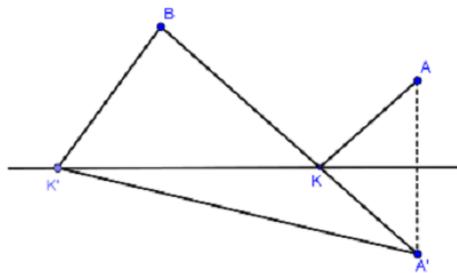


Figura 4.16: Ilustração da Aplicação 6.

De posse da ilustração do problema, partiu-se para a ideia de Heron, deste modo foi feita a reflexão do problema para o lado oposto da reta que representa a estrada. Deste modo foram obtidos os pontos A' e B' , considerando K o ponto em que o colhedor chega a estrada, então AKB e $A'KB$ têm o mesmo comprimento, pois $A'K$ é a reflexão do segmento AK em relação a estrada. Mas $A'KB$ não pode ser mais curto que $A'B$. Segue que o ponto K que ser o ponto onde $A'B$ intersecta a estrada. Deste modo o caminho mais curto é partindo de A até K e saindo de K até B .

Aplicação 7. A Avenida Amazonas e a Avenida Nações Unidas são duas das principais e mais conhecidas vias da cidade de Parintins-AM. Considere que entre elas há duas casas representadas pelos pontos P e Q . Achar o caminho mais curto para que um urubu saia da casa P e vá até a casa Q sendo que esse urubu toque uma única vez em cada via, considerando que esse urubu sempre voe uma linha reta.

Solução:

Considera-se a Avenida Nações Unidas como n e a Avenida Amazonas como m . Supondo que o urubu saia de P a um ponto S em m , depois a um ponto R em n e finalmente de R a Q .



Figura 4.17: Avenida Amazonas e Avenida Nações Unidas.
Fonte: Google Earth.

Para encontrar a solução deste problema, será utilizado o mesmo raciocínio do problema de Heron.

Refletindo o ponto P em relação a reta m obtem-se o ponto P' e refletindo o ponto Q em relação a reta n obtemos o ponto Q' . Traçando a reta $P'Q'$, percebe-se que esta corta a reta n no ponto R e a reta m no ponto S . Mas o que se quer provar é que a soma $PS + RS + RQ$ é a menor possível. Agora, escolhe-se arbitrariamente um ponto R' sobre n e um ponto S' sobre m , sendo $R \neq R'$ e $S \neq S'$, então $PS + RS + RQ$ tem que ser menor do que $PS' + R'S' + R'Q$.

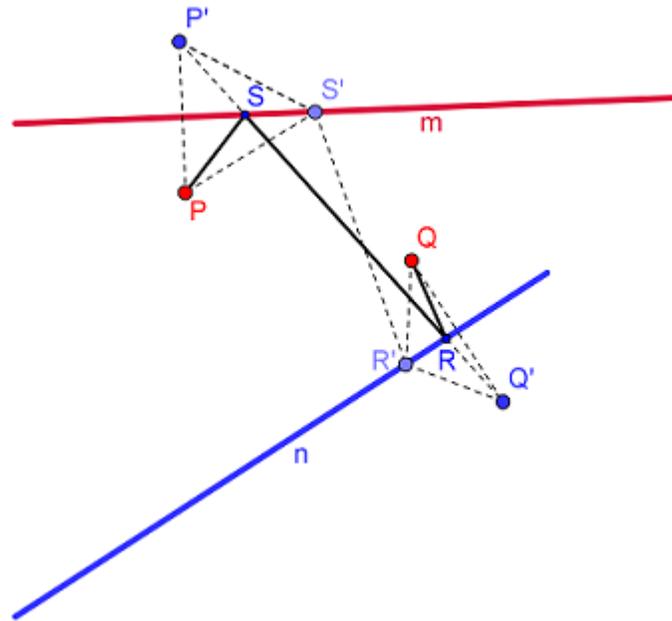


Figura 4.18: Resolução da Aplicação 7.

Note que $PS = P'S$ e $QR = Q'R$ logo, $PS + RS + RQ = P'S + RS + RQ' = P'Q'$. Temos também que $PS' = P'S'$ e $QR' = Q'R'$ portanto, $PS' + R'S' + R'Q = P'S' + R'S' + R'Q'$. Podemos observar que a poligonal $P'R'S'Q'$ tem comprimento maior do que o segmento $P'Q'$, o que nos leva a concluir que a soma $PS + RS + RQ$ é a menor possível. Logo, R e S fornecem a menor soma $PS + RS + RQ$ em relação a qualquer outros pontos R' em n e S' em m .

Considerações Finais

Problemas de otimização em Geometria, em que se minimizam comprimentos ou maximizam áreas de figuras, são pouco explorados dentro das salas de aula no Ensino Médio, por esse motivo esse trabalho faz uma abordagem sobre esse tema.

Ao longo do trabalho fez-se uma abordagem histórica de problemas clássicos como o *Problema Isoperimétrico*, o *Problema de Steiner* e o *Problema de Heron* dando um suporte teórico para explorar problemas que podem ser perfeitamente compreensíveis por alunos do Ensino Médio.

O uso da otimização na Geometria com exemplos que ultrapassam as paredes da sala de aula, além de ajudar na fase de compreensão dos problemas, desperta o interesse do aluno, fazendo que o mesmo perceba que esses problemas não são triviais, e que fazem parte do seu cotidiano, mostrando que a Matemática que se estuda é perfeitamente aplicável.

Espera-se que este trabalho desperte o interesse pelo tema e que mais professores e alunos possam buscar estudar problemas e percebam que com apenas argumentos puramente geométricos é possível resolver problemas de máximos e mínimos de maneira eficiente.

Referências Bibliográficas

- [1] BRITO, Dirceu dos Santos. *Problemas de otimização geométrica aplicados ao estudo de praças: Uma experiência de ensino com atividades de Modelagem Matemática*. Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2013. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls_000182920>. Acesso em: 26 jan. 2016.
- [2] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é Matemática*. Ciência Moderna. Rio de Janeiro, 2000.
- [3] MADEIRA, Telma Morais. *O Problema Isoperimétrico Clássico*. Universidade de Coimbra. Coimbra, 2005. Disponível em: <<https://estudogeral.sib.uc.pt/bitstream/10316/20971/1/Tese%20Completa.pdf>>. Acesso em: 26 jan. 2016.
- [4] MATOS, Elisabete Olívia Monteiro de. *Uma abordagem ao Problema de Steiner*. FCUP. Cidade do Porto, 2013. Disponível em: <<https://repositorioaberto.up.pt/bitstream/10216/70106/2/12113.pdf>>. Acesso em: 26 jan. 2016.
- [5] MORETO, Fabiana Adala. *O Problema Isoperimétrico e aplicações para o Ensino Médio*. UNESP. Rio Claro, 2013. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92417/moreto_fa_me_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 26 jan. 2016.
- [6] PASQUALI, Kely Cristina. *Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana*. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2004. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96564/Kely_Cristina_Pasquali.pdf?sequence=1>. Acesso em: 26 jan. 2016.
- [7] SILVA, Maria Fabiane Calixto da. *Operações de frações com ilustrações geométricas*. UEPB. Campina Grande, 2013. Disponível em: <<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/5169/1/PDF%20%20Maria%20Fabiane%20Calixto%20da%20Silva.pdf>>. Acesso em: 26 jan. 2016.