

Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Variedades compactas de dimensão 4 com
curvatura positiva e parabolicidade
de sólitons Ricci-harmônicos não-compactos

ELZIMAR DE OLIVEIRA RUFINO

Manaus-AM
Dezembro/2016

Variedades compactas de dimensão 4 com
curvatura positiva e parabolicidade
de sólitons Ricci-harmônicos não-compactos

por

ELZIMAR DE OLIVEIRA RUFINO

sob orientação do

Professor Ernani de Sousa Ribeiro Jr.

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática
em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial
para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-AM
Dezembro/2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R926v Rufino, Elzimar de Oliveira
Variedades compactas de dimensão 4 com curvatura positiva e
parabolicidade de sólitons Ricci-harmônicos não-compactos /
Elzimar de Oliveira Rufino. 2016
69 f.: 31 cm.

Orientador: Ernani de Sousa Ribeiro Junior
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do
Amazonas.

1. curvatura biortogonal. 2. curvatura isotrópica. 3. half-
conformemente flat. 4. sóliton Ricci-harmônico. I. Ribeiro Junior,
Ernani de Sousa II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Elzimar de Oliveira Rufino

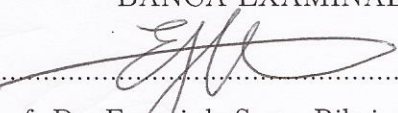
Variedades compactas de dimensão 4 com
curvatura positiva e parabolicidade
de sólitons Ricci-harmônicos não-compactos

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em
Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para
obtenção do grau de Doutor em Matemática.

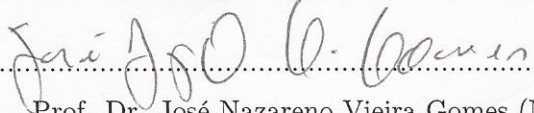
Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus, 13 de dezembro 2016.

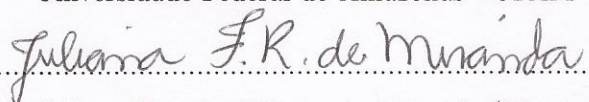
BANCA EXAMINADORA


.....
Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Jr. (Orientador)

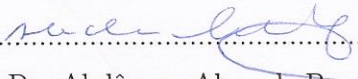
Universidade Federal do Ceará - UFC


.....
Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (Membro)

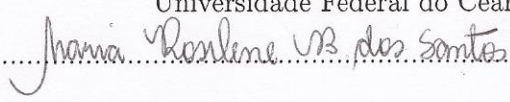
Universidade Federal do Amazonas - UFAM


.....
Profª. Drª. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda (Membro Externo)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM


.....
Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Membro Externo)

Universidade Federal do Ceará - UFC


.....
Profª. Drª. Maria Rosilene Barroso dos Santos (Membro Externo)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

*Dedico este trabalho aos meus pais Manoel Rufino e
Maria Mercedes de Oliveira Rufino.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade de vivenciar essa experiência gratificante.

Agradeço à UFAM (Universidade Federal do Amazonas) por ter me acolhido e a seus professores com os quais tive contato em disciplinas: José Nazareno, Renato Tribuzy, Michel Pinho e Dragomir Tsonev; sem esquecer dos professores Abdênago A. de Barros (UFC) e Cícero Aquino (UFPI), que ministraram cursos de verão.

Agradeço aos colegas de Doutorado da UFAM, Francisco Feitosa, Marcos Aurélio, Max Ferreira, Antonio Airton F.F., Elaine Ladislau F.P, Juliana Miranda, Raul Rabelo, Kelly Karina, Kelly Marães, João Felipe e João B. Ponciano.

Agradeço à UFC (Universidade Federal do Ceará) e ao seu Departamento de Matemática por ter me acolhido como aluno especial em parceria com a UFAM. Agradeço também aos amigos que fiz durante a minha passagem pela UFC: Rafael Diógenes, Fabricio de Figueredo Oliveira, Marcos Ranieri, Diego Sousa, Adam O. da Silva, Halyson I. Baltazar, José Tiago, Emanuel M., Janielly G. Araújo, Granjeiro, Renivaldo S. de Sena, Wanderley de Oliveira Pereira, Davi Lustosa da Silva, Davi Ribeiro, Eddygledson S. Gama, Diego Eloi M. Gomes, Renato Oliveira, Carlos Augusto, Valdir Ferreira de P. J., Edvalter da Silva S. F., Amilcar, Léo Ivo, Cleiton Lira, Alex Sandro e Alexandre de S. M..

Agradeço aos professores Antônio Caminha, Ernani Ribeiro e Luciano Mari, com os quais tive contato em disciplinas na UFC. Meus sinceros agradecimentos a essas pessoas, pois todos tiveram uma parcela de contribuição na minha caminhada.

Um agradecimento especial ao meu orientador Professor Ernani Ribeiro, pela paciência que teve comigo (confesso que não foi pouca), pelo encorajamento, confiança e por até mesmo, ter assumido o papel de psicólogo em alguns momentos. Vou me esforçar para não decepcionar na missão que terei pela frente.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa através do Programa Prodoutoral.

Agradeço à UFRR (Universidade Federal de Roraima) e ao seu Departamento de Matemática por ter depositado confiança no sucesso dessa jornada.

Para finalizar meu obrigado a minha esposa Julieta que sempre esteve ao meu lado procurando ajudar da maneira que pôde.

Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos.

Isaac Newton

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo estudar variedades Riemannianas compactas de dimensão 4, com curvatura seccional biortogonal positiva bem como a parabolicidade de sólitons Ricci-harmônicos. Na primeira parte do trabalho, obtemos teoremas de classificação para subvariedades com curvatura biortogonal positiva. Além disso, usamos o conceito de curvatura biortogonal para obter uma condição de pinching a qual garante que uma variedade compacta de dimensão quatro seja definite. Na parte final do trabalho, estudamos a parabolicidade de sólitons Ricci-harmônicos steady não-compactos. Mostramos que, sob uma condição de pinching na curvatura escalar, todo sólito Ricci-harmônico completo não-compacto tem no máximo um fim não-parabólico. Além disso, obtemos estimativas para o volume das bolas geodésicas dos sólitons Ricci-harmônicos steady.

Palavras-chave: curvatura biortogonal, curvatura isotrópica, half-conformemente flat, sólito Ricci-harmônico.

Abstract

The purpose of this work is to study four-dimensional compact Riemannian manifolds with positive biorthogonal (sectional) curvature and parabolicity of steady Ricci-harmonic solitons. In the first part, we obtain classification theorems for submanifolds with positive biorthogonal curvature. Moreover, we use the concept of biorthogonal curvature to obtain a pinching condition which ensures that a compact four-manifold is definite. In the third part, we show that, under a pinching condition on the scalar curvature, a noncompact Ricci-harmonic soliton has at most one end. In addition, we obtain volume estimates for the geodesic balls of steady Ricci-harmonic solitons.

Keywords: Biorthogonal curvature, isotropic curvature, half-conformally flat, Ricci-harmonic soliton.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	9
1.1 Notações e alguns tensores Riemannianos	9
1.2 Curvatura em dimensão 4	10
1.3 Curvatura biortogonal e o tensor Weyl	12
1.4 Cohomologia de De Rham e formas harmônicas	16
2 Alguns teoremas da esfera para subvariedades com curvatura seccional positiva	19
2.1 Alguns resultados existentes	19
2.2 Curvatura isotrópica	21
2.3 Subvariedades com limitação na norma da segunda forma	22
3 Rigidez de variedades compactas de dimensão 4 com curvatura biortogonal limitada	35
3.1 Breve histórico e alguns resultados existentes	35
3.2 Curvatura biortogonal e variedades definite	37
4 Sólitons Ricci-harmônicos do tipo steady	44
4.1 Algumas observações iniciais	44
4.2 Alguns resultados importantes	47
4.3 Resultados principais	49

Introdução

Este trabalho divide-se em quatro partes. No Capítulo 1 apresentamos alguns requisitos básicos para uma boa compreensão dos capítulos seguintes, dentre os quais destacamos a decomposição ortogonal do tensor curvatura de Riemann, a decomposição do tensor de Weyl nas suas partes *auto-dual* e *anti-auto-dual* em dimensão 4 e a curvatura biortogonal. Nos capítulos 2, 3 e 4 apresentamos os resultados obtidos.

Durante décadas, muitos matemáticos investigaram as estruturas topológica e diferenciável de subvariedades Riemannianas em esferas e espaços Euclidianos, obtendo uma série de resultados interessantes. Por exemplo, destacamos o seguinte teorema obtido por Lawson e Simons.

Teorema 1 (Lawson-Simons, [48]) *Seja M^n com $n \geq 4$, uma subvariedade Riemanniana de dimensão n orientada, compacta na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+p}$.*

1. *Se $n = 4$, e a segunda forma fundamental α de M^4 satisfaz $\|\alpha\|^2 < 3$, então M^4 é uma esfera homotópica.*
2. *Se $n \geq 5$, e a segunda forma fundamental α de M^n satisfaz $\|\alpha\|^2 < 2\sqrt{n-1}$, então M^n é homeomorfa a uma esfera.*

Esse resultado foi estendido por Leung [49] e Xin [77] para subvariedades compactas em espaços Euclidianos, e posteriormente Asperti e Costa [1], obtiveram um novo critério para o anulamento do grupo de homologia de subvariedades compactas da esfera e espaços Euclidianos.

Lembramos agora que uma variedade Riemanniana (M^n, g) compacta (sem bordo) é dita ser δ -*pinçada* se as curvaturas seccionais satisfazem

$$1 \geq K \geq \delta.$$

Nesse sentido, Xia [20] provou em 1997, que uma subvariedade Riemanniana, compacta, simplesmente conexa, isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana δ -pinçada, onde a segunda forma fundamental satisfaz

$$\|\alpha\|^2 < \frac{4}{9}(\delta - \frac{1}{4})$$

para todo vetor unitário v em M , deve ser homeomorfa a uma esfera. Em [35], Gu e Xu mostraram que uma subvariedade M^3 de dimensão 3, compacta, simplesmente conexa de uma variedade Riemanniana $\overline{M}^n$ satisfazendo uma condição envolvendo a curvatura média e a curvatura escalar, deve ser difeomorfa a esfera $\mathbb{S}^n$. Em 2009, Xu e Zhao [78] provaram que uma subvariedade de dimensão n , compacta orientada de uma variedade Riemanniana $\delta(> \frac{1}{4})$ -pinçada satisfazendo

$$\|\alpha(v, v)\|^2 < \frac{4}{9}(\delta - \frac{1}{4}), \text{ para qualquer vetor unitário } v \in T_p M,$$

deve ser difeomorfa a um espaço forma esférico. Depois, Gu e Xu [37] provaram que uma subvariedade completa M^n de uma variedade Riemanniana $(n + m)$ -dimensional N^{n+m} , satisfazendo

$$\|\alpha\|^2 < \frac{8}{3}(\overline{K}_{\min} - \frac{1}{4}\overline{K}_{\max}) + \frac{n^2 H^2}{n-1},$$

onde H é a curvatura média de M^n , é difeomorfa a um espaço forma esférico ou a $\mathbb{R}^n$. Assim, obter condições sob a curvatura para garantir que uma variedade Riemanniana compacta seja difeomorfa a uma esfera é definitivamente um problema interessante em geometria.

Recentemente, Ribeiro e Costa [27] usaram a noção de curvatura biortogonal para obter alguns teoremas de esfera. Em particular, eles melhoraram a constante de pinching usada em alguns trabalhos anteriores.

Antes de prosseguir, recordemos o conceito de curvatura seccional biortogonal: para qualquer plano $P \subset T_p M$ em um ponto $p \in M^4$, a *curvatura biortogonal* de P é dada pela seguinte média das curvaturas seccionais

$$K^\perp(P) = \frac{K(P) + K(P^\perp)}{2}, \quad (1)$$

onde $P^\perp$ é o plano ortogonal a P . Em particular, para cada ponto $p \in M^4$, tomamos o mínimo das curvaturas biortogonais para obtermos a seguinte função

$$K_{\min}^\perp(p) = \min\{K^\perp(P); P \text{ é um plano em } T_p M\}. \quad (2)$$

Como mencionado em [26] a soma de duas curvaturas seccionais em dois planos ortogonais aparece nos trabalhos de Noronha [64] e Seaman [71]. Vale ressaltar que a positividade da curvatura biortogonal é uma condição intermediária entre curvatura seccional positiva e curvatura escalar. Existe uma considerável literatura sobre o assunto e para um bom entendimento indicamos, por exemplo, [6, 26, 27, 28, 64, 71].

Um famoso resultado obtido por Tachibana [76] assegura que uma variedade Einstein (M^n, g) com operador de curvatura positivo possui curvatura seccional constante. Além disso, ele também provou que se (M^n, g) possui curvatura não-negativa, então M^n é localmente simétrica. Agora, recordamos que uma variedade Riemanniana $M^n, n \geq 4$, possui *curvatura isotrópica positiva* se

$$R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} > 0,$$

para todo referencial $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de M . A noção de curvatura isotrópica foi introduzida por Micallef e Moore [56]; eles provaram que uma variedade compacta com curvatura isotrópica positiva é homeomorfa a uma esfera. Micallef e Wang [55] estenderam o resultado de Tachibana para $n = 4$ mostrando que uma variedade de Einstein de dimensão 4 com curvatura isotrópica não-negativa é localmente simétrica. Recentemente, esses resultados foram estendidos em duas direções importantes. Primeiramente, por meio de uma análise de convergência para o fluxo de Ricci, Böhm e Wilking [15] provaram, para $n \geq 4$, que variedades com operador de curvatura positivo são espaços formas. Depois, Brendle [9] estendeu o resultado de Micallef e Wang para dimensões $n \geq 4$. Mais precisamente, ele provou que se (M^n, g) é uma variedade Einstein, $n \geq 4$, com curvatura isotrópica positiva, então ela é localmente simétrica. Além disso, Costa e Ribeiro Jr [26], mostraram que $\mathbb{S}^4$ e $\mathbb{CP}^2$ são as únicas variedades de dimensão 4 compactas, simplesmente conexas satisfazendo $K^\perp \geq \frac{R}{24} > 0$. Enquanto Bettiol [6] mostrou que $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ admite uma métrica com curvatura biortogonal positiva. Tendo como motivação as ideias desenvolvidas por Ribeiro e Costa [26, 27], Gu e Xu [35, 36, 37], bem como as de Xu e Zhao [78], investigamos no Capítulo 2 teoremas da esfera para subvariedades sob certas condições envolvendo a curvatura biortogonal. Agora enunciamos o primeiro resultado deste trabalho.

Teorema 2 *Seja M^4 uma subvariedade compacta de dimensão 4, simplesmente conexa, imersa isometricamente em uma variedade Riemanniana δ -pinçada. Então M^4 é dife-*

omorfa a uma esfera $\mathbb{S}^4$, desde que seja válida uma das seguintes condições:

1. $\|\alpha(v, v)\|^2 < K_{\min}^{\perp} - \frac{1}{3}(1 - \delta)$, para qualquer $v \in T_p M^4$;
2. $\|\alpha\|^2 < 4K_{\min}^{\perp} + 4\delta + 8H^2 - \frac{R}{3}$, onde H e R denotam a curvatura média e a curvatura escalar de M^4 , respectivamente.

Como consequência deste resultado temos o seguinte corolário.

Corolário 1 *Seja M^4 uma subvariedade riemanniana compacta de dimensão 4, simplesmente conexa, imersa isometricamente em uma esfera canônica $\mathbb{S}^n$. Suponha que*

$$\|\alpha(v, v)\|^2 < K_{\min}^{\perp},$$

para qualquer vetor tangente unitário v em M^4 . Então M^4 é difeomorfa a esfera $\mathbb{S}^4$.

No Teorema 13 de Gu e Xu [35], foi mostrado que uma subvariedade compacta de dimensão 3, em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^n$ de dimensão n , satisfazendo

$$\|\alpha\|^2 < 2\overline{K}_{\min} + \frac{9}{2}H^2,$$

deve ser difeomorfa a um espaço forma esférico. Motivado por este resultado, consideramos uma hipersuperfície compacta, simplesmente conexa M^3 de uma variedade compacta N^4 de dimensão 4 e estabelecemos o seguinte resultado.

Teorema 3 *Seja M^3 uma hipersuperfície compacta simplesmente conexa de uma variedade N^4 compacta de dimensão 4. Suponha que*

$$\|\alpha\|^2 < 4\overline{K}_{\min}^{\perp} - 2\overline{K}_{\max} + \frac{9}{2}H^2,$$

onde $\overline{K}_{\max}$ é o valor máximo da curvatura seccional de N^4 . Então M^3 é difeomorfa a $\mathbb{S}^3$.

Em [64], Noronha obteve alguns resultados de classificação para variedades compactas de dimensão 4 com curvatura seccional não-negativa. Por exemplo, ela mostrou que se $\|W^-\|^2 \geq -(\omega_1^-) \frac{R}{2}$ e a parte auto-dual do operador de Weitzenböck F^+ possui autovalor negativo em algum ponto de M^4 , então $W^- = 0$, onde W^- é a parte anti-auto-dual do operador de Weyl, o qual será explicitado posteriormente. Neste caso, a curvatura escalar R não pode ser constante (veja [64]).

Os dois seguintes teoremas, o primeiro obtido por Brendle [10] e o segundo, obtido por Brendle e Schoen [11] serão utilizados em nosso próximo resultado.

Teorema 4 (Brendle) *Seja (M, g_o) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 4$. Assuma que*

$$R_{1313} + \lambda^2 R_{1414} + R_{2323} + \lambda^2 R_{2424} - 2\lambda R_{1234} > 0$$

para todo referencial $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e todo $\lambda \in [-1, 1]$. Então, o fluxo de Ricci normalizado com métrica inicial g_o ,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)} + \frac{2}{n} r_{g(t)} g(t),$$

existe para todo tempo e converge para uma métrica de curvatura constante quando $t \rightarrow \infty$. Aqui $r_{g(t)}$ denota a média da curvatura escalar de $g(t)$.

Teorema 5 (Brendle - Schoen) *Seja (M, g_o) uma variedade Riemanniana compacta, localmente irredutível, de dimensão $n \geq 4$. Assuma que $M \times \mathbb{R}^2$ possui curvatura isotrópica não-negativa, isto é,*

$$R_{1313} + \lambda^2 R_{1414} + \mu^2 R_{2323} + \lambda^2 \mu^2 R_{2424} - 2\lambda \mu R_{1234} \geq 0$$

para todo referencial $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e para todo $\lambda, \mu \in [-1, 1]$. Então, uma das seguintes afirmações ocorre:

1. *M é difeomorfa a um espaço forma esférico.*
2. *$n = 2m$ e o recobrimento universal de M é uma variedade Kähler biholomorfa a $\mathbb{CP}^m$.*
3. *O recobrimento universal de M é isométrico a um espaço simétrico compacto.*

Combinando esses resultados com um teorema obtido por Noronha podemos fornecer a seguinte classificação.

Teorema 6 *Seja M^4 uma subvariedade Riemanniana compacta de dimensão 4, em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^n$ de dimensão n , satisfazendo*

$$\|\alpha\|^2 \leq 2\left(\overline{K}_{\min} + K_{\min}^\perp\right) + \frac{16}{3}H^2 - \frac{R}{6}. \quad (3)$$

Então temos:

1. Se M^4 é orientada, $\Delta W = 0$ (para detalhes sobre esta condição veja [64]) e $\|W^-\|^2 \geq -(\omega_1^-)\frac{R}{2}$, então uma das seguintes afirmações ocorre:
 - (a) M^4 é conformemente equivalente a $\mathbb{S}^4$, ou seu recobrimento universal é $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ com suas métricas canônicas.
 - (b) O recobrimento universal de M^4 é $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, onde $\mathbb{S}^2$ possui curvatura constante.
 - (c) M^4 é isométrica a $\mathbb{CP}^2$.
 - (d) M^4 é anti-auto-dual e negativa definite.
 - (e) M^4 é auto-dual e a curvatura escalar não é constante.
2. Se M^4 é localmente irredutível, então uma das seguintes afirmações ocorre:
 - (a) M^4 é difeomorfa a um espaço forma esférico.
 - (b) O recobrimento universal de M^4 é uma variedade Kähler biholomorfa a $\mathbb{CP}^2$.
 - (c) O recobrimento universal de M^4 é isométrico a um espaço simétrico compacto.
3. Se a desigualdade (3) é estrita, então M^4 é difeomorfa a um espaço forma esférico. Além disso, se M^4 é simplesmente conexa, então M^4 é difeomorfa a $\mathbb{S}^4$.

Em 1951, Rauch [65] provou que uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa δ –pinçada ($\delta \approx 0,75$) é homeomorfa a uma esfera $\mathbb{S}^n$. Depois, Berger [2] obteve o famoso Teorema da Esfera Topológica, o qual diz que uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa, cujas curvaturas seccionais estão todas no intervalo $(\frac{1}{4}, 1]$ é necessariamente homeomorfa a uma esfera. Recentemente, Brendle e Schoen [14] melhoraram o resultado de Berger mostrando que, sob as mesmas condições, uma tal variedade deve ser difeomorfa a uma esfera, resultado que ficou conhecido como o Teorema da Esfera Diferenciável (para mais detalhes veja [13]). Inspirado pelo Teorema da Esfera Topológica, Berger [3] provou que, para n par, existe um número real $\varepsilon(n)$ (cujo valor é desconhecido) tal que se M^n é $(\frac{1}{4} - \varepsilon(n))$ –pinçada, então M é homeomorfa a $\mathbb{S}^n$ ou difeomorfa a um espaço forma esférico de posto 1. Esses resultados estimularam muitos trabalhos interessantes. Nas últimas décadas, muitos matemáticos têm estudado variedades Riemannianas compactas de dimensão 4 sob alguma condição de pinching sobre a curvatura.

Ressaltamos que, em dimensão 4, o fibrado das 2-formas pode ser decomposto como $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$, onde $\Lambda^\pm = \{w \in \Lambda^2; *w = \pm w\}$, e $*$: $\Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$ é o operador estrêla de Hodge. Segue que o espaço das 2-formas harmônicas H^2 pode ser decomposto como $H^2 = H^+ \oplus H^-$, onde $H^\pm \subset \Lambda^\pm$. Consequentemente, o segundo número de Betti b_2 pode ser decomposto como $b_2 = b^+ + b^-$ onde $b^\pm = \dim H^\pm$. Diante disso, dizemos que uma variedade de dimensão 4 é *positiva definite* (respectivamente, *negativa definite*) se $b^- = 0$ (respectivamente se $b^+ = 0$). Caso contrário será chamada de *indefinite* (veja [4]).

Bourguignon [8] mostrou que uma variedade Riemanniana $\frac{4}{19}$ -pinçada de dimensão 4, é sempre definite. Além disso, Ville [75] mostrou que sob essas condições temos

$$|\tau(M)| < \frac{1}{2}\chi(M), \quad (4)$$

onde $\tau(M)$ é a assinatura e $\chi(M)$ é a característica de Euler de M^4 , e então por um argumento clássico, concluímos que M^4 é simplesmente conexa e o segundo número de Betti satisfaz $b_2 \leq 1$. Assim, usando um teorema de classificação de Freedman [34] conclui-se que M^4 é topologicamente uma esfera $\mathbb{S}^4$ ou o espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^2$. Em [69] Seaman provou que uma variedade Riemanniana δ -pinçada, de dimensão 4, fechada e conexa, deve ser definite quando

$$\delta \geq \frac{1}{\left(3(1 + 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}}/5^{\frac{1}{2}})\right)^{\frac{1}{2}} + 1} \approx 0.1714.$$

Além disso, seguindo as ideias desenvolvidas por Ville [75], Ko [45] provou que, sob esta condição, M^4 é topologicamente $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{CP}^2$. Lembramos ainda que o operador de Weyl $\mathcal{W}$ também pode ser decomposto como $\mathcal{W} = \mathcal{W}^+ + \mathcal{W}^-$, onde $\mathcal{W}^\pm : \Lambda^\pm \rightarrow \Lambda^\pm$ são chamados de partes auto-dual e anti-auto-dual de $\mathcal{W}$. Nesse contexto, no Capítulo 3, tomando como base técnicas desenvolvidas em [66], usamos a noção de curvatura biortogonal para estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 7 *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana de dimensão quatro, compacta, orientada, conexa satisfazendo*

$$K^\perp \geq \frac{R^2}{24(3\lambda_1 + R)},$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano. Então M^4 é definite.

Como consequência de um trabalho de classificação de Freedman [34], obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2 *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 4, simplesmente conexa, orientada satisfazendo*

$$K^\perp \geq \frac{R^2}{24(3\lambda_1 + R)},$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador Laplaciano. Então M^4 é homeomorfa a $\mathbb{S}^4$ ou uma soma conexa de espaços projetivos complexos, $\mathbb{CP}^2 \# \dots \# \mathbb{CP}^2$ (b_2 vezes).

No Capítulo 4, estudamos a parabolicidade dos sólitons Ricci-harmônicos. Sólitons Ricci-harmônicos têm origem no fluxo Ricci-harmônico introduzido por Müller [57, 58]. Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 8 *Considere $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f)$ um sólito Ricci-harmônico gradiente steady completo e não-compacto, tal que $R_\phi \geq \kappa > 0$, para alguma constante κ . Então M é não-parabólica.*

Com o auxílio do teorema anterior, provamos o seguinte resultado.

Teorema 9 *Seja $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f)$ um sólito Ricci-harmônico gradiente steady completo não-compacto tal que $R_\phi \geq \kappa > 0$, para alguma constante κ . Suponha que u é uma função harmônica em M com $\int_M |\nabla u|^2 < \infty$. Então u é uma função constante.*

Como consequência, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3 *Seja $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f)$ um sólito Ricci-harmônico gradiente steady completo não-compacto tal que $R_\phi \geq \kappa > 0$, para alguma constante κ . Então M^m possui no máximo um fim não-parabólico.*

Finalizando o Capítulo 4, apresentaremos um resultado de crescimento do volume das bolas geodésicas em sólitons Ricci-harmônicos gradiente steady completos não-compactos, como segue.

Teorema 10 *Seja $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f)$ um sólito Ricci-harmônico gradiente steady completo não-compacto. Então existem constantes C_0, C_1, C_3 e $r_0 > 0$ tais que para qualquer $r > r_0$*

$$C_1 e^{C_2 \sqrt{r}} \geq \text{Vol}(B_p(r)) \geq C_0 r. \quad (5)$$

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns requisitos básicos para um bom entendimento dos capítulos seguintes. Como de costume, (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana de dimensão n , com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇ . Ademais, denotaremos o espaço dos campos suaves sobre M por $\mathfrak{X}(M)$. O espaço das funções suaves sobre M denotaremos por $C^\infty(M)$.

1.1 Notações e alguns tensores Riemannianos

Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana. Sempre que não houver dúvidas utilizaremos a notação $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$, para o tensor métrico. Recordamos que o tensor curvatura de Riemann é o $(1, 3)$ -tensor $Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$Rm(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \text{ para todos } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Usando o tensor métrico podemos ver este tensor como um $(0, 4)$ -tensor, cuja notação adotaremos para ser a mesma. A versão $(0, 4)$ é o tensor $Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ dado por

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle Rm(X, Y)Z, W \rangle.$$

É bem conhecido que o tensor de Riemann possui a seguinte decomposição

$$Rm = W + \frac{1}{n-2} \left(Ric - \frac{R}{n} g \right) \odot g + \frac{R}{2n(n-1)} g \odot g, \quad (1.1)$$

onde $\odot$ é o produto de Kulkarni-Nomizu. Recordamos que o produto de Kulkarni-Nomizu se utiliza de dois $(0, 2)$ -tensores simétricos T_1 e T_2 e gera um $(0, 4)$ -tensor $T_1 \odot T_2$, com as mesmas simetrias do tensor curvatura, como segue

$$T_1 \odot T_2(x, y, z, w) = T_1(x, z)T_2(y, w) - T_1(y, z)T_2(x, w) - T_1(x, w)T_2(y, z) + T_1(y, w)T_2(x, z),$$

para todos $x, y, z, w \in \mathfrak{X}(M)$. A decomposição do tensor de Riemann, em coordenadas, é dada por

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = & W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} - R_{jk}g_{il} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk}) \\ & - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}). \end{aligned}$$

1.2 Curvatura em dimensão 4

Em dimensão 4, existem algumas propriedades especiais relacionadas ao tensor curvatura. Começaremos revendo alguns fatos sobre o operador *estrela de Hodge* $*$, em dimensão n . Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada e $dV \in \Lambda^n(T^*M_p)$ o elemento de volume Riemanniano de M . O operador estrela de Hodge $*$: $\Lambda^k \longrightarrow \Lambda^{n-k}$ é uma isometria do espaço das k -formas para o espaço das $(n-k)$ -formas definido por

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle_{\Lambda^k} dV_p,$$

onde $\alpha, \beta \in \Lambda^k$. Uma propriedade conhecida do operador $*$ de Hodge é que

$$*^2 = (-1)^{k(n-k)} I,$$

onde $I : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$ é operador identidade. Em particular, em dimensão 4, com $k = 2$, temos $*$: $\Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$ e $*^2 = I$. Como consequência, o espaço das 2-formas é decomposto como

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-,$$

onde $\Lambda^\pm$ é o auto-espaço do operador $*$ de Hodge associado ao autovalor ± 1 . Esta especial coincidência que ocorre em dimensão 4, permite associar, a cada $(0, 4)$ -tensor T satisfazendo

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= -T(y, x, z, t) = -T(x, y, t, z) \\ T(x, y, z, t) &= T(z, t, x, y), \end{aligned}$$

1.2 Curvatura em dimensão 4

um operador simétrico $\mathcal{T} : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$, do seguinte modo: seja $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ uma base ortonormal orientada para $T_p M$. Usando a convenção de Einstein, denotamos uma 2-forma por $w = \frac{1}{2}w_{ij}e^i \wedge e^j$ onde $w_{ij} = w(e_i, e_j)$ e definimos

$$(\mathcal{T}w)_{ij} = \frac{1}{2}W_{ijkl}w_{kl}.$$

Reciprocamente, qualquer operador simétrico $\mathcal{T} : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$ é equivalente a um $(0, 4)$ -tensor T dado por

$$T_{pqrs} = \langle \mathcal{T}(e^p \wedge e^q), e^r \wedge e^s \rangle_{\Lambda^2}.$$

Em particular, associado ao $(0, 4)$ -tensor W de Weyl da decomposição (1.1), definimos o *operador curvatura de Weyl*, $\mathcal{W} : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$ por

$$(\mathcal{W}w)_{ij} = \frac{1}{2}W_{ijkl}w_{kl}.$$

Também definimos $\mathcal{W}^\pm : \Lambda^\pm \longrightarrow \Lambda^\pm$ pondo

$$\mathcal{W}^\pm w = \pi_\pm \mathcal{W} \pi_\pm w,$$

onde $\pi_\pm : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^\pm$ é a projecção $\pi_\pm = \frac{1}{2}(I \pm *)$. Estas definições nos fornecem a decomposição $\mathcal{W} = \mathcal{W}^+ \oplus \mathcal{W}^-$ de modo que podemos escrever o tensor de Weyl como $W = W^+ + W^-$ onde W^+ e W^- são as chamadas partes auto-dual e anti-auto-dual de W , respectivamente. Portanto, em dimensão 4 temos a seguinte decomposição ortogonal

$$Rm = W^+ + W^- + \frac{1}{2}(Ric - \frac{R}{4}g) \odot g + \frac{R}{24}g \odot g. \quad (1.2)$$

Observamos que o operador simétrico $G : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$ associado ao $(0, 4)$ -tensor $g \odot g$, isto é,

$$(g \odot g)_{ijkl} = \langle G(e^i \wedge e^j), e^k \wedge e^l \rangle_{\Lambda^2},$$

é igual a $2I$.. De fato, dada uma 2-forma $w \in \Lambda^2$, temos

$$\begin{aligned} (Gw)_{ij} &= \frac{1}{2}(g \odot g)_{ijkl}w_{kl} \\ &= \frac{1}{2}(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il} - g_{il}g_{jk} + g_{jl}g_{ik})w_{kl} \\ &= (g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il})w_{kl} \\ &= w_{ij} - w_{ji} = 2w_{ij}. \end{aligned}$$

Além disso, é possível mostrar (cf. [84]) que o operador (simétrico) definido no espaço das 2-formas, associado ao $(0, 4)$ -tensor $(Ric - \frac{R}{n}g) \odot g$, anti-comuta com o operador $*$

1.3 Curvatura biortogonal e o tensor Weyl

de Hodge. Assim, tal operador simétrico associado ao $(0, 4)$ -tensor $\frac{1}{2}(\text{Ric} - \frac{R}{n}g) \odot g$ é constituído de uma parte $B : \Lambda^- \longrightarrow \Lambda^+$ e de outra $B^* : \Lambda^+ \longrightarrow \Lambda^-$, a parte adjunta de B . Então, se $\mathcal{R} : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$ é o operador simétrico associado ao $(0, 4)$ -tensor curvatura de Riemann Rm então, correspondendo à decomposição

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$$

temos também a seguinte configuração matricial em forma de blocos

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{W}^+ + \frac{R}{12}I & B \\ \hline B^* & \mathcal{W}^- + \frac{R}{12}I \end{array} \right). \quad (1.3)$$

1.3 Curvatura biortogonal e o tensor Weyl

A noção de curvatura biortogonal foi usada em [64] por Noronha e em [71] por Seaman. A idéia de soma de curvaturas seccionais de planos ortogonais também apareceu nos artigos de Lebrum, Kulkarni [47] e Chern [23].

Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada de dimensão $n \geq 4$ e denote por $\mathfrak{M}$ o conjunto das métricas Riemannianas em M . Para cada métrica $g \in \mathfrak{M}$, denote por K a curvatura seccional dessa métrica. Para cada ponto $p \in M$, sejam P_1 e P_2 dois subespaços ortogonais de dimensão 2, do espaço tangente $T_p M$.

Definição 1.1 *A curvatura seccional biortogonal $K^\perp$ relativa a P_1 e P_2 (em $p \in M$) é o número dado por*

$$K^\perp(P_1, P_2) = \frac{K(P_1) + K(P_2)}{2}.$$

Quando $n = 4$, podemos escrever

$$K^\perp(P) = \frac{K(P) + K(P^\perp)}{2}, \quad (1.4)$$

onde $P^\perp$ é o plano ortogonal a P .

A soma das curvaturas seccionais de dois planos ortogonais, que foi considerada primeiramente por Chern [23], desempenha um papel crucial em variedades de dimensão 4. Esta noção apareceu precisamente em trabalhos de Synger e Thorpe [73], Gray [39], Seaman [71], Noronha [63], Costa e Ribeiro Jr [26] e Bettiol [6]. Além disso, como

1.3 Curvatura biortogonal e o tensor Weyl

observado por Synger e Thorpe [73] uma variedade Riemanniana M^4 é Einstein se e somente se $K(P^\perp) = K(P)$, para qualquer plano $P \subset T_p M$ e qualquer ponto $p \in M^4$. Para mais detalhes sobre o assunto veja, [6, 26, 27, 28, 64] e [71].

Agora, tomando em cada ponto $p \in M^4$ o mínimo e o máximo das curvaturas seccionais biortogonais, temos as seguintes funções que serão utilizadas posteriormente:

$$K_{\min}^\perp(p) = \min\{K^\perp(P); P \text{ é um } 2\text{-plano em } T_p M\}, \quad (1.5)$$

$$K_{\max}^\perp(p) = \max\{K^\perp(P); P \text{ é um } 2\text{-plano em } T_p M\}, \quad (1.6)$$

e

$$K_2^\perp = \frac{R}{4} - K_{\min}^\perp - K_{\max}^\perp. \quad (1.7)$$

Em dimensão 4 a curvatura biortogonal está intimamente relacionada com o tensor de Weyl como veremos a seguir.

Lema 1.1 *Sejam $p \in M^4$, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base ortonormal orientada de $T_p M^4$ e $\alpha = v_1 \wedge v_2 \in \Lambda^2(T_p M^4)$ uma 2-forma unitária. Então α pode ser unicamente escrita como $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$, onde $\alpha^\pm \in \Lambda^\pm$, respectivamente, com $|\alpha^\pm|^2 = \frac{1}{2}$.*

Prova: Supondo $\alpha = v_1 \wedge v_2$, obtemos

$$\langle \alpha, * \alpha \rangle = \langle v_1 \wedge v_2, *(v_1 \wedge v_2) \rangle = \langle v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4 \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle v_1, v_3 \rangle & \langle v_1, v_4 \rangle \\ \langle v_2, v_3 \rangle & \langle v_2, v_4 \rangle \end{bmatrix} = 0.$$

Como consequência da decomposição $\Lambda_p^2 = \Lambda_p^+ \oplus \Lambda_p^-$, temos que α pode ser escrita como $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$, onde $\alpha^\pm \in \Lambda^\pm$ com $*\alpha^+ = \alpha^+$ e $*\alpha^- = -\alpha^-$. Como α é unitária e $\langle \alpha^+, \alpha^- \rangle = 0$, temos também

$$1 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha^+ + \alpha^-, \alpha^+ + \alpha^- \rangle = |\alpha^+|^2 + 2\langle \alpha^+, \alpha^- \rangle + |\alpha^-|^2 = |\alpha^+|^2 + |\alpha^-|^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \alpha, * \alpha \rangle = \langle \alpha^+ + \alpha^-, *(\alpha^+ + \alpha^-) \rangle = \langle \alpha^+ + \alpha^-, \alpha^+ - \alpha^- \rangle \\ &= |\alpha^+|^2 - \langle \alpha^+, \alpha^- \rangle + \langle \alpha^-, \alpha^+ \rangle - |\alpha^-|^2 \\ &= |\alpha^+|^2 - |\alpha^-|^2. \end{aligned}$$

1.3 Curvatura biortogonal e o tensor Weyl

Segue das equações acima que

$$|\alpha^+|^2 = |\alpha^-|^2 = \frac{1}{2}.$$

Para verificar a unicidade, suponhamos que existam $\beta^\pm \in \Lambda^\pm$, tais que $\alpha = \beta^+ + \beta^-$. Então $\alpha^+ + \alpha^- = \beta^+ + \beta^-$, isto é, $\alpha^+ - \beta^+ = \beta^- - \alpha^- \in \Lambda_p^+ \cap \Lambda_p^- = \{0\}$. Isto prova a unicidade e conclui a prova do lema. ■

Prosseguindo, iremos obter uma relação que envolve a curvatura escalar e o tensor de Weyl. Nas notações do lema anterior, a curvatura seccional é dada por

$$K(v_1 \wedge v_2) = K(\alpha) = \langle \mathcal{R}(\alpha), \alpha \rangle.$$

Inicialmente vamos calcular $\mathcal{R}(\alpha)$. Nesse sentido, temos que

$$\mathcal{R}(\alpha) = \left(\frac{\mathcal{W}^+ + \frac{R}{12}I}{B^*} \middle| \frac{B}{\mathcal{W}^- + \frac{R}{12}I} \right) \begin{pmatrix} \alpha^+ \\ \alpha^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}^+(\alpha^+) + \frac{R}{12}\alpha^+ + B\alpha^- \\ B^*\alpha^+ + \mathcal{W}^-(\alpha^-) + \frac{R}{12}\alpha^- \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= \langle \mathcal{R}(\alpha), \alpha \rangle \\ &= \langle (\mathcal{W}^+(\alpha^+) + \frac{R}{12}\alpha^+ + B\alpha^-, B^*\alpha^+ + \mathcal{W}^-(\alpha^-) + \frac{R}{12}\alpha^-), (\alpha^+, \alpha^-) \rangle \\ &= \langle \mathcal{W}^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle + \frac{R}{12}|\alpha^+|^2 + \langle B\alpha^-, \alpha^+ \rangle + \langle \mathcal{W}^+(\alpha^+), \alpha^- \rangle \\ &\quad + \frac{R}{12}\langle \alpha^+, \alpha^- \rangle + \langle B\alpha^-, \alpha^- \rangle + \langle B^*\alpha^+, \alpha^+ \rangle + \langle \mathcal{W}^-(\alpha^-), \alpha^+ \rangle \\ &\quad + \frac{R}{12}\langle \alpha^-, \alpha^+ \rangle + \langle B^*\alpha^+, \alpha^+ \rangle + \langle \mathcal{W}^-(\alpha^-), \alpha^- \rangle + \frac{R}{12}|\alpha^-|^2 \end{aligned}$$

Então, como $\mathcal{W}^+(\alpha^+) \perp \alpha^-$, $\alpha^+ \perp \alpha^-$, $B\alpha^- \perp \alpha^-$, $\langle B^*\alpha^+, \alpha^- \rangle = \langle \alpha^+, B\alpha^- \rangle$ e $|\alpha^+|^2 + |\alpha^-|^2 = |\alpha|^2 = 1$, obtemos

$$K(\alpha) = \frac{R}{12} + \langle \alpha^+, \mathcal{W}^+(\alpha^+) \rangle + \langle \alpha^-, \mathcal{W}^-(\alpha^-) \rangle + 2\langle \alpha^+, B\alpha^- \rangle. \quad (1.8)$$

Por outro lado, se $\alpha^\perp = v_3 \wedge v_4 = \alpha^+ - \alpha^-$, obtemos de modo análogo

$$\begin{aligned} K(\alpha^\perp) &= \frac{R}{12} + \langle \alpha^+, \mathcal{W}^+(\alpha^+) \rangle + \langle -\alpha^-, \mathcal{W}^-(\alpha^-) \rangle + 2\langle \alpha^+, B(-\alpha^-) \rangle \\ &= \frac{R}{12} + \langle \alpha^+, \mathcal{W}^+(\alpha^+) \rangle + \langle \alpha^-, \mathcal{W}^-(\alpha^-) \rangle - 2\langle \alpha^+, B(\alpha^-) \rangle \end{aligned} \quad (1.9)$$

Segue de (1.8) e (1.9) que

$$\frac{K(\alpha) + K(\alpha^\perp)}{2} = \frac{R}{12} + \langle \alpha^+, \mathcal{W}^+(\alpha^+) \rangle + \langle \alpha^-, \mathcal{W}^-(\alpha^-) \rangle. \quad (1.10)$$

1.3 Curvatura biortogonal e o tensor Weyl

Portanto, a partir de (1.10) e da definição da função $K_{\min}^{\perp}$, temos

$$K_{\min}^{\perp} = \frac{R}{12} + \min \left\{ \langle \alpha^+, \mathcal{W}^+(\alpha^+) \rangle; |\alpha^+|^2 = \frac{1}{2} \right\} + \min \left\{ \langle \alpha^-, \mathcal{W}^-(\alpha^-) \rangle; |\alpha^-|^2 = \frac{1}{2} \right\}. \quad (1.11)$$

Para prosseguirmos, sejam $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$ os autovalores do operador de Weyl. É bem conhecido que $\text{tr}(\mathcal{W}) = 0$, isto é, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Além disso, vamos denotar por $\omega_1^+ \leq \omega_2^+ \leq \omega_3^+$ e $\omega_1^- \leq \omega_2^- \leq \omega_3^-$, os autovalores dos operadores $\mathcal{W}^+$ e $\mathcal{W}^-$, respectivamente. Note agora que

$$\min \left\{ \langle \alpha^{\pm}, \mathcal{W}^{\pm}(\alpha^{\pm}) \rangle; |\alpha^{\pm}|^2 = \frac{1}{2} \right\} = \omega_1^{\pm} |\alpha^{\pm}|^2 = \frac{\omega_1^{\pm}}{2}.$$

Portanto, pela equação (1.11) concluímos que

$$K_{\min}^{\perp} = \frac{\omega_1^+ + \omega_1^-}{2} + \frac{R}{12}. \quad (1.12)$$

De modo análogo obtemos

$$K_{\max}^{\perp} = \frac{\omega_3^+ + \omega_3^-}{2} + \frac{R}{12}. \quad (1.13)$$

Como $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, segue da definição de $K_2^{\perp}$, juntamente com as equações (1.12) e (1.13) que

$$K_2^{\perp} = \frac{\omega_2^+ + \omega_2^-}{2} + \frac{R}{12}. \quad (1.14)$$

Observação: Nós conhecemos que M^4 é localmente conformemente flat se, e somente se, $W \equiv 0$. Neste caso, os autovalores de $W^{\pm}$ são nulos e como consequência disso, valem as seguintes igualdades

$$K^{\perp} = K_{\min}^{\perp} = K_2^{\perp} = K_{\max}^{\perp} = \frac{R}{12}. \quad (1.15)$$

A seguir apresentamos uma desigualdade fundamental (veja [64]).

Lema 1.2 *Se $\omega_1^{\pm} \leq \omega_2^{\pm} \leq \omega_3^{\pm}$ são os autovalores de $\mathcal{W}^{\pm}$, respectivamente, então*

$$|\mathcal{W}^{\pm}| \leq 6(\omega_1^{\pm})^2.$$

Demonstração: Sabemos que

$$|\mathcal{W}^{\pm}|^2 = (\omega_1^{\pm})^2 + (\omega_2^{\pm})^2 + (\omega_3^{\pm})^2. \quad (1.16)$$

Por outro lado, como $\omega_1^\pm + \omega_2^\pm + \omega_3^\pm = 0$, temos $\omega_1^\pm = -(\omega_2^\pm + \omega_3^\pm)$. Elevando ao quadrado os dois lados dessa última igualdade obtemos

$$(\omega_2^\pm)^2 + (\omega_3^\pm)^2 = (\omega_1^\pm)^2 - 2\omega_2^\pm \omega_3^\pm. \quad (1.17)$$

Segue das equações (1.16) e (1.17) que $|\mathcal{W}^\pm|^2 = 2(\omega_1^\pm)^2 - 2\omega_2^\pm \omega_3^\pm$. Como $\omega_3^\pm = -\omega_1^\pm - \omega_2^\pm$ e $-\omega_2^\pm \leq -\omega_1^\pm$ deduzimos $\omega_3^\pm \leq -2\omega_1^\pm$, e, conseqüentemente

$$|\mathcal{W}^\pm|^2 = 2(\omega_1^\pm)^2 - 2\omega_2^\pm \omega_3^\pm \leq 2(\omega_1^\pm)^2 + 4(\omega_1^\pm)^2 = 6(\omega_1^\pm)^2,$$

como queríamos demonstrar. ■

1.4 Cohomologia de De Rham e formas harmônicas

Nesta seção destacamos os conceitos de assinatura e característica de Euler de uma variedade Riemanniana.

Recordamos que o operador diferencial exterior $d : \Lambda^k \longrightarrow \Lambda^{k+1}$ satisfaz $d^2 = 0$, onde $d^2 = d \circ d : \Lambda^k \longrightarrow \Lambda^{k+2}$. Além disso, uma forma $\alpha \in \Lambda^k$ é dita ser *fechada* se $d\alpha = 0$ e *exata* se existe $\eta \in \Lambda^{k-1}$ tal que $d\eta = \alpha$. Se α é exata, então α é fechada, visto que, $d\alpha = d^2\eta = 0$. Duas formas α e β são ditas *cohomólogas* se $\alpha - \beta$ é uma forma exata. Esta propriedade determina uma relação de equivalência no espaço das formas fechadas em Λ^k e o conjunto das classes de equivalências é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, chamado *k-ésimo grupo de cohomologia* de De Rham, denotado por $H^p(M, \mathbb{R})$. Em [44] temos o seguinte teorema.

Teorema 1.1 *Se M é compacta e orientada então $H^p(M)$ possui dimensão finita. Além disso, $H^p(M)$ é isomorfo a $(H^{n-p}(M))^*$, onde $0 \leq p \leq n = \dim(M)$ e $H^{n-p}(M))^*$ é o espaço dual de $H^{n-p}(M)$.*

Neste contexto, temos a seguinte definição.

Definição 1.2 *O k -ésimo grupo de homologia $H_p(M, \mathbb{R})$ de uma variedade compacta é definido por $(H^p(M, \mathbb{R}))^*$. Além disso, $b_k(M) := \dim(H^k(M, \mathbb{R}))$ é denominado o k -ésimo número de Betti de M .*

Pode ser provado que a classe $[w]$ em $H^k(M)$ contém exatamente uma forma harmônica, de modo que tais espaços podem ser identificados. Em particular, $\dim H^k(M)$ é igual à

dimensão do espaço das formas harmônicas em Λ^k (veja Teorema 2.2.1 em [44]). Levando em conta a Definição 1.2, segue do Teorema 1.1 que $H_k(M)$ é isomorfo a $H^{d-k}(M)$. Este isomorfismo é chamado de *dualidade de Poincaré*. Como consequência, se M^n é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n , então (veja Corolário 2.2.2 em [44]) temos que $b_k = b_{n-k}$, para $0 \leq k \leq n$. Recordamos a definição do invariante topológico denominado característica de Euler e denotado por $\chi(M)$. De fato, conforme [4],

$$\chi(M) := \sum_{i=1}^n (-1)^i b_i$$

onde $b_i = \dim H^i(M)$ é o i -ésimo número de Betti de M . Quando a dimensão da variedade é igual a 4, consta em [5] a seguinte fórmula especial

$$\chi(M) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left[\|U\|^2 + \|W\|^2 - \frac{1}{2} \|Ric - \frac{R}{n} g\|^2 \right] dV_g,$$

onde $U = \frac{R}{12} I$. Outro invariante topológico muito importante é a chamada *assinatura* de M . Antes de definirmos o que é a assinatura, considere M uma variedade Riemanniana compacta e orientada, de dimensão $n = 4k$ e defina uma forma quadrática simétrica $Q : H^{2k}(M) \otimes H^{2k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$Q([w_1], [w_2]) := \int_M w_1 \wedge w_2.$$

A integral acima não depende dos representantes das classes de cohomologia. Como o espaço H^{2k} é de dimensão finita com dimensão igual a b_{2k} , a matriz da forma quadrática simétrica Q pode ser diagonalizada. Sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_{2k}$ seus autovalores, defina

$$b^+ = \#\{\lambda_i | \lambda_i > 0\} \text{ e } b^- = \#\{\lambda_i | \lambda_i < 0\}.$$

Em conformidade com essas terminologias, temos a seguinte definição.

Definição 1.3 *A assinatura $\tau(M)$ de uma variedade compacta, orientada, é a assinatura da forma quadrática Q , isto é,*

$$\tau(M) = b^+ - b^-.$$

Em particular, em dimensão 4, em virtude da decomposição $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$, o espaço das 2-formas harmônicas $H^2(M^4; \mathbb{R})$ pode ser decomposto como

$$H^2(M^4; \mathbb{R}) = H^+(M^4; \mathbb{R}) \oplus H^-(M^4; \mathbb{R}),$$

1.4 Cohomologia de De Rham e formas harmônicas

onde $H^\pm(M^4; \mathbb{R})$ é o espaço das 2-formas harmônicas positivas e negativas, respectivamente. Esta decomposição nos diz que o segundo número de Betti b_2 de M^4 pode ser escrito como

$$b_2 = b^+ + b^-,$$

onde $b^\pm = \dim H^\pm(M^4; \mathbb{R})$. Em dimensão 4, esse invariante topológico (veja [5]) é dado por

$$\tau(M) = \frac{1}{12\pi^2} \int_M [\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2] dV_g.$$

Capítulo 2

Alguns teoremas da esfera para subvariedades com curvatura seccional positiva

Neste capítulo investigamos alguns teoremas da esfera para subvariedades com curvatura biortogonal positiva. Estabelecemos algumas cotas superiores para o quadrado da norma da segunda forma fundamental, as quais garantem que uma subvariedade Riemanniana compacta seja difeomorfa a uma esfera. Os resultados principais apresentados neste capítulo constituem parte de um artigo escrito pelo autor e aceito para publicação no *Glasgow Mathematical Journal*.

2.1 Alguns resultados existentes

Nas últimas décadas, muitos matemáticos investigaram as estruturas topológicas e diferenciáveis de subvariedades em esferas e espaços Euclidianos. Neste sentido, em 1973, Lawson e Simons [48], por meio da não-existência de correntes estáveis em subvariedades compactas de uma esfera, obtiveram um critério para o anulamento do grupo de homologia de subvariedades compactas de esferas. Leung [49] e Xin [77] estenderam o resultado obtido por Lawson e Simons para subvariedades compactas em espaços Euclidianos. Asperti e Costa [1] obtiveram uma estimativa para a curvatura de Ricci de subvariedades de um espaço forma, que melhora a estimativa de Leung. Como consequência,

2.1 Alguns resultados existentes

Asperti e Costa obtiveram um novo critério para o anulamento do grupo de homologia de subvariedades compactas da esfera e espaços Euclidianos. Em 2009, Xu e Zhao [78] investigaram as estruturas topológicas e diferenciável de subvariedades impondo certas condições sobre a segunda forma fundamental.

Relembramos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) compacta (sem bordo) de dimensão n é dita ser δ -pinçada se as curvaturas seccionais K satisfazem

$$\delta \leq K \leq 1. \quad (2.1)$$

Se a desigualdade é estrita, dizemos que M é estritamente δ -pinçada.

Em 1997, Xia [20] provou que uma subvariedade Riemanniana M^n com $n \geq 4$, compacta, simplesmente conexa, isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana δ -pinçada ($\delta > \frac{1}{4}$) satisfazendo

$$\|\alpha(v, v)\|^2 < \frac{4}{9}(\delta - \frac{1}{4}), \text{ para todo vetor unitário } v \in T_p M,$$

deve ser homeomorfa a uma esfera. Enquanto Xu e Zhao [78] provaram, em 2009, que uma subvariedade de dimensão n , compacta e orientada em uma variedade Riemanniana $\delta(> \frac{1}{4})$ -pinçada satisfazendo

$$\|\alpha(v, v)\|^2 < \frac{4}{9}(\delta - \frac{1}{4}), \text{ para qualquer vetor unitário } v \in T_p M,$$

deve ser difeomorfa a um espaço forma esférico. Em [35], Gu e Xu mostraram que uma subvariedade M^3 de dimensão 3, compacta, simplesmente conexa de uma variedade Riemanniana $\overline{M}^n$ satisfazendo uma condição específica envolvendo a curvatura média e a curvatura escalar, deve ser difeomorfa a esfera $\mathbb{S}^3$. Depois, Gu e Xu [37] provaram que uma subvariedade completa M^n de uma variedade Riemanniana N^{n+m} de dimensão $n + m$, satisfazendo

$$\|\alpha\|^2 < \frac{8}{3}(\overline{K}_{\min} - \frac{1}{4}\overline{K}_{\max}) + \frac{n^2 H^2}{n-1},$$

onde H é a curvatura média de M^n , é difeomorfa a um espaço forma esférico ou ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Assim, investigar condições de curvatura a fim de garantir que uma variedade Riemanniana compacta seja difeomorfa a uma esfera é definitivamente um problema bem conhecido.

Recentemente, Ribeiro e Costa [27] usaram a noção de curvatura biortogonal para obter alguns teoremas da esfera. Em particular, eles melhoraram a constante de pinching para a curvatura seccional, utilizada em alguns trabalhos anteriores.

Vale apenas ressaltar que um clássico teorema obtido por Tachibana [76] assegura que uma variedade Einstein (M^n, g) com operador de curvatura positivo possui curvatura seccional constante. Além disso, ele também provou que se (M^n, g) possui curvatura seccional não-negativa, então M^n é localmente simétrica.

2.2 Curvatura isotrópica

Começamos esta seção relembrando que uma variedade Riemanniana M^n , $n \geq 4$, possui *curvatura isotrópica positiva* (PIC) se

$$R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} > 0.$$

Se a desigualdade acima não for estrita, dizemos que M^n possui *curvatura isotrópica não-negativa* (NIC). A noção de curvatura isotrópica foi introduzida por Micallef e Moore [56], onde eles provaram que uma variedade compacta com curvatura isotrópica positiva é homeomorfa a uma esfera. Micallef e Wang [55] estenderam o resultado de Tachibana para $n = 4$ mostrando que uma variedade de Einstein de dimensão 4 com curvatura isotrópica não-negativa é localmente simétrica. Recentemente, esses resultados foram estendidos em duas importantes direções. Primeiro, por meio de uma análise de convergência para o fluxo de Ricci, Böhm e Wilking [15] provaram, para $n \geq 4$, que variedades com operador curvatura positivo são espaços formas. Depois, Brendle [9] estendeu o resultado de Micallef e Wang para dimensões $n \geq 4$. Mais precisamente, ele provou que se (M^n, g) é uma variedade Einstein, $n \geq 4$, com curvatura isotrópica positiva, então ela é localmente simétrica. É importante destacar que Costa e Ribeiro Jr [26] mostraram que $\mathbb{S}^4$ e $\mathbb{CP}^2$ são as únicas variedades de dimensão 4 compactas, simplesmente conexas satisfazendo $K^\perp \geq \frac{R}{24} > 0$.

Recentemente, Schoen [72] sugeriu a seguinte conjectura.

Teorema 2.1 (Conjectura-(Schoen)) *Seja M^n uma variedade riemanniana compacta de dimensão $n \geq 4$, com curvatura isotrópica positiva. Então o recobrimento finito de M^n é difeomorfo a $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ou a soma conexa destas variedades.*

Em 2012, Chen, Tang e Zhu [21] atestaram a veracidade da conjectura para $n = 4$. Destacamos ainda que uma variedade M^4 de dimensão 4, na qual $K_{\min}^\perp > \frac{R}{24}$, possui

2.3 Subvariedades com limitação na norma da segunda forma

curvatura isotrópica positiva. De fato, já sabemos que $|R_{1234}| \leq \frac{R}{6} - 2K_{\min}^\perp$ e assim

$$K_{13} + K_{14} + K_{23} + K_{24} - 2R_{1234} \geq 8K_{\min}^\perp - \frac{R}{3}.$$

Portanto, a conjectura de Schoen é verdadeira para variedades compactas de dimensão 4 com $K_{\min}^\perp > \frac{R}{24}$. As ideias desenvolvidas por Ribeiro e Costa [26, 27], Gu e Xu [35, 36, 37], bem como as de Xu e Zhao [78], nos motivaram a investigar teoremas da esfera para subvariedades sob certas condições envolvendo a curvatura biortogonal. Na próxima seção destacaremos nossos resultados.

2.3 Subvariedades com limitação na norma da segunda forma

Seja M^n uma subvariedade Riemanniana de uma variedade Riemanniana $\overline{M}^N$. Consideramos as seguintes convenções para os índices:

$$1 \leq i, j, k, l \leq n, \quad 1 \leq A, B, C, D \leq N, \quad n+1 \leq \beta \leq N.$$

Para um ponto qualquer $p \in M$ escolhemos um referencial ortonormal $\{e_i, e_\beta\}$ de $\overline{M}$ tal que os $\{e_i\}$ são tangentes a M . Denote por $\{e^i\}$ o referencial dual de $\{e_i\}$. Sejam

$$Rm = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} e^i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^l \quad \text{e} \quad \overline{R}m = \sum_{A,B,C,D} \overline{R}_{ABCD} e^A \otimes e^B \otimes e^C \otimes e^D;$$

os tensores curvatura de Riemann de M e $\overline{M}$, respectivamente. Além disso, se α é a segunda forma fundamental e $\vec{H}$ é o vetor curvatura média de M , então

$$\alpha = \sum_{\beta,i,j} h_{ij}^\beta e^i \otimes e^j \otimes e_\beta \quad \text{e} \quad \vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{\beta,i} h_{ii}^\beta e_\beta.$$

O quadrado da norma da segunda forma fundamental $\|\alpha\|^2$ e a curvatura média H de M são dados por

$$\|\alpha\|^2 := \sum_{\beta,i,j} (h_{ij}^\beta)^2 \quad \text{and} \quad H := \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{\beta} \left(\sum_i h_{ii}^\beta \right)^2}.$$

Temos ainda a equação de Gauss dada por

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} + \langle \alpha(e_i, e_k), \alpha(e_j, e_l) \rangle - \langle \alpha(e_i, e_l), \alpha(e_j, e_k) \rangle,$$

isto é,

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + \sum_{\beta} h_{ik}^{\beta} h_{jl}^{\beta} - \sum_{\beta} h_{il}^{\beta} h_{jk}^{\beta}. \quad (2.2)$$

Aqui, R_{ijkl} e $\bar{R}_{ijkl}$ representam os tensores curvatura Riemannianos de M e $\bar{M}$, respectivamente.

A *curvatura de Ricci* é definida da seguinte maneira: dada uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ e $v, w \in T_p M$,

$$\begin{aligned} Ric(v, w) &= tr(x \mapsto R(x, v)w) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, v)w, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Vamos denotar $Ric(v, v)$, simplesmente por $Ric(v)$. Em particular, se $v = e_n$ então

$$Ric(v) = \sum_{i=1}^{n-1} K(v, e_i),$$

onde $K(v, e_i)$ é a curvatura seccional do plano gerado por $\{v, e_i\}$.

Depois dessas observações preliminares, podemos enunciar nosso primeiro resultado deste capítulo.

Teorema 2.2 *Seja M^4 uma subvariedade compacta de dimensão 4, simplesmente conexa, imersa isometricamente em uma variedade Riemanniana $\bar{N}$, δ -pinçada. Então, M^4 é difeomorfa a uma esfera $\mathbb{S}^4$, desde que seja válida uma das seguintes condições:*

1. $\|\alpha(v, v)\|^2 < K_{\min}^{\perp} - \frac{1}{3}(1 - \delta)$, para qualquer $v \in T_p M^4$;
2. $\|\alpha\|^2 < 4K_{\min}^{\perp} + 4\delta + 8H^2 - \frac{R}{3}$, onde H e R denotam a curvatura média e a curvatura escalar de M^4 , respectivamente.

Demonstração: Primeiramente, note que, dado um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, temos que

$$R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} = K_{13} + K_{14} + K_{23} + K_{24} - 2R_{1234},$$

onde $K_{ij} = K(e_i, e_j)$. Portanto, denotando $K_{ij}^{\perp} = K^{\perp}(e_i, e_j)$ podemos usar (1) e (2) para obtermos

$$\begin{aligned} R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} &= 2K_{13}^{\perp} + 2K_{14}^{\perp} - 2R_{1234} \\ &\geq 4K_{\min}^{\perp} - 2R_{1234}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.3 Subvariedades com limitação na norma da segunda forma

Por outro lado, da equação de Gauss (2.2) deduzimos que

$$-2R_{1234} = -2[\overline{R}_{1234} + \langle \alpha(e_1, e_3), \alpha(e_2, e_4) \rangle - \langle \alpha(e_2, e_3), \alpha(e_1, e_4) \rangle]. \quad (2.4)$$

Agora, utilizamos a desigualdade de Berger [3] para deduzir

$$|\overline{R}_{ijkl}| \leq \frac{2}{3}(1 - \delta).$$

Portanto, segue da equação (2.4) que

$$\begin{aligned} 4K_{\min}^{\perp} - 2R_{1234} &\geq 4K_{\min}^{\perp} - \frac{4}{3}(1 - \delta) - 2\langle \alpha(e_1, e_3), \alpha(e_2, e_4) \rangle \\ &\quad + 2\langle \alpha(e_2, e_3), \alpha(e_1, e_4) \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos as seguintes expressões

$$\langle \alpha(e_i, e_j), \alpha(e_k, e_l) \rangle \geq -\frac{1}{2}\{|\alpha(e_i, e_j)|^2 + |\alpha(e_k, e_l)|^2\} \quad (2.6)$$

e

$$-\langle \alpha(e_i, e_j), \alpha(e_k, e_l) \rangle \geq -\frac{1}{2}\{|\alpha(e_i, e_j)|^2 + |\alpha(e_k, e_l)|^2\}. \quad (2.7)$$

Em particular, consta em [20] a desigualdade

$$|\alpha(e_i, e_j)|^2 \leq \frac{1}{2}\left\{|\alpha(\frac{e_i + e_j}{\sqrt{2}}, \frac{e_i + e_j}{\sqrt{2}})|^2 + |\alpha(\frac{e_i - e_j}{\sqrt{2}}, \frac{e_i - e_j}{\sqrt{2}})|^2\right\}. \quad (2.8)$$

Agora, podemos utilizar as informações contidas em (2.6) e (2.7) em (2.5) para deduzir

$$\begin{aligned} 4K_{\min}^{\perp} - 2R_{1234} &\geq 4K_{\min}^{\perp} - \frac{4}{3}(1 - \delta) - \{|\alpha(e_1, e_3)|^2 + |\alpha(e_2, e_4)|^2\} \\ &\quad - \{|\alpha(e_2, e_3)|^2 + |\alpha(e_1, e_4)|^2\}. \end{aligned}$$

A partir disso, usamos nossa primeira hipótese junto com (2.3) e (2.8) para concluir que M^4 possui curvatura isotrópica positiva. Então, basta aplicarmos um teorema obtido por Hamilton [41] o qual afirma que uma variedade de dimensão 4, compacta, simplesmente conexa, com curvatura isotrópica positiva é difeomorfa a uma esfera $\mathbb{S}^4$.

Prosseguindo, vamos tratar da nossa segunda condição. Por uma questão de simplicidade, considere

$$A = K_{13} + K_{14} + K_{23} + K_{24} - 2R_{1234}.$$

2.3 Subvariedades com limitação na norma da segunda forma

Então, a partir da equação de Gauss e tendo em vista que $\overline{N}$ é δ -pinçada, temos

$$\begin{aligned}
A &= \overline{K}_{13} + \overline{K}_{14} + \overline{K}_{23} + \overline{K}_{24} - 2R_{1234} + \sum_{\beta} \left[h_{11}^{\beta} h_{33}^{\beta} + h_{22}^{\beta} h_{33}^{\beta} + \right. \\
&\quad \left. + h_{22}^{\beta} h_{44}^{\beta} + h_{11}^{\beta} h_{44}^{\beta} - (h_{13}^{\beta})^2 - (h_{23}^{\beta})^2 - (h_{24}^{\beta})^2 - (h_{14}^{\beta})^2 \right] \\
&\geq 4\delta - 2R_{1234} + \sum_{\beta} \left[h_{11}^{\beta} h_{33}^{\beta} + h_{22}^{\beta} h_{33}^{\beta} + h_{22}^{\beta} h_{44}^{\beta} + h_{11}^{\beta} h_{44}^{\beta} \right. \\
&\quad \left. - (h_{13}^{\beta})^2 - (h_{23}^{\beta})^2 - (h_{24}^{\beta})^2 - (h_{14}^{\beta})^2 \right]. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, temos imediatamente que

$$\begin{aligned}
16H^2 &= \sum_{\beta} (h_{11}^{\beta} + h_{22}^{\beta} + h_{33}^{\beta} + h_{44}^{\beta})^2 \\
&= \sum_{\beta} [(h_{11}^{\beta} + h_{22}^{\beta})^2 + (h_{33}^{\beta} + h_{44}^{\beta})^2 + 2(h_{11}^{\beta} + h_{22}^{\beta})(h_{33}^{\beta} + h_{44}^{\beta})] \\
&\leq \sum_{\beta} \{2[(h_{11}^{\beta})^2 + (h_{22}^{\beta})^2] + 2[(h_{33}^{\beta})^2 + (h_{44}^{\beta})^2] \\
&\quad + 2(h_{11}^{\beta} h_{33}^{\beta} + h_{11}^{\beta} h_{44}^{\beta} + h_{22}^{\beta} h_{33}^{\beta} + h_{22}^{\beta} h_{44}^{\beta})\}.
\end{aligned}$$

Isto pode ser reescrito como

$$\sum_{\beta} [h_{11}^{\beta} h_{33}^{\beta} + h_{11}^{\beta} h_{44}^{\beta} + h_{22}^{\beta} h_{33}^{\beta} + h_{22}^{\beta} h_{44}^{\beta}] \geq 8H^2 - \sum_{\beta, i} (h_{ii}^{\beta})^2. \tag{2.10}$$

De (2.10) e (2.9) concluímos que

$$\begin{aligned}
A &\geq 4\delta + 8H^2 - 2R_{1234} - \sum_{\beta, i} (h_{ii}^{\beta})^2 - \sum_{\beta} [(h_{13}^{\beta})^2 + (h_{23}^{\beta})^2 + (h_{24}^{\beta})^2 + (h_{14}^{\beta})^2] \\
&\geq 4\delta + 8H^2 - 2R_{1234} - \|\alpha\|^2. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Agora, da desigualdade de Seaman [71] (veja também [3]) deduzimos que

$$| R_{1234} | \leq \frac{2}{3} (K_{\max}^{\perp} - K_{\min}^{\perp}). \tag{2.12}$$

Agora, como $tr\mathcal{W} = 0$, concluímos que

$$w_3^{\pm} \leq -2w_1^{\pm}.$$

Assim, usando a definição de $K_{\min}^{\perp}$ obtemos

$$\begin{aligned}
K_{\max}^{\perp} &= \frac{w_3^+ + w_3^-}{2} + \frac{R}{12} \\
&\leq -(w_1^+ + w_1^-) + \frac{R}{12} \\
&= -2K_{\min}^{\perp} + \frac{R}{6} + \frac{R}{12},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$K_{\max}^{\perp} \leq \frac{R}{4} - 2K_{\min}^{\perp}.$$

Isto combinado com (2.12) garante que

$$|R_{1234}| \leq \frac{2}{3} \left(\frac{R}{4} - 3K_{\min}^{\perp} \right). \quad (2.13)$$

Agora, por (2.11) e (2.13) temos que

$$A \geq 4\delta + 8H^2 + 4K_{\min}^{\perp} - \frac{R}{3} - \|\alpha\|^2.$$

Assim, basta utilizarmos nossa segunda hipótese para concluir que M^4 possui curvatura isotrópica positiva. Finalmente, aplicamos mais uma vez o teorema de Hamilton utilizado na primeira parte da demonstração (veja [41]) para finalizar a prova do teorema.

■

Como uma consequência do Teorema 2.2 temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1 *Seja M^4 uma subvariedade Riemanniana compacta de dimensão 4, simplesmente conexa, imersa isometricamente em uma esfera canônica $\mathbb{S}^n$. Suponha que*

$$\|\alpha(v, v)\|^2 < K_{\min}^{\perp},$$

para qualquer vetor tangente unitário v em M^4 . Então M^4 é difeomorfa a esfera $\mathbb{S}^4$.

No Teorema 13 de Gu e Xu [35], foi mostrado que uma subvariedade compacta de dimensão 3, em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^n$ de dimensão n , satisfazendo

$$\|\alpha\|^2 < 2\overline{K}_{\min} + \frac{9}{2}H^2,$$

deve ser difeomorfa a um espaço forma esférico. Motivado por este resultado, vamos considerar uma hipersuperfície compacta, simplesmente conexa M^3 de uma variedade compacta N^4 , de dimensão 4, para estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 2.3 *Seja M^3 uma hipersuperfície compacta simplesmente conexa de uma variedade compacta $\overline{N}^4$, de dimensão 4. Suponha que*

$$\|\alpha\|^2 < 4\overline{K}_{\min}^{\perp} - 2\overline{K}_{\max} + \frac{9}{2}H^2,$$

onde $\overline{K}_{\max}$ é o máximo da curvatura seccional de M^4 . Então M^3 é difeomorfa a $\mathbb{S}^3$.

Demonstração: Inicialmente, seja $v = e_3$ um vetor tangente unitário em $T_p M^3$ tal que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal de $T_p M^3$ e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base ortonormal de $T_p M^4$. Então usamos a equação de Gauss para deduzir que

$$\begin{aligned}
 Ric(v) &= K_{13} + K_{23} \\
 &= \bar{K}_{13} + \bar{K}_{23} + h_{11}h_{33} - (h_{13})^2 + h_{22}h_{33} - (h_{23})^2 \\
 &= (\bar{K}_{13} + \bar{K}_{24}) + (\bar{K}_{23} + \bar{K}_{14}) - \bar{K}_{24} - \bar{K}_{14} \\
 &\quad + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - (h_{13})^2 - (h_{23})^2.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
 9H^2 &= (h_{11} + h_{22} + h_{33})^2 \\
 &= ((h_{11} + h_{22})^2 + 2(h_{11} + h_{22})h_{33} + (h_{33})^2) \\
 &\leq 2[(h_{11})^2 + (h_{22})^2] + 2h_{11}h_{33} + 2h_{22}h_{33} + 2(h_{33})^2,
 \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} \geq \frac{9}{2}H^2 - [(h_{11})^2 + (h_{22})^2 + (h_{33})^2]. \tag{2.15}$$

Prosseguindo, de (2.14) e (2.15) juntamente com nossa hipótese, temos

$$\begin{aligned}
 Ric(v) &\geq 2\bar{K}_{13}^\perp + 2\bar{K}_{14}^\perp + \frac{9}{2}H^2 - 2\bar{K}_{\max} - \|\alpha\|^2 \\
 &\geq 4\bar{K}_{\min}^\perp + \frac{9}{2}H^2 - 2\bar{K}_{\max} - \|\alpha\|^2 > 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, basta aplicarmos um teorema de Hamilton [42] o qual afirma que uma variedade Riemanniana tridimensional (M^3, g_o) compacta, com métrica inicial g_o e curvatura de Ricci estritamente positiva, converge a uma métrica de curvatura constante positiva. Em particular, se M^3 for simplesmente conexa, então M^3 é difeomorfa a esfera $\mathbb{S}^3$. ■

Em [64], Noronha obteve alguns resultados de classificação para variedades de dimensão 4, compactas com curvatura seccional não-negativa. Por exemplo, ela mostrou que se $\|W^-\|^2 \geq -(\omega_1^-)\frac{R}{2}$ e a parte auto-dual do operador de Weitzenböck F^+ possui um autovalor negativo em algum ponto de M^4 , então $W^- = 0$. Neste caso, a curvatura escalar R não pode ser constante; para mais detalhes veja [64]. O teorema a seguir contém esta informação e será útil neste trabalho.

2.3 Subvariedades com limitação na norma da segunda forma

Teorema 2.4 (Noronha, [64]) *Seja M^4 uma variedade compacta de dimensão 4, com curvatura seccional não-negativa. Se $\Delta W = 0$ e $\|W^-\| \geq -(\omega_1^-)\frac{R}{2}$, então uma das seguintes afirmações ocorre:*

1. M^4 é conformemente equivalente a $\mathbb{S}^4$ ou seu recobrimento universal é ou $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ com suas métricas canônicas.
2. O recobrimento universal de M^4 é $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, onde $\mathbb{S}^2$ possui curvatura constante.
3. M^4 é isométrica a $\mathbb{CP}^2$.
4. M^4 é anti-auto-dual e negativa definite.
5. M^4 é auto-dual e a curvatura escalar não é constante.

O seguinte teorema, será utilizado no nosso próximo resultado.

Teorema 2.5 (Brendle, [10]) *Seja (M, g_o) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 4$. Se*

$$R_{1313} + \lambda^2 R_{1414} + R_{2323} + \lambda^2 R_{2424} - 2\lambda R_{1234} > 0$$

para todo referencial $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e todo $\lambda \in [-1, 1]$, então, o fluxo de Ricci normalizado com métrica inicial g_o ,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)} + \frac{2}{n} r_{g(t)} g(t),$$

existe para todo tempo t e converge quando $t \rightarrow \infty$, com para uma métrica de curvatura constante. Aqui $r_{g(t)}$ denota a média da curvatura escalar de $g(t)$.

Além disso, o seguinte resultado obtido por Brendle e Schoen também nos será útil.

Teorema 2.6 (Brendle-Schoen, [11]) *Seja (M, g_o) uma variedade Riemanniana compacta, localmente irredutível, de dimensão $n \geq 4$. Assuma que $M \times \mathbb{R}^2$ possui curvatura isotrópica não-negativa, isto é,*

$$R_{1313} + \lambda^2 R_{1414} + \mu^2 R_{2323} + \lambda^2 \mu^2 R_{2424} - 2\lambda \mu R_{1234} \geq 0$$

para todo referencial $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e todos $\lambda, \mu \in [-1, 1]$. Então, uma das seguintes afirmações ocorre:

2.3 Subvariedades com limitação na norma da segunda forma

1. M é difeomorfa a um espaço forma esférico.
2. $n = 2m$ e o recobrimento universal de M é uma variedade Khäler biholomorfa a $\mathbb{CP}^m$.
3. O recobrimento universal de M é isométrico a um espaço simétrico compacto.

A seguir, destacamos um diagrama apresentado em [12] por Brendle e Schoen, que mostra algumas implicações importantes entre as condições de curvatura. Para tal considere:

1. M possui curvatura seccional $1/4$ -pinçada.
2. M possui curvatura seccional não-negativa.
3. M possui curvatura flag 2-não-negativa, isto é, $R_{1313} + R_{2323} \geq 0$, para todo referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$.
4. M possui curvatura escalar não-negativa.
5. $M \times \mathbb{R}^2$ possui curvatura isotrópica não-negativa.
6. $M \times \mathbb{S}^2(1)$ possui curvatura isotrópica não-negativa.
7. $M \times \mathbb{R}$ possui curvatura isotrópica não-negativa.
8. M possui curvatura isotrópica não-negativa.
9. M possui operador de curvatura não-negativo.
10. M possui operador de curvatura 2-não-negativo, isto é a soma dos seus dois primeiros autovalores é não-negativa.

Ressaltamos que o operador curvatura $\mathcal{R}$ é dito não-negativo se seus autovalores são não-negativos. Além disso, se a soma de seus dois primeiros autovalores for não-negativa, então $\mathcal{R}$ é dito 2-não negativo. Ressaltamos ainda, conforme provado por Brendle, que se

$$K_{13} + \lambda^2 K_{14} + \mu^2 K_{23} + \lambda^2 \mu^2 K_{24} K_{24} - 2R_{1234} \leq 0,$$

então $M \times \mathbb{R}^2$ possui curvatura isotrópica não-negativa.

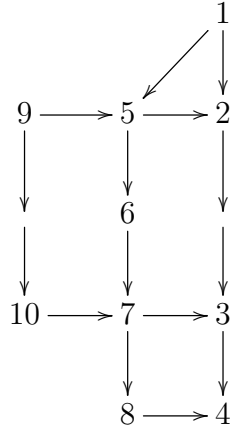


Figura 2.1: Implicações lógicas entre condições de curvaturas.

Utilizaremos o Teorema 2.4 de Noronha e os Teoremas 2.5 e 2.6 obtidos por Brendle e Schoen para obter a seguinte classificação.

Teorema 2.7 *Seja M^4 uma subvariedade Riemanniana compacta de dimensão 4, em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^n$ de dimensão n , satisfazendo*

$$\|\alpha\|^2 \leq 2\left(\overline{K}_{min} + K_{min}^\perp\right) + \frac{16}{3}H^2 - \frac{R}{6}. \quad (2.16)$$

Então as seguintes afirmações ocorrem:

1. *Se M^4 é orientada, $\Delta W = 0$ (veja [64] para detalhes sobre esta condição) e $\|W^-\|^2 \geq -(\omega_1^-)\frac{R}{2}$, então uma das seguintes afirmações ocorre:*
 - (a) *M^4 é conformemente equivalente a $\mathbb{S}^4$, seu recobrimento universal é ou $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ com suas métricas canônicas.*
 - (b) *O recobrimento universal de M^4 é $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, onde $\mathbb{S}^2$ possui curvatura constante.*
 - (c) *M^4 é isométrica a $\mathbb{CP}^2$.*
 - (d) *M^4 é anti-auto-dual e negativa definite.*
 - (e) *M^4 é auto-dual e a curvatura escalar não é constante.*
2. *Se M^4 é localmente irredutível, então uma das seguintes afirmações ocorre:*
 - (a) *M^4 é difeomorfa a um espaço forma esférico.*

2.3 Subvariedades com limitação na norma da segunda forma

(b) O recobrimento universal de M^4 é uma variedade Kähler biholomorfa a $\mathbb{CP}^2$.

(c) O recobrimento universal de M^4 é isométrico a um espaço simétrico compacto.

3. Se a desigualdade (2.16) é estrita, então M^4 é difeomorfa a um espaço forma esférico. Além disso, se M^4 é simplesmente conexa, então M^4 é difeomorfa a $\mathbb{S}^4$.

Demonstração: Inicialmente, tratamos da primeira afirmação. Para tal, seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ um referencial ortonormal em M^4 e sejam $\lambda, \mu \in [-1, 1]$. Além disso, considere

$$B = K_{13} + \lambda^2 K_{14} + \mu^2 K_{23} + \lambda^2 \mu^2 K_{24} - 2\lambda\mu R_{1234}.$$

Usando a equação de Gauss chegamos a

$$\begin{aligned} B = & \bar{K}_{13} + \sum_{\beta} [h_{11}^{\beta} h_{33}^{\beta} - (h_{13}^{\beta})^2] + \lambda^2 \{ \bar{K}_{14} + \sum_{\beta} [h_{11}^{\beta} h_{44}^{\beta} - (h_{14}^{\beta})^2] \} - 2\lambda\mu R_{1234} \\ & + \mu^2 \{ \bar{K}_{23} + \sum_{\beta} [h_{22}^{\beta} h_{33}^{\beta} - (h_{23}^{\beta})^2] \} + \lambda^2 \mu^2 \{ \bar{K}_{24} + \sum_{\beta} [h_{22}^{\beta} h_{44}^{\beta} - (h_{24}^{\beta})^2] \}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Agora, afirmamos que

$$1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 \mu^2 \geq 4\lambda\mu. \quad (2.18)$$

De fato, aplicando a desigualdade de Cauchy obtemos $\lambda^2 + \mu^2 \geq 2\lambda\mu$. Além disso, não é difícil mostrar que $(\lambda\mu)^2 - 2\lambda\mu + 1 \geq 0$, para todo λ e μ , o que fornece (2.18). Dando continuidade, usamos as desigualdades (2.17), (2.13) e (2.18) para obter

$$\begin{aligned} B \geq & (1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 \mu^2) \bar{K}_{\min} - 4\lambda\mu \frac{1}{3} \left(\frac{R}{4} - 3K_{\min}^{\perp} \right) \\ & + \sum_{\beta} \{ h_{11}^{\beta} h_{33}^{\beta} - (h_{13}^{\beta})^2 + \lambda^2 \mu^2 [h_{22}^{\beta} h_{44}^{\beta} - (h_{24}^{\beta})^2] \\ & + \mu^2 [h_{22}^{\beta} h_{33}^{\beta} - (h_{23}^{\beta})^2] + \lambda^2 [h_{11}^{\beta} h_{44}^{\beta} - (h_{14}^{\beta})^2] \} \\ \geq & (1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 \mu^2) \left[\bar{K}_{\min} - \frac{1}{3} \left(\frac{R}{4} - 3K_{\min}^{\perp} \right) \right] \\ & + \sum_{\beta} \{ h_{11}^{\beta} h_{33}^{\beta} + \lambda^2 \mu^2 h_{22}^{\beta} h_{44}^{\beta} + \mu^2 h_{22}^{\beta} h_{33}^{\beta} + \lambda^2 h_{11}^{\beta} h_{44}^{\beta} \} \\ & - \sum_{\beta} \{ (h_{13}^{\beta})^2 + \lambda^2 (h_{14}^{\beta})^2 + \mu^2 (h_{23}^{\beta})^2 + \lambda^2 \mu^2 (h_{24}^{\beta})^2 \}. \end{aligned}$$

Agora, (veja a equação (4.8) em [35]) nós já sabemos que, para todo $m \neq l$, temos

$$h_{mm}^{\beta} h_{ll}^{\beta} \geq \sum_{i < j} (h_{ij}^{\beta})^2 + \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^4 h_{ii}^{\beta} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} (h_{ij}^{\beta})^2. \quad (2.19)$$

Além disso, como já foi definido

$$\|\alpha\|^2 = \sum_{\beta, i, j} (h_{ij}^\beta)^2 \text{ e } H^2 = \frac{1}{16} \left(\sum_{\beta, i} h_{ii}^\beta \right)^2.$$

A partir daí utilizando a inequação (2.19) obtemos

$$\sum_{\beta} h_{mm}^\beta h_{ll}^\beta \geq \sum_{\beta, i < j} (h_{ij}^\beta)^2 + \frac{8}{3} H^2 - \frac{\|\alpha\|^2}{2}.$$

Portanto, um cálculo simples nos garante

$$\begin{aligned} B &\geq (1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 \mu^2) [\bar{K}_{\min} - \frac{1}{3} (\frac{R}{4} - 3K_{\min}^\perp)] \\ &\quad + (1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 \mu^2) \left(\sum_{\beta, i < j} (h_{ij}^\beta)^2 + \frac{8}{3} H^2 - \frac{\|\alpha\|^2}{2} \right) \\ &\quad - \sum_{\beta} [(h_{13}^\beta)^2 + \lambda^2 \mu^2 (h_{24}^\beta)^2 + \mu^2 (h_{23}^\beta)^2 + \mu^2 h_{14}^\beta]^2 \\ &\geq \frac{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 \mu^2)}{2} [2\bar{K}_{\min} - (\frac{R}{6} - 2K_{\min}^\perp) + \frac{16}{3} H^2 - \|\alpha\|^2] \\ &\quad + (1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 \mu^2) \left\{ \sum_{\beta, i < j} (h_{ij}^\beta)^2 - \sum_{\beta} [(h_{13}^\beta)^2 + (h_{24}^\beta)^2 + (h_{23}^\beta)^2 + (h_{14}^\beta)^2] \right\} \\ &= \frac{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 \mu^2)}{2} [2\bar{K}_{\min} - (\frac{R}{6} - 2K_{\min}^\perp) + \frac{16}{3} H^2 - \|\alpha\|^2] \\ &\quad + (1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 \mu^2) \left[\sum_{\beta} (h_{12}^\beta)^2 + (h_{34}^\beta)^2 \right]. \end{aligned}$$

Isto significa que

$$B \geq \frac{(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 \mu^2)}{2} [2\bar{K}_{\min} - (\frac{R}{6} - 2K_{\min}^\perp) + \frac{16}{3} H^2 - \|\alpha\|^2].$$

Daí, nossa afirmação assegura que

$$\|\alpha\|^2 \leq 2 \left(\bar{K}_{\min} + K_{\min}^\perp \right) + \frac{16}{3} H^2 - \frac{R}{6},$$

e, então, temos imediatamente que $B \geq 0$. Mas, de acordo com um teorema obtido por Brendle e Schoen, $B \geq 0$ implica que $M \times \mathbb{R}^2$ possui curvatura isotrópica não-negativa; para mais detalhes veja Teoremas 4.4 - 4.6 em [12] (veja também a discussão na p.70 em [12]). Disto, deduzimos que M^4 possui curvatura seccional não-negativa (veja o diagrama na Figura 2.1 ou [12], Seção 4, p. 71 - 72). Agora, usamos o Teorema 2.4 obtido por Noronha, o qual foi provado em [64], para obter a primeira afirmação.

2.3 Subvariedades com limitação na norma da segunda forma

A seguir, tratamos do nosso segundo caso. Usando a primeira parte da demonstração concluímos que a hipótese

$$\|\alpha\|^2 \leq 2\left(\overline{K}_{\min} + K_{\min}^{\perp}\right) + \frac{16}{3}H^2 - \frac{R}{6}$$

nos garante a desigualdade

$$R_{1313} + \lambda^2 R_{1414} + \mu^2 R_{2323} + \lambda^2 \mu^2 R_{2424} - 2\lambda\mu R_{1234} \geq 0,$$

isto é, $M \times \mathbb{R}^2$ possui curvatura isotrópica não-negativa (para mais detalhes veja a Seção 4 em [12]). Uma vez que M^4 é localmente irredutível, podemos aplicar o Teorema 2.6 de Brendle e Schoen para concluirmos a prova do segundo caso.

Finalmente, vamos provar a terceira afirmação. Antes de tudo, vamos considerar

$$C = K_{13} + \lambda^2 K_{14} + K_{23} + \lambda^2 K_{24} - 2\lambda R_{1234}.$$

Note que, da equação de Gauss, temos

$$\begin{aligned} C &= \overline{K}_{13} + \sum_{\beta} [h_{11}^{\beta} h_{33}^{\beta} - (h_{13}^{\beta})^2] + \lambda^2 \{ \overline{K}_{14} + \sum_{\beta} [h_{11}^{\beta} h_{44}^{\beta} - (h_{14}^{\beta})^2] \} - 2\lambda R_{1234} \\ &\quad + \{ \overline{K}_{23} + \sum_{\beta} [h_{22}^{\beta} h_{33}^{\beta} - (h_{23}^{\beta})^2] \} + \lambda^2 \{ \overline{K}_{24} + \sum_{\beta} [h_{22}^{\beta} h_{44}^{\beta} - (h_{24}^{\beta})^2] \} \\ &\geq (2 + 2\lambda^2) \overline{K}_{\min} + \sum_{\beta} [h_{11}^{\beta} h_{33}^{\beta} - (h_{13}^{\beta})^2] + \lambda^2 \left[\sum_{\beta} [h_{11}^{\beta} h_{44}^{\beta} - (h_{14}^{\beta})^2] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\beta} [h_{22}^{\beta} h_{33}^{\beta} - (h_{23}^{\beta})^2] \right] + \lambda^2 \sum_{\beta} [h_{22}^{\beta} h_{44}^{\beta} - (h_{24}^{\beta})^2] - 2\lambda R_{1234}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Relembrando que $|R_{1234}| \leq \frac{2}{3}(\frac{R}{4} - 3K_{\min}^{\perp})$ e usando (2.19) em (2.20) obtemos

$$\begin{aligned} C &\geq (2 + 2\lambda^2) \left[\overline{K}_{\min} + \sum_{\beta, i < j} (h_{ij}^{\beta})^2 + \frac{8}{3}H^2 - \frac{\|\alpha\|^2}{2} \right] - 4\lambda \left(\frac{R}{4} - 3K_{\min}^{\perp} \right) \\ &\quad - (h_{13}^{\beta})^2 - (h_{23}^{\beta})^2 - \lambda^2 (h_{14}^{\beta})^2 - \lambda^2 (h_{24}^{\beta})^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $2 + 2\lambda^2 \geq 4\lambda$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, deduzimos que

$$\begin{aligned} C &\geq (2 + 2\lambda^2) \left[\overline{K}_{\min} + \frac{8}{3}H^2 - \frac{\|\alpha\|^2}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{R}{4} - 3K_{\min}^{\perp} \right) \right] \\ &\quad + (2 + 2\lambda^2) \left[\sum_{\beta} \left(\sum_{i < j} (h_{ij}^{\beta})^2 - (h_{13}^{\beta})^2 - (h_{23}^{\beta})^2 - (h_{14}^{\beta})^2 - (h_{24}^{\beta})^2 \right) \right] \\ &\geq \frac{(2 + 2\lambda^2)}{2} \left[2\overline{K}_{\min} + \frac{16}{3}H^2 - \left(\frac{R}{6} - 2K_{\min}^{\perp} \right) - \|\alpha\|^2 \right]. \end{aligned}$$

2.3 Subvariedades com limitação na norma da segunda forma

Usando nossa hipótese chegamos a

$$K_{13} + \lambda^2 K_{14} + K_{23} + \lambda^2 K_{24} - 2\lambda R_{1234} > 0, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, basta aplicarmos o Teorema 2.5 de Brendle para deduzir que o fluxo de Ricci normalizado com a métrica inicial g_0

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)} + \frac{2}{n} r_{g(t)} g(t)$$

existe para todo tempo e além disso, converge para uma métrica de curvatura constante quando $t \rightarrow \infty$, onde $r_{g(t)}$ denota a média da curvatura escalar de $g(t)$. Assim, M^4 é difeomorfa a um espaço forma esférico. Em particular, se M é simplesmente conexa, então é difeomorfa a uma esfera $\mathbb{S}^4$. Isto finaliza a prova do teorema. ■

Capítulo 3

Rigidez de variedades compactas de dimensão 4 com curvatura biortogonal limitada

Neste capítulo estudamos variedades compactas de dimensão 4 com curvatura seccional positiva. Mais especificamente, usamos a noção de curvatura biortogonal para obter uma condição de pinching sobre tal curvatura a qual garante que uma variedade compacta de dimensão 4 seja definite.

3.1 Breve histórico e alguns resultados existentes

Em 1951, Rauch [65] provou que uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa que é δ -pinçada ($\delta \approx 0,75$) é homeomorfa a uma esfera $\mathbb{S}^n$. Depois, Berger [2] obteve o famoso *Teorema da Esfera Topológica* o qual diz que uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa, cujas curvaturas seccionais estão todas no intervalo $(\frac{1}{4}, 1]$ é necessariamente homeomorfa a uma esfera. Recentemente, Brendle e Schoen [14] melhoraram o resultado de Berger mostrando que, sob as mesmas condições, uma tal variedade deve ser difeomorfa a uma esfera, resultado que ficou conhecido como o *Teorema da Esfera Diferenciável* (para mais detalhes veja [13]). Motivado pelo Teorema da Esfera Topológica, Berger [3] provou que, para n par, existe um número real $\varepsilon(n)$ (cujo valor é desconhecido) tal que se M^n é $(\frac{1}{4} - \varepsilon(n))$ -pinçada, então é homeomorfa a $\mathbb{S}^n$ ou

3.1 Breve histórico e alguns resultados existentes

difeomorfa a um espaço forma esférico de posto 1. Esses resultados estimularam muitos trabalhos. Nas últimas décadas muitos matemáticos têm estudado variedades Riemannianas compactas de dimensão 4, sob alguma condição de pinching sobre a curvatura. Aqui, estudaremos variedades Riemannianas compactas de curvatura seccional positiva.

Para fixar a notação é importante recordar que em uma variedade Riemanniana (M^4, g) compacta e orientada de dimensão 4, o fibrado das 2-formas, denotado por $\Lambda^2 M$, se decompõe como

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M, \quad (3.1)$$

onde $\Lambda^\pm M$ é o ± 1 -autoespaço do operador estrêla de Hodge $*$, associado ao autovalor ± 1 . Além disso, (3.1) nos diz que o espaço das 2-formas harmônicas $H^2(M^4; \mathbb{R})$ pode ser decomposto como

$$H^2(M^4; \mathbb{R}) = H^+(M^4; \mathbb{R}) \oplus H^-(M^4; \mathbb{R}),$$

onde $H^\pm(M^4; \mathbb{R})$ é o espaço das 2-formas harmônicas positivas e negativas, respectivamente. Esta decomposição nos diz que o segundo número de Betti b_2 de M^4 pode ser escrito como

$$b_2 = b^+ + b^-,$$

onde $b^\pm = \dim H^\pm(M^4; \mathbb{R})$. Em particular, M^4 é dita ser *positiva definite* (respectivamente, *negativa definite*) quando $b^- = 0$ (respectivamente, $b^+ = 0$). Caso contrário, M^4 será dita *indefinite*. Para mais detalhes indicamos [4].

Bourguignon [8] mostrou que uma variedade Riemanniana compacta e orientada, $\frac{4}{19}$ -pinçada, de dimensão 4, é sempre definite. Além disso, Ville [75] mostrou que sob essas condições temos

$$|\tau(M)| < \frac{1}{2}\chi(M) \quad (3.2)$$

onde $\tau(M)$ é a assinatura e $\chi(M)$ é a característica de Euler de M ; pelo teorema de Synge M^4 é simplesmente conexa e um argumento padrão nos permite concluir que o segundo número de Betti $b_2 \leq 1$. Assim, usando o Teorema de classificação de Freedman [34] conclui-se que M^4 é topologicamente uma esfera $\mathbb{S}^4$ ou um espaço projetivo $\mathbb{CP}^2$. Em [69], Seaman provou que uma variedade Riemanniana δ -pinçada, de dimensão 4, fechada e conexa, deve ser definite desde que

$$\delta \geq \frac{1}{\left(3(1 + 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}}/5^{\frac{1}{2}})\right)^{\frac{1}{2}} + 1} \approx 0.1714.$$

Além disso, seguindo as ideias desenvolvidas por Ville [75], Ko [45] provou que, sob esta condição, M^4 é topologicamente $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{CP}^2$.

3.2 Curvatura biortogonal e variedades definite

Nesta seção vamos usar a noção de curvatura biortogonal para obter uma condição de pinching sobre tal curvatura que garanta que uma variedade compacta de dimensão 4 seja definite.

Como uma tentativa de compreender variedades Riemannianas de dimensão 4 com curvatura seccional positiva, é natural investigar outras condições de positividade sobre a curvatura.

Inspirados pelo estudo de rigidez de variedades de dimensão 4, Ribeiro e Costa [26], bem como Ribeiro [66], usaram a noção de curvatura seccional biortogonal para obter resultados de rigidez para variedades de dimensão 4 compactas com tensor de Weyl harmônico. Em particular, o principal resultado obtido em [66] por Ribeiro, implica que uma variedade de dimensão 4, compacta, Einstein, com curvatura de Ricci normalizada ($Ric = 1$) e curvatura seccional $K > \frac{1}{12}$ deve ser isométrica a $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{CP}^2$. Baseado em técnicas desenvolvidas em [66], usamos a noção de curvatura (seccional) biortogonal para estabelecer o resultado principal deste capítulo. No entanto, antes de enunciá-lo, necessitamos de alguns pré-requisitos que serão úteis na prova do nosso resultado. Começamos recordando que em uma variedade (M^4, g) de dimensão 4, orientada, o tensor de Weyl é um endomorfismo do fibrado das 2-formas $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ tal que $\mathcal{W} = \mathcal{W}^+ \oplus \mathcal{W}^-$, onde $\mathcal{W}^\pm : \Lambda^\pm \rightarrow \Lambda^\pm$ são as chamadas partes auto-dual e anti-auto-dual de $\mathcal{W}$. Agora fixamos um ponto e diagonalizamos $\mathcal{W}^\pm$ de modo que $\omega_i^\pm, i = 1 \leq i \leq 3$, sejam os seus respectivos autovalores. Em particular, satisfazem

$$\omega_1^\pm \leq \omega_2^\pm \leq \omega_3^\pm \text{ e } \omega_1^\pm + \omega_2^\pm + \omega_3^\pm = 0. \quad (3.3)$$

Além disso, para os nossos propósitos, recordamos que, como posto em [26] e [66], a definição de curvatura biortogonal fornece as seguintes identidades (1)

$$K_{\min}^\perp = \frac{\omega_1^+ + \omega_1^-}{2} + \frac{R}{12} \quad (3.4)$$

e

$$K_{\max}^\perp = \frac{\omega_3^+ + \omega_3^-}{2} + \frac{R}{12}, \quad (3.5)$$

3.2 Curvatura biortogonal e variedades definite

onde $K_{\min}^{\perp} = \min\{K^{\perp}(P); P \subset T_p M\}$ e $K_{\max}^{\perp} = \max\{K^{\perp}(P); P \subset T_p M\}$.

Prosseguindo, lembramos que se w é uma 2-forma, então

$$\frac{1}{2}\Delta|w|^2 = \langle \Delta w, w \rangle + |\nabla w|^2 + \langle F(w), w \rangle,$$

onde F é o operador de Weitzenböck dado por

$$\begin{aligned} \langle F(v_1 \wedge v_2), w_1 \wedge w_2 \rangle &= Ric(v_1, w_1)\langle v_2, w_2 \rangle + Ric(v_2, w_2)\langle v_1, w_1 \rangle \\ &\quad - Ric(v_1, w_2)\langle v_2, w_1 \rangle - Ric(v_2, w_1)\langle v_1, w_2 \rangle \\ &\quad + 2\langle R(v_1, v_2)w_1, w_2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde v_i e w_i são vetores tangentes (para mais detalhes veja [46] e [68]). Em particular, se ω é harmônica, temos a bem conhecida fórmula de Weitzenböck

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |\nabla \omega|^2 + \langle F(\omega), \omega \rangle. \quad (3.7)$$

Na sequência, como uma simples modificação da prova de um resultado de Berger [3] (veja também [8] e [46]) para uma variedade Riemanniana δ -pinçada, temos o seguinte lema.

Lema 3.1 *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana compacta e orientada. Então temos:*

$$\langle F(\omega), \omega \rangle \geq 4K_{\min}^{\perp}|\omega|^2 - \frac{1}{3}(R - 12K_{\min}^{\perp})||\omega_+|^2 - |\omega_-|^2|,$$

onde $\omega = \omega_+ + \omega_-$ and $\omega_{\pm} \in \Lambda^{\pm} M$.

Demonstração: Fixemos um ponto $p \in M$ e w uma 2-forma em Λ^2 . Existe uma base ortonormal positivamente orientada $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $T_p M$ satisfazendo $*(e^1 \wedge e^2) = e^3 \wedge e^4$ e tal que

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(|\omega_+| + |\omega_-|)e^1 \wedge e^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(|\omega_+| - |\omega_-|)e^3 \wedge e^4$$

no ponto p . Daí, segue de (3.6) que

$$\begin{aligned} \langle F(\omega), \omega \rangle &= |\omega|^2(K_{12} + K_{14} + K_{23} + K_{24}) - 2R_{1234}(|\omega_+|^2 - |\omega_-|^2) \\ &= 2|\omega|^2(K_{13}^{\perp} + K_{14}^{\perp}) - 2R_{1234}(|\omega_+|^2 - |\omega_-|^2) \\ &\geq 4K_{\min}^{\perp}|\omega|^2 - 2R_{1234}(|\omega_+|^2 - |\omega_-|^2), \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2 Curvatura biortogonal e variedades definite

onde $K_{ij}^\perp$ significa a curvatura biortogonal do plano $e^i \wedge e^j$. Agora, aplicamos a estimativa de Seaman

$$|R_{ijkl}| \leq \frac{2}{3}(K_{\max}^\perp - K_{\min}^\perp)$$

em (3.8) para obter

$$\langle F(\omega), \omega \rangle \geq 4K_{\min}^\perp |\omega|^2 - \frac{4}{3}(K_{\max}^\perp - K_{\min}^\perp)(|\omega_+|^2 - |\omega_-|^2). \quad (3.9)$$

Por outro lado, de (3.3) concluimos que

$$w_3^\pm \leq -2w_1^\pm.$$

Como

$$K_{\max}^\perp \leq \frac{R}{4} - 2K_{\min}^\perp,$$

voltamos em (3.9) para obter

$$\langle F(\omega), \omega \rangle \geq 4K_{\min}^\perp |\omega|^2 - \frac{1}{3}(R - 12K_{\min}^\perp)(|\omega_+|^2 - |\omega_-|^2).$$

Isto finaliza a prova do lema. ■

Agora enunciamos nosso próximo teorema.

Teorema 3.1 *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 4, compacta, orientada e conexa, com curvatura escalar positiva, satisfazendo*

$$K^\perp \geq \frac{R^2}{24(3\lambda_1 + R)},$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano agindo em funções. Então M^4 é definite.

Demonstração: A primeira parte da prova segue as ideias desenvolvidas em por Ribeiro em [66], que foi parcialmente inspirada por Gursky em [38]. Por uma questão de completude incluímos aqui todos os detalhes. Para começar, supomos por contradição que M^4 é indefinite. Neste caso, existem 2-formas harmônicas não-nulas ω_+ e ω_- tais que

$$\int_M \left((|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} - t (|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} \right) dV_g = 0,$$

para algum $\alpha > 0$ (a ser escolhido depois), qualquer $\varepsilon > 0$ e $t = t(\alpha, \varepsilon)$. Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} & \Delta \left((|\omega_+|^2 + \varepsilon)^\alpha + t^2 (|\omega_-|^2 + \varepsilon)^\alpha \right) \\ &= \alpha (|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} \left((|\omega_+|^2 + \varepsilon) \Delta |\omega_+|^2 + (\alpha-1) |\nabla |\omega_+|^2|^2 \right) \\ & \quad + t^2 \alpha (|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} \left((|\omega_-|^2 + \varepsilon) \Delta |\omega_-|^2 + (\alpha-1) |\nabla |\omega_-|^2|^2 \right). \end{aligned}$$

3.2 Curvatura biortogonal e variedades definite

Por uma questão de simplicidade, denotemos

$$U = (|\omega_+|^2 + \varepsilon)^\alpha + t^2(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^\alpha.$$

Como $\omega_\pm$ são harmônicas usamos a fórmula de Weitzenböck (3.7) para obtermos

$$\begin{aligned} \Delta U &= \alpha(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} \left((|\omega_+|^2 + \varepsilon)(2|\nabla\omega_+|^2 + 2\langle F(\omega_+), \omega_+ \rangle) + (\alpha-1)|\nabla|\omega_+|^2|^2 \right) \\ &\quad + t^2\alpha(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} \left((|\omega_-|^2 + \varepsilon)(2|\nabla\omega_-|^2 + 2\langle F(\omega_-), \omega_- \rangle) + (\alpha-1)|\nabla|\omega_-|^2|^2 \right). \end{aligned}$$

Prosseguindo, usamos a desigualdade de Kato refinada (veja [68])

$$|\nabla w|^2 \geq \frac{3}{2}|\nabla|w||^2,$$

para deduzir que

$$\begin{aligned} \Delta U &\geq \alpha(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} \left((|\omega_+|^2 + \varepsilon)(3|\nabla|w_+||^2 + 2\langle F(w_+), w_+ \rangle) + (\alpha-1)|\nabla|w_+|^2|^2 \right) \\ &\quad + t^2\alpha(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} \left((|\omega_-|^2 + \varepsilon)(3|\nabla|w_-||^2 + 2\langle F(w_-), w_- \rangle) + (\alpha-1)|\nabla|w_-|^2|^2 \right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Continuando, calculando-se $|\nabla|\omega_\pm|^2|$ e reorganizando, obtemos

$$|\omega_\pm|^2|\nabla|\omega_\pm|^2|^2 = \frac{1}{4}|\nabla|\omega_\pm|^2|^2. \tag{3.11}$$

Usando (3.11) em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta U &\geq \alpha(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} \left(\frac{3}{4}|\nabla|\omega_+|^2|^2 + (\alpha-1)|\nabla|\omega_+|^2|^2 \right) \\ &\quad + 2\alpha(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\alpha-1} \langle F(\omega_+), \omega_+ \rangle \\ &\quad + t^2\alpha(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} \left(\frac{3}{4}|\nabla|\omega_-|^2|^2 + (\alpha-1)|\nabla|\omega_-|^2|^2 \right) \\ &\quad + 2t^2\alpha(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\alpha-1} \langle F(\omega_-), \omega_- \rangle \\ &= \alpha \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) (|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} |\nabla|\omega_+|^2|^2 + 2\alpha(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\alpha-1} \langle F(\omega_+), \omega_+ \rangle \\ &\quad + t^2\alpha \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) (|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} |\nabla|\omega_-|^2|^2 + 2t^2\alpha(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\alpha-1} \langle F(\omega_-), \omega_- \rangle. \end{aligned}$$

Além disso, não é difícil verificar que

$$\alpha(|\omega_\pm|^2 + \varepsilon)^{\alpha-2} |\nabla|\omega_\pm|^2|^2 = \frac{4}{\alpha} |\nabla(|\omega_\pm|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2,$$

3.2 Curvatura biortogonal e variedades definite

de modo que

$$\begin{aligned}\Delta U \geq & \left(4 - \frac{1}{\alpha}\right) |\nabla(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2 + 2\alpha(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\alpha-1} \langle F(\omega_+), \omega_+ \rangle \\ & + t^2 \left(4 - \frac{1}{\alpha}\right) |\nabla(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2 + 2t^2\alpha(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\alpha-1} \langle F(\omega_-), \omega_- \rangle.\end{aligned}$$

Integrando a expressão acima sobre M^4 obtemos

$$\begin{aligned}0 \geq & \left(4 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_M \left(|\nabla(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2 + t^2 |\nabla(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2 \right) dV_g \\ & + 2\alpha \int_M \left((|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\alpha-1} \langle F(\omega_+), \omega_+ \rangle + t^2 (|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\alpha-1} \langle F(\omega_-), \omega_- \rangle \right) dV_g.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Por outro lado, observamos que

$$\begin{aligned}|\nabla(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2 + t^2 |\nabla(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2 &= \frac{1}{2} \left\{ |\nabla(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} - t |\nabla(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2 \right. \\ &\quad \left. + |\nabla(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} + t |\nabla(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2 \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} |\nabla(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} - t |\nabla(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2|^2.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Da caracterização variacional de λ_1 , o primeiro autovalor do Laplaciano, temos

$$\int_M |\nabla(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} - t |\nabla(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2|^2 dV_g \geq \lambda_1 \int_M \left((|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} - t (|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} \right)^2 dV_g.\tag{3.14}$$

Assim, combinamos (3.13) com (3.14) para deduzir

$$\int_M |\nabla(|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2 + t^2 |\nabla(|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}|^2 dV_g \geq \frac{\lambda_1}{2} \int_M \left((|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} - t (|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} \right)^2 dV_g.\tag{3.15}$$

Agora, substituindo (3.15) em (3.12) temos, para $\alpha \geq \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned}0 \geq & \frac{1}{\alpha} \left(4 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\lambda_1}{4} \int_M \left((|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} - t (|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}} \right)^2 dV_g \\ & + \int_M \left((|\omega_+|^2 + \varepsilon)^{\alpha-1} \langle F(\omega_+), \omega_+ \rangle + t^2 (|\omega_-|^2 + \varepsilon)^{\alpha-1} \langle F(\omega_-), \omega_- \rangle \right) dV_g.\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\begin{aligned}0 \geq & \frac{1}{\alpha} \left(4 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\lambda_1}{4} \int_M (|\omega_+|^\alpha - t |\omega_-|^\alpha)^2 dV_g \\ & + \int_M (|\omega_+|^{2\alpha-2} \langle F(\omega_+), \omega_+ \rangle + t^2 |\omega_-|^{2\alpha-2} \langle F(\omega_-), \omega_- \rangle) dV_g.\end{aligned}$$

3.2 Curvatura biortogonal e variedades definite

Além disso, escolhendo $\alpha = \frac{1}{2}$, que maximiza $\frac{1}{4\alpha} \left(4 - \frac{1}{\alpha}\right)$, temos

$$0 \geq \lambda_1 \int_M \left(|\omega_+|^{\frac{1}{2}} - t|\omega_-|^{\frac{1}{2}} \right)^2 dV_g + \int_M \left(|\omega_+|^{-1} \langle F(\omega_+), \omega_+ \rangle + t^2 |\omega_-|^{-1} \langle F(\omega_-), \omega_- \rangle \right) dV_g. \quad (3.16)$$

Agora, fazendo $X_+ = |\omega_+|^{-\frac{1}{2}} \omega_+$ e $X_- = t|\omega_-|^{-\frac{1}{2}} \omega_-$, temos que $X_{\pm} \in \Lambda^{\pm}$. Além disso, $|X_+| = |\omega_+|^{\frac{1}{2}}$ e $|X_-| = t|\omega_-|^{\frac{1}{2}}$. Assim, considerando $X = X_+ + X_-$ em (3.16) obtemos

$$0 \geq \int_M \left\{ \lambda_1 (|X_+| - |X_-|)^2 + \langle F(X), X \rangle \right\} dV_g.$$

Pelo Lema 3.1 concluímos que

$$0 \geq \int_M \left\{ \lambda_1 (|X_+| - |X_-|)^2 + 4K_{\min}^{\perp} |X|^2 - \frac{1}{3} (R - 12K_{\min}^{\perp}) (|X_+|^2 - |X_-|^2) \right\} dV_g.$$

Como $|X_+| = |\omega_+|^{\frac{1}{2}}$ e $|X_-| = t|\omega_-|^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned} 0 \geq & \int_M \left\{ \lambda_1 (|\omega_+| - 2t|\omega_+|^{\frac{1}{2}}|\omega_-|^{\frac{1}{2}} + t^2|\omega_-|) + 4K_{\min}^{\perp} |\omega_+| \right. \\ & \left. + 4K_{\min}^{\perp} t^2 |\omega_-| - \frac{1}{3} (R - 12K_{\min}^{\perp}) (|\omega_+| - t^2|\omega_-|) \right\} dV_g. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agora observamos que o integrando de (3.17) é uma função quadrática em t . Em particular, por simplicidade, podemos escrever

$$\begin{aligned} P(t) = & \lambda_1 (|\omega_+| - 2t|\omega_+|^{\frac{1}{2}}|\omega_-|^{\frac{1}{2}} + t^2|\omega_-|) + 4K_{\min}^{\perp} |\omega_+| \\ & + 4K_{\min}^{\perp} t^2 |\omega_-| - \frac{1}{3} (R - 12K_{\min}^{\perp}) (|\omega_+| - t^2|\omega_-|). \end{aligned}$$

Assim, dado $p \in M$, consideramos

$$A = \{t; |\omega_+| \geq t^2|\omega_-| \text{ em } p\} \text{ e } B = \{t; |\omega_+| < t^2|\omega_-| \text{ em } p\}.$$

Note que em A temos

$$P(t) = \left[\lambda_1 - \frac{R}{3} + 8K_{\min}^{\perp} \right] |\omega_+| - 2\lambda_1 |\omega_+|^{\frac{1}{2}} |\omega_-|^{\frac{1}{2}} t + \left[\lambda_1 + \frac{R}{3} \right] |\omega_-| t^2 \quad (3.18)$$

e em B

$$P(t) = \left[\lambda_1 + \frac{R}{3} \right] |\omega_+| - 2\lambda_1 |\omega_+|^{\frac{1}{2}} |\omega_-|^{\frac{1}{2}} t + \left[\lambda_1 - \frac{R}{3} + 8K_{\min}^{\perp} \right] |\omega_-| t^2. \quad (3.19)$$

Em ambos os casos, o discriminante Δ de $P(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\lambda_1^2 |\omega_+| |\omega_-| - 4 \left[\lambda_1 - \frac{R}{3} + 8K_{\min}^{\perp} \right] \left[\lambda_1 + \frac{R}{3} \right] |\omega_+| |\omega_-| \\ &= \frac{4}{9} |\omega_+| |\omega_-| (-72\lambda_1 K_{\min}^{\perp} + R^2 - 24K_{\min}^{\perp} R). \end{aligned}$$

3.2 Curvatura biortogonal e variedades definite

Portanto, sob a condição $K^\perp \geq \frac{R^2}{24(3\lambda_1 + R)}$, concluímos que $\Delta \leq 0$. Mas, veja que se $P(t)$ é dado por (3.18) obtemos

$$[\lambda_1 + \frac{R}{3}]|\omega_-| \geq 0.$$

Por outro lado, se $P(t)$ é dado por (3.19), usando a hipótese, temos

$$[\lambda_1 - \frac{R}{3} + 8K_{\min}^\perp|\omega_-|] \geq [\lambda_1 - \frac{R}{3} + 8\frac{R^2}{24(3\lambda_1 + R)}] = \frac{3\lambda_1^2}{3\lambda_1 + R} \geq 0.$$

Então, em ambos os casos, $P(t) \geq 0$. Como $p \in M$ é arbitrário segue de (3.17) que

$$P(t) \equiv 0.$$

Assim, de (3.18) e (3.19) temos que $[\lambda_1 + \frac{1}{3}R]|\omega_-| = 0$ e $[\lambda_1 + -\frac{R}{3} + 8K_{\min}^\perp]|\omega_-| = 0$. Como $[\lambda_1 + \frac{1}{3}R] > 0$ e $[\lambda_1 + -\frac{R}{3} + 8K_{\min}^\perp] > 0$ deduzimos que $|\omega_-| = 0$, o que é uma contradição. Portanto M^4 é definite e isto conclui a prova do teorema. ■

Como consequência do trabalho de Freedman [34] deduzimos o seguinte corolário.

Corolário 3.1 *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 4, simplesmente conexa e orientada, com curvatura escalar positiva, satisfazendo*

$$K^\perp \geq \frac{R^2}{24(3\lambda_1 + R)},$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador Laplaciano. Então M^4 é homeomorfa a $\mathbb{S}^4$ ou $\mathbb{CP}^2 \# \dots \# \mathbb{CP}^2$ (b_2 vezes).

Capítulo 4

Sólitons Ricci-harmônicos do tipo steady

Neste capítulo estudamos a geometria dos sólitons Ricci-harmônicos completos não-compactos. Mostramos que um sóliton Ricci-harmônico gradiente steady completo não-compacto possui no máximo um fim não-parabólico. Além disso, obtemos estimativas para o crescimento do volume das bolas geodésicas para sólitons Ricci-harmônicos gradiente steady completos não-compactos.

4.1 Algumas observações iniciais

Nas últimas décadas muitos matemáticos têm estudado fluxos geométricos. Dentre tais fluxos destacamos o fluxo de Ricci, que foi introduzido por Hamilton em 1981. O objetivo principal deste fluxo é encontrar métricas Riemannianas com curvatura constante numa dada variedade suave. Esse fluxo desempenhou um papel crucial na solução da famosa Conjectura de Poincaré e tem sido utilizado para estudar vários problemas geométricos. Eells e Sampson [5] introduziram o *fluxo da equação do calor harmônica* que foi usado para obter aplicações harmônicas entre duas variedades.

Müller introduziu em [57, 58], o fluxo de Ricci acoplado com o *fluxo da equação do calor harmônica* que é chamado simplesmente de *fluxo Ricci-harmônico*. Mais precisamente, o fluxo Ricci-harmônico é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}g = -2Ric + 2\alpha \nabla \phi \otimes \nabla \phi, \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi = \tau_g \phi, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\phi : (M, g(t)) \rightarrow (N, h)$ é uma aplicação entre duas variedades Riemannianas, $\tau_{g(t)} = \text{tr}(\nabla d\phi)$ e α denota a constante não-negativa que depende do tempo, isto é, $\alpha = \alpha(t)$. Müller foi capaz de provar a existência de solução em *short-time* para este fluxo por um método similar ao *trick DeTurck's*. Chen e Zhu [22] provaram que se a curvatura de Ricci é uniformemente limitada sob o fluxo Ricci-harmônico em uma variedade completa para $t \in [0, T)$, então o fluxo Ricci-harmônico pode ser estendido além do tempo T . Uma versão do teorema de compacidade de Hamilton para o fluxo Ricci-harmônico foi provado por Williams [83].

É bem conhecido que o fluxo Ricci-harmônico é menos singular que o fluxo de Ricci de Hamilton. Em [54], List considerou um caso especial de fluxo Ricci-harmônico com variedade alvo $N = \mathbb{R}$, o qual é chamado de fluxo de Ricci estendido. Em particular, ele mostrou que o fluxo de Ricci estendido possui algumas aplicações em Relatividade geral. Para uma melhor compreensão sobre o assunto sugerimos [33, 53, 54, 57, 59].

É importante lembrar que uma solução do fluxo Ricci-harmônico que evolui sob uma família de difeomorfismos a um parâmetro em uma dada variedade M^m e *scalings* é chamada de *sóliton*.

Definição 4.1 A quintupla $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f, \lambda)$ é chamada *sóliton Ricci-harmônico gradiente* se existe uma função suave f definida em M , uma constante λ e uma aplicação $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ satisfazendo o seguinte sistema

$$\begin{cases} Ric + \nabla^2 f - \alpha \nabla \phi \otimes \nabla \phi = \lambda g, \\ \tau_g \phi = \langle \nabla \phi, \nabla f \rangle, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde α é uma constante não-negativa, $\nabla^2 f$ representa a Hessiana de f e Ric é o tensor curvatura de Ricci de M .

Por simplicidade, escrevemos $Ric_\phi = Ric - \alpha \nabla \phi \otimes \nabla \phi$, bem como seu traço por $R_\phi = R - \alpha |\nabla \phi|^2$, onde R é a curvatura escalar de M . Seguindo a terminologia dos sólitons de Ricci, um sóliton Ricci-harmônico é chamado *expanding*, *steady* ou *shrinking*, respectivamente, se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$. Além disso, se a função potencial f for

constante em (4.2), então o sóliton é dito Einstein-harmônico. Em tal caso, dizemos que o sóliton é *trivial*, caso contrário será *não-trivial*. Alguns exemplos de sólitons Ricci-harmônicos gradiente podem ser encontrados em [53, 57, 83]. Destacamos também que se ϕ é constante, a equação (4.2) reduz-se àquela associada a um sóliton de Ricci gradiente. Vale ressaltar que sólitons de Ricci modelam a formação de singularidades no fluxo de Ricci, veja [18] para mais detalhes.

Deve-se destacar que qualquer sóliton Ricci-harmônico gradiente steady ou expanding compacto é trivial (cf. [57, 83]). Além disso, todo Ricci-harmônico gradiente shrinking compacto tem $R_\phi \geq 0$. Em [74], Tadano apresenta alguns resultados de rigidez para sólitons Ricci-harmônicos gradientes compactos. Ele também forneceu um limite inferior para o diâmetro de tais sólitons. Yang e Shen [80] obtiveram uma estimativa de crescimento de volume para sólitons Ricci-harmônicos shrinking completos não-compactos. Depois disso, Wang [82] obteve uma estimativa inferior para a curvatura escalar bem como estimativas de crescimento para a função potencial. Veja [53, 57, 58, 82, 83] e [80] para mais detalhes e resultados relacionados.

Aqui, focamos nos sólitons Ricci-harmônicos gradiente steady completos não-compactos. Neste sentido, é essencial recordarmos algumas terminologias bem conhecidas na literatura. Primeiramente, consideraremos um subconjunto compacto D de uma variedade Riemanniana completa não-compacta M^m . Assim, gostaríamos de lembrar que um *fim* de M^m em relação a D é uma componente conexa ilimitada de $M^m \setminus D$. O número de fins com respeito a D é o número de componentes ilimitadas de $M^m \setminus D$. Em particular, dizemos que M^m possui um *número finito de fins* se existe $1 \leq k < \infty$, tal que, para qualquer $D \subset M$, o número de fins é no máximo k . Recordamos ainda que uma *função de Green* $G(x, y)$ é uma função definida em $(M \times M) \setminus \{(x, x)\}$ tal que

$$\int_M G(x, y) \Delta u(y) dy = -u(x)$$

para toda função u satisfazendo a condição de bordo de Dirichlet $u|_{\partial M} = 0$. É bem conhecido que cada variedade completa admite uma função de Green. Além disso, uma variedade completa M^m é dita *não-parabólica* se admite uma função de Green simétrica e positiva $G(x, y)$ para o Laplaciano agindo em funções de L^2 . Caso contrário, dizemos que M^n é *parabólica*.

Ao mesmo tempo, também é importante ressaltar que, de Wang [82] (cf. Theorem 2.2

4.2 Alguns resultados importantes

em [82]), existe uma constante indispensável μ em um sólon Ricci-harmônico gradiente steady tal que

$$R_\phi + |\nabla f|^2 = \mu.$$

Em particular, um sólon Ricci-harmônico gradiente steady não-compacto não-trivial possui $R_\phi > 0$ e $R_\phi \neq \mu$ (cf. Lema 4.1, Seção 4.2). A partir de agora, tratamos apenas do caso não-trivial. Neste contexto, inspirado por Munteanu e Sesum [60] bem como Li e Wang [51], vamos investigar a geometria de sólons Ricci-harmônicos steady completos não-compactos satisfazendo a condição $R_\phi \geq \kappa > 0$, para alguma constante κ .

4.2 Alguns resultados importantes

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados que serão úteis para provarmos os resultados desejados. Começamos escrevendo a equação fundamental de um sólon Ricci-harmônico gradiente M^m como segue

$$Ric_\phi + \nabla^2 f = \lambda g. \quad (4.3)$$

Tomando o traço em (4.3) obtemos

$$R_\phi + \Delta f = \lambda m. \quad (4.4)$$

Prosseguindo, lembramos de um resultado obtido por Wang (cf. [82], Teorema 2.2).

Proposição 4.1 (Wang, [82]) *Seja $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f, \lambda)$ um sólon Ricci-harmônico gradiente. Então temos:*

$$\frac{1}{2}\Delta R_\phi = \frac{1}{2}\langle \nabla R_\phi, \nabla f \rangle - \alpha \langle \nabla \phi, \nabla f \rangle^2 - |Ric_\phi - \frac{R_\phi}{m}g|^2 - \frac{1}{m}(R_\phi - m\lambda)R_\phi. \quad (4.5)$$

Além disso, quando $\lambda \neq 0$, adicionando alguma constante a f , deduzimos

$$R_\phi + |\nabla f|^2 - 2\lambda f = 0. \quad (4.6)$$

Por outro lado, se $\lambda = 0$, então temos

$$R_\phi + |\nabla f|^2 = \mu, \quad (4.7)$$

para alguma constante μ .

4.2 Alguns resultados importantes

Deve ser enfatizado que cada s3lton Ricci-harm3nico steady completo n3o-trivial possui constante positiva μ (cf. [82], Corol3rio 4.3). Destacamos ainda que estimativas inferiores e superiores para a curvatura escalar desempenham um papel crucial no estudo das propriedades geom3tricas. Neste sentido, Wang obteve as seguintes estimativas que s3o utilizadas nas provas dos resultados principais.

Lema 4.1 (Wang, [82]) *Seja $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f, \lambda)$ um s3lton Ricci-harm3nico gradiente completo. Ent3o, temos as seguintes afirma33es:*

1. *Se $\lambda \geq 0$, ent3o $R_\phi \geq 0$.*
2. *Se $\lambda \leq 0$, ent3o $R_\phi \geq m\lambda$. Em particular, $R_\phi > m\lambda$ a menos que o s3lton Ricci-harm3nico gradiente seja trivial.*

Observa33o 4.1 *Note que, do Lema 4.1 bem como da equa33o (4.7), 3 f3cil checar que um s3lton Ricci-harm3nico gradiente steady n3o-compacto possui $R_\phi > 0$ e $R_\phi \neq \mu$.*

Prosseguindo, vamos recordar agora a defini33o da desigualdade de Poincar3 com peso.

Defini33o 4.2 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa de dimens3o n . Dizemos que M satisfaz a desigualdade de Poincar3 com peso se a desigualdade*

$$\int_M \rho(x) \phi^2 dV \leq \int_M |\nabla \phi|^2 dV$$

3 v3lida para qualquer fun33o com suporte compacto $\phi \in C_c^\infty(M)$, onde $\rho(x)$ 3 uma fun33o peso n3o-negativa.

Em conson3ncia com esta defini33o, Peter Li e Jiaping Wang [51] provaram o seguinte teorema que garante uma condi33o suficiente para a validade da desigualdade de Poincar3.

Proposi33o 4.2 *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Se existe uma fun33o n3o-negativa h definida em M , que n3o 3 identicamente nula, satisfazendo*

$$\Delta h(x) \leq -\rho(x)h(x),$$

ent3o a desigualdade

$$\int_M \rho(x) \phi^2 dV \leq \int_M |\nabla \phi|^2 dV$$

3 v3lida para qualquer fun33o com suporte compacto $\phi \in C_c^\infty(M)$.

4.3 Resultados principais

Nesta seção enunciaremos e provaremos os resultados obtidos. Começamos com um resultado de não-parabolicidade para sólitons Ricci-harmônico steady.

Teorema 4.1 *Seja $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f)$ um sólito Ricci-harmônico gradiente steady completo não-compacto tal que $R_\phi \geq \kappa > 0$, para alguma constante κ . Então M é não-parabólica.*

Demonstração: De início, note que, de (4.7), temos

$$R_\phi \leq R_\phi + |\nabla f|^2 = \mu$$

e como $R_\phi \geq \kappa > 0$ chegamos a $\kappa \leq \mu$. Em particular, se $\kappa = \mu$, então f é constante e o sólito é trivial. Portanto, podemos assumir que $\kappa < \mu$. Em seguida, definindo a função $h = e^{\eta f}$, para alguma constante η (a ser escolhida depois), temos

$$\Delta h = [\eta^2(\mu - R_\phi) - \eta R_\phi]h.$$

Assim, como $\mu - \kappa > 0$ nós escolhemos $\eta = \frac{\kappa}{2(\mu - \kappa)}$, que é positiva. Portanto, de acordo com a hipótese sobre R_ϕ , temos que

$$\Delta h \leq -\frac{\kappa^2}{4(\mu - \kappa)}h.$$

Disto, basta utilizarmos a Proposição 4.2 de Peter Li e Jiaping Wang (Proposição 1.1 em [51]) para concluir que

$$\lambda_1(M) \geq \frac{\kappa^2}{4(\mu - \kappa)},$$

onde $\lambda_1(M)$ denota a maior cota inferior do espectro do Laplaciano agindo em funções de L^2 . Então, o princípio variacional para $\lambda_1(M)$ assegura a validade da desigualdade de Poincaré

$$\int_M |\varphi|^2 dV \leq \frac{4(\mu - \kappa)}{\kappa^2} \int_M |\nabla \varphi|^2 dV,$$

para toda função com suporte compacto $\varphi \in C_c^\infty(M)$. Mas, de acordo com um resultado de Li e Wang [51], a validade da desigualdade de Poincaré é equivalente a variedade ser não-parabólica. Isto finaliza a prova do teorema. ■

Seguindo nossa discussão, passamos a estudar o número de fins não-parabólicos. Neste sentido, temos o seguinte resultado.

4.3 Resultados principais

Teorema 4.2 *Seja $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f)$ um sóliton Ricci-harmônico gradiente steady completo não-compacto tal que $R_\phi \geq \kappa > 0$, para alguma constante κ . Suponha que u é uma função harmônica em M com $\int_M |\nabla u|^2 < \infty$. Então u é uma função constante.*

Demonstração: Primeiramente, seja $\psi : M \rightarrow [0, 1]$ uma função *cut-off* tal que $\psi = 1$ em $B_p(r)$ (uma bola geodésica de raio r centrada em algum ponto fixo $p \in M$), $\psi = 0$ fora da bola $B_p(2r)$ e $|\nabla \psi| \leq \frac{C}{r}$, para alguma constante C . Além disso, seja u uma função harmônica em M com energia de Dirichlet finita, isto é, $\int_M |\nabla u|^2 < \infty$. Com essas notações, usamos (4.2) para obtermos

$$\int_M Ric(\nabla u, \nabla u) \psi^2 = - \int_M \nabla_i \nabla_j f \nabla_i u \nabla_j u \psi^2 + \alpha \int_M \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle^2 \psi^2. \quad (4.8)$$

Prosseguindo, como $\Delta u = 0$, temos imediatamente que

$$\begin{aligned} \nabla_i (\nabla_j f \nabla_i u \nabla_j u \psi^2) &= \nabla_i \nabla_j f \nabla_i u \nabla_j u \psi^2 + \nabla_j f \nabla_i u \nabla_i \nabla_j u \psi^2 \\ &\quad + \nabla_j f \nabla_i u \nabla_j u \nabla_i (\psi^2). \end{aligned}$$

Disto, usando integração por partes e (4.8) deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_M Ric(\nabla u, \nabla u) \psi^2 &= \int_M \nabla_j f \nabla_i u \nabla_i \nabla_j u \psi^2 + \int_M \nabla_j f \nabla_i u \nabla_j u \nabla_i (\psi^2) \\ &\quad + \alpha \int_M \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle^2 \psi^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por outro lado, também temos que

$$\begin{aligned} 0 = \int_M \nabla_j (\nabla_i u \nabla_j f \nabla_i u \psi^2) &= 2 \int_M \nabla_j \nabla_i u \nabla_j f \nabla_i u \psi^2 + \int_M |\nabla u|^2 \Delta f \psi^2 \\ &\quad + \int_M |\nabla u|^2 \langle \nabla f, \nabla \psi^2 \rangle, \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$- \int_M \nabla_i \nabla_j u \nabla_j f \nabla_i u \psi^2 = \frac{1}{2} \int_M \Delta f |\nabla u|^2 \psi^2 + \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 \langle \nabla f, \nabla \psi^2 \rangle.$$

Substituindo isto em (4.9) obtemos

$$\begin{aligned} \int_M Ric(\nabla u, \nabla u) \psi^2 &= -\frac{1}{2} \int_M \Delta f |\nabla u|^2 \psi^2 - \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 \langle \nabla f, \nabla \psi^2 \rangle \\ &\quad + \int_M \langle \nabla f, \nabla u \rangle \langle \nabla u, \nabla \psi^2 \rangle + \int_M \alpha \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle^2 \psi^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.3 Resultados principais

Dando continuidade, sendo u harmônica, podemos usar a fórmula de Bôchner juntamente com a desigualdade de Kato para obter

$$\begin{aligned}\Delta|\nabla u|^2\psi^2 &= 2Ric(\nabla u, \nabla u)\psi^2 + 2|\nabla^2 u|^2\psi^2 \\ &\geq 2Ric(\nabla u, \nabla u)\psi^2 + 2|\nabla|\nabla u||^2\psi^2.\end{aligned}$$

Em particular, pelo teorema da divergência deduzimos

$$-\int_M \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla\psi^2 \rangle \geq 2 \int_M Ric(\nabla u, \nabla u)\psi^2 + 2 \int_M |\nabla|\nabla u||^2\psi^2. \quad (4.11)$$

Combinando (4.11) com a equação (4.10), resulta

$$\begin{aligned}-\int_M \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla\psi^2 \rangle &\geq -\int_M \Delta f |\nabla u|^2 \psi^2 - \int_M |\nabla u|^2 \langle \nabla f, \nabla\psi^2 \rangle + 2 \int_M |\nabla|\nabla u||^2\psi^2 \\ &\quad + 2 \int_M \langle \nabla f, \nabla u \rangle \langle \nabla u, \nabla\psi^2 \rangle + 2\alpha \int_M \langle \nabla\phi, \nabla u \rangle^2 \psi^2.\end{aligned}$$

Portanto, reorganizando os termos e usando (4.4) obtemos

$$\begin{aligned}2 \int_M |\nabla|\nabla u||^2\psi^2 + \int_M R_\phi |\nabla u|^2 \psi^2 &\leq -\int_M \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla\psi^2 \rangle + \int_M |\nabla u|^2 \langle \nabla f, \nabla\psi^2 \rangle \\ &\quad - 2 \int_M \langle \nabla f, \nabla u \rangle \langle \nabla u, \nabla\psi^2 \rangle \\ &\quad - 2\alpha \int_M \langle \nabla\phi, \nabla u \rangle^2 \psi^2 \\ &\leq -\int_M \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla\psi^2 \rangle + \int_M |\nabla u|^2 \langle \nabla f, \nabla\psi^2 \rangle \\ &\quad - 2 \int_M \langle \nabla f, \nabla u \rangle \langle \nabla u, \nabla\psi^2 \rangle.\end{aligned} \quad (4.12)$$

É simples verificar que

$$-\int_M \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla\psi^2 \rangle \leq \int_M |\nabla|\nabla u||^2\psi^2 + 4 \int_M |\nabla u|^2 |\nabla\psi|^2.$$

Além disso, já sabemos, a partir de (4.7), que $|\nabla f| \leq \sqrt{\mu}$. Essas informações substituídas em (4.12) asseguram que

$$\int_M |\nabla|\nabla u||^2\psi^2 + \int_M R_\phi |\nabla u|^2 \psi^2 \leq C_1 \int_M |\nabla u|^2 |\nabla\psi|^2.$$

Recordamos agora que $|\nabla\psi| \leq \frac{C}{r}$ e u possui energia total finita. Assim, fazendo $r \rightarrow \infty$ concluimos que $|\nabla|\nabla u||^2 = R_\phi |\nabla u|^2 = 0$ e então $|\nabla u| = C_2$ para alguma constante C_2 . Mas, do Teorema 4.1 nós sabemos que M é não-parabólica e então M possui volume

4.3 Resultados principais

infinito. Agora, como u possui energia total finita obtemos que $C_2 = 0$. Portanto, u é constante em M , como queríamos provar. ■

Uma consequência do Teorema 4.2 é o seguinte corolário.

Corolário 4.1 *Seja $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f)$ um sólito Ricci-harmônico gradiente steady completo não-compacto tal que $R_\phi \geq \kappa > 0$, para alguma constante κ . Então M^m possui no máximo um fim não-parabólico.*

Demonstração: Um resultado clássico de Li e Tam [52] assegura que se uma variedade M possui pelo menos dois fins não-parabólicos, então existe uma função harmônica u em M tal que $\int_M |\nabla u|^2 < \infty$, o que obviamente contradiz o Teorema 4.2. Assim, a prova está finalizada. ■

Antes de prosseguir, lembramos de um resultado clássico obtido por Calabi [16] e Yau [81] o qual assegura que toda variedade Riemanniana completa não-compacta com tensor curvatura de Ricci não-negativo satisfaz

$$Vol(B_p(r)) \geq cr \quad (4.13)$$

para qualquer $r > r_0$ onde r_0 é uma constante positiva e $B_p(r)$ é a bola geodésica de raio r centrada em $p \in M^n$ e c é uma constante que não depende de r . Similarmente, Munteanu e Sesum [60] obtiveram o mesmo tipo de crescimento para sólitons de Ricci gradiente steady completos não-compactos. Agora, nós apresentamos nosso resultado referente ao crescimento das bolas geodésicas para sólitons Ricci-harmônico gradiente completos não-compactos, o qual é similar à estimativa de Calabi-Yau.

Teorema 4.3 *Seja $((M^m, g), (N^n, h), \phi, f)$ um sólito Ricci-harmônico gradiente steady completo não-compacto. Então existem constantes C_0, C_1, C_3 e $r_0 > 0$ tais que para qualquer $r > r_0$*

$$C_1 e^{C_2 \sqrt{r}} \geq Vol(B_p(r)) \geq C_0 r. \quad (4.14)$$

Demonstração: Primeiramente, observe que (4.3) implica $Ric + \nabla^2 f \geq 0$. Além disso, como foi observado previamente, temos $|\nabla f| \leq \sqrt{\mu}$. Assim, basta aplicarmos um teorema de Munteanu e Wang (cf. [61], Teorema 2.3 (a), com $\lambda = 0$) para obtermos a estimativa superior

$$C_1 e^{C_2 \sqrt{r}} \geq Vol(B_p(r)).$$

4.3 Resultados principais

Agora, trataremos da limitação inferior. Para isto, note que se $R_\phi = 0$ podemos usar o Lema 4.1 (2) para concluir que o sóliton é trivial. Portanto, podemos assumir que $R_\phi > 0$. Neste caso, escolhemos $p \in M$ e uma bola $B_p(r_0)$ para um raio fixado $r_0 > 0$ tal que

$$C_0 = \int_{B_p(r_0)} R_\phi,$$

onde C_0 é uma constante positiva. Disto, temos para todo $r \geq r_0$,

$$C_0 = \int_{B_p(r_0)} R_\phi \leq \int_{B_p(r)} R_\phi.$$

Daí, usando (4.4) juntamente com (4.7) obtemos

$$\begin{aligned} C_0 &\leq \int_{B_p(r)} R_\phi = - \int_{B_p(r)} \Delta f \\ &= - \int_{\partial B_p(r)} \frac{\partial f}{\partial \eta} \leq \int_{\partial B_p(r)} |\nabla f| \\ &\leq \sqrt{\mu} \cdot \text{Area}(\partial B_p(r)). \end{aligned}$$

Temos, assim, provado que

$$\text{Area}(\partial B_p(r)) \geq c > 0, \tag{4.15}$$

para uma constante uniforme c . Portanto, integrando (4.15) de r_0 a r temos

$$\text{Vol}(B_p(r)) \geq c(r - r_0) \geq C \cdot r,$$

para todo $r \geq 2r_0$. Isso conclui a prova do teorema. ■

Bibliografia

- [1] Asperti, A., Costa, E., Vanishing of homology groups, Ricci estimate for submanifolds and applications. Kodai Math. J. 24 (2001) 313-328
- [2] Berger, M., Les variétés Riemanniennes 1/4-pincées. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 14 (1960) 161-170
- [3] Berger, M., Sur quelques variétés Riemanniennes suffisamment pincées. Bull. Soc. Math. France 88 (1960) 57-71
- [4] Besse, A., Einstein manifolds, Springer-Verlag, New York (2008)
- [5] Besse, A., Géométrie riemannienne en dimension 4, Cedric - Fernand Nathan Paris (1981)
- [6] Bettiol, R., Positive biorthogonal curvature on $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Proc. of the Amer. Math. Soc. 142 (2014) 4341-4353
- [7] Bettiol, R.: Four-dimensional manifolds with positive biorthogonal curvature. Asian J. Math, to appear (2016)
- [8] Bourguignon, J., La conjecture de Hopf sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Geometrie Riemannienne en dimension 4, Seminaire Arthur Besse, CEDIC Paris (1981) 347-355
- [9] Brendle, S., Einstein manifolds with nonnegative isotropic curvature are locally symmetric. Duke Math. J. 151 (2010) 1-21
- [10] Brendle S., A general convergence result for the Ricci flow in higher dimensions. Duke Math. J. 145 MR 2462114 Zbl 1161.53052 (2008) 585-601
- [11] Brendle S., Schoen R., Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures. Acta Math., MR 2386107 (2008) 1-13

- [12] Brendle S., Schoen R., Sphere theorems in geometry, Surveys in differential geometry. Vol. XIII. Geometry, analysis, and algebraic geometry: forty years of the Journal of Differential Geometry, 49-4, Surv. Differ. Geom., 13, Int. Press, Somerville, MA (2009)
- [13] Brendle, S. and Schoen, R., Curvature, sphere theorems, and the Ricci flow. Bull. of the Amer. Math. Soc. 48 (2010) 1-32
- [14] Brendle, S. and Schoen, R.: Manifolds with $1/4$ -pinched curvature are space forms. J. Amer. Math. Soc. 22 (2009) 287-307
- [15] Böhm, C., Wilking, B., Manifolds with positive curvature operators are space forms. Ann. of Math. (2) 167 (2008) 1079-1097
- [16] Calabi, E., On manifolds with non-negative Ricci curvature II. Notices Amer. Math. Soc., 22 A205 (1975)
- [17] Calderbank, D., Gauduchon, P., Herzlich, M., Refined Kato inequalities and conformal weights Riemannian geometry. J. Funct. Anal. 173 (2000) 214-255
- [18] Cao, H.-D. Recent progress on Ricci soliton. Advanced Lectures in Mathematics (ALM), v. 11 (2009) 1-38
- [19] Cibotaru, D., Zhu, P., Refined Kato inequalities for harmonic fields on Kähler manifolds. Pacific J. of Math., 256 (2012) 51-66
- [20] Chang-Yu Xia, Hefei. A sphere theorem for submanifolds in a Manifold with pinched positive curvature. Monatsh. für Math. 124 (1997) 365-368
- [21] Chen B-L, Tang S-H, Zhu S-P, Complete classification of compact four-manifolds with positive isotropic curvature. J. Differential Geometry 91 (2012) 41-80
- [22] Chen, L. and Zhu, A., On extension of the harmonic Ricci flow. Geom. Dedicata. 164 (2013) 179-185
- [23] Chern S. -S., On Curvature and Characteristic Classes of a Riemannian Manifold. Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. 20 (1955) 117-126
- [24] Costa, E., On Einstein four-manifolds. J. of Geom. and Phys. 51 (2004) 244-255

- [25] Costa, E., A modified Yamabe invariant and a Hopf conjecture. arXiv[math.DG]: 1207.7107v1 (2012)
- [26] Costa, E. Ribeiro Jr, E., Four-dimensional compact manifolds with nonnegative biorthogonal curvature. Michigan Math. J. 63 4 (2014) 747-761
- [27] Costa, E., Ribeiro Jr, E., Minimal volume invariants, topological sphere theorems and biorthogonal curvature on 4-manifolds. Mathematical Proc. of the Cambridge Phil. Soc., (2017) to appear.
- [28] Costa, E., Ribeiro Jr, E., Santos, A., A modified Yamabe problem on four-dimensional compact manifolds. Houston J. Math. 42 4 (2016) 1141-1152
- [29] DeTurck, D., Deforming metrics in the direction of their Ricci tensor. J. Diff. Geom. 18 (1983) 157-162
- [30] Diógenes, R., Ribeiro Jr., E., Four-manifolds with pinched positive sectional curvature. Preprint, (2016)
- [31] Donaldson, K., An application of gauge theory to four dimensional topology. J. Differential Geom. 18 (1983) 279 - 315
- [32] Eells, J. and Sampson, J., Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J. Math. 86 (1964) 109-169
- [33] Fang, S. and Zheng, T., An upper bound of the heat kernel along the harmonic-Ricci flow. Manuscripta Math. 151 (2016) 1-18
- [34] Freedman, M. The topology of four-dimensional manifolds. Jour. Diff. Geom. 17 (1982) 327-454
- [35] Gu, J.-R. Xu, H.-W., The sphere theorems for manifolds with positive scalar curvature. J. Differential geometry, 92 (2012) 507-545
- [36] Gu, J. Xu, H., Rigidity of Einstein manifolds with positive scalar curvature. Math. Ann. 358 (2014) 169-193
- [37] Gu, J. Xu, H., An optimal differentiable sphere theorem for complete manifolds. Math. Res. Lett. 17, 2010, 111-1124.

- [38] Gursky, M., Four-manifolds with $\delta W^+ = 0$ and Einstein constants of the sphere. *Math. Ann.* 318 (2000) 417 - 431
- [39] Gray, A., Invariants of curvature operators of four-dimensional Riemannian manifolds. *Proc. of 13th Bien. Sem. Canadian Math. Cong.* 2 (1972) 42-65
- [40] Hamilton, R., Four-manifolds with positive curvature operator. *J. Differential Geometry* 24 (1986) 153-179
- [41] Hamilton, R., Four-manifolds with positive isotropic curvature, *Comm. Anal. Geom.* 5, MR 1456308, Zbl 0892.53018 (1997) 1-92
- [42] Hamilton, R. Three-Manifolds with positive Ricci Curvature. *J Differential Geometry* 17 (1982) 255-306
- [43] Hitchin, J., On compact four-dimensional Einstein manifolds. *J. Diff. Geom.* 9 (1974) 435-442
- [44] Jost, J., *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. sixth edition, Springer (2011)
- [45] Ko, K-S., A pinching theorem for Riemannian 4-manifold. *Kangweon-Kyungki Math. Jour.* 13 (2005) 35-41
- [46] Ko, K-S., On 4-dimensional Einstein manifolds which are positively pinched. *Kangweon-Kyungki Math. Jour.* 3 (1995) 81-88
- [47] Kulkarni, R., Curvature structures and conformal transformations. *Journal of Differential Geometry*, v.4 4 (1970) 425-451
- [48] Lawson, H. Simons, J., On stable currents and their applications to global problems in real and complex geometry. *Ann. of Math.* 98 (1973) 427-450
- [49] Leung, P., On a relation between the topology and the intrinsic and extrinsic geometries of a compact submanifold. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 28 (1985) 305-311
- [50] Li, P., *Geometric Analysis*, Cambridge University Press. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 134 2012

- [51] Li, P. Wang, J., Weighted Poincaré inequality and rigidity of complete manifolds. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 39 (2006) 921-982
- [52] Li, P. Tam, L. F., Harmonic functions and the structure of complete manifolds; *J. Diff. Geom.* 35 (1992) 359-383
- [53] Li, Y., Eigenvalues and entropies under the harmonic-Ricci flow. *Pacific J. Math.* 267 (2014) 141-184
- [54] List, B., Evolution of an extended Ricci Flow system. *Comm. Anal Geom.* 16 (2008) 1007-1048
- [55] Micallef, M. Wang, M., Metrics with nonnegative isotropic curvature. *Duke Math. J.* 72 (1993) 649-672
- [56] Micallef, M., Moore, J., Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes. *Ann. of Math.* 127 (1988) 199-227
- [57] Müller, R., Ricci flow coupled with harmonic map heat flow. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* 45 (2012) 101-142
- [58] Müller, R., Ricci flow coupled with harmonic map heat flow. - Ph.D. thesis, ETH Zürich, <http://e-collection.library.ethz.ch/view/eth:41938> (2009)
- [59] Müller, R. Rupflin, M., Smooth long-time existence of harmonic flow on surfaces. *arXiv: 1510.03643 [math. DG]* (2015)
- [60] Munteanu O. Sesum N., On Gradient Ricci solitons. *J. of Geom. Anal.* 23 (2013) 539-561
- [61] Munteanu O. Wang, J., Geometry of manifolds with densities. *Advances in Math.* 259 (2014) 269-305
- [62] Noronha, H., Self-Duality and 4-Manifolds with Nonnegative curvature on Totally Isotropic 2-Planes, *Michigan Math. J.* 41 (1994)
- [63] Noronha, H., Some results on nonnegatively curved four manifolds. *Matemat. Contemp.* 9 (1995) 153-175

- [64] Noronha, M., Positively curved 4-manifolds and the nonnegativity of isotropic curvatures. *Michigan. Math. J.* 44 (1997) 211-229
- [65] Rauch, H., A contribution to differential geometry in the large. *Ann. of Math.* 54 (1951) 38-55
- [66] Ribeiro Jr, E.: Rigidity of four-dimensional compact manifolds with harmonic Weyl tensor. *Anali di Matematica pura ed Applicata*, v. 195 (2016) 2171-2181
- [67] Seaman, W., A pinching theorem for four manifolds. *Geometriae Dedicata* 31 (1989) 37-40
- [68] Seaman, W., Harmonic two-forms in four dimensions. *Proc. of the Amer. Math. Soc.* 112 (1991) 545-548
- [69] Seaman, W., On four-manifolds which are positively pinched. *Ann. Global Anal. Geom.* 5 (1987) 193-198
- [70] Seaman, W., On manifolds with nonnegative curvature on totally isotropic 2-planes. *Trans. Amer. Math. Soc.* 338 (1993) 843-855
- [71] Seaman, W., Orthogonally pinched curvature tensors and applications. *Math. Scand.* 69 (1991) 5-14
- [72] Schoen R., Open problems proposed in Pacific Northwest Geometry Seminar, (at Univ. of Oregon)(2007)-fall
- [73] Singer, I., Thorpe, J., The curvature of 4-dimensional spaces. *Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira*. Princeton, (1969) 355-365
- [74] Tadano, H., Gap theorems for Ricci-harmonic solitons. *Ann. Glob. Anal. Geom.* 49 (2016) 165-175
- [75] Ville, M., Les variétés Riemanniennes de dimension $4\frac{4}{19}$ -pincées. *Ann. Inst. Fourier* 39, 1989, 149-154
- [76] Tashibana, S., a theorem on Riemannian manifolds with positive curvature operator. *Proc. Japan Acad.* 50 (1974) 301-302

- [77] Xin, Y., An application of integral currents to the vanishing theorems. *Sci. Sinica Ser. A*, 27 (1984) 233-241
- [78] Xu, H. Zhao, E., Topological and differentiable sphere theorems for complete submanifolds. *Comm. in Analys. and Geom.* 17 (2009) 565-585
- [79] Yang, D., Rigidity of Einstein 4-manifolds with positive curvature. *Invent. Math.*, 142 (2000) 435-450
- [80] Yang, F., and J. Shen, Volume growth for gradient shrinking solitons of Ricci-harmonic flow. *Sci. China Math.* 55 (2012) 1221-1228
- [81] Yau, S. T., Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifolds and their Applications to Geometry. *Indiana Univ. Math. J.* 25 (1976) 659-670
- [82] Wang, L., On Ricci-harmonic metrics. *Ann. Acad. Fennicae Math.* 41 (2016) 417-437
- [83] Williams, M., Results on coupled Ricci and harmonic map flows. *Adv. in Geom.* 15 (2015) 7-26
- [84] Viaclovsky, Jeff A., Course Web Page: Math 865, Advanced Topics in Geometry, Fall, Topics course in Riemannian Geometry, (2011)