Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Sobre a Hipótese de Transversalidade de Arnold em Famílias de Operadores Bilaplaciano em Variedades Riemannianas

por

Marcos Aurélio de Alcântara

Manaus-Am
Dezembro/2015

Sobre a Hipótese de Transversalidade de Arnold em Famílias de Operadores Bilaplaciano em Variedades Riemannianas

por

Marcos Aurélio de Alcântara

sob orientação do

Professor Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-Am

Dezembro/2015

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Alcantara, Marcos Aurélio de

A347s Sobre a Hipótese de Transversalidade de Arnold em Famílias de Operadores Bilaplaciano em Variedades Riemannianas / Marcos Aurélio de Alcantara. 2015

70 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Marcus Antônio Mendonça Marrocos

Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Bilaplaciano. 2. Transversalidade. 3. Problema de Dirichlet. 4. Simplicidade genérica. 5. Laplaciano. I. Marrocos, Marcus Antônio Mendonça II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Marcos Aurélio de Alcântara

Sobre a Hipótese de Transversalidade de Arnold em Famílias de Operadores Bilaplaciano em Variedades Riemannianas

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus, 15 de dezembro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Marcus Marrocos

....

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos (orientador)

Universidade Federal do ABC - UFABC

....

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (membro)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

João Rodrigues dos S. Júnior

....

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Junior (membro externo)

Universidade Federal do Pará - UFPA

....

Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira (membro externo)

Universidade de São Paulo - USP

....

Prof. Dr. Dragomir Mitkov Tsonev (membro)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Dedico este trabalho a Ivan de Azevedo Tribuzy in memorian.

Agradecimentos

A Deus por te me dado forças nas horas mais difíceis de minha vida e por ter me agraciado com tantas realizações.

A toda minha família por terem me incentivado a vencer vários obstáculos em momentos de fraqueza, em especial minha querida e amada mãe por tudo que fez por mim, pela criação e educação que me foi dada.

Ao meu orientador professor Marcus Marrocos pela orientação e dedicação ao trabalho confiado a minha pessoa, seus ensinamentos e a forma justa com que trata os problemas em matemática e na vida como um todo.

Ao professor José Nazareno, pela confiança e pelos ensinamentos durante as disciplinas ministradas e o tempo de convivência o qual me serviram muito a acreditar que com trabalho e dedicação sempre podemos vencer.

Ao meu amigo José Ivan da Silva Ramos além de meu colega de trabalho, meu amigo e irmão. Sempre seus conselhos me serviram de base de sustentação para manter o foco e determinação em meus estudos. Agradeço a tudo que me foi ensinado, além disso depositou confiança e esperança em minha vida acadêmica.

Ao professor Renato Tribuzy meu orientador durante o mestrado e referência no tocante aos seus esforços por uma pós-graduação em matemática em nível de doutorado na Universidade Federal do Amazonas.

Ao professor Antônio Luiz Pereira, pelos bons conselhos, apoio pelo espaço cedido junto ao IME-USP para minha acomodação durante meus estudos e confecção de minha tese.

Ao meu amigo Leandro Nery e família que desde a graduação sempre mantivemos um forte vínculo de amizade e pelos excelentes momentos durante minha estadia em São Paulo.

Ao meu amigo Clebes Brandão pela fé e amizade que sempre foram fortes em relação a minha pessoa.

Aos meus professores durante o doutorado, Michel Pinho e Dragomir Tsonev pelos bons ensinamentos e pela paciência nos momentos difíceis que enfrentei. Especialmente o cuidado e incentivos que o professor Michel sempre teve em relação a minha pessoa.

Aos meus amigos e companheiros de turma, Elzimar, Eteval e Airton, pelos bons momentos, agradáveis companhias, generosidade, maturidade e bons conselhos em muitos momentos conturbados. Ao meu amigo Raul Mesquita pelas dicas e ajuda durante meus estudos, sua tese de doutorado serviu como inspiração para confecção deste trabalho. À minha amiga Juliana Miranda pelos bons conselhos e boas discussões em geometria. Ao meu amigo Adrian Ribeiro que durante a seleção para meu ingresso no doutorado foi um grande incentivador e parceiro de estudos e de grande amizade. Ao meu amigo e colega Cleiton que durante minha estadia na USP, tive contato e contei com a sua ajuda nas discussões em matemática e os momentos de conversas descontraídas. Aos amigos do mestrado em matemática da PPGM-UFAM, Raphael, Jefferson, Lauriano, Silvia, Carina, Camila, Gustavo, Almino, Nelson e Diego, agradeço a todos vocês pelos incentivos, amizade e pela torcida do meu sucesso durante o doutorado. Aos amigos Daiana e Marcelo Viana, pela receptividade em São paulo e pelos ótimos momentos de descontração.

Agradeço à banca examinadora pela paciência e dedicação diante desta tese e pelas excelentes sugestões apresentadas para o melhoramento deste trabalho.

Ao DM-UFAM que desde o mestrado fui sempre bem acolhido e acabei realizando toda minha pós graduação.

À USP pela estrutura e o apoio dado durante toda elaboração da tese.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas UFAC pelo apoio durante minha liberação para pós graduação.

Resumo

Nesta tese primeiramente tratamos de transversalidade de famílias de métricas, em que foi tomada uma família de operadores Bilaplacianos parametrizada pelas métricas de uma variedade Riemanniana orientável M compacta com bordo. Em seguida foi considerada uma família de operadores Bilaplacianos em que o parâmetro é o domínio de definição do operador, no caso da variação do domínio em variedades Riemannianas *flat* foi mostrada a condição de transversalidade para a família de operadores Bilaplacianos parametrizados por tais domínios. Porém no caso de variedades Riemannianas quaisquer, obtemos a simplicidade genérica dos autovalores associados ao Δ_g^2. Por último, estudamos a situação genérica dos autovalores do Laplaciano numa família de hipersuperfícies de rotação no espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+1}$.

Palavras-chave: Bilaplaciano, Transversalidade, Problema de Dirichlet, Simplicidade genérica, Laplaciano.

Abstract

Let M be a compact orientable Riemannian manifold with boundary. We first study in this thesis the transversality of a family of metrics via a family of Bilaplacian operators parametrised by the metrics themselves. We next consider a family of Bilaplacian operators with variation of their dominion in *flat* Riemannian manifolds and establish a condition of transversality in this case. In the case of arbitrary Riemannian manifold, we obtain that the spectrum of Δ_g^2 is simple and the set of parameters is residual. We complete this thesis by studying the generic propeties of the eigenvalues of the Laplacian of a family of hyper-surfaces of revolution in the vector space $\mathbb{R}^{n+1}$.

Keywords: Bilaplacian, Transversality, Dirichlet problem, Laplacian, Generic properties.

Conteúdo

Introdução

A propriedades genéricas de operadores diferenciais vem sendo estudada por vários pesquisadores. Uma ferramenta muito utilizada foi o do Teorema de Transversalidade de Thom e algumas variações. Arnold [2] neste mesmo sentido considerou uma famíla de operadores de Laplace tendo o domínio como parâmetro, ele estabeleceu propriedades genéricas supondo uma hipótese de transversalidade para tais operadores. A hipótese de transversalidade **SAH** foi definida explicitamente e verificada em vários casos por Colin de Verdière [4] em 1986.

Uhlenbeck [20] obteve alguns dos resultados mais significantes em relação a genericidade de autofunções e autovalores, em que foram consideradas famílias de operadores diferenciais elípticos de segunda ordem mostrando que genericamente os autovalores são todos simples e as autofunções são funções de Morse. Ela obteve o resultado sobre o conjunto das métricas para os quais o espectro de uma variedade Riemanniana é composto por apenas autovalores simples é um conjunto residual (genericidade do operador). No entanto, poucas informações foram fornecidas a respeito do complementar desse conjunto, ou seja, o conjunto das métricas para os quais o espectro da variedade possui autovalor múltiplo.

Teytel [19] propôs uma forma de medir os conjuntos magros definindo a noção de "codimensão"com o intuito de aplicá-la à famílias de operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert de dimensão infinita, desenvolvendo assim uma maneira de medir a "magreza"do conjunto dos parâmetros para os quais o espectro do operador possui autovalor múltiplo. Apesar de encontrarmos na literatura o resultado de simplicidade genérica para os autovalores de famílias de operadores diferenciais de ordem alta em vários contextos, veja [6] e [14], até onde temos conhecimento, os Teoremas A.2 e A.3 não foram verificados para famílias de operadores Bilaplacianos em variedades Riemannianas em que o parâmetro da família é a métrica.

Em [11] Micheletti e Pistola tomaram M uma variedade C^∞ conexa, compacta e de dimensão $n \geq 2$ sem bordo, uma métrica Riemanniana g em M e um autovalor $\lambda^*(M,g)$ de multiplicidade $\nu \geq 2$ e o operador de Laplace-Beltrami Δ_g. Elas obtiveram um primeiro resultado fazendo uso do método de transversalidade provando uma condição suficiente de tal modo que, numa vizinhança adequada de g_0 em $\mathcal{S}^k$, o conjunto das métricas Riemannianas $g = g_0 + h$ para o qual Δ_g admite um autovalor $\lambda^*(g)$, perto de $\lambda^*(g_0)$, de mesma multiplicidade ν é uma variedade $\mathcal{S}^k$ de codimensão $\dfrac{1}{2}\nu(\nu+1)-1$. Onde $\mathcal{S}^k$ é o espaço de todos os 2-tensores covariantes simétricos de classe C^k em M. As autoras mostram que se (M, g_0) é uma variedade Riemanniana 2-dimensional e $\lambda^*(g_0)$ é um autovalor de multiplicidade 2, então o conjunto de deformações da métrica Riemanniana g_0 para a qual a multiplicidade do autovalor é preservada, é uma variedade de codimensão 2 em $\mathcal{S}^k$, numa vizinhança de g_0.

No presente trabalho consideramos a variação de domínios limitados suaves contidos em uma carta de M, o operador Bilaplaciano sobre uma variedade Riemanniana *flat*, com f um $\mathcal{C}^m$-difeomorfismo sobre a imagem que preserva orientação e é isotópico a identidade, para obtermos uma condição de transversalidade. Ainda mostramos que em uma variedade Riemanniana completa, com uma família real de difeomorfismos em um domínio limitado de M, usando nossas técnicas que os $\lambda_i'(t)$'s, não podem ser nulas para toda família de difeomorfismos.

É importante mencionar que **SAH** vem de uma aplicação simples do Teorema da Função Implícita, descrita pelo teorema a seguir.

Teorema 1 ([19]) *Se o autovalor λ de $A(q_0)$ de multiplicidade n é estável, então os autovalores de q tal que $A(q)$ tem um autovalor de multiplicidade n perto de λ formam uma subvariedade de codimensão real $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$, com H espaço de Hilbert real.*

Com tais motivações explicitadas, esta tese será desenvolvida como segue:

No primeiro capítulo serão apresentados alguns fatos preliminares e notações adaptados que servirão para demonstrar os resultados em todos os capítulos no decorrer de nosso trabalho.

No segundo capítulo que trata de transversalidade de famílias de métricas foi tomada uma família de operadores Bilaplacianos parametrizadas pelas métricas de uma variedade

Riemanniana orientável M compacta com bordo.

Para esta família de operadores, nosso objetivo foi de demonstrar os seguintes resultados principais.

Teorema 2 *O conjunto das métricas para os quais o operador $\Delta_g^2 : H^4 \cap H_0^2(M) \longrightarrow L^2(M)$ possui pelo menos um autovalor com multiplicidade maior ou igual a 2 é de codimensão 2.*

Teorema 3 *Quaisquer duas métricas g_0 e g_1 em uma variedade Riemanniana M compacta com bordo, podem ser conectadas por uma curva analítica $g(t)$ com $g(0) = g_0$ e $g(1) = g_1$, tal que o espectro do operador $\Delta_{g(t)}^2 : H^4 \cap H_0^2(M) \longrightarrow L^2(M)$ é composto apenas por autovalores simples, para todo $0 < t < 1$.*

Neste contexto $\mathcal{X}$ é o conjunto das métricas Riemannianas definidas em M, o qual é um cone aberto no conjunto de todos os $(0, 2)$-tensores simétricos. Vale ainda ressaltar que o espectro do operador Bilaplaciano é discreto com pontos de acumulação finitos, além disso, o operador depende analiticamente da métrica g.

Garantimos, através da Proposição B.1, a existência de curvas analíticas de autofunções e de autovalores associados ao operador Bilaplaciano.

Também estabelecemos o Lema B.1, o qual nos proporciona a derivada do operador Laplaciano, que é de relevância fundamental no tocante à explicitação da primeira derivada do autovalor associado ao operador $\Delta_{g(t)}^2$.

Considerando uma família analítica de métricas $g(t)$ e levando em consideração a Proposição B.1, podemos facilmente calcular a derivada da curva de autovalores. Que tem o seguinte aspecto

$$\lambda' = \int_M \phi(\Delta_{g(t)}^2)'\phi \mathrm{dM}.$$

A derivada explícita do autovalor associado ao operador Bilaplaciano é determinado na Proposição 2.1.

Ao prosseguirmos foi observado que pelo fato do operador Bilaplaciano não ser autoadjunto surgiu a necessidade de definir a isometria

$$P : L^2(M, \mathrm{dM}) \longrightarrow L^2(M, \mathrm{d\bar{M}}),$$

onde, para cada u, $P(u) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{det(\bar{g}_{ij})}}\sqrt[4]{det(g_{ij})}u$, em que $\bar{g} \in \mathcal{X}$.

Com tal isometria definimos o novo operador diferencial linear auto-adjunto e isoespectral ao operador Bilaplaciano, $A(g) := P_g^{-1}\Delta_g^2 P_g$.

Desta forma, juntando todas essas informações a respeito da derivada do autovalor associado ao operador Bilaplaciano e do funcional definido a partir do operador $A(g)$, obtemos os resultados principais aqui estabelecidos utilizando a Proposição 2.2 onde é mostrado que $\ell'_{\varphi\varphi} - \ell'_{\psi\psi}$ e $\ell'_{\psi\varphi}$ são funcionais lineares linearmente independentes onde $\ell'_{\psi\varphi}(H) := \int_M \psi(A(g))'\varphi \mathrm{dM} = \int_M \psi(\Delta_g^2)'\varphi \mathrm{dM}$.

No capítulo 3 foi considerado uma família de operadores Bilaplacianos em que o parâmetro é o domínio de definição do operador. No caso da variação do domínio em variedades Riemannianas *flat* foi mostrado um resultado análogo ao Teorema 2. Porém no caso de variedades Riemannianas quaisquer, obtemos apenas a simplicidade genérica dos autovalores associados ao Δ_g^2.

O conjunto de parâmetros sob essa abordagem é obtido tomando Ω_0 um domínio limitado com fronteira suave em M. Definindo Σ a coleção de todos os domínios Ω diferenciavelmente isotópicos a Ω_0. O espaço $\mathcal{C}^m(\Omega_0, M)$ das funções m-vezes continuamente diferenciáveis até o bordo de Ω_0 possui estrutura de variedade de Banach serparável, ver em [1]. O conjunto de parâmetros neste caso é $\mathcal{X} = \{f \in \mathcal{C}^m(\Omega_0, M)/\ f$ é um $\mathcal{C}^m$-difeomorfismo sobre a imagem que preserva orientação e é isotópico a identidade $\}$. Sendo assim, ao tomarmos $f \in \mathcal{X}$ então, $f(\Omega_0) = \Omega_f$ é um domínio com fronteira suave.

Foi observado que para cada $f \in \mathcal{X}$ ao considerarmos o operador $\Delta_g^2 : \Omega_f \longrightarrow L^2(\Omega_f)$ em que g é a métrica em M, as famílias de tais operadores não estão definidos num mesmo espaço de funções, o argumento utilizado para contornar tal situação foi considerar, $\forall f \in \mathcal{X}$, os operadores $\Delta_{f^*g}^2$ definidos em Ω_0 que são isoespectrais aos operadores Δ_g^2 definidos em Ω_f.

No entanto nos deparamos novamente com a situação em que os elementos das famílias de autovalores $\Delta_{f^*g}^2$ parametrizadas por f não são auto-adjuntos em relação ao mesmo produto interno. Nesse sentido foi necessário fazer algumas alterações análogas às feitas no Capítulo 2 de métricas. Para isso, bastou definirmos o operador modificado por $A(f)\phi = P_{f^*g}^{-1}\Delta_{f^*g}^2 P_{f^*g}\phi$, o qual é isoespectral ao operador $\Delta_{f^*g}^2$. Com isso, afim de demonstrarmos o Teorema 4, foi suficiente considerar a família de operadores modificados da mesma forma como foi feito anteriormente para perturbação de métricas.

Foram analisados dois casos para variação de domínios.

No primeiro caso, M é uma variedade Riemanniana *flat* e orientada, com domínios contidos em uma única carta de M. O domínio Ω_0 em M é limitado com fronteira suave, contido numa única carta de M.

Aqui o espaço de parâmetros $\mathcal{X}$ é definido pelas aplicações de Ω_0 em M isotópicas a identidade que são difeomorfismos sobre a imagem, em que $\mathcal{X}$ é um aberto do espaço das funções m diferenciáveis que saem em Ω_0 e chegam em Ω.

Os principais resultados para a família de operadores do tipo $A(f) := P_{f^*g}^{-1}\Delta_{f^*g}^2 P_{f^*g}$, neste contexto, são dados pelos seguintes teoremas.

Teorema 4 *O conjunto das* $f \in \mathcal{X}$ *para os quais o operador* $\Delta_g^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega_f) \longrightarrow L^2(\Omega_f)$ *possui pelo menos um autovalor com multiplicidade maior ou igual a* 2 *é de codimensão* 2.

Teorema 5 *Quaisquer dois domínios* Ω_0 *e* Ω_1 *em* M *podem ser ligados por uma curva analítica* Ω_t *tal que o espectro do operador* $\Delta_g^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega_t) \longrightarrow L^2(\Omega_t)$ *é composto apenas por autovalores simples, para todo* $0 < t < 1$.

Para demonstramos os teoremas acima verificamos a hipótese forte de Arnold para família de operadores $A(f)$. Neste sentido, foi preciso explicitar os funcionais lineares utilizados em nosso caso, dados pela Proposição 3.1 sob a forma

$$\ell'_{\varphi\psi}(V) = -\int_{\partial\Omega} \nabla^2\varphi(\nu,\nu)\nabla^2\psi(\nu,\nu)g(V,\nu)d\nu.$$

Para concluirmos a demonstração dos teoremas propostos, mostramos que os funcionais lineares $\ell'_{\varphi\varphi} - \ell'_{\psi\psi}$ e $\ell'_{\psi\varphi}$ são linearmente independentes. Neste sentido, o Lema 3.1 foi de suma importância para a demonstração da Proposição 3.2 que trata independência linear dos funcionais lineares.

Na seção seguinte, que trata do segundo caso, foram considerados domínios limitados quaisquer com fronteira suave em uma variedade Riemanniana qualquer. Nestas hipóteses feitas, o Lema 3.1 ficou inviável, comprometendo assim a verificação da hipótese forte de Arnold para a família de operadores Bilaplacianos parametrizados por uma família de domínios numa variedade Riemanniana qualquer. Mesmo assim conseguimos mostrar a simplicidade genérica de seus autovalores.

O principal resultado sob este aspecto é o teorema que segue.

Teorema 6 *O conjunto das $f \in \mathcal{X}$ para os quais o espectro do operador $\Delta_g^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega_f) \longrightarrow L^2(\Omega_f)$ é todo simples é genérico (residual) em $\mathcal{X}$.*

Para explicitarmos uma fórmula da derivada de autovalores múltiplos para o operador Bilaplaciano, estabelecemos e demonstramos a Proposição 3.3 .

Na Proposição 3.4 garantimos a genericidade dos autovalores associados ao operador Δ_g^2, que foi demonstrado usando o Lema 3.2, e assim o resultado principal foi consequência imediata.

Dos comentários anteriores, segue a simplicidade de autovalores mediante uma perturbação.

O próximo teorema descreve este resultado.

Teorema 7 *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e Ω um domínio limitado em M. Seja λ um autovalor do Bilaplaciano para o problema de Dirichlet com multiplicidade $m > 1$. Então existe um difeomorfismo f em uma vizinhança $\mathcal{C}^r$, $1 \leq r < \infty$, da identidade id_Ω, tal que os autovalores $\lambda(g)$ próximos a λ são todos simples.*

Como consequência imediata temos o corolário.

Corolário 1 *Dado um domínio limitado Ω em uma variedade Riemanniana (M, g), o subconjunto dos difeomorfismos $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ tais que todos os autovalores do operador Bilaplaciano são simples, é residual.*

No quarto capítulo foi feita uma análise da situação genérica dos autovalores do Laplaciano numa família de hipersuperfícies de rotação do espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+1}$ e suas multiplicidades que são determinadas a partir dos autovalores do Laplaciano na esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

A teoria já desenvolvida para métricas como parâmetros para famílias de operadores lineares diferenciais auto-adjuntos é aplicada neste caso em que a família de hipersuperfícies de rotação a ser considerada será parametrizada pela curva de perfil. Utilizou-se o fato da métrica induzida na superfície de rotação ser dada sob a forma $g_R = dx^2 + R^2(x)d\theta^2$ onde $R(x)$ é a função perfil. Assim, nossa família de parâmetros é o subconjunto de espaço das métricas como nos casos anteriores.

Nosso principal resultado obtido, neste sentido, foi o seguinte:

Teorema 8 *O conjunto das $R \in \mathcal{X}$ para os quais a multiplicidade dos autovalores λ_k do operador $\Delta_{g_R} : H^2 \cap H_0^1(\Sigma_R) \longrightarrow L^2(\Sigma_R)$ é $dim\tilde{\mathcal{H}}_k$ é genérico (residual) em $\mathcal{X}$.*

Para demonstrar tal teorema, primeiramente definimos a hipersuperfície de rotação compacta Σ de dimensão n, com métrica induzida do espaço ambiente em um conjunto aberto denso de Σ. Tomando $\Sigma - \{(-1,0);(1,0)\}$ com a métrica induzida, então é isométrica a $M^n = (-1,1) \times_R \mathbb{S}^{n-1}$. Isto significa que a métrica de Σ a menos de dois pontos pode ser interpretada como uma métrica warped. Com isso, o Laplaciano nesta métrica toma a forma

$$\Delta_\Sigma = \frac{1}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\Big(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \frac{1}{R^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

onde $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é o Laplaciano sobre a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$.

É importante lembrar que Σ possui o grupo $SO(n)$ contido no conjuntos de suas isometrias.

O espectro da esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ com a métrica canônica é dado pelo conjunto formado por $\mu_k = k(n+k-2)$, $k \geq 0$ e o autoespaço associado a μ_k é o conjunto dos esféricos harmônicos de grau k que denotamos por $\tilde{\mathcal{H}}_k$.

Desta forma é possível afirmar que $L^2(\Sigma) = \bigoplus_k \mathcal{L}_k$, em que $\mathcal{L}_k \simeq L^2(dx) \otimes \tilde{\mathcal{H}}_k$, ver em [5], e ainda, é fácil ver que o Δ_Σ deixa os espaços $\mathcal{L}_k$ invariantes. As autofunções do Δ_Σ são dadas por $\phi(x,\theta) = f(x)\ell_k(\theta)$, $\ell_k \in \tilde{\mathcal{H}}_k$ e f é uma autofunção do operador de Sturm-Liouville sob a forma

$$L_{\mu_k} f = \frac{1}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}f) - f\frac{1}{R^2}\mu_k.$$

Para ver isto basta considerar $\phi = f\ell$, com $f \in C^\infty(-1,1)$ e $\ell \in \tilde{\mathcal{H}}_k$, uma autofunção e λ um autovalor de Δ_Σ, então podemos afirmar que

$$\begin{aligned}(\Delta_\Sigma + \lambda)f\ell &= \ell\Big(\frac{1}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}f) - f\frac{1}{R^2}\mu_k + \lambda f\Big)\\ &= \ell(L_{\mu_k} + \lambda)f.\end{aligned}$$

Ou seja, o problema de determinar o espectro de uma hipersuperfície de rotação se reduz a determinar o espectro do operador de Sturm-Liouville, com as condições de fronteira $f(-1) = f(1) = 0$. Além disso, podemos notar que o conjunto dos autovalores distintos (sem levar em consideração sua multiplicidades) de Δ_Σ é a união dos autovalores do operador L_{μ_k} com $k \in \mathbb{Z}^*$, e ainda a multiplicidade de um autovalor λ_k do operador Δ_Σ, e portanto autovalor de L_{μ_k} para algum k, é pelo menos $dim\tilde{\mathcal{H}}_k$.

De forma mais geral as multiplicidades dos autovalores λ de Δ_Σ são da forma

$$m = \sum_{i=1}^{d} m_{\mu_{k_i}} dim\tilde{\mathcal{H}}_{k_i},$$

em que $m_{\mu_{k_i}}$ é a multiplicidade de λ visto como autovalor de $L_{\mu_{k_i}}$.

Nosso objetivo foi mostrar que genericamente no espaço das hipersuperfícies de rotação, as multiplicidades dos autovalores λ do operador Δ_Σ coincidem com a dimensão dos esféricos harmônicos. Para isso, foram usados alguns resultados técnicos descritos nos Lemas 4.1 e 4.2 para demonstramos a Proposição 4.1, implicando que o funcional linear $p'_{\varphi_k\varphi_k}(r) - p'_{\psi_{\bar{k}}\psi_{\bar{k}}}(r)$ não é identicamente nulo.

Através da Proposição 4.1, provamos o teorema.

Teorema 9 *Sejam (M, g_{R_0}) hipersuperfícies de rotação e λ um autovalor do Laplaciano com multiplicidade $m = m_{\mu_k} dim\tilde{\mathcal{H}}_k$ (respectivamente $m = dim\tilde{\mathcal{H}}_k + dim\tilde{\mathcal{H}}_{\bar{k}}$). Então existe uma função $R \in \mathcal{X}$ próximo R_0 tal que os autovalores $\lambda(R)$ próximos a $\lambda(R_0)$ possuem multiplicidade $m = dim\tilde{\mathcal{H}}_k$ (respectivamente $m = dim\tilde{\mathcal{H}}_{\bar{k}}$).*

Portanto, obtemos a demonstração do resultado principal como queríamos.

Capítulo 1

Preliminares

Com o objetivo de fornecer embasamento técnico ao leitor, estabelecemos uma miscelânea de fatos preliminares demonstrados e definições prévias que servirão de base para os próximos capítulos desta tese.

1.1 Tensores e Operadores Diferenciais em Variedades Riemannianas

Relembremos que um $(1,1)$-tensor em uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle)$ é uma aplicação $C^\infty(M)$-linear

$$T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M).$$

Enquanto que, num $(0,2)$-tensor, o domínio é $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ e o contradomínio é o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M. Além disso, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, pede-se que $T(X,Y)$ seja uma função diferenciável em um aberto $U \subset M$ e que T seja $C^\infty(U)$-linear em cada variável. Também é conveniente referirmo-nos a T como um campo de 2-tensores.

Dado um $(0,2)$-tensor T, podemos identificá-lo com um $(1,1)$-tensor T mediante a métrica Riemanniana $\langle , \rangle$, fazendo

$$\langle T(X), Y \rangle := T(X,Y).$$

Utilizaremos ao longo deste trabalho a *convenção da soma Einstein.*

Observemos que $T(\partial_i) = g^{kl}\langle T(\partial_i), \partial_k\rangle\partial_l = g^{kl}\langle \partial_i, T^*(\partial_k)\rangle\partial_l$, em que T^* é o operador adjunto de T.

Em particular, o tensor métrico $\langle , \rangle$ será identificado com o $(1,1)$-tensor identidade I em $\mathfrak{X}(M)$.

Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M^n e $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ o referencial coordenado.

O *traço* de um $(0,2)$-tensor T é dado por

$$\operatorname{tr}(T) = g^{ij}T(\partial_i, \partial_j) = g^{ij}\langle T(\partial_i), \partial_j\rangle. \tag{1.1}$$

Considerando um $(0,2)$-tensor S, lembrarmos que o *produto interno de Hilbert-Schmidt* é dado por

$$\begin{aligned}\langle T, S\rangle := \operatorname{tr}(TS^*) &\overset{(1.1)}{=} g^{ij}\langle (TS^*)(\partial_i), \partial_j\rangle = g^{ij}\langle T(S^*(\partial_i)), \partial_j\rangle \\ &= g^{ij}\langle T(g^{kl}\langle \partial_i, S(\partial_k)\rangle\partial_l), \partial_j\rangle \\ &= g^{ij}g^{kl}\langle S(\partial_k), \partial_i\rangle\langle T(\partial_l), \partial_j\rangle = g^{ij}g^{kl}S_{ki}T_{lj}.\end{aligned}$$

A simetria da matriz (g^{ij}) e uma reenumeração nos índices permite-nos escrever

$$\langle T, S\rangle = g^{ik}g^{jl}T_{ij}S_{kl}.$$

Assim, considerando um referencial ortonormal,

$$\langle T, S\rangle = \sum_{i,j} T_{ij}S_{ij} = \sum_{i,j}\langle T(e_i), e_j\rangle\langle S(e_i), e_j\rangle = \sum_i \langle T(e_i), S(e_i)\rangle,$$

$$\langle T, T\rangle = \sum_i \langle T(e_i), T(e_i)\rangle = \sum_i |T(e_i)|^2$$

e

$$\langle T, I\rangle = \sum_i \langle T(e_i), I(e_i)\rangle = \sum_i \langle T(e_i), e_i\rangle = \operatorname{tr}(T).$$

Definição 1.1 *Sejam M uma variedade Riemanniana e T um $(0,2)$-tensor. A primeira derivada covariante de T é um $(0,3)$ tensor covariante dada por*

$$(\nabla T)(X, Y_1, Y_2) = X(T(Y_1, Y_2)) - T(\nabla_X Y_1, Y_2) - T(Y_1, \nabla_X Y_2), \tag{1.2}$$

para quaisquer $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

No caso particular do tensor métrico, que é um $(0,2)$-tensor, temos

$$(\nabla g)(Z,X,Y) = Z(g(X,Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0. \tag{1.3}$$

Definição 1.2 *Seja M uma variedade Riemanniana. A segunda derivada covariante de um $(0,2)$-tensor T, conforme em [15], é dada por*

$$\nabla^2 T(X,Y,W,Z) = \nabla_X(\nabla_Y T)(W,Z) - (\nabla_{\nabla_X Y} T)(W,Z), \tag{1.4}$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Além disso, tem-se o $(1,2)$-tensor definido por $\nabla X(Z,Y) := \langle \nabla_Z X, Y\rangle$. Prosseguindo de forma análoga, a segunda derivada covariante será um $(1,3)$-tensor.

Definição 1.3 *A divergência de um $(1,1)$-tensor T em $(M, \langle , \rangle)$ é definida como o $(0,1)$-tensor dado por*

$$(\mathrm{div} T)(v)(p) = \mathrm{tr}(w \mapsto (\nabla_w T)(v)(p)),$$

em que $p \in M$, $v, w \in T_pM$, ∇ denota a derivada covariante de T e tr *o traço calculado na métrica $\langle , \rangle$.*

Considere $^\sharp : \mathfrak{X}(M)^* \to \mathfrak{X}(M)$ o isomorfismo musical, ou seja, a inversa da aplicação canônica $^* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^*$ que associa cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ ao seu dual X^*. Para cada par de 1-formas θ, ω e seus respectivos correspondentes $\theta^\sharp = X$, $\omega^\sharp = Y$, utilizaremos o produto interno dado por $\langle \theta, \omega \rangle = \langle X, Y\rangle$.

Se T é um $(1,1)$-tensor e $f \in C^\infty(M)$ então $(\mathrm{div}T)(\nabla f) = \langle (\mathrm{div}T)^\sharp, \nabla f\rangle = \langle \mathrm{div}T, df\rangle$. Ao se escrever esta relação para um $(0,2)$-tensor, fica implícito que se está trabalhando com o $(1,1)$-tensor correspondente. Ademais, quando não houver perigo de confusão, omitiremos por simplicidade o " $\sharp$ ".

Com finalidade de usar o método de integração por partes em tensores, calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(T(\varphi Z)) &= (\mathrm{div}T)(\varphi Z) + \langle \nabla(\varphi Z), T\rangle \\
&= \varphi(\mathrm{div}T)(Z) + \varphi\langle \nabla Z, T\rangle + T(Z, \nabla\varphi) \\
&= \varphi\langle \mathrm{div}T, Z\rangle + \varphi\langle \nabla Z, T\rangle + T(\nabla\varphi, Z),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$\forall \varphi \in C^\infty(M)$ e $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Observemos também que:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(g(V,\nabla\varphi)\nabla\psi) &= g(V,\nabla\varphi)\mathrm{div}(\nabla\psi)+g(\nabla g(V,\nabla\varphi),\nabla\psi)\\ &= g(V,\nabla\varphi)\Delta\psi+\nabla\psi(g(V,\nabla\varphi))\\ &= g(V,\nabla\varphi)\Delta\psi+g(\nabla_{\nabla\psi}V,\nabla\varphi)+g(V,\nabla_{\nabla\psi}\nabla\varphi).\end{aligned}$$

Então teremos

$$g(\nabla_{\nabla\psi}V,\nabla\varphi)=\mathrm{div}(g(V,\nabla\varphi)\nabla\psi)-g(V,\nabla\varphi)\Delta\psi-\nabla^2\varphi(V,\nabla\psi). \tag{1.6}$$

Para cada campo de vetores $X\in\mathfrak{X}(M)$ podemos considerar o $(1,1)$-tensor ∇X dado por $\nabla X(Y)=\nabla_Y X$, para todo $Y\in\mathfrak{X}(M)$. Desta maneira, a divergência de X é dada por $\mathrm{div}X=\mathrm{tr}(\nabla X)$ e o laplaciano de uma função real f por $\Delta f=\mathrm{div}(\nabla f)=\mathrm{tr}(\nabla^2 f)$. Além disso, por (1.1), teremos

$$\Delta_g f=\langle\nabla^2 f,g\rangle,$$

onde $\nabla^2 f=\nabla df$ é o hessiano de f. Ademais, vamos definir o operador *Bilaplaciano* por

$$\Delta^2 f:=\Delta(\Delta f). \tag{1.7}$$

Dadas $f,\ell:M^n\longrightarrow\mathbb{R}$ funções suaves, é bem conhecido que

$$\Delta(f\ell)=f\Delta\ell+\ell\Delta f+2\langle\nabla f,\nabla\ell\rangle.$$

Relembremos a fórmula de Bochner, a saber:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2=Ric(\nabla f,\nabla f)+|\nabla^2 f|^2+\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle, \tag{1.8}$$

a qual nos permite obter o resultado a seguir, que será de grande utilidade.

Lema 1.1 *Sejam $f,\ell\in C^\infty(M)$. Então,*

$$\Delta\langle\nabla f,\nabla\ell\rangle=2Ric(\nabla f,\nabla\ell)+2\langle\nabla^2 f,\nabla^2\ell\rangle+\langle\nabla\Delta f,\nabla\ell\rangle+\langle\nabla\Delta\ell,\nabla f\rangle. \tag{1.9}$$

Demonstração: Inicialmente observemos que

$$\Delta|\nabla f+\nabla\ell|^2=\Delta|\nabla f|^2+\Delta|\nabla\ell|^2+2\Delta\langle\nabla f,\nabla\ell\rangle. \tag{1.10}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\Delta\langle\nabla f, \nabla \ell\rangle &= \frac{1}{2}(\Delta|\nabla f + \nabla\ell|^2 - \Delta|\Delta f|^2 - \Delta|\nabla \ell|^2) \\
&= Ric(\nabla f + \nabla\ell, \nabla f + \nabla\ell) + |\nabla^2 f + \nabla^2\ell|^2 + \langle\nabla(\Delta\ell + \Delta f\rangle), \nabla f + \nabla\ell\rangle \\
&\quad -Ric(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f|^2 - \langle\nabla\Delta f, \nabla f\rangle - Ric(\nabla\ell, \nabla\ell) - |\nabla^2\ell|^2 \\
&\quad -\langle\nabla\Delta\ell, \nabla\ell\rangle \\
&= 2Ric(\nabla f, \nabla\ell) + 2\langle\nabla^2 f, \nabla^2\ell\rangle + \langle\nabla\Delta f, \nabla\ell\rangle + \langle\nabla\Delta\ell, \nabla f\rangle. \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

□

É interessante comentar que para um $(0,2)$- tensor valem as seguintes relações

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(T(X)) &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} T(X), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [g((\nabla_{e_i} T)X, e_i) + g(T(\nabla_{e_i} X), e_i)] \\
&= (\mathrm{div}T)(X) + \langle\nabla X, T\rangle \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\langle\nabla f X, T\rangle &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} f X, T(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} T(f\nabla_{e_i} X + e_i(f)X, e_i) \\
&= f\sum_{i=1}^{n} T(\nabla_{e_i} X, e_i) + \sum_{i=1}^{n} T(X, e_i(f)e_1) \\
&= f\langle\nabla X, T\rangle + T(X, \nabla f). \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

No caso de um $(0,2)$-tensor T em (M,g) a derivada de Lie assumirá a forma:

$$(\mathcal{L}_X T)(Y,Z) = X(T(Y,Z)) - T([X,Y],Z) - T(Y,[X,Z]). \qquad (1.14)$$

Considerando $T = g$, vem que

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) &= X(g(Y,Z)) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z]) \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\
&\quad +g(Y, \nabla_Z X) \\
&= g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y). \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

Para um $(0,2)$-tensor simétrico T vale

$$T(T(X),Y) = T(X,T(Y)),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

De fato, tomando um sistema de coordenadas local, $\{\partial_i\}_{i=1}^n$, tem-se

$$T(T(\partial_i),\partial_j) = T(g^{k\ell} g(T(\partial_i),\partial_k)\partial_\ell,\partial_j) = T(g^{k\ell} T(\partial_i,\partial_k)\partial_\ell,\partial_j) = g^{k\ell} T_{ik} T_{j\ell}.$$

Por outro lado, usando a simetria de T verifica-se facilmente que $T(\partial_i, T(\partial_j))$ resultará na igualdade desejada.

Lema 1.2 *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e seja g o $(0,2)$-tensor métrico. Então a compatibilidade com a métrica $g = \langle , \rangle$ de ∇^2 é dada por:*

$$\begin{aligned} (\nabla^2 g(X,Y))(W,Z) &= g(\nabla^2 X(W,Z),Y) + g(\nabla^2 Y(W,Z),X) + g(\nabla_Z X, \nabla_W Y) \\ &\quad + g(\nabla_W X, \nabla_Z Y). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Demonstração: De fato, é conhecido que o Hessiano de uma função suave $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$\nabla^2 f(W,Z) = W(Z(f)) - (\nabla_W Z)(f). \tag{1.17}$$

Tomando $f = g(X,Y)$, devemos ter

$$\begin{aligned} (\nabla^2 g(X,Y))(W,Z) &= W(Zg(X,Y)) - (\nabla_W Z)(g(X,Y)) \\ &= W(g(\nabla_Z X,Y) + g(X,\nabla_Z Y)) - (g(\nabla_{\nabla_W Z} X, Y) \\ &\quad + g(X, \nabla_{\nabla_W Z} Y)) \\ &= g(\nabla_W(\nabla_Z X),Y) + g(\nabla_Z X, \nabla_W Y) + g(\nabla_W X, \nabla_Z Y) \\ &\quad + g(X, \nabla_W(\nabla_Z Y)) - g(\nabla_{\nabla_W Z} X, Y) - g(X, \nabla_{\nabla_W Z} Y) \end{aligned} \tag{1.18}$$

Ao utilizar (1.4), tal derivada será denotada sob a forma

$$\nabla^2 X(W,Z,Y) := \nabla_W(\nabla_Z X)(Y) - \nabla_{\nabla_W Z} X(Y) \tag{1.19}$$

o que implica em

$$\nabla_W(\nabla_Z X) = \nabla^2 X(W,Z) + \nabla_{\nabla_W Z} X. \tag{1.20}$$

Ao substituirmos (1.20) em (1.18), obteremos

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 g(X,Y))(W,Z) &= g(\nabla^2 X(W,Z) + \nabla_{\nabla_W Z} X, Y) + g(\nabla_Z X, \nabla_W Y) + g(\nabla_W X, \nabla_Z Y)\\
&\quad + g(X, \nabla^2 Y(W,Z) + \nabla_{\nabla_W Z} Y) - g(\nabla_{\nabla_W Z} X, Y) - g(X, \nabla_{\nabla_W Z} Y).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 g(X,Y))(W,Z) &= g(\nabla^2 X(W,Z), Y) + g(\nabla^2 Y(W,Z), X) + g(\nabla_Z X, \nabla_W Y)\\
&\quad + g(\nabla_W X, \nabla_Z Y).
\end{aligned}$$

□

Antes de seguirmos para o próximo Lema, precisamos da seguinte

Definição 1.4 *Sejam $f, \ell \in C^\infty(M)$, cujas derivadas df e $d\ell$ são 1-tensores. O produto tensorial entre df e dl é dado por*

$$(df \otimes d\ell)(X,Y) := X(f)Y(\ell), \tag{1.21}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Agora, podemos enunciar e mostrar o

Lema 1.3 *Sejam $f, \ell \in C^\infty(M)$, então valem:*

a) $\nabla(df \otimes d\ell) = \nabla df \otimes d\ell + df \otimes \nabla d\ell$

b) $\nabla^2(df \otimes d\ell) = \nabla^2 df \otimes d\ell + S(\nabla df \otimes \nabla d\ell) + df \otimes \nabla^2 d\ell$, *onde* $\forall\, W, Z \in \mathfrak{X}(M)$, *$S$ é o simetrizador dado por* $S(\nabla df \otimes \nabla d\ell)(W,Z) = \nabla_W df \otimes \nabla_Z d\ell + \nabla_Z df \otimes \nabla_W d\ell$.

c) $\Delta(df \otimes d\ell)(W,Z) = (\Delta df \otimes d\ell)(W,Z) + 2\langle \nabla df(W), \nabla d\ell(Z)\rangle + (df \otimes \Delta d\ell)(W,Z)$.

Demonstração: *a)* Dados $f, \ell \in C^\infty(M)$, então df e $d\ell$ são 1-tensores, donde inferimos que seu produto tensorial $df \otimes d\ell$ é um 2-tensor, que pode ser derivado no sentido covariante, resultando num 3-tensor. Tal derivada será descrita, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
\nabla_Z(df \otimes d\ell)(X,Y) &= Z((df \otimes d\ell)(X,Y)) - (df \otimes d\ell)(\nabla_Z X, Y) - (df \otimes d\ell)(X, \nabla_Z Y)\\
&= \nabla_Z((df \otimes d\ell)(X,Y)) - (df \otimes d\ell)(\nabla_Z X, Y) - (df \otimes d\ell)(X, \nabla_Z Y)\\
&= \nabla_Z(X(f)Y(\ell)) - \nabla_Z X(f)Y(\ell) - X(f)\nabla_Z Y(\ell)\\
&= \nabla_Z(\langle X, \nabla f\rangle\langle Y, \nabla \ell\rangle) - \langle \nabla_Z X, \nabla f\rangle\langle Y, \nabla\ell\rangle - \langle X, \nabla f\rangle\langle \nabla_Z Y, \nabla \ell\rangle\\
&= \langle \nabla_Z X, \nabla f\rangle\langle Y, \nabla \ell\rangle + \langle X, \nabla_Z \nabla f\rangle\langle Y, \nabla\ell\rangle + \langle X, \nabla f\rangle\langle \nabla_Z Y, \nabla \ell\rangle\\
&\quad +\langle X, \nabla f\rangle\langle Y, \nabla_Z\nabla \ell\rangle - \langle \nabla_Z X, \nabla f\rangle\langle Y, \nabla\ell\rangle - \langle X, \nabla f\rangle\langle \nabla_Z Y, \nabla \ell\rangle\\
&= \langle X, \nabla_Z \nabla f\rangle\langle Y, \nabla\ell\rangle + \langle X, \nabla f\rangle\langle Y, \nabla_Z\nabla \ell\rangle\\
&= \langle X, \nabla^2 f(Z)\rangle\langle Y, \nabla\ell\rangle + \langle X, \nabla f\rangle\langle Y, \nabla^2 \ell(Z)\rangle\\
&= (\nabla df(Z) \otimes d\ell + df \otimes \nabla d\ell(Z))(X,Y)\\
&= (\nabla df \otimes d\ell + df \otimes \nabla d\ell)(Z,X,Y). \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

b) Sendo $\nabla(df \otimes d\ell)$ um $(0,3)$-tensor. Então $\nabla^2(df \otimes d\ell)$ será um $(0,4)$-tensor, usando o item *a*), devemos ter

$$\begin{aligned}
\nabla^2(df \otimes d\ell)(W,Z,X,Y) &= \nabla_W(\nabla_Z(df \otimes d\ell))(X,Y) - \nabla_{\nabla_W Z}(df \otimes d\ell)(X,Y)\\
&= \nabla_W\big(\nabla_Z df \otimes d\ell + df \otimes \nabla_Z d\ell\big)(X,Y) - \big(\nabla_{\nabla_W Z} df \otimes d\ell\\
&\quad +df \otimes \nabla_{\nabla_W Z} d\ell\big)(X,Y)\\
&= \big(\nabla_W(\nabla_Z df) \otimes d\ell + \nabla_Z df \otimes \nabla_W d\ell + \nabla_W df \otimes \nabla_Z d\ell\\
&\quad +df \otimes \nabla_W(\nabla_Z d\ell)\big)(X,Y) - \big(\nabla_{\nabla_W Z} df \otimes d\ell\\
&\quad +df \otimes \nabla_{\nabla_W Z} d\ell\big)(X,Y)\\
&= \big((\nabla_W(\nabla_Z df) - \nabla_{\nabla_W Z} df) \otimes d\ell + df \otimes (\nabla_W(\nabla_Z d\ell)\\
&\quad -\nabla_{\nabla_W Z} d\ell)\big)(X,Y) + \big(\nabla_Z df \otimes \nabla_W d\ell\\
&\quad +\nabla_W df \otimes \nabla_Z d\ell\big)(X,Y)\\
&= \big(\nabla^2 df(W,Z) \otimes d\ell + df \otimes \nabla^2 d\ell(W,Z) + \nabla_Z df \otimes \nabla_W d\ell\\
&\quad +\nabla_W df \otimes \nabla_Z d\ell\big)(X,Y)\\
&= \big(\nabla^2 df \otimes d\ell + df \otimes \nabla^2 d\ell + S(\nabla df \otimes \nabla d\ell)\big)(W,Z,X,Y). \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

c) Por fim, de *b*) deduzimos que

$$\nabla^2(df \otimes d\ell) = \nabla^2 df \otimes d\ell + S(\nabla df \otimes \nabla d\ell) + df \otimes \nabla^2 d\ell.$$

Aplicando o traço na igualdade acima, tem-se

$$\operatorname{tr}(\nabla^2(df \otimes d\ell)) = \operatorname{tr}(\nabla^2 df \otimes d\ell) + \operatorname{tr}(S(\nabla df \otimes \nabla d\ell)) + \operatorname{tr}(df \otimes \nabla^2 d\ell).$$

Como

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\nabla^2 df \otimes d\ell) &= g^{ij}(\nabla^2 df \otimes d\ell)(\partial_i, \partial_j) \\
&= g^{ij}(\nabla^2 df(\partial_i, \partial_j) \otimes d\ell) \\
&= g^{ij}\nabla^2 df(\partial_i, \partial_j) \otimes d\ell \\
&= \Delta df \otimes d\ell
\end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$\operatorname{tr}(df \otimes \nabla^2 d\ell) = df \otimes \Delta d\ell.$$

Concluímos que

(1.24)

$$\Delta(df \otimes d\ell)(W,Z) = (\Delta df \otimes d\ell)(W,Z) + \operatorname{tr}(S(\nabla df \otimes \nabla d\ell)(W,Z)) + (df \otimes \Delta d\ell)(W,Z).$$

Observe que $\operatorname{tr}(S(\nabla df \otimes \nabla d\ell)(W,Z)) = 2\langle \nabla df(W), \nabla d\ell(Z)\rangle$. □

Lema 1.4 *Seja T um $(0,2)$-tensor. Dada $f \in C^\infty(M)$, tem-se*

$$\Delta(fT) = (\Delta f)T + f\Delta T + 2\nabla_{\nabla f}T.$$

Demonstração: Lembremo-nos de que o Laplaciano de um tensor qualquer T é dado por

(1.25) $$\Delta T = \operatorname{tr}(\nabla^2 T) = g^{ij}(\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}T - \nabla_{\nabla_{\partial_i}\partial_j}T).$$

Sendo assim, teremos

$$\begin{aligned}
\Delta(fT) &= g^{ij}(\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}(fT) - \nabla_{\nabla_{\partial_i}\partial_j}(fT)\big) \\
&= g^{ij}\big(\nabla_{\partial_i}((\nabla_{\partial_j}f)T + f\nabla_{\partial_j}T) - ((\nabla_{\nabla_{\partial_i}\partial_j}f)T + f\nabla_{\nabla_{\partial_i}\partial_j}T)\big) \\
&= g^{ij}\big((\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}f)T + (\nabla_{\partial_j}f)(\nabla_{\partial_i}T) + (\nabla_{\partial_i}f)(\nabla_{\partial_j}T) + f\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}T \\
&\quad -(\nabla_{\nabla_{\partial_i}\partial_j}f)T - f\nabla_{\nabla_{\partial_i}\partial_j}T\big) \\
&= g^{ij}\big((\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}f - \nabla_{\nabla_{\partial_i}\partial_j}f)T + f(\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}T - \nabla_{\nabla_{\partial i}\partial j}T) + \nabla_{\partial j}f\nabla_{\partial i}T \\
&\quad +\nabla_{\partial_i}f\nabla_{\partial_j}T\big) \\
&= (\Delta f)T + f\Delta T + 2g^{ij}\nabla_{\partial_i}f\nabla_{\partial_j}T \\
&= (\Delta f)T + f\Delta T + 2\nabla_{\nabla f}T. \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

$\square$

Para o que se segue, fixando $f \in C^{\infty}(M)$ definimos para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ o $(0,1)$-tensor $Ric^T(df)$ dado por

$$Ric^T(df)(X) = Ric(\nabla f, X).$$

Além do mais, vale que $\mathrm{tr}(df \otimes d\ell) = \langle \nabla f, \nabla \ell \rangle$.

Sendo assim, podemos escrever a conhecida fórmula dual de Bochner como no lema a seguir. Ademais, para maior entendimento das técnicas que utilizaremos à frente, faremos uma breve dedução da referida fórmula.

Lema 1.5 *Seja $f \in C^{\infty}(M)$. Então vale que*

$$\Delta df = d\Delta f + Ric^T(df). \tag{1.27}$$

Em particular, se $\nabla f = 0$ em ∂M, segue do caráter tensorial de $Ric^T(df)$ que em ∂M

$$\Delta df = d\Delta f.$$

Consequentemente em ∂M tem-se

$$tr(d\Delta\ell \otimes \Delta df) = \langle \nabla\Delta\ell, \nabla\Delta f \rangle.$$

Demonstração: Por motivo de praticidade considere aqui o referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$ geodésico em p, e pela definição de divergência, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned} \Delta df(X) = (\mathrm{div}\nabla^2 f)(X) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i}\nabla^2 f)(X), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla^2 f(X) - \nabla^2 f(\nabla_{e_i} X), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla_X \nabla f - \nabla_{\nabla_{e_i} X}\nabla f, e_i \rangle. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Assim, podemos afirmar que

$$
\begin{aligned}
Ric(X,\nabla f) &= \sum_{i=1}^{n}\langle R(X,e_i)\nabla f, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla_X\nabla f - \nabla_X\nabla_{e_i}\nabla f + \nabla_{[X,e_i]}\nabla f, e_i\rangle \\
&\overset{(1.28)}{=} \Delta df(X) + \sum_{i=1}^{n}\langle -\nabla_X\nabla_{e_i}\nabla f + \nabla_{\nabla_X e_i}\nabla f, e_i\rangle \\
&= \Delta df(X) + \sum_{i=1}^{n}\langle -\nabla_X\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle. \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
d\Delta f\big|_p(X) &= X(\Delta f) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X(e_ie_i(f) - \nabla_{e_i}e_i(f)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X(e_i\langle\nabla f, e_i\rangle) - \sum_{i=1}^{n} X\langle\nabla f, \nabla_{e_i}e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\big(X\langle\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle + X\langle\nabla f,\nabla_{e_i}e_i\rangle - \langle\nabla_X\nabla f,\nabla_{e_i}e_i\rangle - \langle\nabla f,\nabla_X\nabla_{e_i}e_i\rangle\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_X\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle. \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

Logo

$$\Delta df(X) = d\Delta f(X) + Ric^T(df)(X).$$

Portanto, as afirmações seguem de forma imediata. □

Com o auxílio do Lema 1.1, vamos calcular o Bilaplaciano do produto de duas funções suaves. Para isso observe que

$$
\begin{aligned}
\Delta\Delta(f\ell) &= \Delta(f\Delta\ell + \ell\Delta f + 2\langle\nabla f,\nabla\ell\rangle) \\
&= f\Delta^2\ell + 2\Delta f\Delta\ell + \ell\Delta^2 f + 2\langle\nabla f,\nabla\Delta\ell\rangle + 2\langle\nabla\ell,\nabla\Delta f\rangle + 2\Delta\langle\nabla f,\nabla\ell\rangle. \qquad (1.31)
\end{aligned}
$$

Segue do Lema 1.1 a identidade

$$
\begin{aligned}
\Delta^2(f\ell) &= f\Delta^2\ell + \ell\Delta^2 f + 2\Delta f\Delta\ell + 4\langle\nabla(\Delta f),\nabla\ell\rangle + 4\langle\nabla f,\nabla(\Delta\ell)\rangle + 4Ric(\nabla f,\nabla\ell) \\
&\quad +4\langle\nabla^2 f,\nabla^2\ell\rangle. \qquad (1.32)
\end{aligned}
$$

O Teorema a seguir relaciona o gradiente, divergente e Laplaciano para o caso de variedades Riemannianas imersas.

Teorema 1.1 *1. Dada uma variedade Riemanniana n-dimensional (M, g). Seja S uma hipersuperfície de (M, g) e seja $\phi : M \to \mathbb{R}$ é C^1 numa vizinhança de S, se $\nabla\phi(x)$ é a componente do $\bar{\nabla}\phi(x)$ tangente a S em x, com ∇ e $\bar{\nabla}$ conexões de Levi-Civita de S e $\mathbb{R}^n$ respectivamente, então*

$$\nabla\phi(x) = \bar{\nabla}\phi(x) - \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\nu, \tag{1.33}$$

onde ν é um campo vetorial normal sobre S.
2. Se S é uma superfície C^2 em $(M.g)$, $X : S \to\ M$ é um campo vetorial C^1 numa vizinhança de S, $\nu : M \to M$ é um campo vetorial unitário sobre uma vizinhança de S, e ν sobre S é o campo normal a S nos pontos de S, então

$$\mathrm{div}X = \bar{\mathrm{div}}X - (\mathrm{div}\nu)X\nu - \frac{\partial}{\partial\nu}(X\nu) \tag{1.34}$$

sobre S.
3. Se S é uma hipersuperfície C^2, $u : M \to \mathbb{R}$ é C^2 sobre uma vizinhança de S e ν é um campo vetorial normal unitário a S no sentido de 2 acima. Então

$$\Delta u = \bar{\Delta}u - \mathrm{div}\nu\frac{\partial u}{\partial\nu} - \frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2} + \nabla_S u\frac{\partial\nu}{\partial\nu} \tag{1.35}$$

sobre S.

O próximo resultado, conhecido por Teorema da Continuação Única é de fundamental importância em todas as demonstrações de nossos principais resultados, cuja demonstração encontrasse nas literaturas clássicas.

Teorema 1.2 (T.C.U.) *Considere (M, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional. Seja $U \subset M$ um domínio normal, suficientemente regular. Suponha que $u \in H^4(U)$ satisfaz*

$$|\Delta^2 u| \leq C(|\Delta u| + |\nabla u| + |u|) \qquad q.t.p. \tag{1.36}$$

em U para alguma constante positiva C e que $u = \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \Delta u = \dfrac{\partial}{\partial\nu}\Delta u = 0$ em um aberto $V \cap \partial U$. Então u é identicamente nula.

Para finalizarmos os comentários sobre as propriedades básicas do operador Bilaplaciano, vamos provar as identidades de Green relativas a tal operador.

Suponha M uma variedade Riemanniana orientada, compacta e com bordo ∂M. Sejam $f, \ell \in C^\infty(M)$ e ν o normal unitário exterior a M ao longo de ∂M. Então temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\nabla(\Delta\ell)) - \operatorname{div}(\Delta\ell\nabla f) &= f\Delta^2\ell + g(\nabla f, \nabla(\Delta\ell)) - \Delta\ell\Delta f - g(\nabla f, \nabla(\Delta\ell) \\ &= f\Delta^2\ell - \Delta\ell\Delta f. \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\ell\nabla(\Delta f)) - \operatorname{div}(\Delta f\nabla \ell) &= \ell\Delta^2 f + g(\nabla \ell, \nabla(\Delta f)) - \Delta f\Delta \ell - g(\nabla \ell, \nabla(\Delta f) \\ &= \ell\Delta^2 f - \Delta f\Delta \ell. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Subtraindo as expressões obtidas acima, obtemos

$$\operatorname{div}(f\nabla(\Delta\ell)) - \operatorname{div}(\Delta\ell\nabla f) - \operatorname{div}(\ell\nabla(\Delta f)) + \operatorname{div}(\Delta f\nabla\ell) = f\Delta^2\ell - \ell\Delta^2 f.$$

Integrando e aplicando o Teorema da Divergência, a segunda identidade de Green para o Bilaplaciano ficará sob a forma

$$\int_M (f\Delta^2\ell - \ell\Delta^2 f)\mathrm{dM} = \int_{\partial M} \big(\langle f\nabla(\Delta\ell), \nu\rangle - \langle\Delta\ell\nabla f, \nu\rangle - \langle\ell\nabla(\Delta f), \nu\rangle + \langle\Delta f\nabla\ell, \nu\rangle\big)d\nu. \tag{1.39}$$

Em seguida, sabendo que ocorre

$$\operatorname{div}(f\nabla(\Delta\ell)) - \operatorname{div}(\Delta\ell\nabla f) = f\Delta^2\ell - \Delta f\Delta\ell, \tag{1.40}$$

novamente integrando a igualde acima sobre M, devemos ter

$$\int_M \big(\operatorname{div}(f\nabla(\Delta\ell)) - \operatorname{div}(\Delta\ell\nabla f)\big)\mathrm{dM} = \int_M \big(f\Delta^2\ell - \Delta f\Delta\ell\big)\mathrm{dM}$$

e, fazendo uso do Teorema da Divergência,

$$\int_{\partial M} (\langle f\nabla(\Delta\ell), \nu\rangle - \langle\Delta\ell\nabla f, \nu\rangle)d\nu = \int_M f\Delta^2\ell\mathrm{dM} - \int_M \Delta f\Delta\ell\mathrm{dM}.$$

Portanto, a primeira identidade de Green para o Bilaplaciano ficará sob a forma

$$\int_M f\Delta^2\ell\mathrm{dM} = \int_M \Delta f\Delta\ell\mathrm{dM} + \int_{\partial M} (f\langle\nabla(\Delta\ell), \nu\rangle - \Delta\ell\langle\nabla f, \nu\rangle)d\nu. \tag{1.41}$$

Considerando as funções $\ell, f \in C^\infty(M)$ que se anulam no bordo e com derivadas normais também nulas no bordo, podemos concluir da primeira identidade de Green que o operador Bilaplaciano é simétrico, ou seja,

$$\int_M f\Delta^2\ell\mathrm{dM} = \int_M \Delta f\Delta\ell\mathrm{dM} = \int_M \ell\Delta(\Delta f)\mathrm{dM} = \int_M \ell\Delta^2 f\mathrm{dM}. \tag{1.42}$$

Pode-se provar que Δ^2 é essencialmente auto-adjunto no espaço de Hilbert $L^2(M, \mathrm{dM})$, atuando em funções de $H^4(M) \cap H_0^2(M)$.

Capítulo 2

Transversalidade em Famílias de Métricas

Neste capítulo consideraremos uma família de operadores Bilaplacianos parametrizada por métricas definidas em uma variedade M compacta com bordo. Os principais resultados a respeito dessa família são os seguintes:

Teorema 2.1 *O conjunto das métricas para os quais o operador $\Delta_g^2 : H^4 \cap H_0^2(M) \longrightarrow L^2(M)$ possui pelo menos um autovalor com multiplicidade maior ou igual a 2 é de codimensão 2.*

Teorema 2.2 *Quaisquer duas métricas g_0 e g_1 em uma variedade Riemanniana M compacta com bordo, podem ser conectadas por uma curva analítica $g(t)$ com $g(0) = g_0$ e $g(1) = g_1$, tal que o espectro do operador $\Delta_{g(t)}^2 : H^4 \cap H_0^2(M) \longrightarrow L^2(M)$ é composto apenas por autovalores simples, para todo $0 < t < 1$.*

A ideia da demonstração é aplicar os Teoremas A.2 e A.3 do Apêndice **A**, para família de operadores em espaços de Hilbert provados por Teytel em [19]. Em verdade a hipótese central dos teoremas é uma versão adaptada por Teytel da hipótese de transversalidade de Arnold apresentada primeiramente por Colin de Vèrdire em [4].

Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Considere $\mathcal{X}$ o conjunto das métricas Riemannianas de classe $\mathcal{C}^r$ em M. É bem conhecido que $\mathcal{X}$ é uma variedade de Banach, cujo espaço tangente em qualquer ponto é identificado com o espaço dos $(0, 2)$-tensores simétricos de classe $\mathcal{C}^r$.

É também muito difundido que o espectro do operador Bilaplaciano é discreto sem pontos de acumulação finitos.

O operador Bilaplaciano depende analiticamente da métrica g. Isto segue da expressão local do operador em coordenadas locais e do fato dos símbolos de *Christoffel* dependerem analiticamente da métrica e de suas derivadas.

Consideremos agora uma variação suave g_t da métrica g, de maneira que (M, g_t, dM_t) é uma variedade Riemanniana com medida suave. Aqui já são dados que H é um $(0,2)$-tensor definido por $H_{ij} = \frac{d}{dt}|_{t=0} g_{ij}(t)$ e ainda que, escrevendo $h = \langle H, g\rangle$, tem-se $\frac{d}{dt}|_{s=t}\mathrm{dM}_s = \frac{1}{2}h\mathrm{dM}_t$.

Para determinarmos $(\Delta^2)'$, considerando a variação da métrica, precisamos apenas estabelecer o seguinte resultado, cuja demonstração encontra-se no Apêndice **B**.

Lema 2.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e seja g_t uma variação diferenciável da métrica g. Então para toda $f \in C_c^\infty(M)$ temos*

$$(\Delta^2_{g(t)})'(f) = \Delta_{g(t)}\Delta'_{g(t)}f + \Delta'_{g(t)}\Delta_{g(t)}f, \tag{2.1}$$

onde $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\Delta_{g(t)})(f) =: \Delta'_{g(t)}f = \frac{1}{2}\langle dh, df\rangle - \langle \mathrm{div}H, df\rangle - \langle H, \nabla^2 f\rangle.$

Considerando uma família analítica de métricas $g(t)$ a ProposiçãoB.1 garante a existência de uma curva analítica de autovalores e autofunções associados ao operador Bilaplaciano. Com isso podemos facilmente calcular a derivada de autovalores.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\Big(\Delta^2_{g(t)} + \lambda(t)\Big)(\phi(t)) \;=\; (\Delta^2_{g(t)})'\phi + \lambda'\phi + (\Delta^2_g + \lambda)\phi' = 0, \tag{2.2}$$

daí segue que $\lambda' = \int_M \phi(\Delta^2_{g(t)})'\phi \mathrm{dM}$.

A proposição a seguir aplica-se dentre outras coisas a obtenção de uma expressão explícita para o λ'.

Proposição 2.1 *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo, φ e ψ autofunções ortonormais associadas ao autovalor λ, do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} (\Delta_g^2 + \lambda)u &= 0 \quad M, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = u &= 0 \quad \partial M. \end{cases}$$

Considere a seguinte família de métricas tal que $g(0) = g$, $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(t) = H$. Então

$$\begin{aligned}\int_M \psi(\Delta^2_{g(t)})'\varphi \mathrm{dM} &= \int_M \Big\langle -\frac{1}{2}\big(\Delta_g\psi\Delta_g\varphi + \langle\nabla(\Delta_g\psi), \nabla\varphi\rangle - \lambda\psi\varphi \\ &\quad + \langle\nabla\psi, \nabla(\Delta_g\varphi)\rangle\big)g + (d\Delta_g\psi \otimes d\varphi + d\psi \otimes d\Delta_g\varphi), H\Big\rangle \mathrm{dM}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Demonstração: Observemos que

$$\begin{aligned}\int_M \psi(\Delta^2_{g(t)})'\varphi \mathrm{dM} &= \int_M \psi(\Delta_g\Delta'_{g(t)}\varphi + \Delta'_{g(t)}\Delta_g\varphi)\mathrm{dM} \\ &= \int_M (\Delta_g\psi\Delta'_{g(t)}\varphi + \psi\Delta'_{g(t)}\Delta_g\varphi)\mathrm{dM} \\ &= \int_M \big(\Delta_g\psi\big(\frac{1}{2}\langle dh, d\varphi\rangle - \langle \mathrm{div}H, d\varphi\rangle - \langle H, \nabla^2\varphi\rangle\big) \\ &\quad + \psi\big(\frac{1}{2}\langle dh, d(\Delta_g\varphi)\rangle - \langle \mathrm{div}H, d(\Delta_g\varphi)\rangle - \langle H, \nabla^2(\Delta_g\varphi)\rangle\big)\big)\mathrm{dM}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde

$$\Delta'_{g(t)}\varphi = \frac{1}{2}\langle dh, d\varphi\rangle - \langle \mathrm{div}H, d\varphi\rangle - \langle H, \nabla^2\varphi\rangle. \tag{2.5}$$

Ainda, por propriedade de divergência, vale:

$$\mathrm{div}(h\psi\nabla(\Delta_g\varphi)) = h\psi\Delta_g^2\varphi + h\langle d\psi, d(\Delta_g\varphi)\rangle + \psi\langle dh, d(\Delta_g\varphi)\rangle, \tag{2.6}$$

que pelo Teorema da Divergência fica

$$\int_M \psi\langle dh, d(\Delta_g\varphi)\rangle \mathrm{dM} = -\int_M (h\psi\Delta_g^2\varphi + h\langle d\psi, d(\Delta_g\varphi)\rangle)\mathrm{dM}. \tag{2.7}$$

De forma análoga,

$$\int_M \Delta_g\psi\langle dh, d\varphi\rangle \mathrm{dM} = -\int_M h\Delta_g\psi\Delta_g\varphi \mathrm{dM} - \int_M h\langle\nabla(\Delta_g\psi), d\varphi\rangle \mathrm{dM} \tag{2.8}$$

e também $\int_M \psi\Delta_g\Delta'_{g(t)}\varphi \mathrm{dM} = \int_M \Delta_g\psi\Delta'_{g(t)}\varphi \mathrm{dM}$ dado que Δ_g é simétrico.

Além disso, por (1.30) tem-se

$$\mathrm{div}(H(\psi\nabla(\Delta_g\varphi))) = \psi\langle \mathrm{div}H, \nabla(\Delta_g\varphi)\rangle + \psi\langle\nabla^2\Delta_g\varphi, H\rangle + H(\nabla\psi, \nabla(\Delta_g\varphi)). \tag{2.9}$$

Ao aplicarmos o Teorema da Divergência na igualdade acima, devemos ter

$$-\int_M \psi\langle \mathrm{div}H, d(\Delta_g\varphi)\rangle \mathrm{dM} = \int_M (\psi\langle\nabla^2(\Delta_g\varphi), H\rangle + H(\nabla\psi, \nabla(\Delta_g\varphi)))\mathrm{dM}. \tag{2.10}$$

Analogamente temos

$$-\int_M \Delta_g\psi\langle \mathrm{div} H, d\varphi\rangle \mathrm{dM} = \int_M (\Delta_g\psi\langle\nabla^2\varphi, H\rangle + H(\nabla(\Delta_g\psi), \nabla\varphi))\mathrm{dM}. \tag{2.11}$$

Com tudo isso e usando que $H(\nabla\psi, \nabla(\Delta_g\varphi)) = \langle d\psi\otimes d\Delta_g\varphi, H\rangle$, obteremos

$$\begin{aligned}
\int_M \psi(\Delta^2_{g(t)})'\varphi\mathrm{dM} &= \int_M \big((-\frac{1}{2}h\Delta_g\psi\Delta_g\varphi - \frac{1}{2}h\langle\nabla(\Delta_g\psi), d\varphi\rangle \\
&\quad + H(\nabla(\Delta_g\psi), \nabla\varphi)) + (\frac{1}{2}\lambda h\psi\varphi - \frac{1}{2}h\langle d\psi, d\Delta_g\varphi\rangle \\
&\quad + H(\nabla\psi, \nabla(\Delta_g\varphi)))\big)\mathrm{dM} \\
&= \int_M \big\langle -\frac{1}{2}(\Delta_g\psi\Delta_g\varphi + \langle\nabla(\Delta_g\psi), \nabla\varphi\rangle + \psi\Delta_g^2\varphi \\
&\quad + \langle\nabla\psi, \nabla(\Delta_g\varphi)\rangle)g + (d\Delta_g\psi\otimes d\varphi + d\psi\otimes d\Delta_g\varphi), H\big\rangle\mathrm{dM}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

□

No intuito de aplicarmos os Teoremas A.2 e A.3 nas demostrações dos principais resultados deste capítulo será necessário fazermos algumas considerações a respeito da família de operadores Bilaplaciano.

Conforme as hipóteses dos teoremas a serem utilizados, ao perturbarmos a métrica, observamos que o operador Bilaplaciano não é auto-adjunto na métrica perturbada. Para contornarmos tal situação precisamos definir um operador a partir do Bilaplaciano, o qual possui o mesmo espectro. Para isso, é necessário que se tome uma isometria definida por

$$P_{\bar g} : L^2(M, \mathrm{dM}) \longrightarrow L^2(M, \mathrm{d\bar{M}}), \tag{2.13}$$

onde, para cada u, $P_{\bar g}(u) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{det(\bar g_{ij})}}\sqrt[4]{det(g_{ij})}u$, em que $\bar g \in \mathcal{X}$. Em seguida, basta definirmos o novo operador tomando $A(\bar g) := P_{\bar g}^{-1}\Delta^2_{\bar g}P_{\bar g}$. Desta forma, $A(\bar g)$ é um operador auto-adjunto e ainda possui o mesmo espectro do operador Bilaplaciano. Para melhor entendimento veja Proposição B.1.

Assim, consideremos $\psi, \varphi \in C^\infty(M)$, autofunções do operador $A(g_0) = P_g^{-1}\Delta_g^2 P_g$. Dado o funcional

$$\ell'_{\psi\varphi}(0) = \int_M \psi A'(g_0)\varphi\mathrm{dM}, \tag{2.14}$$

em que $A'(g_0) = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(g_t)$.

Observamos que

$$
\begin{aligned}
A'(g_0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(P_{g(t)}^{-1}\Delta_{g(t)}^2 P_{g(t)}\Big)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(P_{g(t)}^{-1}\Big)\Delta_g^2 P_g + P_g^{-1}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\Delta_{g(t)}^2\Big)P_g + P_g^{-1}\Delta_g^2\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(P_{g(t)}\Big)\\
&= (P_g^{-1})'\Delta_g^2 + \Delta_g^2 P_g' + (\Delta_g^2)'. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Desta forma, teremos

$$
\begin{aligned}
\ell'_{\psi\varphi}(0) &= \int_M \psi\Big((P_g^{-1})'\Delta_g^2 + \Delta_g^2 P_g' + (\Delta_g^2)'\Big)\varphi \mathrm{dM}\\
&= \int_M \Big(\psi(P_g^{-1})'\Delta_g^2\varphi + \psi(\Delta_g^2)P_g'\varphi + \psi(\Delta_g^2)'\varphi\Big)\mathrm{dM}. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Em (2.16), a primeira parcela do lado direito fica

$$
\int_M \psi(P_g^{-1})'\Delta_g^2\varphi \mathrm{dM} = -\int_M \lambda\psi\varphi(P_g^{-1})'\mathrm{dM}, \qquad (2.17)
$$

enquanto que a segunda parcela será

$$
\int_M \psi\Delta_g^2 P_g'\varphi \mathrm{dM} = \int_M P_g'\psi\Delta_g^2\varphi \mathrm{dM} = -\int_M P_g'\lambda\psi\varphi \mathrm{dM}. \qquad (2.18)
$$

Lembrando que

$$
P_{\bar g}(u) = \frac{1}{\sqrt[4]{det(\bar g_{ij})}}\sqrt[4]{det(g_{ij})}u,
$$

então tem-se de forma imediata que $(P_g)' = -\frac{1}{4}h$ e que $(P_g^{-1})' = \frac{1}{4}h$.

Portanto a soma de (2.17) com (2.18) é zero, e consequentemente

$$
\ell'_{\psi\varphi}(H) = \int_M \psi(\Delta_g^2)'\varphi \mathrm{dM}. \qquad (2.19)
$$

A verificação das hipóteses dos Teoremas 2.1 e 2.2 está contida na proposição a seguir.

Proposição 2.2 *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e com bordo, φ e ψ autofunções ortonormais associadas ao autovalor λ do problema de Dirichlet*

$$
\begin{cases}
(\Delta_g^2 + \lambda)u = 0 & M,\\
\frac{\partial u}{\partial \nu} = u = 0 & \partial M.
\end{cases}
$$

Para cada par de funções $u, v \in C^\infty(M)$ convém definirmos um $(0,2)$-tensor dado por

(2.20)

$$
\tau_{u,v} := -\frac{1}{2}\big(\Delta_g u\Delta_g v + \langle\nabla(\Delta_g u), \nabla v\rangle + \langle\nabla u, \nabla(\Delta_g v)\rangle - \lambda uv\big)g + d(\Delta_g u)\otimes dv + du\otimes d(\Delta_g v).
$$

De modo que podemos definir sobre o espaço dos $(0,2)$-tensores simétricos $\mathcal{S}^2(M)$ os funcionais lineares não nulos a seguir:

$$\ell'_{\psi\varphi}(H) = \int_M \psi(A(g))'\varphi \mathrm{dM} = \int_M \psi(\Delta_g^2)'\varphi \mathrm{dM} = \int_M \langle \tau_{\psi\varphi}, H\rangle \mathrm{dM}, \tag{2.21}$$

$$\ell'_{\varphi\varphi}(H) = \int_M \varphi(A(g)))'\varphi \mathrm{dM} = \int_M \varphi(\Delta_g^2)'\varphi \mathrm{dM} = \int_M \langle \tau_{\varphi\varphi}, H\rangle \mathrm{dM} \tag{2.22}$$

e

$$\ell'_{\psi\psi}(H) = \int_M \psi(A(g))'\psi \mathrm{dM} = \int_M \psi(\Delta_g^2)'\psi \mathrm{dM} \int_M \langle \tau_{\psi\psi}, H\rangle \mathrm{dM}, \tag{2.23}$$

em que $H \in \mathcal{S}^2(M)$. Então, $\ell'_{\varphi\varphi} - \ell'_{\psi\psi}$ e $\ell'_{\psi\varphi}$ são funcionais lineares linearmente independentes.

Demonstração: Para demonstrarmos tal fato, devemos considerar a seguinte combinação linear

$$\alpha(\ell'_{\varphi\varphi} - \ell'_{\psi\psi}) + \beta\ell'_{\psi\varphi} = 0. \tag{2.24}$$

Segue de (2.21), (2.22), (2.23) e (2.24) que

$$\int_M \langle \alpha\big(\tau_{\varphi\varphi} - \tau_{\psi\psi}\big) + \beta\tau_{\psi\varphi}, H\rangle \mathrm{dM} = 0, \ \ \forall H \in \mathcal{S}^2(M).$$

É importante salientar que $\tau_{\varphi\varphi}$ e $\tau_{\psi\psi}$ são ambos simétricos. Para isso, basta ver que

$$\begin{aligned}(d\Delta_g\varphi \otimes d\varphi + d\varphi \otimes d\Delta_g\varphi)(X,Y) &= d\Delta_g\varphi(Y)d\varphi(X) + d\varphi(Y)d\Delta_g\varphi(X)\\ &= (d\Delta_g\varphi \otimes d\varphi + d\varphi \otimes d\Delta_g\varphi)(Y,X).\end{aligned}$$

O mesmo argumento é usado para $\tau_{\psi\psi}$. Mas $\tau_{\psi\varphi}$ não é simétrico em geral. Nesse caso, vamos tomar o simetrizador de tensores. Assim, definimos o simetrizador por $S(d\Delta_g u \otimes dv) := \dfrac{1}{2}(d\Delta_g u \otimes dv + dv \otimes d\Delta_g u)$, $\forall u, v \in C^\infty(M)$.

Com isso, ao tomarmos a integral

$$\int_M \langle \alpha(\tau_{\varphi\varphi} - \tau_{\psi\psi}) + \beta S(\tau_{\psi\varphi}), H\rangle dM = 0, \ \ \forall H \in \mathcal{S}^2(M),$$

podemos afirmar que

$$\alpha(\tau_{\varphi\varphi} - \tau_{\psi\psi}) + \beta S(\tau_{\psi\varphi}) = 0 \ \text{ em } \ M. \tag{2.25}$$

Agora, observe que sendo

$$\begin{aligned}\tau_{uv} &= -\frac{1}{2}\big(\Delta_g u\Delta_g v + \langle\nabla(\Delta_g u),\nabla v\rangle + \langle\nabla u,\nabla(\Delta_g v)\rangle - \lambda uv\big)g\\ &\quad + d(\Delta_g u)\otimes dv + du\otimes d(\Delta_g v)\end{aligned}$$

e também notando que $\mathrm{tr}(d(\Delta_g u)\otimes dv) = \langle\nabla(\Delta_g u),\nabla v\rangle$ e ainda que

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}S(d\Delta_g u\otimes dv) &= \mathrm{tr}\frac{1}{2}(d\Delta_g u\otimes dv + dv\otimes d\Delta_g u)\\ &= \frac{1}{2}(\langle\nabla\Delta_g u,\nabla v\rangle + \langle\nabla v,\nabla\Delta_g u)\\ &= \langle\nabla\Delta_g u,\nabla v\rangle,\ \ \forall u,v\in C^\infty(M),\end{aligned}$$

(2.26)

devemos ter

$$\begin{aligned}-2\mathrm{tr}\tau_{uv} &= n\big(\Delta_g u\Delta_g v - \lambda uv) + n(\langle\nabla(\Delta_g u),\nabla v\rangle + \langle\nabla u,\nabla(\Delta_g v)\rangle\big)\\ &\quad -2(\langle\nabla(\Delta_g u),\nabla v\rangle + \langle\nabla u,\nabla(\Delta_g v)\rangle),\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathrm{tr}\tau_{uv} = -\frac{n}{2}(\Delta_g u\Delta_g v - \lambda uv) + \frac{(2-n)}{2}(\langle\nabla(\Delta_g u),\nabla v\rangle + \langle\nabla u,\nabla(\Delta_g v)\rangle). \tag{2.27}$$

Portanto, tomando o traço em (2.25) e restringindo ao bordo de M, temos

$$(-\frac{n}{2})\alpha(\Delta_g\varphi)^2 + (-\frac{n}{2})\beta(\Delta_g\psi\Delta_g\varphi) - (-\frac{n}{2})\alpha(\Delta_g\psi)^2 = 0,$$

ou ainda,

$$\alpha(\Delta_g\varphi)^2 + \beta(\Delta_g\psi\Delta_g\varphi) - \alpha(\Delta_g\psi)^2 = 0. \tag{2.28}$$

Vamos analisar a forma quadrática em (2.28).

A forma matricial de (2.28) é dada por

$$[\Delta_g\varphi\ \ \Delta_g\psi]\begin{bmatrix}\alpha & \frac{\beta}{2}\\ \frac{\beta}{2} & -\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_g\varphi\\ \Delta_g\psi\end{bmatrix} = 0.$$

Diagonalizando, temos

$$(1):[x\ \ y]\begin{bmatrix}c & 0\\ 0 & -c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = 0,$$

onde

$$(2):\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \Delta_g\varphi \\ \Delta_g\psi \end{bmatrix}$$

em que M é a matriz ortogonal e c é não nulo. Assim, em (1) devemos ter $c(x^2-y^2)=0$, ou seja, $c(x-y)(x+y)=0$. Temos dois casos a considerar, a situação em que $x=y$ e a outra será $x=-y$. Para o primeiro caso, usando (2), devemos ter

$$M\begin{bmatrix} \Delta_g\varphi \\ \Delta_g\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_g\varphi \\ \Delta_g\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}\Delta_g\varphi + m_{12}\Delta_g\psi \\ m_{21}\Delta_g\varphi + m_{22}\Delta_g\psi \end{bmatrix}$$

e então teremos

$$m_{11}\Delta_g\varphi + m_{12}\Delta_g\psi = m_{21}\Delta_g\varphi + m_{22}\Delta_g\psi,$$

o que nos diz que

$$0 = (m_{11}-m_{21})\Delta_g\varphi + (m_{12}-m_{22})\Delta_g\psi,$$

considerando $a = m_{11}-m_{21}$ e $b = m_{12}-m_{22}$, onde não podem ser ambos nulos, pois M é ortogonal e suas colunas seriam múltiplas uma da outra, uma contradição.

Teremos dois casos a serem analisados. Primeiramente suponha que a ou b nulo, por exemplo a nulo. Então teremos que

$$0 = 0\Delta_g\varphi + b\Delta\psi,$$

o que implica em $\Delta_g\psi = 0$. Olhando para a equação (2.28), pode-se afirmar que $\alpha(\Delta_g\varphi)^2 + \beta\Delta_g\varphi\, 0 - \alpha\, 0 = 0$ que implica em $\alpha(\Delta_g\varphi)^2 = 0$, ou seja, $\Delta_g\varphi = 0$.

Da mesma forma quando $x=-y$, teremos

$$0 = (m_{11}+m_{21})\Delta_g\varphi + (m_{12}+m_{22})\Delta_g\psi,$$

e seguem-se todas as consequências acima obtidas para $x=y$.

Portanto temos $\Delta_g\psi = \Delta_g\varphi = 0$ em ∂M.

A condição acima não é suficiente para obtermos uma contradição. Com o intuito de aplicarmos o Teorema da Continuação Única, mostraremos que as condições de fronteira juntamente com a condição acima nos levam a $\dfrac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\varphi = \dfrac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\psi = 0$ em ∂M.

Note que

$$\begin{aligned} \Delta_g\tau_{\psi\varphi} &= \Delta_g\big((\Delta_g\psi\Delta_g\varphi - \lambda\psi\varphi + \langle\nabla(\Delta_g\psi),\nabla\varphi\rangle \\ &\quad +\langle\nabla\psi,\nabla(\Delta_g\varphi)\rangle)g - 2(d\Delta_g\psi\otimes d\varphi + d\psi\otimes d\Delta_g\varphi)\big). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ao tomarmos $g = T$ e sendo $\nabla_{\partial_i} g = 0$, fazendo uso do Lema 1.4, a equação (2.29) fica

$$\begin{aligned}\Delta_g \tau_{\psi\varphi} &= \big(\Delta_g(\Delta_g\psi\Delta_g\varphi) - \lambda\Delta_g(\psi\varphi) + \Delta_g(\langle\nabla(\Delta_g\psi), \nabla\varphi\rangle) \\ &\quad +\Delta_g(\nabla\psi, \nabla(\Delta_g\varphi)\rangle)\big)g - 2\Delta_g(d\Delta_g\psi \otimes d\varphi) \\ &\quad -2\Delta_g(d\psi \otimes d\Delta_g\varphi). \qquad (2.30)\end{aligned}$$

Faremos uma breve análise de cada uma das parcelas de (2.30).

Na primeira parcela, temos:

$$\Delta_g(\Delta_g\psi\Delta_g\varphi) = -\lambda\psi\Delta_g\varphi - \lambda\varphi\Delta_g\psi + 2\langle\nabla(\Delta_g\psi), \nabla(\Delta_g\varphi)\rangle \tag{2.31}$$

e, na segunda,

$$-\lambda\Delta_g(\psi\varphi) = -\lambda(\psi\Delta_g\varphi + \varphi\Delta_g\psi + 2\langle\nabla\psi, \nabla\varphi\rangle). \tag{2.32}$$

Já na terceira parcela, usando o Lema 1.1 chegamos a

$$\Delta_g(\langle\nabla(\Delta_g\psi), \nabla\varphi\rangle) = 2Ric(\nabla\Delta_g\psi, \nabla\varphi) + 2\langle\nabla^2\Delta_g\psi, \nabla^2\varphi\rangle - \lambda\langle\nabla\psi, \nabla\varphi\rangle + \langle\nabla\Delta_g\psi, \nabla\Delta_g\varphi\rangle. \tag{2.33}$$

Utilizando-se de argumentos totalmente análogos aos da parcela anterior, a quarta parcela assumirá a forma abaixo

$$\Delta_g(\langle\nabla\psi, \nabla(\Delta_g\varphi)\rangle) = 2Ric(\nabla\psi, \nabla\Delta_g\varphi) + 2\langle\nabla^2\psi, \nabla^2\Delta_g\varphi\rangle - \lambda\langle\nabla\psi, \nabla\varphi\rangle + \langle\nabla\Delta_g\psi, \nabla\Delta_g\varphi\rangle. \tag{2.34}$$

Finalmente, nas duas últimas parcelas basta tomarmos o Lema 1.3, e obteremos as seguintes equações

$$\Delta_g(d(\Delta_g\psi) \otimes d\varphi) = \Delta_g(d(\Delta_g\psi)) \otimes d\varphi + 2\langle\nabla(d\Delta_g\psi), \nabla d\varphi\rangle + d(\Delta_g\psi) \otimes \Delta_g(d\varphi) \tag{2.35}$$

e

$$\Delta_g(d\psi \otimes d(\Delta_g\varphi)) = \Delta_g(d\psi) \otimes d(\Delta_g\varphi) + 2\langle\nabla d\psi, \nabla(d\Delta_g\varphi)\rangle + d\psi \otimes \Delta_g(d(\Delta_g\varphi)). \tag{2.36}$$

Logo, ao substituirmos (2.31) a (2.36) em (2.30), obtém-se

$$\begin{aligned}\Delta_g \tau_{\psi\varphi} &= \Big(- 2\lambda\psi\Delta_g\varphi - 2\lambda\varphi\Delta_g\psi + 4\langle\nabla\Delta_g\psi, \nabla\Delta_g\varphi\rangle - 4\lambda\langle\nabla\psi, \nabla\varphi\rangle \\ &\quad +2\langle\nabla^2\Delta_g\psi, \nabla^2\varphi\rangle + 2\langle\nabla^2\psi, \nabla^2\Delta_g\varphi\rangle + 2Ric(\nabla\Delta_g\psi, \nabla\varphi) \\ &\quad +2Ric(\nabla\psi, \nabla\Delta_g\varphi)\Big)g - 2\Big(\Delta_g(d\Delta_g\psi) \otimes d\varphi + 2\langle\nabla(d\Delta_g\psi), \nabla d\varphi\rangle \\ &\quad +d\Delta_g\psi \otimes \Delta_g d\varphi + \Delta_g d\psi \otimes d\Delta_g\varphi + 2\langle\nabla d\psi, \nabla(d\Delta_g\varphi)\rangle + d\psi \otimes \Delta_g(d\Delta_g\varphi)\Big). \qquad (2.37)\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.5, temos:

$$d\Delta_g\psi\otimes\Delta_g d\varphi = d\Delta_g\psi\otimes(d\Delta_g\varphi + Ric_g^T(\varphi)) = d\Delta_g\psi\otimes d\Delta_g\varphi + d\Delta_g\psi\otimes Ric_g^T(d\varphi), \tag{2.38}$$

também verificamos

$$\Delta_g d\psi\otimes d\Delta_g\varphi = (d\Delta_g\psi + Ric_g^T(d\psi))\otimes d\Delta_g\varphi = d\Delta_g\psi\otimes d\Delta_g\varphi + Ric_g^T(d\psi)\otimes d\Delta_g\varphi. \tag{2.39}$$

A relação (2.37) assumirá, devido a (2.38) e (2.39), a seguinte forma

$$\begin{aligned}\Delta_g\tau_{\psi\varphi} \;=\;& \Big(- 2\lambda\psi\Delta_g\varphi - 2\lambda\varphi\Delta_g\psi + 4\langle\nabla\Delta_g\psi, \nabla\Delta_g\varphi\rangle - 4\lambda\langle\nabla\psi, \nabla\varphi\rangle\\ &+2\langle\nabla^2\Delta_g\psi, \nabla^2\varphi\rangle + 2\langle\nabla^2\psi, \nabla^2\Delta_g\varphi\rangle + 2Ric(\nabla\Delta_g\psi, \nabla\varphi)\\ &+2Ric(\nabla\psi, \nabla\Delta_g\varphi)\Big)g - 2\Big(\Delta_g(d\Delta_g\psi)\otimes d\varphi + 2\langle\nabla(d\Delta_g\psi), \nabla d\varphi\rangle\\ &+2d\Delta_g\psi\otimes d\Delta_g\varphi + d\Delta_g\psi\otimes Ric_g^T(d\varphi) + Ric_g^T(d\psi)\otimes d\Delta_g\varphi\\ &+2\langle\nabla d\psi, \nabla(d\Delta_g\varphi)\rangle + d\psi\otimes\Delta_g(d\Delta_g\varphi)\Big).\end{aligned} \tag{2.40}$$

Como

$$S(d\Delta_g\psi\otimes d\Delta_g\varphi) = \frac{1}{2}(d\Delta_g\psi\otimes d\Delta_g\varphi + d\Delta_g\varphi\otimes d\Delta_g\psi),$$

então

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}S(d\Delta_g\psi\otimes d\Delta_g\varphi) &= \frac{1}{2}(\langle\nabla\Delta_g\psi, \nabla\Delta_g\varphi\rangle + \langle\nabla\Delta_g\varphi, \nabla\Delta_g\psi\rangle)\\ &= \langle\nabla\Delta_g\psi, \nabla\Delta_g\varphi\rangle.\end{aligned} \tag{2.41}$$

E daí, sendo φ e ψ autofunções do problema de Dirichlet e $\Delta_g\varphi = \Delta_g\psi = 0$ em ∂M, temos que em ∂M vale

$$\nabla^2\varphi = 0 \;\text{ e }\; \nabla(\Delta_g\varphi) = \nabla^\nu(\Delta_g\varphi) = \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\varphi). \tag{2.42}$$

De forma análoga,

$$\nabla^2\psi = 0 \;\text{ e }\; \nabla(\Delta_g\psi) = \nabla^\nu(\Delta_g\psi) = \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\psi). \tag{2.43}$$

Juntando todos os fatos em (2.41),(2.42) e (2.43), e tomando o traço, podemos afirmar que em ∂M, (2.40) poderá ser reescrita como

$$\mathrm{tr}\Delta_g\tau_{\psi\varphi}\Big|_{\partial M} = 4(n-1)\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\psi)\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\varphi). \tag{2.44}$$

Usando argumentos semelhantes, ainda podemos afirmar que

$$\text{tr}\Delta_g \tau_{\varphi\varphi}\Big|_{\partial M} = 4(n-1)[\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\varphi)]^2, \tag{2.45}$$

e que

$$\text{tr}\Delta_g \tau_{\psi\psi}\Big|_{\partial M} = 4(n-1)[\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\psi)]^2. \tag{2.46}$$

Além disso, aplicando o traço do Laplaciano em (2.25) temos

$$\text{tr}\Delta_g[\alpha\tau_{\varphi\varphi} + \beta S(\tau_{\psi\varphi}) - \alpha\tau_{\psi\psi}] = 0,$$

que, mediante restrição a ∂M, nos fornece

$$4(n-1)[\alpha(\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\varphi)^2 + \beta(\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\psi\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\varphi) - \alpha(\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\psi)^2]\Big|_{\partial M} = 0, \tag{2.47}$$

ou seja,

$$\alpha(\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\varphi)^2 + \beta(\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\psi\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\varphi) - \alpha(\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\psi)^2 = 0 \quad em \quad \partial M. \tag{2.48}$$

Isso nos diz que ou $\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\varphi = 0$ ou $\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\psi = 0$ em todo ponto de ∂M. Assim, como $\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\varphi = \Delta_g\varphi = \varphi = 0$ ou $\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\psi = \Delta_g\psi = \psi = 0$ em ∂M, logo pelo Princípio da Continuação Única temos que $\varphi \equiv 0$ em M ou $\psi \equiv 0$ em M, um absurdo.

Por fim, vamos analisar o caso em que $a, b \neq 0$. Sendo que $a\Delta_g\varphi + b\Delta_g\psi = 0$, temos $\Delta_g(a\varphi + b\psi) = 0$. Tomando $\eta = a\varphi + b\psi$, então $\Delta_g\eta = 0$, onde η é uma autofunção do Bilaplaciano. Da mesma forma, podemos definir uma função $\bar{\eta} = a\varphi - b\psi$ de tal forma que $\bar{\eta}$ é ortogonal a η, ou seja, $\int_M \eta\cdot\bar{\eta}\text{dM} = 0$.

Considerando os funcionais análogos ao feito anteriormente teremos uma versão de (2.28) para η e $\bar{\eta}$ dada por

$$\alpha(\Delta_g\eta)^2 + \beta(\Delta_g\eta\Delta_g\bar{\eta}) - \alpha(\Delta_g\bar{\eta})^2 = 0,$$

em que $\Delta_g\eta = 0$ em ∂M teremos $\alpha(\Delta_g\bar{\eta})^2 = 0$ em ∂M o que nos dá $\Delta_g\bar{\eta} = 0$ em ∂M. Observemos que como consequência de $\Delta_g\eta = \Delta_g\bar{\eta} = 0$ em ∂M, quando realizamos procedimentos análogos aos de φ e ψ em (2.28) para η e $\bar{\eta}$, obtemos

$$\Delta_g\tau_{\eta\bar{\eta}}\Big|_{\partial M} = 4(n-1)\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\eta)\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\bar{\eta}), \tag{2.49}$$

o que nos fornece

$$\Delta_g \tau_{\eta\eta}\Big|_{\partial M} = 4(n-1)[\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g \eta)]^2 \tag{2.50}$$

e

$$\Delta_g \tau_{\bar{\eta}\bar{\eta}}\Big|_{\partial M} = 4(n-1)[\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g \bar{\eta})]^2. \tag{2.51}$$

Com isso, adaptando (2.25) para η e $\bar{\eta}$, temos

$$\alpha\tau_{\eta\eta} + \beta S(\tau_{\eta\bar{\eta}}) - \alpha\tau_{\bar{\eta}\bar{\eta}} = 0$$

e portanto

$$\mathrm{tr}\Delta_g[\alpha\tau_{\eta\eta} + \beta\tau_{\eta\bar{\eta}} - \alpha\tau_{\bar{\eta}\bar{\eta}}] = 0,$$

que mediante a restrição ao ∂M, nos fornece

$$4(n-1)[\alpha(\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\eta))^2 + \beta(\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\eta)\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\bar{\eta})) - \alpha(\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\bar{\eta}))^2] = 0, \tag{2.52}$$

ou seja,

$$\alpha(\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\eta))^2 + \beta(\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\eta)\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\bar{\eta})) - \alpha(\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\bar{\eta}))^2 = 0 \quad em \quad \partial M. \tag{2.53}$$

De (2.53) podemos afirmar que ou $\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\eta) = 0$ ou $\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\bar{\eta}) = 0$ em todo ponto de ∂M.

Portanto, como $\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\eta) = \Delta_g\eta = \eta = 0$ em ∂M ou $\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta_g\bar{\eta}) = \Delta_g\bar{\eta} = \bar{\eta} = 0$ em ∂M, obtemos pelo Princípio da Continuação Única que ou $\eta \equiv 0$ em M ou $\bar{\eta} \equiv 0$ em M, um absurdo.

□

Com tal resultado em mãos faremos a demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2.

De fato, basta observar que já foi verificado que a família de operadores $A(g) = P_g^{-1}\Delta_g^2 P_g$ é auto-adjunta e possui o mesmo espectro do operador Bilaplaciano. Ao definirmos o funcional $\ell'_{\psi\varphi}(H) = \int_M \psi(A(g))'\varphi \mathrm{dM}$ é observado em (2.19) que $\ell'_{\psi\varphi}(H) = \int_M \psi(\Delta_g^2)'\varphi \mathrm{dM}$. Com isso, segue da Proposição 2.2 que $A(g)$ satisfaz **SAH2**. Portanto, concluímos a demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2 usando os Teoremas A.2 e A.3.

Capítulo 3

Família de Domínios

Neste capítulo consideraremos uma família de operadores Bilaplacianos, cujo parâmetro é o domínio de definição do operador. Os domínios considerados serão abertos limitados em uma variedade Riemanniana. Em caso de domínios em variedades *flat* o análogo do Teorema A.3 será demonstrado. Já em domínios em variedades quaisquer, estabelecemos a simplicidade genérica dos autovalores.

Sejam $\mathcal{T}$ um espaço topológico e $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{T} / x \text{ possui } propriedade\ \mathcal{P}\}$. Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma propriedade genérica se $\mathcal{F}$ é um conjunto residual em $\mathcal{T}$.

Passaremos a descrever a variedade de Banach separável que utilizaremos como conjunto de parâmetros.

Seja Ω_0 um domínio limitado com fronteira suave em M. Considere a coleção Σ de todos os domínios Ω diferenciavelmente isotópicos a Ω_0.

Considere agora espaço $\mathcal{C}^m(\Omega_0, M)$ das funções m-vezes continuamente diferenciáveis até o bordo de Ω_0. É bem conhecido na literatura que $\mathcal{C}^m(\Omega_0, M)$ possui estrutura de variedade de Banach separável (vide [1]).

Nosso conjunto de parâmetros será $\mathcal{X} = \{f \in \mathcal{C}^m(\Omega_0, M) /\ f$ é um $\mathcal{C}^m$-difeomorfismo sobre a imagem que preserva orientação e é isotópico a identidade $\}$. Assim, tomando $f \in \mathcal{X}$ tem-se que $f(\Omega_0) = \Omega_f$ é um domínio com fronteira suave.

Agora, seja a aplicação $\mathcal{D}$ definida por

$$\mathcal{D} : \mathcal{X} \longrightarrow \Sigma \ \text{ dada por } \ \mathcal{D}(f) = \Omega_f.$$

É bem conhecido que $\mathcal{D}^{-1}(\Sigma)$ é um subconjunto aberto e conexo por caminhos em

$\mathcal{X}$.

Desta forma, para cada $f \in \mathcal{X}$ consideraremos o operador $\Delta_g^2 : \Omega_f \longrightarrow L^2(\Omega_f)$ em que g é a métrica em M. Note que os elementos da família de operadores acima não estão definidos num mesmo espaço de funções. Para contornarmos essa situação, observe que para todo $f \in \mathcal{X}$ os operadores Δ_g^2 definidos em Ω_f e $\Delta_{f^*g}^2$ definidos em Ω_0, são isoespectrais.

Contudo, os elementos da família de operadores $\Delta_{f^*g}^2$ parametrizadas por f não são auto-adjuntos em relação ao mesmo produto interno. Portanto será necessário fazer as mesmas modificações feitas no Capítulo 2 de métricas. O operador modificado será definido por $A(f)\phi = P_{f^*g}^{-1}\Delta_{f^*g}^2 P_{f^*g}\phi$.

A seguir justificaremos as afirmações acima.

Lembremos a noção de Pull-Back:

Dados T um 2-tensor covariante em N, $p \in M$, e campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$(f^*T)(p)(X, Y) := T_{f(p)}(df_p X, df_p Y)$$

o que implica, no caso em que $T = g_0$, em

$$(f^*g_0)(p)(X, Y) = g_0(df_p X, df_p Y).$$

Como $g = f^*g_0$, devemos obter que

$$f^*g_0(X, Y) = g(X, Y) \Longrightarrow g_0(df_p X, df_p Y) = g(X, Y) \Longrightarrow \langle df_p X, df_p Y\rangle_{g_0} = \langle X, Y\rangle_g.$$

Em particular, quando $X = Y$, tem-se

$$||df_p X||_{g_0}^2 = ||X||_g^2.$$

São dadas agora uma variedade Riemanniana (N, g) e duas aplicações suaves $f : M \to N$ e $\varphi : N \to \mathbb{R}$, onde M é uma variedade com a mesma dimensão de N, e cuja métrica é dada por $\bar{g} = f^*g$.

Seja $\{e_i\}$ um referencial $\bar{g}$-geodésico em um ponto $p \in M$ então $\{dfe_i\}$ será g-geodésico em $f(p) \in N$.

Logo, tem-se

$$e_k(\varphi \circ f)(p) = (dfe_k)(\varphi)(f(p))$$

e

$$e_k e_k(\varphi \circ f)(p) = dfe_k((dfe_k)(\varphi))(f(p)). \tag{3.1}$$

Ocorre ainda que, para quaisquer $p \in M$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} X(\varphi \circ f)_p &= df(X)(\varphi)_{f(p)} \\ X(X(\varphi \circ f))_p &= df(X)(X(\varphi \circ f))_{f(p)} = df(X)(df(X)(\varphi))_{f(p)}. \end{aligned}$$

Ao definirmos $\bar{\varphi} := \varphi \circ f$ e sendo $\bar{\nabla}$ e ∇ os gradientes de funções em M e N, teremos

$$\begin{aligned} g(df\bar{\nabla}\bar{\varphi}, dfe_i)_{f(p)} &= g(df(\bar{\nabla}(\varphi \circ f), dfe_i)_{f(p)} = (f^*g)(\bar{\nabla}(\varphi \circ f), e_i)_p \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}(\varphi \circ f), e_i)_p = e_i(\varphi \circ f)_p = df_p(e_i)(\varphi) \\ &= df(e_i)(\varphi)_{f(p)} = g(\nabla\varphi, df(e_i))_{f(p)}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$df(\bar{\nabla}\bar{\varphi}) = \nabla\varphi. \tag{3.2}$$

De forma análoga, se $\bar{\Delta}$ e Δ são os laplacianos de funções em M e N, respectivamente, então a relação (3.1) implicará em

$$\bar{\Delta}\bar{\varphi}_p = \Delta\varphi_{f(p)}. \tag{3.3}$$

Consequentemente,

$$\bar{\Delta}^2\bar{\varphi}_p = \Delta^2\varphi_{f(p)}. \tag{3.4}$$

Portanto, considerando um domínio $\Omega_0 \subset M$, limitado com fronteira suave, os operadores $\Delta_g^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega_f) \longrightarrow L^2(\Omega_f)$ e $\Delta_{f^*g}^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega_0) \longrightarrow L^2(\Omega_0)$ são isoespectrais $\forall f \in \mathcal{X}$. Desta forma, a fim de demonstramos o análogo do Teorema 2.2 consideraremos a família de operadores $A(f) = P_{f^*g}^{-1}\Delta_{f^*g}^2 P_{f^*g}$, como foi feito no Capítulo 2.

O fato de o conjunto das métricas obtidas pelo Pull-Back de uma métrica fixa em M ser um espaço próprio no espaço das métricas sobre M indica que a prova do Teorema 2.2 em tela é mais delicada.

3.1 Variação do Domínio em Variedades Riemannianas *flat*

Para esta seção assumiremos que M é uma variedade Riemanniana, *flat* e orientada. Consideraremos domínios contidos em uma única carta de M. Seja Ω_0 domínio em M limitado com fronteira suave, contido em uma única carta de M. O espaço de parâmetros $\mathcal{X}$ será definido pelas aplicações de Ω_0 em M isotópicas à identidade que são difeomorfismos sobre a imagem. É fácil ver que $\mathcal{X}$ é um aberto do espaço das funções m vezes diferenciáveis que "saem"de Ω_0 e "chegam"em Ω.

Nosso objetivo é provar que dada uma família de operadores $A(f) = P_{f^*g}^{-1}\Delta_{f^*g}^2 P_{f^*g}$, valem os seguintes

Teorema 3.1 *O conjunto das* $f \in \mathcal{X}$ *para os quais o operador* $\Delta_g^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega_f) \longrightarrow L^2(\Omega_f)$ *possui pelo menos um autovalor com multiplicidade maior ou igual a* 2 *é de codimensão* 2.

Teorema 3.2 *Quaisquer dois domínios* Ω_0 *e* Ω_1 *em* M *podem ser ligados por uma curva analítica* Ω_t *tal que o espectro do operador* $\Delta_g^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega_t) \longrightarrow L^2(\Omega_t)$ *é composto apenas por autovalores simples, para todo* $0 < t < 1$.

Para demonstramos os Teoremas 3.1 e 3.2, basta verificarmos a hipótese forte de Arnold, para família de operadores $A(f)$.

Considere o campo V em Ω dado por $p \mapsto V_p := \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t\right)(p)$.

Segue-se daí que f_t é o fluxo de V e que, para cada $p \in \Omega$,

$$(3.5) \qquad (\mathcal{L}_V g)_p := \lim_{t\to 0} \frac{f_t^*(g_{f_t(p)}) - g_p}{t} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{g_t - g_0}{t}\right)_p = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_t\right)_p = H_p,$$

ou seja, que $\mathcal{L}_V g = H$. Logo

$$(3.6) \qquad \frac{1}{2}\langle H, g\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathcal{L}_V g = \mathrm{div}V.$$

Proposição 3.1 *Seja* $\Omega_0 \subset M$ *com as hipóteses acima. Sejam* φ_i *e* φ_j *autofunções associadas ao autovalor* λ *para o problema,*

$$\begin{cases} (\Delta_g^2 + \lambda)u &= 0 \quad \text{em } \Omega_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}u = u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

O funcional $\ell'_{\varphi_i\varphi_j}$ para família de operadores $A(f)$ é dado por

$$\ell'_{\varphi_i\varphi_j}(V) = -\int_{\partial\Omega} \nabla^2\varphi_i(\nu,\nu)\nabla^2\varphi_j(\nu,\nu)g(V,\nu)d\nu. \tag{3.7}$$

Demonstração: Considerando $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t = V$, sendo $\langle g, H\rangle = 2\mathrm{div}V$, $\langle d\varphi_i \otimes d\varphi_j, H\rangle = H(\nabla\varphi_i.\nabla\varphi_j)$ e usando a Proposição 2.1, obteremos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi_i(\Delta^2_{g(t)})'\varphi_j d\Omega &= \int_\Omega \langle -\frac{1}{2}(\Delta_g\varphi_i\Delta_g\varphi_j + g(\nabla(\Delta_g\varphi_i),\nabla\varphi_j) \\
&\quad -\lambda\varphi_i\varphi_j + g(\nabla\varphi_i,\nabla(\Delta_g\varphi_j)))g, H\rangle d\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \langle d\Delta_g\varphi_i \otimes d\varphi_j + d\varphi_i \otimes d\Delta_g\varphi_j, H\rangle d\Omega \\
&= -\int_\Omega (\Delta_g\varphi_i\Delta_g\varphi_j + g(\nabla(\Delta_g\varphi_i),\nabla\varphi_j) \\
&\quad -\lambda\varphi_i\varphi_j + g(\nabla\varphi_i,\nabla(\Delta_g\varphi_j)))\mathrm{div}V d\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \big(H(\nabla(\Delta_g\varphi_i),\nabla\varphi_j) + H(\nabla\varphi_i,\nabla(\Delta_g\varphi_j))\big)d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $H = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t^* g = \mathcal{L}_V g$, obteremos as seguintes afirmações:

(3.9)

$$H(\nabla(\Delta_g\varphi_i),\nabla\varphi_j) = (\mathcal{L}_V g)(\nabla(\Delta_g\varphi_i),\nabla\varphi_j) = g(\nabla_{\nabla(\Delta_g\varphi_i)}V,\nabla\varphi_j) + g(\nabla_{\nabla\varphi_j}V,\nabla(\Delta_g\varphi_i)),$$

e também

(3.10)

$$H(\nabla\varphi_i,\nabla(\Delta_g\varphi_j)) = (\mathcal{L}_V g)(\nabla\varphi_i,\nabla(\Delta_g\varphi_j)) = g(\nabla_{\nabla\varphi_i}V,\nabla(\Delta_g\varphi_j)) + g(\nabla_{\nabla(\Delta_g\varphi_j)}V,\nabla\varphi_i).$$

Assim, (3.8) fica da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi_i(\Delta^2_{g(t)})'\varphi_j d\Omega &= -\int_\Omega \big(\Delta_g\varphi_i\Delta_g\varphi_j + g(\nabla(\Delta_g\varphi_i),\nabla\varphi_j) \\
&\quad -\lambda\varphi_i\varphi_j + g(\nabla\varphi_i,\nabla(\Delta_g\varphi_j))\big)\mathrm{div}V d\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \big(g(\nabla_{\nabla(\Delta_g\varphi_i)}V,\nabla\varphi_j) + g(\nabla_{\nabla\varphi_j}V,\nabla(\Delta_g\varphi_i)) \\
&\quad + g(\nabla_{\nabla\varphi_i}V,\nabla(\Delta_g\varphi_j)) + g(\nabla_{\nabla(\Delta_g\varphi_j)}V,\nabla\varphi_i)\big)d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, usando (1.6), vamos calcular separadamente as quatro últimas parcelas de (3.11):

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{\nabla(\Delta_g\varphi_i)}V,\nabla\varphi_j) &= \mathrm{div}(g(V,\nabla\varphi_j)\nabla(\Delta_g\varphi_i)) + \lambda\varphi_i g(V,\nabla\varphi_j) \\
&\quad -\nabla^2\varphi_j(V,\nabla(\Delta_g\varphi_i));
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$g(\nabla_{\nabla\varphi_j}V,\nabla(\Delta_g\varphi_i)) = \mathrm{div}(g(V,\nabla(\Delta_g\varphi_i))\nabla\varphi_j) - g(V,\nabla(\Delta_g\varphi_i))\Delta_g\varphi_j$$
$$-\nabla^2(\Delta_g\varphi_i)(V,\nabla\varphi_j); \tag{3.13}$$

$$g(\nabla_{\nabla\varphi_i}V,\nabla(\Delta_g\varphi_j)) = \mathrm{div}(g(V,\nabla\varphi_i)\nabla\Delta_g\varphi_j) - g(V,\nabla(\Delta_g\varphi_j))\Delta_g\varphi_i$$
$$-\nabla^2(\Delta_g\varphi_j)(V,\nabla\varphi_i); \tag{3.14}$$

$$g(\nabla_{\nabla(\Delta_g\varphi_j)}V,\nabla\varphi_i) = \mathrm{div}(g(V,\nabla\Delta_g\varphi_j)\nabla\varphi_i) + \lambda\varphi_j g(V,\nabla\varphi_i)$$
$$-\nabla^2\varphi_i(V,\nabla(\Delta_g\varphi_j)). \tag{3.15}$$

Nas primeiras parcelas de (3.11), faremos uso das propriedades de divergência e obteremos:

$$-\Delta_g\varphi_i\Delta_g\varphi_j\mathrm{div}V = -\mathrm{div}(\Delta_g\varphi_i\Delta_g\varphi_j V) + \Delta_g\varphi_i g(\nabla(\Delta_g\varphi_j),V)$$
$$+\Delta_g\varphi_j g(\nabla(\Delta_g\varphi_i),V); \tag{3.16}$$

$$-g(\nabla(\Delta_g\varphi_i),\nabla\varphi_j)\mathrm{div}V = -\mathrm{div}(g(\nabla(\Delta_g\varphi_i),\nabla\varphi_j)V) + \nabla^2\Delta_g\varphi_i(\nabla\varphi_j,V)$$
$$+\nabla^2\varphi_j(\nabla(\Delta_g\varphi_i),V); \tag{3.17}$$

$$\lambda\varphi_i\varphi_j\mathrm{div}V = \lambda\mathrm{div}(\varphi_i\varphi_j V) - \lambda\varphi_i g(\nabla\varphi_j,V) - \lambda\varphi_j g(\nabla\varphi_i,V); \tag{3.18}$$

$$-g(\nabla\varphi_i,\nabla(\Delta_g\varphi_j))\mathrm{div}V = -\mathrm{div}(g(\nabla\varphi_i,\nabla(\Delta_g\varphi_j))V) + \nabla^2\varphi_i(\nabla(\Delta_g\varphi_j),V)$$
$$+\nabla^2\Delta_g\varphi_j(\nabla\varphi_i,V). \tag{3.19}$$

Pelo Teorema da Divergência e pelas condições de bordo do problema de Dirichlet, temos:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \mathrm{div}(\Delta_g\varphi_i\Delta_g\varphi_j V)d\Omega &= -\int_{\partial\Omega}\Delta_g\varphi_i\Delta_g\varphi_j g(V,\nu)d\nu \\ &= -\int_{\partial\Omega}\nabla^2\varphi_i(\nu,\nu)\nabla^2\varphi_j(\nu,\nu)g(V,\nu)\mathrm{d}\nu; \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(g(\nabla(\Delta_g\varphi_i),\nabla\varphi_j)V)d\Omega = -\int_{\partial\Omega} g(\nabla(\Delta_g\varphi_i),\nabla\varphi_j)g(V,\nu)\mathrm{d}\nu = 0; \tag{3.21}$$

$$\lambda\int_\Omega \mathrm{div}(\varphi_i\varphi_j V)d\Omega = \lambda\int_{\partial\Omega}\varphi_i\varphi_j g(V,\nu)\mathrm{d}\nu = 0; \tag{3.22}$$

$$(3.23)\qquad -\int_{\Omega} \operatorname{div}(g(\nabla\varphi_i, \nabla(\Delta_g\varphi_j))V)d\Omega = -\int_{\partial\Omega} g(\nabla\varphi_i, \nabla(\Delta_g\varphi_j))g(V,\nu)\mathrm{d}\nu = 0;$$

$$(3.24)\qquad \int_{\Omega} \operatorname{div}(g(V, \nabla\varphi_j)\nabla(\Delta_g\varphi_i))d\Omega = \int_{\partial\Omega} g(V, \nabla\varphi_j)g(\nabla(\Delta_g\varphi_i), \nu)\mathrm{d}\nu = 0;$$

$$(3.25)\qquad \int_{\Omega} \operatorname{div}(g(V, \nabla(\Delta_g\varphi_i))\nabla\varphi_j)d\Omega = \int_{\partial\Omega} g(V, \nabla(\Delta_g\varphi_i))g(\nabla\varphi_j, \nu)\mathrm{d}\nu = 0;$$

$$(3.26)\qquad \int_{\Omega} \operatorname{div}(g(V, \nabla(\Delta_g\varphi_j))\nabla\varphi_i)d\Omega = \int_{\partial\Omega} g(V, \nabla(\Delta_g\varphi_j))g(\nabla\varphi_i, \nu)\mathrm{d}\nu = 0;$$

$$(3.27)\qquad \int_{\Omega} \operatorname{div}(g(V, \nabla\varphi_i)\nabla(\Delta_g\varphi_j))d\Omega = \int_{\partial\Omega} g(V, \nabla\varphi_i)g(\nabla(\Delta_g\varphi_j), \nu)\mathrm{d}\nu = 0.$$

Tomando as equações (3.12) a (3.19), integrando sobre Ω e levando em consideração as afirmações de (3.20) a (3.27), então podemos concluir que (3.11) ficará sob a seguinte forma:

$$(3.28)\qquad \int_{\Omega} \varphi_i(\Delta^2_{g(t)})'\varphi_j d\Omega = -\int_{\partial\Omega} \nabla^2\varphi_i(\nu,\nu)\nabla^2\varphi_j(\nu,\nu)g(V,\nu)\mathrm{d}\nu.$$

Portanto, segue de (2.19) o resultado desejado.

$\square$

Agora, o passo final para concluirmos a demonstração dos Teoremas 3.1 e 3.2 é mostrar que os funcionais $\ell'_{\varphi\varphi} - \ell'_{\psi\psi}$ e $\ell'_{\varphi\psi}$ são linearmente independentes. O próximo lema é o ingrediente chave na demostração.

Lema 3.1 *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana flat de dimensão n e Ω um domínio limitado contido numa carta em M. Seja λ um autovalor associado ao operador Bilaplaciano de multiplicidade $m > 1$, para o qual todas autofunções u satisfazem $\Delta_g u = 0$ em $\partial\Omega$.*

Então, para cada campo coordenado ∂_i, com $i = 1, \ldots, n$, $\partial_i u$ será autofunção do Bilaplaciano associada a λ e, além disso $\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g u = 0$ em $\partial\Omega$.

Demonstração: De fato, sendo u uma autofunção do Bilaplaciano satisfazendo o problema acima, então podemos afirmar que em $\partial\Omega$ vale $\nabla u = \nabla_{\partial\Omega} u + \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\nu = 0$. Além disso, como $0 = \Delta_g u = \Delta_{\partial\Omega} u - n\dfrac{\partial u}{\partial\nu}H + \nabla^2 u(\nu,\nu)$, segue que $\nabla^2 u(\nu,\nu) = \langle\nabla_\nu\nabla u, \nu\rangle = 0$

em $\partial\Omega$, argumento este válido pelo caráter pontual de $\nabla^2 u$, i.e., $\nabla_\nu \nabla u$ só depende dos valores de ∇u ao longo das trajetórias de ν e $\nabla u = 0$ em $\partial\Omega$.

Agora, levando em consideração as condições de bordo do problema de Dirichlet e tomando $X, Y \in \mathfrak{X}(\partial\Omega)$, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, \nu \rangle &= 0 \implies X\langle \nabla u, \nu \rangle = 0 \implies \langle \nabla_X \nabla u, \nu \rangle + \langle \nabla u, \nabla_X \nu \rangle = 0 \\ &\implies \nabla^2 u(X, \nu) = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Por outro lado,

$$\nabla^2 u(X, Y) \ = \ Y(\langle \nabla u, X \rangle) - \langle \nabla u, \nabla_X Y \rangle.$$

Como $Y\langle \nabla u, X \rangle = 0$ e $\nabla u = 0$ em $\partial\Omega$, segue que $\nabla^2(X, Y) = 0$ em $\partial\Omega$, $\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(\partial\Omega)$. Portanto, $\nabla^2 u = 0$ em todo o $\partial\Omega$.

Como por hipótese M é *flat*, então $\forall f \in C^\infty(M)$ teremos que $\Delta_g \partial_i f = \partial_i \Delta_g f$, o que nos fornece $\partial_i((\Delta_g^2 + \lambda_0)u) = (\Delta_g^2 + \lambda_0)\partial_i u$ em Ω.

Além disso, como $\nabla u = 0$ em $\partial\Omega$, então $\partial_i u = 0$ em $\partial\Omega$.

Agora, observando que $\nabla u = 0$ em $\partial\Omega$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(\partial_i u) = \nu(\langle \nabla u, \partial_i \rangle) = \langle \nabla_\nu \nabla u, \partial_i \rangle = \nabla^2 u(\nu, \partial_i),$$

daí vale que $\dfrac{\partial}{\partial\nu}(\partial_i u) = 0$ em $\partial\Omega$.

Pelo que foi mostrado $\partial_i u$ é uma autofunção do Bilapalaciano associada a λ, e por hipótese, o Laplaciano de toda autofunção é nulo em $\partial\Omega$, logo $\Delta_g(\partial_i u) = 0$ em $\partial\Omega$.

Por ultimo, pelo fato de a variedade ser *flat*, segue que $\partial_i \Delta_g u = \Delta_g \partial_i u = 0$ em $\partial\Omega$. Em particular, $\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g u = 0$ em $\partial\Omega$.

$\square$

Proposição 3.2 *Seja λ um autovalor com multiplicidade $m > 1$. Então os funcionais lineares $\ell'_{\varphi\varphi} - \ell'_{\psi\psi}$ e $\ell'_{\varphi\psi}$ são linearmente independentes.*

Demonstração: Para demonstramos tal afirmação, vamos supor que existem α e β, sem que ambos sejam nulos e tal que vale a igualdade abaixo

$$\alpha(\ell'_{\varphi\varphi} - \ell'_{\psi\psi}) + \beta\ell'_{\varphi\psi} = 0.$$

Usando a definição de 3.7 na equação acima, devemos ter

$$\begin{aligned}\alpha\Big(-\int_{\partial\Omega} (\nabla^2\varphi(\nu,\nu))^2 g(V,\nu)d\nu + \int_{\partial\Omega} (\nabla^2\psi(\nu,\nu))^2 g(V,\nu)d\nu\Big) & \\ -\beta\int_{\partial\Omega} \nabla^2\varphi(\nu,\nu)\nabla^2\psi(\nu,\nu)g(V,\nu)d\nu &= 0.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{\partial\Omega} \Big(\alpha((\nabla^2\psi(\nu,\nu))^2 - (\nabla^2\varphi(\nu,\nu))^2) - \beta\nabla^2\varphi(\nu,\nu)\nabla^2\psi(\nu,\nu)\Big)g(V,\nu)d\nu = 0. \tag{3.30}$$

Como (3.30) é um produto interno em $L^2(\partial\Omega)$, isso nos diz que

$$\alpha\big((\nabla^2\psi(\nu,\nu))^2 - (\nabla^2\varphi(\nu,\nu))^2\big) - \beta\nabla^2\varphi(\nu,\nu)\nabla^2\psi(\nu,\nu) \tag{3.31}$$

é ortogonal a $g(V,\nu)$; $V \in \mathfrak{X}(\partial\Omega)$. Além do mais, o conjunto $\{g(V,\nu)/V \in \mathfrak{X}(\partial\Omega)\} \subset L^2(\partial\Omega)$ é denso em $L^2(\partial\Omega)$. Assim, (3.31) é nula em Ω.

Lembrando que $\Delta_g\varphi = \nabla^2\varphi(\nu,\nu)$ em $\partial\Omega$, teremos

$$\alpha(\Delta_g\psi)^2 - \beta(\Delta_g\varphi\Delta_g\psi) - \alpha(\Delta_g\varphi)^2 = 0. \tag{3.32}$$

Agora, faremos uma análise da forma quadrática em (3.32). A forma matricial de (3.32) é dada por

$$[\Delta_g\psi \ \ \Delta_g\varphi]\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\beta}{2} \\ -\frac{\beta}{2} & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_g\psi \\ \Delta_g\varphi \end{bmatrix} = 0.$$

Diagonalizando, temos

$$(A) : [x \ \ y]\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

onde

$$(B) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} \Delta_g\psi \\ \Delta_g\varphi \end{bmatrix}$$

em que M é a matriz ortogonal e c é não nulo. Assim, em (A) devemos ter $c(x^2-y^2) = 0$, ou seja, $c(x-y)(x+y) = 0$. Temos dois casos a considerar, a situação em que $x = y$ e a outra na qual $x = -y$. Para o caso em que $x = y$, usando (B), devemos ter

$$M\begin{bmatrix} \Delta_g\psi \\ \Delta_g\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_g\psi \\ \Delta_g\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}\Delta_g\psi + m_{12}\Delta_g\varphi \\ m_{21}\Delta_g\psi + m_{22}\Delta_g\varphi \end{bmatrix}$$

o que implica em

$$m_{11}\Delta_g\psi + m_{12}\Delta_g\varphi = m_{21}\Delta_g\psi + m_{22}\Delta_g\varphi,$$

o que nos diz ainda que

$$0 = (m_{11} - m_{21})\Delta_g\psi + (m_{12} - m_{22})\Delta_g\varphi,$$

considerando $a = m_{11} - m_{21}$ e $b = m_{12} - m_{22}$, onde ambos não podem ser nulos, pois M é ortogonal e suas colunas seriam múltiplas uma da outra, uma contradição.

Caso a ou b se anulem, por exemplo b nulo, então teremos que $0 = 0\ \Delta_g\varphi + a\Delta_g\psi$, o que implica em $\Delta_g\psi = 0$.

Olhando para a equação (3.32), pode-se afirmar que

$$\alpha\, 0 - \beta(\Delta_g\varphi\ 0) - \alpha(\Delta_g\varphi)^2 = 0 \tag{3.33}$$

o que implica em

$$\alpha(\Delta_g\varphi)^2 = 0 \Longrightarrow \Delta_g\varphi = 0.$$

Da mesma forma quando $x = -y$, teremos

$$0 = (m_{11} + m_{21})\Delta_g\psi + (m_{12} + m_{22})\Delta_g\varphi,$$

e seguem-se todas as afirmações acima obtidas para $x = y$.

Como consequência de $\Delta_g\varphi = \Delta_g\psi = 0$ em $\partial\Omega$, pode-se concluir do Lema 3.1, que $\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\varphi \equiv 0$ em $\partial\Omega$ ou $\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta_g\psi \equiv 0$ em $\partial\Omega$.

Portanto, pelo Princípio da Continuação Única, temos que $\varphi \equiv 0$ em M ou $\psi \equiv 0$ em M, um absurdo.

$\square$

3.2 Família de Domínios em Variedades Riemannianas Quaisquer

Nesta seção consideraremos domínios limitados quaisquer com fronteira suave em uma variedade Riemanniana qualquer. Sob estas hipóteses não foi possível mostrar o Lema 3.1 , comprometendo assim a verificação da hipótese forte de Arnold para a família de operadores Bilaplacianos parametrizados por uma família de domínios numa variedade Riemanniana qualquer.

O objetivo desta seção será o de mostrar a simplicidade genérica dos autovalores associados ao operador Bilaplaciano sobre domínios numa variedade Riemanniana qualquer.

Como definimos no início do capítulo, nosso espaço de parâmetros é $\mathcal{X} = \{f \in \mathcal{C}^m(\Omega_0, M)/\ f$ é um $\mathcal{C}^m$-difeomorfismo sobre a imagem que preserva orientação e é isotópico a identidade $\}$.

Teorema 3.3 *O conjunto das $f \in \mathcal{X}$ para os quais o espectro do operador $\Delta_g^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega_f) \longrightarrow L^2(\Omega_f)$ é todo simples é genérico (residual) em $\mathcal{X}$.*

A demosntração do teorema seguirá as mesmas linhas do Exemplo 4.4 em [6]. As curvas de autovalores e autofunções associadas terão um papel fundamental em nossos argumentos.

Tome uma família f_t analítica de difeomorfismos de Ω, que preserva orientação onde f_0 é a identidade, e ainda um autovalor λ de multiplicidade m para o Bilaplaciano.

Seja $g_t = f_t^* g$ uma família de métricas em Ω. Pelo que foi comentado anteriormente, se $\{e_k\}$ é um referencial g_t-geodésico em $p \in \Omega$, então $\{df_t e_k\}$ é um referencial g-geodésico em $f_t(p) \in \Omega_t$ e assim escrevemos, de forma análoga a (3.1),

$$e_k e_k(\phi_i(t) \circ f_t)(p) = df_t e_k((df_t e_k)(\phi_i(t))(f_t(p))). \tag{3.34}$$

Para cada $i = 1, \ldots, k$, sejam $\phi_i(t)$ e $\lambda_i(t)$ como obtidos na Proposição B.1.

Definindo $\bar{\phi}_i(t) := \phi_i(t) \circ f_t$, teremos

$$\Delta_g^2(\bar{\phi}_i(t)) := \Delta_g(\Delta_g \bar{\phi}_i(t)). \tag{3.35}$$

Vale ressaltar que na família de difeomorfismos em questão

$$(\Omega, g_t) \xrightarrow{f_t} (\Omega_t, g),$$

na variedade da esquerda é a métrica que varia, enquanto que na variedade a direita o domínio é quem está variando.

Os gradientes de funções em (Ω, g_t) e em (Ω_t, g), são denotados por $\bar{\nabla}$ e ∇ respectivamente.

Como a relação (3.1) implica em (3.3), então a relação (3.34) implicará em

$$\bar{\Delta}(\bar{\phi}_i(t))_p = \Delta(\phi_i(t))_{f_t(p)}. \tag{3.36}$$

Logo, a relação (3.35) nos dá

$$\begin{aligned}
\Delta_g^2(\bar{\phi}_i(t))_p &:= \bar{\Delta}_g(\bar{\Delta}_g(\bar{\phi}_i(t))_p)_p = \Delta(\Delta(\phi_i(t))f_t(p))f_t(p) \\
&= \Delta^2(\phi_i(t))f_t(p) = (-\lambda_i(t)\phi_i(t))f_t(p) \\
&= -\lambda_i(t)(\phi_i(t) \circ f_t)_p = -\lambda_i(t)\bar{\phi}_i(t)_p.
\end{aligned}$$

Além disso, se $p \in \partial\Omega$ então $f_t(p) \in \partial\Omega_t$ para todo t, e portanto

$$\bar{\phi}_i(t)_p = (\phi_i(t) \circ f_t)(p) = (\phi_i(t))(f_t(p)) = 0$$

pois, pela hipótese da Proposição (B.1), $\phi_i(t) = 0$ em $\partial\Omega$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\phi}_i(t), \bar{\phi}_j(t)\rangle_{L^2(\Omega,g_t)} &= \int_\Omega \bar{\phi}_i(t)\bar{\phi}_j(t)\mathrm{dM} \circ df_t = \int_\Omega (\phi_i(t)\phi_j(t))(f_t)\det(df_t)\mathrm{dM} \\
&= \int_{f_t(\Omega)} \phi_i(t).\phi_j(t)\mathrm{dM}_g = \langle\phi_i(t), \phi_j(t)\rangle_{L^2(\Omega_t,g)} = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

O que implica que para $\bar{\phi}_i(t) = \phi_i(t) \circ f_t$ teremos $\langle\bar{\phi}_i(t), \bar{\phi}_j(t)\rangle_{L^2(\Omega_t,g)} = \delta_{ij}$, $\forall t$, e

$$\begin{cases}
-\Delta_g^2\bar{\phi}_i(t) &= \lambda_i(t)\bar{\phi}_i(t) \quad \text{em } \Omega \\
\dfrac{\partial\bar{\phi}_i}{\partial\nu} = \bar{\phi}_i(t) &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega.
\end{cases} \tag{3.37}$$

Isso significa que os $\lambda_i(t)'s$, autovalores de Δ_t^2 associados às autofunções $\phi_i(t)$ em Ω_t, são também autovalores de Δ_g^2 associados às autofunções $\bar{\phi}_i(t)$ em Ω, no problema de Dirichlet. Sendo assim, o problema em questão envolvendo a variação do domínio se reduz ao caso de que trata da variação da métrica.

No resultado a seguir, provaremos uma fórmula explicita para a derivada de autovalores múltiplos para o Bilaplaciano.

Proposição 3.3 *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e Ω um domínio limitado com fronteira suave. Tome um autovalor λ do Bilaplaciano com multiplicidade $m > 1$. Se f_t é uma família analítica de difeomorfismos, então existem m famílias analíticas de* *autofunções $\phi_i(t)$ e m famílias analíticas de $\lambda_i(t)$ de autovalores cuja derivada é dada por*

$$\lambda_i'\delta_{ij} = \int_{\partial\Omega} \nabla^2\varphi_i(\nu,\nu)\nabla^2\varphi_j(\nu,\nu)g(V,\nu)\mathrm{d}\nu,$$

onde $V = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t$ *e* $\lambda_i' = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\lambda_i(t))$, $\forall i,j = 1,\ldots,m$.

Demonstração: Como visto antes, uma família de operadores $\Delta_g^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega_{f_t}) \longrightarrow L^2(\Omega_{f_t})$ é isoespectral à família de operadores $\Delta^2_{f_t^*g} : H^4 \cap H_0^2(\Omega_0) \longrightarrow L^2(\Omega_0)$. Desta forma, a Proposição (B.1) garante a existência das famílias analíticas de autofunções e autovalores associados ao operador $\Delta^2_{g(t)}$.

Considerando a equação $-\Delta^2_{g(t)}\bar{\varphi}_j(t) = \lambda(t)\bar{\varphi}_j(t)$ e derivando em relação a t em $t=0$ devemos ter

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(-\Delta^2_{g(t)}\bar{\varphi}_j) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\lambda_i(t)\bar{\varphi}_j(t)) \\
-(\Delta^2_{g(t)})'\bar{\varphi}_j - \Delta_g^2\bar{\varphi}_j' &= \lambda_i'\bar{\varphi}_j + \bar{\varphi}_j'\lambda \\
-\int_\Omega (\bar{\varphi}_i(\Delta^2_{g(t)})'\bar{\varphi}_j + \bar{\varphi}_i\Delta_g^2\bar{\varphi}_j')d\Omega &= \int_\Omega (\lambda_i'\bar{\varphi}_i\bar{\varphi}_j + \lambda\bar{\varphi}_i\bar{\varphi}_j')d\Omega \\
&= \lambda_i'\int_\Omega \bar{\varphi}_i\bar{\varphi}_j d\Omega - \int_\Omega \bar{\varphi}_j'\Delta_g^2\bar{\varphi}_i d\Omega. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

então

$$\lambda_i'\delta_{ij} = -\int_\Omega \bar{\varphi}_i(\Delta^2_{g(t)})'\bar{\varphi}_j d\Omega. \qquad (3.39)$$

O resultado segue da Proposição 3.1.

□

Lema 3.2 *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana completa, $f_t : \Omega \longrightarrow (M,g)$ uma família real de difeomorfismos ($\Omega_t = f_t(\Omega)$) e Ω um domínio limitado de M. Suponha ϕ_t uma família de autofunções associadas ao autovalor $\lambda(t)$ de multiplicidade $m > 1$ do problema*

$$\begin{cases} (\Delta_g^2 + \lambda(t))\phi_t = 0 & em\ \Omega_t \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu_t}\phi_t = \phi_t = 0 & em\ \partial\Omega_t. \end{cases}$$

Onde $\phi_0 \in Ker(\Delta_g^2 + \lambda_0)$, $\phi_0 = \sum_{i=1}^m c_i\phi_i$, $m(\lambda_0) = m > 1$, ϕ_t e $\lambda(t)$ diferenciáveis em t.

Então $\dot{\phi} = \dfrac{\partial}{\partial t}\phi$ *satisfaz*

$$\begin{cases} (\Delta_g^2 + \lambda_0))\dot{\phi_0} + \dot{\lambda}\phi_0 & = & 0 & em\ \ \Omega \\ \dot{\phi_0} & = & 0 & em\ \ \partial\Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu_0}\dot{\phi_0} & = & -\langle V, \nu_0\rangle \Delta_g \phi_0 & em\ \ \partial\Omega \end{cases}$$

Demonstração: Lembre que $f(0,\cdot) = id_\Omega$, e que $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(t,x) = V(x) \in \mathfrak{X}(M)$. Far-se-á, ainda, a identificação $\Omega_0 = \Omega$.

Considere a equação

$$(\Delta_g^2 + \lambda(t))\phi_t = 0, \tag{3.40}$$

que fornece

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\Delta_g^2 + \lambda(t))\phi_t = \dot{\lambda}\phi_0 + (\Delta_g^2 + \lambda_0)\dot{\phi_0}. \tag{3.41}$$

Dado $x \in \partial\Omega$, então $f_t(x) \in f_t(\partial\Omega)$. Com isso, $\phi_t(f_t(x)) = 0$.

Assim,

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t(f_t(x)) = \frac{\partial}{\partial t}\phi_t\Big|_{t=0} + (\mathcal{L}_V \phi_t)\Big|_{t=0} = \dot{\phi_0} + \langle V, \nabla \phi_0\rangle. \tag{3.42}$$

Pelas condições de fronteira, teremos $\nabla\phi_0 = 0$ em $\partial\Omega$. Daí, $\dot{\phi_0} = 0$ em $\partial\Omega$.

Analogamente, $\forall x \in \partial\Omega$ tem-se que $\phi_t(f_t(x)) = 0$, consequentemente, $0 = \dfrac{\partial}{\partial \nu_t}\phi_t(f_t(x))$ em $\partial\Omega$, o que implica em

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big(\frac{\partial}{\partial \nu_t}\phi_t(f_t(x))\Big) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big(f_t^* \frac{\partial}{\partial \nu_t}\phi_t\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Big(\frac{\partial}{\partial \nu_t}\phi_t\Big) + \mathcal{L}_V\Big(\frac{\partial}{\partial \nu_0}\phi_0\Big) \\ &= \langle \dot{\nu_0}, \nabla\phi_0\rangle + \langle \nu_0, \nabla\dot{\phi_0}\rangle + \mathcal{L}_V\Big(\frac{\partial}{\partial \nu_0}\phi_0\Big) \\ &= \langle \dot{\nu_0}, \nabla\phi_0\rangle + \langle \nu_0, \nabla\dot{\phi_0}\rangle + V(\langle \nu_0, \nabla\phi_0\rangle) \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu_0}\dot{\phi_0} + \langle \nabla_V \nu_0, \nabla\phi_0\rangle + \langle \nu_0, \nabla_V\nabla\phi_0\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu_0}\dot{\phi_0} + \nabla^2\phi_0(V, \nu_0). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi_0(V,\nu_0) &= \nabla^2\phi_0(V^\top + V^\perp,\nu_0) = \nabla^2\phi_0(V^\top,\nu_0) + \nabla^2\phi_0(V^\perp,\nu_0) \\
&= \nabla^2\phi_0(\langle V,\nu_0\rangle\nu_0,\nu_0) = \langle V,\nu_0\rangle\nabla^2\phi_0(\nu_0,\nu_0) \text{ em } \partial\Omega. \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

Como $\nabla^2\phi_0(\nu,\nu) = \Delta_g\phi_0$ em $\partial\Omega$, então $\dfrac{\partial\dot{\phi}_0}{\partial\nu_0} = -\langle V,\nu_0\rangle\Delta_g\phi_0$ em $\partial\Omega$. □

Proposição 3.4 *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana completa e Ω um domínio suave e limitado. Considere um autovalor λ associado ao operador Bilaplaciano de multiplicidade $m>1$. Para cada $V\in\mathfrak{X}(U)$, onde $\Omega\subset U$, com U aberto de M, tome $f_t:\Omega\longrightarrow(M,g)$ uma família diferenciável de difeomorfismos ($\Omega_t = f_t(\Omega)$) tal que $f_0 = id_\Omega$ e $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t = V$. Considere uma família $\phi_i(t)$ de autofunções associadas à família de autovalores $\lambda_i(t)$, $\forall\ i=1,\ldots,m$, do problema de Dirichlet*

$$
\begin{cases}
(\Delta_g^2+\lambda(t))\phi_t &= 0 \quad \text{em } \Omega_t \\
\dfrac{\partial}{\partial\nu_t}\phi_t = \phi_t &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega_t.
\end{cases}
$$

Então $\lambda_i'(t)$, $\forall i=1,\ldots,m$, não podem ser nulas para toda família de difeomorfismos.

Demonstração: Temos pela Proposição 3.3 que

$$
\lambda_i'(t)\delta_{ij} = \int_{\partial\Omega_t}\Big(\nabla^2\phi_i(\nu_t,\nu_t)\nabla^2\phi_j(\nu_t,\nu_t)\Big)\langle V,\nu\rangle d\nu, \qquad (3.45)
$$

$\forall\ i,j=1,\ldots,m$, $\forall\ V\in\mathfrak{X}(U)$, $\partial\Omega\subset U$, $U\subset M$ aberto.

Suponha que

$$
\int_{\partial\Omega_t}\Big(\nabla^2\phi_i(\nu_t,\nu_t)\nabla^2\phi_j(\nu_t,\nu_t)\Big)\langle V,\nu\rangle d\nu = 0, \qquad (3.46)
$$

o que implicará em $\nabla^2\phi_i(\nu_t,\nu_t)\nabla^2\phi_j(\nu_t,\nu_t)=0$, isso nos diz que ou $\nabla^2\phi_i = 0$ em $\partial\Omega_t$ ou $\nabla^2\phi_j=0$ em $\partial\Omega_t$. Juntando tal fato ao Lema 3.2, temos em $t=0$,

$$
\begin{cases}
(\Delta_g^2+\lambda_0)\dot{\phi}_0 + \dot{\lambda}\phi_0 &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\
\dot{\phi}_0 &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \\
\dfrac{\partial}{\partial\nu_0}\dot{\phi}_0 &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,
\end{cases}
$$

o que nos diz que $\dot{\phi}\in Ker(\Delta_g^2+\lambda_0)$.

Com isso, pode-se afirmar que

$$\nabla^2\dot{\phi}(\nu,\nu) = \sum_{j=1}^{m} c_j \nabla^2 \phi_j(\nu,\nu) = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega. \tag{3.47}$$

Portanto para qualquer domínio $\tilde{\Omega}$ próximo a Ω, devemos ter $\lambda(\Omega) = \lambda(\tilde{\Omega})$. A ideia é mostrar que existe uma base de autofunções que não depende de pequenas perturbações de Ω.

Afirmação: Existe uma família diferenciável $\psi(t)$ de autofunções associadas ao autovalor λ_0 do operador Bilaplaciano em Ω_t tal que $\dot{\psi}(t) = 0$ em Ω_t.

Com efeito, tome $\psi(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j(t)\phi_j(t)$.

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\psi(t) = \sum_{j=1}^{m} \dot{c}_j(t)\phi_j(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j(t)\dot{\phi}_j(t) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \dot{c}_i(t)\phi_i(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j(t) \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(t)\phi_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\dot{c}_i(t) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)c_j(t))\phi_i(t). \end{aligned}$$

Como as ϕ_i's são linearmente independentes, então tem-se que

$$\sum_{i=1}^{m} \Big(\dot{c}_i(t) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)c_j(t)\Big) = 0, \forall i = 1, \ldots, m. \tag{3.48}$$

Portanto, para a família $\psi(t)$ satisfazer a condição $\dot{\psi}(t) = 0$ em Ω_t, as funções $c_j(t)$ devem satisfazer a equação (3.48).

Tomando $\psi_k(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j^k(t)\phi_j(t)$ e considerando as condições iniciais das soluções em (3.48),

$$c^1(0) = (1, 0, \ldots, 0), c^2(0) = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, c^m(0) = (0, 0, \ldots, 1).$$

Fazendo com que a $\psi_k(t)$ coincida com ϕ_k em $t = 0$, temos que, para t suficientemente pequeno, $\psi_k(t)'$s são linearmente independentes.

Agora, tome $V(x)$ suficientemente próximo ao normal exterior ao bordo de Ω. Seja f_t o fluxo gerado por $V(x)$, $\partial\Omega_t = f_t(\partial\Omega)$. Então o conjunto $U = \bigcup_{-\delta<s<0} \partial\Omega(s) \subset \Omega$ é aberto para δ suficientemente pequeno. Para todo $y \in U$ temos $y \in \partial\Omega(s)$ para algum

s, o que implica em $0 = \psi_k(s)(y) = \psi_k(0)(y)$, portanto as $\psi_k(0)$ são identicamente nulas em U. Pelo princípio da Continuação Única ψ_k é identicamente nula em todo o Ω.

$\square$

Teorema 3.4 *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e Ω um domínio limitado em M. Seja λ um autovalor do Bilaplaciano para o problema de Dirichlet com multiplicidade $m > 1$. Então existe um difeomorfismo f em uma vizinhança $\mathcal{C}^r$, $1 \leq r < \infty$, da identidade id_Ω, tal que os autovalores $\lambda(g)$ próximos a λ são todos simples.*

Demonstração: Primeiramente lembre que se a multiplicidade dos autovalores não muda com a família de difeomorfismos, a existência das curvas diferenciáveis de autofunções e autovalores é garantida. Observa-se ainda que nesta situação a Proposição 3.3 continua válida retirando-se a hipótese de analiticidade.

Seja λ um autovalor de multiplicidade $m > 1$. Para efeito de demonstração basta supormos que ao tomarmos qualquer perturbação de Ω por difeomorfismos, a multiplicidade de λ não pode ser reduzida e daí ocorrerá uma contradição, pois teríamos

$$\int_{\partial\Omega} \Big(\nabla^2\varphi_i(\nu,\nu)\Big)^2 g(V,\nu)d\nu = \int_{\partial\Omega} \Big(\nabla^2\varphi_j(\nu,\nu)\Big)^2 g(V,\nu)d\nu. \tag{3.49}$$

Sendo assim, suponha φ_i e φ_j duas autofunções distintas associadas ao autovalor λ. Da Proposição 3.3 juntamente com a hipótese acima, pode-se afirmar que

$$\int_{\partial\Omega} \nabla^2\varphi_i(\nu,\nu)\nabla^2\varphi_j(\nu,\nu)g(V,\nu)d\nu = 0. \tag{3.50}$$

Como (3.50) é um produto interno em $L^2(\partial\Omega)$, então pode-ser dizer que $\nabla^2\varphi_i(\nu,\nu)\nabla^2\varphi_j(\nu,\nu)$ é ortogonal a $g(V,\nu)$, $V \in \mathfrak{X}(\partial\Omega)$. Além disso, $\{g(V,\nu)/ \ V \in \mathfrak{X}(\partial\Omega)\} \subset L^2(\partial\Omega)$ é denso em $L^2(\partial\Omega)$, então por (3.50) e (3.49) tem-se

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi_i(\nu,\nu)\nabla^2\varphi_j(\nu,\nu) &= 0 \ \ e \\ \big(\nabla^2\varphi_i(\nu,\nu)\big)^2 - \big(\nabla^2\varphi_j(\nu,\nu)\big)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.51}$$

em $\partial\Omega$.

Assim, teremos $\nabla^2\varphi_i(\nu,\nu) = 0$ em $\partial\Omega$.

Consequentemente, a derivada do autovalor é identicamente nula, o que não pode ocorrer pela Proposição 3.4.

$\square$

É bem conhecido que o conjunto $\mathcal{X} = \{f \in \mathcal{C}^m(\Omega_0, M)/\ f$ é um $\mathcal{C}^m$-difeomorfismo sobre a imagem que preserva orientação e é isotópico a identidade $\}$ é uma variedade afim de um espaço de Banach. Desta forma, usando argumentos análogos aos do Teorema 3.4, podemos enunciar o Corolário 3.1 a seguir.

Corolário 3.1 *Dado um domínio limitado Ω em uma variedade Riemanniana (M, g), o subconjunto dos difeomorfismos $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ tais que todos os autovalores do operador Bilaplaciano são simples, é residual.*

Capítulo 4

Variedades de Rotação

Neste capítulo estudaremos a situação genérica dos autovalores do Laplaciano numa família de hipersuperfícies de rotação do espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+1}$. Como veremos a seguir não poderemos esperar que todos os seus autovalores sejam simples. Em verdade suas multiplicidades são determinadas a partir dos autovalores do Laplaciano na esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

A família de hipersuperfícies de rotação a ser considerada aqui será parametrizada pela curva perfil. A fim de aplicarmos a teoria desenvolvida no capítulo 2 para família de métricas, faremos uso do fato da métrica natural induzida na superfície de rotação ser dada sob a forma $g_R = dx^2 + R^2(x)d\theta^2$ em que $R(x)$ é a função perfil. Desta forma nossa família de parâmetros é o subconjunto do espaço das métricas como nos casos anteriores.

Os autovalores do Laplaciano na esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ são dados por $\mu_k = k(n+k-2)$ e suas multiplicidades dadas pela dimensão dos esféricos harmônicos de grau k denotados por $\tilde{\mathcal{H}}_k$.

O principal teorema deste capítulo é

Teorema 4.1 *O conjunto das $R \in \mathcal{X}$ para os quais a multiplicidade dos autovalores λ_k do operador $\Delta_{g_R} : H^2 \cap H_0^1(\Sigma_R) \longrightarrow L^2(\Sigma_R)$ é $dim\tilde{\mathcal{H}}_k$ é genérico (residual) em $\mathcal{X}$.*

4.1 Sobre Hipersuperfícies de Rotação

As hipersuperfícies de rotação no $\mathbb{R}^3$ são dadas pela rotação de curvas simples planares em torno de um eixo. Essa noção tem uma extensão natural para hipersuperfícies de rotação no $\mathbb{R}^{n+1}$, conforme veremos agora.

Definição 4.1 *Uma hipersuperfície de rotação compacta* Σ *de dimensão* n *no espaço* $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x;z) : x \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}^n\}$ *é obtida rotacionando uma curva plana* $z_1 = R(x)$ *sobre o eixo* x*, em que* R *é não negativa e intercepta o eixo* x *ortogonalmente em* $R(-1) = R(1) = 0$*,* $\Sigma = \{(x,z) : |z| = R(x)\}$*.*

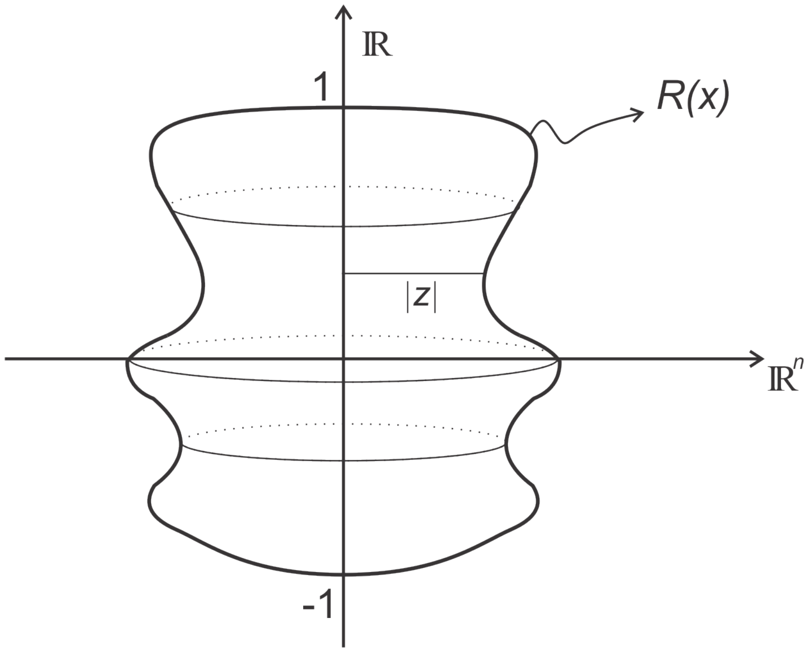

Figura 4.1: Hypersuperfície de Rotação

A métrica Riemanniana induzida em Σ pela métrica ambiente é $dx^2 + R^2(x)d\theta^2$ em um conjunto aberto e denso de Σ, onde $d\theta^2$ é a métrica canônica na esfera. Mais precisamente, $\Sigma - \{(-1,0);(1,0)\}$ com a métrica acima é isométrico a $M^n = (-1,1) \times_R \mathbb{S}^{n-1}$. Note que Σ possui o grupo $SO(n)$ contido no conjunto de suas isometrias.

O Laplaciano nesta métrica toma a forma

$$\Delta_\Sigma = \frac{1}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\Big(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \frac{1}{R^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}, \tag{4.1}$$

onde $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é o Laplaciano sobre a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$.

Como podemos observar a métrica de Σ a menos de dois pontos é dada por uma métrica warped. Desta forma, podemos calcular o Δ_Σ usando a teoria de produtos warped. Sobre noções básicas de produto warped ver [12].

O espectro de $\mathbb{S}^{n-1}$ com a métrica canônica é o conjunto formado por $\mu_k = k(n+k-2)$, $k \geq 0$ e o autoespaço associado a μ_k é o conjunto dos esféricos harmônicos de grau k que será denotado por $\tilde{\mathcal{H}}_k$.

Pode-se mostrar que $L^2(\Sigma) = \bigoplus_k \mathcal{L}_k$, em que $\mathcal{L}_k \simeq L^2(dx) \otimes \tilde{\mathcal{H}}_k$, (vide [5]). É fácil ver que o Δ_Σ deixa os espaços $\mathcal{L}_k$ invariantes. As autofunções de Δ_Σ são dadas por $\phi(x,\theta) = f(x)\ell_k(\theta)$, $\ell_k \in \tilde{\mathcal{H}}_k$ e f é uma autofunção do operador de Sturm-Liouville. Segue de (4.1) que

$$L_{\mu_k} f = \frac{1}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}f) - f\frac{1}{R^2}\mu_k. \tag{4.2}$$

De fato, considere uma autofunção da forma $\phi = f\ell$, com $f \in C^\infty(-1,1)$ e $\ell \in \tilde{\mathcal{H}}_k$, uma autofunção e λ um autovalor de Δ_Σ, então podemos afirmar que

$$\begin{aligned} (\Delta_\Sigma + \lambda)\phi &= \Big(\frac{1}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}) + \frac{1}{R^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} + \lambda\Big) f\ell \\ &= \ell\frac{1}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}f) + f\frac{1}{R^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\ell + \lambda f\ell. \end{aligned} \tag{4.3}$$

O que implica em

$$\begin{aligned} (\Delta_\Sigma + \lambda)f\ell &= \ell\Big(\frac{1}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}f) - f\frac{1}{R^2}\mu_k + \lambda f\Big) \\ &= \ell(L_{\mu_k} + \lambda)f. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Levando em consideração a análise feita acima, o problema de determinar o espectro de uma hipersuperfície de rotação se reduz a determinar o espectro do operador de Sturm-Liouville, com as condições de fronteira $f(-1) = f(1) = 0$.

Alguns fatos importantes precisam ser mencionados neste momento. De acordo com o exposto podemos notar que o conjunto dos autovalores distintos (sem levar em consideração sua multiplicidades) de Δ_Σ é a união dos autovalores do operador L_{μ_k} com $k \in \mathbb{Z}^*$. Além disso, a multiplicidade de um autovalor λ_k do operador Δ_Σ, e portanto autovalor de L_{μ_k} para algum k, é pelo menos $dim\tilde{\mathcal{H}}_k$.

Mais precisamente as multiplicidades dos autovalores λ de Δ_Σ são do tipo

$$m = \sum_{i=1}^{d} m_{\mu_{k_i}} dim\tilde{\mathcal{H}}_{k_i},$$

em que $m_{\mu_{k_i}}$ é a multiplicidade de λ visto como autovalor de $L_{\mu_{k_i}}$.

Nosso objetivo é mostrar que genericamente no espaço das hipersuperfícies de rotação, as multiplicidades dos autovalores λ do operador Δ_Σ coincidem com a dimensão dos esféricos harmônicos.

Lema 4.1 *Seja* $M^n = (-1,1) \times_R \mathbb{S}^{n-1}$. *Para qualquer perturbação da forma* $R(t,x) = R(x) + tr(x)$, *em que* $r \in C_c^\infty[-1,1]$, *vale que*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Delta_t = (1-n)\frac{r}{R^n}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}) + \frac{n-1}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-2}r\frac{\partial}{\partial x}) - 2\frac{r}{R^3}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}. \tag{4.5}$$

Demonstração: Usando (4.1), para qualquer perturbação da forma $R(t,x) = R(x) + tr(x)$, em que $r \in C_c^\infty[-1,1]$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Delta_t &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\frac{1}{R_t^{n-1}(x)}\frac{\partial}{\partial x}(R_t^{n-1}(x)\frac{\partial}{\partial x}) + \frac{1}{R_t^2(x)}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big)\\
&= \Big(-\frac{(n-1)}{R_t^n(x)}\frac{d}{dt}R_t(x)(R_t^{n-1}(x)\frac{\partial}{\partial x}) + \frac{(n-1)}{R_t^{n-1}(x)}\frac{\partial}{\partial x}(R_t^{n-2}(x)\frac{d}{dt}R_t(x)\frac{\partial}{\partial x})\\
&\quad -\frac{2}{R_t^3(x)}\frac{d}{dt}R_t(x)\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big)\Big|_{t=0}\\
&= \frac{(1-n)}{R^n(x)}r(x)(R^{n-1}(x)\frac{\partial}{\partial x}) + \frac{(n-1)}{R^{n-1}(x)}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-2}(x)r(x)\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{2r(x)}{R^3(x)}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

□

Lema 4.2 *Seja* $M^n = (-1,1) \times_R \mathbb{S}^{n-1}$. *Para qualquer perturbação da forma* $R(t,x) = R(x) + tr(x)$, *em que* $r \in C_c^\infty[-1,1]$ *e* $\phi_{\lambda,k} = f\ell_k$, *em que* $(L_{\mu_k} + \lambda)f = 0$ *e* $(\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} + \mu_k)\ell_k = 0$ *vale que*

$$p'_{\phi\phi}(r) = \int_M \phi\Delta'_M\phi dm = \int_{-1}^{1}\Big(((n-1)\lambda + (3-n)\frac{\mu_k}{R^2})f^2 + (1-n)(\frac{\partial f}{\partial x})^2\Big)R^{n-2}rdx, \tag{4.7}$$

em que $dm = R^{n-1}(x)dx \wedge d\theta$.

Demonstração: Sabemos que $\phi_{\lambda,k}(x,\theta) = f(x)\ell_k(\theta)$, $f \in C^\infty(-1,1)$, $\ell_k \in \tilde{\mathcal{H}}_k$ e $r \in C_c^\infty[-1,1]$.

Assim, como μ_k é autovalor de $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$, pelo Lema 4.1 obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta'_M\phi &= \ell_k\Big((1-n)\frac{r}{R^n}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}f) + \frac{(n-1)}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-2}r\frac{\partial}{\partial x}f)\Big) - \frac{2fr}{R^3}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\ell_k\\
\Delta'_M\phi &= \ell_k\Big((1-n)\frac{r}{R^n}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}f) + \frac{(n-1)}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-2}r\frac{\partial}{\partial x}f) + \frac{2\mu_k r}{R^3}f\Big).
\end{aligned}$$
(4.8)

Isso nos diz que $L'_{\mu_k} f$ é uma função definida na base de M. Daí, teremos

$$\begin{aligned}\int_M \phi\Delta'_M \phi dm &= \int_{(-1,1)\times_R \mathbb{S}^{n-1}} \ell_k^2 f L'_{\mu_k} f dm = \Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \ell_k^2 d\theta\Big)\Big(\int_{-1}^1 f L'_{\mu_k} f R^{n-1} dx\Big) \\ &= \int_{-1}^1 f L'_{\mu_k} f R^{n-1} dx. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Obtém-se ainda

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f L'_{\mu_k} f R^{n-1} dx &= \int_{-1}^1 \Big(f(n-1)\frac{r}{R}(-\frac{1}{R^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}(R^{n-1}\frac{\partial}{\partial x} f) + \frac{\mu_k}{R^2} f) \\ &\quad + (3-n)\frac{r}{R^3}\mu_k f^2\Big) R^{n-1} dx + \int_{-1}^1 (n-1) f \frac{\partial}{\partial x}(R^{n-2} r \frac{\partial}{\partial x} f) dx. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f L'_{\mu_k} f R^{n-1} dx &= \int_{-1}^1 \Big(((n-1)\frac{r}{R}\lambda + \frac{(3-n)}{R^3} r\mu_k) R^{n-1} f^2 - (n-1)\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} R^{n-2} r\Big) dx \\ &= \int_{-1}^1 \Big(((n-1)\lambda + (3-n)\frac{\mu_k}{R^2}) f^2 + (1-n)\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\Big) R^{n-2} r dx. \qquad (4.11)\end{aligned}$$

□

Mediante o que já foi feito, podemos agora estabelecer o seguinte:

Proposição 4.1 *Seja $M^n = (-1,1)\times_R \mathbb{S}^{n-1}$. Considere um autovalor λ para os operadores L_{μ_k} e $L_{\mu_{\bar{k}}}$ com $f, \bar{f}$ autofunções associadas respectivamente. Isto é, $\varphi_{\lambda,k} = f\ell_k$ e $\psi_{\lambda,\bar{k}} = \bar{f}\ell_{\bar{k}}$ com $\ell_k \in \tilde{\mathcal{H}}_k$ e $\ell_{\bar{k}} \in \tilde{\mathcal{H}}_{\bar{k}}$, autofunções associadas ao autovalor λ do problema de Dirichlet*

$$(\Delta_g + \lambda)u = 0 \;\; em \;\; M.$$

Então tem-se que $p'_{\varphi_k\varphi_k}(r) - p'_{\psi_{\bar{k}}\psi_{\bar{k}}}(r)$ não é identicamente nulo.

Demonstração: Argumentaremos por contradição. Por simplicidade denotaremos $\varphi_k = \varphi_{\lambda,k}$, e analogamente $\psi_{\bar{k}} = \psi_{\lambda,\bar{k}}$.

De fato, do Lema 4.2, definimos $p'_{\varphi_k\varphi_k}(r) := \int_M \varphi_k \Delta'_g \varphi_k dm$, onde $\varphi_k(x,\theta) = f(x)\ell_k(\theta)$, $f \in C^\infty(-1,1)$ e $\ell_k \in \tilde{\mathcal{H}}_k$ e de forma análoga $p'_{\psi_{\bar{k}}\psi_{\bar{k}}}(r) := \int_M \psi_{\bar{k}}\Delta'_g \psi_{\bar{k}} dm$, onde $\psi_{\bar{k}}(x,\theta) = \bar{f}(x)\ell_{\bar{k}}(\theta)$, $\bar{f} \in C^\infty(-1,1)$ e $\ell_{\bar{k}} \in \tilde{\mathcal{H}}_{\bar{k}}$.

Suponha que $p'_{\varphi_k\varphi_k}(r) - p'_{\psi_{\bar{k}}\psi_{\bar{k}}}(r) = 0$, para todo $r \in C_c^\infty[-1,1]$. Então devemos ter

$$\begin{aligned}p'_{\varphi_k\varphi_k}(r) - p'_{\psi_{\bar{k}}\psi_{\bar{k}}}(r) &= \int_{-1}^1 \Big((n-1)\big((\lambda + \frac{(3-n)}{(n-1)}\frac{\mu_k}{R^2}) f^2 - (\lambda + \frac{(3-n)}{(n-1)}\frac{\mu_{\bar{k}}}{R^2})\bar{f}^2\big) \\ &\quad + (1-n)\big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\Big)^2\big)\Big) R^{n-2} r dx = 0, \qquad (4.12)\end{aligned}$$

o que implica para um aberto $I \subset [-1,1]$,

(4.13)

$$\Big((n-1)\big((\lambda+\frac{(3-n)}{(n-1)}\frac{\mu_k}{R^2})f^2-(\lambda+\frac{(3-n)}{(n-1)}\frac{\mu_{\bar{k}}}{R^2})\bar{f}^2\big)+(1-n)\big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2-\Big(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\Big)^2\big)\Big)=0,$$

ou seja,

$$-\Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2-\Big(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\Big)^2\Big)+\lambda(f^2-\bar{f}^2)=-\frac{(3-n)}{(n-1)R^2}(\mu_k f^2-\mu_{\bar{k}}\bar{f}^2). \tag{4.14}$$

Caso $f=\bar{f}$, segue de (4.14) que $f\equiv 0$, uma contradição.

Por outro lado, tomando $\eta=f+\bar{f}$ e $\xi=f-\bar{f}$, obtemos que em $I\subset[-1,1]$ aberto, devemos ter a seguinte

$$\frac{\partial}{\partial x}\eta\frac{\partial}{\partial x}\xi-\lambda\eta\xi=\frac{(3-n)}{(n-1)R^2}(\mu_k f^2-\mu_{\bar{k}}\bar{f}^2). \tag{4.15}$$

Agora, considere o P.V.I.

$$(1):\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \frac{\partial}{\partial x}\xi(x(t)) \\ x(0) & = & x_0\ ; \end{array}\right.$$

$x_0\in I$, $I\subset\mathbb{R}$ aberto e $x:\mathbb{R}\longrightarrow I\subset[-1,1]$.

Fazendo $u(t)=\eta(x(t))$, então

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{\partial}{\partial x}\eta(x(t))\dot{x}(t)=\frac{\partial}{\partial x}(\eta(x(t)))\frac{\partial}{\partial x}\xi(x(t)) \\ &= \lambda\eta\xi+\frac{(3-n)}{(n-1)R^2}(\mu_k f^2-\mu_{\bar{k}}\bar{f}^2). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Desta forma, teremos o seguinte P.V.I.

$$(2):\left\{\begin{array}{rcl} \dot{u}(t)-\lambda u(t)\xi(t) & = & q(t) \\ u(0) & = & \eta(x_0)\ . \end{array}\right.$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi(x(t)) &= \frac{\partial}{\partial x}\xi(x(t))\dot{x}(t)=\frac{\partial}{\partial x}\xi(x(t))\frac{\partial}{\partial x}\xi(x(t)) \\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}\xi(x(t))\Big)^2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Sendo assim, podemos afirmar que $\xi(x(t))$ é uma função não decrescente e limitada.

Sabemos que o fator integrante de (2) é dado por $\sigma(t)=e^{-\int_0^t\lambda\xi(s)ds}$.

Suponha $\xi(x_0) > 0$. Como ξ é não decrescente, então $0 < \xi(x_0) \leq \xi(x(t))$, $\forall t$. Logo, $c \leq \xi(x)$, $\forall x$ e $c > 0$. Daí,

$$\int_0^t c dx \leq \int_0^t \xi(x)dx \Longrightarrow ct \leq \int_0^t \xi(x)dx, \tag{4.18}$$

ou seja, $\int_0^t \xi(x)dx \longrightarrow +\infty$ quando $t \longrightarrow +\infty$.

Então devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma(t)} &= e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds} \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sigma(t)} = \lim_{t\to+\infty} e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds} \\ &\Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sigma(t)} = e^{\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda\xi(s)ds} = +\infty. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Caso $\xi(x_0) < 0$, então $\dfrac{1}{\sigma(t)} \longrightarrow +\infty$, quando $t \longrightarrow -\infty$.

Como a solução de (2) é dada por $u(t) = \dfrac{1}{\sigma(t)}\Big(\int_0^t \sigma(s)q(s)dt + c\Big)$, usando (1) e (2), teremos que

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds}\Big(\int_0^t e^{-\int_0^y \lambda\xi(s)ds}q(y)dy + \eta(x_0)\Big) \\ &= e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds}\int_0^t e^{-\int_0^y \lambda\xi(s)ds}q(y)dy + e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds}\eta(x_0). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Em (4.20) a segunda parcela tende a $+\infty$ quando $t \longrightarrow +\infty$, então devemos mostrar que a primeira parcela é limitada.

De fato,

$$\begin{aligned} \Big|e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds}\int_0^t e^{-\int_0^y \lambda\xi(s)ds}q(y)dy\Big| &\leq e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds}\int_0^t e^{-\int_0^y \lambda\xi(s)ds}|q(y)|dy \\ &\leq e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds}\int_0^t e^{-\int_0^y \lambda\xi(s)ds}cdy. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Lembramos que para $\xi(x_0) < 0$, então $\int_0^t e^{-\int_0^y \lambda\xi(s)ds}dy \longrightarrow +\infty$, quando $t \longrightarrow +\infty$. E ainda para $\xi(x_0) > 0$, tem-se $\int_0^t e^{-\int_0^y \lambda\xi(s)ds}dy \longrightarrow +\infty$, quando $t \longrightarrow -\infty$.

Agora, veja que

$$\frac{\Big(\int_0^t e^{-\int_0^y \lambda\xi(s)ds}dy\Big)'}{\Big(e^{-\int_0^t \lambda\xi(s)ds}\Big)'} = \frac{e^{-\int_0^t \lambda\xi(s)ds}}{e^{-\int_0^t \lambda\xi(s)ds}\lambda\xi(x(t))} = \frac{1}{\lambda\xi(x(t))}. \tag{4.22}$$

Como sabemos, $\xi(x(t))$ é convergente. Logo,

$$\Big|e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds}\int_0^t e^{-\int_0^y \lambda\xi(s)ds}q(y)dy\Big| \tag{4.23}$$

é limitada.

Portanto, $|u(t)| \longrightarrow +\infty$, quando $t \longrightarrow \pm\infty$. Um absurdo, já que $u(t)$ é limitada.

$\square$

Teorema 4.2 *Sejam (M, g_{R_0}) hipersuperfícies de rotação e λ um autovalor do Laplaciano com multiplicidade $m = m_{\mu_k} dim\tilde{\mathcal{H}}_k$ (respectivamente $m = dim\tilde{\mathcal{H}}_k + dim\tilde{\mathcal{H}}_{\bar{k}}$). Então existe uma função $R \in \mathcal{X}$ próxima R_0 tal que os autovalores $\lambda(R)$ próximos a $\lambda(R_0)$ possuem multiplicidade $m = dim\tilde{\mathcal{H}}_k$ (respectivamente $m = dim\tilde{\mathcal{H}}_{\bar{k}}$).*

Demonstração: Seja $R(t,x) = R_0 + tr(x)$, com $r \in C_c^\infty[-1,1]$ uma família de autofunções perfil. Dados λ autovalor de Δ_Σ e $m(\lambda) = m_{\mu_k} dim\tilde{\mathcal{H}}_k$, então as autofunções associadas ao Δ_Σ são dadas por $\phi_{\lambda,k}^{i,j} = f_i \ell_i^j$, $i = 1, \ldots, m_k$ e $j = 1, \ldots, dim\tilde{\mathcal{H}}_k$.

Defina

$$p'_{ij}(r) = \int_M \phi_{\lambda,k}^{i,j} \Delta'_g \phi_{\lambda,k}^{i,j} \mathrm{dM} = \lambda'_{i,j}.$$

Do Lema 4.2, tem-se

$$\lambda'_{i,j} = \int_M \phi_{\lambda,k}^{i,j} \Delta'_g \phi_{\lambda,k}^{i,j} \mathrm{dM} = \int_{-1}^{1} f_i L'_{\mu_k} f_i dx.$$

Isto significa que existem no máximo m_{μ_k} curvas de autovalores distintas.

Agora, suponha que as curvas de autovalores não se separam.

A Proposição B.1 garante que existem α curvas idênticas, $\alpha = dim\tilde{\mathcal{H}}_k$, de autovalores $\lambda_i(t)$, para cada i.

Desta forma, teremos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= \lambda_2(t) = \lambda_3(t) = \cdots = \lambda_m(t);\ m = m(\lambda(t)) \\
\lambda'_1(t) &= \lambda'_2(t) = \lambda'_3(t) = \cdots = \lambda'_m(t), \forall t \\
\Longrightarrow p'_1(0) &= p'_2(0) = \cdots = p'_m(0).
\end{aligned}$$

Isto é falso, pela Proposição 4.1.

Repetindo o argumento, podemos separar os autovalores $\lambda'_i s$.

$\square$

Demonstração do Teorema 4.1: Segue diretamente do Teorema 4.2. $\square$

Apêndice A

A.1 Sobre a Hipótese de Arnold

Nesta seção apresentaremos os resultados sobre transversalidade em famílias diferenciáveis de operadores autoadjuntos definidos em um espaço de Hilbert apresentados por Teytel em [19]. Incluiremos também a noção de codimensão de conjunto magro apresentada no mesmo trabalho.

A.2 Diferenciabilidade de Família de Operadores

Foi considerada, como antes, uma família diferenciável $A(q)$ de operadores auto-adjuntos num espaço de Hilbert(real ou complexo) com um parâmetro real de classe C^1 na variedade de Banach $\mathcal{X}$, modelada num espaço de Banach $\mathcal{B}$. Aqui ele denotou q coordenadas locais em $\mathcal{X}$. A diferenciabilidade em $q = q_0$ deverá ser estendida no seguinte sentido: $\forall p \in \mathcal{B}$ num operador simétrico $A^{(1)}(q_0, p)$ definido no mesmo domínio que $A(q_0)$, linear em p, tal que

$$A(q_0 + \varepsilon p) = A(q_0) + \varepsilon A_{(1)}(q_0, p) + o(\varepsilon), \qquad (1.1)$$

$$\|A_{(1)}(q_0, p)\|_H \leq M(\|f\|_H + \|A(q_0)f\|_H), \qquad (1.2)$$

onde M independe de p. Aqui $o(\epsilon)$ é um operador simétrico em H definido no domínio de $A(q_0)$ tal que para todo f no domínio de $A(q_0)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_f \frac{\|o(\varepsilon)f\|_H}{\varepsilon(\|f\|_H + \|A(q_0)f\|_H)} = 0, \qquad (1.3)$$

e o limite é uniforme em p, $\|p\|_{\mathcal{X}} = 1$. $A_{(1)}(q_0, p)$ é a derivada de Fréchet de $A(q)$ com respeito a q na direção de p na norma

$$\|A\| = \sup_f \frac{\|Af\|_H}{\|f\|_H + \|A(q_0)f\|_H}.$$

Durante todas as aplicações foram considerados uma variedade analítica de Banach $\mathcal{X}$ e uma família analítica de operadores auto-adjuntos. Aqui a analiticidade é definida de uma forma semelhante. Uma família $A(q)$ é chamada analítica se para todo p, $\|p\| = 1$,

$$A(q_0 + \varepsilon p) = A(q_0) + \varepsilon A^{(1)}(q_0, p) + \varepsilon^2 A^{(2)}(q_0, p) + \cdots \qquad (1.4)$$

Onde os operadores $A_{(i)}(q_0, p)$ são simétricos e definidos no mesmo domínio que $A(q_0)$, homogênea de grau i em p. Além disso, tais operadores possuem uma limitação em relação a $A(q_0)$ dada por

$$\|A^{(i)}(q_0, p)f\|_H \leq \frac{M}{r^i}(\|f\|_H + \|A(q_0)f\|_H),$$

para algumas constantes M e r independente de p.

Assim, se H é real e $A(q)$ satisfaz *SAH*, então os operadores com autovalores duplos formam um conjunto de codimensão 2.

A *hipótese forte de Arnold* pode ser verificada pelo seguinte critério:
Sejam λ_0 um autovalor do operador $A(q_0)$ e $\{v_j\}$, $j = 1, \cdots, n$, uma base ortonormal fixa para o auto-espaço associado. Definimos então os seguintes funcionais lineares

$$\text{(A.1)} \qquad f'_{lk}(p) = (A^{(1)}(q_0)v_l, v_k), \quad n \geq l \geq k \geq 1.$$

Definição A.1 (Hipótese Forte de Transversalidade de Arnold) *Seja H um espaço de Hilbert real, e λ um autovalor de $A(q)$ de multiplicidade $n \geq 2$. Então existem dois autovetores ortonormais v_1 e v_2 de $A(q_0)$ pertencentes a λ tais que os funcionais lineares $f'_{11}(p) - f'_{22}(p)$ e $f'_{12}(p)$ são linearmente independentes.*

A.3 Sobre Codimensão de Conjunto Magro

Em primeiro lugar lembramos que um conjunto magro ou de primeira categoria é uma união enumerável de conjuntos com interior vazio. Um subconjunto de um conjunto magro também é magro. Um complementar de um conjunto magro é um conjunto residual. Um conjunto residual é uma interseção contável de conjuntos abertos densos.

São exemplos de conjuntos magros de codimensão n subespaços vetoriais de codimensão n e mais geralmente subvariedades de codimensão n contidas em espaços de Banach (ver [19]).

A seguir serão estabelecidos os principais resultados sobre codimensão de conjuntos magros, para melhor entendimento veja [19].

Lema A.1 *Uma união contável de conjuntos magros de codimensão n é um conjunto de codimensão n magro.*

Lema A.2 *Um subconjunto $\mathcal{Y}$ de um espaço de Banach separável é de codimensão* 1 *magro, se e somente se, é magro.*

Lema A.3 *Seja G um difeomorfismo de $\mathcal{X}$. Se o conjunto $\mathcal{Y}$ é magro de codimensão n, então $G(\mathcal{Y})$ também é.*

Lema A.4 *Um subespaço de codimensão n é um conjunto magro de codimensão n.*

Teorema A.1 (Sard-Smale) *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Z}$ variedades de classe C^r com $\mathcal{X}$ separável e $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Z}$ uma aplicação de Fredholm de classe C^r. Suponha que $r > max(0, ind(F'))$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Então o conjunto de valores regulares de F é um conjunto residual de $\mathcal{Z}$.*

Lema A.5 *Uma variedade de codimensão n é um conjunto de codimensão n magro.*

Lema A.6 *Seja $\mathcal{Y}$ um conjunto magro de codimensão n e $\mathcal{M}$ um hiperplano em $\mathcal{X}$ de codimensão $k < n$. Então $\mathcal{Y} \bigcap \mathcal{M}$ é um conjunto magro de codimensão $n - k$ em $\mathcal{M}$.*

Definição A.2 *Chamaremos um conjunto $\mathcal{Y}$ um conjunto magro de codimensão n em um conjunto aberto U se $U \bigcap \mathcal{Y}$ é magro de codimensão n.*

Lema 2.8: *Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach separável e $\mathcal{Y}$ um subconjunto de $\mathcal{X}$. Suponha que para cada $q \in \mathcal{Y}$ existe uma vizinhança U_q de q tal que $\mathcal{Y}$ é magro de codimensão n em U_q. Então $\mathcal{Y}$ é magro de codimensão n em $\mathcal{X}$.*

Definição A.3 *Chamaremos um subconjunto $\mathcal{Y}$ de uma variedade de Banach separável $\mathcal{X}$ um conjunto magro de codimensão n se, para qualquer carta (U, ϕ), $\phi(\mathcal{Y} \bigcap U)$ é magro de codimensão n em $\phi(U)$.*

Lema A.7 *Seja $\mathcal{Y}$ um conjunto magro de codimensão n e $\mathcal{M}$ uma subvariedade de $\mathcal{X}$ de codimensão $k < n$. Então $\mathcal{Y} \bigcap \mathcal{M}$ é um conjunto magro de codimensão $n - k$ em $\mathcal{M}$.*

Lema A.8 *Seja $\mathcal{X}$ uma variedade de Banach separável e $\mathcal{Y}$ um subconjunto de $\mathcal{X}$. Suponha que para todo $q \in \mathcal{Y}$ existe uma vizinhança U_q de q tal que $\mathcal{Y}$ é magro de codimensão n em U_q. Então $\mathcal{Y}$ é magro de codimensão n em $\mathcal{X}$.*

Além disso, segue o teorema de alta relevância em nosso trabalho.

Teorema A.2 (Teorema A) *Seja $A(q)$ uma família diferenciável de operadores auto-adjuntos num espaço de Hilbert H, indexados por um parâmetro q que pertence a uma variedade $\mathcal{X}$ em um espaço de Banach separável. Assuma que o espectro de cada operador $A(q)$ é discreto, de multiplicidade finita, e sem pontos de acumulação finitos. Assuma também que a família $A(q)$ satisfaz **SAH2**. Então o conjunto de todos os q tais que $A(q)$ tem um autovalor repetido é magro codimensão 2 em $\mathcal{X}$.*

Definição A.4 *Chamaremos de uma vizinhança $U(q_0, I)$ de q_0 separadora(que separa) se para cada autovalor $\lambda_i \in I$ de $A(q_0)$ de multiplicidade m_i, existe um intervalo $(\alpha_i, \beta_i) \in I$, (α_i, β_i) disjunto entre si, tal que para cada $q \in U(q_0, I)$ o espectro de $A(q)$ em α_i, β_i consiste de autovalores de multiplicidade total m_i.*

Se I é finito, então as vizinhanças suficientemente pequenas são separadoras.

Lema A.9 *Se a condição SAH2 é satisfeita, então para cada $n > 1$, para cada intervalo aberto finito I, e para cada $q_0 \in \mathcal{D}_{n,I}$, existe uma vizinhança U_{q_0} de q_0 tal que $\mathcal{D}_{n,I}$ é conjunto magro de codimensão 2 em U_{q_0}.*

Lema A.10 *Se a condição SAH2 é satisfeita, então para cada $1 \leq i \leq r$ existe uma vizinhança U_i de q_0 tal que $\mathcal{D}_{n,(\alpha_i,\beta_i)}$ é magro de codimensão 2 em U_i.*

Teorema A.3 (Teorema B) *Seja $A(q)$ uma família diferenciável de operadores auto-adjuntos num espaço de Hilbert H, indexados por um parâmetro q que pertence a uma variedade $\mathcal{X}$ em um espaço de Banach separável. Assuma que o espectro de cada operador $A(q)$ é discreto, de multiplicidade finita, e sem pontos de acumulação finitos. Assuma também que a família $A(q)$ satisfaz **SAH2**. Então quaisquer dois pontos em $\mathcal{X}$ podem ser ligados por uma curva analítica tal que para todo q no interior desta curva, $A(q)$ tem um espectro simples .*

Observação: Caso não haja uma carta contendo ambos q_1 e q_2, então não será possível ligá-los por uma curva analítica qualquer, e não há nada a fazer.

Apêndice B

B.1 Fórmulas Tipo Hadamard

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e com bordo, cuja medida (forma volume) é dM. Lembramos que o Bilaplaciano, $\Delta_g^2(.) = \Delta_g(\Delta_g)$ é auto-adjunto no espaço de Hilbert $L^2(M, \mathrm{dM})$, quando consideramos as funções $C_0^2(M)$ ver [7]. Tal observação nos permite usar a teoria da pertubação para operadores lineares [7]. Para fazer isso, consideremos o conjunto $\mathcal{M}^r$ de todas as métricas Riemannianas C^r em M. Então cada $g \in \mathcal{M}^r$ determina a sequência

$$0 = \mu_0(g) \leq \mu_1(g) \leq \mu_2(g) \leq \ldots \leq \mu_k(g) \leq \ldots \tag{B.1}$$

dos autovalores de Δ^2 contando com suas multiplicidades. Consideramos cada autovalor $\mu_k(g)$ como uma função de g em $\mathcal{M}^r$. As funções $g \longrightarrow \mu_k(g)$ são contínuas mas não diferenciáveis em geral, com exceção do caso onde μ_k é simples [7].

Definição B.1 *Seja $\mathcal{C}(X, Y)$ o espaço dos operadores fechados entre os espaços de Banach X e Y. Uma família $T(x) \in \mathcal{C}(X, Y)$, definida em um domínio D_0 do plano complexo, é dita holomorfa do tipo A se:*

- *$D(T(x)) = D$ é independente de x e*
- *$T(x)u$ é holomorfa para todo $x \in D_0$ e para todo $u \in D$.*

Proposição B.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Considere uma família analítica real a um parâmetro de estruturas Riemannianas $g(t)$ em M com $g = g(0)$. Se λ é um autovalor de multiplicidade $m > 1$ para o Bilaplaciano $\Delta^2 g(t)$,* *então existem $\varepsilon > 0$, escalares λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ e funções ϕ_i variando analiticamente em t tais que, para todo $|t| < \varepsilon$, valem as seguintes relações:*

1. $\Delta^2_{g(t)}\phi_i(t) = \lambda_i(t)\phi_i(t)$;
2. $\lambda_i(0) = \lambda$;
3. $\{\phi_i(t)\}$ *é ortonormal em* $L^2(M, \mathrm{dM})$.

Demonstração: Inicialmente, considere uma extensão $g(z)$ de $g(t)$ a um domínio D_0 do plano complexo $\mathbb{C}$. Seja $C^\infty(M, \mathbb{C})$ o espaço das funções C^∞, $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$, tomando

$$\Delta^2_{g(z)} : C^\infty(M, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{C}),$$

vemos que este operador em coordenadas locais é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta^2_{g(z)}f &= \Delta_{g(z)}(\Delta_{g(z)}f)\\
&= g^{ij}(z)(\partial_i\partial_j(\Delta_{g(z)}f) - \Gamma^k_{ij}(z)\partial_k(\Delta_{g(z)}f))\\
&= g^{ij}(z)\partial_i\partial_j(g^{rs}(\partial_r\partial_s(f) - \Gamma^l_{rs}(z)\partial_l(f)))\\
&\quad -g^{ij}(z)\Gamma^k_{ij}(z)\partial_k(g^{rs}(z)(\partial_r\partial_s(f) - \Gamma^l_{rs}(z)\partial_l(f)))\\
&= g^{ij}(z)\partial_i\partial_j(g^{rs}(z)\partial_r\partial_s(f)) - g^{ij}(z)\partial_i\partial_j(g^{rs}(z)\Gamma^l_{rs}(z)\partial_l(f))\\
&\quad -g^{ij}(z)\Gamma^k_{ij}(z)\partial_k(g^{rs}(z)\partial_r\partial_s(f)) + g^{ij}(z)\Gamma^k_{ij}(z)\partial_k(g^{rs}(z)\Gamma^l_{rs}(z)\partial_l(f))\\
&= g^{ij}(z)\big(g^{rs}(z)\partial_i\partial_j\partial_r\partial_s(f) - g^{rs}(z)(\Gamma^l_{rs}(z)\partial_i\partial_j\partial_l(f) + \Gamma^k_{ij}(z)\partial_k\partial_r\partial_s(f))\\
&\quad +(\partial_i\partial_j(g^{rs}(z)) - \Gamma^k_{ij}(z)\partial_k(g^{rs}(z)))\partial_r\partial_s(f) + g^{rs}(z)\Gamma^k_{ij}(z)\Gamma^l_{rs}(z)\partial_k\partial_l(f)\\
&\quad +(-\partial_i\partial_j(g^{rs}(z))\Gamma^l_{rs}(z) - g^{rs}(z)\partial_i\partial_j(\Gamma^l_{rs}(z)) + \Gamma^k_{ij}(z)\partial_k(g^{rs}(z))\Gamma^l_{rs}(z)\\
&\quad +g^{rs}(z)\Gamma^k_{ij}(z)\partial_k(\Gamma^l_{rs}(z))\partial_l(f)\big)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

para toda $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, com

$$\Gamma^k_{ij}(z) = \frac{1}{2}g^{kl}(z)(\partial_j g_{il}(z) + \partial_i g_{jl}(z) - \partial_l g_{ij}(z)).$$

É importante observar que o domínio $D = H^4(M) \cap H^2_0(M)$ do operador $\Delta^2_{g(z)}$ não depende de z, dado que M é compacta, onde duas métricas quaisquer são equivalentes. Vale notar que a aplicação $z \longmapsto \Delta^2_{g(z)}f$ é holomorfa para $z \in D_0$ e para qualquer $f \in D$. Logo, conforme a Definição $B.1$, conclui-se que $\Delta^2_{g(z)}$ é uma família holomorfa do tipo (A).

Agora, vamos fazer uma pequena modificação no operador $\Delta^2_{g(z)}f$ para que o mesmo seja auto-adjunto, em relação a um produto interno fixo. Para isso, será construída uma isometria

$$P : L^2(M, \mathrm{dM}) \longrightarrow L^2(M, \mathrm{d\bar{M}})$$

tomando, para cada u, $P(u) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{det(\bar{g}_{ij}(t))}} \sqrt[4]{det(g_{ij}(t))}u$, onde $\bar{g} = f^*g$.

Assim, basta notar que vale

$$\begin{aligned}
\int_M P(u)P(v)\mathrm{dM} &= \int_M \frac{1}{\sqrt[4]{det(\bar{g}_{ij}(t))}} \sqrt[4]{det(g_{ij}(t))}u \frac{1}{\sqrt[4]{det(\bar{g}_{ij}(t))}} \sqrt[4]{det(g_{ij}(t))}v\mathrm{d\bar{M}} \\
&= \int_M uv \frac{1}{\sqrt{det(\bar{g}_{ij}(t))}} \sqrt{det(g_{ij}(t))}\mathrm{d\bar{M}} \\
&= \int_M uv\mathrm{dM}.
\end{aligned}$$

Com isso, o operador $A(\bar{g}) := P^{-1}_{\bar{g}} \circ \Delta^2_{\bar{g}} \circ P_{\bar{g}}$ terá os mesmos autovalores que $\Delta^2_{\bar{g}} : H^4(M, \mathrm{d\bar{M}}) \cap H^2_0(M, \mathrm{d\bar{M}}) \longrightarrow L^2(M, \mathrm{d\bar{M}})$.

Para mostrarmos que $A(\bar{g(t)})$ é auto-adjunto devemos devemos calcular

$$\begin{aligned}
\int_M uA(\bar{g(t)})v\mathrm{dM} &\overset{(Def.A)}{=} \int_M uP^{-1}_{\bar{g}(t)}\Delta^2_{\bar{g}(t)}P_{\bar{g}(t)}v\mathrm{dM} = \int_M P_{\bar{g}(t)}(u)\Delta^2_{\bar{g}(t)}P_{\bar{g}(t)}(v)\mathrm{d\bar{M}} \\
&\overset{(sim.\Delta^2)}{=} \int_M P_{\bar{g}(t)}(v)\Delta^2_{\bar{g}(t)}P_{\bar{g}(t)}(u)\mathrm{d\bar{M}} = \int_M vA(\bar{g})u\mathrm{dM}.
\end{aligned}$$

Assim, sob tais condições podemos aplicar um Teorema devido a Rellich [16] ou o Teorema de Kato [7] para concluir o resultado desta proposição.

□

Consideremos agora uma variação suave g_t da métrica g, de maneira que (M, g_t, dM) é uma variedade Riemanniana com medida suave. Aqui já são dados que H é um $(0,2)$-tensor definido por $H_{ij} = \frac{d}{dt}|_{t=0}g_{ij}(t)$ e ainda que, escrevendo $h = \langle H, g\rangle$, com $\frac{d}{dt}|_{s=t}\mathrm{dM}_s = \frac{1}{2}h\mathrm{dM}$.

Para determinarmos $(\Delta^2)'$, considerando a variação da métrica, e não do domínio, precisamos apenas estabelecer o seguinte resultado.

Lema B.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e seja g_t uma variação diferenciável da métrica g. Então para toda $f \in C^\infty_c(M)$ temos*

(B.3) $$(\Delta^2_{g(t)})'(f) = \Delta_{g(t)}\Delta'_{g(t)}f + \Delta'_{g(t)}\Delta_{g(t)}f$$

onde $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\Delta_{g(t)})(f) =: \Delta'_{g(t)}$.

Demonstração: A demonstração segue diretamente da regra do produto. $\square$

Bibliografia

[1] Alías, L.; Piccione, P. *On the manifold structure of the set of unparametrized embeddings with low regularity.* Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), v.42, n.2, pp.171-183, 2011.

[2] Arnold, V. I. Modes and quasimodes. (Russian) Funkcional. Anal. i Prilozen. 6 (1972), no. 2, 12-20.

[3] Canzani, Y. *On the multiplicity of eigenvalues of conformally covariant operators.* Ann. Inst. Fourier, Tome 64, nº 3, pp. 947-970, 2014.

[4] Colin de Verdière, Y. *Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold.* Comment. Math. Helv. vol. 63, No. 2, pp. 184-193, 1988.

[5] Gurarie, D. *Semiclassical eigenvalues and shape problems on surfaces of revolution.* J. Math. Phys., Vol. 36, No. 4, 1995.

[6] Henry,D. B. Perturbation of the Boundary in Boundary Value Problems of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2005.

[7] Kato, T. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer, 1980.

[8] Lamberti, P.D.; Cristoforis, M.L. *Persistence of Eigenvalues and Multiplicity in the Dirichlet Problem for the Laplace Operator on Nonsmooth Domains.* Mathematical, Physics, Analysis and Geometry 9: pp. 65-94, Springer, 2006.

[9] Lupo, D.; Micheletti, A.M. *On Multiple Eigenvalues of Selfadjoint Compact Operators.* J. Math. Anal. Appl. 172, pp. 106-116, 1993.

[10] Mesquita, Raul R. *Fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores do η-laplaciano e aplicações* . Tese de Doutorado. Manaus, 2014.

[11] Micheletti, A.M; Pistola, A. *Multiple eigenvalues of the Laplace-Beltrame operator and deformation of the Riemannian metric.* Discrete and Continuous Dynamical Systems. Vol. 4, No. 4, pp. 709-720, 1998.

[12] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry.* Academic Press, 1983.

[13] Ortega, J.H; Zuazua, E. *Generic simplicity of the spectrum and stabilization for a plate equation.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 39, No. 5, pp.1585-1614, 2001.

[14] Pereira, M.C. *Perturbação de contorno do problema de Dirichlet para o Bilaplaciano.* Tese de Doutorado. São paulo, 2004.

[15] Petersen, P., Riemannian geometry. New York, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, v. 171, 1998.

[16] Rellich, F. *Störungstheorie der Spektralzerlegung.* Math. Ann. 118 (1940) 462-484

[17] Sogge, C.D.; Zelditch, S. *Riemannian manifolds with maximal eigenfunction growth.* Duke Mathematical Journal, Vol. 114, No. 3, 2002.

[18] Soulf, A.; Ilias, S. *Domain deformations and eigenvalues of the dirichilet laplacian in a Riemannian manifold.* Illinois Journal of Mathematics, 51 (2007) pp. 645-666.

[19] Teytel, M. *How rare are multiple eigenvalues.* Comm. Pure Appl. Math., Vol. LII, pp. 0917-0934, 1999.

[20] Uhlenbeck, K. *Generic Properties of Eigenfunctions.* Amer. J. of Math. 98 (1976) pp. 1059-1078.

[21] Zelditch, S. *On the generic spectrum of a Riemannian cover.* Ann. Inst. Fourier, Grenobe 40, 2(1990), pp. 407-442.