

Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Sobre superfícies imersas em 3-variedades de contato
homogêneas e construção de quase solitons de Ricci

Francisco Eteval da Silva Feitosa

Manaus-AM
Outubro/2016

Sobre superfícies imersas em 3-variedades de contato
homogêneas e construção de quase solitons de Ricci

por

Francisco Eteval da Silva Feitosa

sob orientação do

Professor Dr. José Nazareno Vieira Gomes

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em
Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM,
como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-AM
Outubro/2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

F311s Feitosa, Francisco Eteval da Silva
Sobre superfícies imersas em 3-variedades de contato
homogêneas e construção de quase solitons de Ricci / Francisco
Eteval da Silva Feitosa. 2016
66 f.: 31 cm.

Orientador: José Nazareno Vieira Gomes
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do
Amazonas.

1. Ângulo de contato. 2. Variedade Homogênea. 3. Curvatura
Gaussiana. 4. Produto warped. 5. Quase soliton de Ricci. I. Gomes,
José Nazareno Vieira II. Universidade Federal do Amazonas III.
Título

Francisco Eteval da Silva Feitosa

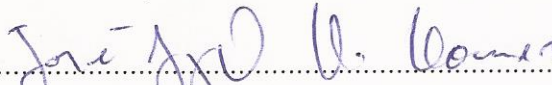
Sobre superfícies imersas em 3-variedades de contato homogêneas e
construção de quase solitons de Ricci

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em
Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM,
como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus, 21 de outubro de 2016.

BANCA EXAMINADORA



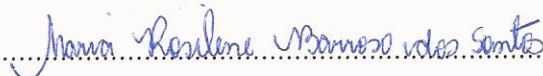
Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (orientador)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM



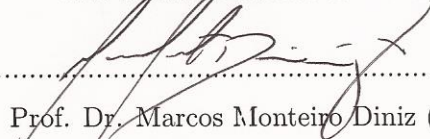
Prof^a. Dr^a. Juliana Ferreira Ribeiro de Miranda (membro externo)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM



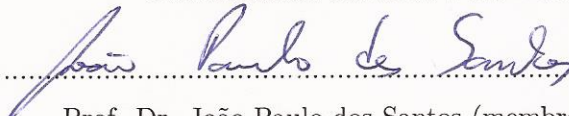
Prof^a. Dr^a. Maria Rosilene Barroso dos Santos (membro externo)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM



Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz (membro externo)

Universidade Federal do Pará - UFPA



Prof. Dr. João Paulo dos Santos (membro externo)

Universidade de Brasília - UnB

Agradecimentos

Aos meus pais, Lucia de Fatima Feitosa e Francisco Dagoberto Feitosa, pela imensa dedicação que tiveram comigo.

Ao meu filho e companheiro Leonard por entender o porque de muitas vezes, no decorrer deste trabalho, não ter lhe dado toda a atenção que ele merece.

À minha esposa Helena pela paciência, apoio e companheirismo durante essa caminhada.

Ao professor Renato Tribuzy por todos os seus ensinamentos e por ter me dado a oportunidade de fazer parte dos meus estudos no exterior.

Ao professor Gudlaugur Thorbergsson por ter compartilhado comigo parte de suas pesquisas e por ter sido extremamente atencioso durante minha estadia na Alemanha.

Aos colegas de doutorado da UFAM que já concluíram ou que ainda vão concluir, dentre eles: Elzimar Rufino, Marcos Alcântara, Antonio Airton, Manoel Vieira, Max Ferreira, Raul Rabelo, João Ponciano, Juliana Miranda, Kelly Marães e Elaine Ladislau.

Ao professor e amigo José Nazareno pela imensa competência com que orientou este trabalho.

Aos professores da banca examinadora, pelas sugestões e correções que muito contribuíram para a versão final desta tese.

Aos colegas do Departamento de Matemática da UFAM, pelo apoio em todos os sentidos.

E finalmente agradeço a CAPES pelo apoio financeiro no período em que estive no exterior.

"Ambição e conquista sem contribuição, não tem significado algum".

(do filme "O clube do imperador")

Resumo

Na primeira parte desta tese calculamos, em termos da curvatura média e do ângulo de contato, a curvatura Gaussiana de superfícies isometricamente imersas em 3-variedades Riemannianas de contato homogêneas. Também calculamos o Laplaciano do ângulo de contato. Como aplicação caracterizamos o Toro de Hopf como a única superfície conexa e compacta isometricamente imersa, com ângulo de contato e curvatura média ambos constantes, em uma classe de 3-variedades homogêneas simplesmente conexas com grupo de isometrias de dimensão quatro. Apresentamos ainda condições suficientes, em termos do ângulo de contato, para imergir isometricamente superfícies nestes ambientes. Na segunda parte, apresentamos condições necessárias e suficientes para que um produto warped admita estrutura de quase soliton de Ricci gradiente. Além disso, alguns resultados de existência e rigidez são apresentados.

Palavras-chave: Ângulo de contato, Variedade Homogênea, Curvatura Gaussiana, Produto warped, Quase soliton de Ricci.

Abstract

In the first part of this thesis, we calculate the Gaussian curvature of surfaces isometrically immersed in homogeneous contact Riemannian 3-manifolds in terms of mean curvature and contact angle. Moreover, we find the Laplacian of the contact angle and, as an application, we characterize Hopf's torus as the unique connected and compact surface in the class of homogeneous and simply connected 3-manifolds with isometry group of dimension 4 which has both constant mean curvature and contact angle. Furthermore, we present sufficient conditions to isometrically immerse surfaces in these 3-manifolds. In the second part, we present necessary and sufficient conditions for warped product to admit the structure of gradient almost Ricci soliton. Besides that, some results about existence and rigidity are presented.

Keywords: Contact angle, Homogeneous manifold, Gaussian curvature, Warped Product, Almost Ricci soliton.

Conteúdo

Introdução	1
1 Superfícies imersas em 3–variedades de contato homogêneas	7
1.1 Preliminares	7
1.1.1 Variedades de Contato: Definição e Exemplos	7
1.1.2 Variedades Homogêneas 3–dimensionais	10
1.1.3 Grupos de Lie	11
1.1.4 Grupos de Lie unimodulares e não-unimodulares	16
1.1.5 Variedades de Contato Homogêneas	18
1.1.6 Equações de Estrutura	20
1.2 Resultados Principais	23
1.2.1 Escolha do Referencial Adaptado	23
1.2.2 Coeficientes da Segunda Forma Fundamental e Equações de Codazzi	32
1.2.3 Teoremas Principais	37
1.2.4 Aplicações	42
2 Quase solitons de Ricci gradiente produto warped	49
2.1 Preliminares	49
2.2 Resultados Principais	52
2.2.1 Aplicação	58
2.2.2 Resultado de Rigidez	61
Bibliografia	63

Introdução

Esta tese é constituída de duas partes distintas. A primeira trata sobre superfícies imersas em 3-variedades de contato homogêneas.

Uma estrutura de contato sobre uma 3-variedade suave \mathbb{M}^3 é dada por uma 1-forma η globalmente definida em \mathbb{M}^3 tal que $d\eta$ tem posto igual a 2 sobre a distribuição de contato $\delta = Ker(\eta)$. Ao par (\mathbb{M}^3, η) vamos nos referir como variedade de contato. A dualidade de η define um único campo vetorial ξ chamado campo Reeb. Quando consideramos uma superfície Σ imersa em (\mathbb{M}^3, η) , obtemos um importante invariante geométrico, tradicionalmente denotado por β_p e chamado o ângulo de contato no ponto $p \in \Sigma$ que corresponde ao complementar do ângulo entre os planos δ_p e $T_p\Sigma$.

Recentemente, Gomes e Cui mostraram em [24] uma fórmula para a curvatura Gaussiana de uma superfície orientada isometricamente imersa na esfera de Berger $\mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3$ que envolve o ângulo de contato. Isto permitiu-lhes concluir que, na classe das esferas de Berger com $\kappa - 4\tau^2 > 0$, uma superfície CMC conexa e compacta com ângulo de contato constante é necessariamente um Toro de Hopf. O caso particular da esfera unitária \mathbb{S}^3 foi estudado por Gomes em [23], onde ele provou que o Toro de Clifford $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ é a única superfície com curvatura média e ângulo de contato ambos constantes em \mathbb{S}^3 . Para isso, Gomes se baseou no artigo de Montes e Verderesi [30] que caracteriza as superfícies mínimas em \mathbb{S}^3 com ângulo de contato constante.

Observamos que a esfera de Berger $\mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3$ é um caso particular das variedades de contato homogêneas 3-dimensionais (\mathbb{M}^3, η) que são variedades que admitem um grupo de Lie G conexo agindo transitivamente como um grupo de difeomorfismo sobre \mathbb{M}^3 que deixa a forma η invariante.

Em [34] Perrone mostrou que variedades Riemannianas de contato homogêneas simplesmente conexas 3-dimensionais (\mathbb{M}^3, η, g) são grupos de Lie, em que (η, g) é uma

estrutura de contato com métrica g invariante à esquerda. Usando a classificação dos grupos de Lie 3-dimensionais feita por J. Milnor em [29], Perrone classificou tais variedades no caso em que \mathbb{M}^3 é um grupo de Lie unimodular. Neste caso, existe um referencial ortonormal $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ na álgebra de Lie \mathfrak{g} de \mathbb{M}^3 satisfazendo

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = c\tilde{f}_3, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = r\tilde{f}_1 \quad \text{e} \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = l\tilde{f}_2. \quad (1)$$

No caso em que \mathbb{M}^3 é não-unimodular, o referencial satisfaz

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = b\tilde{f}_2 + 2\tilde{f}_3, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = 0 \quad \text{e} \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = l\tilde{f}_2. \quad (2)$$

Para estudar a geometria de uma superfície Σ isometricamente imersa em (\mathbb{M}^3, η, g) usamos como ferramenta principal o método do referencial móvel. Escolhemos um referencial ortonormal $\{f_1, f_2, f_3\}$ por rotação de um ângulo α de \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 , deixando \tilde{f}_3 fixado, de modo que *campo vetorial característico* $f_1 \in T\Sigma \cap \delta$ em uma vizinhança aberta $\mathcal{W} = \{p \in \Sigma : \beta(p) \neq \pm \frac{\pi}{2}\}$ de um ponto não-singular. A descrição precisa de α é dada na Seção 1.2.1.

Os dois principais objetivos desta primeira parte são: calcular a curvatura Gaussiana de Σ em termos do ângulo de contato β e da curvatura média H , bem como calcular o Laplaciano do ângulo de contato. A fim de fazer isso, consideramos o referencial adaptado $\{e_1, e_2, e_3\}$ em \mathcal{W} , dado por

$$e_1 = f_1, \quad e_2 = \sin \beta f_2 + \cos \beta f_3 \quad \text{e} \quad e_3 = -\cos \beta f_2 + \sin \beta f_3, \quad (3)$$

isto é, e_1 e e_2 são tangentes à superfície Σ . Note que e_1 está bem definido em \mathcal{W} , visto que a distribuição $\langle \xi \rangle^\perp$ sobre \mathbb{M}^3 é não integrável. Por esta razão, nós trabalhamos apenas em \mathcal{W} e então estendemos as fórmulas obtidas a todos os pontos de Σ , uma vez que, pelo Teorema de Frobenius, o complementar $\mathcal{W}^C = \{p \in \Sigma : \beta(p) = \pm \frac{\pi}{2}\}$ tem interior vazio e portanto \mathcal{W} é denso em Σ .

Utilizando o referencial em (3) provamos que: Para o caso em que Σ é uma superfície orientada isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana de contato homogênea unimodular simplesmente conexa (\mathbb{M}^3, η) , a curvatura Gaussiana em \mathcal{W} é dada por

$$K = - \left(2H + \frac{1}{2}(l-r) \sin 2\alpha \sin \beta \right) \left(\beta_2 + \frac{1}{2}(l-r) \sin 2\alpha \sin \beta \right) - \left| \nabla \beta - \left(\frac{c}{2} + \frac{1}{2}(l-r) \cos 2\alpha \right) e_1 \right|^2 + \mathcal{S}_{uc}$$

e o Laplaciano do ângulo de contato é calculado por

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= -2H_2 - \tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + c)(-\beta_1 + c + (l-r)\cos 2\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{2}((l-r)\sin 2\alpha \cos\beta)^2 + (l-r)\alpha_2 \cos 2\alpha \cos\beta\} + \mathcal{Q}_{uc}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{uc} &:= -\frac{1}{2}(l-r)\beta_2 \sin 2\alpha \sin\beta - (c_1c_2 - cc_3) \sin^2\beta - [\cos^2\alpha(c_3c_1 - lc_2) \\ &\quad + \sin^2\alpha(c_2c_3 - rc_1)] \cos^2\beta, \\ \mathcal{Q}_{uc} &:= -\frac{1}{2}(l-r)\left[(2 - 3\cos^2\beta)\left(\frac{2H + \beta_2}{\cos\beta}\right) + \cos\beta\beta_2 + 2\alpha_1\right] \sin 2\alpha \\ &\quad - [\cos^2\alpha(c_3c_1 - lc_2) + \sin^2\alpha(c_2c_3 - rc_1) - (c_1c_2 - cc_3)] \sin\beta \cos\beta,\end{aligned}$$

e

$$c_1 := \frac{1}{2}(c+l-r), \quad c_2 := \frac{1}{2}(c-l+r), \quad c_3 := \frac{1}{2}(-c+l+r), \quad \alpha_i := e_i(\alpha), \quad \beta_i := e_i(\beta), \quad H_2 := e_2(H).$$

Para o caso em que Σ é uma superfície orientada isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana de contato homogênea não-unimodular simplesmente conexa (\mathbb{M}^3, η) , a curvatura Gaussiana em \mathcal{W} é dada por

$$K = -\left|\nabla\beta - \left(1 + \frac{l}{2}\cos 2\alpha\right)e_1\right|^2 - \left(2H + \frac{l}{2}\sin 2\alpha \sin\beta\right)\left(\beta_2 + \frac{l}{2}\sin 2\alpha \sin\beta\right) + \mathcal{S}$$

e o Laplaciano do ângulo de contato é calculado por

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= -2H_2 - \tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + 2)(-\beta_1 + 2 + l\cos 2\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{2}(l\sin 2\alpha \cos\beta)^2 + l\alpha_2 \cos 2\alpha \cos\beta\} + \mathcal{Q},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &:= \left(\frac{l^2}{4} + l - b^2 - 3\right) \sin^2\beta - \frac{(l-2)}{4}((3l+2)\cos^2\alpha - (l-2)\sin^2\alpha) \cos^2\beta \\ &\quad + 2bl \cos\alpha \sin\beta \cos\beta - \frac{l}{2}\beta_2 \sin 2\alpha \sin\beta, \\ \mathcal{Q} &:= (b^2 + 4) \sin\beta \cos\beta - \frac{l}{2}\left\{\sin 2\alpha(2 - 3\cos^2\beta)\left(\frac{2H + \beta_2}{\cos\beta}\right) + \sin 2\alpha \cos\beta\beta_2\right. \\ &\quad \left.+ 2\alpha_1 \sin 2\alpha + 2((l-2)\cos^2\alpha + 2) \sin\beta \cos\beta - 2b \cos\alpha(\sin^2\beta - \cos^2\beta)\right\}.\end{aligned}$$

Nossa primeira aplicação será no contexto de imersões isométricas de superfícies em espaços homogêneos Riemannianos 3-dimensionais simplesmente conexos com grupo de isometrias de

dimensão 4, que já estão completamente classificados e são tradicionalmente denotados por $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Mostramos que os Toros de Hopf são rígidos na classe de superfícies CMC orientadas, conexas, compactas e ângulo de contato satisfazendo $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\kappa - 4\tau^2 > 0$.

Outra aplicação diz respeito a um clássico problema em geometria Riemanniana. A saber:

Em que condições uma superfície geométrica pode ser isometricamente imersa em uma dada variedade Riemanniana?

Em [19] Benoît Daniel obteve uma condição necessária e suficiente para uma superfície Σ ser localmente imersa isometricamente em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. As equações de Gauss e Codazzi juntas com outras duas equações são o que Daniel chama de equações de compatibilidade da superfície Σ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Nosso próximo resultado estabelece condições suficientes, envolvendo o ângulo de contato, para uma superfície Σ ser isometricamente imersa em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ ($\kappa > 0, \tau \neq 0$).

Mais precisamente, sejam Σ uma superfície orientada simplesmente conexa, J a rotação de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ sobre $T\Sigma$, e_1 um campo vetorial unitário sobre Σ , $\{e_1, e_2 = -Je_1\}$ um referencial móvel em Σ e $\{\theta_1, \theta_2\}$ seu coreferencial associado. Considere duas funções suaves $\beta : \Sigma \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$, $H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ e duas constantes $\kappa > 0, \tau \neq 0$ satisfazendo a equação

$$\Delta\beta = -2H_2 - \tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + 2\tau)^2 + (\kappa - 4\tau^2)\cos^2\beta\},$$

onde $\beta_i = e_i(\beta)$. Suponha que a conexão Riemanniana de Σ é dada por $\nabla e_i = \theta_{ij}e_j$ para $i, j = 1, 2$ e $\theta_{21} = \tan\beta[(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2\tau)\theta_2]$. Então existe uma imersão isométrica de Σ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ tal que e_1 é o campo característico, β é o ângulo de contato de Σ e H é a curvatura média da imersão. Além disso, esta imersão é única a menos de isometria global de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ preservando ambas as orientações da fibra e da base da fibração.

A segunda parte da tese, trata da construção de quase solitons de Ricci que são realizados como produto warped.

Nos últimos anos muita atenção tem sido dada às métricas Einstein e suas generalizações, como os solitons de Ricci, os quase solitons de Ricci e as métricas m -quase-Einstein. Nesta rica literatura, podemos observar que existe uma relação entre estas métricas e os chamados produtos warped. Por exemplo, em [12, 26] mostra-se que um produto warped é uma variedade Einstein se, e somente se, a sua base é uma m -quase-Einstein métrica. Em [14] Bryant construiu um soliton de Ricci estacionário com o produto warped $(0, +\infty) \times_f \mathbb{S}^m$, $m > 1$, em que a função warping f é radial. Apesar da classe de produtos warped ser bastante extensa, ressaltamos que não existe produto warped Einstein compacto com função warping não-constante se a curvatura escalar é não-positiva [26]. Em [25] os autores estudam as métricas m -quase-Einstein para caracterizar produtos warped quando a base é localmente conformemente flat.

Em [41] mostra-se algumas condições para que a função potencial dependa apenas da base assim como as fibras são necessariamente variedades Einstein. Além disso são apresentadas todas as soluções no caso em que a variedade é um soliton de Ricci estacionário com base conforme a um espaço n -dimensional pseudo-Euclidiano sob a ação de um grupo de translações $(n - 1)$ -dimensional e com fibra Ricci-flat. Para maiores detalhes sobre métricas Einstein e suas generalizações ver [2, 12, 14, 40].

Os quase solitons de Ricci foram introduzidos por Pigola, Rigoli, Rimoldi e Setti em [40], onde essencialmente os autores modificaram a definição de soliton de Ricci adicionando a condição sobre o parâmetro λ ser uma função suave. Os quase solitons de Ricci estão estreitamente relacionados com os produtos warped. Por exemplo, um quase soliton de Ricci gradiente localmente conformemente flat, na vizinhança de qualquer ponto regular da função potencial, é localmente um produto warped com fibras de curvatura seccional constante [13]. Em [40] são construídos quase solitons de Ricci que são realizados como produto warped Einstein, com base unidimensional e fibras Einstein.

Nessa direção, consideramos um produto warped $\mathbb{M} = B^n \times_f \mathbb{F}^m$ com duas funções suaves $\psi \in C^\infty(\mathbb{M})$ e $\lambda \in C^\infty(B)$ tais que $(B^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla\psi, \tilde{\lambda})$ seja um quase soliton de Ricci gradiente, com $\mathcal{H}(\nabla\psi) \in \mathfrak{L}(B)$ e $\mathcal{V}(\nabla\psi) \in \mathfrak{L}(\mathbb{F})$. Então $\psi = \tilde{\varphi}$ para alguma função $\varphi \in C^\infty(B)$ e a equação

$$-2\lambda d\varphi + d\left((2 - m - n)\lambda + |\nabla\varphi|^2 - \Delta\varphi - \frac{m}{f}\nabla\varphi(f)\right) = 0,$$

é válida para as funções f , φ e λ definidas em B . Aqui estamos usando as notações e terminologias de Barret O'Neill em [31].

As condições necessárias para que um produto warped admita estrutura de quase soliton de Ricci gradiente são dadas pelo seguinte resultado:

Seja $\mathbb{M} = B^n \times_f \mathbb{F}^m$, $m > 1$, um produto warped, φ e λ funções suaves em B tais que $(B^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ seja um quase soliton de Ricci gradiente. Então

$${}^B Ric + H^\varphi = \lambda g_B + \frac{m}{f} H^f$$

e ${}^{\mathbb{F}} Ric = \mu g_{\mathbb{F}}$ com μ satisfazendo

$$\mu = \lambda f^2 + f\Delta f + (m - 1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f).$$

Na sequência provamos um resultado geral para aplicarmos na construção de produtos warped quase solitons de Ricci:

Seja (B^n, g) uma variedade Riemanniana onde estão definidas três funções suaves $f > 0$, λ

e φ satisfazendo

$$Ric + \nabla^2 \varphi = \lambda g + \frac{m}{f} \nabla^2 f \quad (4)$$

e

$$-2\lambda d\varphi + d\left((2-m-n)\lambda + |\nabla\varphi|^2 - \Delta\varphi - \frac{m}{f}\nabla\varphi(f)\right) = 0, \quad (5)$$

para constantes $m, c \in \mathbb{R}$, com $m \neq 0$. Então f, λ e φ satisfazem

$$\lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f) = \mu, \quad (6)$$

para uma constante $\mu \in \mathbb{R}$.

O resultado a seguir mostra uma maneira de como construir um quase soliton de Ricci gradiente produto warped:

Seja (B^n, g_B) uma variedade Riemanniana com três funções suaves $f > 0$, λ e φ satisfazendo (4) e (5). Tome a constante μ satisfazendo (6) e uma variedade Riemanniana $(\mathbb{F}^m, g_{\mathbb{F}})$ com tensor de Ricci ${}^{\mathbb{F}}Ric = \mu g_{\mathbb{F}}$ e $m > 1$. Então $(B^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ é um quase soliton de Ricci gradiente produto warped, onde $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$ e $\tilde{\lambda} = \lambda \circ \pi$.

Como aplicação do resultado acima, seja \mathbb{R}^n o espaço Euclidiano com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e métrica $g_{ij} = e^{2\xi}\delta_{ij}$, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $n \geq 3$. Considere uma variedade Riemanniana $(\mathbb{F}^m, g_{\mathbb{F}})$ com tensor de Ricci ${}^{\mathbb{F}}Ric = \mu g_{\mathbb{F}}$ e $m > 1$. Então $(\mathbb{R}^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ é um quase soliton de Ricci gradiente produto warped com fibra \mathbb{F} Ricci flat, onde

$$f = e^{\xi}, \quad \varphi = \frac{c_1}{2}e^{2\xi} - \frac{(2-m-n)}{2}\xi + c_2 \quad \text{e} \quad \lambda = c_1 + \frac{(2-m-n)}{2}e^{-2\xi}$$

para algumas constantes c_1 e c_2 .

Concluimos esta tese provando o seguinte resultado de rigidez: Seja $\mathbb{M} = B^n \times_f \mathbb{F}^m$ um produto warped com duas funções suaves $\psi \in C^\infty(\mathbb{M})$ e $\lambda \in C^\infty(B)$ tais que $(B^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla\psi, \tilde{\lambda})$ seja um quase soliton de Ricci gradiente com $\lambda \leq 0$ e f atingindo um máximo e um mínimo. Então \mathbb{M} reduz-se a um produto Riemanniano desde que $\lambda(p) \leq \lambda(q)$, onde p e q são os pontos de máximo e de mínimo de f , respectivamente.

Capítulo 1

Superfícies imersas em 3–variedades de contato homogêneas

O principal objetivo deste capítulo é apresentar uma fórmula para a curvatura Gaussiana de superfícies orientadas imersas isometricamente em variedades de contato homogêneas de dimensão três simplesmente conexas em termos do ângulo de contato e também a expressão do Laplaciano do ângulo de contato. Estas fórmulas permitem mostrar que as únicas superfícies CMC conexas, compactas e com ângulo de contato constante em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\kappa - 4\tau^2 > 0$, são os Toros de Hopf. Obtemos também uma condição em termos do ângulo de contato para que exista uma imersão isométrica de uma superfície Σ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

1.1 Preliminares

Nesta seção, apresentamos alguns resultados e definições da teoria clássica de geometria Riemanniana, com o intuito de permitir um melhor entendimento desta tese. Omitimos as demonstrações para deixar a leitura mais fluente e por se tratarem de resultados bem conhecidos na literatura.

1.1.1 Variedades de Contato: Definição e Exemplos

Uma *estrutura de contato* sobre uma $(2n + 1)$ –dimensional variedade diferenciável \mathbb{M} é uma distribuição suave $\delta \subset T\mathbb{M}$ de codimensão 1, que é maximamente não-integrável no seguinte sentido: Exigimos que δ seja localmente definida como $\delta = \text{Ker}(\eta)$ com uma 1–forma diferencial η que satisfaz $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ em todo o seu domínio de definição. Se uma tal 1–forma existe globalmente sobre \mathbb{M} , então esta é chamada de uma forma de contato sobre \mathbb{M} . Uma

variedade munida de uma estrutura de contato é chamada de *variedade de contato*.

Um conceito fundamental é o de *campo vetorial Reeb* de uma forma de contato η que representaremos por ξ . Como uma forma anti-simétrica de posto máximo $2n$, a forma $d\eta$ tem núcleo 1-dimensional para cada $p \in \mathbb{M}$. Por conseguinte, a equação $d\eta(\xi, \cdot) \equiv 0$ define um único campo de linhas $\langle \xi \rangle$ sobre \mathbb{M} . A condição de contato $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ implica que η é não-trivial sobre este campo de linhas, de modo que um campo de vetores global está definido pela condição de normalização adicional $\eta(\xi) \equiv 1$. Representaremos por (η, g) ou (η, g, ξ, ϕ) a estrutura Riemanniana de contato de \mathbb{M} , onde ϕ é um tensor global do tipo $(1, 1)$ tal que

$$\phi(\xi) = 0, \quad \phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$$

e a métrica g pode ser tomada de modo que

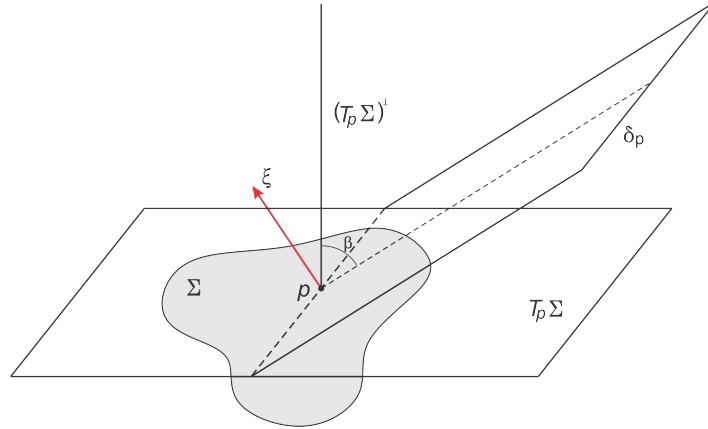
$$\eta(X) = g(\xi, X), \quad (d\eta)(X, Y) = g(X, \phi(Y)), \quad g(X, \phi(Y)) = -g(\phi(X), Y).$$

Em particular, a distribuição de contato δ_p em $p \in \mathbb{M}^3$ é precisamente,

$$\delta_p = \{v \in T_p\mathbb{M}^3 : g(\xi, v) = 0\}$$

e definimos o ângulo de contato como segue:

Definição 1.1. *Seja $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^3$ uma imersão isométrica de uma superfície Σ em uma variedade de contato \mathbb{M}^3 . O ângulo de contato β no ponto $p \in \Sigma$ é o complementar do ângulo entre o plano δ_p da distribuição de contato δ e o plano tangente $T_p\Sigma$.*



Deste modo Σ admite uma folheação singular, a qual é chamada de folheação característica. Em cada ponto singular $p \in \Sigma$ o plano tangente $T_p\Sigma$ coincide com δ_p . Nos pontos não-singulares, $T\Sigma \cap \delta$ define um campo de linhas. A folheação é determinada por este campo de linhas. Para maiores detalhes recomendamos [1, 7].

Observação 1.1. A não integrabilidade da distribuição de contato δ segue do Teorema de Frobenius expresso em termos de formas diferenciais. De fato, considere uma distribuição D sobre \mathbb{M}^3 e o ideal

$$I(D) = \{\omega \in \Omega(\mathbb{M}^3); \omega \text{ se anula em } D\},$$

onde $\Omega(\mathbb{M}^3) = \bigoplus_{k=0}^3 \Omega^k(\mathbb{M}^3)$ é a álgebra de Grassman sobre o anel das funções $C^\infty(\mathbb{M}^3)$. Quando $I(D)$ é fechado para a diferenciação, isto é, $d\omega \in I(D)$ sempre que $\omega \in I(D)$, então ele é chamado de ideal diferencial. Temos a seguinte versão do Teorema de Frobenius: Uma distribuição D é integrável se, e somente se, $I(D)$ é um ideal diferencial. Portanto, fixado um campo de vetores $\xi \in T\mathbb{M}^3$, para que a distribuição $D = \langle \xi \rangle^\perp$ sobre \mathbb{M}^3 seja integrável é necessário e suficiente que $\eta \wedge d\eta = 0$, em que η é a 1-forma dual de ξ . Em particular, se η é a 1-forma de contato em \mathbb{M}^3 , segue que $\delta = \text{Ker}(\eta)$ é não integrável uma vez que $\eta \wedge d\eta \neq 0$ sobre \mathbb{M}^3 .

Por exemplo, na esfera Euclidiana unitária $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ a 1-forma de contato é dada por $\eta(x) = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 - x_4 dx_3 + x_3 dx_4$ e o campo $\xi(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$ é tal que $\langle \xi \rangle^\perp = \text{Ker}(\eta)$, onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ é o vetor posição em \mathbb{S}^3 . Neste contexto já é conhecido o seguinte resultado:

Teorema 1.1 ([23]). *Seja Σ uma superfície orientada imersa em \mathbb{S}^3 com ângulo de contato β . Então a curvatura Gaussiana de Σ é dada por*

$$K = -(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 2H\beta_2),$$

onde $\beta_i = e_i(\beta)$ e H é a curvatura média da superfície. Além disso, o Laplaciano de β satisfaz

$$\Delta\beta = -2H_2 - \tan\beta[(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2],$$

onde $H_2 = dH(e_2)$.

Como consequência deste fato, Gomes [23] provou que o Toro de Clifford $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ é a única superfície com curvatura média e ângulo de contato ambos constantes em \mathbb{S}^3 .

Exemplo 1.1. *Considere a esfera unitária \mathbb{S}^3 com campo Reeb ξ dado acima. A Esfera de Berger, denotada por $\mathbb{S}_{\kappa,\tau}^3$, é a esfera unitária \mathbb{S}^3 munida da métrica*

$$g_{\kappa,\tau}(X, Y) = \frac{4}{\kappa} \left[\langle X, Y \rangle + \left(\frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle \right], \quad (1.1)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica canônica sobre \mathbb{S}^3 , $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$ são duas constantes.

Baseado nas técnicas usadas na prova do Teorema 1.1, Gomes e Cui obtiveram o seguinte:

Teorema 1.2 ([24]). *Seja Σ uma superfície orientada imersa em $\mathbb{S}_{\kappa, \tau}^3$ com ângulo de contato β . Então a curvatura Gaussiana de Σ é dada por*

$$K = -(|\nabla\beta + \tau e_1|^2 + 2H^b\beta_2) + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\sin^2\beta, \quad (1.2)$$

onde H^b é a curvatura média da imersão, $\beta_i = e_i(\beta)$. Além disso, o Laplaciano de β satisfaz

$$\Delta\beta = -2H_2^b - \tan\beta \left[(2H^b + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2\tau)^2 + (\kappa - 4\tau^2)\cos^2\beta \right], \quad (1.3)$$

onde $H_2^b = e_2(H^b)$.

Com este teorema, Gomes e Cui concluíram que, na classe das esferas de Berger com $\kappa - 4\tau^2 > 0$, uma superfície CMC conexa e compacta com ângulo de contato constante é necessariamente um Toro de Hopf.

1.1.2 Variedades Homogêneas 3–dimensionais

Os espaços homogêneos são uma generalização natural das formas espaciais. Uma variedade Riemanniana é homogênea se seu grupo de isometrias age transitivamente, isto é, para cada par de pontos do espaço existe uma isometria que leva um ponto no outro. Os espaços homogêneos Riemannianos de dimensão três que são simplesmente conexos estão completamente classificados (ver [35]) e são, salvo alguns exemplos excepcionais, grupos de Lie munidos com métrica invariante à esquerda. Estes espaços tem grupo de isometrias de dimensão seis, quatro ou três.

Seja \mathbb{M} uma variedade Riemanniana simplesmente conexa 3–dimensional com grupo de isometrias 4–dimensional. De acordo com a notação padrão, estes espaços são representados por $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, onde κ e τ são constantes e $\kappa - 4\tau^2 \neq 0$. $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é uma submersão Riemanniana $\pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ sobre um espaço forma 2–dimensional $\mathbb{M}^2(\kappa)$ e as fibras, isto é, a imagem inversa de um ponto $p \in \mathbb{M}^2(\kappa)$ por π , são as trajetórias de um campo vetorial Killing ξ , chamado de campo vetorial vertical. Quando $\tau = 0$ as variedades $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ podem ser classificadas como $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, com $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{S}^2$ se $\kappa > 0$ e $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{H}^2$ se $\kappa < 0$. Se $\tau \neq 0$, $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é a esfera de Berger se $\kappa > 0$, o espaço de Heisenberg se $\kappa = 0$ e o recobrimento universal $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ se $\kappa < 0$.

Em [19] mostra-se que toda variedade $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ (localmente) admite um referencial ortonormal $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ onde \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 são horizontais e $\tilde{f}_3 = \xi$, satisfazendo

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = 2\tau\tilde{f}_3, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = \frac{\kappa}{2\tau}\tilde{f}_1 \quad \text{e} \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = \frac{\kappa}{2\tau}\tilde{f}_2.$$

para $\tau \neq 0$.

Em [19] Benoît Daniel obteve uma condição necessária e suficiente para uma superfície Σ ser localmente imersa isometricamente em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. As equações de Gauss e Codazzi, neste caso, envolvem a segunda forma fundamental, a projeção T do campo Killing ξ sobre o espaço tangente de Σ e a componente normal ν do campo vertical ξ . Além delas aparecem duas outras equações que são consequência do fato do campo ξ ser paralelo. Tais equações juntas com as equações de Gauss e Codazzi são as chamadas equações de compatibilidade da superfície Σ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Mais precisamente Daniel provou o seguinte teorema:

Teorema 1.3 ([19]). *Sejam $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma superfície Riemanniana orientável simplesmente conexa, ∇ a sua conexão Riemanniana, J a rotação de $\frac{\pi}{2}$ sobre $T\Sigma$ e S um $(1, 1)$ -tensor simétrico em $T\Sigma$. Sejam ainda $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e ν uma função suave sobre Σ tal que $\|T\|^2 + \nu^2 = 1$. Então existe uma imersão isométrica f de Σ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, tal que o operador de forma com respeito ao campo de vetores normais N associada a f é*

$$df \circ S \circ df^{-1}$$

e tal que ξ satisfaz $\xi = df(T) + \nu N$ se, e somente se, $(\langle \cdot, \cdot \rangle, S, T, \nu)$ satisfazem as equações de Gauss e Codazzi para $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ e as seguintes equações

$$\nabla_X T = \nu(SX - \tau JX), \quad d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Neste caso, a imersão é única a menos de isometrias globais sobre $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ que preservam a orientação de ambas as fibras e da base da fibração.

1.1.3 Grupos de Lie

Um *grupo de Lie* é um grupo com uma estrutura de variedade diferenciável de modo que a aplicação produto

$$p : (x, y) \in G \times G \rightarrow xy \in G$$

é diferenciável ([18]).

São inúmeros os exemplos de grupos de Lie, contudo veremos apenas os de nosso interesse começando com os grupos lineares

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}); \det A \neq 0\} \quad \text{e} \quad GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}); \det A \neq 0\}$$

que são grupos de Lie com a operação de multiplicação usual de matrizes.

Uma maneira bastante prática de verificar se um determinado grupo é um grupo de Lie é por meio do seguinte fato: Se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G então H é uma subvariedade de G e conseqüentemente um subgrupo de Lie de G .

O grupo de Heisenberg de dimensão 3 é o grupo

$$Nil_3 = \left\{ A \in GL(3, \mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe que Nil_3 é a imagem inversa do valor regular I da projeção canônica $\varphi : \mathbb{M}^3 \rightarrow T_i$, onde T_i é o subespaço das matrizes triangulares inferiores. Portanto, Nil_3 é um subgrupo fechado do grupo de Lie $GL(3, \mathbb{R})$.

O grupo unitário $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}); A\bar{A}^t = 1\}$ e o grupo especial unitário $SU(n) = \{A \in U(n); \det A = 1\}$ são subgrupos de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$. Não é difícil verificar que podemos representar $SU(2)$ da seguinte maneira

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\},$$

de modo que, topologicamente, $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$.

O grupo de Lie das matrizes 2×2 com entradas reais cujo determinante é 1, é denotado por $SL(2, \mathbb{R})$, isto é $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}); \det A = 1\}$. Podemos escrever $SL(2, \mathbb{R})$ da seguinte forma

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ad - bc = 1 \right\}.$$

$SL(2, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie de dimensão três. O quociente $SL(2, \mathbb{R})/\{Id, -Id\}$ também é um grupo Lie denotado por $PSL(2, \mathbb{R})$ e seu recobrimento universal é denotado por $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Os três exemplos de grupos de Lie acima fazem parte dos Espaços de Bianchi-Cartan-Vranceanu (BCV-espacos). A métrica em tais espacos é dada do seguinte modo: Seja m um parâmetro real. Denotaremos por \mathbb{M} o \mathbb{R}^3 se $m \geq 0$ e por $\mathbb{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < -\frac{1}{m}\}$ caso contrário. Considere em \mathbb{M} a seguinte família à 2-parâmetros de métricas Riemannianas invariantes à esquerda

$$ds_{l,m}^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{[1 + m(x^2 + y^2)]^2} + \left(dz + \frac{l}{2} \frac{ydx - xdy}{[1 + m(x^2 + y^2)]} \right), \quad (1.4)$$

onde $l, m \in \mathbb{R}$. Estas métricas são conhecidas há muito tempo e podem ser encontradas na classificação de métricas homogêneas 3-dimensionais dadas por L. Bianchi em 1897 [5] na forma descrita acima em E. Cartan, ([11] p. 304) e em G. Vranceanu ([50], p. 354). O

interesse geométrico nestas métricas reside no seguinte fato: a família de métricas (1.4) inclui todas as métricas homogêneas tridimensionais cujo grupo de isometrias tem dimensão 4 ou 6, exceto para aquelas de curvatura constante negativa. Em particular temos que, se $l \neq 0$, \mathbb{M} é isométrico à

- (i) Nil_3 , se $m = 0$;
- (ii) $SU(2)$, se $m > 0$;
- (iii) $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, se $m < 0$.

O grupo Euclidiano $E(2)$ é o conjunto dos movimentos rígidos do plano Euclidiano que preservam a orientação. Este grupo é um subgrupo fechado de $GL(3, \mathbb{R})$ e portanto um subgrupo de Lie com o produto usual de matrizes. $E(2)$ pode ser representado do seguinte modo

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & x \\ \sin t & \cos t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{S}^1, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Seja $\widetilde{E}(2)$ o recobrimento universal de $E(2)$. Então $\widetilde{E}(2)$ é isomorfo a \mathbb{R}^3 com a operação de grupo

$$(x, y, z) * (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x + \bar{x} \cos z - \bar{y} \sin z, y + \bar{x} \sin z + \bar{y} \cos z, z + \bar{z}).$$

O grupo Lorentziano $E(1, 1)$ é constituído pelos movimentos rígidos do espaço bidimensional de Minkowski que preservam orientação. Este grupo é um subgrupo de Lie do grupo de Lie $GL(3, \mathbb{R})$ e pode ser representado da seguinte maneira

$$E(1, 1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & x \\ \sinh t & \cosh t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A \in GL(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

Um fato importante para o estudo da geometria dos grupos de Lie é que o seu espaço tangente a um ponto é isomorfo a álgebra de Lie do grupo. Outro fato importante é que para cada elemento a de um grupo de Lie G , as aplicações

$$\left\{ \begin{array}{l} L_a : G \rightarrow G \\ g \mapsto ag \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_a : G \rightarrow G \\ g \mapsto ga \end{array} \right.$$

são difeomorfismos implicando que as respectivas diferenciais $dL_{g^{-1}} : T_g G \rightarrow T_e G$ e $dR_{g^{-1}} : T_g G \rightarrow T_e G$ são isomorfismos.

Uma métrica Riemanniana em G é *invariante à esquerda* se

$$\langle u, v \rangle_g = \langle d(L_a)_g u, d(L_a)_g v \rangle_{L_a(g)}$$

para todo $a, g \in G$, $u, v \in T_g G$, isto é, se L_a é uma isometria. Analogamente, definimos métricas Riemannianas invariantes à direita. Dizemos que um campo diferenciável de vetores X em um grupo de Lie G é *invariante à esquerda* se $dL_a X = X$ para todo $a \in G$.

Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial \mathfrak{g} munido de um colchete $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, que é bilinear, anti-simétrico e satisfaz a identidade de Jacobi ([42]). Por exemplo, para o grupo linear $GL(n, \mathbb{R})$, a álgebra de Lie $\mathfrak{g} := gl(n; \mathbb{R})$ é formada pelas matrizes reais $n \times n$ com o colchete dado pelo comutador de matrizes $[A, B] = AB - BA$. A seguir, apresentaremos apenas os exemplos de álgebras de Lie que são de nosso interesse. Outros exemplos podem ser visto em [42].

A álgebra de Lie de Nil_3 é dada por

$$\mathfrak{h}_3 = \left\{ A \in M_3; A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

e tomando em \mathfrak{h}_3 a seguinte base

$$\tilde{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

teremos que

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = \tilde{f}_3, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = 0, \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = 0. \quad (1.5)$$

O espaço das matrizes anti-hermitianas $\mathfrak{su}(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}); A + \bar{A}^T = 0, tr A = 0\}$ é a álgebra de Lie do grupo especial unitário $SU(2)$ e uma base para este espaço é dada por

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

que satisfaz

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = \tilde{f}_3, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = \tilde{f}_1, \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = \tilde{f}_2.$$

Para o grupo especial linear $SL(n; \mathbb{R})$ sua álgebra de Lie é o conjunto das matrizes de traço nulo e é denotada por $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$. Para o caso $n = 2$, $SL(2; \mathbb{R})$ é um grupo de Lie de dimensão 3 e uma base para $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ é dada por

$$\tilde{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de onde tem-se:

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = -2\tilde{f}_3, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = 2\tilde{f}_1, \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = 2\tilde{f}_2.$$

Finalmente, as álgebras de Lie dos grupos $E(2)$ e $E(1,1)$ são dadas por

$$\mathfrak{e}(2) = \left\{ A \in GL(3, \mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathfrak{e}(1,1) = \left\{ A \in GL(3, \mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

respectivamente.

Consideremos constantes estritamente positivas λ_1, λ_2 e λ_3 e

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{\lambda_2}(-\sin z \partial_x + \cos z \partial_y), \quad \tilde{f}_2 = \frac{1}{\lambda_3} \partial_z, \quad \tilde{f}_3 = \frac{1}{\lambda_1}(\cos z \partial_x + \sin z \partial_y),$$

um referencial invariante à esquerda sobre $\mathfrak{e}(2)$ e

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{2}}(-e^z \partial_x + e^{-z} \partial_y), \quad \tilde{f}_2 = \frac{1}{\lambda_2 \sqrt{2}}(e^z \partial_x + e^{-z} \partial_y), \quad \tilde{f}_3 = \frac{1}{\lambda_3 \sqrt{2}} \partial_z.$$

um referencial invariante à esquerda sobre $\mathfrak{e}(1,1)$. Então, em $\mathfrak{e}(2)$ temos as seguintes relações

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = c_3 \tilde{f}_3, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = c_1 \tilde{f}_1, \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = 0.$$

com $c_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3} > 0$ e $c_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_3} > 0$. A métrica Riemanniana invariante à esquerda determinada pela condição de $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ ser ortonormal, é dada por

$$g_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \lambda_1^2 (\cos z dx + \sin z dy)^2 + \lambda_2^2 (-\sin z dx + \cos z dy)^2 + \lambda_3^2 dz^2.$$

Em [35] mostra-se que qualquer outra métrica invariante à esquerda sobre $\tilde{E}(2)$ é isométrica à uma métrica $g_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}$ com $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$ ou $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Claramente, $\tilde{E}(2)$ com a métrica $g_{(1,1,1)}$ é isométrico ao espaço Euclidiano 3-dimensional.

Por outro lado, em $\mathfrak{e}(1,1)$, $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ satisfaz

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = 0, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = c_1 \tilde{f}_1, \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = c_2 \tilde{f}_2$$

com $c_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3} > 0$ e $c_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1\lambda_3} < 0$. A métrica Riemanniana invariante à esquerda determinada pela condição de $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ ser ortonormal, é dada por

$$g_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \frac{\lambda_1^2}{2}(-e^{-z}dx + e^z dy)^2 + \frac{\lambda_2^2}{2}(e^{-z}dx + e^z dy)^2 + \lambda_3^2 dz^2.$$

Novamente em [35] mostra-se que qualquer outra métrica invariante à esquerda sobre $E(1, 1)$ é isométrica à uma métrica $g_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}$ com $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}$.

Dados um grupo de Lie G e uma variedade diferenciável \mathbb{M} . Uma *ação à esquerda* de G em \mathbb{M} é uma função que associa a cada $g \in G$ uma aplicação

$$a(g) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M},$$

que satisfaz as propriedades

1. $a(1) = Id_{\mathbb{M}}$;
2. $a(gh) = a(g) \circ a(h)$.

Dado $p \in \mathbb{M}$, sua órbita por G é o conjunto $G \cdot p = \{g \cdot p \in \mathbb{M}; g \in G\}$. Dizemos que a ação é *efetiva* se $Ker(a) = \{g \in G; a(g) = id_{\mathbb{M}}\} = \{1\}$ e que é *transitiva* se \mathbb{M} é uma órbita de G , isto é, para todo par de elementos $p, q \in \mathbb{M}$, existe $g \in G$ tal que $a(g)p = q$.

1.1.4 Grupos de Lie unimodulares e não-unimodulares

Um grupo de Lie é *unimodular* se sua medida de Haar é invariante à esquerda e à direita. Do ponto de vista infinitesimal, esta definição não é nada apropriada, mas para o caso 3-dimensional J. Milnor dá uma versão mais adequada que serve perfeitamente para os fins deste trabalho. Relembremos brevemente esta versão.

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie 3-dimensional orientada com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denotemos por \times a operação de produto vetorial do espaço vetorial $(\mathfrak{g}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$. A operação

$$\times : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

é anti-simétrica e é unicamente determinada pelas seguintes condições:

- (i) $\langle X, X \times Y \rangle = \langle Y, X \times Y \rangle = 0$,
- (ii) $|X \times Y|^2 = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2$,
- (iii) Se X e Y são linearmente independentes, então $det(X, Y, X \times Y) > 0$,

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Por outro lado, o colchete de Lie

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

é também uma aplicação bilinear anti-simétrica e comparando estas duas operações, obtemos um endomorfismo linear $\mathbb{L}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que é unicamente determinado pela fórmula

$$\mathbb{L}_{\mathfrak{g}}(X \times Y) = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Observação 1.2. *Essa operação de produto vetorial na álgebra de Lie \mathfrak{g} pode ser pensada como o produto vetorial em \mathbb{R}^3 . A saber: Seja $\{f_1, f_2, f_3\}$ uma base ortonormal de \mathfrak{g} . Dados dois campos $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos que*

$$X = X_i f_i \quad e \quad Y = Y_i f_i. \quad (1.6)$$

onde $X_i = \langle X, f_i \rangle$ e $Y_i = \langle Y, f_i \rangle$. Ressaltamos que aqui e em toda esta tese, estaremos utilizando a notação convencional de soma em que índices repetidos corresponde a uma soma correspondente a este índice. Calculamos então $X \times Y$ pelo determinante da seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix}$$

ou seja, $X \times Y = (X_2 Y_3 - Y_2 X_3) f_1 + (X_3 Y_1 - Y_3 X_1) f_2 + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) f_3$. Não é difícil verificar que as propriedades (i), (ii) e (iii) citadas acima são perfeitamente satisfeitas.

Agora, seja G um grupo de Lie 3-dimensional orientado munido com uma métrica Riemanniana invariante à esquerda. Então, a métrica induz um produto interno sobre a álgebra de Lie \mathfrak{g} e no que diz respeito à orientação em \mathfrak{g} induzida a partir de G , o endomorfismo $\mathbb{L}_{\mathfrak{g}}$ é unicamente determinado. A unimodularidade de G é portanto caracterizada pela seguinte:

Proposição 1.1 (Lema 4.1 de [29]). *Seja G um grupo de Lie orientado 3-dimensional munido de uma métrica Riemanniana invariante à esquerda. Então, G é unimodular se, e somente se, o endomorfismo $\mathbb{L}_{\mathfrak{g}}$ é auto-adjunto com respeito à métrica.*

Se $\mathbb{L} := \mathbb{L}_{\mathfrak{g}}$ é auto-adjunto, então existe uma base ortonormal $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ de autovetores, tal que $\mathbb{L}(\tilde{f}_1) = l\tilde{f}_1, \mathbb{L}(\tilde{f}_2) = r\tilde{f}_2, \mathbb{L}(\tilde{f}_3) = c\tilde{f}_3$. Trocando-se \tilde{f}_1 por $-\tilde{f}_1$ caso necessário, podemos

assumir que esta base $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ está orientada positivamente. A operação do colchete é dada por $[\tilde{f}_i, \tilde{f}_j] = \mathbb{L}(\tilde{f}_i \times \tilde{f}_j) = \mathbb{L}(\tilde{f}_k)$, de onde obtemos

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = c\tilde{f}_3, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = l\tilde{f}_1, \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = r\tilde{f}_2. \quad (1.7)$$

A seguir, veremos uma caracterização de grupo de Lie *não-unimodular*. Seja G um grupo de Lie e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. Denotemos por ad a representação adjunta de \mathfrak{g} ,

$$ad : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}),$$

definida por $ad(X)Y = [X, Y]$. Em seguida, pode-se ver que $\text{tr}(ad); X \mapsto \text{tr}(ad(X))$ é um homomorfismo da álgebra de Lie na álgebra de Lie comutativa \mathbb{R} . O núcleo

$$\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{g} | \text{tr}(ad(X)) = 0\}$$

é um ideal de \mathfrak{g} que contém o ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Agora, considere em G uma métrica Riemanniana invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e consideremos \mathfrak{u}^\perp o complemento ortogonal de \mathfrak{u} em relação à esta métrica. Então, o teorema do homomorfismo implica que $\dim(\mathfrak{u}^\perp) = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{u}) \leq 1$. Um critério de unimodularidade conhecido (ver[29]) é que um grupo de Lie G munido de uma métrica invariante à esquerda é unimodular se, e somente se, $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}$. Com base neste critério, o ideal \mathfrak{u} é chamado de núcleo unimodular de \mathfrak{g} . Em particular, para um grupo de Lie G 3-dimensional não-unimodular, seu núcleo unimodular \mathfrak{u} é comutativo e é 2-dimensional.

As possíveis álgebras de Lie não-unimodulares de dimensão 3 são descritas pelo lema a seguir:

Lema 1.1 (Lema 4.10 de [29]). *Seja G um grupo de Lie não-unimodular de dimensão três, munido com uma estrutura Riemanniana de contato invariante à esquerda. Então a álgebra de Lie possui uma base $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ satisfazendo*

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = b\tilde{f}_2 + 2\tilde{f}_3, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = 0, \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = l\tilde{f}_2. \quad (1.8)$$

É importante ressaltar que as relações (1.7) e (1.8) determinam completamente a álgebra de Lie de G . Elas serão fundamentais para a aplicação da técnica utilizada neste trabalho.

1.1.5 Variedades de Contato Homogêneas

Uma variedade de contato (\mathbb{M}, η) é *homogênea* [9] se existe um grupo de Lie conexo G agindo transitivamente e efetivamente como um grupo de difeomorfismos sobre \mathbb{M} que deixa

a forma de contato η invariante. Se g é a métrica associada a η , dizemos que (η, g) é uma *estrutura de contato homogênea* sobre \mathbb{M} .

Observação 1.3. Dada uma ação diferenciável $\Phi : G \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$, uma k -forma diferencial η em \mathbb{M} é invariante por G se para todo $g \in G$ vale $\Phi_g^* \eta = \eta$ onde $\Phi_g^* \eta$ é o “pull-back” definido por $\Phi_g^* \eta(X_1, \dots, X_k) = \eta((\Phi_g)_* X_1, \dots, (\Phi_g)_* X_k)$.

Esta classe estende a classe das variedades de contato dadas pelas esferas $(2n - 1)$ -dimensionais. Goldeberg [21] mostra que a esfera é a única variedade de contato homogênea simplesmente conexa que pode ser munida de uma métrica de contato invariante de curvatura seccional positiva. Isso vem do fato de toda variedade Riemanniana homogênea ser completa e portanto compacta quando sua curvatura seccional é positiva. Mais recentemente, foi provado em [36, 37] que as esferas $\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^5$ e a variedade de Stiefel $T^1(\mathbb{S}^3)$ são as únicas variedades n -dimensionais ($n = 3, 5$) compactas simplesmente conexas que admitem uma estrutura de contato homogênea.

Em [34] Perrone estudou variedades Riemannianas de contato homogêneas tridimensionais e provou o seguinte resultado: Seja (\mathbb{M}^3, η, g) uma variedade Riemanniana simplesmente conexa de contato homogênea. Então \mathbb{M}^3 é um grupo de Lie G e (η, g) é uma estrutura Riemanniana de contato invariante à esquerda.

Mais precisamente, Perrone apresentou a seguinte classificação:

- (1) Se \mathbb{M}^3 é um grupo de Lie unimodular, então \mathbb{M}^3 será um dos seguintes grupos:

$$\mathbb{M}^3 = \begin{cases} Nil_3 & \text{se } W = \|\tau\| = 0 \\ SU(2) & \text{se } 4\sqrt{2}W > \|\tau\| \\ \tilde{E}(2) & \text{se } 4\sqrt{2}W = \|\tau\| \\ \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}) & \text{se } -\|\tau\| \neq 4\sqrt{2}W < \|\tau\| \\ E(1, 1) & \text{se } 4\sqrt{2}W = -\|\tau\| \end{cases}$$

onde W é a curvatura escalar Webster e $\|\tau\|$ é o invariante da torção introduzida por Chern e Hamilton [17] em seus estudos de variedades Riemannianas de contato 3-dimensional.

Neste caso, existe sobre a álgebra de Lie de \mathbb{M}^3 , uma base ortonormal de $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ satisfazendo (1.7). Se $\{w_1, w_2, w_3\}$ é a base dual de $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$. Então

$$\begin{cases} (dw_3)(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = \frac{c}{2} \\ (dw_3)(\tilde{f}_i, \tilde{f}_j) = 0 \quad \text{para } (i, j) \neq (1, 2), (2, 1) \end{cases}$$

Assim, w_3 será uma forma de contato se $c \neq 0$, a estrutura Riemanniana de contato invariante à esquerda é determinada por $\xi = \tilde{f}_3$, $\phi\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$, $\phi\tilde{f}_2 = -\tilde{f}_1$, $\phi\xi = 0$.

- (2) Se \mathbb{M}^3 é um grupo não-unimodular, sua álgebra de Lie admite um referencial ortonormal $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ satisfazendo (1.8) onde $\tilde{f}_3 = \xi$ (isto é, w_3 será uma forma de contato), $\tilde{f}_1 = -\phi(f_2) \in \mathfrak{u}^\perp$ e $b \neq 0$. Em particular, quando $l = 0$, \mathbb{M}^3 é um espaço forma Sasakian de curvatura seccional holomorfa constante.

Dois resultados foram primordiais para a prova desse teorema feito por Perrone. O primeiro é devido a K. Sekigawa [45] onde ele mostra que se (\mathbb{M}^3, η, g) é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa de contato homogênea, então ou \mathbb{M}^3 é um espaço simétrico ou (\mathbb{M}^3, g) é isométrica à um grupo de Lie munido de uma métrica invariante à esquerda. O segundo é devido a J. Milnor [29] que fornece uma completa classificação dos grupos de Lie unimodulares 3-dimensionais em função dos sinais dos autovalores r, l e c .

1.1.6 Equações de Estrutura

Nesta subseção, estabeleceremos as equações de estrutura em um conjunto aberto \mathcal{W} de uma superfície Σ imersa isometricamente em uma variedade Riemanniana tridimensional \mathbb{M}^3 . Para o que segue, \mathbb{M}^3 será sempre uma variedade Riemanniana tridimensional com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e derivada covariante \bar{D} .

Novamente alertamos que, por praticidade, quando não houver possibilidade de confusão, usaremos daqui em diante a convenção de somatório de Einstein, isto é, índices repetidos significarão uma soma. As principais referências para esta subseção são [15] e [16].

Sejam $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ um referencial móvel e $\{w_1, w_2, w_3\}$ suas formas duais, também chamadas de coreferencial, isto é $w_i(\tilde{f}_j) = \delta_{ij}$. Então, dado $X = x_i \tilde{f}_i$, teremos

$$w_j(X) = w_j(x_i \tilde{f}_i) = x_i w_j(\tilde{f}_i) = x_j = \langle X, \tilde{f}_j \rangle.$$

Representa-se a métrica de \mathbb{M}^3 por $ds^2 = \sum_i w_i^2$, onde $w_i^2 = w_i \otimes w_i$. Além disso, do fato de $\langle \tilde{f}_i, \tilde{f}_j \rangle = \delta_{ij}$, segue que $\langle \bar{D}\tilde{f}_i, \tilde{f}_j \rangle = -\langle \tilde{f}_i, \bar{D}\tilde{f}_j \rangle$ onde aqui $\bar{D}\tilde{f}_i$ é pensado do ponto de vista tensorial ou derivada covariante ao longo de alguma curva em \mathbb{M}^3 . Agora, para cada $i = 1, 2, 3$ fixado, defina

$$\bar{D}\tilde{f}_i = w_{ij} \tilde{f}_j.$$

As 1-formas w_{ij} são chamadas de formas de conexão do referencial $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$. Note que

$$\bar{D}_X \tilde{f}_i = w_{ij}(X) \tilde{f}_j$$

$\forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$. Logo,

$$w_{ij}(X) = \langle \bar{D}_X \tilde{f}_i, \tilde{f}_j \rangle,$$

implicando que $w_{ij}(\tilde{f}_k) = \langle \bar{D}_{\tilde{f}_k} \tilde{f}_i, \tilde{f}_j \rangle$ e $w_{ij} = -w_{ji}$. Observe que fazendo $i = j$, obtemos $w_{ii} = 0$.

O fato crucial no método do referencial móvel é que as formas w_i e w_{ij} satisfazem as equações de estrutura de Élie Cartan dadas por

$$dw_i = w_{ik} \wedge w_k \quad \text{e} \quad dw_{ij} = w_{ik} \wedge w_{kj}, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

A primeira é obtida através de um cálculo direto sobre a fórmula

$$dw(X, Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X, Y]), \quad (1.10)$$

para toda 1-forma w e $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$, enquanto que a segunda segue por derivação da primeira.

A introdução da curvatura em uma variedade Riemanniana via o método do referencial móvel, se dá observando que $d(dw_i) = 0$ e portanto

$$\begin{aligned} 0 &= d(w_{ij} \wedge w_j) \\ &= dw_{ij} \wedge w_j - w_{ij} \wedge dw_j \\ &= dw_{ij} \wedge w_j - w_{ij} \wedge (w_{jk} \wedge w_k) \\ &= dw_{ij} \wedge w_j - w_{ik} \wedge w_{kj} \wedge w_j \\ &= \{dw_{ij} - w_{ik} \wedge w_{kj}\} \wedge w_j. \end{aligned}$$

Para cada i, j convém definir a 2-forma bilinear alternada

$$\bar{\Omega}_{ij} = dw_{ij} - w_{ik} \wedge w_{kj}. \quad (1.11)$$

É imediato que $\bar{\Omega}_{ij}$ satisfaz:

$$\bar{\Omega}_{ij} = -\bar{\Omega}_{ji} \quad \text{e} \quad \bar{\Omega}_{ij} \wedge w_j = 0. \quad (1.12)$$

Além disso, podemos escrever $\bar{\Omega}_{ij}$ na base das 2-formas, isto é,

$$\bar{\Omega}_{ij} = - \sum_{k < l} f_{ijkl} w_k \wedge w_l. \quad (1.13)$$

Sabemos que o conhecimento das funções locais $f_{ijkl} = \bar{\Omega}_{ij}(\tilde{f}_k, \tilde{f}_l)$ determinam completamente as 2-formas $\bar{\Omega}_{ij}$. Por isso é conveniente analisarmos que tipos de propriedades estas funções satisfazem.

Inicialmente, observe que de (1.12), $f_{ijkl} = -f_{jikl}$. Ademais, com a condição que $f_{ijkl} = -f_{ijlk}$, podemos escrever a equação (1.13) como

$$\bar{\Omega}_{ij} = -\frac{1}{2}f_{ijkl}w_k \wedge w_l. \quad (1.14)$$

Das equações (1.14) e (1.12) resulta

$$f_{ijkl}w_j \wedge w_k \wedge w_l = 0.$$

Desta última equação, da propriedade $f_{ijkl} = -f_{jikl}$ e da condição $f_{ijkl} = -f_{ijlk}$, obtemos $f_{ijkl} + f_{iklj} + f_{iljk} = 0$, que permite deduzir a seguinte igualdade $f_{ijkl} = f_{klij}$.

Logo as funções f_{ijkl} satisfazem as mesmas propriedades das funções componentes \bar{R}_{ijkl} do tensor curvatura \bar{R} de \mathbb{M} dado por

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{D}_X \bar{D}_Y Z - \bar{D}_Y \bar{D}_X Z - \bar{D}_{[X, Y]}Z. \quad (1.15)$$

Na verdade, uma conta direta sobre a equação $\bar{\Omega}_{ij}(\tilde{f}_k, \tilde{f}_l) = (dw_{ij} - w_{is} \wedge w_{sj})(\tilde{f}_k, \tilde{f}_l)$ mostra que $\bar{\Omega}_{ij}(\tilde{f}_k, \tilde{f}_l) = \bar{R}_{ijkl}$. Por isso $\bar{\Omega}_{ij}$ são chamadas as *formas de curvatura* de \mathbb{M} no referencial $\{\tilde{f}_i\}$.

A seguir, considere Σ uma superfície e $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}$ uma imersão isométrica. Dado um ponto $p \in \Sigma$, escolheremos uma vizinhança $\mathcal{W} \subset \Sigma$ de p de tal modo que φ restrita a U seja um mergulho. Seja $V \subset \mathbb{M}$ uma vizinhança de p em \mathbb{M} tal que $V \supset \varphi(\mathcal{W})$ e que em V seja possível escolher um referencial ortonormal $\{e_i\}$, $i = 1, 2, 3$, adaptado a φ , isto é, restrito a $\varphi(\mathcal{W})$ os vetores e_1, e_2 são tangentes a $\varphi(\mathcal{W})$. Aqui faremos a convenção usual de identificar $\mathcal{W} \subset \Sigma$ com $\varphi(\mathcal{W}) \subset \mathbb{M}$.

Sejam $\{\theta_i\}$ e $\{\theta_{ij}\}$ as formas duais e as formas de conexão associados ao referencial $\{e_i\}$, respectivamente. Em V temos que estas formas satisfazem as equações de estrutura (1.9), (1.11) e (1.13).

As restrições destas formas a $\mathcal{W} \subset V$ satisfazem as mesmas equações de estrutura e, como o referencial é adaptado, $\theta_3 = 0$ em \mathcal{W} . Decorre daí que

$$0 = d\theta_3 = \theta_{3i} \wedge \theta_i$$

e pelo lema de Cartan,

$$\theta_{i3} = h_{ij}\theta_j, \quad h_{ij} = h_{ji}. \quad (1.16)$$

A forma quadrática

$$h_{ij}\theta_i \otimes \theta_j$$

é a segunda forma fundamental de Σ . As equações de estrutura de Σ são dadas por

$$d\theta_i = \theta_{ij} \wedge \theta_j, \quad \theta_{ij} = -\theta_{ji} \quad (1.17)$$

e a equação de Gauss e Codazzi são, respectivamente,

$$\bar{\Omega}_{ij} := d\theta_{ij} - \theta_{iA} \wedge \theta_{Aj} = d\theta_{ij} - \theta_{ik} \wedge \theta_{kj} - \theta_{i3} \wedge \theta_{3j} = \Omega_{ij} - \theta_{i3} \wedge \theta_{3j}$$

e

$$\bar{\Omega}_{i3} = d\theta_{i3} - \theta_{ik} \wedge \theta_{k3} = d(h_{ij}\theta_j) - \theta_{ik} \wedge h_{kj}\theta_j = h_{ij|k}\theta_k \wedge \theta_j$$

onde

$$h_{ij|k}\theta_k := dh_{ij} - h_{kj}\theta_{ik} - h_{ik}\theta_{jk}. \quad (1.18)$$

Usando as notações clássicas

$$\bar{\Omega}_{BA} = \frac{1}{2}\bar{R}_{BACD}\theta_C \wedge \theta_D \quad \text{e} \quad \Omega_{ji} = \frac{1}{2}R_{jikl}\theta_k \wedge \theta_l \quad (1.19)$$

as equações de Gauss e Codazzi são reescritas, respectivamente, como:

$$R_{jkli} = \bar{R}_{jkli} + h_{ik}h_{jl} - h_{ij}h_{kl} \quad (1.20)$$

$$h_{ij|k} - h_{ik|j} = -\bar{R}_{ijk3}. \quad (1.21)$$

A Curvatura Gaussiana K e a Curvatura média H de Σ são, respectivamente,

$$K = R_{1212} \quad \text{e} \quad 2H = h_{11} + h_{22}.$$

1.2 Resultados Principais

Seja $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^3$ uma imersão isométrica de uma superfície orientada Σ em uma variedade Riemanniana de contato homogênea (\mathbb{M}, η) . Nesta seção, obteremos os dois principais resultados deste capítulo, isto é, a curvatura Gaussiana K de Σ em termos do ângulo de contato β e da curvatura média H e o Laplaciano $\Delta\beta$ do ângulo de contato.

1.2.1 Escolha do Referencial Adaptado

Na construção do referencial adaptado $\{e_i\}$ em [24], os autores admitiram que $\tilde{f}_1 \in T\Sigma \cap \delta$ na vizinhança $\mathcal{W} \subset \Sigma$ de um ponto não-singular $p \in \Sigma$. Porém, pode acontecer $\tilde{f}_1 \notin T\Sigma \cap \delta$, o que na verdade é mais plausível de se esperar. Neste caso, a ideia então é obter, a partir de uma rotação de $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\}$, um outro referencial ortonormal $\{f_1, f_2\}$ de modo que $f_1 \in T\Sigma \cap \delta$.

A rotação da qual trata o parágrafo anterior se dá do seguinte modo: Primeiramente, consideramos uma função suave $\alpha : \mathcal{W} \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ onde $\alpha(p)$ é a determinação, em radianos, do ângulo orientado entre \tilde{f}_1 e o campo de linhas definido por $T_p\Sigma \cap \delta_p$. Tomemos $\tilde{\alpha} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma extensão suave de α a \mathbb{M} e escrevamos $\mathbf{u} = \cos \tilde{\alpha}$ e $\mathbf{t} = \sin \tilde{\alpha}$ (observe que $\mathbf{u}|_\Sigma = \cos \alpha$ e $\mathbf{t}|_\Sigma = \sin \alpha$). Deste modo, o referencial ortonormal $\{f_1, f_2, f_3\}$ em (\mathbb{M}^3, η) obtido como no Lema 1.2 a seguir, é tal que $f_1 \in T\Sigma \cap \delta$ em \mathcal{W} .

O próximo resultado fornece as relações entre os colchetes $[\tilde{f}_i, \tilde{f}_j]$ e $[f_i, f_j]$.

Lema 1.2. *Seja (\mathbb{M}^3, η) uma variedade Riemanniana de contato com referencial ortonormal $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ e campo vetorial Reeb $\xi = \tilde{f}_3$. Considere $\{f_1, f_2, f_3 = \tilde{f}_3\}$ outro referencial ortonormal em \mathbb{M} dado por*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\alpha} & \sin \tilde{\alpha} \\ -\sin \tilde{\alpha} & \cos \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix},$$

onde $\tilde{\alpha}$ é uma função suave sobre \mathbb{M} . Então,

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= -(\mathbf{u}\tilde{\alpha}_1 + \mathbf{t}\tilde{\alpha}_2)f_1 + (\mathbf{t}\tilde{\alpha}_1 - \mathbf{u}\tilde{\alpha}_2)f_2 + [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] \\ [f_2, f_3] &= \tilde{\alpha}_3f_1 - \mathbf{t}[\tilde{f}_1, \tilde{f}_3] + \mathbf{u}[\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] \\ [f_3, f_1] &= \mathbf{u}[\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] + \mathbf{t}[\tilde{f}_3, \tilde{f}_2] + \tilde{\alpha}_3f_2, \end{aligned}$$

onde, por simplicidade escrevemos $\tilde{\alpha}_i = \tilde{f}_i(\tilde{\alpha})$, $\mathbf{u} = \cos \tilde{\alpha}$ e $\mathbf{t} = \sin \tilde{\alpha}$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que

$$\mathbf{t}^2 + \mathbf{u}^2 = 1, \quad \mathbf{t}\mathbf{t}_i + \mathbf{u}\mathbf{u}_i = 0, \quad \mathbf{u}\mathbf{t}_i - \mathbf{t}\mathbf{u}_i = \alpha_i$$

e

$$\begin{cases} f_1 = \mathbf{u}\tilde{f}_1 + \mathbf{t}\tilde{f}_2 \\ f_2 = -\mathbf{t}\tilde{f}_1 + \mathbf{u}\tilde{f}_2 \end{cases} \quad (1.22)$$

Então,

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = \mathbf{u}f_1 - \mathbf{t}f_2 \\ \tilde{f}_2 = \mathbf{t}f_1 + \mathbf{u}f_2 \end{cases} \quad (1.23)$$

Assim,

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= -\mathbf{u}\tilde{f}_1(\mathbf{t})\tilde{f}_1 + \mathbf{t}\tilde{f}_1(\mathbf{u})\tilde{f}_1 + \mathbf{u}^2[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] + \mathbf{u}\tilde{f}_1(\mathbf{u})\tilde{f}_2 - \mathbf{u}\tilde{f}_2(\mathbf{u})\tilde{f}_1 - \mathbf{t}^2[\tilde{f}_2, \tilde{f}_1] \\ &\quad - \mathbf{t}\tilde{f}_2(\mathbf{t})\tilde{f}_1 + \mathbf{t}\tilde{f}_1(\mathbf{t})\tilde{f}_2 + \mathbf{t}\tilde{f}_2(\mathbf{u})\tilde{f}_2 - \mathbf{u}\tilde{f}_2(\mathbf{t})\tilde{f}_2 \\ &= (-\mathbf{u}\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}\mathbf{u}_1)\tilde{f}_1 + [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] + (\mathbf{u}\mathbf{u}_1 + \mathbf{t}\mathbf{t}_1)\tilde{f}_2 - (\mathbf{u}\mathbf{u}_2 + \mathbf{t}\mathbf{t}_2)\tilde{f}_1 + (\mathbf{t}\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}\mathbf{t}_2)\tilde{f}_2 \\ &= -\tilde{\alpha}_1\tilde{f}_1 - \tilde{\alpha}_2\tilde{f}_2 + [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] \\ &= -(\mathbf{u}\tilde{\alpha}_1 + \mathbf{t}\tilde{\alpha}_2)f_1 + (\mathbf{t}\tilde{\alpha}_1 - \mathbf{u}\tilde{\alpha}_2)f_2 + [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f_2, f_3] &= \tilde{f}_3(\mathbf{t})\tilde{f}_1 - \tilde{f}_3(\mathbf{u})\tilde{f}_2 - \mathbf{t}[\tilde{f}_1, \tilde{f}_3] + \mathbf{u}[\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] \\
&= \mathbf{t}_3\tilde{f}_1 - \mathbf{u}_3\tilde{f}_2 - \mathbf{t}[\tilde{f}_1, \tilde{f}_3] + \mathbf{u}[\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] \\
&= (\mathbf{t}_3\mathbf{u} - \mathbf{u}_3\mathbf{t})f_1 - (\mathbf{t}_3\mathbf{t} + \mathbf{u}_3\mathbf{u})f_2 - \mathbf{t}[\tilde{f}_1, \tilde{f}_3] + \mathbf{u}[\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] \\
&= \tilde{\alpha}_3 f_1 - \mathbf{t}[\tilde{f}_1, \tilde{f}_3] + \mathbf{u}[\tilde{f}_2, \tilde{f}_3]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[f_3, f_1] &= \mathbf{u}[\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] + \tilde{f}_3(\mathbf{u})\tilde{f}_1 + \mathbf{t}[\tilde{f}_3, \tilde{f}_2] + \tilde{f}_3(\mathbf{t})\tilde{f}_2 \\
&= \mathbf{u}[\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] + \mathbf{t}[\tilde{f}_3, \tilde{f}_2] + \mathbf{u}_3\tilde{f}_1 + \mathbf{t}_3\tilde{f}_2 \\
&= \mathbf{u}[\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] + \mathbf{t}[\tilde{f}_3, \tilde{f}_2] + (\mathbf{u}_3\mathbf{u} + \mathbf{t}_3\mathbf{t})f_1 + (\mathbf{t}_3\mathbf{u} - \mathbf{u}_3\mathbf{t})f_2 \\
&= \mathbf{u}[\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] + \mathbf{t}[\tilde{f}_3, \tilde{f}_2] + \tilde{\alpha}_3 f_2
\end{aligned}$$

completando a prova do lema. \square

As relações (1.7) no caso em que \mathbb{M} é unimodular e (1.8) no caso não-unimodular, são alteradas quando o referencial $\{f_i\}$ é obtido a partir de uma rotação de $\{\tilde{f}_i\}$, conforme mostra o seguinte corolário

Corolário 1.1. *Nas condições do Lema 1.2, se \mathbb{M} é unimodular então*

$$\begin{aligned}
[f_1, f_2] &= -(\tilde{\alpha}_1\mathbf{u} + \tilde{\alpha}_2\mathbf{t})f_1 + (\tilde{\alpha}_1\mathbf{t} - \tilde{\alpha}_2\mathbf{u})f_2 + cf_3 \\
[f_2, f_3] &= (l\mathbf{t}^2 + r\mathbf{u}^2 + \tilde{\alpha}_3)f_1 + \mathbf{u}\mathbf{t}(l - r)f_2 \\
[f_3, f_1] &= \mathbf{u}\mathbf{t}(l - r)f_1 + (l\mathbf{u}^2 + r\mathbf{t}^2 + \tilde{\alpha}_3)f_2.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Enquanto que se \mathbb{M} é não-unimodular teremos

$$\begin{aligned}
[f_1, f_2] &= -(\tilde{\alpha}_1\mathbf{u} - (b - \tilde{\alpha}_2)\mathbf{t})f_1 + (\tilde{\alpha}_1\mathbf{t} + (b - \tilde{\alpha}_2)\mathbf{u})f_2 + 2f_3 \\
[f_2, f_3] &= (l\mathbf{t}^2 + \tilde{\alpha}_3)f_1 + \mathbf{u}\mathbf{t}l f_2 \\
[f_3, f_1] &= \mathbf{u}\mathbf{t}l f_1 + (l\mathbf{u}^2 + \tilde{\alpha}_3)f_2.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

É claro que as formas w_i e w_{ij} são alteradas assim como as relações entre as mesmas. Na esfera de Berger (que é um exemplo de grupo unimodular) acontece algo peculiar, estas relações não dependem dessa rotação (ver Lema 1 de [24]). Motivado pelas equações (1.24) e (1.25), provamos o seguinte lema de caráter geral:

Lema 1.3. *Seja \mathbb{M}^3 uma variedade Riemanniana com um referencial ortonormal $\{f_1, f_2, f_3\}$ satisfazendo*

$$[f_1, f_2] = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3, \quad [f_2, f_3] = \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2, \quad [f_3, f_1] = \varrho_1 f_1 + \varrho_2 f_2 \tag{1.26}$$

onde λ_i, γ_i e ϱ_i são funções suaves em \mathbb{M} . Então a diferencial das formas duais associadas w_i são dadas por

$$\begin{aligned} dw_1 &= -\lambda_1 w_1 \wedge w_2 + \varrho_1 w_1 \wedge w_3 - \gamma_1 w_2 \wedge w_3 \\ dw_2 &= -\lambda_2 w_1 \wedge w_2 + \varrho_2 w_1 \wedge w_3 - \gamma_2 w_2 \wedge w_3 \\ dw_3 &= -\lambda_3 w_1 \wedge w_2 \end{aligned} \tag{1.27}$$

e as formas de conexão de Levi-Civita w_{ij} são expressas por

$$\begin{aligned} w_{12} &= -\lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2 + \mu_3 w_3 \\ w_{13} &= \varrho_1 w_1 - \mu_2 w_2 \\ w_{23} &= \mu_1 w_1 - \gamma_2 w_2 \end{aligned} \tag{1.28}$$

onde $\mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda_3 - \gamma_1 + \varrho_2)$, $\mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_3 + \gamma_1 - \varrho_2)$ e $\mu_3 = \frac{1}{2}(-\lambda_3 + \gamma_1 + \varrho_2)$.

Demonstração. Pela equação (1.10), temos que

$$dw_i = - \sum_{j < k} w_i([f_j, f_k]) w_j \wedge w_k.$$

Assim:

$$\begin{aligned} dw_1 &= -w_1([f_1, f_2]) w_1 \wedge w_2 - w_1([f_1, f_3]) w_1 \wedge w_3 - w_1([f_2, f_3]) w_2 \wedge w_3 \\ &= -\lambda_1 w_1 \wedge w_2 + \varrho_1 w_1 \wedge w_3 - \gamma_1 w_2 \wedge w_3, \\ dw_2 &= -w_2([f_1, f_2]) w_1 \wedge w_2 - w_2([f_1, f_3]) w_1 \wedge w_3 - w_2([f_2, f_3]) w_2 \wedge w_3 \\ &= -\lambda_2 w_1 \wedge w_2 + \varrho_2 w_1 \wedge w_3 - \gamma_2 w_2 \wedge w_3, \\ dw_3 &= -w_3([f_1, f_2]) w_1 \wedge w_2 - w_3([f_1, f_3]) w_1 \wedge w_3 - w_3([f_2, f_3]) w_2 \wedge w_3 \\ &= -\lambda_3 w_1 \wedge w_2 \end{aligned}$$

provando deste modo (1.27).

A seguir, determinaremos as 1-formas de conexão w_{ij} . Sabemos que:

$$w_{ij} = w_{ij}(f_k) w_k,$$

onde, cada $w_{ij}(f_k)$ é obtido de (1.27) e da igualdade

$$dw_i(f_k, f_j) = w_{ij}(f_k) - w_{ik}(f_j).$$

Assim,

$$\begin{aligned} dw_1(f_1, f_2) &= w_{12}(f_1) - w_{11}(f_2) \Rightarrow w_{12}(f_1) = -\lambda_1 \\ dw_2(f_1, f_2) &= w_{22}(f_1) - w_{21}(f_2) \Rightarrow w_{12}(f_2) = -\lambda_2 \\ dw_3(f_1, f_2) &= w_{32}(f_1) - w_{31}(f_2) \Rightarrow w_{13}(f_2) - w_{23}(f_1) = -\lambda_3 \end{aligned}$$

Similarmente, concluimos que:

$$\begin{aligned} w_{13}(f_1) &= \varrho_1, & w_{13}(f_3) &= 0, & w_{23}(f_1) + w_{12}(f_3) &= \varrho_2, \\ w_{23}(f_2) &= -\gamma_2, & w_{23}(f_3) &= 0, & w_{13}(f_2) - w_{12}(f_3) &= -\gamma_1, \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} w_{13}(f_2) - w_{23}(f_1) = -\lambda_3 \\ w_{13}(f_2) - w_{12}(f_3) = -\gamma_1 \\ w_{23}(f_1) + w_{12}(f_3) = \varrho_2 \end{cases}$$

obtemos que

$$w_{23}(f_1) = \frac{1}{2}(\varrho_2 - \gamma_1 + \lambda_3) \quad , \quad w_{13}(f_2) = \frac{1}{2}(\varrho_2 - \gamma_1 - \lambda_3) \quad \text{e} \quad w_{12}(f_3) = \frac{1}{2}(\varrho_2 + \gamma_1 - \lambda_3),$$

o que conclui a prova do lema. \square

Se conhecermos os colchetes de Lie entre campos de uma referencial ortonormal de uma variedade Riemanniana \mathbb{M} , estas determinam diretamente a conexão Riemanniana e portanto o tensor curvatura. Dito isto, consideraremos uma variedade Riemanniana \mathbb{M}^3 que admite um referencial ortonormal $\{\tilde{f}_i\}$ satisfazendo (1.7) ou (1.8) e determinaremos seu tensor curvatura \bar{R} .

Lembremos que a conexão de Levi-Civita \bar{D} de \mathbb{M} é descrita pela fórmula de Koszul

$$2\langle \bar{D}_X Y, Z \rangle = Y\langle X, Z \rangle + X\langle Y, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle. \quad (1.29)$$

Uma vez que

$$\bar{D}_{\tilde{f}_i} \tilde{f}_j = \sum_k \langle \bar{D}_{\tilde{f}_i} \tilde{f}_j, \tilde{f}_k \rangle \tilde{f}_k,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\tilde{f}_1} \tilde{f}_1 &= \langle [\tilde{f}_2, \tilde{f}_1], \tilde{f}_1 \rangle \tilde{f}_2 + \langle [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1], \tilde{f}_1 \rangle \tilde{f}_3 \\ \bar{D}_{\tilde{f}_2} \tilde{f}_1 &= \langle [\tilde{f}_2, \tilde{f}_1], \tilde{f}_2 \rangle \tilde{f}_2 + \frac{1}{2} \{ \langle [\tilde{f}_2, \tilde{f}_1], \tilde{f}_3 \rangle + \langle [\tilde{f}_3, \tilde{f}_2], \tilde{f}_1 \rangle + \langle [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1], \tilde{f}_2 \rangle \} \tilde{f}_3 \\ \bar{D}_{\tilde{f}_3} \tilde{f}_1 &= \frac{1}{2} \{ \langle [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1], \tilde{f}_2 \rangle + \langle [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3], \tilde{f}_1 \rangle + \langle [\tilde{f}_2, \tilde{f}_1], \tilde{f}_3 \rangle \} \tilde{f}_2 + \langle [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1], \tilde{f}_3 \rangle \tilde{f}_3 \\ \bar{D}_{\tilde{f}_1} \tilde{f}_2 &= \langle [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2], \tilde{f}_1 \rangle \tilde{f}_1 + \frac{1}{2} \{ \langle [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2], \tilde{f}_3 \rangle + \langle [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1], \tilde{f}_2 \rangle + \langle [\tilde{f}_3, \tilde{f}_2], \tilde{f}_1 \rangle \} \tilde{f}_3 \\ \bar{D}_{\tilde{f}_2} \tilde{f}_2 &= \langle [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2], \tilde{f}_2 \rangle \tilde{f}_1 + \langle [\tilde{f}_3, \tilde{f}_2], \tilde{f}_2 \rangle \tilde{f}_3 \\ \bar{D}_{\tilde{f}_3} \tilde{f}_2 &= \frac{1}{2} \{ \langle [\tilde{f}_3, \tilde{f}_2], \tilde{f}_1 \rangle + \langle [\tilde{f}_1, \tilde{f}_3], \tilde{f}_2 \rangle + \langle [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2], \tilde{f}_3 \rangle \} \tilde{f}_1 + \langle [\tilde{f}_3, \tilde{f}_2], \tilde{f}_3 \rangle \tilde{f}_3 \\ \bar{D}_{\tilde{f}_1} \tilde{f}_3 &= \langle [\tilde{f}_1, \tilde{f}_3], \tilde{f}_1 \rangle \tilde{f}_1 + \frac{1}{2} \{ \langle [\tilde{f}_1, \tilde{f}_3], \tilde{f}_2 \rangle + \langle [\tilde{f}_2, \tilde{f}_1], \tilde{f}_3 \rangle + \langle [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3], \tilde{f}_1 \rangle \} \tilde{f}_2 \\ \bar{D}_{\tilde{f}_2} \tilde{f}_3 &= \frac{1}{2} \{ \langle [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3], \tilde{f}_1 \rangle + \langle [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2], \tilde{f}_3 \rangle + \langle [\tilde{f}_1, \tilde{f}_3], \tilde{f}_2 \rangle \} \tilde{f}_1 + \langle [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3], \tilde{f}_2 \rangle \tilde{f}_2 \\ \bar{D}_{\tilde{f}_3} \tilde{f}_3 &= \langle [\tilde{f}_1, \tilde{f}_3], \tilde{f}_3 \rangle \tilde{f}_1 + \langle [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3], \tilde{f}_3 \rangle \tilde{f}_2. \end{aligned}$$

Logo, se $\{\tilde{f}_i\}$ satisfaz (1.7), obtemos

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\tilde{f}_1}\tilde{f}_1 &= 0, & \bar{D}_{\tilde{f}_1}\tilde{f}_2 &= c_1\tilde{f}_3, & \bar{D}_{\tilde{f}_1}\tilde{f}_3 &= -c_1\tilde{f}_2, \\ \bar{D}_{\tilde{f}_2}\tilde{f}_1 &= -c_2\tilde{f}_3, & \bar{D}_{\tilde{f}_2}\tilde{f}_2 &= 0, & \bar{D}_{\tilde{f}_2}\tilde{f}_3 &= c_2\tilde{f}_1, \\ \bar{D}_{\tilde{f}_3}\tilde{f}_1 &= c_3\tilde{f}_2, & \bar{D}_{\tilde{f}_3}\tilde{f}_2 &= -c_3\tilde{f}_1, & \bar{D}_{\tilde{f}_3}\tilde{f}_3 &= 0,\end{aligned}\tag{1.30}$$

onde

$$c_1 = \frac{1}{2}(c-l+r), \quad c_2 = \frac{1}{2}(c+l-r), \quad c_3 = \frac{1}{2}(-c+l+r)$$

e se $\{\tilde{f}_i\}$ satisfaz (1.8), temos

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\tilde{f}_1}\tilde{f}_1 &= 0, & \bar{D}_{\tilde{f}_1}\tilde{f}_2 &= \frac{1}{2}(l+2)\tilde{f}_3, & \bar{D}_{\tilde{f}_1}\tilde{f}_3 &= -\frac{1}{2}(l+2)\tilde{f}_2, \\ \bar{D}_{\tilde{f}_2}\tilde{f}_1 &= -b\tilde{f}_2 + \frac{1}{2}(l-2)\tilde{f}_3, & \bar{D}_{\tilde{f}_2}\tilde{f}_2 &= b\tilde{f}_1, & \bar{D}_{\tilde{f}_2}\tilde{f}_3 &= -\frac{1}{2}(l-2)\tilde{f}_1, \\ \bar{D}_{\tilde{f}_3}\tilde{f}_1 &= \frac{1}{2}(l-2)\tilde{f}_2, & \bar{D}_{\tilde{f}_3}\tilde{f}_2 &= -\frac{1}{2}(l-2)\tilde{f}_1, & \bar{D}_{\tilde{f}_3}\tilde{f}_3 &= 0.\end{aligned}\tag{1.31}$$

O tensor curvatura de \mathbb{M} é definido por (1.15) e portanto se $\{\tilde{f}_i\}$ satisfaz (1.7), obtemos a partir de (1.30) que

$$\begin{aligned}\bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_1 &= (c_1c_2 - cc_3)\tilde{f}_2, & \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_2 &= -(c_1c_2 - cc_3)\tilde{f}_1, \\ \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_2 &= (c_2c_3 - rc_1)\tilde{f}_3, & \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3 &= -(c_2c_3 - rc_1)\tilde{f}_2, \\ \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_1 &= (c_3c_1 - lc_2)\tilde{f}_3, & \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3 &= -(c_3c_1 - lc_2)\tilde{f}_1\end{aligned}\tag{1.32}$$

e se $\{\tilde{f}_i\}$ satisfaz (1.8), segue de (1.31) que

$$\begin{aligned}\bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_1 &= -bl\tilde{f}_3 - \left(\frac{l^2}{4} - b^2 + l - 3\right)\tilde{f}_2, & \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_2 &= \left(\frac{l^2}{4} - b^2 + l - 3\right)\tilde{f}_1, \\ \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_2 &= -\frac{1}{4}(l-2)^2\tilde{f}_3, & \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3 &= \frac{1}{4}(l-2)^2\tilde{f}_2, \\ \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_1 &= -bl\tilde{f}_2 + \frac{1}{4}(l-2)(3l+2)\tilde{f}_3, & \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3 &= -\frac{1}{4}(l-2)(3l+2)\tilde{f}_1.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Agora, se $\{f_i\}$ é um outro referencial ortonormal em \mathbb{M} obtido como no Lema 1.2 é evidente que sua derivada covariante é alterada. O objetivo do próximo Lema é determinar a curvatura Riemanniana de \mathbb{M} neste novo referencial.

Lema 1.4. *Seja (\mathbb{M}^3, η, g) uma variedade Riemanniana de contato homogênea com referencial ortonormal $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ um outro referencial ortonormal em \mathbb{M} obtido como no Lema 1.2. Se \mathbb{M} é unimodular, então*

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(f_1, f_2)f_1, f_2 \rangle &= c_1c_2 - cc_3, \\ \langle \bar{R}(f_1, f_2)f_1, f_3 \rangle &= 0, \\ \langle \bar{R}(f_1, f_3)f_3, f_1 \rangle &= -\mathbf{u}^2(c_3c_1 - lc_2) - \mathbf{t}^2(c_2c_3 - rc_1), \\ \langle \bar{R}(f_1, f_3)f_3, f_2 \rangle &= -\mathbf{ut}[c_3(l-r) + lc_2 - rc_1], \\ \langle \bar{R}(f_1, f_2)f_2, f_3 \rangle &= 0,\end{aligned}\tag{1.34}$$

onde

$$c_1 = \frac{1}{2}(c+l-r), \quad c_2 = \frac{1}{2}(c-l+r), \quad c_3 = \frac{1}{2}(-c+l+r),$$

u e t são como no Lema 1.1. E, se \mathbb{M} é não-unimodular,

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(f_1, f_2)f_1, f_2 \rangle &= -\left(\frac{l^2}{4} - b^2 + l - 3\right), \\ \langle \bar{R}(f_1, f_2)f_1, f_3 \rangle &= -blu, \\ \langle \bar{R}(f_1, f_3)f_3, f_1 \rangle &= -\frac{1}{4}(l-2)\{4lu^2 - (l-2)\}, \\ \langle \bar{R}(f_1, f_3)f_3, f_2 \rangle &= l(l-2)ut, \\ \langle \bar{R}(f_1, f_2)f_2, f_3 \rangle &= blt. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Demonstração. A partir de (1.22), não é difícil obter as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \bar{R}(f_1, f_2)f_1 &= u\bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_1 + t\bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_2, \\ \bar{R}(f_1, f_3)f_3 &= u\bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3 + t\bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, \\ \bar{R}(f_1, f_2)f_2 &= u\bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_2 - t\bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_1. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(f_1, f_2)f_1, f_2 \rangle &= u\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_1, f_2 \rangle + t\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_2, f_2 \rangle, \\ &= u\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_1, -t\tilde{f}_1 + u\tilde{f}_2 \rangle + t\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_2, -t\tilde{f}_1 + u\tilde{f}_2 \rangle, \\ &= u^2\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle - t^2\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_2, \tilde{f}_1 \rangle, \\ &= \langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle \\ \langle \bar{R}(f_1, f_2)f_1, f_3 \rangle &= u\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_1, \tilde{f}_3 \rangle + t\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_2, \tilde{f}_3 \rangle, \\ \langle \bar{R}(f_1, f_3)f_3, f_1 \rangle &= u\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, f_1 \rangle + t\langle \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, f_1 \rangle \\ &= u\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, uf_1 + tf_2 \rangle + t\langle \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, uf_1 + tf_2 \rangle \\ &= u\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, uf_1 \rangle + u\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, tf_2 \rangle \\ &\quad + t\langle \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, uf_1 \rangle + t\langle \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, tf_2 \rangle \\ &= u^2\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, \tilde{f}_1 \rangle + ut\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, \tilde{f}_2 \rangle \\ &\quad + ut\langle \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, \tilde{f}_1 \rangle + t^2\langle \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, \tilde{f}_2 \rangle \\ \langle \bar{R}(f_1, f_2)f_2, f_3 \rangle &= u\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_2, \tilde{f}_3 \rangle - t\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)\tilde{f}_1, \tilde{f}_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(f_1, f_3)f_3, f_2 \rangle &= \mathbf{u}\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, f_2 \rangle + \mathbf{t}\langle \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, f_2 \rangle \\
&= \mathbf{u}\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, -\mathbf{t}\tilde{f}_1 + \mathbf{u}\tilde{f}_2 \rangle + \mathbf{t}\langle \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, -\mathbf{t}\tilde{f}_1 + \mathbf{u}\tilde{f}_2 \rangle \\
&= -\mathbf{u}\mathbf{t}\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, \tilde{f}_1 \rangle + \mathbf{u}^2\langle \bar{R}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, \tilde{f}_2 \rangle \\
&\quad -\mathbf{t}^2\langle \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, \tilde{f}_1 \rangle + \mathbf{u}\mathbf{t}\langle \bar{R}(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3)\tilde{f}_3, \tilde{f}_2 \rangle
\end{aligned}$$

Finalmente, se \mathbb{M} é unimodular, usamos (1.32) e obtemos (1.34), e se \mathbb{M} é não-unimodular usamos (1.33) e obtemos (1.35) e desta forma concluimos a prova do lema. \square

Construiremos um referencial adaptado em um aberto $\mathcal{W} = \{p \in \Sigma : \beta(p) \neq \pm \frac{\pi}{2}\} \subset \Sigma$ em termos do ângulo de contato β . A fim de tratarmos os casos unimodular e não-unimodular simultaneamente, consideraremos um referencial ortonormal $\{f_i\}$ em \mathbb{M} que satisfaz (1.26). Admitiremos ainda que $f_3 = \xi$ e que $f_1 \in T\Sigma \cap \delta$ na vizinhança de um ponto não-singular $p \in \Sigma$.

Considere o referencial adaptado $\{e_1, e_2, e_3\}$ em $\mathcal{W} \subset \Sigma$, dado por

$$e_1 = f_1, \quad e_2 = \sin \beta f_2 + \cos \beta f_3 \quad \text{e} \quad e_3 = -\cos \beta f_2 + \sin \beta f_3, \quad (1.37)$$

isto é, e_1 e e_2 são tangentes à superfícies. Seja $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ o correspondente coreferencial associado, ou seja

$$\theta_1 = w_1, \quad \theta_2 = \sin \beta w_2 + \cos \beta w_3 \quad \text{e} \quad \theta_3 = -\cos \beta w_2 + \sin \beta w_3. \quad (1.38)$$

Uma vez que $\theta_3 = 0$ quando restrita à Σ , temos que $\cos \beta w_2 = \sin \beta w_3$, e portanto

$$w_1 = \theta_1, \quad w_2 = \sin \beta \theta_2 \quad \text{e} \quad w_3 = \cos \beta \theta_2. \quad (1.39)$$

Vamos inicialmente determinar as formas $d\theta_i$. Começemos com

$$\begin{aligned}
d\theta_1 &= dw_1 \\
&= w_{12} \wedge w_2 + w_{13} \wedge w_3 \\
&= w_{12} \wedge \sin \beta \theta_2 + (\varrho_1 w_1 - \mu_2 w_2) \wedge \cos \beta \theta_2 \\
&= \text{sen} \beta \cdot w_{12} \wedge \theta_2 + \varrho_1 \cos \beta \theta_1 \wedge \theta_2.
\end{aligned} \quad (1.40)$$

Agora, $d\theta_2$ é a partir da igualdade

$$\begin{aligned}
d\theta_2 &= \cos \beta d\beta \wedge w_2 + \sin \beta dw_2 - \sin \beta d\beta \wedge w_3 + \cos \beta dw_3 \\
&= \sin \beta dw_2 + \cos \beta \cdot dw_3 \\
&= \sin \beta (w_{21} \wedge w_1 + w_{23} \wedge w_3) + \cos \beta (w_{31} \wedge w_1 + w_{32} \wedge w_2) \\
&= \sin \beta (w_{21} \wedge w_1 + (\mu_1 w_1 - \gamma_2 w_2) \wedge w_3) \\
&\quad + \cos \beta ((\mu_2 w_2 - \varrho_1 w_1) \wedge w_1 + (\gamma_2 w_2 - \mu_1 w_1) \wedge w_2)
\end{aligned}$$

que simplificando-a obtém-se

$$\begin{aligned}
d\theta_2 &= \sin \beta(w_{21} \wedge w_1 + \mu_1 w_1 \wedge w_3) + \cos \beta(\mu_2 w_2 \wedge w_1 - \mu_1 w_1 \wedge w_2) \\
&= \sin \beta(w_{21} \wedge w_1 + \mu_1 w_1 \wedge w_3) + (\mu_2 + \mu_1) \cos \beta w_2 \wedge w_1 \\
&= \sin \beta(w_{21} \wedge \theta_1 + \mu_1 \theta_1 \wedge \cos \beta \theta_2) + (\mu_2 + \mu_1) \cos \beta \sin \beta \theta_2 \wedge \theta_1 \\
&= \sin \beta(w_{21} \wedge \theta_1 - \mu_1 \cos \beta \theta_2 \wedge \theta_1 + (\mu_2 + \mu_1) \cos \beta \theta_2 \wedge \theta_1) \\
&= \sin \beta(w_{21} + \mu_2 \cos \beta \theta_2) \wedge \theta_1.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Finalmente, $d\theta_3$ é obtida de

$$\begin{aligned}
d\theta_3 &= \sin \beta d\beta \wedge w_2 - \cos \beta dw_2 + \cos \beta d\beta \wedge w_3 + \sin \beta dw_3 \\
&= \sin \beta d\beta \wedge w_2 - \cos \beta(w_{21} \wedge w_1 + w_{23} \wedge w_3) \\
&\quad + \cos \beta d\beta \wedge w_3 + \sin \beta(w_{31} \wedge w_1 + w_{32} \wedge w_2) \\
&= \sin \beta d\beta \wedge w_2 - \cos \beta(w_{21} \wedge w_1 + (\mu_1 w_1 - \gamma_2 w_2) \wedge w_3) \\
&\quad + \cos \beta d\beta \wedge w_3 + \sin \beta((\mu_2 w_2 - \varrho_1 w_1) \wedge w_1 + (\gamma_2 w_2 - \mu_1 w_1) \wedge w_2) \\
&= \sin \beta d\beta \wedge w_2 - \cos \beta(w_{21} \wedge w_1 + \mu_1 w_1 \wedge w_3) \\
&\quad + \cos \beta d\beta \wedge w_3 + \sin \beta(\mu_2 w_2 \wedge w_1 - \mu_1 w_1 \wedge w_2)
\end{aligned}$$

que simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}
d\theta_3 &= \sin \beta d\beta \wedge w_2 - \cos \beta w_{21} \wedge w_1 - \mu_1 \cos \beta w_1 \wedge w_3 \\
&\quad + \cos \beta d\beta \wedge w_3 - (\mu_1 + \mu_2) \sin \beta w_1 \wedge w_2 \\
&= \sin^2 \beta d\beta \wedge \theta_2 - \cos \beta w_{21} \wedge \theta_1 - \mu_1 \cos^2 \beta \theta_1 \wedge \theta_2 \\
&\quad + \cos^2 \beta d\beta \wedge \theta_2 - (\mu_1 + \mu_2) \sin^2 \beta \theta_1 \wedge \theta_2 \\
&= d\beta \wedge \theta_2 - \cos \beta w_{21} \wedge \theta_1 - (\mu_1 \cos^2 \beta + (\mu_1 + \mu_2) \sin^2 \beta) \theta_1 \wedge \theta_2 \\
&= d\beta \wedge \theta_2 - \cos \beta w_{21} \wedge \theta_1 - (\mu_1 + \mu_2 \sin^2 \beta) \theta_1 \wedge \theta_2
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Para obtermos as formas de conexão θ_{ij} , observemos que segue de (1.37):

$$\begin{aligned}
\bar{D}e_2 &= \cos \beta d\beta f_2 + \sin \beta \bar{D}f_2 - \sin \beta d\beta f_3 + \cos \beta \bar{D}f_3 \\
&= \cos \beta d\beta f_2 + \sin \beta(w_{21} f_1 + w_{23} f_3) - \sin \beta d\beta f_3 + \cos \beta(w_{31} f_1 + w_{32} f_2) \\
&= (\sin \beta w_{21} + \cos \beta w_{31}) f_1 + (\cos \beta f_2 - \sin \beta f_3)(d\beta + w_{32}). \\
&= (\sin \beta w_{21} + \cos \beta(-\varrho_1 w_1 + \mu_2 w_2)) e_1 - (d\beta - \mu_1 w_1 + \gamma_2 w_2) e_3. \\
&= (\sin \beta w_{21} - \cos \beta(\varrho_1 \theta_1 - \mu_2 \sin \beta \theta_2)) e_1 - (d\beta - \mu_1 \theta_1 + \gamma_2 \sin \beta \theta_2) e_3.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{D}e_3 &= \sin \beta d\beta f_2 - \cos \beta \bar{D}f_2 + \cos \beta d\beta f_3 + \sin \beta \bar{D}f_3 \\
&= \sin \beta d\beta f_2 - \cos \beta (w_{21}f_1 + w_{23}f_3) + \cos \beta d\beta f_3 + \sin \beta (w_{31}f_1 + w_{32}f_2) \\
&= (-\cos \beta w_{21} + \sin \beta w_{31})f_1 + (\sin \beta f_2 + \cos \beta f_3)(d\beta + w_{32}). \\
&= (-\cos \beta w_{21} - \sin \beta (\varrho_1 w_1 - \mu_2 w_2))e_1 + (d\beta - \mu_1 w_1 + \gamma_2 w_2)e_2. \\
&= (-\cos \beta w_{21} - \sin \beta (\varrho_1 \theta_1 - \mu_2 \sin \beta \theta_2))e_1 + (d\beta - \mu_1 \theta_1 + \gamma_2 \sin \beta \theta_2)e_2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\theta_{21} &= \sin \beta w_{21} - \cos \beta (\varrho_1 \theta_1 - \mu_2 \sin \beta \theta_2) \\
\theta_{31} &= -\cos \beta w_{21} - \sin \beta (\varrho_1 \theta_1 - \mu_2 \sin \beta \theta_2) \\
\theta_{32} &= d\beta - \mu_1 \theta_1 + \gamma_2 \sin \beta \theta_2.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Usaremos ainda as seguintes identidades:

$$0 = d\theta_3(e_1, e_2) = \beta_1 + \cos \beta w_{21}(e_2) - \mu_2 \sin^2 \beta - \mu_1. \tag{1.44}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta_{21}(e_2) &= \sin \beta w_{21}(e_2) + \mu_2 \cos \beta \sin \beta \\
&= \tan \beta (\cos \beta w_{21}(e_2) + \mu_2 \cos^2 \beta) \\
&= \tan \beta (\cos \beta w_{21}(e_2) - \mu_2 \sin^2 \beta + \mu_2) \\
&= \tan \beta (-\beta_1 + \mu_1 + \mu_2) \\
&= \tan \beta (-\beta_1 + \lambda_3).
\end{aligned}$$

1.2.2 Coeficientes da Segunda Forma Fundamental e Equações de Codazzi

Seja $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}^3$ uma imersão isométrica de uma superfície orientada Σ em uma variedade Riemanniana de contato homogênea (\mathbb{M}^3, η) . Suponha que \mathbb{M} admita um referencial ortonormal satisfazendo (1.26) e que $\{e_i\}$ seja um referencial ortonormal adaptado a Σ dado por (1.37).

Para o cálculo da curvatura Gaussiana K de $\mathcal{W} \subset \Sigma$ são necessários os coeficientes da segunda forma fundamental da imersão φ . O próximo Lema nos fornece esses coeficientes.

Lema 1.5. *Os coeficientes da segunda forma fundamental de Σ são dados por*

$$h_{11} = \cos \beta w_{21}(e_1) + \varrho_1 \sin \beta, \quad h_{22} = -\beta_2 - \gamma_2 \sin \beta \quad e \quad h_{12} = -\beta_1 + \mu_1.$$

Em particular, a curvatura média H é expressa por

$$2H = \cos \beta w_{21}(e_1) - \beta_2 + (\varrho_1 - \gamma_2) \sin \beta. \quad (1.45)$$

Demonstração. Segue diretamente de (1.16) e (1.43) que

$$\begin{aligned} h_{11} &= \theta_{13}(e_1) = \cos \beta w_{21}(e_1) + \varrho_1 \sin \beta \\ h_{22} &= \theta_{23}(e_2) = -\beta_2 - \gamma_2 \sin \beta \\ h_{12} &= \theta_{13}(e_2) = \cos \beta w_{21}(e_2) - \mu_2 \sin^2 \beta = -\beta_1 + \mu_1, \end{aligned}$$

onde na última igualdade de h_{12} usamos a identidade (1.44), concluindo deste modo a prova do lema. \square

A fim de obtermos o Laplaciano do ângulo de contato $\Delta\beta$, faremos uso das equações de Codazzi que por sua vez necessitam dos valores de $\bar{R}_{ijk}^l = \langle \bar{R}(e_j, e_k)e_i, e_l \rangle$, valores estes que são dados pelo próximo lema.

Lema 1.6. *Seja $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}$ uma imersão isométrica de uma superfície orientada Σ em uma variedade Riemanniana de contato homogênea (\mathbb{M}, η) . Suponha que \mathbb{M} admita um referencial ortonormal satisfazendo (1.26) e que $\{e_i\}$ seja um referencial ortonormal adaptado a Σ dado por (1.37). Se \mathbb{M} é unimodular, então sobre Σ temos*

$$\begin{aligned} \bar{R}_{212}^1 &= -(c_1c_2 - cc_3) \sin^2 \beta - [\cos^2 \alpha(c_3c_1 - lc_2) + \sin^2 \alpha(c_2c_3 - rc_1)] \cos^2 \beta, \\ \bar{R}_{112}^3 &= [\cos^2 \alpha(c_3c_1 - lc_2) + \sin^2 \alpha(c_2c_3 - rc_1) - (c_1c_2 - cc_3)] \sin \beta \cos \beta, \\ \bar{R}_{212}^3 &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha [c_3(r - l) + lc_2 - rc_1] \cos \beta. \end{aligned}$$

onde c_1, c_2 e c_3 são como no Lema 1.4. Enquanto que, se \mathbb{M} é não-unimodular, teremos

$$\begin{aligned} \bar{R}_{212}^1 &= \left(\frac{l^2}{4} + l - b^2 - 3 \right) \sin^2 \beta - \frac{(l-2)}{4} (\cos^2 \alpha(3l+2) - \sin^2 \alpha(l-2)) \cos^2 \beta \\ &\quad + 2bl \cos \alpha \sin \beta \cos \beta, \\ \bar{R}_{112}^3 &= \{l[(l-2) \cos^2 \alpha + 2] - b^2 - 4\} \sin \beta \cos \beta - bl \cos \alpha (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta), \\ \bar{R}_{212}^3 &= bl \sin \alpha \sin \beta - l(l-2) \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Demonstração. Sabendo que $\bar{R}_{ijk}^l = \langle \bar{R}(e_j, e_k)e_i, e_l \rangle$, segue de (1.37), que

$$\begin{aligned} \bar{R}_{212}^1 &= \langle \bar{R}(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle \\ &= -\langle \bar{R}(f_1, f_2)f_1, f_2 \rangle \sin^2 \beta + \langle \bar{R}(f_1, f_3)f_3, f_1 \rangle \cos^2 \beta \\ &\quad - 2\langle \bar{R}(f_1, f_2)f_1, f_3 \rangle \sin \beta \cos \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{112}^3 &= \langle \bar{R}(e_1, e_2)e_1, e_3 \rangle \\
&= -\{\langle \bar{R}(f_1, f_3)f_3, f_1 \rangle + \langle \bar{R}(f_1, f_2)f_1, f_2 \rangle\} \sin \beta \cos \beta \\
&\quad + \langle \bar{R}(f_1, f_3)f_1, f_2 \rangle (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta), \\
\bar{R}_{212}^3 &= \langle \bar{R}(e_1, e_2)e_2, e_3 \rangle \\
&= \langle \bar{R}(f_1, f_2)f_2, f_3 \rangle \sin \beta - \langle \bar{R}(f_1, f_3)f_3, f_2 \rangle \cos \beta.
\end{aligned}$$

Agora a prova do lema segue diretamente do Lema 1.4. □

Lema 1.7. *As equações de Codazzi da imersão $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}$ são dadas por*

$$\begin{aligned}
0 = & (\lambda_3 - 2\mu_1) \sin \beta w_{21}(e_1) + (-\varrho_1 + \gamma_2)\beta_1 + 2\mu_1\varrho_1 \cos \beta \\
& - \sin \beta [e_1(\gamma_2) - (\gamma_2 + \varrho_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta] - e_2(\mu_1) - \bar{R}_{212}^3.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

e

$$\begin{aligned}
\beta_{11} = & -\cos \beta e_2(w_{21}(e_1)) - \tan \beta \{(\cos \beta w_{21}(e_1))^2 + 2(-\beta_1 + \mu_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \\
& + e_2(\varrho_1) \cos \beta - \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1) \cos^2 \beta\} - (\gamma_2 + \varrho_1 - (\gamma_2 + 2\varrho_1) \cos^2 \beta) w_{21}(e_1) \\
& + e_1(\mu_1) - \bar{R}_{112}^3.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Demonstração. As equações de Codazzi são dadas por (1.21). Por (1.18) obtém-se

$$e_2(h_{i1}) - h_{k1}\theta_{ik}(e_2) - h_{i2}\theta_{12}(e_2) = e_1(h_{i2}) - h_{k2}\theta_{ik}(e_1) - h_{i1}\theta_{21}(e_1) - \bar{R}_{i12}^3. \tag{1.48}$$

Tomando $i = 2$ em (1.48) tem-se

$$e_2(h_{21}) - h_{11}\theta_{21}(e_2) - h_{22}\theta_{12}(e_2) = e_1(h_{22}) - h_{12}\theta_{21}(e_1) - h_{21}\theta_{21}(e_1) - \bar{R}_{212}^3,$$

isto é,

$$e_2(h_{21}) + (h_{22} - h_{11})\theta_{21}(e_2) = e_1(h_{22}) - 2h_{12}\theta_{21}(e_1) - \bar{R}_{212}^3. \tag{1.49}$$

Com o objetivo de facilitar os cálculos, consideraremos na equação (1.49) dois fatores, a saber: $A = e_1(h_{22}) - e_2(h_{21}) - 2h_{12}\theta_{21}(e_1)$ e $B = (h_{22} - h_{11})\theta_{21}(e_2)$.

Pelo Lema 1.5 teremos

$$\begin{aligned}
A &= e_1(h_{22}) - e_2(h_{21}) - 2h_{12}\theta_{21}(e_1) \\
&= e_1(-\beta_2 - \gamma_2 \sin \beta) - e_2(-\beta_1 + \mu_1) - 2(-\beta_1 + \mu_1)(\sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \cos \beta) \\
&= -\beta_{21} - \gamma_2 \cos \beta \beta_1 - e_1(\gamma_2) \sin \beta + \beta_{12} - e_2(\mu_1) - 2(-\beta_1 + \mu_1)(\sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \cos \beta),
\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}
\beta_{12} - \beta_{21} &= -[e_1, e_2](\beta) = -(\nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1)(\beta) \\
&= -\theta_{21}(e_1)\beta_1 + \theta_{12}(e_2)\beta_2 \\
&= -(\sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \cos \beta)\beta_1 - (-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta \beta_2,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&e_1(h_{22}) - e_2(h_{21}) - 2h_{12}\theta_{21}(e_1) \\
&= -(\sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \cos \beta)\beta_1 - (-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta \beta_2 - \gamma_2 \cos \beta \beta_1 \\
&\quad - e_1(\gamma_2) \sin \beta - e_2(\mu_1) - 2(-\beta_1 + \mu_1)(\sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \cos \beta) \\
&= (\beta_1 - 2\mu_1)(\sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \cos \beta) - \beta_2(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta \\
&\quad - \gamma_2 \cos \beta \beta_1 - e_1(\gamma_2) \sin \beta - e_2(\mu_1).
\end{aligned}$$

A seguir, calculemos o segundo fator:

$$\begin{aligned}
B &= (h_{22} - h_{11})\theta_{21}(e_2) \\
&= (-\beta_2 - \gamma_2 \sin \beta - \cos \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \sin \beta)(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta \\
&= (-\beta_2 - \cos \beta w_{21}(e_1) - (\gamma_2 + \varrho_1) \sin \beta)(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta \\
&= -\beta_2(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta - (-\beta_1 + \lambda_3) \sin \beta w_{21}(e_1) - (\gamma_2 + \varrho_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \sin \beta \tan \beta.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{212}^3 &= (\beta_1 - 2\mu_1)(\sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \cos \beta) - \beta_2(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta \\
&\quad - \gamma_2 \cos \beta \beta_1 - e_1(\gamma_2) \sin \beta - e_2(\mu_1) + \beta_2(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta \\
&\quad + (-\beta_1 + \lambda_3) \sin \beta w_{21}(e_1) + (\gamma_2 + \varrho_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \sin \beta \tan \beta \\
&= (\beta_1 - 2\mu_1)(\sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \cos \beta) - \gamma_2 \cos \beta \beta_1 - e_1(\gamma_2) \sin \beta \\
&\quad - e_2(\mu_1) + (-\beta_1 + \lambda_3) \sin \beta w_{21}(e_1) + (\gamma_2 + \varrho_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \sin \beta \tan \beta \\
&= \beta_1 \sin \beta w_{21}(e_1) - 2\mu_1 \sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1(\beta_1 - 2\mu_1) \cos \beta \\
&\quad - \gamma_2 \cos \beta \beta_1 - e_1(\gamma_2) \sin \beta - e_2(\mu_1) - \beta_1 \sin \beta w_{21}(e_1) \\
&\quad + \lambda_3 \sin \beta w_{21}(e_1) + (\gamma_2 + \varrho_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \sin \beta \tan \beta \\
&= (\lambda_3 - 2\mu_1) \sin \beta w_{21}(e_1) + (-\varrho_1 + \gamma_2)\beta_1 + 2\mu_1 \varrho_1 \cos \beta \\
&\quad - \sin \beta [e_1(\gamma_2) - (\gamma_2 + \varrho_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta] - e_2(\mu_1),
\end{aligned}$$

obtendo desse modo (1.46).

Agora, fazendo $i = 1$ em (1.48) obtemos

$$e_2(h_{11}) - h_{21}\theta_{12}(e_2) - h_{12}\theta_{12}(e_2) = e_1(h_{12}) - h_{22}\theta_{12}(e_1) - h_{11}\theta_{21}(e_1) - \bar{R}_{112}^3,$$

isto é

$$e_2(h_{11}) + 2h_{12}\theta_{21}(e_2) = e_1(h_{12}) + (h_{22} - h_{11})\theta_{21}(e_1) - \bar{R}_{112}^3. \quad (1.50)$$

Para obtermos a equação (1.47), procedemos como no caso anterior. Dividimos a equação (1.50) em dois fatores e os calculamos separadamente. O primeiro fator é calculado da seguinte forma

$$\begin{aligned} A &= e_1(h_{12}) - e_2(h_{11}) - 2h_{12}\theta_{21}(e_2) \\ &= e_1(-\beta_1 + \mu_1) - e_2(\cos \beta w_{21}(e_1) + \varrho_1 \sin \beta) - 2(-\beta_1 + \mu_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta \\ &= -\beta_{11} + e_1(\mu_1) + \beta_2 \sin \beta w_{21}(e_1) - \cos \beta e_2(w_{21}(e_1)) - e_2(\varrho_1) \sin \beta - \varrho_1 \cos \beta \beta_2 \\ &\quad - 2(-\beta_1 + \mu_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta, \end{aligned}$$

e o segundo fator

$$\begin{aligned} B &= (h_{22} - h_{11})\theta_{21}(e_1) \\ &= (-\beta_2 - \gamma_2 \sin \beta - \cos \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \sin \beta)(\sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \cos \beta) \\ &= -(\beta_2 + \cos \beta w_{21}(e_1) + (\gamma_2 + \varrho_1) \sin \beta)(\sin \beta w_{21}(e_1) - \varrho_1 \cos \beta) \\ &= -\beta_2 \sin \beta w_{21}(e_1) - \cos \beta \sin \beta (w_{21}(e_1))^2 - (\gamma_2 + \varrho_1) \sin^2 \beta w_{21}(e_1) \\ &\quad + \varrho_1 \cos \beta \beta_2 + \varrho_1 \cos^2 \beta w_{21}(e_1) + \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1) \cos \beta \sin \beta. \end{aligned}$$

Finalmente obtemos,

$$\begin{aligned} \bar{R}_{112}^3 &= e_1(h_{12}) - e_2(h_{11}) - 2h_{12}\theta_{21}(e_2) + (h_{22} - h_{11})\theta_{21}(e_1) \\ &= -\beta_{11} + e_1(\mu_1) - \cos \beta e_2(w_{21}(e_1)) - e_2(\varrho_1) \cos \beta \tan \beta \\ &\quad - 2(-\beta_1 + \mu_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \tan \beta - \tan \beta (\cos \beta w_{21}(e_1))^2 \\ &\quad - (\gamma_2 + \varrho_1) \sin^2 \beta w_{21}(e_1) + \varrho_1 \cos^2 \beta w_{21}(e_1) + \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1) \cos^2 \beta \tan \beta. \end{aligned}$$

onde isolando o termo β_{11} obtemos

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= -\cos \beta e_2(w_{21}(e_1)) - \tan \beta \{(\cos \beta w_{21}(e_1))^2 + 2(-\beta_1 + \mu_1)(-\beta_1 + \lambda_3) \\ &\quad + e_2(\varrho_1) \cos \beta - \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1) \cos^2 \beta\} - (\gamma_2 + \varrho_1 - (\gamma_2 + 2\varrho_1) \cos^2 \beta) w_{21}(e_1) \\ &\quad + e_1(\mu_1) - \bar{R}_{112}^3. \end{aligned}$$

concluindo deste modo a prova do lema. □

Neste lema os termos \bar{R}_{ijk}^l são mantidos e serão substituídos apenas quando formos tratar dos casos unimodular e não-unimodular separadamente.

1.2.3 Teoremas Principais

Nesta seção demonstraremos nossos dois principais teoremas que generalizam o resultado obtido por Gomes e Cui em [24]. Para o que segue, Σ será uma superfície orientada e (\mathbb{M}^3, η) uma variedade Riemanniana de contato homogênea e simplesmente conexa. Novamente, os termos \bar{R}_{ijk}^l serão mantidos e serão substituídos quando for conveniente.

A proposição seguinte é fundamental para a prova de nossos principais resultados. Embora esta proposição tenha um caráter geral, as hipóteses nele contidas foram motivadas pelos casos em que a variedade \mathbb{M} é unimodular ou não-unimodular.

Proposição 1.2. *Seja $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}$ uma imersão isométrica com ângulo de contato β e campo característico e_1 definido em um aberto $\mathcal{W} \subset \Sigma$. Se \mathbb{M} admite um referencial ortonormal $\{f_i\}$ satisfazendo (1.26) e $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal adaptado em $\mathcal{W} \subset \Sigma$, dado por (1.37), então a curvatura Gaussiana em \mathcal{W} é dada por*

$$K = -|\nabla\beta - \mu_1 e_1|^2 - (2H + \gamma_2 \sin \beta)(\beta_2 + \gamma_2 \sin \beta) - \beta_2 \gamma_2 \sin \beta + \bar{R}_{212}^1$$

e o Laplaciano de β satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= -2H_2 - \tan \beta \{(2H + \beta_2 - (\varrho_1 - \gamma_2) \sin \beta)^2 + (-\beta_1 + \lambda_3)(-\beta_1 + 2\mu_1) \\ &\quad - \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1) \cos^2 \beta + e_2(\gamma_2) \cos \beta\} - (\gamma_2 + \varrho_1 - (\gamma_2 + 2\varrho_1) \cos^2 \beta)w_{21}(e_1) \\ &\quad - \gamma_2 \cos \beta \beta_2 + e_1(\mu_1) - \bar{R}_{112}^3, \end{aligned}$$

onde $\mu_1 := \frac{1}{2}(\lambda_3 - \gamma_1 + \varrho_2)$ e $H_2 := dH(e_2)$.

Demonstração. Denote $R_{jkli} := R_{ijkl}^i$. A equação de Gauss é dada por

$$R_{2121} = \bar{R}_{2121} + h_{11}h_{22} - h_{12}h_{12}.$$

Então, é suficiente aplicar o Lema 1.5 para obter

$$R_{2121} = (\cos \beta w_{21}(e_1) + \varrho_1 \sin \beta)(-\beta_2 - \gamma_2 \sin \beta) - (-\beta_1 + \mu_1)^2 + \bar{R}_{212}^1$$

De (1.45) temos

$$\cos \beta w_{21}(e_1) + \varrho_1 \sin \beta = 2H + \beta_2 + \gamma_2 \sin \beta,$$

e portanto

$$\begin{aligned} R_{2121} &= -(2H + \beta_2 + \gamma_2 \sin \beta)(\beta_2 + \gamma_2 \sin \beta) - (\mu_1 - \beta_1)^2 + \bar{R}_{212}^1 \\ &= -2H(\beta_2 + \gamma_2 \sin \beta) - (\beta_2 + \gamma_2 \sin \beta)^2 - (\mu_1 - \beta_1)^2 + \bar{R}_{212}^1 \\ &= -2H(\beta_2 + \gamma_2 \sin \beta) - |\nabla\beta - \mu_1 e_1|^2 - (2\beta_2 + \gamma_2 \sin \beta)\gamma_2 \sin \beta + \bar{R}_{212}^1 \\ &= -|\nabla\beta - \mu_1 e_1|^2 - (2H + \gamma_2 \sin \beta)(\beta_2 + \gamma_2 \sin \beta) - \beta_2 \gamma_2 \sin \beta + \bar{R}_{212}^1. \end{aligned}$$

obtendo deste modo a curvatura Gaussiana em todo $p \in \mathcal{W} \subset \Sigma$.

Para o cálculo do Laplaciano de β , usaremos a notação $e_i(\beta_j) = \beta_{ji}$ e $dH(e_i) = H_i$ para $i, j = 1, 2$. Além disso, com o intuito de simplificar os cálculos escreveremos

$$p = \cos \beta \quad q = \sin \beta \quad q = p \tan \beta \quad \omega = w_{21}(e_1) \quad \phi = \varrho_1 - \gamma_2, \quad (1.51)$$

o que nos dá

$$e_i(p) = -q\beta_i \quad e \quad e_i(q) = p\beta_i.$$

Pelo Lema 1.5, temos

$$\begin{aligned} \beta_2 &= p\omega - 2H + \phi q, \\ \beta_{22} &= -q\beta_2\omega + pe_2(\omega) - 2H_2 + e_2(\phi)q + p\beta_2\phi \\ &= -p \tan \beta \beta_2\omega + pe_2(\omega) - 2H_2 + e_2(\phi)p \tan \beta + p\beta_2\phi \\ &= -\tan \beta \{p\beta_2\omega - e_2(\phi)p\} + pe_2(\omega) - 2H_2 + p\beta_2\phi. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Somando as equações (1.47) e (1.52) obtemos

$$\begin{aligned} \beta_{11} + \beta_{22} &= -pe_2(\omega) - \tan \beta \{(p\omega)^2 + 2(-\beta_1 + \mu_1)(-\beta_1 + \lambda_3) + e_2(\varrho_1)p \\ &\quad - \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1)p^2\} - (\gamma_2 + \varrho_1 - (\gamma_2 + 2\varrho_1)p^2)\omega - \tan \beta \{p\beta_2\omega - e_2(\phi)p\} \\ &\quad + pe_2(\omega) - 2H_2 + p\beta_2\phi + e_1(\mu_1) - \bar{R}_{112}^3 \\ &= -2H_2 - \tan \beta \{(p\omega)^2 + 2(-\beta_1 + \mu_1)(-\beta_1 + \lambda_3) + e_2(\varrho_1)p \\ &\quad - \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1)p^2 + p\beta_2\omega - e_2(\phi)p\} - (\gamma_2 + \varrho_1 - (\gamma_2 + 2\varrho_1)p^2)\omega \\ &\quad + p\beta_2\phi + e_1(\mu_1) - \bar{R}_{112}^3. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_1} e_1)(\beta) &= \theta_{12}(e_1)\beta_2 = -(q\omega - p\varrho_1)\beta_2 = -\tan \beta p\omega\beta_2 + \varrho_1 p\beta_2, \\ (\nabla_{e_2} e_2)(\beta) &= \theta_{21}(e_2)\beta_1 = \tan \beta(-\beta_1 + \lambda_3)\beta_1 \end{aligned}$$

e

$$\Delta\beta = \beta_{11} + \beta_{22} - (\nabla_{e_1} e_1)(\beta) - (\nabla_{e_2} e_2)(\beta),$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= -2H_2 - \tan \beta \{(p\omega)^2 + 2(-\beta_1 + \mu_1)(-\beta_1 + \lambda_3) + e_2(\varrho_1)p \\ &\quad - \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1)p^2 + p\beta_2\omega - e_2(\phi)p\} - (\gamma_2 + \varrho_1 - (\gamma_2 + 2\varrho_1)p^2)\omega \\ &\quad + p\beta_2\phi + e_1(\mu_1) + \tan \beta p\omega\beta_2 - \varrho_1 p\beta_2 - \tan \beta(-\beta_1 + \lambda_3)\beta_1 - \bar{R}_{112}^3 \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= -2H_2 - \tan\beta\{(p\omega)^2 + 2(-\beta_1 + \mu_1)(-\beta_1 + \lambda_3) + e_2(\varrho_1)p \\ &\quad - \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1)p^2 + p\beta_2\omega - e_2(\phi)p - p\omega\beta_2 + (-\beta_1 + \lambda_3)\beta_1\} \\ &\quad - (\gamma_2 + \varrho_1 - (\gamma_2 + 2\varrho_1)p^2)\omega + p\beta_2\phi + e_1(\mu_1) - \varrho_1p\beta_2 - \bar{R}_{112}^3.\end{aligned}$$

Como, $\phi = \varrho_1 - \gamma_2$, $p\omega = 2H + \beta_2 - (\varrho_1 - \gamma_2)\sin\beta$ e

$$2(-\beta_1 + \mu_1)(-\beta_1 + \lambda_3) + (-\beta_1 + \lambda_3)\beta_1 = (-\beta_1 + \lambda_3)(-\beta_1 + 2\mu_1),$$

temos

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= -2H_2 - \tan\beta\{(p\omega)^2 + (-\beta_1 + \lambda_3)(-\beta_1 + 2\mu_1) - \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1)p^2 + e_2(\gamma_2)p\} \\ &\quad - (\gamma_2 + \varrho_1 - (\gamma_2 + 2\varrho_1)p^2)\omega - \gamma_2p\beta_2 + e_1(\mu_1) - \bar{R}_{112}^3.\end{aligned}$$

Finalmente, pela notação estabelecida em (1.51), teremos

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= -2H_2 - \tan\beta\{(2H + \beta_2 - (\varrho_1 - \gamma_2)\sin\beta)^2 + (-\beta_1 + \lambda_3)(-\beta_1 + 2\mu_1) \\ &\quad - \varrho_1(\gamma_2 + \varrho_1)\cos^2\beta + e_2(\gamma_2)\cos\beta\} - (\gamma_2 + \varrho_1 - (\gamma_2 + 2\varrho_1)\cos^2\beta)w_{21}(e_1) \\ &\quad - \gamma_2\cos\beta\beta_2 + e_1(\mu_1) - \bar{R}_{112}^3,\end{aligned}$$

o que completa a prova da proposição. \square

Antes do próximo resultado, faremos uma breve observação a cerca da forma w_{21} . Segue de (1.45) que

$$w_{21}(e_1) = \frac{2H + \beta_2}{\cos\beta} - (\varrho_1 - \gamma_2)\tan\beta. \quad (1.53)$$

Comparando (1.24) com (1.26) no caso onde \mathbb{M} é unimodular, e (1.25) com (1.26) caso contrário, tem-se em ambos os casos $\varrho_1 = \gamma_2$, ou seja

$$w_{21}(e_1) = \frac{2H + \beta_2}{\cos\beta}. \quad (1.54)$$

Embora a demonstração dos dois teoremas abaixo pareçam simples, deve-se observar que essa demonstração foi sendo construída no decorrer de todo o trabalho.

Teorema 1.4. *Seja $\Sigma \rightarrow (\mathbb{M}^3, \eta)$ uma imersão isométrica com ângulo de contato β e campo característico e_1 definido em um aberto $\mathcal{W} \subset \Sigma$. Se \mathbb{M} é um grupo de Lie unimodular e $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal adaptado em $\mathcal{W} \subset \Sigma$ dado por (1.37), então a curvatura Gaussiana em \mathcal{W} é dada por*

$$\begin{aligned}K &= -\left(2H + \frac{1}{2}(l-r)\sin 2\alpha\sin\beta\right)\left(\beta_2 + \frac{1}{2}(l-r)\sin 2\alpha\sin\beta\right) \\ &\quad - \left|\nabla\beta - \left(\frac{c}{2} + \frac{1}{2}(l-r)\cos 2\alpha\right)e_1\right|^2 + \mathcal{S}_{uc}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= -2H_2 - \tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + c)(-\beta_1 + c + (l-r)\cos 2\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{2}((l-r)\sin 2\alpha\cos\beta)^2 + (l-r)\alpha_2\cos 2\alpha\cos\beta\} + \mathcal{Q}_{uc}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{uc} &:= -\frac{1}{2}(l-r)\beta_2\sin 2\alpha\sin\beta - (c_1c_2 - cc_3)\sin^2\beta - [\cos^2\alpha(c_3c_1 - lc_2) \\ &\quad + \sin^2\alpha(c_2c_3 - rc_1)]\cos^2\beta, \\ \mathcal{Q}_{uc} &:= -\frac{1}{2}(l-r)\left[(2 - 3\cos^2\beta)\left(\frac{2H + \beta_2}{\cos\beta}\right) + \cos\beta\beta_2 + 2\alpha_1\right]\sin 2\alpha \\ &\quad - [\cos^2\alpha(c_3c_1 - lc_2) + \sin^2\alpha(c_2c_3 - rc_1) - (c_1c_2 - cc_3)]\sin\beta\cos\beta,\end{aligned}$$

e

$$c_1 := \frac{1}{2}(c+l-r), \quad c_2 := \frac{1}{2}(c-l+r), \quad c_3 := \frac{1}{2}(-c+l+r), \quad \alpha_i := e_i(\alpha), \quad \beta_i := e_i(\beta), \quad H_2 := e_2(H).$$

Demonstração. Inicialmente observe que $\rho_1 = \gamma_2$. Sendo \mathbb{M} unimodular, comparamos (1.24) com (1.26) e obtemos

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \frac{1}{2}(l-r)\sin 2\alpha \\ \gamma_1 &= l\sin^2\alpha + r\cos^2\alpha + \tilde{\alpha}_3, \\ \rho_2 &= l\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha + \tilde{\alpha}_3, \\ \lambda_3 &= c \\ \mu_1 &= \frac{c}{2} + \frac{1}{2}(l-r)\cos 2\alpha.\end{aligned}\tag{1.55}$$

Agora, substituindo (1.55) e (1.54) na Proposição 1.2 e usando o Lema 1.6, teremos

$$\begin{aligned}K &= -\left(2H + \frac{1}{2}(l-r)\sin 2\alpha\sin\beta\right)\left(\beta_2 + \frac{1}{2}(l-r)\sin 2\alpha\sin\beta\right) \\ &\quad - \left|\nabla\beta - \left(\frac{c}{2} + \frac{1}{2}(l-r)\cos 2\alpha\right)e_1\right|^2 + \mathcal{S}_{uc}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= -2H_2 - \tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + c)(-\beta_1 + c + (l-r)\cos 2\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{2}((l-r)\sin 2\alpha\cos\beta)^2 + (l-r)\alpha_2\cos 2\alpha\cos\beta\} + \mathcal{Q}_{uc}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{uc} &:= -\frac{1}{2}(l-r)\beta_2 \sin 2\alpha \sin \beta - (c_1 c_2 - c c_3) \sin^2 \beta - [\cos^2 \alpha (c_3 c_1 - l c_2) \\ &\quad + \sin^2 \alpha (c_2 c_3 - r c_1)] \cos^2 \beta, \\ \mathcal{Q}_{uc} &:= -\frac{1}{2}(l-r) \left[(2 - 3 \cos^2 \beta) \left(\frac{2H + \beta_2}{\cos \beta} \right) + \cos \beta \beta_2 + 2\alpha_1 \right] \sin 2\alpha \\ &\quad - [\cos^2 \alpha (c_3 c_1 - l c_2) + \sin^2 \alpha (c_2 c_3 - r c_1) - (c_1 c_2 - c c_3)] \sin \beta \cos \beta\end{aligned}$$

e c_1, c_2 e c_3 são dados como no Lema 1.4 o que conclui a prova do teorema. \square

Teorema 1.5. *Seja $\Sigma \rightarrow (\mathbb{M}^3, \eta)$ uma imersão isométrica com ângulo de contato β e campo característico e_1 definido em um aberto $\mathcal{W} \subset \Sigma$. Se \mathbb{M} é um grupo de Lie não-unimodular e $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal adaptado em $\mathcal{W} \subset \Sigma$ dado por (1.37), então a curvatura Gaussiana em \mathcal{W} é dada por*

$$K = - \left| \nabla \beta - \left(1 + \frac{l}{2} \cos 2\alpha \right) e_1 \right|^2 - \left(2H + \frac{l}{2} \sin 2\alpha \sin \beta \right) \left(\beta_2 + \frac{l}{2} \sin 2\alpha \sin \beta \right) + \mathcal{S}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta \beta &= -2H_2 - \tan \beta \{ (2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + 2)(-\beta_1 + 2 + l \cos 2\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{2}(l \sin 2\alpha \cos \beta)^2 + l\alpha_2 \cos 2\alpha \cos \beta \} + \mathcal{Q},\end{aligned}$$

onde $\alpha_i := e_i(\alpha)$, $\beta_i := e_i(\beta)$, $H_2 := e_2(H)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &:= \left(\frac{l^2}{4} + l - b^2 - 3 \right) \sin^2 \beta - \frac{(l-2)}{4} \left((3l+2) \cos^2 \alpha - (l-2) \sin^2 \alpha \right) \cos^2 \beta \\ &\quad + 2bl \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \frac{l}{2} \beta_2 \sin 2\alpha \sin \beta, \\ \mathcal{Q} &:= (b^2 + 4) \sin \beta \cos \beta - \frac{l}{2} \left\{ \sin 2\alpha (2 - 3 \cos^2 \beta) \left(\frac{2H + \beta_2}{\cos \beta} \right) + \sin 2\alpha \cos \beta \beta_2 \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha_1 \sin 2\alpha + 2((l-2) \cos^2 \alpha + 2) \sin \beta \cos \beta - 2b \cos \alpha (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) \right\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Obviamente observe que $\rho_1 = \gamma_2$. Sendo \mathbb{M} não-unimodular, comparamos (1.25) com (1.26) para obter

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \frac{1}{2} l \sin 2\alpha, \\ \gamma_1 &= l \sin^2 \alpha + \tilde{\alpha}_3, \\ \rho_2 &= l \cos^2 \alpha + \tilde{\alpha}_3, \\ \lambda_3 &= 2,\end{aligned}\tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 1 + \frac{1}{2} l \cos 2\alpha \\ w_{21}(e_1) &= -(\alpha_1 \cos \alpha - (b - \alpha_2) \sin \alpha).\end{aligned}\tag{1.57}$$

Finalmente, substituimos (1.56) e (1.54) na Proposição 1.2 e usando novamente o Lema 1.6, teremos

$$K = - \left| \nabla \beta - \left(1 + \frac{l}{2} \cos 2\alpha \right) e_1 \right|^2 - \left(2H + \frac{l}{2} \sin 2\alpha \sin \beta \right) \left(\beta_2 + \frac{l}{2} \sin 2\alpha \sin \beta \right) + \mathcal{S}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta \beta = & -2H_2 - \tan \beta \{ (2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + 2)(-\beta_1 + 2 + l \cos 2\alpha) \\ & - \frac{1}{2} (l \sin 2\alpha \cos \beta)^2 + l\alpha_2 \cos 2\alpha \cos \beta \} + \mathcal{Q} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{S} := & \left(\frac{l^2}{4} + l - b^2 - 3 \right) \sin^2 \beta - \frac{(l-2)}{4} \left((3l+2) \cos^2 \alpha - (l-2) \sin^2 \alpha \right) \cos^2 \beta \\ & + 2bl \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \frac{l}{2} \beta_2 \sin 2\alpha \sin \beta, \\ \mathcal{Q} := & (b^2 + 4) \sin \beta \cos \beta - \frac{l}{2} \left\{ \sin 2\alpha (2 - 3 \cos^2 \beta) \left(\frac{2H + \beta_2}{\cos \beta} \right) + \sin 2\alpha \cos \beta \beta_2 \right. \\ & \left. + 2\alpha_1 \sin 2\alpha + 2 \left((l-2) \cos^2 \alpha + 2 \right) \sin \beta \cos \beta - 2b \cos \alpha (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) \right\}, \end{aligned}$$

o que conclui a prova do teorema. \square

1.2.4 Aplicações

Considere a submersão Riemanniana $\Pi : \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa)$ e tome uma curva regular γ em $\mathbb{M}^2(\kappa)$ tal que $\Sigma = \Pi^{-1}(\gamma)$ é uma superfície, chamada de superfície de Hopf em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, que tem ξ como um campo tangente. Se γ é uma curva fechada, dizemos que Σ é um cilindro flat; e se além disso γ é um círculo, então dizemos que Σ é um toro flat ou Toro de Hopf. O exemplo a seguir mostra que uma superfície ter ângulo de contato constante é de fato uma característica especial.

Exemplo 1.2 ([48]). *Seja $\Sigma \subset \widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ uma superfície rotacionalmente invariante parametrizada como $\Phi(s, v) = (\cosh x(s)e^{iy(s)}, \sinh x(s)e^{iv})$ e gerada por uma curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow P$ dada por $\gamma(s) := (\cosh x(s)e^{iy(s)}, \sinh x(s))$ em $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})/Rot$, onde Rot é o grupo à 1-parâmetro de rotações do $\widetilde{Iso}(\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}))$ (ver Proposição 4.23 em [48]). Iremos supor que $x'(s)^2 + y'(s)^2 \cosh^2 x(s) = 1$ e denotaremos por α a função que satisfaz $x'(s) = \cos \alpha(s)$. Lembremos que $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ é munido da métrica*

$$g(E_i, E_j) = -\frac{4}{\kappa}, \quad g(V, V) = \frac{16\tau^2}{\kappa^2}, \quad g(V, E_i) = 0, \quad \text{para } i, j = 1, 2,$$

onde $\kappa, \tau \in \mathbb{R}(\kappa < 0, \tau \neq 0)$, $\{E_1, E_2, V\}$ é um referencial global sobre $T\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ definido por $E_1(z, w) = (\bar{w}, \bar{z})$, $E_2(z, w) = (i\bar{w}, i\bar{z})$ e $V(z, w) = (iz, iw)$. Então $(\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R}), g)$ é um

modelo para o espaço homogêneo $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ com $\kappa < 0$. $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ é uma fibração sobre $\mathbb{H}^2(\kappa)$ com fibras geradas pelo campo unitário Killing $\xi := -\frac{\kappa}{4\tau}V$.

Agora, o campo normal unitário de $\Phi(s, v)$ é dado por

$$N = C \left\{ -\tau \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\tan \alpha}{\cosh x} - i \tanh x \right) e^{i(t+y)} \right] E_1(\Phi) - \tau \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\tan \alpha}{\cosh x} - i \tanh x \right) e^{i(t+y)} \right] E_2(\Phi) - \frac{\kappa}{4\tau} V_\Phi \right\},$$

onde

$$C(s) = \frac{\cos \alpha(s) \cosh x(s)}{\sqrt{\cos^2 \alpha(s) \left(\cosh^2 x(s) - \frac{4\tau^2}{\kappa} \sinh^2 x(s) \right) - \frac{4\tau^2}{\kappa} \sin^2 \alpha(s)}}$$

O seno do ângulo de contato é dado por

$$\sin \beta = g(N, \xi) = -C \frac{\kappa}{4\tau} g(\xi, \xi) = -C \frac{\kappa}{4\tau}.$$

Note que o ângulo de contato β não é constante uma vez que o sinal de C determina o sinal de $\sin \beta$.

Corolário 1.2. *Seja $\Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma imersão isométrica com ângulo de contato β e campo característico e_1 definido em um aberto $\mathcal{W} \subset \Sigma$. Então*

$$K = -|\nabla \beta - \tau e_1|^2 - 2H\beta_2 + (\kappa - 4\tau^2) \sin^2 \beta + \tau^2 \quad (1.58)$$

e

$$\Delta \beta = -2H_2 - \tan \beta \{ (2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + 2\tau)^2 + (\kappa - 4\tau^2) \cos^2 \beta \}. \quad (1.59)$$

Demonstração. Seja $\mathcal{W} \subset \Sigma$ um aberto onde o campo característico está definido. Como $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ é unimodular com referencial ortonormal $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3 = \xi\}$ satisfazendo

$$[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2] = 2\tau \tilde{f}_3, \quad [\tilde{f}_2, \tilde{f}_3] = \frac{\kappa}{2\tau} \tilde{f}_1, \quad [\tilde{f}_3, \tilde{f}_1] = \frac{\kappa}{2\tau} \tilde{f}_2,$$

onde κ e $\tau \neq 0$ são números reais, fazendo $c = 2\tau$ e $l = r = \frac{\kappa}{2\tau}$ no Teorema 1.4 obtemos imediatamente as equações (1.58) e (1.59). \square

Usando argumentos de natureza topológica, Torralbo e Urbano em [49] estudaram o comportamento da curvatura de Gauss de superfícies compactas imersas em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Particularmente eles provaram o seguinte resultado:

Teorema 1.6 (F.Torralbo; F.Urbano). *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ uma imersão isométrica de uma superfície compacta Σ com curvatura de Gauss K .*

(i) Se $\kappa - 4\tau^2 > 0$ e $0 \leq K < \max\{\kappa - 4\tau^2, \tau^2\}$, então $K = 0$ e Σ é um Toro de Hopf.

(ii) Se $\kappa - 4\tau^2 < K \leq 0$, então $K = 0$ e Σ é um Toro de Hopf.

(iii) Se $\kappa - 4\tau^2 < 0 \leq K < \kappa - 3\tau^2$ (κ deve ser positivo), então $K = 0$ e Σ é um Toro de Hopf.

Corolário 1.3. *Seja Σ uma superfície orientada conexa compacta em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, $\kappa - 4\tau^2 > 0$ com curvatura média H satisfazendo $H_2 \geq 0$. Então Σ é um Toro de Hopf se o ângulo de contato satisfaz $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{W} \subset \Sigma$ um aberto onde o campo característico está definido. Pelo Corolário 1.2 temos que em \mathcal{W} são válidas as equações (1.58) e (1.59).

Como $H_2 \geq 0$ e $\kappa - 4\tau^2 > 0$, segue de (1.59) que $\Delta\beta$ não muda de sinal sobre \mathcal{W} se o ângulo de contato satisfaz $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$. Esta propriedade que $\Delta\beta$ não muda de sinal pode ser estendida à toda Σ usando argumentos de continuidade, uma vez que \mathcal{W}^C é um conjunto fechado com interior vazio. Sendo Σ compacta, pelo teorema de Hopf, β é constante. Note que por (1.59) temos $\beta = 0$, portanto por (1.58), $K = 0$. Finalmente, o corolário segue do Teorema 1.6. \square

Observação 1.4. *Observamos que o Corolário 1.3 continua válido se supormos $H_2 \leq 0$ e $-\frac{\pi}{2} < \beta \leq 0$.*

Teorema 1.7. *Seja Σ uma superfície orientada simplesmente conexa, J a rotação de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ sobre $T\Sigma$, e_1 um campo vetorial unitário sobre Σ , $\{e_1, e_2 = -Je_1\}$ um referencial móvel em Σ e $\{\theta_1, \theta_2\}$ seu coreferencial associado. Considere duas funções suaves $\beta : \Sigma \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$, $H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ e duas constantes $\kappa > 0, \tau \neq 0$ satisfazendo a equação*

$$\Delta\beta = -2H_2 - \tan\beta\{(2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + 2\tau)^2 + (\kappa - 4\tau^2)\cos^2\beta\}, \quad (1.60)$$

onde $\beta_i = e_i(\beta)$. Suponhamos, além disso, que a conexão Riemanniana de Σ é dada por $\nabla e_i = \theta_{ij}e_j$ para $i, j = 1, 2$ e $\theta_{21} = \tan\beta[(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2\tau)\theta_2]$. Então existe uma imersão isométrica de Σ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ tal que e_1 é o campo característico, β é o ângulo de contato de Σ e H é a curvatura média da imersão. Além disso, esta imersão é única a menos de isometria global de $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ preservando a orientação de ambas as fibras e a base da fibração.

Demonstração. Suponha que a conexão de Levi-Civita da superfície satisfaz

$$\theta_{31} := -(2H + \beta_2)\theta_1 + (\beta_1 - \tau)\theta_2, \quad (1.61)$$

$$\theta_{23} := -(\beta_1 - \tau)\theta_1 - \beta_2\theta_2, \quad (1.62)$$

e seja $\theta_j^i = -\theta_i^j$. Considere o campo vetorial $T = -\cos \beta J e_1$, as funções suaves $\nu = \sin \beta$ e o operador simétrico $S_z : T_z \Sigma \rightarrow T_z \Sigma$ dado por

$$S = \begin{pmatrix} 2H + \beta_2 & \tau - \beta_1 \\ \tau - \beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Nosso objetivo é mostrar que estes entes satisfazem as condições de Teorema 4.3 em [19] o que nos garantirá a existência de uma imersão isométrica de Σ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

Em primeiro lugar, a igualdade $|T|^2 + \nu^2 = 1$ é claramente verdadeira. Em seguida mostraremos que as equações fundamentais são satisfeitas. Para a equação de Gauss é suficiente verificar que

$$d\theta_{21} = \Omega_{21} = \bar{\Omega}_{21} - \theta_{31} \wedge \theta_{23},$$

enquanto que para a equação de Codazzi

$$\bar{\omega}_{13} = d\theta_{13} + \theta_{23} \wedge \theta_{12} \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_{23} = d\theta_{23} + \theta_{13} \wedge \theta_{21}, \quad (1.63)$$

com

$$\theta_{21} = \tan \beta [(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 - 2\tau)\theta_2]. \quad (1.64)$$

Observe que

$$dH = H_1\theta_1 + H_2\theta_2, \quad d\beta_1 = \beta_{11}\theta_1 + \beta_{12}\theta_2 \quad \text{e} \quad d\beta_2 = \beta_{21}\theta_1 + \beta_{22}\theta_2.$$

Como $\nabla e_i = \theta_{ij}e_j$ temos $\theta_{21} = -\theta_{12}$ e $d\theta_i = -\theta_{ji} \wedge \theta_j$, $\forall i, j = 1, 2$. Então

$$\Delta\beta = \beta_{22} + \beta_{11} - \beta_2\theta_{12}(e_1) - \beta_1\theta_{21}(e_2).$$

Para provar a equação de Gauss usamos o Lema 1.6 e as equações (1.61) e (1.62) para obter

$$\begin{aligned} (\bar{\Omega}_{21} - \theta_{31} \wedge \theta_{23})(e_1, e_2) &= (\kappa - 4\tau^2) \sin^2 \beta + \tau^2 - \theta_{31}(e_1)\theta_{23}(e_2) + \theta_{31}(e_2)\theta_{23}(e_1) \\ &= (\kappa - 4\tau^2) \sin^2 \beta + \tau^2 - \beta_2(2H + \beta_2) - (\beta_1 - \tau)^2 \\ &= (\kappa - 4\tau^2) \sin^2 \beta - \beta_2(2H + \beta_2) - \beta_1(\beta_1 - 2\tau). \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando a derivada exterior da relação (1.64) temos

$$\begin{aligned} d\theta_{21}(e_1, e_2) &= -\beta_2(2H + \beta_2) \sec^2 \beta - \tan \beta [2H_2 + \beta_{22} - (2H + \beta_2)\theta_{12}(e_1)] \\ &\quad - \sec^2 \beta (\beta_1 - 2\tau)\beta_1 - \tan \beta \beta_{11} + \tan \beta (\beta_1 - 2\tau)\theta_{21}(e_2) \\ &= -\tan \beta [2H_2 + \beta_{22} + \beta_{11} - (2H + \beta_2)\theta_{12}(e_1) - (\beta_1 - 2\tau)\theta_{21}(e_2)] \\ &\quad - \sec^2 \beta [\beta_2(2H + \beta_2) + (\beta_1 - 2\tau)\beta_1] \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}
d\theta_{21}(e_1, e_2) &= -\tan \beta [2H_2 + \beta_{22} + \beta_{11} - 2H\theta_{12}(e_1) - \beta_2\theta_{12}(e_1) - \beta_1\theta_{21}(e_2) + 2\tau\theta_{21}(e_2)] \\
&\quad - \sec^2 \beta [\beta_2(2H + \beta_2) + (\beta_1 - 2\tau)\beta_1] \\
&= -\tan \beta [2H_2 + \beta_{22} + \beta_{11} - \beta_2\theta_{12}(e_1) - \beta_1\theta_{21}(e_2)] \\
&\quad + \tan \beta [-2\tau\theta_{21}(e_2) + 2H\theta_{12}(e_1)] - [\beta_2(2H + \beta_2) + (\beta_1 - 2\tau)\beta_1] \\
&\quad - \tan^2 \beta [\beta_2(2H + \beta_2) + (\beta_1 - 2\tau)\beta_1] \\
&= -\tan \beta (2H_2 + \Delta\beta) + \tan \beta [-2\tau\theta_{21}(e_2) + 2H\theta_{12}(e_1)] \\
&\quad - [\beta_2(2H + \beta_2) + (\beta_1 - 2\tau)\beta_1] - \tan^2 \beta [\beta_2(2H + \beta_2) + (\beta_1 - 2\tau)\beta_1].
\end{aligned}$$

Pela equação (1.60) obtemos

$$\tan \beta (\Delta\beta + 2H_2) = -\tan^2 \beta \{(2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + 2\tau)^2 + (\kappa - 4\tau^2) \cos^2 \beta\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
d\theta_{21}(e_1, e_2) &= \tan^2 \beta [(2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + 2\tau)^2 + (\kappa - 4\tau^2) \cos^2 \beta] \\
&\quad - \tan^2 \beta [\beta_2(2H + \beta_2) + (\beta_1 - 2\tau)\beta_1] + \tan \beta [-2\tau\theta_{21}(e_2) + 2H\theta_{12}(e_1)] \\
&\quad - [\beta_2(2H + \beta_2) + (\beta_1 - 2\tau)\beta_1] \\
&= \tan^2 \beta [2H(2H + \beta_2) + 2\tau(-\beta_1 + 2\tau)] + \tan \beta [-2\tau\theta_{21}(e_2) + 2H\theta_{12}(e_1)] \\
&\quad + (\kappa - 4\tau^2) \sin^2 \beta - \beta_2(2H + \beta_2) - \beta_1(\beta_1 - 2\tau) \\
&= \tan^2 \beta [2H(2H + \beta_2) + 2\tau(-\beta_1 + 2\tau)] + \tan \beta [-2\tau\theta_{21}(e_2) + 2H\theta_{12}(e_1)] \\
&\quad + (\bar{\Omega}_2^1 - \theta_3^1 \wedge \theta_2^3)(e_1, e_2) \\
&= (\bar{\Omega}_2^1 - \theta_3^1 \wedge \theta_2^3)(e_1, e_2),
\end{aligned}$$

e desta forma concluímos a verificação da equação de Gauss.

Agora, verificaremos a primeira das equações de (1.63). Tomando a derivada da relação (1.61) teremos

$$\begin{aligned}
-d\theta_{13} &= d[-(2H + \beta_2)\theta_1 + (\beta_1 - \tau)\theta_2] \\
&= -d(2H + \beta_2) \wedge \theta_1 - (2H + \beta_2)d\theta_1 + d\beta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 - \tau)d\theta_2 \\
&= -(2H_2 + \beta_{22})\theta_2 \wedge \theta_1 - (2H + \beta_2)\theta_{12} \wedge \theta_2 + \beta_{11}\theta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 - \tau)\theta_{21} \wedge \theta_1 \\
&= (2H_2 + \beta_{22} + \beta_{11})\theta_1 \wedge \theta_2 - \beta_2\theta_{12} \wedge \theta_2 - \beta_1\theta_1 \wedge \theta_{21} - 2H\theta_{12} \wedge \theta_2 + \tau\theta_1 \wedge \theta_{21}.
\end{aligned}$$

Pelas equações (1.60) e (1.64) temos

$$\begin{aligned}
-d\theta_{13}(e_1, e_2) &= 2H_2 + \beta_{22} + \beta_{11} - \beta_2\theta_{12}(e_1) - \beta_1\theta_{21}(e_2) - 2H\theta_{12}(e_1) + \tau\theta_{21}(e_2) \\
&= 2H_2 + \Delta\beta - 2H\theta_{12}(e_1) + \tau\theta_{21}(e_2) \\
&= -\tan\beta [(2H + \beta_2)^2 + (-\beta_1 + 2\tau)^2 + (\kappa - 4\tau^2)\cos^2\beta] \\
&\quad + 2H\tan\beta(2H + \beta_2) - \tau\tan\beta(\beta_1 - 2\tau) \\
&= -\tan\beta [(-\beta_1 + \tau)(-\beta_1 + 2\tau) + (2H + \beta_2)\beta_2 + (\kappa - 4\tau^2)\cos^2\beta] \\
d\theta_{13}(e_1, e_2) &= \tan\beta [(-\beta_1 + \tau)(-\beta_1 + 2\tau) + (2H + \beta_2)\beta_2] + (\kappa - 4\tau^2)\sin\beta\cos\beta.
\end{aligned}$$

segue das equações (1.64) e (1.62) que

$$\theta_{23} \wedge \theta_{12}(e_1, e_2) = -\tan\beta [(-\beta_1 + \tau)(-\beta_1 + 2\tau) + (2H + \beta_2)\beta_2].$$

Portanto, deduzimos

$$d\theta_{13}(e_1, e_2) + \theta_{23} \wedge \theta_{12}(e_1, e_2) = (\kappa - 4\tau^2)\sin\beta\cos\beta = \bar{\Omega}_{13}(e_1, e_2),$$

que verifica a primeira equação em (1.63) uma vez que $\bar{\Omega}_{13}(e_1, e_2) = \bar{R}_{112}^3$ (ver Lema 1.6).

Para verificarmos a segunda equação em (1.63), notemos que $d\beta = \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2$ implica

$$\begin{aligned}
0 &= d\beta_1 \wedge \theta_1 + \beta_1 d\theta_1 + d\beta_2 \wedge \theta_2 + \beta_2 d\theta_2 \\
&= \beta_{12}\theta_2 \wedge \theta_1 + \beta_1\theta_{21} \wedge \theta_2 + \beta_{21}\theta_1 \wedge \theta_2 + \beta_2\theta_{12} \wedge \theta_1,
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\beta_{21} - \beta_{12} + \beta_1\theta_{21}(e_1) - \beta_2\theta_{12}(e_2) = 0. \quad (1.65)$$

Ademais, tomando a derivada exterior da equação (1.62) obtemos

$$\begin{aligned}
d\theta_{32} &= d\beta_1 \wedge \theta_1 + (\beta_1 - \tau)d\theta_1 + d\beta_2 \wedge \theta_2 + \beta_2 d\theta_2 \\
&= \beta_{12}\theta_2 \wedge \theta_1 + (\beta_1 - \tau)\theta_{21} \wedge \theta_2 + \beta_{21}\theta_1 \wedge \theta_2 + \beta_2\theta_{12} \wedge \theta_1 \\
&= (-\beta_{12} + \beta_{21})\theta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 - \tau)\theta_{21} \wedge \theta_2 - \beta_2\theta_1 \wedge \theta_{12}.
\end{aligned}$$

Em seguida, observe que as equações (1.64) e (1.65) permite-nos deduzir que

$$\begin{aligned}
d\theta_{32}(e_1, e_2) &= \beta_{21} - \beta_{12} + (\beta_1 - \tau)\theta_{21}(e_1) - \beta_2\theta_{12}(e_2) \\
&= -\tau\theta_{21}(e_1) = \tau\tan\beta(2H + \beta_2).
\end{aligned}$$

Por outro lado, segue das equações (1.64) e (1.61) que

$$\theta_{13} \wedge \theta_{21}(e_1, e_2) = \tau\tan\beta(2H + \beta_2).$$

Portanto, temos a igualdade

$$d\theta_{23}(e_1, e_2) + \theta_{13} \wedge \theta_{21}(e_1, e_2) = 0,$$

que, juntamente com o Lema 1.6, nos dá a verificação da segunda equação em (1.63).

Por fim, verificaremos as igualdades

$$\nabla_{e_1} T = \nu(Se_1 + \tau Je_1) \text{ e } \nabla_{e_2} T = \nu(Se_2 + \tau Je_2).$$

Observe que

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} T &= \nabla_{e_1}(\cos \beta e_2) = -d\beta(e_1) \sin \beta e_2 + \cos \beta \theta_{21}(e_1) e_1 \\ &= \beta_1 \sin \beta J e_1 + (2H + \beta_2) \sin \beta e_1 \\ &= \nu(\beta_1 J e_1 + (2H + \beta_2) e_1). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Se_1 &= \langle Se_1, e_1 \rangle e_1 + \langle Se_1, e_2 \rangle e_2 = (2H + \beta_2) e_1 - (\tau - \beta_1) J e_1 \\ &= (2H + \beta_2) e_1 + \beta_1 J e_1 - \tau J e_1. \end{aligned}$$

Logo, $\nabla_{e_1} T = \nu(Se_1 + \tau J e_1)$. Analogamente, verifica-se $\nabla_{e_2} T = \nu(Se_2 + \tau J e_2)$. Além disso, um cálculo direto mostra que

$$d\nu(e_1) + \langle Se_1 + \tau J e_1, T \rangle = 0 \text{ e } d\nu(e_2) + \langle Se_2 + \tau J e_2, T \rangle = 0.$$

Portanto, estamos nas condições de aplicar o Teorema 4.3 em [19] e garantimos a existência de uma imersão isométrica de Σ em $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, que é única a menos de isometria. Note que H satisfaz a equação

$$2H\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_{13} \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \theta_{23},$$

mostrando que H é a curvatura média de tal imersão. □

Capítulo 2

Quase solitons de Ricci gradiente produto warped

Neste capítulo apresentaremos uma condição necessária e suficiente para que um produto warped admita estrutura de quase soliton de Ricci gradiente. Alguns resultados de existência e rigidez também são apresentados.

2.1 Preliminares

Nesta seção, apresentamos os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do presente capítulo. Basicamente, apresentamos a definição de quase solitons de Ricci, suas principais equações e uma breve revisão das principais propriedades dos produtos warped.

Os quase solitons de Ricci foram introduzidos por Pigola, Rigoli, Rimoldi e Setti [40], onde essencialmente os autores modificaram a definição de soliton de Ricci adicionando a condição sobre o parâmetro λ ser uma função. Mais precisamente, um quase soliton de Ricci é uma variedade diferenciável k -dimensional \mathbb{M}^k munida com uma métrica Riemanniana completa g junto com um campo de vetores tangentes $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^k)$ e uma função suave $\lambda : \mathbb{M}^k \rightarrow \mathbb{R}$ denominada de função soliton, satisfazendo

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \quad (2.1)$$

onde Ric e \mathcal{L} são, respectivamente, o tensor de Ricci e a derivada de Lie.

Além do artigo [40], uma série de resultados a cerca dessas variedades podem ser vistas, por exemplo, em Barros e Ribeiro [2].

Vamos nos referir a equação (2.1) como equação fundamental do quase soliton de Ricci $(\mathbb{M}^k, g, X, \lambda)$ que será chamado expansivo, estacionário ou contrátil, respectivamente, se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$.

Quando o campo vetorial X é o gradiente de alguma função suave $\psi : \mathbb{M}^k \rightarrow \mathbb{R}$ nos referimos a $(\mathbb{M}^k, g, \nabla\psi, \lambda)$ como um quase soliton de Ricci gradiente e ψ como função potencial. Neste caso a equação fundamental do quase soliton de Ricci é reescrita na forma

$$Ric + \nabla^2\psi = \lambda g, \quad (2.2)$$

onde $\nabla^2\psi$ é o Hessiano de ψ . Além disso, quando o campo vetorial X é nulo ou a função potencial ψ é constante, o quase soliton de Ricci será chamado *trivial*, caso contrário será chamado de um quase soliton de Ricci *não-trivial*. Notemos ainda que, quando $k \geq 3$ e X é um campo de vetores Killing um quase soliton de Ricci reduz-se a um soliton de Ricci.

Tomando o traço na equação (2.2) obtemos

$$R + \Delta\psi = k\lambda.$$

A próxima equação pode ser encontrada em Barros e Ribeiro [2]

$$d(R + |\nabla\psi|^2 - 2(k-1)\lambda) = 2\lambda d\psi.$$

Segue destas duas relações que

$$-2\lambda d\psi + d((2-k)\lambda + |\nabla\psi|^2 - \Delta\psi) = 0. \quad (2.3)$$

Outras generalizações de métricas tipo Einstein foram consideradas por Maschler em [28], onde a equação (2.2) é substituída pelo que o autor chamou de *equação tipo Ricci-Hessiano*, a saber,

$$Ric + \alpha\nabla^2\psi = \gamma g,$$

onde α e γ são funções suaves sobre a variedade diferenciável \mathbb{M}^k com métrica Riemanniana g . Uma vez que o autor em [28] está interessado em mudanças conformes de solitons de Ricci Kähler, que dá origem a uma nova métrica Kähler, a presença da função α é vital em sua investigação.

Ressalta-se que variedades diferenciáveis com métricas Riemannianas satisfazendo uma *equação tipo Ricci-Hessiano* são por si só bastante interessantes, por exemplo, a métrica da base de todo quase soliton de Ricci gradiente produto warped satisfaz uma equação tipo Ricci-Hessiano (ver Proposição 2.2).

O estudo de produtos warped tem sido de grande interesse ao longo dos últimos anos. Este conceito foi introduzido por Bishop e O’Neill em [6] e permitiu-lhes dar exemplos de variedades Riemannianas completas com curvatura seccional negativa.

Usando as notações e terminologias de Barret O’Neill [31], lembramos que: dadas duas variedades Riemannianas (B, g_B) e $(\mathbb{F}, g_{\mathbb{F}})$ assim como uma função suave positiva f sobre B , definimos sobre a variedade produto $\mathbb{M} = B \times \mathbb{F}$ a métrica

$$g = \pi^* g_B + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_{\mathbb{F}}, \quad (2.4)$$

onde π e σ são as projeções canônicas sobre B e \mathbb{F} , respectivamente. Sob estas condições a variedade produto $\mathbb{M} = B \times_f \mathbb{F}$ é chamada de *produto warped* de B e \mathbb{F} , a variedade B é a *base*, \mathbb{F} a *fibra* e f a *função warping*. Note que, quando f é constante, \mathbb{M} reduz-se ao produto Riemanniano usual.

Um exemplo particularmente interessante pode ser obtido a partir do Lema 1.1 de [40]. Segue deste lema que o produto warped

$$\mathbb{M} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^m$$

com a métrica $g = dt^2 + f^2 g_0$, onde $f(t) = \cosh t$, tem uma estrutura de quase soliton de Ricci $(\mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^m, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$, onde g_0 é a métrica canônica de \mathbb{H}^m e as funções envolvidas são os respectivos levantamentos de $\varphi(t) = \sinh t$ e $\lambda(t) = \sinh t - m$.

Este exemplo ilustra explicitamente o que foi dito na introdução a cerca dos quase solitons de Ricci e produtos warped estarem estreitamente relacionados. É importante lembrar que existem variedades que não admitem estrutura de quase soliton de Ricci; por exemplo, em [40], foi provado que a variedade produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ não tem uma tal propriedade.

Retomando nossas terminologias, denotaremos por $\mathfrak{L}(B)$ o conjunto de todos os levantamentos horizontais \tilde{X} , enquanto que o conjunto de todos os levantamentos verticais \tilde{V} será denotado por $\mathfrak{L}(\mathbb{F})$. De agora em diante, se $X \in \mathfrak{X}(B)$, quando não houver risco de confusão, usaremos a mesma notação para seu levantamento horizontal; similarmente para o levantamento vertical de $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{F})$ e também para os tensores.

Tal como no caso de um produto semi-Riemanniano as *fibras* $\{p\} \times \mathbb{F}$ e as *folhas* $B \times \{q\}$ são subvariedades Riemannianas de \mathbb{M} . Vetores tangente às folhas são ditos *horizontais* enquanto que vetores tangentes às fibras são *verticais*. Denotaremos por \mathcal{H} a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}\mathbb{M}$ sobre seu subespaço horizontal $T_{(p,q)}(B \times \{q\})$, e por \mathcal{V} a projeção sobre o subespaço vertical $T_{(p,q)}(\{p\} \times \mathbb{F})$.

Pelo Lema 34 de [31] o gradiente do levantamento $h \circ \pi$ de uma função suave h em B a \mathbb{M} é o levantamento do gradiente de h . Assim, não deve haver confusão se simplificarmos a notação

escrevendo \tilde{h} para $h \circ \pi$, de modo que o gradiente, o Hessiano e Laplaciano de \tilde{h} calculados na métrica de \mathbb{M} são denotados respectivamente por $\nabla\tilde{h}$, $\nabla^2\tilde{h}$ e $\Delta\tilde{h}$, onde $\Delta = \text{tr}(\nabla^2)$.

Denotaremos por D , ∇ e ${}^{\mathbb{F}}\nabla$ as conexões de Levi-Civita de \mathbb{M} , B e \mathbb{F} , respectivamente. Além disso, vamos escrever Ric , ${}^B\text{Ric}$ e ${}^{\mathbb{F}}\text{Ric}$ para o tensor de Ricci do produto warped, para o levantamento do tensor de Ricci de B e para o levantamento do tensor de Ricci de \mathbb{F} , respectivamente. Por fim, denotaremos por H^h o levantamento do Hessiano $\nabla^2 h$ e observe que para todo $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ temos $\nabla^2\tilde{h}(Y, Z) = H^h(Y, Z)$.

Os dois próximos Lemas são imprescindíveis para o que se seguirá.

Lema 2.1 ([31]). *Seja o produto warped $B^n \times_f \mathbb{F}^m$. Se $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(\mathbb{F})$, então*

- (i) $D_Y Z$ é o levantamento de $\nabla_Y Z$ sobre B ,
- (ii) $D_Y V = D_V Y = \frac{Y(f)}{f} V$,
- (iii) $\mathcal{H}(D_V W) = -\frac{g(V, W)}{f} \nabla f$,
- (iv) $\mathcal{V}(D_V W) \in \mathfrak{L}(\mathbb{F})$ é o levantamento de ${}^{\mathbb{F}}\nabla_V W$ sobre \mathbb{F} .

Em particular,

$$\Delta\tilde{h} = \Delta h + \frac{m}{f} \nabla h(f), \quad (2.5)$$

para toda função suave h sobre B .

Lema 2.2 ([31]). *Dado um produto warped $B^n \times_f \mathbb{F}^m$, $m > 1$, se $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(\mathbb{F})$, então*

- (i) $\text{Ric}(Y, Z) = {}^B\text{Ric}(Y, Z) - \frac{m}{f} H^f(Y, Z)$,
- (ii) $\text{Ric}(Y, V) = 0$,
- (iii) $\text{Ric}(V, W) = {}^{\mathbb{F}}\text{Ric}(V, W) - \left(\frac{\Delta f}{f} + \frac{|\nabla f|^2}{f^2}(m-1)\right)g(V, W)$.

2.2 Resultados Principais

Nesta seção demonstraremos nossos principais resultados, isto é, estabeleceremos as condições necessárias e suficientes para que um produto warped admita uma estrutura de quase soliton de Ricci. Nessa direção a proposição seguinte é de fundamental importância.

Proposição 2.1. *Seja $\mathbb{M} = B^n \times_f \mathbb{F}^m$ um produto warped e duas funções suaves $\psi \in C^\infty(\mathbb{M})$ e $\lambda \in C^\infty(B)$ tais que $(B^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla\psi, \tilde{\lambda})$ seja um quase soliton de Ricci gradiente, com $\mathcal{H}(\nabla\psi) \in \mathfrak{L}(B)$ e $\mathcal{V}(\nabla\psi) \in \mathfrak{L}(\mathbb{F})$. Então $\psi = \tilde{\varphi}$ para alguma função $\varphi \in C^\infty(B)$ e a equação*

$$-2\lambda d\varphi + d\left((2-m-n)\lambda + |\nabla\varphi|^2 - \Delta\varphi - \frac{m}{f}\nabla\varphi(f)\right) = 0, \quad (2.6)$$

é válida para as funções f , φ e λ definidas em B .

Demonstração. Segue do Lema 2.2 que para todo $Y \in \mathfrak{L}(B)$ e $V \in \mathfrak{L}(\mathbb{F})$ temos

$$\text{Ric}(Y, V) = 0. \quad (2.7)$$

Por outro lado, pela equação fundamental temos que

$$\text{Ric}(Y, V) = \lambda g(Y, V) - \nabla^2\psi(Y, V). \quad (2.8)$$

Segue de (2.7) e (2.8) que $g(D_Y\nabla\psi, V) = 0$ e como $\nabla\psi = \mathcal{H}(\nabla\psi) + \mathcal{V}(\nabla\psi)$, teremos

$$g(D_Y\mathcal{H}(\nabla\psi), V) + g(D_Y\mathcal{V}(\nabla\psi), V) = 0. \quad (2.9)$$

Uma vez que $\mathcal{H}(\nabla\psi) \in \mathfrak{L}(B)$, segue o item (i) do Lema 2.1 que $D_Y\mathcal{H}(\nabla\psi) \in \mathfrak{L}(B)$ e conseqüentemente a primeira parcela de (2.9) é igual a zero, reduzindo-se a

$$g(D_Y\mathcal{V}(\nabla\psi), V) = 0. \quad (2.10)$$

Agora, pelo item (ii) do Lema 2.1 teremos

$$0 = g(D_Y\mathcal{V}(\nabla\psi), V) = \frac{Y(f)}{f}g(\mathcal{V}(\nabla\psi), V) = Y(\ln f)g(\mathcal{V}(\nabla\psi), V) \quad (2.11)$$

de onde se conclui que $\nabla\psi \in \mathfrak{L}(B)$. Agora podemos concluir, pela unicidade do levantamento, que $\psi = \tilde{\varphi}$ para alguma função suave φ em B e isto prova a primeira afirmação da proposição.

De (2.3) temos

$$-2\lambda d\tilde{\varphi} + (2-m-n)d\lambda + d(|\nabla\tilde{\varphi}|^2) - d(\Delta\tilde{\varphi}) = 0. \quad (2.12)$$

Pelo Lema 34 e pela Proposição 35, ambos no Capítulo 7 de [31], temos, respectivamente, as seguintes igualdades:

$$\nabla\tilde{\varphi} = \widetilde{\nabla\varphi} \quad (2.13)$$

e

$$\Delta\tilde{\varphi} = \Delta\varphi + \frac{m}{f}\nabla\varphi(f). \quad (2.14)$$

Agora, substituindo (2.13) e (2.14) em (2.12) obtemos a equação (2.6) concluindo a prova da proposição. \square

Nas condições da proposição anterior, se um produto warped $B^n \times_f \mathbb{F}^m$ tem estrutura de quase soliton de Ricci gradiente, então, para alguma função suave φ em B , a equação fundamental pode ser escrita como $Ric + \nabla^2 \tilde{\varphi} = \tilde{\lambda}g$.

A próxima proposição nos fornece as condições necessárias para que um produto warped admita estrutura de quase soliton de Ricci gradiente.

Proposição 2.2. *Seja $B^n \times_f \mathbb{F}^m$, $m > 1$, um produto warped, φ e λ funções suaves em B tais que $(B^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla \tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ seja um quase soliton de Ricci gradiente. Então*

$${}^B Ric + H^\varphi = \lambda g_B + \frac{m}{f} H^f$$

e ${}^{\mathbb{F}} Ric = \mu g_{\mathbb{F}}$ com μ satisfazendo

$$\mu = \lambda f^2 + f \Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f \nabla \varphi(f).$$

Demonstração. Segue do item (i) do Lema (2.2) que

$$Ric(Y, Z) = {}^B Ric(Y, Z) - \frac{m}{f} H^f(Y, Z), \quad (2.15)$$

para todo $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$. Usando a equação fundamental e o fato que

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}(Y, Z) = H^\varphi(Y, Z)$$

deduzimos que

$${}^B Ric(Y, Z) = \tilde{\lambda} \pi^* g_B(Y, Z) - H^\varphi(Y, Z) + \frac{m}{f} H^f(Y, Z).$$

Isto prova a primeira parte da proposição.

Usando o (iii) do Lema (2.2) e a equação fundamental, obtemos

$${}^{\mathbb{F}} Ric(V, W) = \lambda g(V, W) - \nabla^2 \tilde{\varphi}(V, W) + \left(\frac{\Delta f}{f} + (m-1) \frac{|\nabla f|^2}{f^2} \right) g(V, W) \quad (2.16)$$

para todo $V, W \in \mathfrak{L}(V)$. Visto que $\nabla \tilde{\varphi} \in \mathfrak{L}(B)$ obtemos

$$\nabla^2 \tilde{\varphi}(V, W) = g(D_V \nabla \tilde{\varphi}, W) = g\left(\frac{\nabla \tilde{\varphi}(f)}{f} V, W \right) = f \nabla \varphi(f) g_{\mathbb{F}}(V, W). \quad (2.17)$$

Logo,

$${}^{\mathbb{F}} Ric(V, W) = (\lambda f^2 + f \Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f \nabla \varphi(f)) g_{\mathbb{F}}(V, W),$$

completando desta forma a prova da proposição. \square

Para o que segue, lembremos que podemos identificar qualquer $(0, 2)$ -tensor T sobre uma variedade Riemanniana (\mathbb{M}, g) com um $(1, 1)$ -tensor pela equação

$$g(T(Z), Y) = T(Z, Y),$$

para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$. Portanto, obtemos

$$\operatorname{div}(\varphi T) = \varphi \operatorname{div} T + T(\nabla \varphi, \cdot) \quad \text{e} \quad \nabla(\varphi T) = \varphi \nabla T + d\varphi \otimes T$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{M})$. Em particular, temos $\operatorname{div}(\varphi g) = d\varphi$.

As duas igualdades abaixo, são fatos gerais bem conhecidos da literatura

$$\operatorname{div} \nabla^2 \varphi = \operatorname{Ric}(\nabla \varphi, \cdot) + d\Delta \varphi \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} d|\nabla \varphi|^2 = \nabla^2 \varphi(\nabla \varphi, \cdot).$$

A partir de agora, estas identidades serão utilizadas sem maiores comentários. Na direção de construir quase solitons de Ricci gradiente realizados por produtos warped, a proposição seguinte é fundamental.

Proposição 2.3. *Seja (B^n, g) uma variedade Riemanniana onde estão definidas três funções suaves $f > 0$, λ e φ satisfazendo*

$$\operatorname{Ric} + \nabla^2 \varphi = \lambda g + \frac{m}{f} \nabla^2 f \tag{2.18}$$

e a equação (2.6) para constantes $m, c \in \mathbb{R}$, com $m \neq 0$. Então f , λ e φ satisfazem

$$\lambda f^2 + f \Delta f + (m - 1) |\nabla f|^2 - f \nabla \varphi(f) = \mu, \tag{2.19}$$

para uma constante $\mu \in \mathbb{R}$.

Demonstração. A ideia da prova é usar a segunda identidade de Bianchi contraída, a saber

$$\frac{1}{2} dS = \operatorname{div} \operatorname{Ric}. \tag{2.20}$$

Observemos que da equação (2.18) segue que

$$S = n\lambda + \frac{m}{f} \Delta f - \Delta \varphi,$$

onde S é a curvatura escalar de B . Logo,

$$dS = nd\lambda - \frac{m}{f^2} \Delta f df + \frac{m}{f} d(\Delta f) - d(\Delta \varphi) \tag{2.21}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} Ric &= d\lambda + m\operatorname{div}\left(\frac{1}{f}\nabla^2 f\right) - \operatorname{div}(\nabla^2\varphi) \\
&= d\lambda + m\left(\frac{1}{f}\operatorname{div}(\nabla^2 f) - \frac{1}{f^2}(\nabla^2 f)(\nabla f, \cdot)\right) - \operatorname{div}(\nabla^2\varphi) \\
&= d\lambda + \frac{m}{f}Ric(\nabla f, \cdot) + \frac{m}{f}d(\Delta f) - \frac{m}{2f^2}d(|\nabla f|^2) - Ric(\nabla\varphi, \cdot) - d(\Delta\varphi).
\end{aligned}$$

De (2.18) obtemos

$$Ric(\nabla f, \cdot) = \lambda df + \frac{m}{2f}d(|\nabla f|^2) - (\nabla^2\varphi)(\nabla f, \cdot)$$

e

$$Ric(\nabla\varphi, \cdot) = \lambda d\varphi + \frac{m}{f}(\nabla^2 f)(\nabla\varphi, \cdot) - \frac{1}{2}d(|\nabla\varphi|^2).$$

Deste modo

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} Ric &= d\lambda + \frac{m}{f}\left(\lambda df + \frac{m}{2f}d(|\nabla f|^2) - (\nabla^2\varphi)(\nabla f, \cdot)\right) + \frac{m}{f}d(\Delta f) \\
&\quad - \frac{m}{2f^2}d(|\nabla f|^2) - \left(\lambda d\varphi + \frac{m}{f}(\nabla^2 f)(\nabla\varphi, \cdot) - \frac{1}{2}d(|\nabla\varphi|^2)\right) - d(\Delta\varphi).
\end{aligned}$$

Uma vez que $d(\nabla\varphi(f)) = (\nabla^2\varphi)(\nabla f, \cdot) + (\nabla^2 f)(\nabla\varphi, \cdot)$, então teremos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} Ric &= d\lambda + \frac{m}{f}\lambda df + \frac{m(m-1)}{2f^2}d(|\nabla f|^2) - \frac{m}{f}d(\nabla\varphi(f)) + \frac{m}{f}d(\Delta f) - \lambda d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{2}d(|\nabla\varphi|^2) - d(\Delta\varphi). \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo as equações (2.21) e (2.22) na equação (2.20) temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{2-n}{2}d\lambda + \frac{m}{2f^2}\Delta f df + \frac{m}{2f}d(\Delta f) - \frac{1}{2}d(\Delta\varphi) + \frac{m}{f}\lambda df + \frac{m(m-1)}{2f^2}d(|\nabla f|^2) \\
&\quad - \frac{m}{f}d(\nabla\varphi(f)) - \lambda d\varphi + \frac{1}{2}d(|\nabla\varphi|^2). \tag{2.23}
\end{aligned}$$

De (2.6) temos

$$\lambda d\varphi = \frac{1}{2}d\left((2-m-n)\lambda + |\nabla\varphi|^2 - \Delta\varphi\right) - \frac{m}{2f}d(\nabla\varphi(f)) + \frac{m}{2f^2}\nabla\varphi(f)df,$$

que substituída em (2.23) e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{m}{2}d\lambda + \frac{m}{2f^2}\Delta f df + \frac{m}{2f}d(\Delta f) + \frac{m}{f}\lambda df + \frac{m(m-1)}{2f^2}d(|\nabla f|^2) \\
&\quad - \frac{m}{2f}d(\nabla\varphi(f)) - \frac{m}{2f^2}\nabla\varphi(f)df.
\end{aligned}$$

Multiplicando esta última equação por $\frac{2f^2}{m}$ obtemos

$$0 = f^2 d\lambda + \Delta f df + f d(\Delta f) + 2f \lambda df + (m-1)d|\nabla f|^2 - f d(\nabla\varphi(f)) - \nabla\varphi(f)df,$$

i.e.

$$d(\lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f)) = 0,$$

completando a assim a demonstração. \square

Ao tomar $m \geq 2$, inteiro, e usando as fórmulas de O'Neill's [31] construímos um quase soliton de Ricci gradiente realizado por produto warped como segue

Teorema 2.1. *Seja (B^n, g_B) uma variedade Riemanniana com três funções suaves $f > 0$, λ e φ satisfazendo (2.18) e (2.6). Tome a constante μ satisfazendo (2.19) e uma variedade Riemanniana $(\mathbb{F}^m, g_{\mathbb{F}})$ com tensor de Ricci ${}^{\mathbb{F}}Ric = \mu g_{\mathbb{F}}$ e $m > 1$. Então $(B^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ é um quase soliton de Ricci gradiente produto warped, onde $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$ e $\tilde{\lambda} = \lambda \circ \pi$.*

Demonstração. Pelas hipóteses sobre as funções f , λ e φ concluímos pela Proposição 2.3 que qualquer μ dada por (2.19) é constante. Agora, tomando uma variedade Einstein $(\mathbb{F}^m, g_{\mathbb{F}})$ com tensor de Ricci ${}^{\mathbb{F}}Ric = \mu g_{\mathbb{F}}$, podemos considerar o seguinte produto warped

$$(B^n \times_f \mathbb{F}^m, g = \pi^*g_B + (f \circ \pi)^2\sigma^*g_{\mathbb{F}}). \quad (2.24)$$

Vamos provar que esta variedade produto tem estrutura de quase soliton de Ricci. Primeiramente, observemos que segue de $H^\varphi(Y, Z) = \nabla^2\tilde{\varphi}(Y, Z)$, $H^f(Y, Z) = \nabla^2\tilde{f}(Y, Z)$, (2.15) e da hipótese (2.18) que a equação fundamental

$$Ric + \nabla^2\tilde{\varphi} = \tilde{\lambda}g.$$

é satisfeita para todo $Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$.

Agora, para $Y \in \mathfrak{L}(B)$ e $V \in \mathfrak{L}(\mathbb{F})$, pela Proposição 2.1, $\nabla\tilde{\varphi} \in \mathfrak{L}(B)$ implicando que $\nabla^2\tilde{\varphi}(Y, V) = 0$ e de (2.7), $Ric(Y, V) = 0$. Assim, a equação fundamental é novamente satisfeita.

Finalmente, para $V, W \in \mathfrak{L}(\mathbb{F})$ temos

$$Ric(V, W) + \nabla^2\tilde{\varphi}(V, W) = {}^{\mathbb{F}}Ric(V, W) - \left(\frac{\Delta f}{f} + (m-1)\frac{|\nabla f|^2}{f^2}\right)g(V, W) + g(D_V\nabla\tilde{\varphi}, W).$$

Como ${}^{\mathbb{F}}Ric = \mu g_{\mathbb{F}}$, temos pelo item (ii) da Proposição 35 of [31] que

$$Ric(V, W) + \nabla^2\tilde{\varphi}(V, W) = \mu g_{\mathbb{F}}(V, W) - \left(\frac{\Delta f}{f} + (m-1)\frac{|\nabla f|^2}{f^2}\right)g(V, W) + \frac{\nabla\tilde{\varphi}(f)}{f}g(V, W).$$

Substituindo (2.19) nesta última equação, obtemos

$$\begin{aligned} Ric(V, W) + \nabla^2\tilde{\varphi}(V, W) &= (\lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\tilde{\varphi}(f))\frac{1}{f^2}g(V, W) \\ &\quad - \left(\frac{\Delta f}{f} + (m-1)\frac{|\nabla f|^2}{f^2}\right)g(V, W) + \frac{\nabla\tilde{\varphi}(f)}{f}g(V, W) \\ &= \lambda g(V, W). \end{aligned}$$

concluindo desta forma a prova do Teorema. \square

Salientamos que a exigência de que a métrica $g_{\mathbb{F}}$ seja Einstein no teorema anterior é essencial e indispensável, cf. Proposição 2.2.

2.2.1 Aplicação

Um caso particularmente interessante ocorre quando tomamos como base de um produto warped o espaço Euclidiano munido de um métrica conforme à métrica canônica. Neste caso podemos construir soluções da equação (2.18) da forma $f(\xi) > 0$, $\varphi(\xi)$ e $\lambda(\xi)$, i.e. que depende somente de $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Sempre que $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0$, sem perda de generalidade, podemos considerar $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$. O próximo teorema prova um sistema de equações diferenciais ordinárias que é satisfeito por estas soluções.

Teorema 2.2. *Seja \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, o espaço Euclidiano com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e métrica $g_{ij} = \frac{1}{F(\xi)^2} \delta_{ij}$, onde $F(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Para quaisquer funções suaves $F(\xi)$ e $f(\xi) > 0$ podemos encontrar funções $\varphi(\xi)$ e $\lambda(\xi)$ satisfazendo (2.18) por*

$$(n-2) \frac{F''}{F} + \varphi'' + 2 \frac{F'}{F} \varphi' = \frac{m}{f} \left(f'' + 2 \frac{F'}{F} f' \right) \quad (2.25)$$

e

$$\frac{F''}{F} - (n-1) \left(\frac{F'}{F} \right)^2 - \frac{F'}{F} \varphi' = \frac{\lambda}{F^2} - m \frac{f'}{f} \frac{F'}{F}. \quad (2.26)$$

Demonstração. Uma vez que a métrica g é conforme à métrica canônica g_0 de \mathbb{R}^n , temos que

$$Ric_g = \frac{1}{F^2} \{ (n-2) F \nabla^2 F + (F \Delta F - (n-1) |\nabla F|^2) g_0 \} \quad (2.27)$$

onde os operadores que aparecem no segundo membro desta equação são calculados na métrica g_0 . Além disso,

$$(\nabla^2 f)_{ij} = f_{x_i x_j} + \frac{F_{x_j}}{F} f_{x_i} + \frac{F_{x_i}}{F} f_{x_j} \quad \text{for } i \neq j \quad (2.28)$$

$$(\nabla^2 f)_{ii} = f_{x_i x_i} + 2 \frac{F_{x_i}}{F} f_{x_i} - \sum \frac{F_{x_k}}{F} f_{x_k}. \quad (2.29)$$

Agora, vamos reescrever a equação (2.18), para $i \neq j$:

$$(n-2) \frac{F_{x_i x_j}}{F} + \varphi_{x_i x_j} + \frac{F_{x_j}}{F} \varphi_{x_i} + \frac{F_{x_i}}{F} \varphi_{x_j} = \frac{m}{f} \left(f_{x_i x_j} + \frac{F_{x_j}}{F} f_{x_i} + \frac{F_{x_i}}{F} f_{x_j} \right) \quad (2.30)$$

e para $i = j$,

$$\begin{aligned} & (n-2)\frac{F_{x_i x_i}}{F} + \frac{\sum F_{x_i x_i}}{F} - (n-1)\frac{F_{x_i}^2}{F^2} + \varphi_{x_i x_i} + 2\frac{F_{x_i}}{F}\varphi_{x_i} - \frac{\sum F_{x_k}\varphi_{x_k}}{F} \quad (2.31) \\ &= \frac{\lambda}{F^2} + \frac{m}{f}\left(f_{x_i x_i} + 2\frac{F_{x_i}}{F}f_{x_i} - \frac{\sum F_{x_k}}{F}f_{x_k}\right). \end{aligned}$$

Vamos usar um invariante por translação, olhando todas as funções como funções de

$$\xi = \sum \alpha_i x_i. \quad (2.32)$$

Assim, $F_{x_i} = F'\alpha_i$, $F_{x_i x_j} = F''\alpha_i\alpha_j$, etc. Logo, (2.30) e (2.31) são escritas como

$$(n-2)\frac{F''}{F}\alpha_i\alpha_j + \varphi''\alpha_i\alpha_j + 2\frac{F'}{F}\varphi'\alpha_i\alpha_j = \frac{m}{f}\left(f''\alpha_i\alpha_j + 2\frac{F'}{F}f'\alpha_i\alpha_j\right) \quad (2.33)$$

e

$$\begin{aligned} & (n-2)\frac{F''}{F}\alpha_i^2 + \frac{F''}{F}\sum \alpha_i^2 - (n-1)\left(\frac{F'}{F}\right)^2\sum \alpha_i^2 + \varphi''\alpha_i^2 + 2\frac{F'}{F}\varphi'\alpha_i^2 \quad (2.34) \\ &= \frac{F'}{F}\varphi'\sum \alpha_k^2 + \frac{\lambda}{F^2} + \frac{m}{f}\left(f''\alpha_i^2 + 2\frac{F'}{F}f'\alpha_i^2 - \frac{F'}{F}f'\sum \alpha_i^2\right). \end{aligned}$$

Como $n \geq 3$, podemos escolher esta invariância de modo que, pelo menos, dois índices i, j são tais que $\alpha_i\alpha_j \neq 0$ e $\sum \alpha_i^2 = 1$. Portanto, (2.33) e (2.34) podem ser reescritas, respectivamente, como segue

$$(n-2)\frac{F''}{F} + \varphi'' + 2\frac{F'}{F}\varphi' = \frac{m}{f}\left(f'' + 2\frac{F'}{F}f'\right), \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} & (n-2)\frac{F''}{F}\alpha_i^2 + \frac{F''}{F} - (n-1)\left(\frac{F'}{F}\right)^2 + \varphi''\alpha_i^2 + 2\frac{F'}{F}\varphi'\alpha_i^2 - \frac{F'}{F}\varphi' \quad (2.36) \\ &= \frac{\lambda}{F^2} + \frac{m}{f}\left(f''\alpha_i^2 + 2\frac{F'}{F}f'\alpha_i^2 - \frac{F'}{F}f'\right). \end{aligned}$$

Substituindo, (2.35) em (2.36), obtemos

$$\frac{F''}{F} - (n-1)\left(\frac{F'}{F}\right)^2 - \frac{F'}{F}\varphi' = \frac{\lambda}{F^2} - m\frac{f'}{f}\frac{F'}{F}, \quad (2.37)$$

o que conclui a demonstração. \square

Como aplicação do Teorema 2.1, temos o seguinte Corolário:

Corolário 2.1. *Seja \mathbb{R}^n o espaço Euclidiano com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ e métrica $g_{ij} = e^{2\xi}\delta_{ij}$, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $n \geq 3$. Considere uma variedade Riemanniana $(\mathbb{F}^m, g_{\mathbb{F}})$ com tensor de Ricci ${}^{\mathbb{F}}\text{Ric} = \mu g_{\mathbb{F}}$ e $m > 1$. Então $(\mathbb{R}^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ é um quase soliton de Ricci gradiente produto warped com fibra \mathbb{F} Ricci flat, onde*

$$f = e^\xi, \quad \varphi = \frac{c_1}{2}e^{2\xi} - \frac{(2-m-n)}{2}\xi + c_2 \quad e \quad \lambda = c_1 + \frac{(2-m-n)}{2}e^{-2\xi}$$

para algumas constantes c_1 e c_2 .

Demonstração. Para $F(\xi) = e^{-\xi}$ e $f(\xi) = e^{\xi}$ temos de (2.25) a seguinte EDO

$$\varphi'' - 2\varphi' = 2 - m - n,$$

cujas soluções é dada por

$$\varphi = \frac{c_1}{2}e^{2\xi} - \frac{(2 - m - n)}{2}\xi + c_2,$$

para constantes c_1 e c_2 .

Agora, de (2.26), segue que

$$\lambda = \frac{(2 - m - n)}{2}e^{-2\xi} + c_1.$$

Agora vamos mostrar que as funções f, φ, λ e F satisfazem a equação (2.6).

Um cálculo simples mostra que

$$2\lambda d\varphi = - \left(\frac{(2 - m - n)^2}{2}e^{-2\xi} - 2c_1^2e^{2\xi} \right) d\xi \quad (2.38)$$

e

$$(2 - m - n)d\lambda = -(2 - m - n)^2e^{-2\xi}d\xi. \quad (2.39)$$

Uma vez que $|\nabla\varphi|^2 = F^2(\varphi')^2$ deduzimos a seguinte igualdade

$$d(|\nabla\varphi|^2) = \left(2c_1^2e^{2\xi} - \frac{(2 - m - n)^2}{2}e^{-2\xi} \right) d\xi. \quad (2.40)$$

Notemos que $\Delta\varphi = F^2\varphi'' - (n - 2)FF'\varphi'$, e portanto

$$\begin{aligned} d(\Delta\varphi) &= d \left(e^{-2\xi}2c_1e^{2\xi} + (n - 2)e^{-2\xi} \left(c_1e^{2\xi} - \frac{(2 - m - n)}{2} \right) \right) \\ &= -(2 - n)(2 - m - n)e^{-2\xi}d\xi. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Como $\nabla\varphi(f) = F^2\varphi'f'$, temos que

$$d \left(\frac{m}{f} \nabla\varphi(f) \right) = m(2 - m - n)e^{-2\xi}d\xi. \quad (2.42)$$

Combinando as equações (2.39)-(2.42) temos que (2.6) é satisfeita. Finalmente, calculando μ , obtemos

$$\begin{aligned} \mu &= \lambda f^2 + f\Delta f + (m - 1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f) \\ &= \left(\frac{(2 - m - n)}{2}e^{-2\xi} + c_1 \right) e^{2\xi} + e^{\xi}(e^{-2\xi}e^{\xi} + (n - 2)e^{-2\xi}e^{\xi}) \\ &\quad + (m - 1)e^{-2\xi}e^{2\xi} - e^{\xi}e^{-2\xi}e^{\xi} \left(c_1e^{2\xi} - \frac{(2 - m - n)}{2} \right) \\ &= \frac{(2 - m - n)}{2} + c_1e^{2\xi} + 1 + (n - 2) + (m - 1) - c_1e^{2\xi} + \frac{(2 - m - n)}{2} = 0. \end{aligned}$$

A conclusão do Corolário segue do Teorema 2.1. □

2.2.2 Resultado de Rigidez

Como no caso de solitons de Ricci, quase solitons de Ricci realizados como produto warped, bem como variedades satisfazendo (2.18), apresentam uma certa rigidez. Isto é expresso pela trivialidade e um resultado de classificação. Por exemplo, considere o operador elíptico de segunda ordem dado por

$$\mathcal{E}(\cdot) := \Delta(\cdot) - \nabla\varphi(\cdot) + \frac{m-1}{f}\nabla f(\cdot). \quad (2.43)$$

Pela equação (2.19) temos que

$$\mathcal{E}(f) = \Delta f - \nabla\varphi(f) + \frac{(m-1)}{f}|\nabla f|^2 = \frac{\mu - \lambda f^2}{f}.$$

Deste modo podemos ver que um quase soliton de Ricci gradiente realizado por um produto warped $(B^n \times_f \mathbb{F}^m, g, \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$, $m > 1$, reduz-se a produto Riemanniano sempre que f atinge um mínimo e $\lambda \geq \frac{\mu}{f^2}$ (ou f atinge um máximo e $\lambda \leq \frac{\mu}{f^2}$), onde a existência de μ é assegurada pela Proposição 2.3, uma vez que pela Proposições 2.1 e 2.2 são válidas as equações (2.18) e (2.6) e o resultado segue pelo princípio do máximo forte.

Para o que segue, assumiremos que uma função f é limitada quando atinge um máximo e um mínimo.

Teorema 2.3. *Seja $\mathbb{M} = B^n \times_f \mathbb{F}^m$ um produto warped e duas funções suaves $\psi \in C^\infty(\mathbb{M})$ e $\lambda \in C^\infty(B)$ tais que $(B^n \times_f \mathbb{F}^m, \nabla\psi, \tilde{\lambda})$ seja um quase soliton de Ricci gradiente com $\lambda \leq 0$ e f limitada. Então \mathbb{M} reduz-se a um produto Riemanniano desde que $\lambda(p) \leq \lambda(q)$, onde p e q são os pontos de máximo e de mínimo de f , respectivamente.*

Demonstração. Se $\mathbb{M} = B^n \times_f \mathbb{F}^m$, $m > 1$, é um quase soliton de Ricci gradiente, então $\psi = \tilde{\varphi}$ e $Ric + \nabla^2\tilde{\varphi} = \tilde{\lambda}g$. Portanto, pela Proposição 2.2 temos ${}^F Ric = \mu g_F$ com

$$\mu = \lambda f^2 + f\Delta f + (m-1)|\nabla f|^2 - f\nabla\varphi(f). \quad (2.44)$$

Segue da Proposição 2.3 que μ é constante. Agora, sejam $p, q \in B^n$ os pontos onde f atinge seu máximo e seu mínimo em B^n . Então

$$\nabla f(p) = 0 = \nabla f(q) \quad \text{e} \quad \Delta f(p) \leq 0 \leq \Delta f(q).$$

Uma vez que $f > 0$ e $\lambda(p) \leq \lambda(q)$ temos $-\lambda(p)f(p)^2 \geq -\lambda(q)f(q)^2$ e combinando estas desigualdades com (2.44) obtemos

$$0 \geq f(p)\Delta f(p) = \mu - \lambda(p)f(p)^2 \geq \mu - \lambda(q)f(q)^2 = f(q)\Delta f(q) \geq 0.$$

$$\mu - \lambda(p)f(p)^2 = \mu - \lambda(q)f(q)^2 = 0. \quad (2.45)$$

Consideremos inicialmente o caso onde $\lambda(p) \neq 0$. Então a última equação implicará $\lambda(q) \neq 0$ e como $\lambda(p) \leq \lambda(q) < 0$, obtemos

$$f(p)^2 = \left(\frac{\lambda(q)}{\lambda(p)}\right)f(q)^2 \leq f(q)^2.$$

Logo, $f(p) = f(q)$, isto é, f é constante, e conseqüentemente, λ também é constante por (2.44).

Agora, se $\lambda(p) = 0$, por (2.45), $\lambda(q) = 0$ e $\mu = 0$. Deste modo, (2.44) implicará que

$$\mathcal{E}(f) = \Delta f - \nabla\varphi(f) + \frac{(m-1)}{f}|\nabla f|^2 = -\lambda f \geq 0.$$

Portanto, pelo princípio do máximo forte, f é constante e λ é nulo por (2.44). Em ambos os casos, \mathbb{M} é um produto Riemanniano. □

Bibliografia

- [1] AEBISCHER, B., BORER, M., KÄLIN, M., LEUENBERGER, Ch., REIMANN, H.M., *Symplectic Geometry*, An introduction based on the seminar in Bern 1992, Prog. Math. 124, 1994.
- [2] BARROS, A. e RIBEIRO, E., *Some characterizations for compact almost Ricci solitons*. Proc. Amer. Math. Soc. 140, 2012, 1033-1040.
- [3] BARROS, A., BATISTA, R. e RIBEIRO, E., *Rigidity of gradient almost Ricci soliton*. Illinois J. Math. 56 (4), 2012, 1267-1279.
- [4] BESSE, A., *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2008.
- [5] BIANCHI, L., *Gruppi continui e finiti*. Ed. Zanichelli, Bologna, 1928.
- [6] Bishop, R.L.; O'Neill, B., *Manifolds of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 145, 1969, 1-49.
- [7] BLAIR, D.E., *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progr. Math. 03, 2010.
- [8] BLAIR, D.E., *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math, 509, Springer-Verlag, 1976.
- [9] BOOTHBY, W.M. e WANG, H.C., *On contact manifolds*, Ann. of Math. 68 (2), 1958, 721-734.
- [10] BURSZTYN, H. e MACARINI, L., *Introdução a Geometria Simplética*, Minicourse at the XIV Brazilian School of Differential Geometry, Salvador, 2006.
- [11] CARTAN, É., *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier Villars, Paris, 1946.

- [12] CASE, J., SHU, Y. e WEI, G., *Rigidity of quasi-Einstein metrics*. Differential Geom. Appl. 29, 2011, 93-100.
- [13] CATINO, G., *Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic weyl tensor*. Math. Z. 271, 2012, 751-756.
- [14] CHOW, B., LU, P. e NI, L., *Hamilton's Ricci flow*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, Grad. Stud. Math. 77, 2010.
- [15] CARMO, M.P., *O Método do referencial móvel*, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [16] CARMO, M.P., *Formas Diferenciais e aplicações*, Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [17] CHERN, S.S. e HAMILTON, R.S., *On Riemannian metrics adapted to three-dimensional contact manifolds*, Lecture Notes in Math., 1111, Springer-Verlag, New York, 1985, 279-305.
- [18] CHEVALLEY, C., *Theory of Lie Groups I*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.
- [19] DANIEL, B., *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*, Comment. Math. Helv. 82, 2007, 87-131.
- [20] FUBINI, G., *Sugli spazi che ammettono un gruppo continuo di movimenti*. Ann. di Matem. Tomo 8, serie III, 1903, 39-82.
- [21] GOLDBERG, S.I., *Rigidity of positively curved contact manifolds*, J. London Math. Soc. 42, 1967, 257-263.
- [22] GOLDBERG, S.I. e TOTH, G., *Torsion and deformation of contact metric structures on 3-manifolds*, Tôhoku Math. J. 39, 1987, 365-372.
- [23] GOMES, J.N.V., *The Gaussian curvature via the contact angle of immersed surfaces into the Euclidean three sphere*, Diff. Geom. and its Appl. 31, 2013, 691-697.
- [24] GOMES, J.N.V. e CUI, N., *Rigidity of cmc surfaces in the Berger sphere*, Arch. Math. (Besel), 104, 2015, 289-300.
- [25] HE, C., PETERSEN, P. e WYLIE, W., *On the classification of warped product Einstein metrics*. Comm. Anal. Geom. 20 (2), 2012, 271-311.
- [26] KIM, D.S. e KIM, Y.H., *Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature*. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (8), 2003, 2573-2576.

- [27] MARTINET, J., *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Springer Lecture Notes in Math. 209, 1971, 142-163.
- [28] MASCHLER, G., *Special Kähler-Ricci potentials and Ricci solitons*. Ann. Global Anal. Geom. 34, 2008, 367-380.
- [29] MILNOR, J., *Curvature of left invariant metrics on Lie groups*, Adv. Math. 21, 1976, 293-329.
- [30] MONTES, R, Verderesi, J. A., *Minimal surfaces in S^3 with constant contact angle*. Monatshefte Math. 157, 2009, 379-386.
- [31] O'NEILL, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, London, 1983.
- [32] OGIUE, K., *On fiberings of almost contact manifolds*, Kôdai Math. Sem. Rep. 17, 1965, 53-62.
- [33] OGIUE K., *On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility*, Kôdai Math. Sem. Rep. 16, 1964, 223-232.
- [34] PERRONE, D., *Homogeneous Contact Riemannian three-manifolds*, Illinois J. Math. 42 (2), 1998.
- [35] PATRANGENARU, V., *Classifying 3 and 4 dimension homogeneous Riemannian manifolds by Caetan triples*, Pac. J. Math. 173 (2), 1996, 511-532.
- [36] PERRONE, D., *A remark on homogeneous contact five-manifolds*, Boll. Un. Mat. Ital. 7, 1989, 231-235.
- [37] PERRONE e VANHECKE, L., *Five-dimensional homogeneous contact manifolds and related problems*, Tôhoku Math. J. 43, 1991, 243-248.
- [38] PETERSEN, P., *Riemannian geometry*. New York, Springer-Verlag, Grad. Texts in Math. 171, 1998.
- [39] PETERSEN, P. e WYLIE, W., *On the classification of gradient Ricci solitons*. Geom. Topol. 14, 2010, 2277-2300.
- [40] PIGOLA, S., RIGOLI, M., RIMOLDI, M. e SETTI, A., *Ricci Almost Solitons*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) v.10, 2011, 757-799.

- [41] PINA, R. e SOUSA, M., *On Warped Product gradient Ricci solitons*. Results. Math., Springer International Publishing, 2016.
- [42] SAN MARTIN, B., *Álgebras de Lie*, 2ª edição, Editora Unicamp, 2010.
- [43] SASAKI, S., *Almost contact manifolds*, Lecture note, Tohoku Univ., 1965.
- [44] SASAKI e HATAKEIYAMA, Y., *On differentiate manifolds with contact metric structures*, J. Math. Soc. Japan, 14, 1962, 249-271.
- [45] SEKIGAWA, K., *On some three-dimensional curvature homogeneous spaces*, Tensor N.S. 31, 1977, 87-97.
- [46] SHARMA, R., *Almost Ricci solitons and K-contact geometry*. Monatsh. Math. 175, 2014, 621-628.
- [47] THURSTON, W.P., *Three-dimensional geometry and topology*. Princeton University Press, Volume 1, New Jersey, 1997.
- [48] TORRALBO, F., *Rotationally invariant constant mean curvature surfaces in Homogeneous 3-manifolds*, Diff. Geom. Appl. 5, 2010, 593-607.
- [49] TORRALBO, F. e URBANO, F., *On the Gauss curvature of compact surfaces in homogeneous 3-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (7), 2010, 2561-2567.
- [50] VRANCEANU, G., *Leçons de géométrie différentielle*. Ed. Acad. Rep. Pop. Roum., v.1, Bucarest, 1957.
- [51] WARNER, F.W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Grad. Texts in Math. 94, Springer, Berlin, 1983.
- [52] WOLF, J.A., *Sur la classification des varietes riemanniennes homogenes a courbure constante*, C. R. Acad. Sci. Paris, 250, 1960, 3443-3445.