UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA USANDO O GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO QUADRÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL II

ELVÉCIO PEREIRA LIMA

MANAUS- AM
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

ELVÉCIO PEREIRA LIMA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA USANDO O GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO QUADRÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL II

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Federal do Amazonas, para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, linha de pesquisa Tecnologias para Educação, Difusão e o Ensino de Ciências e Matemática.

ORIENTADOR: PROF. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira

MANAUS- AM

2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Lima, Elvécio Pereira

L732s Sequência Didática Usando o GeoGebra na Aprendizagam de Função Quadrática no Ensino Fundamental II / Elvécio Pereira Lima. 2016

162 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Disney Douglas de Lima Oliveira

Coorientador: Leandro de Oliveira Souza

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Função Quadrática. 2. GeoGebra. 3. Teoria das Situações Didáticas. 4. Registros de Representação Semiótica. I. Oliveira, Disney Douglas de Lima II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

ELVÉCIO PEREIRA LIMA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA USANDO O GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO QUADRÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL II

Aprovado em: 21 de Outubro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira (Presidente)

____

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral (Membro externo)

____

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira (Membro)

MANAUS- AM

2016

DEDICATÓRIA

- ✓ *Ao Deus Altíssimo a quem devo toda a honra e glória, a Jesus de Nazaré que me resgatou da vida de enganos, advogado fiel e justo, ao Espírito Santo que permaneceu neste mundo e intercede com gemidos inexprimíveis por todos nós;*
- ✓ *Aos meus pais biológicos Jonas Xavier de Lima (in memorian), Vitória Pereira Lima e aos meus pais adotivos Roberto Ferreira Marques e Marina Naveca Marques que me criaram e amaram;*
- ✓ *Ao presente de Deus! Jéfersa da Fonseca Ferreira, que quando a vi aos 10 anos, me encantei quando éramos ainda criança e me completou quando tinha 23 anos;*
- ✓ *Fruto deste grande Amor, as minhas filhas Amanda Lima e Samantha Lima, que sempre me veem como guerreiro, persistente, herói;*
- ✓ *As nossas famílias pelas orações e incentivos;*
- ✓ *Ao professor Disney Douglas, orientador deste trabalho, pelos seus conhecimentos, humildade, paciência e atenção a mim dispensado.*

AGRADECIMENTOS

- ✓ Ao professor Dr. **Saddo** Ag Almouloud PUC-SP, pelo incentivo, envio de materiais nos momentos que mais precisei não media esforço para me atender.
- ✓ A professora Dra. **Diana** Maia, pelas orientações preciosas, incentivo, atenção, nos momentos mais difíceis não mediu esforço para me atender.
- ✓ Ao professor Dr. **Leandro** Oliveira, pelo incentivo nos momentos iniciais que nos meus momentos turbulentos sempre me atendeu.
- ✓ Ao professor Dr. Luiz **Cerquinho**, por ter acreditado, incentivado e me levantado para que pudesse continuar a caminhada nos momentos incertos.
- ✓ Ao professor Dr José Luiz de Souza **Pio**, pela paciência e dedicação ao me incentivar a continuar.
- ✓ Ao professor Ms. **Anselmo** Domingos, pela dedicação e competência em exercer sua profissão, e sua colaboração nas informações sobre Função Quadrática.
- ✓ A todos os colegas do programa de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática que estiveram comigo nessa trajetória.
- ✓ As amigas Edilene Souza, Giskele Luz e aos amigos Rafael, Ricardo Souza, Nixon, Willam pela amizade, companheirismo e incentivo.
- ✓ A todos os professores do programa de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática que me apoiaram e me ajudaram a crescer profissionalmente.
- ✓ A coordenação do curso de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática pelo apoio e incentivo nessa trajetória.
- ✓ Ao diretor Maurício Teixeira da Escola Estadual Desembargador André Vidal Araújo e aos alunos participantes da pesquisa, pelo empenho e dedicação.

RESUMO

LIMA, E. P. **Sequência Didática Usando o GeoGebra na Aprendizagem de Função Quadrática no Ensino Fundamental II**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal do Amazonas. Manaus, 2016.

O objetivo deste trabalho é identificar e analisar os obstáculos didáticos da aprendizagem dos estudantes do ensino fundamental na construção do conhecimento sobre o conteúdo de função quadrática, visando a superação com uma sequência didática atrelada ao GeoGebra. Tomamos por hipótese de que somente a utilização da abordagem e atividades do livro didático, pode causar obstáculos didáticos e a aplicação de uma sequência didática, sobre função quadrática, voltada para os seus coeficientes e parâmetros com translações de modo dinâmico, contribuirá para a superação do obstáculo didático. Fundamenta-se nos princípios da Engenharia Didática com gerenciamento na elaboração, aplicação de uma sequência didática e confronto entre a análise *a priori* e *a posteriori* sobre a coleta de dados. Está embasada na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. A sequência didática orienta-se na pesquisa de Maia (2007) e um Trabalho de Duval (2011) Gráficos e equações: a articulação de dois registros. A ferramenta de ensino utilizada na sequência didática foi o GeoGebra, além do uso do papel e lápis. A sequência foi aplicada a um grupo de cinco estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental II de uma escola pública estadual na cidade de Manaus-Amazonas. Foram analisados os protocolos dos cinco estudantes que participaram de todas as atividades. Os resultados obtidos nos levam a concluir que foram identificados e analisados os obstáculos didáticos sobre função quadrática e que a sequência didática em conjunto com o Geogebra foi fundamental na superação destes obstáculos.

Palavra- chaves: Função Quadrática; GeoGebra. Teoria das Situações Didáticas; Registro de Representação Semiótica.

ABSTRACT

LIMA, E. P. Didactic Sequence Using GeoGebra in Quadratic Function Learning in Secondary School. Masters dissertation. Graduate Program in Science and Mathematics Teaching. Federal University of Amazonas. Manaus, in 2016.

The objective of this assignment is to identify and to analyze the didactic obstacles of learning from students of elementary school in the construction of knowledge about the content of a quadratic function, aiming to overcome with a teaching sequence linked to GeoGebra. We hypothetically only the use of approach and activities of the textbook, may cause learning obstacles in the application of a didactic sequence over quadratic function, focused on its coefficients and parameters of translations dynamically that will help to overcome of them. It is based on the principles of Didactic Engineering with management in the development, application of a didactic sequence and confrontation between the analysis a priori and a posteriori on data collection. It is grounded in the Theory of Didactic Situations from Brousseau and in the Theory of Semiotics Representation Registers from Raymond Duval. The didactic sequence is oriented in Maia's research (2007), and Duval's assignment (2011) charts and equations: the articulation of two records. The teaching tool used in the teaching sequence was GeoGebra,besides the use of paper and pencil. The sequence was applied to a group of five students from the 9th grade of elementary school II at a state public school in the city of Manaus, Amazonas. The protocols of the five students who participated in all activities were analyzed, and these achieved results lead us to conclude that the educational obstacles were identified and analyzed on quadratic function and the didactic sequence in conjunction with the Geogebra was essential in overcoming these challenges.

Word- keys: Function Quadratic; Theory of Didactic Situations; Semiotics Representation record.

Sumário

Lista de figuras

Lista de quadros

Lista de Protocolos

LISTA DE SIGLAS E ABREVIAÇÕES

AM: Amazonas

CAS: Sistema de Álgebra Computacional

DCN: Diretrizes Curriculares Nacionais

DGS: Softwares de Geometria Dinâmica

DMS: Software de Matemática Dinâmica

ENPEC: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação e Ciência

IDEB: Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

INEP: Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

LDBEN: Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional

MEC: Ministério da Educação e Cultura

PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais

PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

SADEAM: Sistema de Avaliação Educacional do Desempenho Educacional do Amazonas

TSD: Teoria das Situações Didáticas

TDA: Teoria Antropológica do Didático

Introdução

Pelas nossas experiências na carreira do magistério no ensino de Matemática é possível observar como ocorre a progressão dos estudantes do sexto até ao nono ano, e os seus resultados vêm trazendo certo desconforto para os educadores de matemática.

Percebemos que os estudantes têm sérias dificuldades na aprendizagem do conceito de função quadrática, pois, no primeiro ano do ensino médio, nas aulas de física os seus coeficientes são trabalhados de forma incisiva, porém, os estudantes se mostram angustiados em somente identifica-los, dificuldades mostradas também por outras pesquisas que envolvem esta questão.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais expõem que o papel da Matemática no ensino fundamental é fornecer aos estudantes mecanismos eficientes de compreensão, de interesse e de curiosidade para o desenvolvimento do espírito de investigação, bem como a capacidade de construir conhecimentos matemáticos.

Desta maneira, percebemos que há um fenômeno contraditório quando analisamos os resultados das avaliações externas expondo aprendizagem matemática preocupante, com as avaliações internas mostrando resultados promissores para aprendizagem matemática.

Motivados pelas circunstancias expostas buscamos a princípio investigar o processo evolutivo das escolhas didáticas institucionais para apresentação do objeto matemático aos estudantes.

Entrevistamos o profissional responsável pelo ensino de matemática no nono ano do ensino fundamental II na escola na qual o projeto foi aplicado, que gentilmente nos informou que fazia uso do livro didático institucional e complementava o assunto com outros livros, não fazendo uso de qualquer software matemático.

Analisamos os livros didáticos institucionais através da organização praxeológica proposta por Chevallar , onde conseguimos detectar obstáculos didáticos.

Buscando complementar estudos já realizados sobre função quadrática, nos orientamos em uma pesquisa elaborada por Maia (2007) sobre função quadrática uma abordagem computacional e um trabalho de Duval (2011) relativo a Gráficos e equações: a articulação de dois registros.

Esta pesquisa tem com objetivo identificar e analisar os obstáculos didáticos enfrentados pelos estudantes do último ano do ensino fundamental II e apresentar uma proposta, para superação destes obstáculos através de uma sequência didática validada por Maia (2007) em conjunto com uma ferramenta educacional o software GeoGebra além do lápis e papel.

Tal tecnologia se justifica pela socialização entre o aluno, o saber e o professor propiciando um “millieu” com Ação, Formulação, Validação e Institucionalização idealizada por Brousseau, dentro deste contexto, com a utilização do software foi possível verificar que ao variar os coeficientes da função quadrática ocorria uma mudança instantânea na representação gráfica, esta ação está em consonância com as ideias básicas do GeoGebra que é mostrar pelo menos duas representações do mesmo objeto matemático e do registro de representação semiótica de Duval que afirma que para apreensão do conceito são necessários a mudança de pelo menos dois registros de representação.

Nossa pesquisa segue a linha francesa da Didática da Matemática e a desenvolvemos sob os aspectos dos princípios da Engenharia Didática de Michèle Artigue.

Este trabalho foi organizado em quatro capítulos.

O capítulo I contemplou a problemática da pesquisa, objetivos e fundamentação teórica.

O capítulo II Análises prévias, englobou: um breve estudo histórico e epistemológico do conceito de função, as concepções possíveis dos estudantes, analisamos os documentos oficiais como PCNs e propostas curriculares, as estratégias dos livros didáticos para apresentar a função quadrática e os obstáculos didáticos pertinentes ao conceito de função quadrática gerados pelas abordagens dos livros didáticos.

O capítulo III ficou reservado para os procedimentos metodológicos.

O capítulo IV abrangeu a análise a priori para compreendermos as relações entre os estudantes, saberes aplicado e as situações propostas na sequência didática de acordo com a Teoria das Situações Didáticas, onde Margolinas em consonância com Brousseau buscou analisar a situação do estudante e professor com o estudo do Milieu das atividades e, finalmente, a experimentação, onde colocamos em prática a aplicação e descrição da sequência didática com a análise a posteriori da sequência para analisar e descrever todo o material envolvido na pesquisa.

E, por fim as considerações finais, onde destacamos as contribuições e a análise da pesquisa.

CAPÍTULO 1 Problemática da pesquisa

Neste capítulo, apresentaremos nossa problemática com a justificativa para a pesquisa, logo após a revisão bibliográfica de alguns trabalhos sobre funções que utilizaram software educacional, apresentaremos a nossa hipótese, questão de pesquisa, objetivos da pesquisa seguida da fundamentação teórica introduzindo a Teoria das Situações Didática de Guy Brousseau e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Justificativa

Pela experiência profissional de mais de vinte anos de magistério na educação básica, sendo três nesta escola onde será realizada a pesquisa, percebemos que o ensino-aprendizagem da matemática vem amargando números preocupantes com relação a qualidade do ensino de matemática, conforme podemos observar nos dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas (INEP) sobre a Escola Estadual. O município de Manaus, onde ocorreu esta pesquisa, apresentou os seguintes dados sobre o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB): em 2005, (2,8); em 2007 (4,0); em 2009 (2,1); em 2011 (3,3); e em 2013 (3,2) atingindo as metas desejadas somente em 2007 e 2011.

Em 2014 o Sistema de Avaliação e Desempenho do Estado do Amazonas (SADEAM) divulgou o resultado de 269 estudantes do 9º Ano desta escola na prova de matemática com 53,5 % abaixo do Básico, 33, 8 % no Básico, 11,2 % Proficiente e 1,5 % Avançado. Vê-se claramente que o ensino e a aprendizagem de matemática neste quadro estão comprometendo, em parte, diretamente os conhecimentos em outras disciplinas nas áreas de exatas em particular a ciências do ensino fundamental e física e química no ensino médio.

Em nossa experiência profissional nas ministrações das aulas de física do primeiro ano do ensino médio, especificamente nas aulas de movimento uniformemente variado, os alunos apresentam dificuldades com a função do espaço em relação ao tempo, que é uma **função quadrática**[1]. Nesta pesquisa buscaremos identificar e analisar os obstáculos didáticos e através de uma sequência didática buscar superação destes

---

[1] Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, onde a, b e c são números reais e a ≠ 0.

obstáculos para apropriação do conceito de função quadrática por se tratar de uma temática relevante na construção do conhecimento na Matemática e Física.

A concepção de função quadrática, necessária para ter desempenho adequado no 1º ano do ensino médio, tem sido tema de preocupações entre os pesquisadores. Silva (2012) relata em seu trabalho que alunos progridem aos níveis subsequentes, porém, lhes faltam bases para sua evolução no conteúdo, trazendo consequências que podem dificultar o caminho do discente.

Conforme o exposto torna-se um grande desafio na esfera educacional buscar soluções que consigam reverter a atual situação. A **sequência didática**[2] em conjunto com o Software **Geogebra**[3], tecnologia voltada para o ensino de matemática e ferramenta auxiliar, contribui para um processo de humanização do conhecimento, haja vista que a aplicação das metodologias tradicionais vêm mostrando resultados pouco atrativos.

Vale ressaltar que esta proposta de incluir as tecnologias de informação e de comunicação pode agir de forma positiva diretamente em três fatores coadjuvantes para o aumento do rendimento escolar: na diminuição da evasão escolar, supostamente devida as ministrações de aulas tradicionais; na distorção idade/série em virtude dos compromissos sociais e, por fim, na relação "professor versus aluno", uma vez que jovens estudantes, por fazerem parte da "geração tecnológica", podem ser capazes de executar várias tarefas tecnológicas em uma fração de tempo muito curta, e utilizando das próprias tecnologias para hostilizar as aulas mais conservadoras.

Ao realizarmos um teste diagnóstico em novembro de 2015 para termos a noção das concepções dos estudantes do nono ano do ensino fundamental sobre função quadrática, constatamos que apenas um estudante dentre dezoito tinha noções básicas do objeto matemático estudado por eles cerca de dois meses antes. Constatamos então que os estudantes possuíam obstáculos didáticos, conforme preconiza Guy Brousseau.

Foram constatados, obstáculos didáticos, para a identificação e representação da função quadrática, de reconhecimento e interpretação do papel de seus coeficientes, assim como das translações verticais e horizontais dos gráficos, que no nosso

---

[2] Se realizamos uma análise destas sequências buscando os elementos que as compõem, nos daremos conta de que são um *conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos (ZABALA 1998. Pg. 18).*

[3] O GeoGebra é um *software* educacional de geometria dinâmica, livre e com código aberto, desenvolvido por Markus Hohenwarter em sua tese de mestrado na Universidade de Salzburg na Áustria (http://www.geogebra.org).

entendimento, comprometem a interpretação global das representações gráficas e algébricas. Surgem então, dois questionamentos: somente a utilização da abordagem e atividades do livro didático pode causar obstáculos didáticos? Nos livros didáticos, não foi sugerido que fosse utilizado nem mesmo um software matemático como ferramenta auxiliar, para agregar valores ao aprendizado, então, a passagem da linguagem algébrica para a linguagem gráfica através da tecnologia lápis e papel, que é predominante nos livros didáticos e enfatizada em sala de aula, poderia ser complementada com sucesso pelo software GeoGebra para a interpretação global das representações gráficas e algébricas da função quadrática?

A nossa pesquisa tem grande relevância principalmente na área da Física, pois, aos estudantes poderá ser disponibilizada uma nova ferramenta de ensino e aprendizagem como alternativa de suporte ao livro didático, para superar obstáculos didáticos: uma sequência didática em conjunto com um software educacional, que apresentará uma abordagem de interpretação global das propriedades figurais, como melhor forma de adquirir conhecimentos sobre os conceitos de função quadrática.

Abar (2012) apresenta as pesquisas desenvolvidas entre 2009 e 2011 que fizeram uso do software educacional GeoGebra no Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, analisando as teorias empregadas, as recomendações, assim como, a utilidade deste software e resultados. A autora verificou que, dos dezenove trabalhos pesquisados, sete trabalharam em conjunto com a Teoria das Situações Didáticas. Ela afirmou que o GeoGebra pode ser um instrumento alternativo na busca de situações didática para superar possíveis obstáculos no ensino de matemática.

Também afirmou que a vantagem do GeoGebra dentre outros softwares de geometria dinâmica (DGS) é que ele possui características inerentes ao Sistema de Álgebra Computacional (CAS) pois abrange trabalhos com geometria, álgebra e cálculo, atingindo todos os níveis da educação escolar, tanto que seu desenvolvedor lhe classificou como um Software de Matemática Dinâmica (DMS), e a ideia básica do software é possibilitar pelo menos duas representações para cada objeto matemático em suas janelas de visualizações, o que corrobora para o desenvolvimento do nosso trabalho, pois, Duval (2011) afirma que para a aprendizagem de um objeto matemático são necessárias pelo menos duas representações simultâneas de um mesmo objeto, que em nosso caso será a função quadrática.

A autora também afirma que o fato principal para as escolhas das Teorias das Situações Didáticas em conjunto com o software GeoGebra são as interações que podem ser desenvolvidas entre professor e alunos conectados pelo saber, situação que pode ser perfeitamente modelada pela TSD.

Dentro deste modelo, ela afirma que ocorrem as quatro situações que norteiam as interações em sala de aula:

> As quatro situações acima mencionadas podem ser identificadas nos trabalhos analisados e, em geral, nas situações de ação os sujeitos das pesquisas interagem com o *software* GeoGebra por meio dos movimentos dos objetos construídos. Nas situações de formulações, os participantes observam os resultados na janela algébrica, elaboram conjecturas ou conversam entre si sobre hipóteses de resolução. Nas ações de validação, eles compreendem o conceito explorado e validam as hipóteses levantadas. As ações de institucionalização foram realizadas pelo professor pesquisador em interação com os pesquisados (ABAR, 2012, p.5).

Foi concluido neste artigo que, nestes trabalhos analisados, as tecnologias utilizadas como lápis, papel, calculadora, foram coadjuvantes, e que os pesquisadores exploraram as atividades inerentes aos objetivos destas e as mesmas não devem ser descartadas. Quanto às explorações nos aspectos gráficos na função o *software* GeoGebra tornou-se uma estratégia poderosa que culminou nos alcances dos objetivos que se propuseram de forma positiva, sendo o aporte teórico fundamental em consonância com o GeoGebra para as interações em sala de aula, buscando novos caminhos para superação de obstáculos na matemática.

Pelho (2003) ao desenvolver o seu trabalho "Introdução ao conceito de função" enfatiza a importância da compreensão das variáveis dependentes e independentes e as suas relações, pois, pela sua prática docente e estudos relacionados à sua pesquisa constatou que os estudantes iniciam seus estudos no Ensino Médio sem o conhecimento necessário ao conceito de função, que possivelmente pode ser em decorrência da eliminação nos livros da dependência funcional sendo substituído pela relação entre os elementos de dois conjuntos omitindo a ideia intuitiva de dependência ou variação acarretando a não compreensão do conceito de função.

Em seu trabalho ficaram evidenciadas também as dificuldades das passagens do registro algébrico para o registro gráfico e vice-versa, e que possivelmente isto ocorra pelo formalismo existente para tratar o conceito de função. Desta maneira, podemos inferir que estamos diante de um obstáculo didático nos moldes de Brousseau.

Pelho (2003) criou uma sequência didática sobre o conceito de função auxiliada por uma ferramenta tecnológica chamada Cabri-Géométrè II que auxiliou os estudantes uma terem uma compreensão mais abrangente das variáveis da função além dos seus relacionamentos, ajudando nas articulações entre os registros de representações das funções.

Neste trabalho, Pelho (2003) constatou que os estudantes do ensino médio e do superior não compreendiam o conceito de função em virtude da não compreensão das variáveis e dos relacionamentos entre as mesmas, gerando possivelmente uma aprendizagem puramente mecânica de construção de tabela e gráficos.

Maia (2007), em seu trabalho "Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional", pesquisou sobre a construção gráfica da função quadrática através da interpretação global das propriedades figurais, inserindo uma forma lúdica para abordar as noções de intervalo, assim como domínio da função. Seu objetivo era complementar os estudos de Funções usando a ferramenta computacional Winplot.

Foi percebido que os estudantes tiveram dificuldades em enxergar o gráfico de uma forma completa na ausência do software. Além da construção do gráfico, também foi detectado que os estudantes tiveram dificuldades na quarta atividade em passar da linguagem natural para linguagem algébrica e posteriormente para a gráfica.

Ardenghi (2008), no seu trabalho "Ensino Aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil", buscou compreender as dificuldades que os estudantes possuíam a respeito do conceito de função. Em suas experiências e estudos relacionados, podemos destacar Simões (*apud* Ardenghi 2008, p. 36), onde foram expostos os obstáculos didáticos da função quadrática, relacionados ao conceito e a construção da representação gráfica.

Em nossa pesquisa foi percebido que quando o livro didático revela a preferência da passagem de registro da representação algébrica para a gráfica, há possibilidade de geração de obstáculo didático quando o estudante busca a passagem da representação gráfica para algébrica.

Duval (2011) em "Gráficos e equações: a articulação de dois registros" afirma que para a leitura das representações gráficas, é imprescindível diferençar e especificar as variáveis visuais (concavidade, abertura da parábola, posição do vértice em relação aos eixos x e y). Duval também afirma que os estudantes devem ter conhecimento de implicações das correspondências entre as variáveis visuais dos gráficos e suas alterações na escrita algébrica. Em suma, são necessárias as passagens de pelo menos dois registros de representação semiótica para construir o conhecimento matemático, sendo desta maneira a interpretação global das propriedades figurais, uma forma diferenciada de construir o conhecimento da função quadrática.

Portanto, nos apoiaremos no trabalho de Maia (2007) que abordou a construção gráfica da função quadrática fazendo uso do procedimento de interpretação global das propriedades figurais e ainda inserindo uma forma lúdica com o *software* Winplot para introduzir noções de intervalo de domínio da função quadrática e, também, sugerindo o desenvolvimento de trabalhos que articulassem as passagens do registro de representação semiótica da forma algébrica para a forma gráfica e vice-versa. Igualmente será muito importante nos basearmos no trabalho de Duval (2011), que propõe uma alternativa para superar obstáculos didáticos produzidos pelo procedimento ponto a ponto, que é a abordagem de interpretação global de propriedades figurais:

> Com esta abordagem **não estamos mais na presença da associação "um ponto - um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica".** Quando se trata de partir da representação gráfica para encontrar, por exemplo, a equação correspondente ou para utilizar o conceito de inclinação ou de direção, é esta abordagem de interpretação global que se torna necessária. A razão disto se deve ao fato de que o recurso à abordagem ponto a ponto é totalmente inoperante uma vez que tira a atenção das variáveis visuais. A prática sistemática da abordagem ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global que é em geral deixada de lado **no ensino** uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica. Compreende-se porque a maioria dos alunos fica aquém de uma utilização correta das representações gráficas (DUVAL, 2011. Pg. 99).

Em nosso trabalho, após estudos preliminares, buscamos reexaminar a introdução de função quadrática no ensino fundamental, apoiada em livros didáticos que priorizam o procedimento ponto a ponto causador de obstáculos didáticos.

A nossa pesquisa vem complementar os estudos de Maia (2007), que abordou a construção gráfica da função quadrática utilizando o procedimento da interpretação global das propriedades figurais. Privilegiando a forma canônica da função quadrática $y = a(x+m)^2 + n$, Maia destacou quatro variáveis visuais. Nosso trabalho foi proposto no sentido de analisar os obstáculos didáticos e observar também a forma estruturada da função $y = ax^2 + bx + c$, acrescentando assim, mais duas unidades simbólicas correspondentes, para os coeficientes b e c, fazendo a comparação entre as funções.

Aspiramos examinar a hipótese de que somente a utilização da abordagem e atividades do livro didático, pode causar obstáculos didáticos e a aplicação de uma sequência didática, sobre função quadrática, voltada para os seus coeficientes e parâmetros com translações de modo dinâmico, contribuirá para a superação do obstáculo didático.

A nossa pesquisa seguirá as seguintes questões norteadoras:

A sequência didática em conjunto com o GeoGebra contribuirá para conversão da linguagem algébrica para linguagem gráfica das funções quadráticas?

Após a execução da sequência didática os estudantes compreenderão o papel dos coeficientes e relacionarão com as representações algébricas e gráficas?

Desta maneira, aplicaremos a sequência didática sobre função quadrática. Visando à abordagem da interpretação global, partiremos da variável micro didática $y = ax^2$, portanto, uma função quadrática incompleta, até que se chegue às funções completas conforme as representações algébricas $y = ax^2 + bx + c$ e $y = a(x+m)^2 + n$, que entendemos possuir todas as informações necessárias para observarmos que, variando as unidades simbólicas na representação algébrica usando o GeoGebra implica-se automaticamente na alteração das variáveis visuais na representação gráfica.

Dentro deste contexto, pretendemos responder a nossa questão de pesquisa: de que forma o uso da sequência didática sobre função quadrática com o GeoGebra contribui para superar obstáculos didáticos?

O objetivo geral

Identificar e analisar os obstáculos didáticos da aprendizagem dos estudantes do ensino fundamental na construção do conhecimento matemático, especificamente sobre o conteúdo de função quadrática, visando a superação com uma sequência didática atrelada ao GeoGebra.

Objetivos específicos

- Dimensionar a inserção do conteúdo matemático de função quadrática nos parâmetros curriculares e no Livro Didático de Matemática do ensino fundamental II;
- Caracterizar os conhecimentos prévios as concepções dos estudantes e obstáculos acerca da função quadrática;

- Analisar o desenvolvimento da sequência didática com auxílio do GeoGebra sobre funções quadráticas, visando refletir sobre as situações de aprendizagem dos estudantes do 9º ano do ensino fundamental.

1.1 Fundamentação teórica

1.1 1 Teoria das Situações Didáticas

Nossa pesquisa tem como referência a didática francesa, pois, a França, assim como o Brasil, enfrentou dificuldades na educação na década de cinquenta no século XX. Com necessidades de mudanças no ensino de matemática no cenário internacional, surgiu o Movimento da Matemática Moderna, que buscava resgatar a matemática ensinada na escola com a que era produzida por pesquisadores, para haver uma conexão entre estudantes e tecnologia produzida.

Inseridas neste contexto surgiram às pesquisas em Didática da Matemática, pois, os pesquisadores franceses se incomodaram com a situação e buscaram estudar e investigar os problemas relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática. Com a complexidade dos estudos surgiu a necessidade de modelizar as situações, como forma de caracterizar tanto o conhecimento como os saberes e suas evoluções, assim, a "didática da Matemática" é vista como uma ciência que tem por objeto investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da matemática e o estudo de condições que favorecem a sua aquisição pelos alunos." (ALMOULOUD, 2007, p. 17).

Para solucionar este problema será empregada a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau:

> Pessoalmente, e em primeiro lugar, quero propiciar a reflexão sobre as relações entre os conteúdos do ensino e os métodos educacionais. Depois, e de forma mais ampla, pretendo abordar a didática como de pesquisa cujo objeto é a comunicação dos conhecimentos matemáticos e suas transformações (BROUSSEAU. 2008. p. 16).

O processo de ensino da matemática ainda preponderante, analisado sob o aspecto contemporâneo na educação e enfatizado por Oliveira (1997, p.6), dá-se da seguinte maneira, o professor expõe o conteúdo no quadro, desenvolve um exercício modelo e, a partir daí, o aluno resolve vários problemas e faz-se uma avaliação. Caso o aluno não tenha assimilado a matéria, o professor deve fazer uma série de avaliações até que se convença da aquisição do conhecimento. O ensino tem muito mais a oferecer, o conteúdo deve estar contextualizado, dando significado conclusivo para o uso no dia-a-dia.

Brousseau (2008) questionava-se: dentro de uma sociedade, que conhecimentos matemáticos são fundamentais para a construção de uma sociedade futurista, que possa ser assistida por profissionais com conhecimentos técnicos e científicos? E até que ponto essa sociedade depende dos métodos para a aquisição dos conhecimentos matemáticos para serem bem sucedidos?

Sob estes aspectos cria-se um modelo centrado no aluno para aquisição desses conhecimentos:

> Se considerarmos o ensino como “projeto e ação social em que um aluno se apropria de um saber constituído ou em constituição”, a didática da matemática transforma-se na “ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos úteis aos homens e a suas instituições”. (BROUSSEAU, 2008, pg. 53).

Assim, para Brousseau (2008, pg. 21), “... a **situação didática** é todo o contexto que **cerca o aluno**, nele incluídos **o professor** e **o sistema educacional**.” (grifo nosso).

Desta forma, a proposta deste trabalho na sua execução foi aplicar uma sequência didática sobre função quadrática usando como ferramenta o *software* GeoGebra, colocando as equipes de voluntários participantes em Situação de Ação, Formulação, Validação e Institucionalização das situações conforme propõe Guy Brousseau.

Dentro do contexto das situações propostas por Guy Brousseau os sujeitos tendem a adaptar-se conforme as situações que lhes são apresentadas. Neste momento, se revelará o que chamou de *obstáculos* que é a impossibilidade momentânea de construir um novo conhecimento, às vezes, exposto pelos *“erros”* conforme (ALMOULOUD. 2007. p. 135) afirma:

> Na visão de Brousseau (1983), os obstáculos se manifestam pela incapacidade de compreender certos problemas, de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para serem superados, deveriam conduzir à instalação de um novo conhecimento. Por consequência, o erro é considerado necessário para:
>
> - desencadear o processo da aprendizagem do aluno;
> - o professor situar as concepções do aluno e, eventualmente, compreender os obstáculos subjacentes;
> - o professor adaptar a situação didática.

A noção de obstáculo neste trabalho se revela importante, haja vista que, a experimentação da sequência didática sobre função quadrática na sala de aula com o Geogebra ou em qualquer outro contexto de aprendizagem da matemática, é condição necessária à luz desta teoria para a aquisição de conhecimento mais completo com o fito de superar esses obstáculos surgidos. Assim se pronunciou Almouloud (2007. p. 135/136):

> Assim, a importância da noção de obstáculo se justifica, de um lado, porque a aprendizagem por adaptação, que permite dar sentido aos conceitos, em geral pode produzir simultaneamente concepções inadequadas e conhecimentos locais que devem ser rejeitados ou transformados por um trabalho cognitivo eficiente; por outro, porque esses nós de resistência, os obstáculos, necessitam de construção de situações adequadas. **Nesse sentido, a construção de engenharias didáticas torna-se um dos meios eficazes para permitir a superação desses obstáculos pelos alunos** (grifo nosso).

A teoria das situações didáticas ensina que o pesquisador ou docente elabora um artefato para ministrar um objeto matemático e ter sob sua guarda os conhecimentos conquistados, e tal artefato engloba, por exemplo, uma sequência didática, que necessita de um manual para interação, porém, somente a própria busca pela solução poderá gerar uma consequência de ensino, pois o sujeito deve se adaptar a uma nova situação no meio. Para Almouloud:

> Dessa forma, o objetivo da *teoria das situações* é caracterizar um processo de aprendizagem por uma séria de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa.
> O objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber (2007, pg. 31/32).

Para manifestar o conhecimento e as particularidades dos comportamentos dos alunos nas situações que lhe são impostas, Brousseau (2008) tomou como exemplo a lição “Quem vai dizer 20?” caracterizando suas fases e a partir desta fez uma descrição geral e classificou as situações didáticas em fases. Primeiro, a fase “Situação de ação”, na qual os participantes estão na linha de frente analisando e propondo números para jogada e conforme o aluno se desenvolve na partida, ganha novos elementos mais eficazes para solução vencedora. Assim, ao propormos a sequência didática o estudante, ao conhecer o problema, tomará decisões que podem ser corretas ou não, refinando suas ações através dos seus conhecimentos prévios. Neste momento ele desconhece se sua decisão foi a melhor para a solução do problema.

Na segunda fase - “Situação de formulação” - para Brousseau (2008) ocorrem dois momentos distintos. No primeiro momento aparece uma situação na qual um participante fica em situação de ação e outro colhe dados gerais que lhes possam ser úteis; no segundo momento ocorre uma socialização e análise da melhor estratégia para solução vencedora. Nesta fase o *meio* revela-se como o conjunto das experiências adquiridas durante as partidas, em especial a última. Nesta fase o professor espera que o estudante coloque em prática seus conhecimentos, justificando e socializando sua estratégia para solucionar o problema.

Na terceira, a “Situação de validação”, as equipes podem apresentar e sustentar uma proposta convicta para solução verdadeira ou tentar mostrar que a proposta do adversário não é a solução verdadeira e, finalmente, a quarta e última fase, a da “Institucionalização”, na qual os professores procuram mostrar a eficácia ou não. Nesta fase o professor verifica se o estudante se apropriou do conhecimento matemático e se é possível aplicar em outras situações antes dar seguimento ao próximo objeto matemático até mesmo como satisfação ao sistema educacional.

Seguindo este modelo na aplicação da sequência didática sobre função quadrática, o aluno é instigado a produzir ações diretas, onde procure interações, articulações, ideias, questionamentos e reflexões para haver avanço no conhecimento ao ponto em que o mesmo possa utilizá-lo no cenário extraescolar onde ficará caracterizada uma *situação adidática*, e que é enfatizado por Almouloud:

> A situação adidática, como parte essencial da situação didática, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar (2007, pg. 33).

Desta forma o contrato didático aparece como uma relação imprescindível da situação didática, pois uma relação de ensino-aprendizagem exige um *millieu* propício ao estado de paz interior de busca pelo desconhecido, um compromisso pessoal entre as partes envolvidas. Assim, Almouloud destaca:

> Podemos destacar nas afirmações de Brouseau três observações importantes:
> a) As relações entre o professor e o aluno dependem de um projeto social que impõe a todos e são regidos por várias regras e convenções que, em sua maioria, não colocam em jogo, de forma sistemática, o saber...
> b) O funcionamento do contrato didático depende de diferentes contextos de ensino e de aprendizagem. As escolhas pedagógicas, o tipo de trabalho proposto para os alunos, os objetivos de formação...
> c) O contrato didático tem por objetivo, fundamentalmente, a aquisição de saberes pelos alunos;
> d) Um contrato didático mal administrado, por parte do professor ou do aluno, pode ser a fonte de dificuldades para a aprendizagem de novos conhecimentos matemáticos... (2007, pg. 90).

Neste contexto, o contrato didático emerge como um conjunto de regras bem definidas e esperadas pelos sujeitos envolvidos na situação didática, para que haja uma reciprocidade favorável à aquisição de novos conhecimentos e horizontes. Porém, quando há dificuldades de gerenciamento no contrato didático, seja pelo professor ou aluno, podem surgir obstáculos na apropriação do conhecimento e consequentemente manifestar seus efeitos.

Dentre vários efeitos, destacamos três segundo Almouloud (2007):

1) O efeito "Topaze e comprovação da incerteza", que ocorre quando o estudante em oposição a um obstáculo se retrai e o professor requer a responsabilidade do estudante para si, elaborando perguntas direcionadas e respostas acabadas tornando o conhecimento pretendido nulo.
2) O efeito "Jourdain ou o equívoco fundamental" que, para ser simpático ou generoso com um determinado aluno, o professor aceita a sua opinião ou questionamento se omitindo de um possível confronto de ideias, aceitando seu possível "conhecimento científico" como verdadeiro, enraizando e propagando este equívoco e tornando-o um obstáculo didático.
3) O efeito "O deslize metacognitivo", quando o professor, pela sua experiência profissional ou falta, prioriza uma determinada técnica, para explicar ou resolver um problema, e desvia a construção do saber por ele objetivado.

Segundo Almouloud (2007), outro aspecto importante na Teoria das situações Didáticas e a noção de “*milieu*"

> ...é um sistema antagonista ao sujeito, sendo o *milieu* adidático um sistema sem intenção didática, exterior ao sujeito, que, por suas retroações às ações do sujeito, permite sua reflexão a respeito de suas ações e de sua aprendizagem. Ou seja, o aprendiz é o responsável pelo processo de sua aprendizagem (ALMOULOUD, 2007, p.35).

Em nossa pesquisa o estudo do *milieu* teve como referência Margolinas (1994 *apud* MAIA, 2007) e Almouloud (2008) este estudo foi proposto por Brousseau na Teoria das Situações Didáticas.

Quadro 1- Estrutura do *milieu*.

M+3 M de construção		P+3 P-noosfera	S+3 S-noosfera
M+2 M de projeto		P+2 P-construtor	S+2 S-de construção
M+1 M didático	E+1 E-reflexivo	P+1 P-planejador	S+1 S de projeto
M0 *M de aprendizagem*	*E0* *Aluno*	*P0* *Professor*	*S0* *S-didática*
M-1 M de referência	E-1 E-aprendiz	P-1 P-observador	S-1 S-aprendizagem
M-2 M-objetivo	E-2 E-agindo		S-2 S de referência
M-3 M-material	E-3 E-objetivo		S-3 S-objetiva

Fonte: Margolinas (1998, *apud* ALMOULOUD 2008, p. 43).

Segundo Almouloud (2008), ao professor fica reservada a gerência da interação entre as partes envolvidas, estudantes e *milieu*, pois, dentro desta proposta, o professor produziu implicitamente na situação didática a sequência didática com sete atividades que não é evidenciada a finalidade de ensinar, porém, há uma estratégia minuciosa na elaboração, para o estudante chegar à situação fundamental, para construção do conhecimento desejado, situação esta chamada “situação adidática”.

Margolinas (1995a *apud* ALMOULOUD, 2008) aprimorou este modelo para dar ênfase a situação didática e, além disso, averiguar de modo equilibrado a situação do aluno e a situação do professor, ou seja, averiguação ascendente, que descreve as ações relativas ao aluno e parte da situação objetiva (S-3) e encerra na situação didática (S0).

A averiguação descendente, que descreve as ações relativas ao professor, parte da situação noosfera (S+3) e encerra na situação didática (S0).

Ainda buscando a compreensão do estudo ascendente e descendente da situação em que inicialmente parte do professor e cria um ambiente de socialização do conhecimento com os estudantes, em tais interações foram observadas as posições M em relação ao *Milieu*, a posição E em relação ao aluno e a posição P em relação ao professor, obedecendo aos seguintes níveis.

> O nível +3 (chamado de noosfera) caracteriza a atividade do professor que está refletindo de modo geral sobre o ensino da matemática....
> No nível +2 (nível de construção), a atividade do professor consiste em traçar grandes linhas de como ensinar um dado tema. [...]
> No nível +1 (nível de projeto) corresponde ao momento do planejamento de uma aula.
> O nível 0 (nível didático) caracteriza a ação do professor em sala de aula. [...]
> O nível -3 é caracterizado pelo momento no qual o aluno toma conhecimento do problema que lhe é proposto (o professor fez a devolução do problema).
> O nível -2 é caracterizado pela situação de referência (S-2), intermediária entre a situação objetiva e a situação de aprendizagem para o aluno. Os alunos (E-2) estão em situação de resolução de problema e o professor (P-2) age como mediador e observador das ações dos alunos...
> O nível -1 (nível de observação) é marcado pela devolução ou da observação da atividade dos alunos. É nele que identificamos a situação de aprendizagem (S-1). É o *milieu* de referência (M-1) que os conhecimentos do aluno se transformam em saber e que ele começa a identificar os conhecimentos que ele deve compreender e validar do ponto de vista científico (ALMOULOUD, 2008, P. 45).

Portanto, estudados os fenômenos que interferem no processo de interação entre professor e estudantes, mediados pelo saber, nos apropriamos da Teoria dos Registros de Representação para elaborar as nossas atividades, para introduzir as variáveis visuais e consequentemente suas unidades simbólicas significativas para a interpretação global das propriedades figurais da função quadrática.

1.1.2 A Teoria dos Registros e Representação Semiótica

Nas pesquisas analisadas com estudos de funções, Pelho (2003) e Maia (2007), destacam a relevância de trabalhar com várias vertentes de representações do conceito de função. Para colaborar com esta pesquisa foi agregado como pressuposto teórico a Teoria dos Registros e Representação Semiótica de Raymond Duval. Assim como muitos educadores têm inquietações, Duval (2013, p. 11) também teve, tais como “como compreender as dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão da matemática? Qual é a natureza dessas dificuldades? Onde elas se encontram?" (Duval 2013). Questões semelhantes têm-se hoje, entretanto, para Raymond Duval a questão crucial está em emergir no cognitivo, pois o ensino da matemática nesta fase não objetiva formar matemáticos puros, mas, almeja uma "educação matemática realista", contribuindo para desenvolver-se no sentido de tornar-se um cidadão conhecedor de suas realidades, questionador e principalmente da visão do seu potencial:

> A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino. Isso nos conduz a colocar duas questões preliminares e fundamentais, para analisar as condições e os problemas da aprendizagem em matemática.
> 1. Quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar pra aceder aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos?
> 2. Esses sistemas cognitivos são os únicos a ser mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos (geologia, astronomia, física, biologia...) e práticos, ou ao contrário, trata-se de sistemas específicos, cujo desenvolvimento e cuja aquisição são próprios da atividade matemática? (DUVAL, 2013, p. 12).

Neste contexto, o registro de representação semiótica propõe um ensino dinâmico e aprendizagem inovadora no âmbito escolar, pois, a educação toma novos rumos para o ensino/aprendizagem, suas metodologias, avaliações e contextualização da realidade e aos próprios objetivos almejados, pois o presente tempo pertence à geração tecnológica, indivíduos que buscam saberes prontos e acabados, perdendo assim, o prazer de questionar, criticar e melhorar os novos conhecimentos; como consequência o professor busca novas práticas que resgate as construções dos saberes.

Esta pesquisa possui como objeto matemático a função quadrática e espera-se investigar quais obstáculos didáticos dificultam a aprendizagem do conceito de função quadrática e as conversões, da linguagem natural para a linguagem algébrica e posteriormente para a linguagem gráfica e seus retornos, apresentando uma sequência didática para superação destes obstáculos. Há de salientar que, segundo Almouloud (2007, p. 75), pelo menos duas movimentações simultâneas de registros bastam como requisitos suficientes para a apropriação do conceito de função quadrática, "A coordenação de vários registros (pelo menos dois) é uma condição necessária para essa forma de compreensão, que Duval denomina 'conceitual'".

Para se chegar às conversões devemos nos focar em alguns passos importantes da representação conforme Duval afirma:

> Não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. Desde Descartes e Kant, ela está no centro de toda reflexão que se preocupa com questões da possibilidade e da constituição de um conhecimento certo. Porque não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação (DUVAL 2009, P. 29).

Para Duval (2009), a noção de representação emergiu por três vezes em épocas e significados diferentes. Nos idos de 1924-1926 aparece com Piaget em “A Representação do mundo na criança”, sob o aspecto de representação mental formada pelo conjunto de concepção de um indivíduo; por volta de 1955-1960 a noção de representação possivelmente aparece inicialmente com Broadbent, como interna ou computacional formada pelas ações automatizadas de um indivíduo e, finalmente, como ***representação semiótica*** que, para Duval (2009), é formada pelo uso de signos do sistema de representação próprio, específico, sendo capaz de transmutar para outro tipo de sistema, no caso, linguagem natural, algébrica os gráficos cartesianos.

É primordial que os estudantes ao tomarem conhecimento da função quadrática visualizem diferentes formas de registro de representação desse mesmo objeto matemático, assim, para Amouloud (2007), conduzimos em uma espécie de jogo o problema da aprendizagem, garantindo ao professor subsídios para tornar compreensível o objeto matemático.

> A noção de registro permite salientar a importância da mudança de registro e considerar a necessidade de uma coordenação de registros. Uma mudança de registro tem vantagens do ponto de vista do tratamento, podendo facilitar a compreensão ou a descoberta (ALMOULOUD, 2007, p.72).

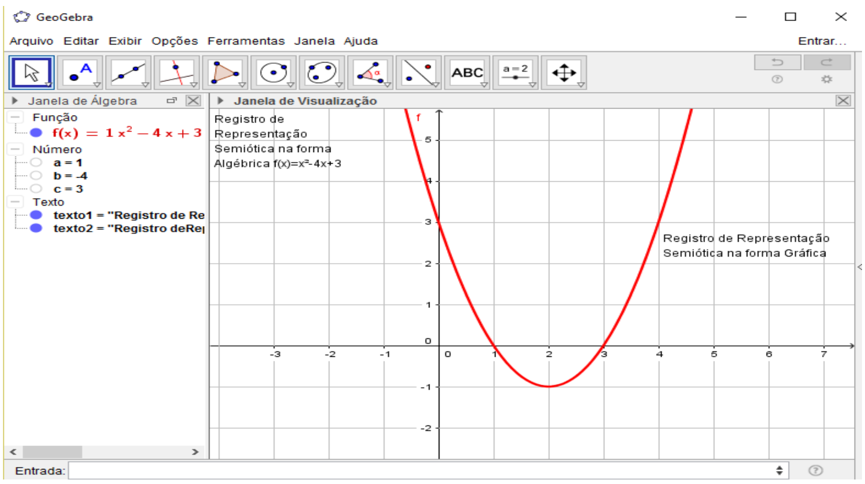
Segundo Duval (2013), a compreensão do objeto matemático, em nosso caso, função quadrática, tem relações intrínsecas e dependentes da mobilização de pelo menos, dois registros de representação semiótica ao mesmo tempo, e para uma abordagem de aprendizagem, ocorrem dois tipos de transformações de representações: os tratamentos e as conversões.

Para Duval (2013) ocorrem os *tratamentos* quando há alterações nas representações em um único registro, por exemplo: Calcular $f(2)$ para o valor de $x=2$, na função $f(x)=x^2-4x+3$.

$$f(x)=x^2-4x+3$$
$$f(2)=2^2-4.2+3$$
$$f(2)=4-8+3$$
$$f(2)=-1$$
$$(2,-1)$$

Para Duval (2013), ocorrem as *conversões* quando há alterações nas representações para o mesmo objeto matemático, por exemplo: usando o software computacional construa o gráfico da função quadrática $f(x)=x^2-4x+3$ para os valores de $-1 \le x \le 5$.

Figura 1 – Exemplo de Conversões.



Fonte: Autor.

Neste caso, com o software educacional GeoGebra, podemos observar a passagem do registro de representação da escrita algébrica na janela da Álgebra para o registro de representação na forma gráfica na janela de Visualização, ambas, representando o mesmo objeto matemático.

Em nossa pesquisa, os estudantes se apropriaram da sequência didática validada por Maia (2007) com adaptações, e movimentaram os coeficientes das funções $y=ax^2+bx+c$ e $y=a(x+m)^2+n$ assim, tiveram oportunidade de observar a passagem do registro de representação semiótica da linguagem algébrica para a linguagem gráfica e vice-versa.

> Lembramos que uma das características importantes da atividade matemática é a diversidade de registros de representação semiótica que ela mobiliza obrigatoriamente. No entanto, essa diversidade raramente é levada em conta no ensino. Ora se se quer analisar as dificuldades de aprendizagem em matemática, é preciso estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos.
> [...] Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato (DUVAL, 2013, p.30/31).

Neste contexto, para Duval (2011) a representação gráfica cartesiana ainda gera obstáculos para fazer a passagem do registro de representação gráfica para a passagem do registro de representação algébrico.

Duval (2011) em "Gráficos e Equações: a articulação entre os dois registros", realizou estudos significativos sobre as variáveis visuais da função afim $y = ax + b$ e as unidades simbólicas significativas, estudo este, retratado por Maia (2007) com adaptações a função quadrática.

> Uma apresentação explícita e sistemática das variações visuais significativas não somente centra a atenção sobre a correspondência entre a representação gráfica e expressão algébrica, mas permite encontrar diretamente a expressão algébrica das propriedades geométricas: perpendicularidade e paralelelismo de duas retas, por exemplo. De fato, é suficiente praticar a abordagem experimental a mais clássica: **variar uma unidade significativa na expressão, mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro** (ou mudar uma variável visual mantendo as duas outras constantes e ver as modificações que acontecem na expressão). Assim, por exemplo, a oposição entre y = x e y = -x se articula em uma unidade de uma imagem visual e esta imagem se presta a modificações que têm contrapartida algébrica imediata (DUVAL 2011, p. 103).

Buscamos apoio nos estudos de Duval (2011) e Maia (2007), onde evidenciamos as quatro variáveis visuais e seis unidades simbólicas, pelo fato da inclusão dos coeficientes b e c relativos à função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, e seu traçado/eixo representarem uma curva chamada parábola.

Quadro 2 - Unidades simbólicas correspondentes às variáveis visuais.

Variáveis Visuais	Valores	Unidades Simbólicas correspondentes
Concavidade da Parábola	Voltada para cima Voltada para baixo	Parâmetro a > 0 (ausência do símbolo -) Parâmetro a< 0 (presença do símbolo -)
Abertura da parábola	Maior abertura Menor abertura	$0 < \| a \| < 1$ $\| a \| = 0$ (o parâmetro não está escrito) $\| a \| > 1$
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas	Acima do eixo Na origem Abaixo do eixo	$n > 0$ $n = 0$ $n < 0$
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas	À esquerda do eixo Na origem À direita do eixo	$m > 0$ $m = 0$ $m < 0$
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas	À esquerda do eixo Em cima do eixo À direita do eixo	$b > 0$ $b = 0$ $b < 0$
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas	Acima do eixo Na origem Abaixo do eixo	$c > 0$ $c = 0$ $c < 0$

Fonte: MAIA, 2007, p.65 (com adaptações).

A teoria dos registros de representação semiótica foi utilizada para expor e discutir a compreensão dos aspectos cognitivos da apropriação do conceito de função quadrática.

CAPÍTULO 2 Análises prévias

Neste capítulo mostraremos a organização de nossa análise prévia, que iniciamos com o tópico do estudo histórico e epistemológico da função para nos situar com o conceito de função, em seguida buscando as sugestões apresentadas pelos documentos oficiais para o conteúdo função quadrática dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, da Proposta Curricular do Ensino Fundamental no Estado do Amazonas, prosseguindo com a análise do teste diagnóstico para identificar os conhecimentos prévios e concepções dos estudantes a respeito do objeto em questão, prosseguiremos com uma análise praxeológica do livro didático segundo Chevalard (1996), somente no conteúdo função quadrática, buscando identificar obstáculos didáticos a luz da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009) e encerrando com caracterização dos obstáculos didáticos segundo Brousseau (2008).

2.1 Tópicos do Estudo Histórico e Epistemológico da Função

Ao analisar o processo histórico da função buscamos agrupar somente pontos necessários para compreensão deste objeto matemático ao longo do tempo, sem aspirar esgotar o assunto.

Nos orientamos nos trabalhos de Zuffi (2001), Rossini (2006), Maia (2007), Bueno (2009), Boyer (2012), Salin (2014), entre outros.

O homem ao longo do tempo tem buscado compreender o caleidoscópio de padrões mostrados pela natureza e, possivelmente, com esta inquietação pode ter surgido a necessidade de organizar dados, para futuramente prever certos comportamentos naturais.

Conforme ocorria o desenvolvimento da ciência e paralelamente o da matemática as contradições que circundavam os conceitos sobre função também brotavam como forma salutar de avanço. Livros de matemática contemporâneos evitam relatar a origem do conceito de função em virtude da falta de consenso entre historiadores.

Youschkevitch (1976) *apud* Maia (2007, p.18), da Universidade de Moscou, propõe três etapas fundamentais para a evolução do conceito de função:

> “(1) A Antiguidade: etapa no curso da qual o estudo dos diferentes casos de dependência entre duas quantidades ainda não isolou as noções gerais de quantidades variáveis e de funções.
> (2) A Idade Média: Nesta etapa, estas noções são pela primeira vez, e de maneira precisa, expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas durante a qual, como na antiguidade, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definida por uma descrição verbal ou por um gráfico, de preferência a uma fórmula.
> (3) O período moderno: no curso do qual, a partir do fim do século XVI, e especialmente durante o século XVII, as expressões analíticas de funções começam a prevalecer, a classe das funções analíticas geralmente são expressas por meio de soma de séries infinitas, tornando-se logo a principal classe utilizada.

Na Antiguidade, que possivelmente ocorreu entre 4000 a.C até meados de 476 d.C, na queda do Império Romano, pode-se inferir que há processos de dependência entre duas quantidades, porém, não registros implícitos ou explícitos das noções de quantidades de variáveis ou mesmo de funções.

Na Idade Média, compreendida geralmente entre os séculos V e XV, a noção de dependência brota de forma concisa tanto na forma geométrica quanto na mecânica, observando que, de forma propensa à descrição verbal ou gráfica, esporadicamente ocorria à expressão por fórmula.

Na Idade Moderna, ocorrida talvez entre os séculos XVI a XVIII, as expressões analíticas tomam a vanguarda na forma de somas de séries infinitas, sendo o final do século XVII o período áureo para o desenvolvimento da noção de função.

Seguiremos o contexto proposto pelas três fases na evolução do conceito de função.

Na Idade Antiga encontrava-se inserido no povo babilônico, aproximadamente 2000 A.C, as tabelas sexagesimais sobre quadrados, cubos, assim como raízes quadradas e cúbicas, cunhadas em argila. De acordo com Roque (2012), essas tabelas possivelmente tinham pretensões pedagógicas.

No Egito, o rio Nilo, com o processo de cheias e vazantes, nos remete aos controles das datas, para melhor aproveitamento do solo e preparação das áreas a serem cultivadas. Assim os egípcios intencionavam maximizar a colheita, atividade na qual, segundo a História, eram especialistas. Heródoto, historiador que viveu no século V a.C., registra a palavra “geometria” em um dos seus nove livro dedicado ao Egito. O historiador afirma que o rei era defensor das distribuições de terras igualitariamente, contanto que lhes fossem pagos os impostos, e tal prática poderia ter originado a geometria (ROQUE, 2012).

Para Rossini (2006) e Roque (2012), por volta de 300 a.C. a astronomia já era bem desempenhada e se apropriava de técnicas matemáticas de alto nível, o que possivelmente influenciou a tradição grega de Hiparco e Ptolomeu. Entretanto, não há menção sobre possíveis nomes gregos que poderiam ter levado a Geometria para Grécia.

Para Oliveira (1997) o conceito de função aparece tanto na Matemática como na Ciências Naturais quando os mestres propunham atividades práticas não formuladas para seus aprendizes.

Pitágoras, matemático filósofo fundador da Escola Pitagórica em 540 a.C., ao passar por uma oficina viu um ferreiro fundindo e dando forma a sua matéria prima. A batida no ferro produzia sons, os quais lhe despertaram a curiosidade pela diversidades de sons emitidos, o levando a criar uma experiência com monocórdio para os detalhar, descobrindo assim a interdependência entre números, comprimentos e harmonias.

Para Boyer (2012) o estudo das cônicas de Apolônio foi um trabalho excepcional. Comparando-as à atualidade, como são expostos os assuntos nos livros didáticos, Boyer afirma que os pontos onde há omissões, por exemplo, no foco das secções, ocorrem possivelmente em virtude das obras perdidas de Apolônio, e enfatiza que para determinarmos uma equação é necessário uma curva, e que equações não determinam curvas.

Dentro deste aporte podemos vislumbrar que tanto gregos como babilônios possuíam noções de funções ainda que tabuladas, perfeitamente adequadas para aquele período.

Entendemos que não há ruptura cronológica para ilustrar cada fase, mas, que em certo momento da transição, há uma intersecção nas fases.

Na Idade Média surge o conceito de função e para Maia (2007), Boyer (2012) aparece com Nicole Oresme (1323 – 1382) no desenvolvimento da latitude das formas, tendo uma imaginação privilegiada, expressando em forma de figura o jeito que os objetos se deslocam, o que, hoje, chamamos de representação gráfica.

Segundo Boyer (2012, p. 188) “Tudo o que é mensurável, escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade contínua...”, assim, idealizou uma figura na qual a velocidade está representada no eixo vertical (latitudes) e o tempo representado no eixo horizontal (longitudes), para um objeto que se desloca com uma aceleração constante.

Oresme verificou que a área da figura representava a distância percorrida por este objeto, assim, configurou-se uma verificação geométrica para o caso. Esta maneira de representar através da latitude de formas tornou-se comum por mais de dois séculos e meio, sendo bem explorada pelos cientistas até os tempos de Galileu.

Na Idade Moderna, segundo Maia (2007), podemos nos apropriar da contribuição de Galileu para progressão do conceito de função sobre a queda dos corpos, que obedece a função quadrática da altura em função do tempo $h = \frac{1}{2} g t^2$.

Galileu em sua experiência almejava verificar em um processo experimental que o movimento uniformemente acelerado poderia ser encontrado na natureza, observando que em queda livre os deslocamentos ocorriam proporcionalmente ao quadrado do tempo de queda, entretanto, Boyer (2012, p.231) sugere que:

> É praticamente certo, no entanto, que ele conhecia perfeitamente a obra de Oresme sobre a latitude de formas, e várias vezes em "*As duas novas ciências",* Galileu usou um diagrama de velocidade semelhante ao gráfico triangular de Oresme. Porém, Galileu organizou as ideias de Oresme e deu-lhes uma precisão matemática que lhes faltava.

Galileu percebeu que um corpo abandonado caindo livremente percorre tempos iguais para distâncias proporcionais aos números ímpares, ou seja, $[t,d],[2t,3d],[3t,5d],[4t,7d]$.

Galileu teve contribuições nos estudos de lançamentos de corpos que é formado pela composição de dois deslocamentos: o horizontal, com movimento uniforme onde não há aceleração, e o vertical, com o movimento uniformemente variado provido de aceleração, que descreve uma parábola obedecendo à função do primeiro grau para o eixo x relativo ao espaço $x = x_0 + v_x.t$ e a função quadrática do espaço para o eixo das ordenadas $y = y_0 + v_{0_y}.t - \frac{gt^2}{2}$.

Segundo Boyer (2012) não há precisão se Descartes em 1628 já havia completado sua geometria analítica, porém, a geometria cartesiana possivelmente não demoraria a se tornar conhecida, isso porque, quando residia na França, tomou conhecimento do problema das três e quatro retas de Papus, aplicando seu método:

> Se queremos resolver qualquer problema, primeiramente supomos que a solução já está encontrada, e damos nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-la. Tanto para as que são desconhecidas quanto para as que são conhecidas. Em seguida, sem fazer distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, devemos percorrer a dificuldade da maneira mais natural possível, mostrando as relações entre estas linhas, até que seja possível expressar uma única quantidade de dois modos. A isto chamamos uma Equação, uma vez que os termos de uma destas duas expressões são iguais aos termos da outra. (BOURBAKI, 1976 *apud* ROQUE 2012, p.322).

Desta maneira, resolveu sem maiores dificuldades o problema de Papus, expondo o poder de seu método, o que lhe inspirou a publicar sua obra *La géométrie*.

Segundo Oliveira (1997), Descartes, em sua obra *La géométrie*, foi pioneiro quando introduziu a noção de função relacionando a equação com dependência entre as variáveis, "... pela primeira vez e de modo completamente claro, é sustentada a ideia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis..." (OLIVEIRA, 1997, p.18) naquele momento a relação da noção de função com a dependência foi crucial, pois, poderiam partir de uma curva e chegar a uma equação através de coordenadas.

Para Boyer (2012) outra contribuição importante para o conceito de função foi o estudo publicado por Isaac Newton em 1687, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, que não comportava somente estudos da Física e Astronomia, mas, também matemática pura nos estudos das cônicas. Newton mostra, no Lema XIX do livro I, a resolução do problema de Papus geometricamente. No *Enumeratio*, o físico dedicou-se aos gráficos das curvas planas.

Segundo Boyer (2012) e Maia (2007), Newton, em sua publicação "Métodos dos Fluxos" (por volta de 1671) tinha x e y como quantidades que se deslocam proporcionalmente chamadas **fluentes**, nas quais em cada variação chamada fluxo obtém-se uma curva.

Para Roque (2012) o conceito de "função" na matemática foi precedido pela lapidação das técnicas diferenciais propostas por Leibniz e Newton. Oliveira (1997) afirma que a palavra "função" consta nos manuscritos de Leibniz por volta de 1673 de forma implícita, porém, embasada pelo termo "*relatio*" que posteriormente aparece como segmentos de retas ligados a uma certa curva, mas, é com Jean Bernoulli que ressurge, de forma bem clara, "Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira que seja desta grandeza variável e constantes”(OLIVEIRA, 1997, p.35).

Já no século XVIII surge a notação do conceito de função $f(x)$ usado por Euler nos *Commentaries de Petersburgo* (1734-1735), Boyer (2012).

Euler (1707-1783), em sua publicação *Introductio in analysin infinitorum* editada em 1748, define função como uma noção central da matemática: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes.” (EULER *apud* Roque, 2012, p. 374).

A noção de função, além de criticada, passou por processo de reestruturação no processo social de modernização, onde o conhecimento científico passou a ser visto com bons olhos para uma nação. Criaram-se novos departamentos científicos, surgindo nomes reconhecidos na área, dando início a processo de rigorosidade da Análise (ROQUE, 2012).

Segundo Maia (2007) os conceitos de Euler foram revistos quando foi analisado o estudo da propagação do calor de Fourier, envolvendo as funções trigonométricas em virtude da redefinição do conceito de função, e em seu livro *Théorie Analytique de la chaleur* Fourier afirma tratar de funções gerais. Ainda assim, eram mais gerais aos estudos da época.

Segundo Boyer (2012) apesar do infortúnio do exílio de Fourier, os estudos deste sobre funções são importantes, tanto na Matemática como na Física. Lejeune Dirichlet, em 1837, buscando ser mais geral propôs uma definição:

> Se uma variável y está relacionada com uma variável x de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de y, então se diz que y é uma função da variável independente x (BOYER, 2012, p.334).

Este conceito, em uma visão atual, está próximo do que conhecemos como função, embora a noção de correspondência entre dois conjuntos ainda não houvesse sido definido na época.

Para Oliveira (1997) a prática no início do século XX nos cursos de análise matemática seguia o modelo de Dirichlet.

Neste contexto, segundo Maia (2007) a teoria dos conjuntos abrigou o conceito de função relacionando dois conjuntos quaisquer: “Assim, na teoria dos conjuntos, uma função f é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados, pares esses sujeitos à condição, seguinte: se $(a_1, b_1) \in f, (a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$.”, onde o conjunto A chamado de domínio da função tem os seguintes elementos na sua formação, $A = \{a_1, a_2\}$, e o conjunto $B = \{b_1, b_2\}$, chamado de conjunto imagem da função f.

Este conceito de função ainda é de difícil compreensão nos dias atuais conforme os trabalhos desenvolvidos por Pelho, Maia, Ardenghi, Santos e Mpaka:

Pelho (2003) constatou em seu trabalho que os estudantes iniciam seus estudos no Ensino Médio sem o conhecimento necessário ao conceito de função, e os estudantes bem relacionados com os registros gráficos tinham melhores rendimentos comparados aos que preferiam o registro de tabelas. Ele evidenciou também a dificuldades da passagem do registro algébrico para o registro gráfico e vice-versa, e que possivelmente isto ocorra pelo formalismo existente para tratar o conceito de função. Assim exposto, podemos inferir que se trata de um obstáculo didático nos moldes de Brousseau.

Maia (2007) percebeu que os estudantes tiveram dificuldades em enxergar o gráfico de uma forma completa na ausência do software. Além da construção do gráfico, também foi detectado que os estudantes tiveram dificuldades na quarta atividade em passar da linguagem natural para linguagem algébrica e posteriormente, para a gráfica.

Ardenghi (2008) em seu trabalho buscou compreender as dificuldades que os estudantes possuíam a respeito do conceito de função. Em suas experiências e estudos relacionados podemos destacar Simões (*apud* Ardenghi 2008, p. 36), onde foram expostos os obstáculos didáticos da função quadrática, relacionados ao conceito e à construção da representação gráfica.

Vale ressaltar que neste trabalho também foi percebido que, quando o livro didático revela a preferência da passagem de registro da representação algébrica para a gráfica, há possibilidade de se gerar obstáculo didático quando o estudante buscar a passagem da representação gráfica para algébrica.

Dos Santos (2009) em seu trabalho faz referência ao obstáculo em mobilizar os conceito de função em virtude da não compreensão das variáveis dependentes e independentes e a relação entre elas, acarretando dificuldades em identificar o gráfico correspondente à função. Isto equivale à dificuldade do obstáculo didático em passar da representação algébrica para a representação gráfica, podendo refletir de forma negativa em outras disciplinas, tais como Física e até mesmo comprometer os assuntos que tenham função como pré-requisito, sendo isto exposto e corroborado com o índice de 71% abaixo do nível básico.

Mpaka (2010) afirma que há dificuldades na construção do conceito de função por parte dos docentes "Contudo, apesar das inúmeras pesquisas envolvendo o ensino e aprendizagem do conceito de função, ainda são grandes as dificuldades apresentadas pelos educandos, tanto no ensino fundamental e no ensino médio" (MPAKA 2010, p. 23). Mpaka afirma também que é um processo demorado e exaustivo a construção do conhecimento e que a possibilidade de superar as grandes dificuldades nas interpretações de gráficos e possivelmente o caminho para superar estes obstáculos seriam as novas tecnologias.

Percebemos, então, que o conceito de função quadrática tem grande relevância para a construção do conhecimento da matemática, e é necessário que os estudantes do nono ano do Ensino Fundamental levem estes conhecimentos para formar uma base para o Ensino Médio.

Assim, conforme a explanação acima, almejamos em nossa pesquisa complementar estes trabalhos usando uma sequência didática validada por Maia (2007) utilizando o *software* educacional GeoGebra em um ambiente computacional oferecendo ao estudante a oportunidade de verificar que as mudanças das unidades simbólicas da função quadrática acarretam mudanças instantâneas nas variáveis visuais, sendo uma abordagem em um nível superior à construção da representação gráfica ponto a ponto, prática exposta nos livros didáticos e aplicadas em sala de aula.

Desta forma, analisamos como este objeto matemático está proposto nos documentos oficiais.

2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática

Os PCN do terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental são referenciais didáticos para o profissional da educação e têm como sua principal função nortear o conhecimento matemático e as práticas sociais vinculadas ao mercado de trabalho para o domínio da leitura, escrita e cálculo.

O Ensino Fundamental engloba vários objetivos, dentre os quais destacamos a compreensão da cidadania como forma de ter uma participação social e política atuante, conhecendo e aplicando seus direitos e deveres, posicionando de maneira crítica tendo o diálogo como um instrumento poderoso para inibir qualquer tipo de injustiça, utilizar diferentes linguagens, tais como a linguagem matemática, a gráfica, como forma de expressão das ideias, para os estudantes se apropriarem de diferentes fontes de informações e o pensamento lógico como recurso aos questionamentos de possíveis resoluções de problemas.

> * Do pensamento numérico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> - resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
> - selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais.
>
> * Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> - **observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.**
>
> * Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> - interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
>
> * Do raciocínio estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> - **construir tabelas** de freqêuncia e **representar graficamente** dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, **análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos.** (BRASIL, 1998, p. 81e 82) (grifos nossos).

Dentro dos objetivos do quarto ciclo do PCN no ensino fundamental, observamos que o ensino de matemática busca o desenvolvimento do estudante dentro de alguns pensamentos e raciocínios, que estão de certa forma, inseridos nos estudos que envolvem mudanças de representações semióticas como construções de tabelas, gráficos, representações da linguagem algébrica e natural.

Dentro destes mesmos objetivos podemos observar o conceito de função no pensamento algébrico, quando solicita para observar as regularidades e criar leis matemáticas que façam menção à relação de dependência entre variáveis.

A representação do conceito de função quadrática mostra-se importante para formar o cidadão de maneira global, quando exploradas as resoluções de problemas contextualizadas, levando o estudante a vivenciar a ação, formulação e validação proposta por Guy Brousseau.

> Assim, o professor deve organizar seu trabalho de modo que os alunos desenvolvam a própria capacidade para construir conhecimentos matemáticos e interagir de forma cooperativa com seus pares, na busca de soluções para problemas, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.(BRASIL, 1998, p. 63).

Dentro desta proposta o PCN sugere que a *resolução de problemas* pode ser um parâmetro a ser seguido como eixo organizador do processo ensino e aprendizagem, devendo "criar" uma situação-problema, para que os estudantes explorem a situação, buscando ferramentas para desenvolver a estratégia a ser usada para dar início à possível solução, explorando os conceitos para aplicações em várias situações, desencadeando procedimentos e atitudes matemáticas.

O PCN incentiva o uso das tecnologias como forma de adaptação social, pois, com a grande diversificação das informações, é condição necessária o uso de tecnologias em sala de aula para dar dinamicidade à metodologia. Porém, há uma grande resistência ao uso de calculadoras, notebook, ipad, por parte dos docentes, porque sempre há o desvio de finalidade do uso como concorrência aos estudos.

Para construir uma boa formação são necessários alguns objetivos. Como meta, o PCN estabeleceu os objetivos gerais para o ensino fundamental, tais como: apropriar-se dos conhecimentos matemáticos buscando compreender para influenciar de modo positivo, transformando o seu círculo de convívio social; analisar de forma qualitativa e quantitativa a realidade em que está inserido, fazendo uso dos meios aritméticos, geométrico métrico, algébrico, estatístico, combinatório e probabilístico; fazer relações entre as disciplinas estudadas e, ainda, sentir-se seguro nos seus estudos para buscar e construir novos conhecimentos para desenvolvimento pessoal.

O desenvolvimento da aprendizagem tem com princípio básico, nas Competências e Habilidades com funções, promover a uniformização do currículo respeitando as particularidades de cada região, globalizando o conteúdo de forma interdisciplinar, sendo a didática do professor um fator determinante, pois, procura-se desenvolver a autonomia, diversidade cultural, um espírito cooperativo buscando um ambiente atrativo para o ensino e aprendizagem da matemática.

O estudo da função quadrática deve abranger dimensões conceituais, procedimentais e atitudinais, com abordagem mais completa, visando à construção do conhecimento do estudante para atender necessidades sociais no mercado de trabalho.

2.3 A Proposta Curricular

A proposta curricular do Ensino Fundamental que rege as escolas públicas no Estado do Amazonas afirma que as escolas ainda têm preferência por conteúdos conceituais, mas que é necessário o acompanhamento do desenvolvimento científico e tecnológico e se faz necessário escolher o que ensinar e como ensinar, para que os estudantes se libertem dos conteúdos "decorados" e passem a uma postura de saber pesquisar e interpretar, bem como: transmitir as ideias de forma organizada e concisa, priorizando mecanismos de pesquisas e a socialização das ideias; utilizar técnicas e estratégias de resolução de problemas e explorar conteúdos que contemplem Conceitos (cognitivo), Procedimentos (saber fazer) e Atitudes (valores, normas).

A fundamentação desta proposta segue as linhas de metas, diretrizes, objetivos para o ensino fundamental e Parâmetros Curriculares Nacionais: não permitir a simples transmissão de conteúdos, mas sim, construir conhecimentos compreendendo o seu contexto social, familiar e ainda permitir escolher conhecer o que lhe é significativo.

Em nossa experiência profissional na área de exatas, o "erro" é tratado como algo escandaloso, falha grave e digno de punição com notas que têm o objetivo de classificar os melhores e excluir aqueles que não obtiveram "sucesso" em um período de tempo muitas vezes desproporcional para avaliarmos de um modo geral todos os estudantes, mesmos porque, cada estudante tem o seu próprio tempo para concluir a sua aprendizagem e esta proposta tenta criar mecanismos de "correção" nos atos pedagógicos, afirmando que devemos respeitar o modo de pensar do estudante e que na verdade o aluno esta clamando por ajuda do profissional de ensino e lhe dando subsídios de informação dos seus conhecimentos prévios ou em construção.

Neste ponto concordamos com os pensamentos de Brousseau (2008): o erro manifesta um obstáculo para o estudante que tinha a certeza de um conhecimento válido para um contexto local, e este estudante, quando colocado em uma situação mais ampla, revela dificuldades. Esta proposta curricular, para suprir essa necessidade, solicita ao educador que, na utilização de um conceito consiga contextualizá-lo de formas diversas, se possível, para obter articulações com o social.

Também sustenta a necessidade de ressignificação no aspecto de **ensino-aprendizagem** e solicita que seja um processo dinâmico em que o estudante sinta prazer em participar e interagir com os colegas, de maneira que gere um ambiente propício à construção do conhecimento, que a aprendizagem seja estimulante e significativa para os envolvidos no processo, e que haja o consenso de, tanto **professor** como **aluno** contribuírem para o ensino-aprendizagem, desde que, compreendamos que há limites e etapas individuais, onde o ritmo individual deve ser respeitado, pois, “aprender a aprender” pode extrapolar o limite de tempo imposto pelo sistema de “um bimestre” que é equivalente a 50 horas de estudo dos 200 previstos, gerando conflitos e obstáculos didáticos pessoais.

Ainda sustenta a necessidade de formação continuada para os profissionais da educação como forma de lapidação profissional, sendo o sujeito capaz de refletir para melhorar no contexto profissional, humano e social. E, por fim, que **o currículo** apresente um contexto que forme cidadãos críticos, porém, sejam de bom convívio social, solidários, propondo que o currículo seja referenciado nos moldes de Competências básicas descartando que os estudantes possam ser depósitos de informações inúteis ao seu contexto social. Como consequência, **a avaliação** deve estar nos parâmetros de atividades contínuas de permanente acompanhamento do desenvolvimento do estudante, além da progressividade para lhe impor desafios crescentes como forma de estimular o seu desenvolvimento e também para servir de parâmetro para possível replanejamento de suas atividades com o objetivo de oportunizar melhores condições de aprendizagem.

2.3 1 A Matemática na Proposta Curricular

A Proposta sugere que a matemática deve ser encarada com uma ciência que não é considerada estática e deve ser utilizada como uma ferramenta para compreender e ser útil à sociedade. Entretanto, devemos ser cautelosos com o educando nessa fase, pois o mesmo possui uma lógica de raciocínio diferente do adulto. Porém, devemos acreditar que este é capaz de produzir ideias próprias que serão lapidadas conforme as necessidades da construção do conhecimento.

O eixo organizador do processo ensino-aprendizagem está pautado nas resoluções de problemas como uma estratégia metodológica. Nesse eixo devemos utilizar os conhecimentos prévios para estabelecer uma relação significativa. O professor deve atuar como organizador do processo, mediando ou instigando discussões para chegarmos à resolução do problema propriamente dito.

A proposta curricular ressalta ainda que o objetivo principal da matemática é qualificar o cidadão para o mundo do trabalho, para exercer seu papel de agente defensor ou transformador das boas relações sociais, agindo de forma diferenciada só ou em equipe e contribuindo para as soluções dos problemas enfrentados no percurso de cada história de vida.

O Eixo Temático do nono ano do Ensino Fundamental II é Leitura e Interpretação de Tabelas e Gráficos. Com este viés, esta série torna-se basilar para o ensino aprendizagem de noções da função quadrática, entretanto, por ser tratado apenas como uma "introdução", o mesmo é abordado somente no nono ano do ensino fundamental II, ficando uma abordagem mais profunda nas séries seguintes do ensino médio.

Dentro deste quadro a função quadrática é proposta através de:

> Conceitos "Ler e interpretar tabelas e gráficos, coletar informações e representá-las em gráficos, fazendo algumas previsões a partir do cálculo das medidas de tendência central da pesquisa."
> Procedimentos "Construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressão algébricas, utilizando as propriedades conhecidas."
> Atitudinais "Interesse por utilizar as diferentes representações matemáticas que se adaptam com mais precisão e funcionalidade a cada situação problema de maneira que facilite sua compreensão e análise. Compreensão da importância da estatística na atividade humana e de que ela pode induzir a erros de julgamentos, pela manipulação de dados e pela apresentação incorreta das informações..." (Proposta Curricular do Amazonas pg. 191/192).

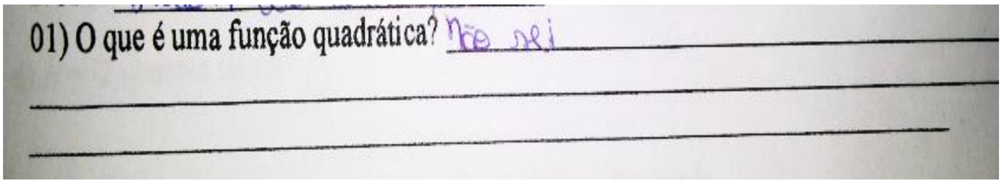
Por fim, a Proposta Curricular sugere que dentro das atividades sejam realizadas: análises de erros e acertos, como modo de aproximação do "fazer o melhor"; leituras com referência a história da matemática; interpretação de textos matemáticos; uso do Tangran para melhorar a noção de composição e decomposição de figuras geométricas; jogos matemáticos; e, exercícios com plantas baixas para trabalhar as noções de áreas e volumes. Não houve menção sobre software matemáticos como o GeoGebra.

2.4 Análise do Teste Diagnóstico

O teste diagnóstico objetivava caracterizar a situação real do estudante do nono ano, suas concepções, conhecimentos ou não, no que diz respeito aos saberes matemáticos da função quadrática, estudada cerca de dois meses antes do teste diagnóstico. O teste foi aplicado no dia 23 de Novembro de 2015 a dezenove estudantes voluntários que se propuseram a participar do teste diagnóstico, mas, somente oito estudantes os pais permitiram participarem da pesquisa. Salientamos que o teste diagnóstico não é obrigatório para participação da pesquisa, podendo o estudante não informar o motivo de não fazê-lo. O teste obedeceu ao seguinte procedimento, os estudantes se concentraram na biblioteca da escola apenas com lápis e borracha, dada as instruções de tempo e execução individual lhes foram distribuídas as atividades com treze perguntas que deveriam ser respondidas sem qualquer interferência do professor ou consulta aos colegas com finalidade de analisar seus conhecimentos prévios.

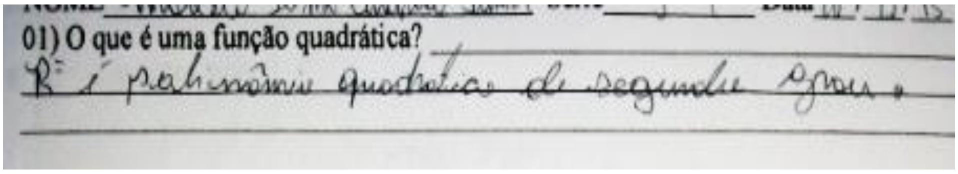
A primeira pergunta almejou investigar qual a percepção do aluno sobre função quadrática e identificamos que poucos alunos se apropriaram deste saber, conforme mostram figuras abaixo:

Figura 2 – Resposta do Aluno A01 sobre conceito de função quadrática.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 3 – Resposta do Aluno A15 sobre conceito de função quadrática.

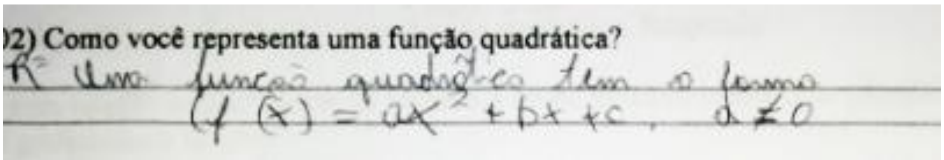


Fonte: Dados da pesquisa.

Neste ponto este conceito ficou a desejar pois dez alunos expressaram “não sei” ou deixaram esta questão em branco, três alunos acertaram e seis alunos responderam de forma confusa ou não correta.

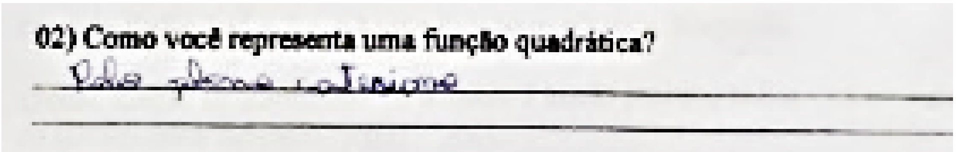
A segunda questão objetivou investigar se os estudantes possuiam uma representação semiótia na linguagem algébrica ou se conseguiam representar uma função quadrática.

Figura 4 – Resposta do Aluno A15 sobre representação da função quadrática.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 5 – Resposta do Aluno A01 sobre representação da função quadrática.

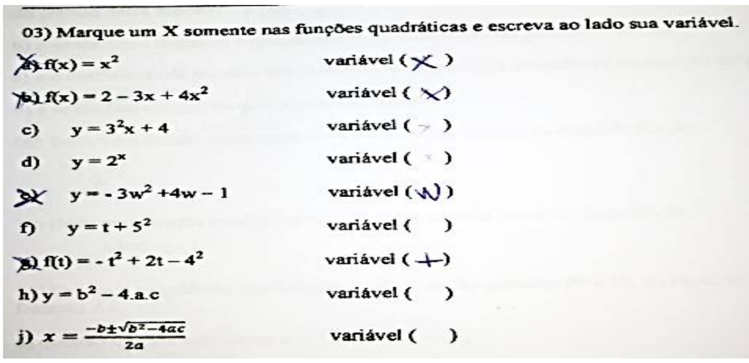


Fonte: Dados da pesquisa.

Neste quesito um estudante representou corretamente usando uma representação semiótica na linguagem algébrica, quatro alunos fizeram somente referência ao plano cartesiano sem representar a função quadrática e quatorze estudantes não responderam ou expressaram a escrita “não sei”.

A questão de número três objetivou investigar se o estudante consegue identificar a forma algébrica da função quadrática e em que variável independente esta escrita conforme figura.

Figura 6 – Resposta do Aluno A01 sobre identificação da função quadrática.


03) Marque um X somente nas funções quadráticas e escreva ao lado sua variável.

a) $f(x) = x^2$ variável (x)

b) $f(x) = 2 - 3x + 4x^2$ variável (x)

c) $y = 3^2x + 4$ variável ( )

d) $y = 2^x$ variável ( )

e) $y = -3w^2 + 4w - 1$ variável (w)

f) $y = t + 5^2$ variável ( )

g) $f(t) = -t^2 + 2t - 4^2$ variável (t)

h) $y = b^2 - 4.a.c$ variável ( )

j) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ variável ( )

Fonte: Dados da pesquisa.

Verificamos que um estudante reconheceu todas as funções quadráticas e suas respectivas variáveis independentes corretamente. Dois estudantes reconheceram parcialmente, porque tiveram dificuldades em identificar a variável independente “W” (não é comum utilizá-la) e dezesseis estudantes não marcaram corretamente ou escreveram que não sabiam e, destes dezenove estudantes, quatro reconheceram de forma incorreta a fórmula de Bhaskara como uma função quadrática.

A questão quatro objetivou investigar a percepção deles sobre a palavra “raiz”, se poderiam responder que somente a equação do segundo grau possuía raiz ou se responderiam que a função quadrática possuía o zero da função, que coincide com a raiz. Neste quesito os dezenove participantes não escreveram corretamente ou escreveram “não sei”, mostrando que este conceito não ficou explícito em sala de aula.

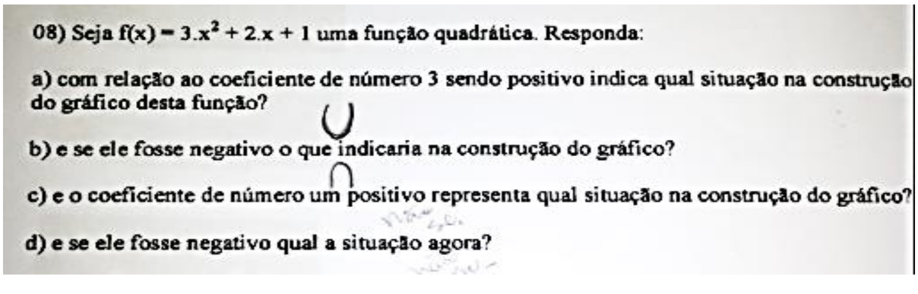
A questão de número cinco tinha como objetivo investigar se os estudantes podiam relacionar o expoente de número 2 (dois) da variável independente da função polinomial com a quantidade interceptação ao eixo “X”. Neste quesito um estudante relacionou o grau do polinômio com as suas interceptações e dezoito estudantes relacionaram de forma equivocada a palavra “quadrática” com “quatro interceptações”.

A questão de número seis investigou qual a percepção os estudantes quanto à simetria da função quadrática. Esperávamos obter como resposta que seria o gráfico da função quadrática dividida em duas partes iguais por uma reta que passa pelo vértice. Os dezenove estudantes escreveram “não sei” ou deixaram em branco esta questão.

A sétima questão objetivou investigar se os estudantes possuíam conhecimento e conseguiam relacionar o valor do discriminante Δ com o número de raízes da função e, nesta questão, não houve acerto.

A oitava questão pretendia investigar se os estudantes possuíam conhecimentos sobre os coeficientes da função quadrática.

Figura 7 – Resposta do Aluno A19 sobre o conhecimento dos coeficientes.



08) Seja $f(x) = 3.x^2 + 2.x + 1$ uma função quadrática. Responda:

a) com relação ao coeficiente de número 3 sendo positivo indica qual situação na construção do gráfico desta função?

$\cup$

b) e se ele fosse negativo o que indicaria na construção do gráfico?

$\cap$

c) e o coeficiente de número um positivo representa qual situação na construção do gráfico?

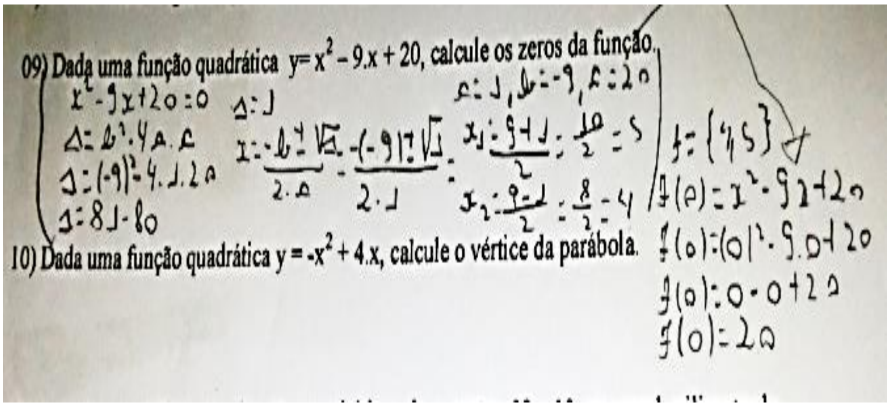
d) e se ele fosse negativo qual a situação agora?

Fonte: Dados da pesquisa.

Neste quesito, três estudantes conseguiram relacionar somente o coeficiente "**a**" mas, não relacionaram o coeficiente "**c**". Os outros dezesseis não responderam ou escreveram não "não sei".

Na questão de número nove os estudantes deveriam mostrar conhecimentos para realizar tratamentos na função quadrática. Somente dois conseguiram realizar os tratamentos de forma correta.

Figura 8 – Resposta do Aluno A04 sobre cálculos das raízes.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda neste quesito dezessete estudantes escreveram "não sei" ou deixaram em branco a questão.

Na questão número dez os estudantes deveriam realizar o tratamento do vértice da função, mas não obtivemos nenhum tratamento, pois, os dezenove estudantes responderam "não sei" ou não responderam.

Nas questões 11 e 12 eles deveriam construir os gráficos no papel milimetrado. Somente uma estudante realizou os tratamentos de forma parcial em virtude de o tempo destinado ter ultrapassado os noventa minutos. Os outros dezoito estudantes já haviam entregue o teste e responderam "não sei" ou não responderam.

A questão de número 13 tinha como objetivo investigar se os estudantes conseguiam relacionar a função quadrática com os objetos que possivelmente encontramos no convívio. Cinco estudantes não conseguiram relacionar nenhuma figura e quatorze estudantes relacionaram a função quadrática somente com o gráfico de uma função quadrática, não perceberam que todas as imagens estão relacionadas com a função polinomial de grau dois.

Após 19 estudantes terem realizado os testes diagnósticos, seus resultados nas questões fundamentais como:

- Escrever o que é uma função quadrática: somente três escreveram corretamente;

- Identificar a função quadrática e sua variável: apenas um identificou corretamente;

- Representar uma função quadrática: apenas um fez uma representação algébrica.

Identificação dos coeficientes da função quadrática: dos dezenove somente três identificaram apenas o coeficiente a, os coeficientes b, e c, não foram identificados.

Diante do exposto, observamos que os estudantes não conseguiram se apropriar do conceito de função quadrática, e pelo fato deste objeto matemático ter sido ministrado havia pouco mais de três meses, verificamos que grande parte dos estudantes que se submeteram ao teste diagnóstico possuem obstáculos didáticos de identificação, representação e reconhecimento dos coeficientes da função quadrática.

Almejando identificar a origem destes obstáculos, realizamos um estudo praxeológico nos livros didáticos, para verificarmos como estes apresentam o conteúdo, os exercícios modelos e tarefas para o objeto em questão, e se de alguma forma contribuem para criar obstáculos didáticos.

2.5 Teoria Antropológica do Didático

Sendo esta uma ascensão do conceito de Transposição Didática para analisar as práticas docentes, utilizamos elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) idealizada por Chevallard (1992, *apud* Almouloud, 2007,p.111) e por entendermos ser a TAD uma ferramenta de grande valor para adentrarmos no espaço da antropologia com um olhar nas organizações praxeológicas.

Segundo Almouloud (2007) a Teoria Antropológica do Didático busca compreender o homem em confronto com o saber matemático com um vislumbre nas situações matemáticas realizadas dentro de um contexto de atividades humanas e de instituições sociais. Ressalta ainda que o aluno, professor, livros..., são forma de instituições sociais.

Buscamos analisar o saber como forma de organização do conhecimento segundo Chevallard (1996), que se apropria de três temas primordiais: os *objectos* **O** as, *pessoas* **X** *e* as *instituições* **I**. Para a teoria os *objetos* são vistos como alicerce, pois consideram de uma forma muito peculiar como sendo todas as coisas, segundo

Chevallard (1996, p. 127), “[...] conduziu-me a propor uma teorização em que qualquer «objecto» pudesse aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto («matemático»), mas existe igualmente o objecto «escola», objecto «professor», o objecto «aprender», o objecto «saber»,” e para seu conhecimento como objeto elemento de relação existente em um contexto definido, se faz necessária a junção de uma pessoa X observando a posição que este ocupa dentro das instituições para uma relação pessoal ou uma instituição I para uma relação institucional.

Sobre as *instituições* I, dentro desta teoria, Chevallard (1996, p.129) comenta que há restrições para categorizar “Uma escola é uma instituição, tal como o é uma sala de aula; mas existe igualmente a instituição «trabalhos orientados», a instituição «curso», a instituição «família». A vida quotidiana é uma instituição (num dado meio social)”, tal fato se justifica pelo fato de encontrarmos *instituições* com status de *objectos*.

Para expor a finalidade do saber matemático junto às instituições escolares buscamos modelar a prática social de acordo com as organizações praxeológicas.

2.5.1 Organização Praxeológica

Pela nossa prática profissional observamos que o livro didático é referência para os docentes, pois é adotado pelo sistema de ensino e distribuído nas escolas para os estudantes. O mesmo tem sido cobrado pela comunidade escolar junto ao corpo técnico, em especial quando o professor deixa de fazer uso do livro. Neste ponto concordamos com Ardenghi (2008) que informa de maneira sugestiva que as pesquisas necessitam chegar aos autores de livros didáticos em virtude do mesmo ter um papel principal na preparação das aulas para futuras melhorias na qualidade do ensino.

Objetivamos, na organização praxeológica, investigar sobre a forma como é apresentado o saber matemático nos livros adotados no sistema educacional. Almouloud (2007) sugere realizar dentro das análises prévias a observação dos seguintes caminhos:

> a) Estudo da organização matemática
> [...]
> b) Análise da organização didática do objeto matemático escolhido
> Neste tópico, deve-se:
> 1. [...]
> 2. [...]
> 3. Analisar livros didáticos. É imprescindível fazer uma análise crítica das estratégias e escolhas feitas pelos autores dos livros didáticos, enfatizando essencialmente os seguintes aspectos:

> [...] Os obstáculos que podem ser superados ou não, justificando a resposta dada;
> As concepções possíveis que os alunos podem desenvolver a partir da abordagem proposta;
> Fazer uma análise praxeológica de tipos de tarefas propostas e seus possíveis efeitos sobre as aprendizagens pensadas (efeitos do contrato didático e de transposição didática) (ALMOULOUD, 2007, p.172).

Desta forma, com o objetivo de expor os procedimentos que se faz necessário a organização praxeológica para Almouloud (2007) sendo um sujeito portador de um tipo de tarefa (t) do tipo (T) na qual se prontifica a resolvê-la deve ele cercar-se de agrupamentos específicos de técnicas (τ), este contexto formam o bloco do conjunto das tarefas e tecnologias [**T, τ**] chamado de bloco prático-técnico *savoir-faire* “saber fazer” devendo elas ser legitimadas por tecnologias (θ) e consequentemente explicada por teorias.(Θ) formando o bloco tecnológico-teórico do *logos* ou *gnosique* [**θ, Θ**] “saber”.

Neste contexto pretendemos realizar conforme Chevallard (1998) propôs, para uma tarefa (**t)** do tipo (**T**) então **t ∈ T** a mesma para ser reconhecida vem acompanhada de um verbo de ação especificando a tarefa de forma objetiva “determinante”, por exemplo: Construa o Gráfico da função quadrática $y(x) = x^2 - 8x + 12$ para os valores de $0 \le x \ge 8$ e verifique para que valores de x temos $y = 0$ e determine as coordenadas do vértice. Quando os verbos aparecem de forma isolada se caracteriza por gênero de tarefa.

Para realizar esta tarefa, o sujeito mobiliza técnicas (τ) para alcançar o seu objetivo, nos casos específicos.

Técnica (τ) para Chevallard (1998) é a ação de aplicar “um fazer” ou mais sob um objeto matemático com fins de obter o sucesso desejado para completar uma tarefa relativa. Neste termo, se faz necessário identificar e aplicar uma técnica específica à atividade.

A Tecnologia (θ) é caracterizada por um discurso racional, que execute um detalhamento, que ampare a técnica (τ) praticada, como forma de assegurar a execução correta da tarefa (t).

A Teoria (Θ) se evidencia por um discurso tecnológico que ratifica a tecnologia (θ) em uma dimensão mais elevada de fundamentação, esclarecimento e execução da teoria (Θ), observando o nexo com a tecnologia (θ) e técnica (τ).

Deste modo, para Chevallard (1998) uma praxeologia requer a união do bloco tarefa-técnica [**T, τ**] visto como o “saber fazer” ao bloco tecnologia-teoria [**θ, Θ**] vista como “saber”. Faremos uso ainda, na nossa análise, do Discurso Teórico-tecnológico, que consiste na aplicação de uma teoria/tecnologia de forma conjunta a uma técnica.

Neste sentido, para executarmos o estudo praxeológico no exemplo acima, seguiremos os seguintes procedimentos:

1º Identificar a Tarefa (t)!

Construir o gráfico da função quadrática $y(x) = x^2 - 8x + 12$ para os valores de $0 \leq x \leq 8$;

Verifique para que valores de x temos $y = 0$;

Calcular as coordenadas do vértice.

2º Identificar a Técnica (τ)!

Substituir os valores de x na lei de formação da função, para valores numéricos de 0 até 8, determinando os pares ordenados;

Determinar as raízes quando no tratamento algébrico verificarmos $y(x) = 0$;

Para calcular as coordenadas do vértice podemos utilizar a fórmula das coordenadas do vértice.

3º Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$.

4º Definição de função quadrática, com o significado geométrico das raízes e vértice da função quadrática.

Portanto, analisaremos os livros didáticos adotados pela Instituição de Ensino, somente nos reportando ao objeto matemático função quadrática, buscando compreender a abordagem do assunto e atividades relacionadas aos coeficientes da função, construção dos gráficos, características dos gráficos, pontos notáveis e que passagens são mais utilizas das Linguagens: Natural para Algébrica? Algébrica para Tabular? Tabular para Gráfica? Estabelecer uma relação entre duas grandezas para chegar a uma função quadrática ou calcular pontos de pares ordenados e noções de áreas. Representar graficamente uma função quadrática através dos pontos notáveis. Esboçar o gráfico para determinar o vértice, raízes e ponto de máximo e de mínimo ou estudo da função, se na forma como são expostos aos estudantes, os mesmos contribuem para o surgimento de obstáculos didáticos.

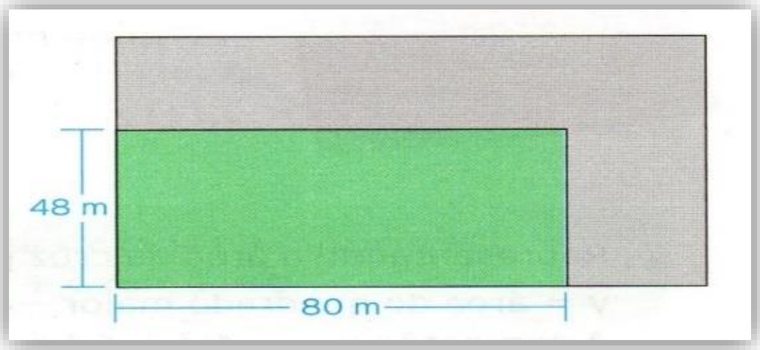
2.5.2 Análise praxeológica do Livro A adotados pelas Instituições

Livro A - A organização do capítulo intitulado como "Funções" inicia com as autoras alertando para vários empregos da palavra função, relacionando, por exemplo, desemprego em função do crescimento da economia, a assistência precária nos hospitais em função da quantidade de funcionários e, por fim, afirmam que a televisão tem a função de levar informações aos telespectadores. Neste aspecto as autoras mencionam que a dependência entre duas grandezas equivale ao conceito de função.

Iniciando funções quadráticas, chama a atenção para as situações vividas no cotidiano, como lançamento de objetos que descrevem uma parábola na trajetória, antenas parabólicas e cita a história de Arquimedes, que ajudou as tropas de Siracusa a vencer os romanos construindo vários espelhos parabólicos e os direcionando-os aos barcos inimigos, há mais de dois mil anos.

Posteriormente, mostra o primeiro exemplo para determinar a relação entre duas grandezas onde a área depende das larguras das faixas:

Figura 9 – Exemplo de relação entre duas grandezas que levam a função quadrática.



Livro A, 2012, p. 229.

$$Y = (x+48).(x+80)$$
$$Y = x^2 + 80x + 48x + 3480$$
$$Y = x^2 + 128x + 3840$$

Logo após, afirma que tal resultado é do tipo $Y = ax^2 + bx + c$ com seus coeficientes $a = 1$, $b = 128$, $c = 3840$ e que, assim ocorrendo, a mesma é uma **Função polinomial de 2ºgrau** ou **Função quadrática**, e o livro solicita que os estudantes realizem as atividades a seguir:

Figura 10 – Exemplo de Atividades.

Explore o texto

- Um jogador de futebol dá um chute, bem forte, em uma bola com certa inclinação em relação ao solo. Como é denominada a curva que representa a trajetória da bola?
- Mencione duas aplicações das propriedades refletoras das superfícies parabólicas.
- Qual é a função quadrática definida no exemplo da quadra de esportes mencionado na página anterior?
- Essa função é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$? Quais são os coeficientes **a**, **b** e **c**?
- A função $s = 3t^2 + 7t + 9$ é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$? Quais são as variáveis dessa função?
- Escreva uma expressão algébrica do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Troque com um colega e peça-lhe que identifique as variáveis e os coeficientes.

Livro A, 2012, p.230.

Salientamos que até então, nestas atividades não foi mencionado o que define uma parábola, variáveis e coeficientes, o que pode levar algum estudante a pensar que este assunto está em um nível inalcançável. Vale lembrar, no exemplo do jogador, que ao se dar um chute em uma bola, devemos levar em consideração as direções inconstantes do vento e modos de aplicar a técnica do chute, pois, são forças que podem alterar a trajetória da bola, não descrevendo uma parábola.

Após as atividades acima segue outro exemplo relacionando área com lados do quadrado, e a definição de função quadrática:

Figura 11 – Conceito de função polinomial de 2º grau.

Função polinomial de 2º grau, ou **função quadrática**, é toda função definida por uma fórmula do tipo: $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, **com** $\mathbf{a \neq 0}$.

Livro A, 2012, p.231.

Neste momento são definidos os coeficientes a, b e c como números reais, com $a \neq 0$, sendo c o termo independente, x a variável independente e y a variável dependente.

As autoras iniciam com a atividade:

Figura 12 – Exemplo de Atividade para determinar o par ordenado.

Qual é o valor de y correspondente a $x = \dfrac{1}{2}$ na função $y = -40x^2 + 18x$?

Livro A, 2012, p.232.

Tarefa (t) determinar o valor de y dado o valor de x;

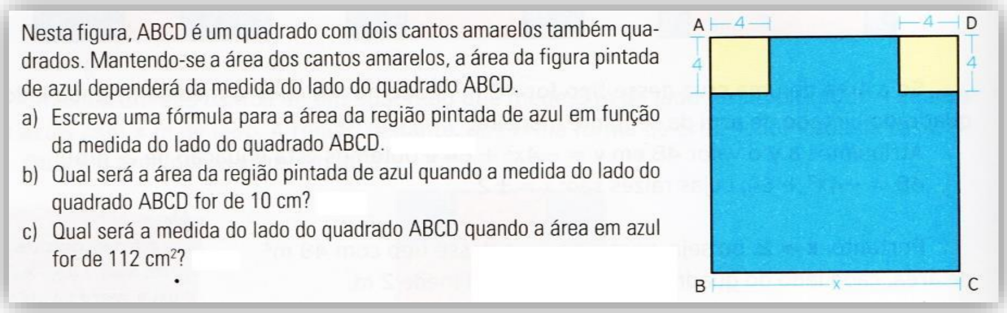
Técnica (τ) substituir o valor de x na função algébrica e executar os cálculos necessários para encontrar um para ordenado (x, y);

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ definição de função quadrática, associando um ponto do domínio obtendo uma única imagem.

Nesta atividade as autoras mostram a preocupação em estabelecer a noção de correspondência preparando os estudantes para a construção de tabelas e gráficos. A forma de execução da tarefa equivale apenas a um tratamento, não há mudança de registro da forma algébrica para tabular (DUVAL, 2009).

Seguindo para próxima atividade:

Figura 13 – Exemplo de Atividade para determinar uma função quadrática.


Nesta figura, ABCD é um quadrado com dois cantos amarelos também quadrados. Mantendo-se a área dos cantos amarelos, a área da figura pintada de azul dependerá da medida do lado do quadrado ABCD.

a) Escreva uma fórmula para a área da região pintada de azul em função da medida do lado do quadrado ABCD.

b) Qual será a área da região pintada de azul quando a medida do lado do quadrado ABCD for de 10 cm?

c) Qual será a medida do lado do quadrado ABCD quando a área em azul for de 112 cm²?

Livro A, 2012, p.232.

Tarefa (t) escrever a fórmula da função quadrática que representa a área da figura em função dos lados na forma algébrica;

Técnica (τ) escrever que os lados do quadrado têm valor x e que o produto de dois lados é igual a sua área y subtraída à área dos dois quadrados internos;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ é o conceito de função e de área.

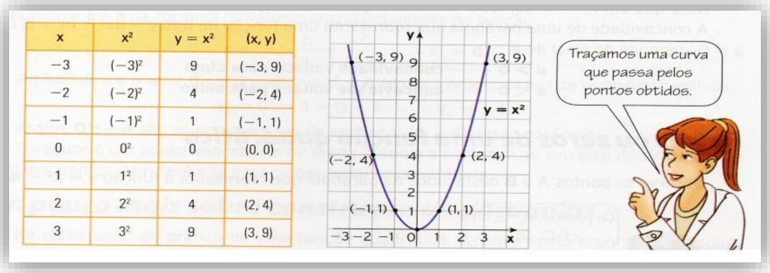
Neste exercício as autoras objetivaram relembrar as noções de função, de dependência e área em relação às medidas dos lados do quadrado, levando os estudantes a reforçar os conceitos estudados em atividades anteriores.

As atividades propostas pelo livro neste capítulo sobre função quadrática, na qual as autoras tem o objetivo de mostrar como partir de um problema relacionando duas grandezas para obter uma fórmula que representa uma função quadrática, é composta de seis (6) atividades. Ocorre que somente duas (2) têm este cunho, as outras quatro (4) são cálculos para determinar pares ordenados e área da figura plana.

Seguindo as atividades, o livro oferece um capítulo denominado **Representação Gráfica de uma função quadrática**, e inicia o mesmo afirmando que os gráficos de uma função quadrática de uma expressão algébrica ax^2+bx+c é uma parábola. Neste momento, o livro didático, de acordo com Brousseau (2008) incorreu em um efeito do contrato didático chamado Topaze, quando o professor seleciona respostas prontas, tomando a responsabilidade para si, quando esta é do estudante. Com efeito, a construção do conhecimento visado torna-se ineficiente (ALMOULOUD, 2007).

Ainda neste segmento o livro didático solicita que o estudante desenhe o gráfico da função $y=x^2$ e sugere primeiramente a construção de uma tabela, substituindo os valores de x e através dos cálculos, determinar os correspondentes em y, ou seja, os pares ordenados do plano cartesiano.

Figura 14 – Exemplo de Atividade para esboçar o gráfico da função quadrática.



x	x^2	$y = x^2$	(x, y)
−3	$(-3)^2$	9	(−3, 9)
−2	$(-2)^2$	4	(−2, 4)
−1	$(-1)^2$	1	(−1, 1)
0	0^2	0	(0, 0)
1	1^2	1	(1, 1)
2	2^2	4	(2, 4)
3	3^2	9	(3, 9)

Livro A, 2012, p.233.

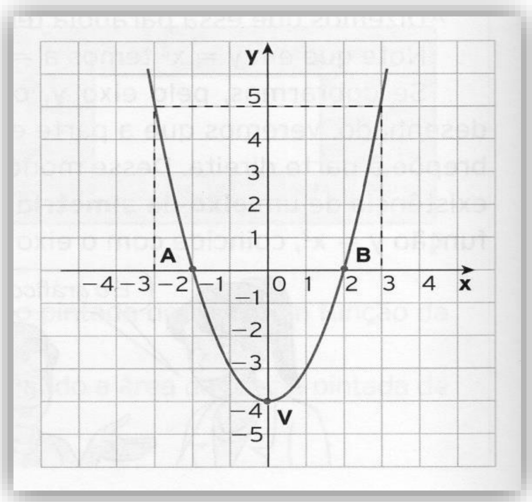
Neste caso as autoras chamam a atenção para o coeficiente $a=1$ da função, ou seja, $a>0$ (positivo), afirmando por este motivo que a concavidade é voltada para “cima”. Em seguida, solicitam que os estudantes dobrem o desenho tendo como referência o eixo y para perceberem o eixo de simetria. Neste mesmo exemplo, chamam a atenção para a função $y=-x^2$, com $a=-1$ (negativo), logo, a concavidade da parábola é para “baixo”. Elas reforçam que a concavidade de uma parábola representada pela função $y=ax^2+bx+c$ com $a\neq 0$, depende do coeficiente a.

Observamos que o livro didático foi sucinto no que se refere ao coeficiente a e deixou de comentar que os valores de a estão relacionados com o ato de comprimir ou abrir a parábola. Vale ressaltar que o mesmo limitou-se na questão em mostrar que $a=1$ e $a=-1$, deixando de propor outros valores, tanto positivos quanto negativos, levando o estudante a imaginar que os coeficientes sempre terão estes valores, além de expressar de pronto que a concavidade ficaria para cima ou para baixo, conforme os coeficientes positivos ou negativos, incorrendo novamente no efeito Topaze, ou seja, também deixou de permitir ao estudante a construção do conhecimento.

Neste contexto, o fato dos estudantes não terem uma visão completa do coeficiente a é fator gerador de obstáculo didático, uma vez que, na introdução do estudo de movimento uniformemente variado em ciências no próprio nono ano, o coeficiente a na função quadrática aparece na forma de aceleração assumindo diversos valores reais.

No tópico Raízes ou zeros de uma função quadrática as autoras solicitam que os estudantes observem os pontos $A=(-2,0)$ e $B=(2,0)$ representados na função quadrática $y=x^2-4$ no plano cartesiano:

Figura 15 – Exemplo de Atividade para identificar as raízes da função quadrática.



Livro A, 2012, p.233.

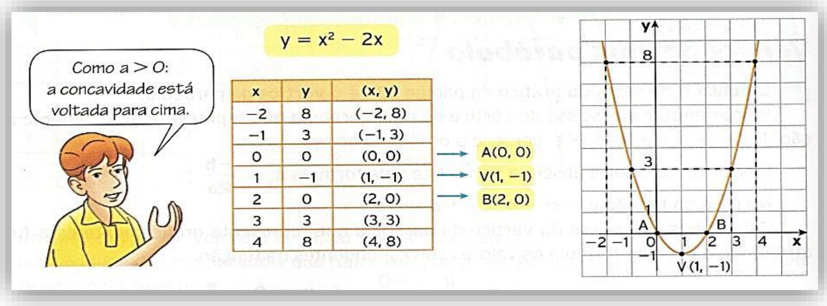
Então, definem as raízes de uma função como os valores que x assume quando temos $y=0$.

Comentam também na página seguinte, sobre o ponto $V=(0,-4)$, como sendo o vértice da parábola, é possível de ser calculado através da fórmula $X_v=\frac{-b}{2a}$ e informam que, para calcular a outra coordenada do vértice Y_v basta substituir o valor de X_v encontrado na $y=x^2-4$.

Neste ponto as autoras se propuseram a mostrar como esboçar um gráfico da função quadrática apenas obtendo os três pontos notáveis.

Através do primeiro exemplo as autoras deixam explícitas suas intenções sobre o procedimento apresentado e, ainda, o segundo exemplo segue o mesmo pedido, para outra função com $a < 0$.

Figura 16 – Exemplo de atividade para identificar as raízes e vértice.



Livro A, 2012, p.236.

As informações são:

Tarefa (t) Construir o gráfico da função quadrática $y = x^2 - 2x$;

Técnica (τ) determinar as coordenadas do vértice através da fórmula $X_v = \frac{-b}{2a}$.

Determinar as raízes fazendo $y = 0$ e resolvendo a equação do 2º grau.

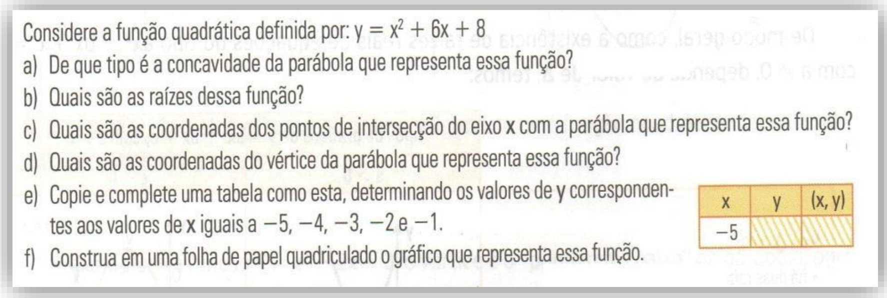
Substituir alguns valores de x positivos e negativos, com valores próximos a X_v.

Organizar os pares ordenados em tabela para marcar no plano cartesiano.

O discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ é a visualização do significado geométrico das raízes na abscissa e da intersecção da parábola no eixo das ordenadas, assim como o vértice.

As atividades propostas pelo livro neste capítulo, chamado “Representação gráfica da função quadrática”, possuem o objetivo principal de mostrar como calcular os pares ordenados da função, identificando-os em uma tabela para melhor representação gráfica e, a partir do gráfico, identificar as raízes e vértices, reforçando a função do parâmetro relativo à concavidade. O capítulo tem sete atividades gerando alguns subitens, como 11 construções de tabelas e respectivos gráficos, seis atividades relativas a concavidades, seis atividades relativas às raízes da função e 13 atividades relativas ao vértice da função. Dentre estas atividades podemos destacar a de um resumo dos estudos de construção gráfica, vértice e raízes:

Figura 17 – Exemplo de Atividade para identificar as raízes e vértice.



Considere a função quadrática definida por: $y = x^2 + 6x + 8$

a) De que tipo é a concavidade da parábola que representa essa função?

b) Quais são as raízes dessa função?

c) Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção do eixo x com a parábola que representa essa função?

d) Quais são as coordenadas do vértice da parábola que representa essa função?

e) Copie e complete uma tabela como esta, determinando os valores de y correspondentes aos valores de x iguais a −5, −4, −3, −2 e −1.

x	y	(x, y)
−5		

f) Construa em uma folha de papel quadriculado o gráfico que representa essa função.

Livro A, 2012, p.237.

As ações para as figura 16 são:

Tarefa (t) Construir uma tabela e o respectivo gráfico da função, calcular raízes, vértice e analisar concavidade;

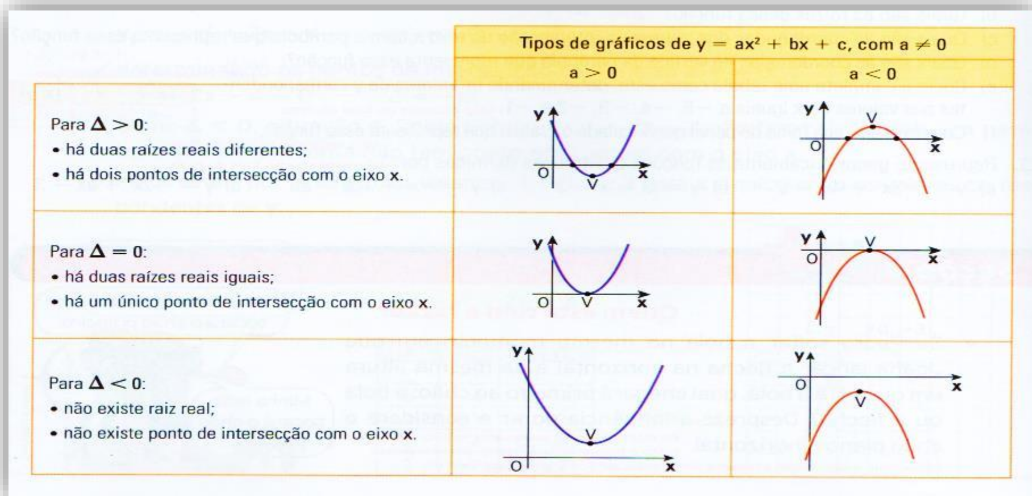
Técnica (τ) Analisar a concavidade observando o coeficiente a, fazer $y = 0$ e resolver a equação, calcular as coordenadas do vértice através das fórmulas, substituir os valores dados em x na função $y = x^2 + 6x + 8$, construir a tabela e gráfico;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição de função quadrática, raízes, vértice e representação gráfica.

Neste contexto, as abordagens das atividades têm características de procedimento por pontos de acordo com Duval (2011), em que a atividade indica um caminho no qual o estudante tem sucesso para construir o gráfico através dos pontos notáveis, entretanto, deixa de perceber a importância da interpretação dos coeficientes da função quadrática e suas implicações.

Encerrando a exposição do conteúdo sobre função quadrática as autoras buscam fazer um resumo no capítulo chamado “Estudando parábolas” sobre concavidade, vértice, valor de máximo e de mínimo:

Figura 18 – Tipos de Gráficos com raízes de acordo com o valor do $Delta(\Delta)$.



	Tipos de gráficos de $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$	
	$a > 0$	$a < 0$
Para $\Delta > 0$: • há duas raízes reais diferentes; • há dois pontos de intersecção com o eixo x.		
Para $\Delta = 0$: • há duas raízes reais iguais; • há um único ponto de intersecção com o eixo x.		
Para $\Delta < 0$: • não existe raiz real; • não existe ponto de intersecção com o eixo x.		

Livro A, 2012, p.238.

Neste tópico o livro inicia afirmando que, com as construções dos gráficos, agora é possível fazer algumas inferências, como concavidade e raízes, de acordo com os valores de $Delta(\Delta)$ e, através do esboço do gráfico, é possível identificar as coordenadas do vértice para dizer se o valor é de máximo ou mínimo.

Percebemos que as autoras buscam mostrar que há várias características e possibilidades que dependem do valor do $Delta(\Delta)$. Neste ponto, o livro toma para si a responsabilidade que é do estudante, mas, o ideal é que este possa construir o seu conhecimento através das investigações e questionamentos em cada atividade proposta pelo livro, ficando caracterizado o efeito Topaze da teoria das situações didáticas.

Segue o primeiro exemplo:

Figura 19 – Exemplo de Atividade para identificar as raízes e vértice.

1º exemplo: Na função $y = x^2 - 2x - 3$, o vértice é o "ponto mais baixo" da parábola, pois $a = 1$ e $a > 0$.

Livro A, 2012, p.239.

Tarefa (t) Esboçar o gráfico da função e identificar o vértice;

Técnica (τ) Calcular as coordenadas do vértice, através da fórmula $X_v = \frac{-b}{2a}$ e depois substituir o valor na função, para determinar Y_v e analisar se o ponto e de máximo ou de mínimo;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição do vértice, máximo e mínimo da função quadrática.

Neste exemplo o livro já informa que o valor calculado e ponto de mínimo deixando de oportunizar ao estudante esta tarefa. O segundo exemplo segue a mesma linha para outra função com o coeficiente negativo e nos mesmos termos indica que é ponto de máximo.

As atividades deste tópico são apenas cinco, porém, seguem caminhos diferentes dos exemplos no que se refere à estrutura das perguntas, pois, têm características de investigação, o que é positivo para a construção do conhecimento. Destacamos esta atividade:

Figura 20 –Atividade para analisar valor máximo ou mínimo.

O vértice da parábola que representa geometricamente a função definida pela fórmula $y = 3x^2 - 18x + 50$ é o seu ponto "mais alto" ou "mais baixo"? Justifique sua resposta. Quais são as coordenadas desse ponto?

Livro A, 2012, p.240.

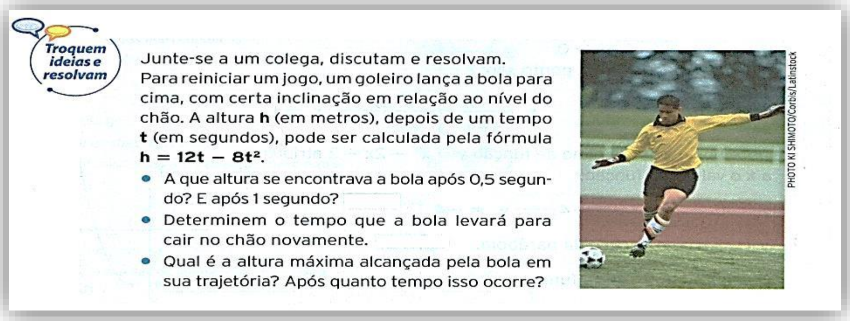
Tarefa (t) Representar graficamente a função, determinar o vértice e analisar se é valor de máximo ou de mínimo e justificar;

Técnica (τ) Calcular as coordenadas do vértice, através da fórmula $X_v = \frac{-b}{2a}$ e depois substituir o valor na função, para determinar Y_v e analisar se o ponto e de máximo ou de mínimo;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição do vértice, máximo e mínimo da função quadrática.

Finalizando este tópico o livro propõe uma atividade interdisciplinar preparando os estudantes para ter contato com problemas ligados à introdução da Física no ensino médio, uma questão contextualizada que contribui significativamente para adaptação do estudo da Física:

Figura 21 –Atividade interdisciplinar com a física sobre função quadrática.



Livro A, 2012, p.240.

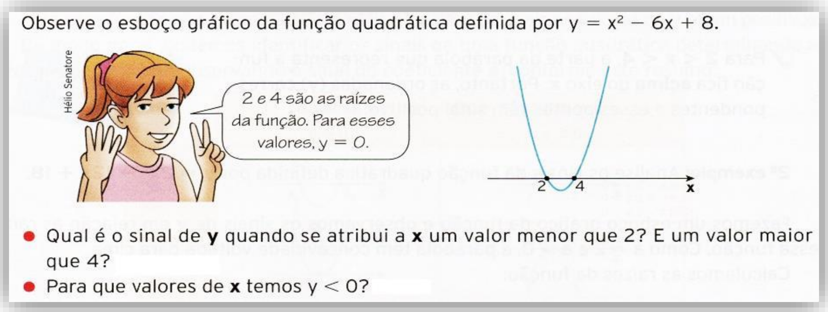
Tarefa (t) Calcular a altura da bola para dois tempos determinados, o tempo de deslocamento até chegar o chão novamente e a altura máxima atingida pela bola.

Técnica (τ) Substituir os valores dos tempos na função h(t) e realizar os cálculos, depois, fazer $h(t) = 0$ e calcular o tempo e por fim calcular as coordenadas X_v e Y_v;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição de função quadrática, definição das coordenadas do vértice da função e definição de máximo e mínimo.

Finalizando o assunto, há um capítulo sobre o estudo dos sinais da função quadrática, abordado conforme a situação da figura a seguir:

Figura 22 –Estudo do sinal da função quadrática.



Livro A, 2012, p.241.

Tarefa (t) Estudar o sinal da função quadrática $y = x^2 - 6x + 8$, para $x < 2, x > 4$ e entre estes dois valores $2 < x < 4$;

Técnica (τ) A partir das raízes 2 e 4 esboçar o gráfico e fazer o estudo do sinal de y para $x < 2, x > 4$ e verificar também para $2 < x < 4$;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição de imagens e estudo do sinal da função.

Seguindo para o primeiro exemplo as autoras apresentam as mesmas atividades, porém, com inversão nos sinais dos coeficientes. Aqui notamos a preocupação em mostrar dois exemplos simétricos para melhor estudar as funções que possuem duas raízes reais.

No segundo exemplo as autoras propõem uma função $y = 2x^2 - 12x + 18$ e solicitam que se façam os estudos. Como o coeficiente a é positivo, a sua concavidade é voltada para cima, então, temos:

Tarefa (t) Esboçar o gráfico da função e estudar os sinais da função quadrática $y = 2x^2 - 12x + 18$;

Técnica (τ) Fazer $y = 0$, determinar o delta e resolver a equação para localizar as raízes e fazer o estudo dos sinais da função;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição de função quadrática e Imagem.

Neste tópico as autoras buscaram apresentar um modelo de situação para cada caso, mostrando a preocupação em evidenciar quando temos estudos para $\Delta > 0$ temos duas raízes reais e diferentes, $\Delta = 0$ duas raízes iguais, ou seja, uma, e $\Delta < 0$ quando não existe raiz real (confuso). Seguem oito atividades todas na mesma linha dos modelos apresentados acima.

2.5.3 Análise praxeológica do Livro B adotados pelas Instituições

Avançando a analise para o Livro B, o autor deste define a função quadrática, desta maneira:

Figura 23 –Definição de função quadrática.

Chama-se *função quadrática* toda função cuja lei de formação pode ser indicada por: **$y = ax^2 + bx + c$**, com **a**, **b** e **c** reais e a ≠ 0.

Livro B, 2011, p. 99

O autor enfatiza que nesta função quadrática os valores de x podem assumir qualquer valor real e, logo em seguida, apresenta seis exemplos de funções quadráticas, enumerando os respectivos coeficientes para cada função (neste ponto chamamos atenção para o efeito Topaze), e faz também uma ressalva com quatro exemplos de funções que não são quadráticas, ou seja, variáveis com expoentes um ou três.

Nas atividades propostas pelo autor para este tópico, em alguns exercícios são feitas observações de forma direta dos coeficientes; em outras, há necessidades mais específicas, como neste caso: “Entre as sentenças abaixo registre no caderno as que indicam funções quadráticas: d) $y = x(3x-2)$.”

Tarefa (t) Registrar as funções quadráticas;

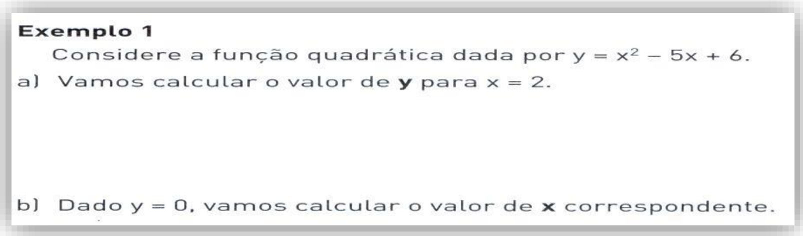
Técnica (τ) Observar qual o maior valor numérico dos expoentes da variável independente, caso não seja explicito, aplicar a propriedade adequada neste caso distributiva;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição de função quadrática e seus respectivos coeficientes.

Neste tópico o autor mostra a necessidade do estudante saber identificar uma função quadrática, buscando uma justificativa para sua escolha.

O próximo passo é determinar o valor de uma função quadrática em um ponto. Para isto, sendo conhecido o valor da variável independente x, podemos encontrar o valor de y, ou conhecido o valor y, encontramos o valor de x.

Figura 24 – Calcular pontos de pares ordenados.


Exemplo 1

Considere a função quadrática dada por $y = x^2 - 5x + 6$.

a) Vamos calcular o valor de **y** para $x = 2$.

b) Dado $y = 0$, vamos calcular o valor de **x** correspondente.

Livro B, 2011, p. 100

Tarefa (t) Calcular o valor de x e de y.

Técnica (τ) Substituir o valor de $x = 2$ na função quadrática $y = x^2 - 5x + 6$, desenvolver o cálculo, depois na função quadrática fazer $y = 0$ e resolver a equação;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição de função quadrática, noção dependência e correspondência.

Segue o exemplo 2 com os mesmos objetivos do exercício acima. Neste ponto, o autor mostrou a importância de o aluno saber executar as substituições e respectivos cálculos inerentes aos problemas a serem resolvidos.

Para o próximo tópico o autor define o que seria zeros de uma função e explica que, se existem valores reais de x que levam a função a assumir o valor $y = 0$, então, esses valores são chamados de zeros da função. Depois, expõe um exemplo para servir de modelo: Calcule os zeros da função quadrática $y = x^2 - 9x + 20$.

Tarefa (t) Calcular os zeros da função quadrática;

Técnica (τ) Fazer $y = 0$ e resolver a equação do 2º grau;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição de função e noção de zeros da função.

Neste tópico o autor mostrou a preocupação em preparar os estudantes para analisarem os valores de delta, pois, estes valores trazem informações importantes para sabermos a quantidades de zeros possíveis. Nas atividades que se seguem percebemos que além dos objetivos dos dois exemplos acima, foram incluídos exercícios para identificar todos os coeficientes da função quadrática.

No passo seguinte o livro traz a definição de gráfico de uma função, introduzindo a curva chamada parábola, como sendo y igual a um polinômio de grau 2 e apresentando uma forma característica $ax^2 + bx + c$ com o coeficiente $a \neq 0$ é sempre chamada de parábola e apresenta dois exemplos de construção de gráficos e uma tabela com valores para x com a sua correspondência em y e o gráfico ao lado, indicando o vértice da função.

Figura 25 – Calcular pontos de pares ordenados.

Use papel quadriculado e construa os gráficos das funções quadráticas correspondentes às leis dadas. Em cada uma, descubra os pares necessários até identificar a parábola.

(Uma dica: comece descobrindo o vértice (x_V, y_V), calculando $x_V = \frac{-b}{2a}$ e depois use para **x** dois valores maiores do que $\mathbf{x}_V$ e dois menores.)

a) $y = -2x^2 - 4x + 1$ b) $y = 2x^2 + 1$ c) $y = -x^2 + 2x$ d) $y = -x^2$

Livro B, 2011, p. 103.

Tarefa (t) Construir os gráficos

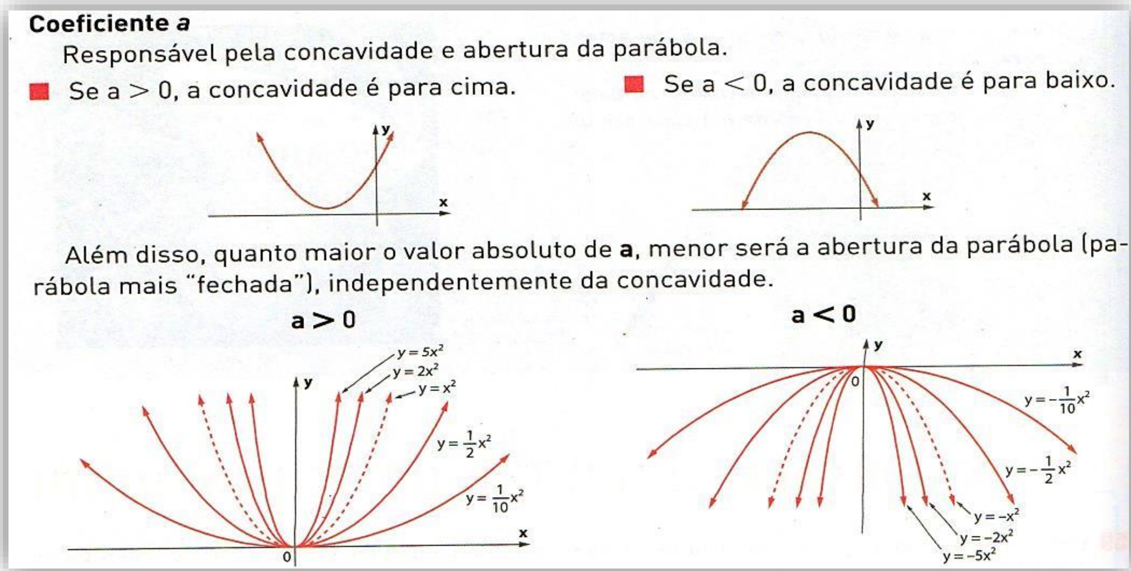
Técnica (τ) Determinar o X_v e substituir na função para determinar o Y_v, depois escolher pontos próximos do X_v tanto à direita como à esquerda, depois marcar as coordenadas no papel quadriculado, para identificar a parábola.

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição de vértice e função quadrática, associando os valores de x aos correspondentes em y.

Neste mesmo contexto seguem as atividades do livro para construção de gráficos, sendo importante ressaltar que as atividades vêm em boa parte em forma de pergunta, criando assim um caráter investigativo, que é um ponto positivo, pois, os estudantes têm possibilidades de construir o seu conhecimento, evitando o efeito Topaze.

Agora o livro apresenta uma parte chamada "Gráficos da função quadrática e os coeficientes a, b, c".

Figura 26- Coeficiente a.

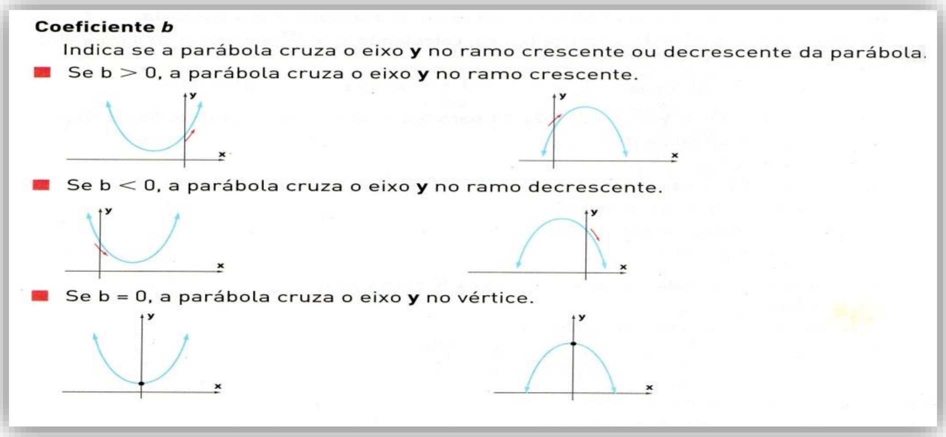


Livro B, 2011, p. 104.

Nesta figura o autor esclarece que se este coeficiente for positivo a sua concavidade será voltada para cima e, se negativo, a sua concavidade será voltada para baixo, entretanto, o autor foi mais além, alertando que este coeficiente também tem responsabilidade importantíssima na convergência ou divergência em relação ao seu eixo de simetria.

Em relação ao coeficiente b o autor apresenta as possibilidades em que o gráfico pode ser construido.

Figura 27- Coeficiente b .

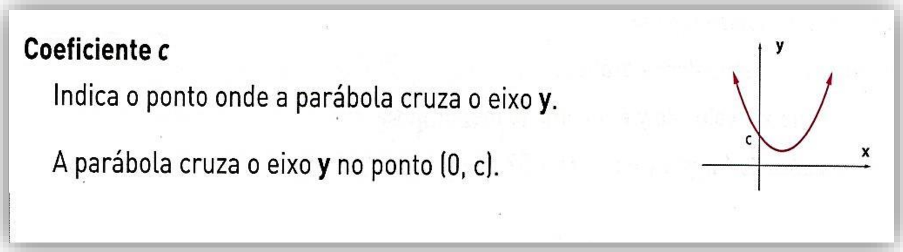


Livro B, 2011, p. 104

Neste ponto ressalto que o livro expõe de forma clara e objetiva as propriedades do coeficiente b, entretanto, como forma de complementar na sua totalidade tais propriedades, se faz necessário usar um software educacional como forma de dinamizar a construção do conhecimento dos coeficientes, isto porque a tecnologia lápis e papel milimetrado para construir vários gráficos ainda não seria suficiente para mostrar com profundidade o efeito causado pelo deslocamento do coeficiente que, além de deslizar no eixo das ordenadas, constrói uma parábola simétrica em torno do seu vértice.

Finalizando este tópico o autor mostra o coeficiente c e sua particularidade.

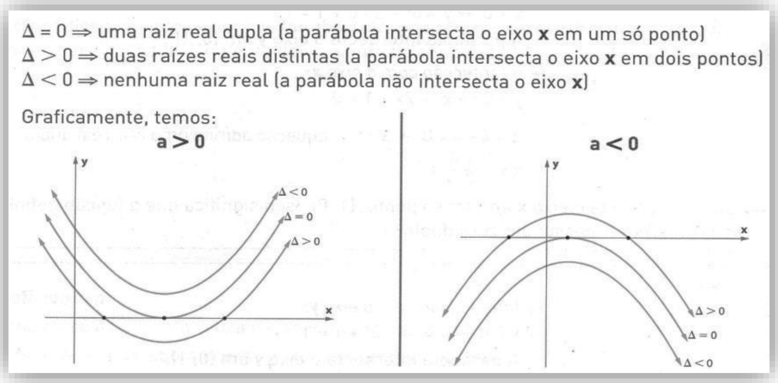
Figura 28- Coeficiente c .



Livro B, 2011, p. 104.

Neste quesito, o autor foi objetivo e indicou que o coeficiente tem a finalidade de mostrar onde a parábola cruzou o eixo y . No passo seguinte o autor se preocupou em apresentar os pontos de intersecção da parábola com os eixos x e y no plano cartesiano, conforme os valores de delta se apresentavam $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

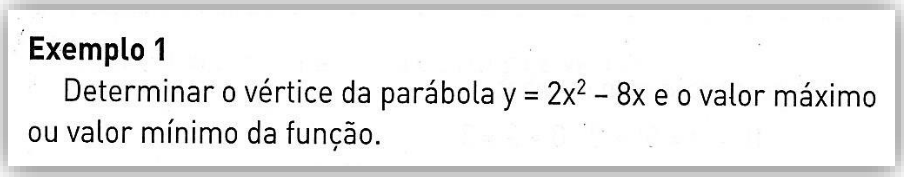
Figura 29 – Intecptações da parábola nos eixos catesianos.



Livro B, 2011, p. 106.

Prosseguindo o autor define o vértice da função e informa que este, no gráfico, serve de parâmetro para o valor máximo ou valor mínimo e depois aplica exemplos para nortear as construções dos conhecimentos.

Figura 30- Atividade com vértice.



Exemplo 1

Determinar o vértice da parábola $y = 2x^2 - 8x$ e o valor máximo ou valor mínimo da função.

Livro B, 2011, p. 106.

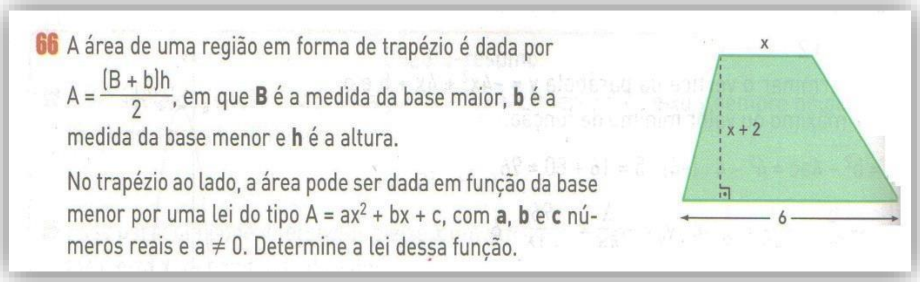
Tarefa (t) Determinar as coordenadas dos vértices;

Técnica (τ) Calcular as coordenadas do vértice, através da fórmula $X_v = \frac{-b}{2a}$ e $Y_v = -\frac{\Delta}{2a}$ depois analisar se o ponto e de máximo ou de mínimo;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Definição do vértice, do ponto de máximo ou de mínimo.

Segue o exemplo 2 na mesma linha com o coeficiente a negativo, assim como as atividades inerentes a este tópico. Apenas destacamos um exercício diferenciado que visa relacionar a área em função da base menor.

Figura 31- Atividade para determinar lei de associação da função.



66 A área de uma região em forma de trapézio é dada por $A = \frac{(B + b)h}{2}$, em que **B** é a medida da base maior, **b** é a medida da base menor e **h** é a altura.

No trapézio ao lado, a área pode ser dada em função da base menor por uma lei do tipo $A = ax^2 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** números reais e $a \neq 0$. Determine a lei dessa função.

Livro B, 2011, p. 108.

Tarefa (t) Determinar a função em que a Área dependa da base menor;

Técnica (τ) Na fórmula da área de um trapézio $A = \frac{(B+b)h}{2}$ substituir seus respectivos valores $B = 6$, $b = x$ e $h = x + 2$ depois desenvolver os cálculos;

Discurso Teórico-tecnológico $[\Theta, \theta]$ Conceito de Área e função quadrática.

Percebemos que o autor diferencia esta atividade buscando a noção geométrica e relacionando com algébrico para determinar a lei dessa função.

Portanto, quanto ao Livro A, podemos inferir nesta análise praxeológica sobre as características dos modelos, exemplos e das atividades que abordaram a função quadrática, que suas autoras privilegiam os seguintes aspectos:

a) Assumir o papel que é do estudante para si, efeito do Contrato Didático da Teoria das Situações Didáticas, chamado de efeito Topaze;

b) A passagem da linguagem algébrica para tabular encerrando com a gráfica;

c) As construções de tabelas e Gráficos;

d) O conjunto dos números Naturais para valores de x;

e) O coeficiente a somente com relação à concavidade da parábola.

Por outro lado, verificamos que não houve abordagem de forma completa para todos os coeficientes da função quadrática, assim como, sobre reflexão das translações verticais e horizontais. Há somente a passagem do registro algébrico para o registro gráfico, nos convencendo que as tarefas e técnicas no livro apresentado indicam procedimento por pontos segundo Duval (2011), no qual a construção do conhecimento do objeto matemático fica comprometida, pois, os estudantes, ao construir gráficos, primeiro no registro tabular para depois passar para o registro gráfico, não havendo a passagem de volta do gráfico para o algébrico. Há a excessiva preocupação em calcular "pontos" pares ordenados, isto contribui como fator para adquirir um obstáculo didático.

> Quando se trata de partir da representação gráfica para encontrar, por exemplo, a equação correspondente ou para utilizar o conceito de inclinação ou de direção, é esta abordagem de interpretação global que se torna necessária. A razão disto se deve ao fato de que o recurso à abordagem ponto a ponto é totalmente inoperante uma vez que tira a atenção das variáveis visuais. A prática sistemática da abordagem ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global que é em geral deixada de lado no ensino uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica. Compreende-se porque a maioria dos alunos fica aquém de uma utilização correta das representações gráficas (DUVAL, 2011, p. 99).

O Livro B o autor buscou abordar o conteúdo de forma dinâmica com várias representações matemáticas, porém, houve, em nosso ponto de vista, alguns privilégios:

a) De forma mais leve, também assume o papel que é do estudante para si, efeito do Contrato Didático da Teoria das Situações Didáticas, chamado de efeito Topaze;

b) De forma intensa, há a passagem da linguagem algébrica para tabular encerrando com a gráfica;

c) De forma intensa também há construções de tabelas e Gráficos;

d) Não há privilégio para os elementos do conjunto dos números Naturais para valores de x e há uma variação equilibrada para os conjuntos N, Z e Q;

e) O autor trabalha todos os coeficientes (a,b,c) de forma global e foi além: procurou mostrar suas propriedades através de figuras para melhor entendimento.

Desta forma, entendemos que os autores têm preferência na passagem da representação algébrica para representação gráfica que, conforme Duval (2011), são procedimentos por pontos.

2.6 Obstáculos Didáticos

O criador do termo "obstáculo epistemológico na educação" foi Gaston Bachelard, pois, acreditava que a Matemática estava incumbida de estudar e buscar soluções para as teorias nela envolvidas, enquanto que, para Guy Brousseau a Matemática deve se ocupar da construção do conhecimento matemático com ênfase no raciocínio para resolver problemas.

A observação das modelagens das situações levou Brousseau a divergir e buscar adaptações consistentes do conceito a educação:

> Um obstáculo é um “conhecimento” no sentido que lhe demos de “forma regular de considerar um conjunto de situações”.
> Tal conhecimento dá resultados corretos ou vantagens observáveis em um determinado contexto, mas revela-se falso ou totalmente inadequado em um contexto novo ou mais amplo.
> O conhecimento novo, verdadeiro ou válido sobre um contexto mais amplo não é determinado “de acordo com” o conhecimento anterior, mas em oposição a ele: utiliza outros pontos de vista, outros métodos etc. Entre eles não existem relações lógicas evidentes que permitam desacreditar facilmente o erro antigo por meio do conhecimento novo. Ao contrário, a competição entre eles acontece no primeiro contexto... (BROUSSEAU. 2008. p. 49).

Para Brousseau o ato fundamental para superar obstáculos é o “erro” e este tem se revelado, ao longo do tempo dentro do campo educacional, um instrumento de censura, rejeição, constrangimento e até mesmo de reprovação, causando um impacto negativo de grandes proporções na aprendizagem da matemática.

Na perspectiva de Brousseau (2008), quando o estudante apresenta dificuldade de assimilar um problema ou buscar uma solução ideal em virtude do seu conhecimento pontual, depara-se com um obstáculo para um avanço significativo. O erro é indicador importante para o processamento de um novo ponto de vista mais amplo para superar o problema.

Segundo Brousseau (2008) os obstáculos que têm origem didática, revelam características dependentes tanto das escolhas do sistema de ensino quanto da aplicação do método pretendido pelo docente. Almouloud (2007, p. 141) se refere ao obstáculo didático da seguinte forma:

> [...] Eles nascem da escolha de estratégias de ensino que permitem a construção, no momento da aprendizagem, de conhecimentos cujo domínio de validade é questionável ou incompletos que, mais tarde, revelar-se-ão como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação.

Pela experiência profissional como professor de matemática e entrevista com professor de matemática do nono ano, percebemos que as escolhas didáticas e as práticas em sala de aula geram alguns fatores que mostram possíveis origens de obstáculos didáticos, assim como o fato das instituições matricularem mais de vinte e cinco alunos por sala também é relevante para compreender as falhas no processo educacional.

Em entrevista com o profissional lhe foi perguntado se o mesmo, no seu ponto de vista, se considerava um profissional da linha tradicional, ao que afirmou sê-lo em parte, pois os recursos e estruturas colaboravam para a situação. Sabemos que ser tradicional nos remete aos tempos de aulas expositivas, tarefas mecânicas, muitos cálculos nas atividades e prova para justificar uma nota ou conceito exigido pelas instituições de ensino.

Também perguntamos quais dificuldades os estudantes encontram para compreenderem o conceito de função quadrática, e obtivemos como resposta conseguir relacionar o conteúdo com o seu dia-a-dia, além, e também da falta de interesse em estudar.

Perguntamos qual seria a sua prioridade em ensinar função quadrática, e obtivemos uma resposta interessante: "[...] *é pegar os problemas para que eles compreendam e como transportar isso para as tabelas e depois formar os gráficos [...]". Podemos inferir desta resposta que o procedimento nas representações gráficas é feita ponto a ponto, apresentado por Duval (2011), e compromete a interpretação global. Assim, podemos concluir que este pode ser o reflexo do uso dos livros didáticos sem o apoio dos softwares educacionais de matemática.

Perguntamos se nos exercícios sobre função quadrática era solicitado aos estudantes passar da linguagem algébrica para tabular e depois para a linguagem gráfica e se os estudantes realizavam a volta deste procedimento, ao que obtivemos a resposta: [...*ainda não fiz né...mas com certeza é algo que se deve fazer.*] aqui podemos observar que, segundo Duval (2011):

> A razão profunda dessas dificuldades não se deve procurar nos conceitos matemáticos ligados à função afim, mas na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica. De fato, o ensino e mesmo certos estudos didáticos, atém-se a passagem da equação para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, esquece-se que **é a passagem inversa que traz problema**. Para efetuar tal passagem, a abordagem ponto a ponto não é somente inadequada como constitui um obstáculo... (DUVAL, 2011, p. 97).

A transformação da linguagem algébrica para a linguagem gráfica é preponderante nos livros didáticos e é importante realizá-la de modo equilibrado, porém, o retorno é imprescindível para aprendizagem e, se o mesmo deixar de ser executado, contribui para causar um obstáculo didático.

Seguindo as perguntas também procuramos saber se o professor utilizava o livro didático adotado pela instituição, ao que respondeu sim e, além deste livro, costumava usar outros para complementar o assunto. Também perguntamos se fazia uso de software educacional e conhecia algum, e o professor respondeu que não, pois o laboratório de informática teve complicações estruturais e não estava em funcionamento.

Apesar do fato do docente ter feito a escolha didática de utilizar somente o livro didático, ainda que complemente com outros livros o conteúdo a ser ministrado, há necessidade de um software matemático educativo para complementar as limitações do livro didático.

Neste contexto, ao observarmos o estudo praxeológico realizado nos livros didáticos, constatamos o privilégio do procedimento ponto a ponto nas representações gráficas e que tal atitude é desenvolvedora de obstáculos didáticos, bem como as escolhas metodológicas aplicadas em sala de aula que seguem as mesmas posturas metodológicas.

Portanto, constatados os obstáculos didáticos de identificação e representação da função quadrática, do reconhecimento do papel de seus coeficientes, assim como as translações dos gráficos que comprometem a interpretação global das representações gráficas e algébricas, fica assim, delegado ao docente a organização e planejamento das atividades inerentes aos obstáculos didáticos, construindo engenharias didáticas para atender as necessidades do conceito a ser abordado:

> organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno, segundo uma dialética conveniente. Não se trata de comunicar as informações que se quer ensinar, mas em encontrar uma situação em que somente elas satisfaçam ou atinjam a obtenção de um resultado satisfatório – [...] – no qual o aluno se investiu (tradução nossa) (BROUSSEAU *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 136).

Refletindo sobre as questões acima expostas, utilizamos uma sequência didática validada por Maia (2007) com adaptações. Assim, a nossa pesquisa vem contribuir para complementar estudos sobre função quadrática, almejando uma interpretação global dos coeficientes da função quadrática tanto na forma desenvolvida quanto na forma canônica, observando as modificações e implicações que ocorrem em virtude das mudanças nos coeficientes. Para isso, faremos uso do Software GeoGebra como uma abordagem diversificada da forma tradicional e, dessa forma, almejamos superar estes obstáculos didáticos.

CAPÍTULO 3 Metodologia

Neste capítulo mostraremos nossos procedimentos metodológicos dentro de uma Engenharia Didática de Michèle Artigue (1996), caracterizaremos os participantes envolvidos na pesquisa e apresentaremos o software educacional GeoGebra.

3.1 Características da pesquisa

Para os procedimentos metodológicos a pesquisa foi realizada nos moldes de uma investigação dentro de um esquema experimental inserido no laboratório de informática da escola.

Como metodologia foram aplicados os pressupostos da Engenharia Didática de Artigue, surgida no início dos anos 80 que foi a precursora do termo relacionado ao trabalho de um engenheiro e que tem como características:

> A engenharia didática vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em «realizações didáticas» na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino (ARTIGUE, 1996, p.196).

Almouloud (2007) reitera que se caracteriza em primeiro lugar como um esquema experimental e também como pesquisa experimental pelas situações de registros e, consequentemente, através da validação interna que lhe é característica, através do confronto entre a fase 2 (análise a *priori*) e a fase 4 (análise a *posteriori*).

Pais (2011) afirma que o pesquisador, ao utilizar esta metodologia, tem em seu benefício a valorização da mesma, pois contempla tanto as dimensões teóricas quanto as experimentais na investigação.

Na Engenharia Didática, de acordo com Artigue (1996), ao executarmos a pesquisa devemos perpassar quatro fases distintas:

Fase 1: das análises prévias

Segundo Almouloud (2007), nesta fase inicial de execução é necessário alicerçar e zelar por um quadro teórico geral da didática:

> Um dos objetivos das análises prévias é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão(ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa (ALMOULOUD, 2007, p.172).

A análise prévia, segundo Artigue (1996. p. 198) comporta várias análises, dentre as quais a "análise do ensino habitual e os seus efeitos". Desta forma, realizamos uma entrevista com a professora do 9º ano de matemática no turno matutino na Escola com a finalidade de sondar e compreender a origem de possíveis obstáculos didáticos.

Após análises da entrevista, foram encontrados os seguintes pontos relevantes para a pesquisa:

- Sobre as dificuldades que o aluno encontra para se apropriar do conceito de função quadrática, obteve-se como resposta uma certa preocupação quanto ao desafio em contextualizar o objeto matemático como forma de facilitar o aprendizado. Entretanto, Brousseau (2008) enfatiza que o professor, quando envolto às dificuldades para superar o obstáculo, se comporta como se tivesse um contrato rompido e, neste caso, sofre os efeitos deste contrato didático chamado *efeito Topaze*.
- Quanto às suas dificuldades na aprendizagem de função quadrática quando cursava o ensino médio, encontrou-se os seguintes pontos relevantes: o ensino foi vago, sem significação e a aproximação social seria importante para conhecer as dificuldades. A entrevistada enfatizou que por estes motivos tem preocupações e procura facilitar o ensino, remetendo novamente ao efeito Topaze: "... é um desafio porque, como eu tive essas dificuldades, então eu já procuro facilitar nesse sentido para eles." (sic).

Podemos observar que, de acordo com as inquietações da entrevista, existiram indícios de obstáculos didáticos, ainda que estes tenham ficado mais explícitos após o teste diagnóstico aplicado aos estudantes, para analisar as possíveis concepções e identificar as dificuldades dos alunos.

Realizamos uma análise epistemológica da função quadrática, como forma de observamos o comportamento e entraves ao longo do tempo.

Analisamos os documentos oficiais PCNs e propostas curriculares para nos situarmos sobre como o objeto matemático função quadrática é apresentado nas instituições.

Realizamos uma organização praxeológica nos livros didáticos adotados pelas instituições de ensino para observamos as propostas de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, aplicadas nas atividades somente pertinentes ao objeto de estudo função quadrática, visando identificar os possíveis obstáculos e construir um caminho dentro da sequência didática para superação destes obstáculos. Salientamos que nossa intenção não é fazer uma análise dos livros didáticos.

Constatamos que os livros didáticos fazem a opção pela abordagem ponto a ponto, pelo excesso da utilização do registro de representação semiótica na forma da linguagem algébrica $y = ax^2 + bx + c$.

Analisamos a entrevista, o teste diagnóstico e a organização praxeológica, identificamos os obstáculos didáticos de reconhecimento e representação da função $y = ax^2 + bx + c$, reconhecimento e interpretação do papel de seus coeficientes, a interpretação dos parâmetros nas translações verticais e horizontais do gráfico da função $y = a(x + m)^2 + n$.

Fase 2 concepção e análise a *priori*

Passando para a Fase 2 da concepção e da análise a *priori* com o intuito de buscar superação para os obstáculos, utilizamos a sequência didática validada por Maia (2007) com adaptações. Nesta fase, segundo a engenharia didática, o pesquisador deverá explicitar sua *variável de comando*, referente ao objeto matemático investigado, podendo ela ser *macro didática ou global* e *micro didática ou locais*. Com isto se pode ter controle sobre as atividades das sequências didáticas sobre função quadrática para verificar a aquisição da construção do conhecimento do objeto de estudo.

Fazendo a nossa escolha das variáveis macrodidáticas, conforme solicita a engenharia didática, optamos pelas funções na forma $y = ax^2 + bx + c$ e $y = a(x + m)^2 + n$ para realizarmos análises de compreensão dos comportamentos dos parâmetros, relacionados às funções e à determinação da variável micro didática. Optamos pela função $y = ax^2$ para, a partir desta, gerarmos novos gráficos. Com este posicionamento é possível controlar ou reconduzir, caso seja necessário, o comportamento dos estudantes.

Na aplicação desta sequência didática sobre função quadrática, os alunos participaram, antes, de um mini curso de preparação para o uso do *software* GeoGebra.

As atividades foram construídas seguindo este fio condutor, com o intuito de encontrar soluções para as questões e validar hipóteses que surgiram na análise prévia.

Dentro deste cenário, a primeira atividade compreendeu a função na forma desenvolvida mais simples: $y = ax^2$. Aplicamos no seu coeficiente números dos conjuntos racionais, alterando-os para evidenciarmos a variáveis visuais de concavidade, contração ou expansão da parábola em relação ao eixo de simetria.

Partimos para segunda atividade, formada pelas funções $f(x)=x^2+n$, na qual aplicamos, no parâmetro n, números do conjunto dos números inteiros, para evidenciarmos a variável visual e a posição do vértice em relação ao eixo das abscissas, e a função $f(x)=ax^2+bx$, para evidenciar a variável visual, posição do vértice em relação ao eixo das ordenadas, e ainda, a noção de vértice de uma parábola.

A terceira atividade foi formada pela função $f(x)=(x+m)^2$. Aplicamos no parâmetro m números pertencentes ao conjunto dos números inteiros, variando-os para observar a translação horizontal, para evidenciar a variável visual e a posição do vértice em relação ao eixo das ordenadas.

A quarta atividade foi formada pela função $f(x)=ax^2+bx+c$. Aplicamos nos seus coeficientes números pertencentes ao conjunto dos números inteiros, para evidenciarmos as variáveis visuais do coeficiente (a) de concavidade e contração ou expansão da parábola em relação ao eixo de simetria; no coeficiente (b) a posição do vértice em relação ao eixo das ordenadas e, no coeficiente (c), posição do vértice em ralação ao eixo das abscissas.

A quinta atividade foi formada pelas funções $f(x)=a(x+m)^2+n$ e $f(x)=ax^2+bx+c$. Ao variarmos os seus parâmetros, objetivamos evidenciar a importância dos registros de representações semióticas das funções em suas formas algébricas desenvolvidas e canônicas, fazendo a comparação entre elas para a interpretação global.

Na sexta atividade objetivamos introduzir os pontos notáveis de um gráfico, para evidenciarmos a importância do conceito de raiz, máximo e mínimo, enfatizando a interpretação global da representação gráfica.

A aplicação da sétima atividade surgiu da necessidade de institucionalizar a construção dos conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.

Fase 3 da experimentação

Neste momento foi aplicado todo o planejamento construído nas fases anteriores, nas sequências didáticas validadas por Maia (2007) com adaptações, associadas ao software educacional GeoGebra. Cada atividade teve duração de noventa minutos, sendo executadas em sete seções filmadas e em dias pré-acordados. As mesmas ocorreram no centro de mídias da escola, um ambiente reservado com temperatura agradável com a participação de 8 (oito) estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental II.

Fase 4 da análise a posteriori e da validação

Finalmente foram tratadas as informações obtidas nas fases anteriores sob o olhar dos registros nos protocolos dos estudantes, observações do professor e dos vídeos, confrontando as duas fases, a análise a *priori* com a análise *posteriori*, para se obter a validação. Segundo Almouloud:

> A análise *a posteriori* de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a *priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que:
>
> - a observação foi preparada por uma análise *a priori* conhecida do observador;
> - os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise *a priori* (ALMOULOUD, 2007, p. 177).

Nesta fase devem-se ser abordados todos os elementos que contribuíram para a apropriação do objeto matemático para que se tenha noção global para construção da validação.

3.2 Participantes da pesquisa

Esta metodologia foi aplicada em uma Escola Estadual de ensino fundamental e médio na zona distrital 6, no Bairro Cidade Nova, em Manaus-Amazonas. Foi prevista a participação de 8 (oito) discentes do 9º Ano do ensino fundamental inseridos no programa “Mais educação”. A inclusão foi de forma voluntária, após convite da professora de matemática desta escola, que também se voluntariou para participação, e ainda, houve a participação voluntária da professora de Biologia como produtora das filmagens.

A aplicação ocorreu após as aulas no mesmo turno dos participantes, na sala de mídia. Houve a composição do grupo voluntariamente e as atividades das sequências didáticas foram gravadas em vídeo, de modo a não haver constrangimento, nem interferência, no processo de coleta de dados. Foi preservada, também, a imagem dos participantes.

Optou-se por estudantes do 9º ano, por entendermos que, nesta série, são introduzidas as noções do conceito de Funções Afim e Quadrática, que, segundo o plano de curso anual, deveria ocorrer aproximadamente na segunda quinzena de setembro de 2015.

Enfatizamos que a professora dos estudantes já trabalha com *softwares* educacionais mais não conhecia o GeoGebra, diante disto os alunos participarão de um minicurso com o GeoGebra, na própria escola.

Foram programadas sete sessões com duração mínima de noventa minutos cada, em cinco dias, intercalados e agendados ao longo de duas semanas, podendo ser estendidos o número de sessões se houvesse necessidade de complementações.

3.3 Geogebra

O Geogebra é um *software* de geometria dinâmica, livre e com código aberto, acessado por *download* em http://www.geogebra.org. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter em sua dissertação de mestrado na Universidade de Salzburg, Áustria, e aperfeiçoado em conjunto com uma equipe multinacional de programadores. Tem o objetivo de contribuir como ferramenta auxiliar do professor no ensino e aprendizagem da matemática, tanto na Educação Básica quanto na Educação Superior, possuindo três diferentes imagens totalmente interligadas, a Zona Gráfica para a produção geométrica, a Zona Algébrica para a inserção de expressões algébricas e a Folha de Cálculo.

Figura 32 – página inicial do Tutorial GeoGebra.

Fonte: Tutorial GeoGebra.

O uso do software de geometria dinâmica tem modificado o comportamento do ensino aprendizagem em sala de aula porque cria um ambiente de curiosidades e desafios em conhecer a matemática de uma forma mais convidativa e atrativa, formando um quarteto sincrônico entre professor, Geogebra, saber matemático e estudante facilitando a aquisição do conhecimento.

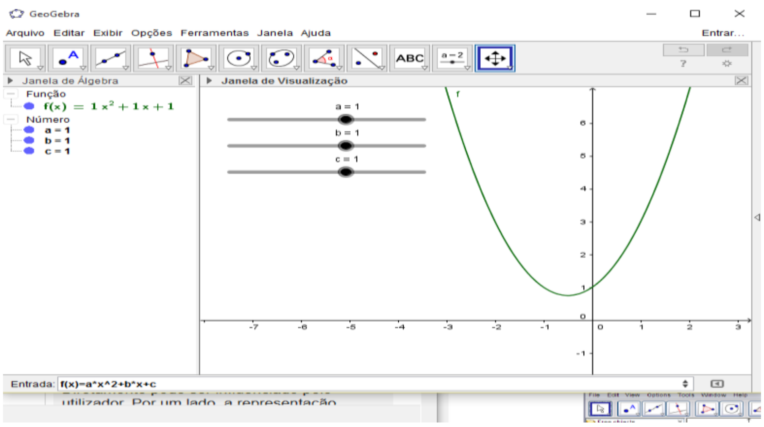
> Embora os computadores ainda não estejam amplamente disponíveis para a maioria das escolas, eles já começam a integrar muitas experiências educacionais, prevendo-se sua utilização em maior escala a curto prazo.
> Eles podem ser usados nas aulas de Matemática com várias finalidades:
> . como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;
> . como auxiliar no processo de construção de conhecimento;
> . como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções; (BRASIL, 1998, p. 41e 42).

O Geogebra possui ferramentas intuitivas permitindo a construção de objetos matemáticos que permitem a visualização na mesma interface da zona algébrica e zona gráfica, facilitando a observação das propriedades inerentes ao objeto matemático e acompanhando as possíveis modificações instantâneas na parte gráfica, o que seria trabalhoso ou até mesmo impossível visualizar usando a tecnologia lápis e papel milimetrado para confecção dos gráficos.

Para os estudos são necessários alguns conhecimentos básicos para a análise das funções quadráticas. Após a instalação do *software*, ao se executar o programa aparece duas janelas de visualização, a “algébrica” e a “gráfica”, com a barra de Menus, barra de Ferramentas e campo de Entrada.

Ao introduzir no campo Entrada f(x) = a*x^2 + b*x +c e teclar *enter*, o programa solicita criar controles deslizantes para os coeficientes “a” “b” e “c”. Estes controles poderão ser acionados de acordo com cada atividade específica da sequência didática. Aparecerá a função escrita na forma de linguagem algébrica na janela específica e na linguagem gráfica no plano cartesiano na mesma tela de visualização.

Figura 33 – Função quadrática no GeoGebra.



Fonte: Autor.

Embora as tecnologias facilitem a interação entre ensino e aprendizagem, ainda assim trata-se de um processo lento e complexo. Alguns fatores colaboram para este acontecimento: ambiente inadequado, dificuldades no manuseio da tecnologia, o currículo com grandes quantidades de conteúdo, controle de acesso a sítios inadequados e a predisposição do estudante para querer ter acesso ao conhecimento, assim como do professor para dispor de todo arcabouço envolvente.

O uso do software educacional GeoGebra disponibiliza uma atuação importante sobre os parâmetros da função quadrática, trazendo um novo olhar na perspectiva do estudante.

Sob este foco esperamos que os participantes consigam redirecionar os conceitos de função quadrática, principalmente na representação semiótica na linguagem gráfica, pois, há a necessidade da transição para a representação semiótica na linguagem algébrica, como forma de institucionalização do saber matemático na visão de Duval (2011) que afirma, os obstáculos dos estudantes na parte gráfica estão situados na interpretação global das propriedades figurais.

Neste contexto, o soft GeoGebra teve papel importante, em disponibilizar as interfaces do programa onde os estudantes manipularam e observaram o objeto matemático de maneira que ficaram perceptíveis as translações horizontais e verticais, as concavidades e deslocamentos dos coeficientes, sendo uma ferramenta de auxílio na superação dos obstáculos didáticos da função quadrática.

CAPÍTULO 4 Análise *a priori,* Experimentação, Análise *a posteriori* e Validação

Neste capítulo objetivamos prevê as escolhas através do estudo do Milieu na análise *a priori* das sete atividades, que viabilizem controlar o comportamento dos estudantes e explicar suas ações para a determinação de suas estratégias e compreender as ações, formulações e validações de cada atividade. Prosseguimos com a experimentação relatando os acontecimentos, passamos então para a análise *a posteriori* e paralelamente executando a validação, concluindo com as nossas considerações finais.

4.0 Análise *a priori* da Sequência Didática Aplicada

Apresentamos neste capítulo o estudo da análise a *priori* e da análise a *posteriori* das sequências didáticas conforme estabelece a Engenharia Didática, averiguando as sequências didáticas de acordo a Teoria das Situações Didáticas e Registros de Representações Semióticas, sequência esta validada por Maia (2007) com adaptações, relacionando as atividades vivenciadas pelo estudante, meio e professor. Elas consistem em uma ordem que sempre parte da variável micro didática da função quadrática $f(x) = ax^2$ aplicada a um grupo de oito alunos, neste momento buscamos prever e analisar os comportamentos possíveis dos estudantes e explicar o sentido de suas ações perante as atividades buscando a superação dos obstáculos didáticos do objeto matemático função quadrática associado ao software GeoGebra. Assim, identificaremos os possíveis obstáculos didáticos com objetivo de superá-los.

Realizamos também a análise a posteriori da sequência didática, fizemos a junção dos materiais produzidos na análise a priori e experimentação (atividades, vídeo, contrato didático, teorias aplicadas), para confrontação e validação da pesquisa.

4.1 Análise *a priori*: apreciações do Milieu das atividades

A sequência didática aplicada é constituída por sete atividades.

A primeira atividade objetiva analisar, a partir do coeficiente **a**, quais as propriedades deste coeficiente e inferir a respeito da propriedade reflexiva destes gráficos.

ATIVIDADE 1

1 - Num mesmo par de eixos cartesianos desenhe, utilizando o GeoGebra, os gráficos de:

a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = 2x^2$

c) $f_3(x) = 3x^2$

d) $f_4(x) = 10.x^2$

e) $f_5(x) = 1/2.\ x^2$

f) $f_6(x) = 1/4.\ x^2$

g) $f_7\ (x) = -\ x^2$

h) $f_8\ (x) = -\ 2x^2$

i) $f_9\ (x) = -\ 3x^2$

j) $f_{10}\ (x) = -10x^2$

k) $f_{11}(x) = -\ 1/2.x^2$

l) $f_{12}\ (x) = -\ 1/4.x^2$

2 – Analisando os gráficos:

a) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número maior que zero?

b) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número menor que zero?

c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê?

d) O que garante em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de x^2 ser um número positivo? E de ser um número negativo?

e) Comparando os gráficos do item **a** e **g** o que se pode concluir?

Quadro 3 - Análise ascendente do milieu da atividade 1.

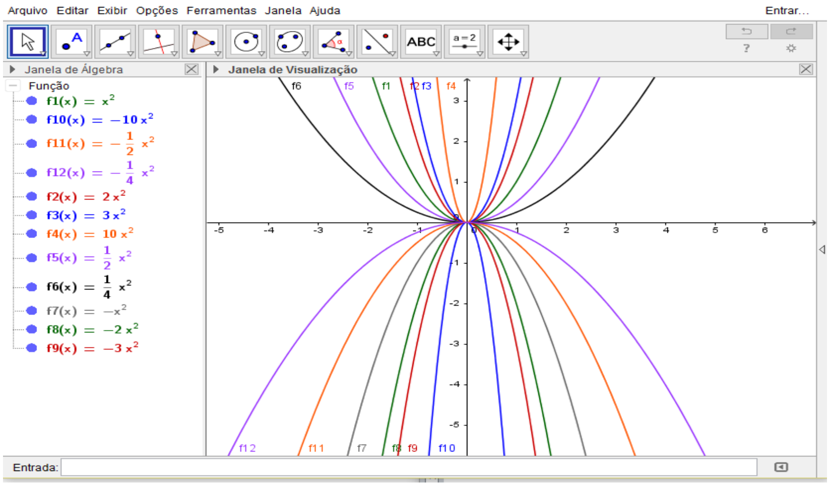
<table>
<tr><th>DIALÉTICAS</th><th>MEIO (M)</th><th>ALUNO (E)</th><th>PROFESSOR (P)</th><th>SITUAÇÃO (S)</th><th rowspan="5">a
d
i
d
á
t
i
c
a</th></tr>
<tr><td>Institucionalização</td><td>M0: aprendizagem</td><td>E0: aluno Aprendizagem</td><td>P0: professor Institucionalização</td><td>S0: didática Sistematização da propriedade do parâmetro a.</td></tr>
<tr><td>Validação</td><td>M-1: referência</td><td>E-1 aprendiz Identificação de novos saberes</td><td rowspan="2">P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos</td><td>S-1: aprendizagem Como utilizar o parâmetro a.</td></tr>
<tr><td>Formulação</td><td>M-2: objetivo</td><td>E-2: ativo Parte 2 da atividade Hipóteses</td><td>S-2: referência Conjecturas sobre o coeficiente de x^2</td></tr>
<tr><td>Ação</td><td>M-3: material Software atividade 1</td><td>E-3: objetivo Utilização do software e representação da função quadrática</td><td>Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos</td><td>S-3: objetiva Interação com representação gráfica de $f(x)=ax^2$</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Maia (2007, p. 84).

O estudo ascendente proposto por Margolinas *apud* Almouloud (2007), que descreve a atividade do estudante inserido em uma situação adidática, tem seu início na Situação Objetiva (S -3) terminando na Situação Objetiva (S0). Dentro deste quadro o estudante toma conhecimento da sua tarefa e toma para si o problema, fazendo uso do meio material (M -3) que está acessível no notebook com o software educacional

GeoGebra. Assim, o professor aguarda a ação dos estudantes para dar início à atividade proposta, digitando no campo de entrada o registro algébrico da função quadrática na forma algébrica $f_1(x) = x^2$, permitindo a socialização com o meio material e os estudantes (E -3), construindo e analisando o comportamento de cada gráfico.

Figura 34 - Registro de representação semiótica na forma gráfica das funções da Atividade 1.



Fonte: Autor.

Passando para a situação de referência (S -2), observa-se que o estudante (E -2) deve elaborar uma hipótese conforme os coeficientes de x^2 são alternados para **a > 0.** Neste momento nos encontramos no estágio da formulação e, em virtude dos números escolhidos para representar os coeficientes, esperamos que a cada variação o aluno observe o comportamento da representação gráfica conhecida como parábola e perceba que os gráficos estão acima do eixo X e se aproximando do eixo Y. Quando temos **0** < **a** < **1**, esperamos que o estudante observe que os gráficos começam a abrir e as parábolas tendem a se afastar do eixo Y e se aproximar do eixo X, porém, nunca se sobrepondo ao eixo. Por fim, quando temos **a** < **0** observamos que as parábolas ficam voltadas para “baixo” e, conforme os coeficientes tendem a diminuir, os gráficos se aproximam da parte negativa do eixo Y.

Ainda nos confrontos entre fi e f_7, f_2 e f_8, f_3 e f_9, f_4 e f_{10}, f_5 e f_{11}, f_6 e f_{12} comparando os gráficos observamos que há uma simetria entre os gráficos e que todos os gráficos possuem um ponto em comum - a origem - quando a variável independente x é zero, o valor de Y também é igual a zero.

Para a aquisição da situação de aprendizagem (S -1) contamos com o meio de referência (M -1) que engloba todas as representações gráficas desenvolvidas nas atividades (S -3), (E -3). Nesta fase o aluno aprendiz (E -1) deveria analisar, conforme o coeficiente **a** estivesse variando tanto na parte positiva como na negativa, qual a finalidade específica do coeficiente **a** na função quadrática. É importante salientar, na dialética da validação, a importância do professor observador (P -1) que aguarda as atitudes dos estudantes provocadas pela atividade no qual deve julgar se faz a devolução ou se é possível apenas uma supervisão positiva do aprendiz (E -1).

Nesta fase é possível verificar todas as estratégias que foram usadas pelos aprendizes para validação e qual estratégia foi a vencedora.

E chegando a última fase da ascendência na situação didática (S0), que reflete a institucionalização do aluno (E0) quanto ao objeto matemático no que se refere ao saber consumado na situação de aprendizagem (S -1), o professor (P0) coordena todas as propriedades inerentes a atividade 1.

ATIVIDADE 2

A segunda atividade tem como objetivo analisar a compreensão sobre o parâmetro **n** na translação vertical do vértice da parábola e comportamento do gráfico quando variamos para positivo ou negativo o coeficiente **b** e suas implicações.

1 – Num mesmo par de eixos cartesianos desenhe, utilizando o GeoGebra, os gráficos de:

a) $f_1(x) = x^2$
b) $f_2(x) = x^2 + 1$
c) $f_3(x) = x^2 + 2$
d) $f_4(x) = x^2 + 3$
e) $f_5(x) = x^2 – 1$
f) $f_6(x) = x^2 – 2$
g) $f_7(x) = x^2 – 3$

2 – O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante, para obter uma nova função?

3 – Num mesmo par de eixos cartesianos desenhe, utilizando o GeoGebra, os gráficos de:

a) $f_1(x) = x^2$
b) $f_2(x) = x^2 + x$
c) $f_3(x) = x^2 + 2x$
d) $f_4(x) = x^2 + 3x$
e) $f_5(x) = x^2 – x$
f) $f_6(x) = x^2 – 2x$
g) $f_7(x) = x^2 – 3x$

4 – O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante a variável (x), para obter uma nova função?

5 – Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos?

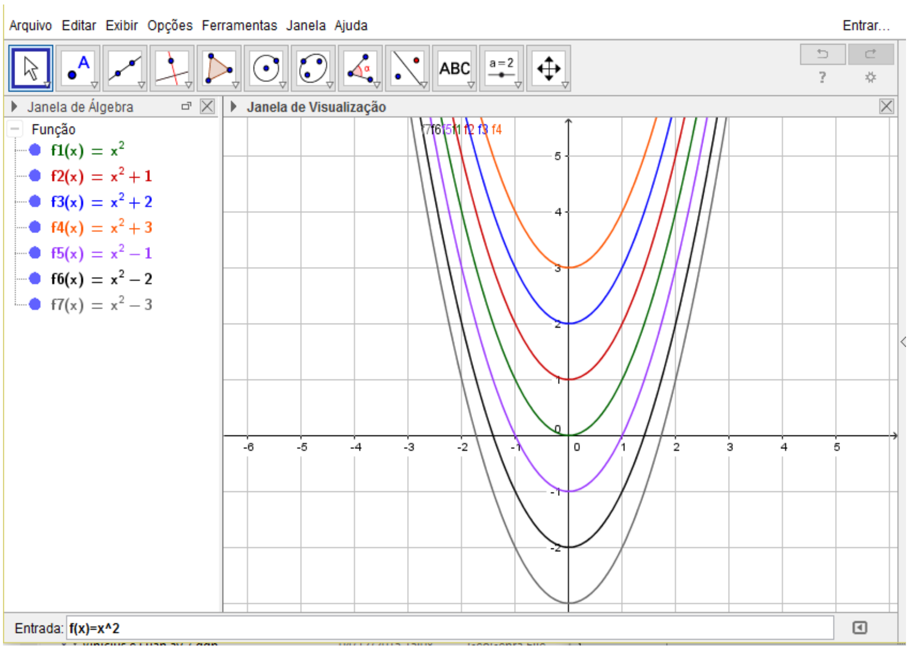
Quadro 4 - Análise ascendente do Milieu da atividade 2.

<table>
<tr><th>DIALÉTICAS</th><th>MEIO (M)</th><th>ALUNO (E)</th><th>PROFESSOR (P)</th><th>SITUAÇÃO (S)</th><th rowspan="5">a
d
i
d
á
t
i
c
a</th></tr>
<tr><td>Institucionalização</td><td>M0: aprendizagem</td><td>E0: aluno Aprendizagem</td><td>P0: professor Institucionalização</td><td>S0: didática Sistematização da propriedade do parâmetro n.</td></tr>
<tr><td>Validação</td><td>M-1: referência</td><td>E-1 aprendiz Identificação de novos saberes</td><td rowspan="2">P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos</td><td>S-1: aprendizagem Como utilizar o parâmetro n.</td></tr>
<tr><td>Formulação</td><td>M-2: objetivo</td><td>E-2: ativo Parte 2 da atividade Hipóteses</td><td>S-2: referência Conjecturas sobre o parâmetro n e sobre o vértice da parábola.</td></tr>
<tr><td>Ação</td><td>M-3: material Software atividade 1</td><td>E-3: objetivo Plano cartesiano; coordenadas de um ponto no plano; simetria; reflexão; translação; representação da função no plano; noção de coef. e utilização do software.</td><td>Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos</td><td>S-3: objetiva Interação com representação gráfica de $f(x)=x^2 + n$</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Maia (2007, p. 88).

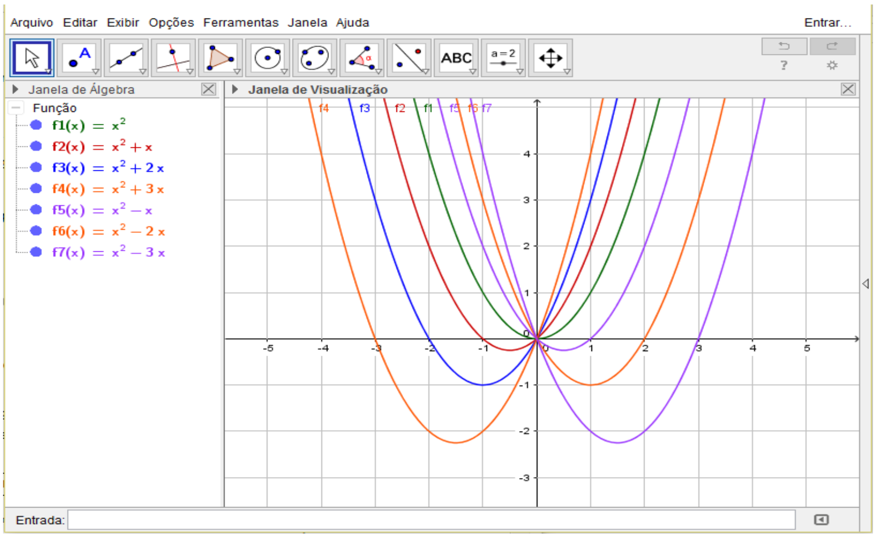
No estudo ascendente para identificar a situação objetiva (S -3) os estudantes já deveriam possuir conhecimentos adquiridos da atividade 1, a relação do coeficiente **a** com a concavidade da parábola e sua variação com a aproximação ou distanciamento do eixo Y, além da familiarização com o software educacional. Os estudantes deveriam tomar posse destes instrumentos (E -3), para desenvolver a atividade 2, caracterizando uma socialização como meio (M -3) e finalizando a atividade com os gráficos em questão e analisando-os.

Figura 35 - Registro de representação semiótica na forma gráfica das funções da Atividade 2.



Fonte: Autor.

Figura 36 – Registro de representação semiótica na forma gráfica das funções da Atividade 2.



Fonte: Autor.

Ascendendo para a situação de referência (S -2) é composto pela situação (S -3) e (E -3) que é formada pela relação entre os estudantes na resolução das representações gráficas especificamente $f(x) = x^2 + n$ e suas características, nos levando ao meio objetivo (M -2) e, consequentemente, à interação dos estudantes ativos. Para a referência (S -2) que leva ao aluno (E -2) a fazer seus questionamentos, esperava-se que os estudantes, após várias observações, perceberiam as translações verticais das parábolas de acordo com a variação positiva “sobe” ou negativa “desce” em relação ao eixo X.

E finalizando a atividade 2 temos a fase da institucionalização composta pela situação didática (S0), onde o estudante (E0) deve adquirir o saber do objeto matemático em questão, cabendo ao professor (P0) julgar se as propriedades inerentes a esta atividade foram resolvidas com sucesso, se os alunos perceberam as translações verticais do vértice da parábola ou necessitam de mais acompanhamento, se perceberam que, quando variamos o coeficiente **b** para positivo o gráfico desloca-se quantas unidades lhes forem acrescidas para a "esquerda" com deslocamentos horizontais e verticais ao mesmo tempo, ou, quando negativo, o gráfico desloca-se quantas unidades lhes forem acrescidos para "direita" com deslocamentos verticais e horizontais ao mesmo tempo.

A terceira atividade tem como objetivos analisar a compreensão do parâmetro **m** sobre translação horizontal do vértice da parábola e suas implicações nos gráficos.

ATIVIDADE 3

1 – Num mesmo par de eixos cartesianos desenhe, utilizando o GeoGebra, os gráficos de:

a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = (x + 1)^2$

c) $f_3(x) = (x + 2)^2$

d) $f_4(x) = (x – 1)^2$

e) $f_5(x) = (x – 2)^2$

f) $f_6(x) = (x + ½)^2$

g) $f_7(x) = (x – ½)^2$

2 – Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$. O que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraímos uma constante positiva da variável independente x?

3 – Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos?

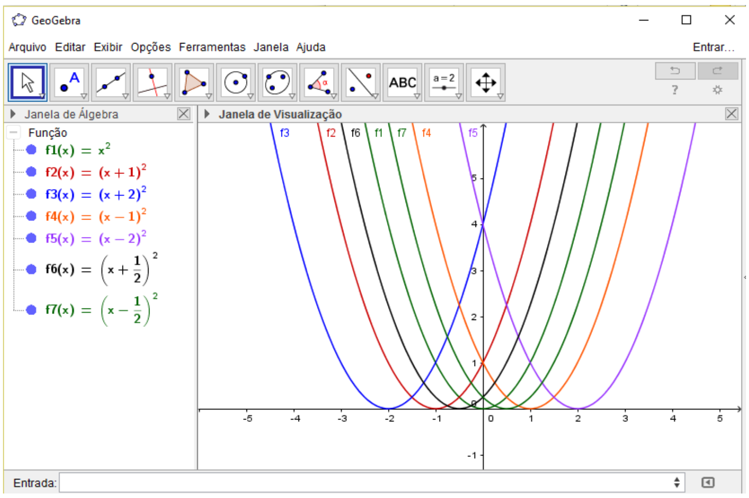
Quadro 5 - Análise ascendente do Milieu da atividade 3.

DIALÉTICAS	MEIO (M)	ALUNO (E)	PROFESSOR (P)	SITUAÇÃO (S)	
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização da propriedade do parâmetro **m**.	
Validação	M-1: referência	E-1 aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.	S-1: aprendizagem Como utilizar o parâmetro **m**.	a d i d á t i c a
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Parte 2 da atividade Hipóteses		S-2: referência Conjecturas sobre o parâmetro **m** e sobre o vértice da parábola.	
Ação	M-3: material Software atividade 1 e 2.	E-3: objetivo Plano cartesiano; coordenadas de um ponto no plano; simetria; reflexão; translação; representação da função no plano; noção de coef. e utilização do software.	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com representação gráfica de $f(x)=(x+m)^2$	

Fonte: Adaptado de Maia (2007, p. 91).

Para o estudo ascendente da situação objetiva (S -3) na dialética da ação formado pelo Meio material do aluno (M -3), o aluno (E -3) sendo neste caso o Meio (M -3) disponibiliza as ações adquiridas nas atividades anteriores sobre o software educacional GeoGebra, os saberes matemáticos apropriados, como coordenadas no plano cartesiano, concavidades das parábolas, translações verticais, aplicabilidade dos coeficientes, noções de reflexão e vértice da parábola, desta forma a situação (S -3) disponibiliza ao aluno (E -3) a execução da atividade proposta.

Figura 37 - Registro de representação semiótica na forma gráfica das funções da Atividade 3.



Fonte: Autor.

Executada a Dialética da Ação através da situação objetiva (S -3) do meio material (M -3) e aluno (E -3), surge as representações gráficas das funções quadráticas $f(x)=(x+m)^2$ indicadas acima no software educacional GeoGebra.

Ascendendo para a formulação na situação de referência (S -2) formada por Meio objetivo (M -2) e o aluno ativo (E -2) nesta fase o aluno questiona sobre o acréscimo ou decréscimo na variável independente **x** e os motivos que levam o gráfico se deslocar no sentido contrário ao “senso comum”, pois, o gráfico, ao acrescentar uma unidade à variável x, se desloca uma unidade para a “esquerda” e, ao subtrairmos uma ou duas unidades à variável x, o gráfico desloca-se em igual valor para “direita”, podendo ser perfeitamente observado pelas coordenadas dos vértices das parábolas, muito bem definidas no software educacional GeoGebra.

Ascendendo para a Validação na situação de aprendizagem (S -1) constituída pelo meio de referência (M -1), o aluno aprendiz (E -1) e pelo professor observador (P -1) neste momento, o aluno aprendiz deve possuir o conhecimento matemático e o professor observador enseja que o aluno aprendiz utilize esses conhecimentos para solucionar as suas atividades, sendo possível verificar todas as estratégias para tornar sua atividade vencedora.

Na fase da Institucionalização a situação didática (S0) o estudante (E0) adquiriu o saber do objeto matemático em questão, cabendo ao professor (P0) observador julgar se as propriedades inerentes a esta atividade foram resolvidas com sucesso, se os alunos perceberam as translações horizontais do vértice da parábola ou necessitam de mais acompanhamento.

A quarta atividade tem como objetivo analisar e aplicar os conhecimentos construídos anteriormente e observar as propriedades e comportamentos envolvidos nos gráficos, assim como, realizar tratamentos na linguagem algébrica buscando passar para a linguagem gráfica, visando o processo de institucionalização.

ATIVIDADE 4

1 – Num mesmo par de eixos cartesianos desenhe, utilizando o GeoGebra, o gráfico da função quadrática $f(x) = a.x^2 + b.x + c$:

a) Crie os controles deslizantes (**a, b** e **c**) em um intervalo de [-10, 10];

b) Varie o controle deslizante de **a** de acordo com o intervalo e mantenha os controles **b** e **c** constantes;

c) O que você observou? Explique.

d) Varie o controle deslizante de **b** de acordo com o intervalo e mantenha os controles **a** e **c** constantes;

e) O que você observou? Explique.

f) Varie o controle deslizante de **c** de acordo com o intervalo e mantenha os controles **a** e **b** constantes;

g) O que você observou? Explique.

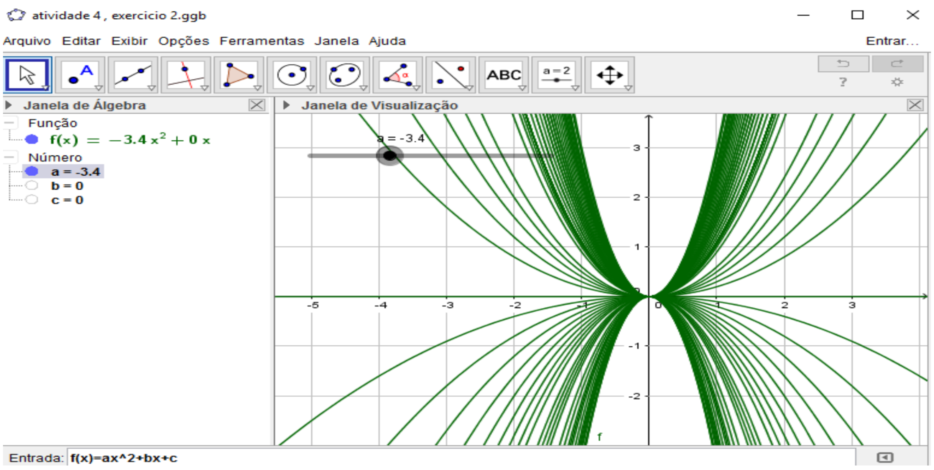
Quadro 6 - Análise ascendente do Milieu da atividade 4.

DIALÉTICAS	MEIO (M)	ALUNO (E)	PROFESSOR (P)	SITUAÇÃO (S)	
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização da propriedade das Coef. (a, b, c)	a d i d á t i c a
Validação	M-1: referência	E-1 aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.	S-1: aprendizagem Coef. (a, b, c) e suas finalidades	
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Parte 2 da atividade Hipóteses		S-2: referência Conjecturas sobre os coeficientes (**a**, **b**, **c)**	
Ação	M-3: material Software atividade 1, 2 e 3.	E-3: objetivo Plano cartesiano; noção de coef. e utilização do software.	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com os coeficientes **(a b c)** $f(x)=ax^2+bx+c$	

Fonte: Adaptado de Maia (2007, p. 91).

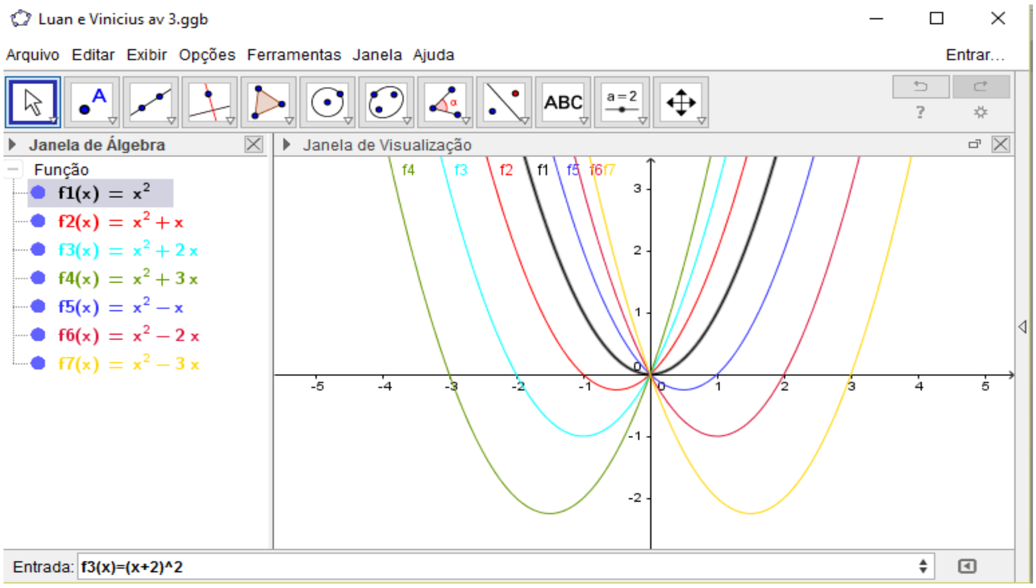
Na definição da situação objetiva (S -3) formada pelo aluno objetivo (E -3), e o meio material (M -3), na dialética da ação nesta fase o estudante tem conhecimento do software educacional GeoGebra e da representação gráfica da função $f(x)=ax^2+bx+c$. De posse do meio matéria (M -3) o aluno objetivo (E -3) começa a desenvolver as funções gráficas elaboradas.

Figura 38 – Registro de repres. semiótica na forma gráfica Atividade 4 Animação do coeficiente **a**.



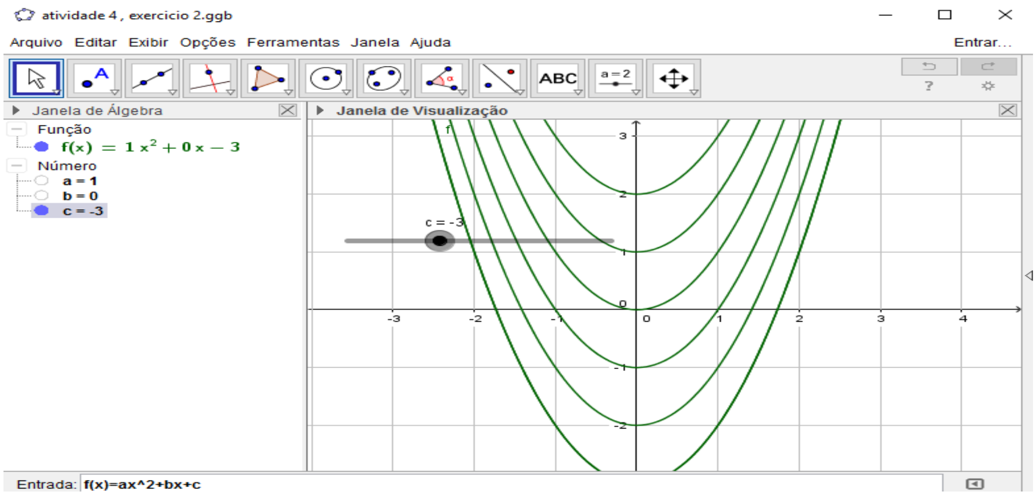
Fonte: Autor.

Figura 39 - Registro de repres. semiótica na forma gráfica Atividade 4 Animação do coeficiente **b**.



Fonte: Autor.

Figura 40 - Registro de representação semiótica na forma gráfica Atividade 4 Animação do coeficiente **c.**



Fonte: Autor.

Ascendendo para a situação de referência (S -2) formado pelo meio objetivo (M -2) e o aluno ativo (E -2) as relações anteriores na Ação que originaram as representações gráficas acima, neste ponto os estudantes ativos exibiram questionamentos com relação a cada coeficiente e sua representação na parte gráfica.

Neste momento o professor observador deve almejar que os estudantes façam uso dos conhecimentos de plano cartesiano, simetria, reflexão e o papel dos coeficientes na função quadrática.

Com as representações gráficas de f(x)=ax^2+bx+c os estudantes deveriam identificar a formação das parábolas e saber que, ao variar o coeficiente **a** de (-10 até 10) e tornar constante os coeficientes **b** e **c**, as concavidades ficam voltadas para “cima” ou para “baixo” e, ainda, que;

- Ao variar somente o coeficiente **c** de (-10 até 10) haverá uma translação vertical do gráfico;

- Ao variar somente o coeficiente **b** com valores positivos e negativos haverá um deslocamento horizontal e vertical formando uma parábola invertida;

- A parábola somente começa a “abrir” quando os valores do coeficiente **a** é menor do que 1 (um) e

- Quando o coeficiente **a** tende a zero e se assumindo o valor de zero este tornar-se uma reta.

Ainda esperava-se que, variando somente o coeficiente b**,** os estudantes conseguissem observar que no ponto de coordenadas $(0,c)$, onde o gráfico intercepta o eixo Y, o seu ponto simétrico possui uma distância na razão dos coeficientes da função quadrática $d = \frac{b}{a}$, sendo possível determinar estes coeficientes para escrever as funções na sua forma algébrica desenvolvida.

Ascendendo para a situação de aprendizagem (S -1) formada pelo meio de referencia (M -1), que são as representações gráficas de f(x)=ax^2+bx+c e todos os questionamentos acima, o estudante deveria se apropriar das funções de cada coeficiente, assim, o professor observaria (P -1) que os estudantes justificassem os resultados encontrados, podendo ser corrigidos ou não. Neste momento é possível identificar suas estratégias para tornar vencedor sua atividade.

Na fase de Institucionalização chegamos à situação didática (S0) formada pelo meio de aprendizagem (M0), o aluno aprendiz (E0) e professor (P0), que julga se as propriedades inerentes a esta atividade foram resolvidas com sucesso, se os alunos perceberam as variações das concavidades, as translações verticais do vértice da parábola, as translações verticais e horizontais ao mesmo tempo formando uma parábola invertida ou se os alunos necessitariam de mais acompanhamento.

A quinta atividade têm como objetivos institucionalizar as construções de conhecimentos através das trocas da linguagem semiótica algébricas para linguagem semiótica gráficas e vice-versa e comparar os coeficientes com os parâmetros m e n da função canônica, para verificar quando é mais interessante usar a função $f(x)=ax^2+bx+c$ ou $f(x)=a(x+m)^2+n$.

ATIVIDADE 5

1 – Sem utilizar o GeoGebra descreva, a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, como ficará o gráfico das funções abaixo, e responda quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada caso.

a) $f_2(x) = 2(x + 3)^2 – 4$

b) $f_3(x) = -3(x – 5/4)^2 + 1/3$

2 – Desenhe o gráfico de $f(x) = (x + 3)^2 – 5$ (utilize o GeoGebra).

3 – Você consegue prever o gráfico de $g(x) = x^2 + 6.x + 4$? Explique.

4 – Escreva uma função do segundo grau genérica em função dos parâmetros **a, m** e **n** de modo que seja fácil a visualização de seu gráfico.

5 – O que cada um dos parâmetros (**a, m** e **n)** faz com o gráfico da função inicial?

6 – Relacione os parâmetros da função que vocês encontraram o item 4 com os parâmetros da função $f(x) = a.x^2 +b.x +c$. Quais conclusões vocês chegaram?

Quadro 7 - Análise ascendente do milieu da atividade 5.

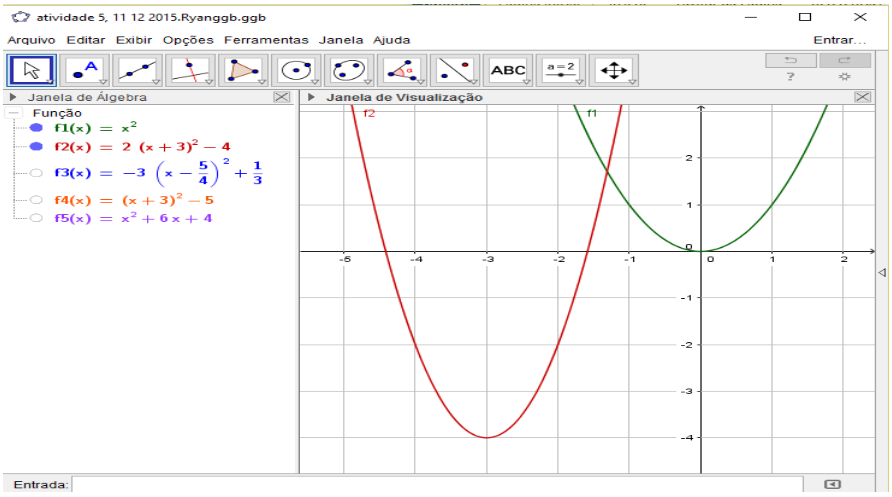
DIALÉTICAS	**MEIO (M)**	**ALUNO (E)**	**PROFESSOR (P)**	**SITUAÇÃO (S)**	
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Tratamento da forma algébrica da função quadrática.	a didática
Validação	M-1: referência	E-1 aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos	S-1: aprendizagem Forma canônica da função quadrática.	
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Forma desenvolvida Hipóteses		S-2: referência Conjecturas sobre uma “nova” forma de representação da função quadrática.	
Ação	M-3: material Software atividades 1,2, 3 e 4.	E-3: objetivo Conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com as propriedades dos parâmetros **a**, **m** e **n**.	

Fonte: Adaptado de Maia (2007, p. 94).

Na dialética da ação na situação objetiva (S -3) que é formada pelo Meio material (M -3) e o aluno objetivo (E -3) nesta fase a situação não estava finalizada. O professor fez a devolução e o estudante tomou conhecimento do problema e este faria a interação com as propriedades dos parâmetros (**a, m** e **n**) esperava-se que o estudante, com os conhecimentos das atividades anteriores aliada ao Meio material (M -3) que é o software GeoGebra, verificasse a concavidade da parábola para cima ou para baixo conforme o sinal do parâmetro **a**, e a translação horizontal e vertical do vértice de acordo com as mudanças das coordenadas cartesianas.

Ao digitar no campo de entrada do software GeoGebra a função $f_1 = x^2$ almeja-se que o estudante identifique que o gráfico é voltado para cima em virtude do coeficiente **a** positivo e com coordenadas do vértice (0,0). No próximo momento, ao digitar $f_2 = 2(x+3)^2 - 4$ espera-se que o estudante identifique uma translação simultânea vertical e horizontal que levará o gráfico para as coordenadas do vértice em (-3, -4) e que o gráfico tendeu a "fechar" se aproximando em ambos os lados simetricamente do eixo Y.

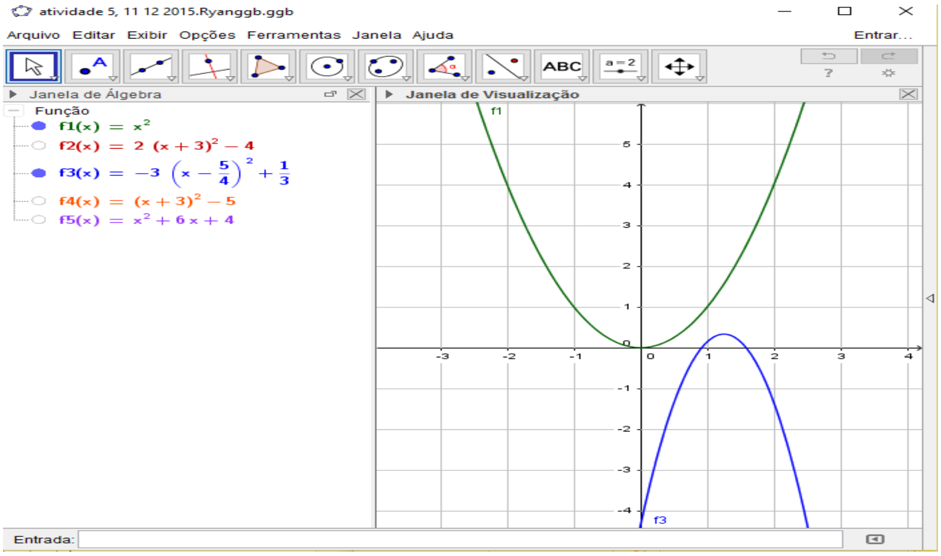
Figura 41 - Registro de representação semiótica na forma gráfica Atividade 5.



Fonte: Autor.

Na função $f_3 = -3(x - 5/4)^2 + 1/3$, obtida tendo-se como base $f_1(x) = x^2$ esperamos que os estudantes observassem as variações ocorridas como a concavidade da parábola para "baixo" em virtude do coeficiente **a**, além da translação horizontal e vertical simultânea de 5/4 para a "direita" do eixo Y levando o gráfico para as coordenadas do vértice (5/4, 1/3).

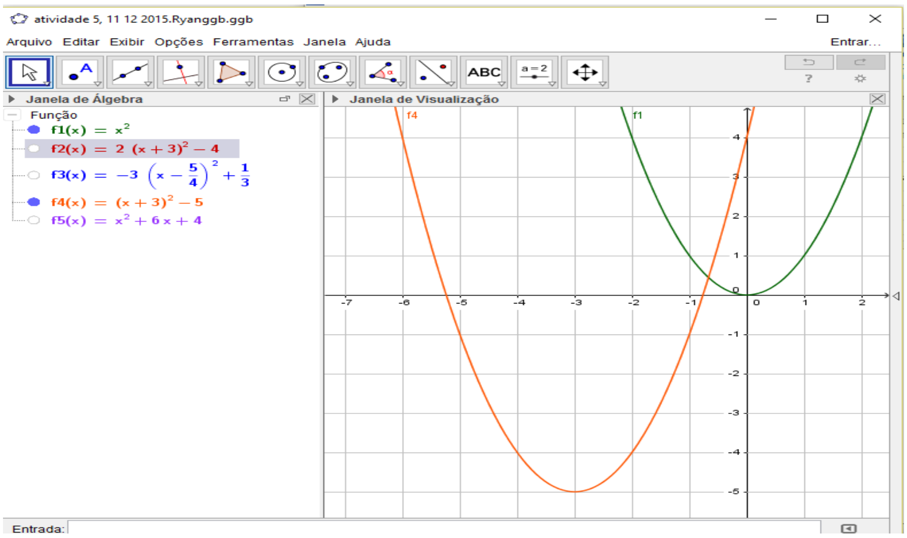
Figura 42 - Registro de representação semiótica na forma gráfica Atividade 5.1.



Fonte: Autor.

Para a função f (x) = $(x + 3)^2 – 5$ tendo como base a função f_1 (x) = x^2 espera-se que os estudantes percebam que houve uma translação vertical e horizontal simultânea que levaram as coordenadas do vértice de (0, 0) para as coordenadas de (-3, -5) e a concavidade voltada para "cima" em virtude do coeficiente **a** positivo.

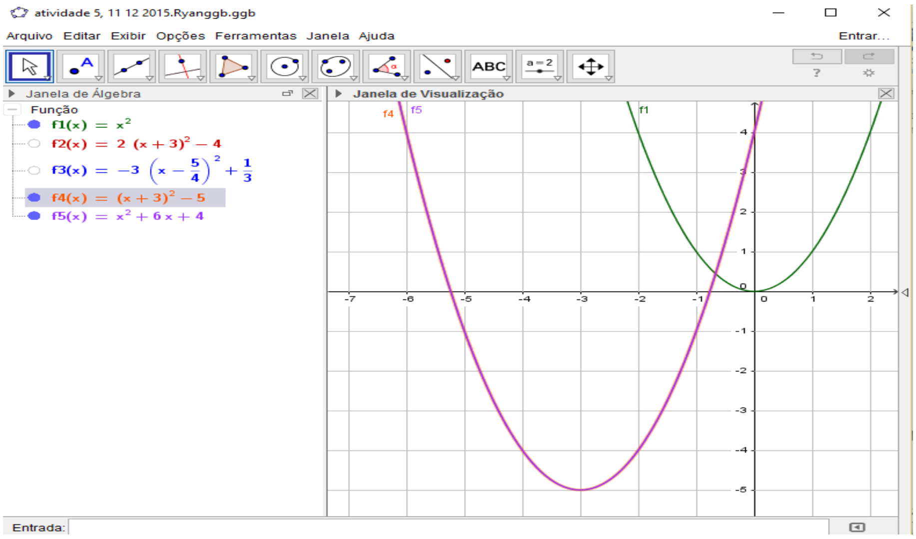
Figura 43 - Registro de representação semiótica na forma gráfica da Atividade 5.2.



Fonte: Autor.

Ascende-se para a situação de referência (S -2), composta pelo Meio objetivo (M -2) e pelo aluno (E -2), onde, nesta fase, o estudante questiona, faz observações e expressa possíveis consequências a respeito da função g(x) = x^2+ 6.x + 4. Neste ponto, como no Meio objetivo (M -2) foram inseridas três funções: f_1, f(x) e g(x) e, consequentemente, aparecem apenas duas funções na janela de visualização da parte gráfica, espera-se que os alunos percebam que não há falta de um gráfico, mas, que f(x) e g(x) estão sobrepostos por serem os mesmos gráficos.

Figura 44 - Registro de representação semiótica na forma gráfica Atividade 5.3.



Fonte: Autor.

Ascende-se para a fase da Validação na situação de aprendizagem (S -1), formada pelo Meio de referência (M -1), o professor observador (P -1), atentando para as possíveis estratégias a serem utilizadas e o aluno aprendiz (E -1). Neste ponto temos as atividades consolidadas com as representações gráficas no meio, os questionamentos e predições dos estudantes e espera-se que os estudantes relacionem os parâmetros envolvidos com os coeficientes.

Na fase da Institucionalização da situação didática (S0) formada pelo Meio de aprendizagem (M0) o professor observador (P0) espera que o aluno aprendiz (E0) tenha o conhecimento a respeito da atividade com os parâmetros (**a, m** e **n**) e os transforme em saber matemático do objeto de estudo.

A sexta atividade tem como objetivo institucionalizar as construções de conhecimentos através das trocas da linguagem semiótica algébrica para linguagem semiótica gráfica e vice-versa, verificando as funcionalidades dos coeficientes (**a**, **b** e **c**), as raízes da função, a descriminante delta e suas influências na parte gráfica.

ATIVIDADE 6

1 – Crie uma função $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ com seus respectivos controles deslizantes. Depois, no campo de entrada, digite delta = b^2-4*a*c e enter, em seguida digite o comando RAIZ[f].

a) Altere os valores de a, b ou c de forma que o gráfico intercepte o EixoX. Qual o sinal do Δ?

b) Fazendo $a = 4$, $b = -4$ e $c = 2$, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do Δ?

c) Fazendo $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do Δ?

d) Se , $\Delta > 0$ o gráfico __________________________ o eixo x. (intercepta ou não intercepta).

e) Se , $\Delta < 0$ o gráfico __________________________ o eixo x. (intercepta ou não intercepta).

f) Se , $\Delta = 0$ o gráfico __________________________ o eixo x.

2 - Faça o seguinte exercício com os três seletores já criados e, apenas, troque seus valores para chegarem às funções que se pedem a seguir:

Construa as funções:

$$f(x) = x^2 - 3x + 4 \qquad\qquad g(x) = - x^2 - 4x$$

Para cada uma delas, determine:

a) O ponto onde intercepta o eixo Y.

b) Se intercepta o eixo y em sua parte crescente ou decrescente.

c) Analise a concavidade.

d) Encontre o discriminante.

e) Encontre as raízes, caso existam.

f) Encontre o vértice das parábolas.

g) Determine o máximo e/ou mínimo.

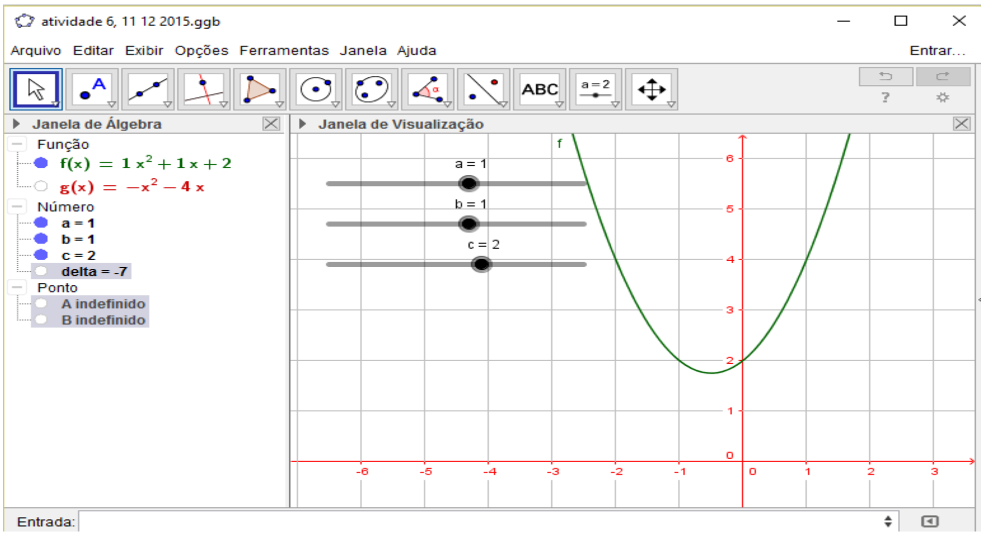
Quadro 8 - Análise ascendente do milieu da atividade 6.

DIALÉTICAS	MEIO (M)	ALUNO (E)	PROFESSOR (P)	SITUAÇÃO (S)	
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Tratamento do descriminante, raízes, máx. e mín. da função quadrática.	
Validação	M-1: referência	E-1 aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos	S-1: aprendizagem da propriedades do Δ, máx., mín. e raízes da função quadrática.	a d i d á t i c a
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Forma desenvolvida Hipóteses		S-2: referência Conjecturas sobre valores do Δ e raízes, máx. e mín.	
Ação	M-3: material Software atividade 3,4 e 5.	E-3: objetivo Conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com as propriedades do Δ, raízes, máximo e mínimo.	

Fonte: Adaptado de Maia (2007, p. 94).

Buscando a situação objetiva (S -3) formada pelo Meio material (M -3), onde os estudantes devem possuir saberes das atividades anteriores sobre as linguagens algébricas e gráficas, coeficientes e suas influências na parte gráfica, coordenadas dos vértices de uma função quadrática, translações verticais e horizontais, com saberes diversos é possivel criar um ambiente no qual o aluno (E -3) desenvolva as atividades no meio material (M-3), assim, todas as variações que são inerentes a atividade 6 podem ser observadas com mais rigor matemático.

Figura 45 - Registro de representação semiótica na forma gráfica Atividade 6.

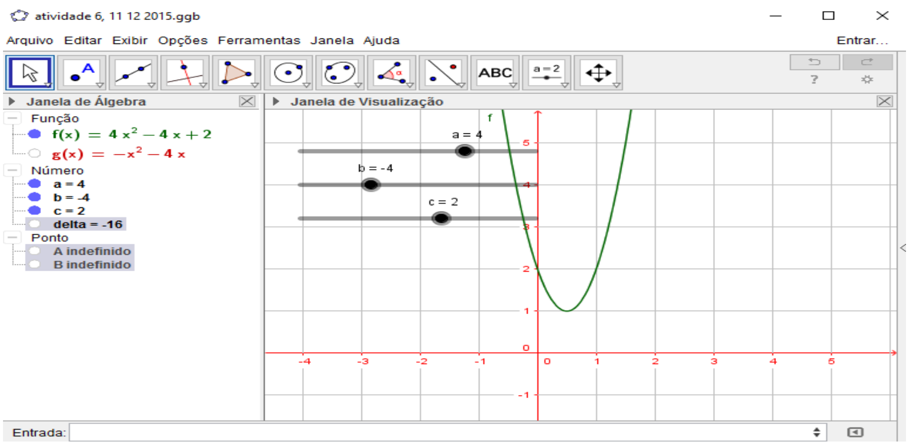


Fonte: Autor.

Ascendendo para a fase da Formulação na situação de referência (S -2), formada pelo Meio objetivo (M -2) e o aluno ativo (E -2), este tenderá a questionar as várias situações que são apresentadas no momento da atividade, e o professor observador (P -1) verifica as estratégias utilizadas.

Analisando as situações acima, variando os coeficientes, fazendo a = 4, b = -4 e c = 2, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do Δ? Espera-se que o estudante observe que o gráfico da função ficou acima do eixo X e quando isto ocorre o descriminante Δ é negativo, conforme apresentação na janela algébrica (- 16) e pontos A e B como raízes A e B indefinidas.

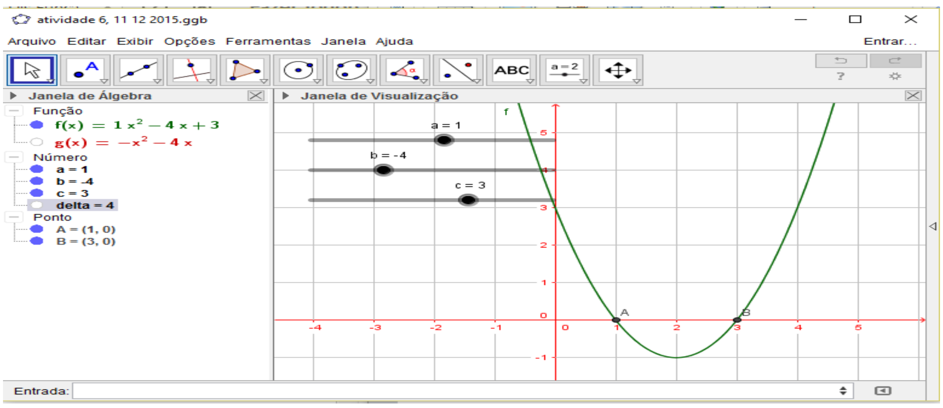
Figura 46 - Registro de representação semiótica na forma gráfica das funções da Atividade 6.



Fonte: Autor.

Fazendo a = 1, b = -4 e c = 3, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do Δ?

Figura 47 - Registro de representação semiótica na forma gráfica das funções da Atividade 6.



Fonte: Autor.

Esperamos que os estudantes identificassem o gráfico abaixo do eixo X, onde está o discriminante ($\Delta = 4$) e, sendo positivo, possui duas raizes reais diferentes identificadas nos pontos A (1, 0) e B (3, 0) no eixo X.

Ascendendo para Validação na situação de aprendizagem (S -1) composta pelo Meio de referência (M -1) formado pelas representações gráficas e questionamentos a respeito das atividades, neste momento o aluno aprendiz deveria identificar as propriedades do discriminante, sendo: Δ positivo, duas raizes reais diferentes; Δ igual a zero, duas raizes reais iguais; Δ menor que zero, não existe raiz real. Sendo o coeficiente **a** positivo, o vértice é ponto de máximo; sendo o coeficiente **a** negativo, o vértice apresenta ponto de mínimo. Neste ponto, o professor observador (P -1) identifica as estratégias utilizadas para o sucesso das suas atividades.

Ascendendo para a fase da Institucionalização do saber na situação didática (S0) formado pelo Meio de aprendizagem (M0) o professor observador (P0) espera que o aluno aprendiz (E0) se aproprie do saber adquirido na situação de aprendizagem (S -1), executando o tratamento do discriminante, raízes, máximo e mínimo na função quadrática transformando em saber matemático.

A sétima atividade têm como objetivos: institucionalizar as construções de conhecimentos das atividades anteriores através das trocas da linguagem semiótica algébricas para linguagem semiótica gráficas e vice-versa; analisar, a partir do coeficiente **a**, quais as propriedades deste coeficiente e inferir a respeito da propriedade reflexiva destes gráficos; verificar a translação vertical do vértice da parábola, o comportamento do gráfico quando variamos para positivo ou negativo, o coeficiente **b,** suas implicações e verificar similaridade entre as funções $f_1(x) = (x + 3)^2 - 5$ e $f_2(x) = x^2 + 6.x + 4$.

ATIVIDADE 7

1 – Num mesmo par de eixos cartesiano desenhe, utilizando o GeoGebra, o gráfico da função quadrática $f(x) = a.x^2 + b.x + c$:

a) Crie os controles deslizantes (**a, b** e **c**) em um intervalo de [-10, 10];

b) No campo de entrada digite V = (-b/2*a , -(b^2 - 4*a*c)/4*a); (Habilite o rastro)

c) Varie um controle deslizante de cada vez (**a, b** e **c**) de acordo com os intervalos e analise os seus comportamentos;

Comente os comportamentos dos coeficientes;

(**a**) =

(**b**) =

(**c**) =

2 – Construa os gráficos abaixo (utilize o GeoGebra):

a) $f_1(x) = (x + 3)^2 - 5$

b) $f_2(x) = x^2 + 6.x + 4$

Descreva suas observações:

3 – De Acordo com as imagens proposta no GeoGebra execute:

a) Partindo da função quadrática $f(x) = x^2$, explique qual sua estratégia para adaptar esta função à imagem da Igreja da Pampulha e escreva a função nas formas $f(x) = a(x+m)^2 + n$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Quadro 9 - Análise ascendente do milieu da atividade 7.

<table>
<tr><th>DIALÉTICAS</th><th>MEIO (M)</th><th>ALUNO (E)</th><th>PROFESSOR (P)</th><th>SITUAÇÃO (S)</th><th rowspan="5">a d i d á t i c a</th></tr>
<tr><td>Institucionalização</td><td>M0: aprendizagem</td><td>E0: aluno Aprendizagem</td><td>P0: professor Institucionalização</td><td>S0: didática Sistematização da propriedade do parâmetro a.</td></tr>
<tr><td>Validação</td><td>M-1: referência</td><td>E-1 aprendiz Identificação de novos saberes</td><td rowspan="2">P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos</td><td>S-1: aprendizagem Como utilizar o parâmetro a.</td></tr>
<tr><td>Formulação</td><td>M-2: objetivo</td><td>E-2: ativo Parte 2 da atividade Hipóteses</td><td>S-2: referência Conjecturas sobre o coeficiente de x^2</td></tr>
<tr><td>Ação</td><td>M-3: material Software atividade 1</td><td>E-3: objetivo Utilização do software e representação da função quadrática</td><td>Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos</td><td>S-3: objetiva Interação com representação gráfica de $f(x)=ax^2+bx+c$ $f_1(x)=(x+3)^2-5$ $f_2(x)=x^2+6x+4$</td></tr>
</table>

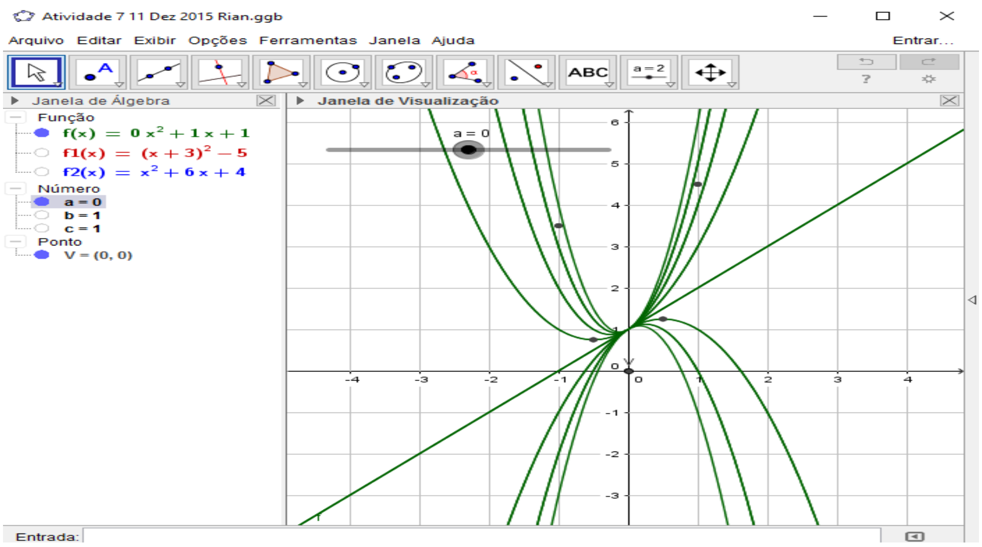
Fonte: Adaptado de Maia (2007, p. 100).

O estudo ascendente do milieu inicia na Situação objetiva (S -3), onde o estudante toma conhecimento da sua tarefa e toma para si o problema, fazendo uso do meio material (M -3) que está acessível no notebook com o software educacional GeoGebra. Assim, o professor aguarda a ação dos estudantes para dar início à atividade proposta, digitando no campo de entrada o registro algébrico da função quadrática na forma algébrica $f(x) = ax^2+bx+c$, que permite a socialização com o meio material e o estudante (E -3) busca analisar o comportamento de cada gráfico, quando os controles deslizantes (**a**, **b**, **c**) criados na dialética da Ação, variam de [-10, 10].

Espera-se que o estudante, ao variar o controle deslizante do coeficiente **a,** perceba que para valores maiores o gráfico da parábola tende a se “fechar” aproximando do eixo de simetria e tendo por ponto fixo o vértice V no ponto de mínimo da parábola.

Se o controle deslizante do coeficiente **a** variar para valores menores que um tendendo a zero, a parábola inicia sua abertura com sua curva se aproximando do formato de uma reta. Neste momento o estudante deve perceber o porquê da restrição do coeficiente **a** $\neq 0$.

Figura 48 - Registro de representação semiótica na forma gráfica das funções da Atividade 7.

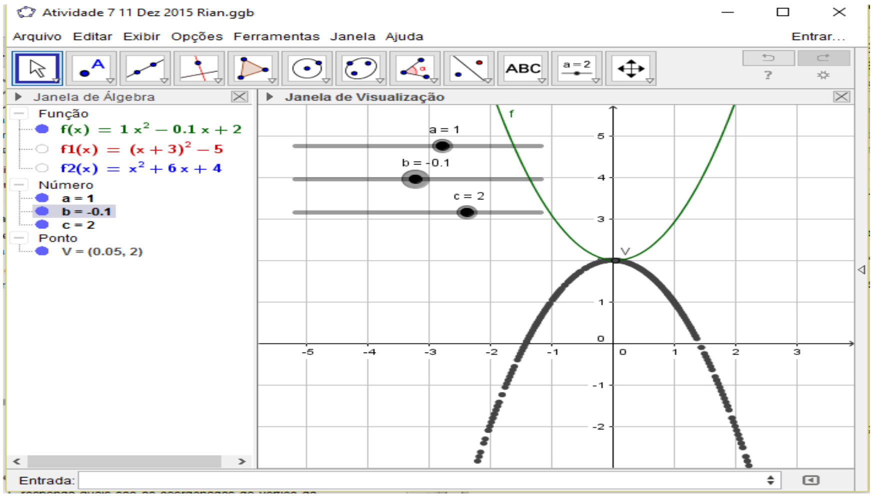


Fonte: Autor.

Quando habilitamos o rastro fazendo variar o controle deslizante do coeficiente **b** para valores positivos e negativos, esperamos que os estudantes observassem o comportamento da parábola f(x), que desliza em torno do coeficiente **c** e o vértice da parábola constrói uma parábola invertida.

Também esperamos que os estudantes conseguissem observar que no ponto de coordenadas $(0, c)$, onde o gráfico intercepta o eixo Y, o seu ponto simétrico possui uma distância na razão dos seus coeficientes $d = \frac{b}{a}$.

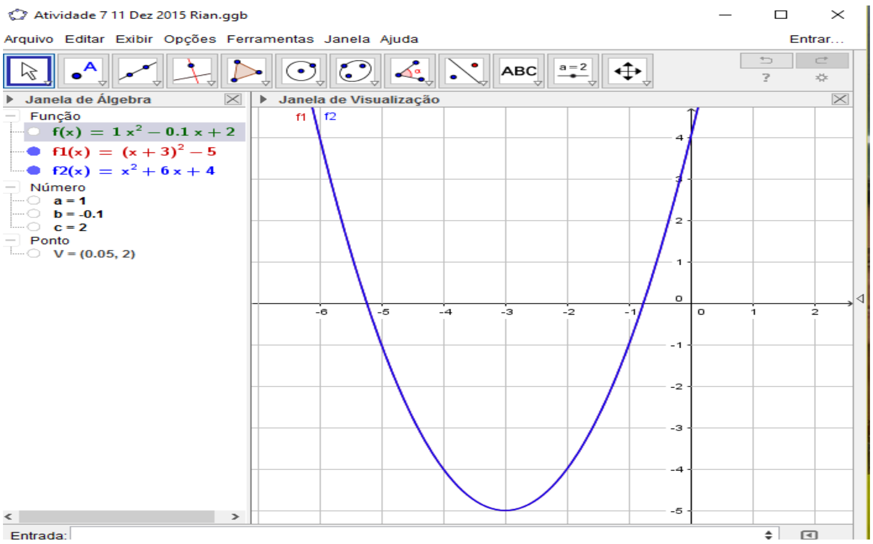
Figura 49 - Animação do coeficiente b da função Atividade 7.



Fonte: Autor.

No campo de entrada do software GeoGebra, quando digitamos a função $f_1(x)$ na forma canônica e $f_2(x)$ na forma desenvolvida, esperávamos que os estudantes percebessem que, apesar de terem introduzido duas funções quadráticas aparentemente diferentes algebricamente, o software mostra na parte gráfica somente um gráfico, pois, $f_1(x)$ está sobreposta a $f_2(x)$.

Figura 50 - Funções na forma algébrica diferentes com gráficos iguais Atividade 7.



Fonte: Autor.

Ascendendo para a fase da Formulação composta pela Situação de referência (S -2), Meio objetivo (M -2) e o aluno ativo (E -2), esperava-se que o conhecimento de (S -3), que interagiu com (E -3) e foi executado em (M -3), suscitasse em (E -2) o levantamento de hipóteses e questionamentos a respeito da representação gráfica das funções quadráticas $f(x)=ax^2+bx+c$, $f_1(x)=(x+3)^2-5$ e $f_2(x)=x^2+6x+4$ que foram desenvolvidas a partir da primeira atividade $f_1 = x^2$. Neste ponto, o professor observador (P -1) espera que os saberes das atividades anteriores sejam colocados à prova para buscar a solução ideal da atividade.

Ascendendo para a Validação, temos a situação de aprendizagem (S -1) formada pelo aluno aprendiz (E -1), professor observador (P -1) e o Meio de referência (M -1) que representa as funções quadráticas introduzidas na situação objetiva (S -3) e situação de referência (S -2). O aluno aprendiz deveria buscar o saber matemático de como utilizar as funções quadráticas $f(x)=ax^2+bx+c$, $f_1(x)=(x+3)^2-5$ e $f_2(x)=x^2+6x+4$. Neste ponto, o professor observador (P -1) deve identificar as estratégias utilizadas pelos estudantes.

Ascendendo para a fase da Institucionalização na situação didática formada por Meio de aprendizagem (M 0), o aluno aprendiz (E 0) e o professor (P 0), temos que, neste ponto, o aluno aprendiz deve transformar o conhecimento em saber matemático adquirido na situação de aprendizagem (S -1), onde o professor julga se o aprendiz obteve sucesso em identificar as construções de conhecimentos das atividades anteriores através das trocas da linguagem semiótica algébrica para linguagem semiótica gráfica e vice-versa. O professor também deve analisar, a partir do coeficiente **a**, quais as propriedades deste coeficiente e inferir a respeito da propriedade reflexiva destes gráficos, verificando a translação vertical do vértice da parábola, o comportamento do gráfico quando variamos para positivo ou negativo o coeficiente **b** suas implicações e também, neste contexto, verificar as similaridades entre as funções $f_1(x) = (x + 3)^2 – 5$ e $f_2 (x) = x^2+ 6.x + 4$ para escolher a mais adequada ao problema a ser enfrentado.

4.2 Aplicação do experimento e análise a *posteriori*

Após o teste diagnóstico teve início a divulgação da realização da pesquisa na escola. O pesquisador e as professoras de matemática do nono ano do ensino fundamental conversaram com quatro turmas buscando voluntários. Vinte estudantes mostraram interesse em participar, foram entregues os termos de consentimentos para assinatura dos responsáveis legais, mas apenas nove estudantes devolveram os documentos assinados.

A pesquisa tinha como previsão acontecer na sala de informática, dotada de ar condicionado, quinze computadores, quadro branco, projetor de imagens e com espaço físico privilegiado. Entretanto, ocorreu uma descarga elétrica uma semana antes da aplicação do experimento, que inviabilizou a utilização dos computadores da escola, podendo ser usado somente o espaço físico da sala de informática. Para suprir este infortúnio, utilizamos cinco notebooks gentilmente emprestados por amigos e familiares, para serem instalados o software educacional GeoGebra para execução da sequência didática.

Após a segunda atividade, por motivos particulares, houve desistência de três estudantes, sendo necessária a reprogramação dos encontros para realizações das atividades.

4.2.1 Atividade 1

A atividade teve início no dia 30 de Novembro de 2015, após a aula regular, na sala de informática da Escola, com duração de 45 minutos. Nos primeiros dez minutos o professor começou orientando os nove estudantes quanto às regras a serem observadas: não era aconselhável retirar-se no momento da atividade, sair do aplicativo para conectar-se a sites em desacordo com as atividades, atender ligações ou conversas que pudessem comprometer o bom andamento das atividades, salvo casos particulares de urgência. Foi apresentada a professora observadora Amanda, que falou que as atividades seriam observadas, filmadas e que as suas respostas seriam escritas nos protocolos de atividades e analisadas posteriormente.

O professor, após as devidas informações, explicou e tirou dúvidas quanto ao uso do software e como seriam executadas as atividades no GeoGebra referente ao inserção das atividades no campo de entrada e possíveis ajustes de comando.

Figura 51 – Início da Experimentação

Fonte: Autor.

Distribuídas às atividades, foi pedido que lessem a atividade de número um, neste momento, os estudantes encontravam-se na fase da Ação da TSD e estabeleceram um contrato didático e logo após foi solicitado que as funções quadráticas fossem inseridas todas na mesma janela algébrica para observarem os comportamentos dos gráficos posteriormente, neste momento os estudantes passaram para fase da Formulação da TSD, elaborando estratégias.

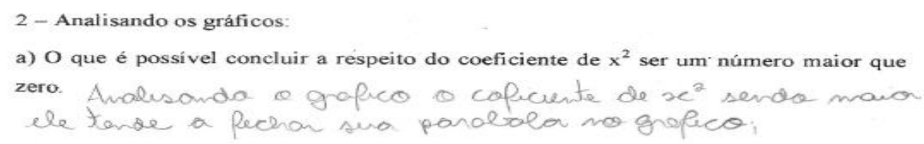
Os estudantes fizeram a inserção da letra a) $f_1(x)=x^2$ da atividade no GeoGebra e responderam:

Sobre qual observação eles fizeram, a aluna A18 respondeu "*o gráfico ficou pra cima"* [filmagem 1 05:37].

Foi solicitado que digitassem no campo de entrada as letras, b) $f_2(x)=2x^2$, c) $f_3(x)=3x^2$, d) $f_4(x)=10.x^2$ e foram questionados sobre o que é possível concluir. Nesta parte da atividade os alunos perceberam que a cada valor do coeficiente **a** > 1 a parábola começa a "fechar". Foi perguntado se na sala de aula, quando estudaram função quadrática, eles conseguiram perceber esse exercício ou só o perceberam com a utilização do software.

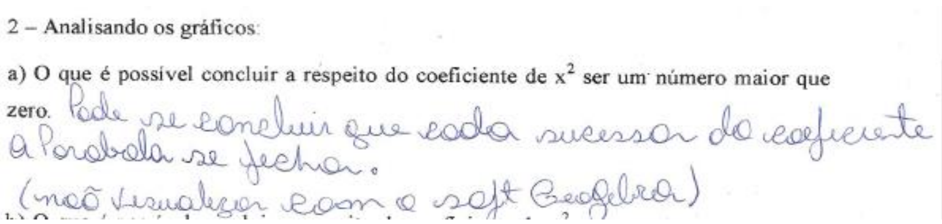
Podemos perceber que os estudantes conseguiram tirar conclusões verdadeiras a partir das respostas analisadas conforme previsto na análise a *priori* que elaborariam hipóteses na fase da Formulação da TSD, conforme a variação do coeficiente **a > 0,** ao descreverem as suas respostas os estudantes passaram para a fase da Validação da TSD:

Protocolo 1 Atividade 1 Resposta da 2ª questão letra a Estudante A02.


2 – Analisando os gráficos:

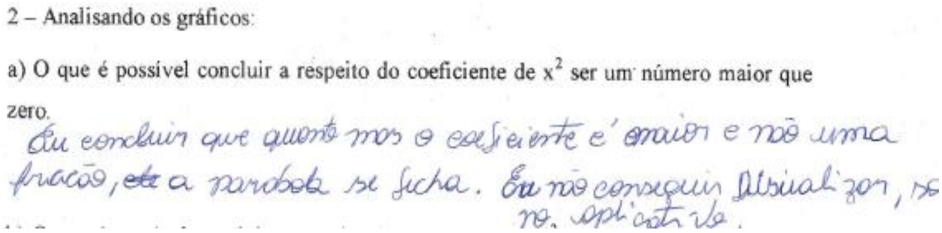
a) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número maior que zero. Analisando o grafico o coficiente de x^2 sendo maior ele tende a fechar sua parabola no grafico.

Protocolo 2 Atividade 1 Resposta da 2ª questão letra a Estudante A04.


2 – Analisando os gráficos:

a) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número maior que zero. Pode se concluir que cada sucessor do coeficiente a Parabola se fechar.
(não visualizei com o soft GeoGebra)

Protocolo 3 Atividade 1 Resposta da 2ª questão letra a Estudante A18.

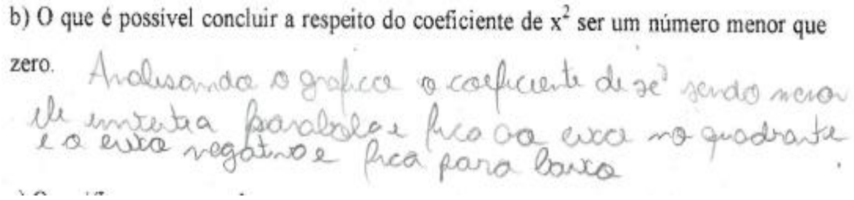

2 – Analisando os gráficos:

a) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número maior que zero.

Eu concluir que quanto mais o coeficiente é maior e não uma fração, a parabola se fecha. Eu não conseguir visualizar, no aplicativo.

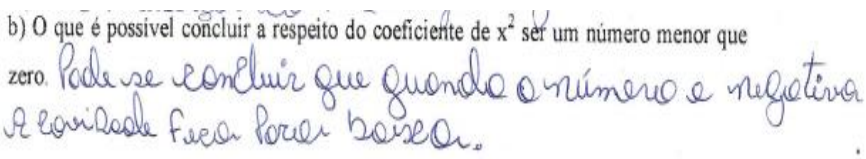
Foi solicitado que digitassem no campo de entrada do GeoGebra g) f_7 (x)= - x^2 h) f_8 (x) = -2 x^2 , i) f_9 (x) = -3x^2, j) f_{10} (x) = - 10x^2 e perguntado qual as conclusões que eles poderiam fazer:

Protocolo 4 Atividade 1Resposta da 2ª questão letra b Estudante A02.


b) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número menor que zero.

Analisando o grafico o coeficiente de x² sendo menor ele inverte a parabola e fica na eixo no quadrante e a eixo negativo e fica para baixo.

Protocolo 5 Atividade 1 Resposta da 2ª questão letra b Estudante A04.


b) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número menor que zero.

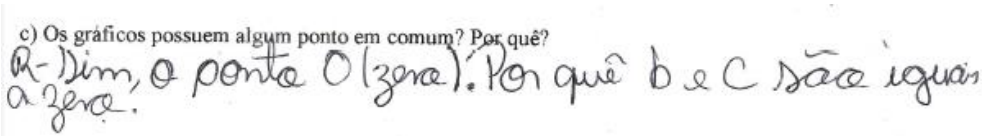
Pode se concluir que quando o número e negativa a concavidade fica para baixo.

Observamos que os estudantes se apropriaram do conhecimento das propriedades do coeficiente "a" conforme previsto na análise a *priori* observando à variação do coeficiente a < 0:

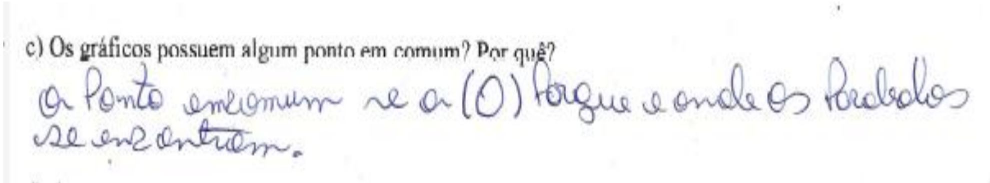
O professor solicitou que digitassem no campo de entrada do GeoGebra e) f_5(x) = 1/2. x^2, f) f_6(x) = 1/4. x^2, k) f_{11}(x) = - 1/2.x^2, l) f_{12} (x) = - 1/4.x^2 e foram questionados sobre as funções que os coeficientes eram frações positivas e negativas. O estudante A02 disse *"começa a abrir e faz o gesto com os dois braços"* (filmagem 2 00:09). O estudante A01 diz *"abriu mais"* (filmagem 2 00:45).

Na questão 2c o professor perguntou se possuíam algum ponto em comum e foi obtido como respostas:

Protocolo 6 Atividade 1 Resposta da 2ª questão letra c Estudante A 20.


c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê?
R- Sim, o ponto O (zero). Por quê b e C são iguais a zero.

Protocolo 7 Atividade 1 Resposta da 2ª questão letra c Estudante A04.


c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê?
O Ponto emcomum se o (O) Porque e onde os Parabolos se encontram.

Quanto ao item 2c podemos enfatizar que os estudantes têm dificuldades em expressar seus pensamentos matemáticos no plano cartesiano como o ponto (0,0), em decorrência da construção do plano cartesiano no quadro em sala de aula, pois, tendemos a escrever um único número zero, levando o estudante a idealizar um número e não um ponto no plano cartesiano com as coordenadas (0,0). Também destacamos de forma positiva a resposta do estudante A20 que observou que todas as funções quadráticas envolvidas possuíam os coeficientes (**b** = 0 e **c** = 0) e, por este motivo todas as funções quadráticas tinham um ponto em comum nas coordenadas (0,0).

Desta forma o professor institucionalizou o saber matemático relativo ao parâmetro **a** da função quadrática f(x) = **a**x^2 onde ficou evidenciado que os estudantes observaram que para (a > 0) a concavidade da parábola ficava voltada para cima, quando (a < 0) sua concavidade ficava voltada para baixo e quando temos **0 < a < 1** os gráficos começaram a abrir e que as parábolas tenderam a se afastar do eixo Y e se aproximarem do eixo X, porém, nunca se sobrepondo ao eixo, conforme previsto na análise a *priori*.

Assim, com este procedimento alternativo para superar os obstáculos didáticos referentes ao coeficiente "a" da função quadrática foi utilizada a abordagem de interpretação global de propriedades figurais de Duval (2011, pg.99) "Com esta abordagem **não estamos mais na presença da associação "um ponto – um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação – unidade significativa da expressão algébrica".".**

Vale ressaltar que no teste diagnóstico dos dezenove estudantes somente três conseguiram identificar o coeficiente *a* e parcialmente as suas propriedades que foi representado pelo número 3 os demais estudantes, desconheciam o coeficiente, possuíam obstáculo didático de reconhecimento da unidade simbólica correspondente (seu valor numérico) e das suas variáveis visuais (concavidade e abertura), percebemos que a sequência didática em conjunto com o software GeoGebra facilitou a compreensão do que de fato representa o coeficiente na função quadrática, pois, utilizando só a tecnologia lápis e papel os estudantes observam somente a concavidade em decorrência do caráter estático da tecnologia, perceberam que quando alteramos a representação algébrica há uma mudança instantânea na representação gráfica.

4.2.2 Atividade 2

A segunda atividade tinha como objetivos analisar a compreensão sobre translação vertical do vértice da parábola o comportamento do gráfico quando variamos para positivo ou negativo o coeficiente **b** suas implicações.

A atividade número 2, com duração de 35 minutos, foi executada no mesmo dia após um intervalo de 10 minutos. O professor iniciou solicitando que os estudantes lessem a atividade que envolvia a função $f(x) = ax^2 + n$ e perguntou quais parâmetros estão envolvidos e responderam "**a**" e "**n**". O professor solicitou que digitassem no campo de entrada do GeoGebra a função $f_1(x)=x^2$, porque ela serviria como referencial, neste momento o estudante tomou conhecimento do problema estabelecendo o Contrato Didático, conforme previsto na análise a priori na fase da Ação da TSD de Brousseau (2007), depois foi inserido b) f_2 (x) = x^2 + 1, c) f_3 (x) = x^2 + 2, d) f_4 (x) = x^2 + 3, após a inserção os estudante começa a imergir na fase da Formulação da TSD, começa a levantar hipóteses sobre as observações. O professor perguntou: "o que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x)=x^2$ quando somamos uma constante, para obter uma nova função?". O estudante A20 respondeu *"quando se soma, no eixo Y, ele pula uma casa"* [filmagem atividade 2 10:31].

Posteriormente o professor solicitou aos estudantes que inserissem no campo de entrada as funções quadráticas, f_5 (x) = x^2 – 1, f_6 (x) = x^2 – 2, f_7(x) = x^2 – 3, indagou "e agora?". O estudante A20 respondeu "*quando subtrai ele desce uma casa"* [filmagem atividade 2 10:36], a partir do momento em que os estudantes expressaram suas hipóteses nos protocolos de respostas assumem a fase da Validação da TSD, conforme análise a *priori*, desta maneira descreveram suas respostas das questões acima:

Protocolo 8 Atividade 2 Resposta da 2ª questão Estudante A15.

2 – O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante, para obter uma nova função?

R= Quando soma ele sobe uma casa, quando subitrai ele desse uma casa.

3 – Num mesmo par de eixos cartesiano desenhe, utilizando o GeoGebra, os gráficos

Protocolo 9 Atividade 2 Resposta da 2ª questão Estudante A03.

2 – O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante, para obter uma nova função? (só é possível visualizar com o soft)

Quando se soma ele sobe. Quando se subtrai ele desce.

Protocolo 10 Atividade 2 Resposta da 2ª questão Estudante A02.

2 – O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante, para obter uma nova função? Sendo ~~somado~~ somado ele sobe no eixo "y", sendo subtraido desce no eixo "y"

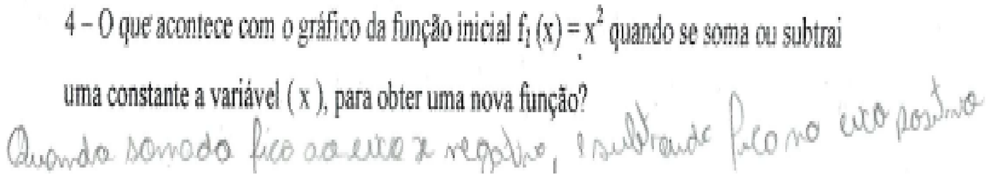
Nesta questão de número um desta atividade observamos que os estudantes compreenderam que o parâmetro "**n**" da função quadrática está relacionado com ascendência ou descendência vertical do gráfico.

Observamos que foi superado o obstáculo didático de identificação da unidade simbólica correspondente (aos valores) do parâmetro **"n"** e sua variável visual (posição do vértice), neste ponto os estudantes após várias observações percebam as translações verticais das parábolas de acordo com a variação positiva "sobe" ou negativa "desce" em relação ao eixo X, conforme previmos na análise a *priori* perceberam que quando alteramos a representação algébrica há uma mudança instantânea na representação gráfica, de acordo com este procedimento alternativo para superar os obstáculos didáticos referentes ao parâmetro **"n"** da função quadrática foi utilizada a abordagem de interpretação global de propriedades figurais de Duval (2011, pg.99).

Prosseguindo à atividade 2, foi solicitado que no exercício 2 fosse criado uma nova janela para atividade. O professor solicitou que digitassem no campo de entrada do GeoGebra a função $f_1(x)=x^2$ para servir como referencial, e em seguida foi inserido $f_2(x) = x^2 + x$, $f_3(x) = x^2 + 2x$, $f_4(x) = x^2 + 3x$. O professor perguntou se eles haviam notado neste terceiro exercício qual coeficiente está faltando e os estudantes A20 e A15 responderam "*o cê"* [filmagem da atividade 2 em 15:15]. Após cada inserção era perguntado o que estavam observando e o estudante A15 respondeu "*ele desloca para a esquerda e desceu mais uma casa*" [filmagem atividade 2 em 17:05].

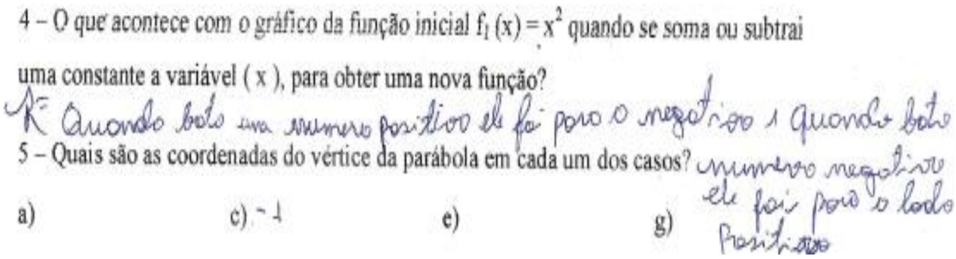
Solicitamos que fossem inseridos no campo de entrada as funções $f_5(x)= x^2 – x$, $f_6(x) = x^2 – 2x$, $f_7(x) = x^2 – 3x$ e que observassem os comportamentos dos gráfico os estudantes conseguiram compreender que os gráficos conforme os coeficientes negativos foram inseridos havia um deslocamentos inverso ao senso comum, pois, acrescenta negativo o gráfico desloca-se verticalmente e horizontalmente no sentido positivo do eixo cartesiano e vice-versa de acordo com as respostas dos protocolos a seguir:

Protocolo 11 Atividade 2 Resposta da 4ª questão Estudante A02.


4 – O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante a variável (x), para obter uma nova função?

Quando somado fica ao eixo x negativo, e subtraindo fica no eixo positivo

Protocolo 12 Atividade 2 Resposta da 4ª questão Estudante A03.

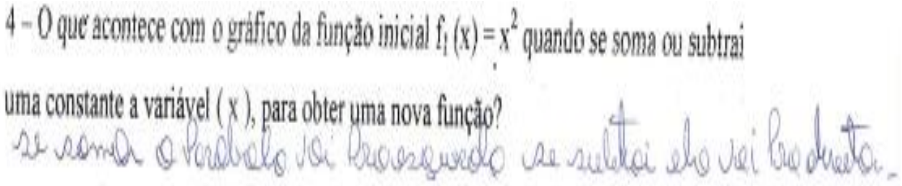

4 – O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante a variável (x), para obter uma nova função?

R: Quando boto um numero positivo ele foi para o negativo e quando boto numero negativo ele foi para o lado positivo

5 – Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos?

a) c) -1 e) g)

Protocolo 13 Atividade 2 Resposta da 4ª questão Estudante A04.


4 – O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante a variável (x), para obter uma nova função?

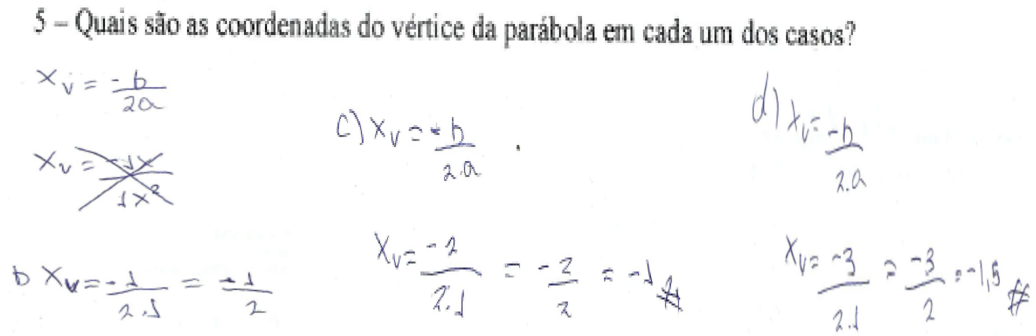
se soma a parabola vai p/ esquerda se subtrai ela vai p/ direita.

No exercício quatro os estudantes tiveram dificuldades em observar o papel do coeficiente "b", por que o gráfico descreve uma translação vertical e horizontal ao mesmo tempo, os estudantes só conseguiam observar o deslocamento para a esquerda ou direita, na análise a *priori* não foi prevista esta dificuldade sendo necessária uma atividade complementar para sanar este obstáculo.

Observamos que não foi superado o obstáculo didático de identificação da unidade simbólica correspondente (aos valores) do coeficiente “b” e sua variável visual (posição do vértice), não perceberam que quando alteramos a representação algébrica há uma mudança instantânea na representação gráfica, gerando translações verticais e horizontais simultânea.

Finalizando a atividade dois percebemos que no exercício cinco houve avanço quando solicitadas no exercício cinco as coordenadas dos vértices com respeito ao tratamento proposto por Raymond Duval. Os cálculos apresentados por dois estudantes responderam parcialmente esta atividade e de forma correta, identificando os coeficientes adequados para os cálculos conforme protocolo de resposta dos estudante.

Protocolo 14 Atividade 2 Resposta da 5ª questão Estudante A15.



Quanto ao exercício cinco, três estudantes não conseguiram executar os tratamentos de todos os vértices, em consequência do tempo destinado.

Desta forma, com este procedimento alternativo para superar os obstáculos didáticos referentes à translação vertical do vértice do gráfico da função quadrática e a variação do coeficiente “b” utilizamos Duval (2011, pg.99) “Com esta abordagem **não estamos mais na presença da associação “um ponto – um par de números”, mas na presença da associação “variável visual de representação – unidade significativa da expressão algébrica”.”.**

4.2.3 Atividade 3

Esta atividade teve início no dia 01 de dezembro de 2015 às 08h30, com duração de 50 minutos. O professor iniciou reiterando a importância da colaboração dos estudantes com participação voluntária em todas as atividades, neste momento o estudante encontra-se na fase da Ação da TSD, tomou conhecimento de suas atividades e estabeleceu um contrato didático, foi solicitado que lessem com atenção e respondessem nos seus protocolos. Foi solicitado que inserissem no campo de entrada a função $f_1(x)=x^2$. O professor perguntou o eles haviam observado e responderam que apareceu um gráfico com a concavidade voltada para cima. Novamente o professor solicitou que inserissem no campo de entrada as funções $f_2(x) = (x + 1)^2$, $f_3(x) = (x + 2)^2$, $f_4(x) = (x – 1)^2$, $f_5(x) = (x – 2)^2$, $f_6(x) = (x + ½)^2$, $f_7(x) = (x – ½)^2$ no GeoGebra, no momento que foi inserido as atividades, iniciaram a fase da Formulação da TSD, tiveram início as argumentações e hipóteses, então, o professor perguntou o que eles observaram, ao que o estudante A02 respondeu [filmagem da atividade 3 16:01]:

Para f_2 "*ele ficou em cima do eixo X, mas ele se deslocou para a esquerda uma casa";*

Para f_4 "*ele continuou em cima do eixo X, mas se deslocou uma casa para a direita";*

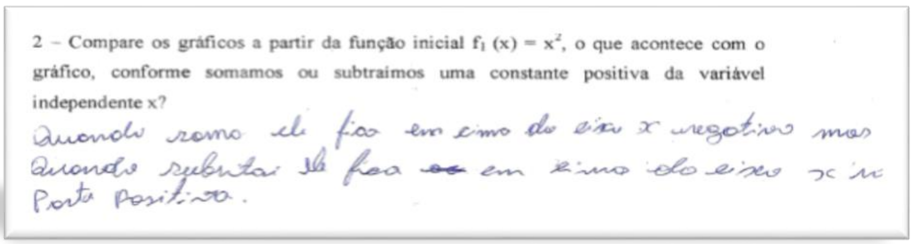
Para f_3 "*ele se deslocou duas casas para a esquerda em cima do eixo X";*

Para f_5 "*ele se deslocou duas casas para a direita em cima do eixo X";*

O estudante A20 se manifestou resumindo da seguinte maneira *"acrescenta somando, ele se desloca para a esquerda, onde é negativo e acrescenta subtraindo, ele anda para a direita"*.

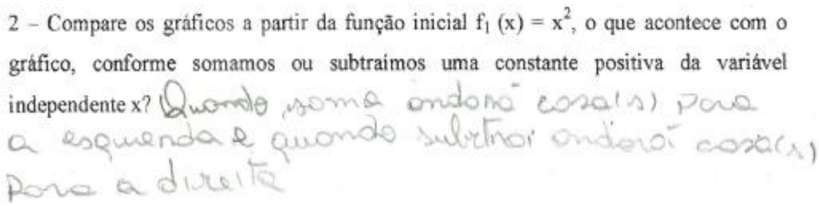
Percebemos que os estudantes conseguiram compreender a translação horizontal para a esquerda quando for acrescentado na variável x um valor positivo e ocorrerá a translação horizontal para a direita quando for acrescentado na vaiável x um valor negativo, esta fase ocorreu como foi previsto na análise a priori não houve questionamentos conforme podemos perceber nos protocolos dos estudantes abaixo, no momento que os estudantes escrevem suas respostas nos protocolos, iniciou a fase da Validação da TSD, os estudantes tentaram mostrar o sucesso ou não de suas respostas.

Protocolo 15 Atividade 3 Resposta da 2ª questão Estudante A01.


2 – Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, o que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraímos uma constante positiva da variável independente x?

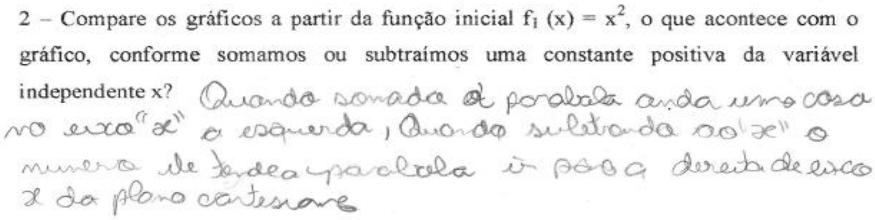
Quando somo ele fica em cimo do eixo x negativo mas Quando subtrai ele fica em cimo do eixo x na Porte Positivo.

Protocolo 16 Atividade 3 Resposta da 2ª questão Estudante A15.



2 – Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, o que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraímos uma constante positiva da variável independente x? Quando soma andará casa(s) para a esquerda e quando subtrair andará casa(s) para a direita

Protocolo 17 Atividade 3 Resposta da 2ª questão Estudante A02.



2 – Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, o que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraímos uma constante positiva da variável independente x? Quando somada a parabola anda uma casa no eixo "x" a esquerda, Quando subtraida ao "x" o numero de tendea parabola ir para direita de eixo x do plano cartesiano

Observamos que foi superado o obstáculo didático de identificação da unidade simbólica correspondente (aos valores) do parâmetro **"m"** e sua variável visual (posição do vértice), perceberam que quando alteramos a representação algébrica há uma mudança instantânea na representação gráfica, Duval (2011).

No exercício de número 3 desta atividade os estudantes não apresentaram dificuldades para observar os vértices com o GeoGebra foi observado que o vértice se deslocava no sentido contrário ao número empregado.

Os estudantes possuíam obstáculo didático de reconhecimento da unidade simbólica correspondente (seu valor numérico) e das suas variáveis visuais (posição do vértice em relação ao eixo Y), percebemos que a sequência didática em conjunto com o software GeoGebra facilitou a compreensão do que de fato representa o parâmetro "m" na função quadrática, pois, utilizando só a tecnologia lápis e papel os estudantes observam somente vários gráficos em decorrência do caráter dinâmico da tecnologia lápis e papel, com o GeoGebra perceberam que quando alteramos a representação algébrica há uma mudança instantânea na representação gráfica.

4.2.4 Atividade 4

Esta atividade foi executada no dia 01 de Dezembro, às 08:00 hs e participaram cinco estudantes.

O professor iniciou distribuindo o protocolo de respostas explicando as necessidades desta atividade fez a leitura e neste momento os estudantes encontravam-se na fase da Ação da TSD, e foi solicitado que os estudantes digitassem no campo de entrada do software GeoGebra a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$. O professor perguntou o que eles observavam quando variavam apenas o coeficiente **a**, neste momento os estudantes passaram para a fase da Formulação da TSD os estudantes elaboravam hipótese, argumentam, conforme as respostas abaixo (Transcrição da filmagem 02:25):

Estudante A20: “*quanto menor ele tá se expandindo e quanto maior ele tá se fechando”.*

Professor: “clica com o direito do mouse, e coloca animar. O que está ocorrendo?”.

A15:[...]ele tá se fechando.

A20:[...]quando ele fecha ê...

A15: [...]quando ficou no -10 ele se abriu todo e ele começou a se fechar no negativo.

*Professor: experimente colocar **a**=0 ai... vai variando ele até chegar no zero.*

A15:[...]passou uma linha na diagonal...virou uma linha.

Professor: continua sendo uma parábola?

A20:[...]não é uma reta.

A15:[...]ele se transforma numa reta.

Neste momento os estudantes passaram para fase da Validação da TSD onde eles expressaram suas respostas nos protocolos buscando o sucesso ou não de suas respostas.

Dando prosseguimento à atividade fazendo a animação do coeficiente **a** no intervalo de -10 até 10 como pedia a atividade foi unânime o entendimento, conforme os protocolos a seguir:

Protocolo 18 Atividade 4 Resposta da 1ª questão letra c Estudante A03.

c) O que você observou? Explique. QUANDO BOTAMOS NO POSITIVO ELE SE FECHA E QUANDO "a" É IGUAL A ZERO ELA SE TORNA UMA RETA. QUANDO "a" FOR NEGATIVO ELE VAI PARA BAIXO

Protocolo 19 Atividade 4 Resposta da 1ª questão letra c Estudante A01.

c) O que você observou? Explique.

Quando (a) igual a zero é uma reta.
Quando (a) é maior que zero e fecha.
Quando (a) é menor que zero ela vira para o lado negativo e fecha novamente.

Protocolo 20 Atividade 4 Resposta da 1ª questão letra c Estudante A02.

c) O que você observou? Explique.

Variando o controle do deslizante o ele para positivo ele fechou e quando negativo ele foi para baixo e fechou, já ão ficou em 0 ele se fez uma reta, sendo negativa concavidade para baixo e positivo concavidade para cima

Protocolo 21 Atividade 4 Resposta da 1ª questão letra c Estudante A20.

c) O que você observou? Explique.

Quando A era positiva a parabola estava voltado para cima negativa com da voltada para baixo e quando igual a 0 zero, virou uma linha reta

Protocolo 22 Atividade 4 Resposta da 1ª questão letra c Estudante A15.

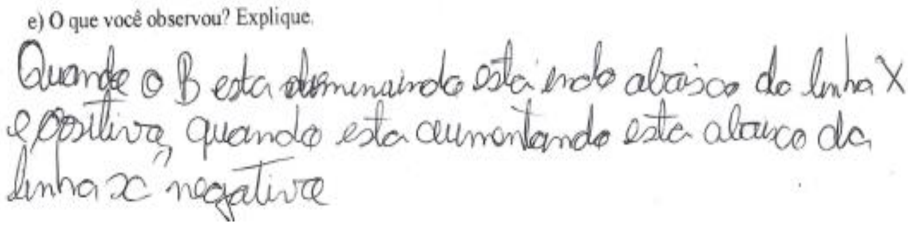
c) O que você observou? Explique.

Quando o A era positivo a cavidade esta voltado para cima
Quando o A era negat. a cavidade estava voltada para baixo
Quando o A era igual a zero ficou uma linha reta

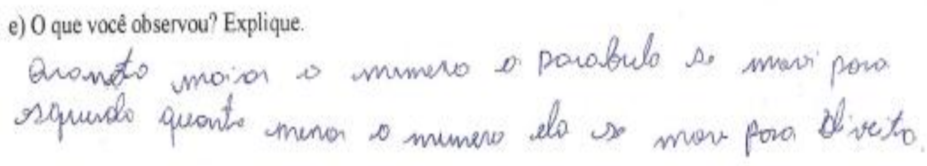
Percebemos que foram institucionalizados os entendimentos sobre os coeficientes **a > 0, a < 0** tanto a respeito da sua concavidade quanto a restrição do coeficiente assumir o valor “zero” quando os estudantes mencionam que neste caso vira uma linha reta, conforme previmos na análise a priori os estudantes institucionalizaram as propriedades referentes ao coeficiente “a”.

Seguindo a atividade na questão 1d o professor solicitou que os estudantes variassem o controle deslizante referente ao coeficiente **b** e mantivessem constantes os coeficientes **a** e **c** e lhes perguntou o que vocês estão observando, de acordo com os protocolos obtivemos as respostas:

Protocolo 23 Atividade 4 Resposta da 1ª questão letra e Estudante A20.


e) O que você observou? Explique.
Quando o B esta diminuindo esta indo abaixo da linha X e positiva, quando esta aumentando esta abaixo da linha x negativa

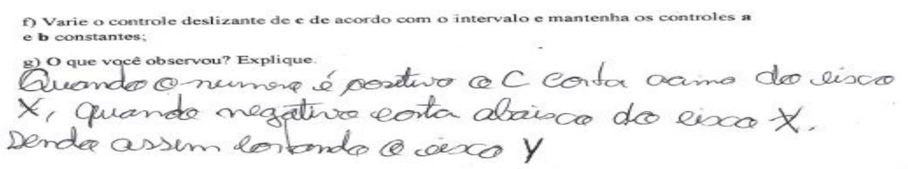
Protocolo 24 Atividade 4 Resposta da 1ª questão letra e Estudante A15.


e) O que você observou? Explique.
Quanto maior o numero a parabola se move para esquerda quanto menor o numero ela se move para direita.

O professor perguntou o que eles haviam observado e os estudantes disseram ter compreensão parcial do coeficiente **b**. Nos protocolos da atividade percebemos que eles observaram que quando os coeficientes assumem valores positivos, o gráfico se desloca para a esquerda e, quando assumem valores negativos, o gráfico se desloca para a direita ambos em relação ao eixo Y.

Na atividade 4 - exercício 1f e 1g - o professor solicitou que os estudantes variassem o controle deslizante do coeficiente **b** e mantivessem os demais constantes, e lhes perguntou o que haviam observado. Foram obtidas respostas de acordo com os protocolos a seguir:

Protocolo 25 Atividade 4 Resposta da 1ª questão letra f Estudante A20.


f) Varie o controle deslizante de **c** de acordo com o intervalo e mantenha os controles **a** e **b** constantes;
g) O que você observou? Explique.
Quando o numero é positivo o C corta acima do eixo X, quando negativo corta abaixo do eixo X. Sendo assim cortando o eixo Y

Protocolo 26 Atividade 4 Resposta da 1ª questão letra f Estudante A15.

f) Varie o controle deslizante de **c** de acordo com o intervalo e mantenha os controles **a** e **b** constantes;

g) O que você observou? Explique.

Quando ele Bota um numero Positivo ele corta acima do eixo X e quando ele corta o numero negativo ele corta numeros negativos.

Percebemos que foi institucionalizado o saber matemático sobre o coeficiente **c**, pois, os estudantes se manifestaram de forma conclusiva quando mencionaram que o gráfico “corta” o eixo Y acima do eixo X para valores positivos ou abaixo para valores negativos.

Os estudantes possuíam obstáculo didático para o coeficiente “a” de reconhecimento da unidade simbólica correspondente (seu valor numérico) e das suas variáveis visuais (concavidade e abertura), para o coeficiente “b” o reconhecimento da unidade simbólica correspondente (seu valor numérico) e das suas variáveis visuais a posição do vértice em relação ao eixo da ordenada, para o coeficiente “c” o reconhecimento da unidade simbólica correspondente (seu valor numérico) e das suas variáveis visuais a posição do vértice em relação ao eixo X.

Percebemos que a sequência didática em conjunto com o software GeoGebra facilitou a compreensão do que de fato representa os coeficientes na função quadrática, pois, utilizando só a tecnologia lápis e papel os estudantes observam somente o gráfico estático, desta maneira perceberam que quando alteramos a representação algébrica há uma mudança instantânea na representação gráfica conforme preconiza Duval (2011).

Salientamos que no teste diagnóstico executado na análise prévia, somente três estudantes dos dezenove identificaram o coeficiente “a” somente no quesito concavidade, deixando de mencionarem a “contração ou expansão” da parábola.

Percebemos que os estudantes continuaram com obstáculos em relação ao coeficiente “b” apesar da variação deste coeficiente mostrado no software educacional GeoGebra,, ficaram confusos observando somente os deslocamentos ascendentes ou descendentes em relação ao eixo X, não observaram os deslocamentos em relação ao eixo Y, conforme o esperado na análise a priori, fazendo-se necessária a elaboração de uma nova atividade de acordo com a Engenharia Didática solicita.

Quanto ao coeficiente “c” foi possível perceber que ocorreu a previsão da análise a *priori* os estudantes institucionalizaram o conhecimento relativo ao coeficiente conforme protocolos de respostas dos estudantes acima, informando que quando o coeficiente era positivo cortava o eixo Y na parte positiva, quando era negativo cortava o eixo Y na parte negativa e finalmente quando era zero cortava o eixo Y no valor zero.

Desta forma a atividade atingiu o seu objetivo para superação dos obstáculos didáticos.

4.2.5 Atividade 5

A atividade foi executada no dia 03 de dezembro, às 08h30 e participaram cinco estudantes.

O professor começou distribuindo a atividade lendo-a e perguntou se os estudantes tinham dúvidas quanto ao trabalho necessário para realizá-la. Houve silêncio por parte dos estudantes, sendo isto um indício de dúvidas não reveladas. Assim, o professor explicou novamente a atividade, neste momento os estudantes estavam na fase da Ação da TSD, os estudantes interagiram com as atividades, estabeleceram um contrato didático, o professor perguntou do estudante A20 se a partir da função quadrática $f_1(x)=x^2$ ele conseguia prever como ficaria o gráfico da função $f_2(x) = 2(x + 3)^2 – 4$. O estudante A15 perguntou se ele poderia responder desta feita os estudantes passaram para fase da Formulação da TSD, conjecturando hipóteses e disse (transcrição do vídeo 01:38):

A15:como o gráfico ficaria assim!!!(gesto com a mão indicando um gráfico com parábola voltada para cima).

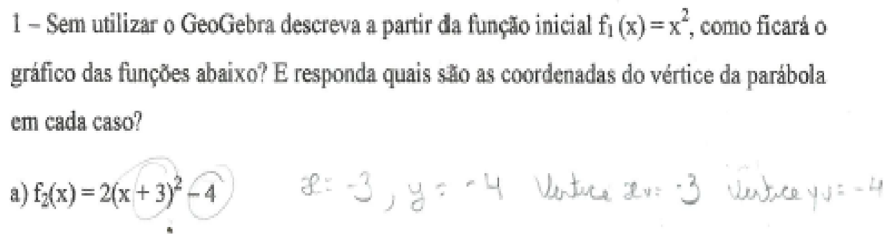
Prof: porquê?

A15:por causa que o número!!! cada vez o número fica positivo ela vai se fechando.

O estudante estava fazendo a comparação de f_1 e referia-se ao coeficiente **a** das duas funções que eram positivos e, por este motivo, o gráfico ficou voltado para cima, o estudante respondeu conforme prevíamos na análise *priori* conseguindo assim imaginar como o gráfico viria se formar no GeoGebra antes de executá-lo.

O professor perguntou se eles podiam identificar as coordenadas do vértice e os estudantes disseram que seriam capazes de identificar conforme protocolos:

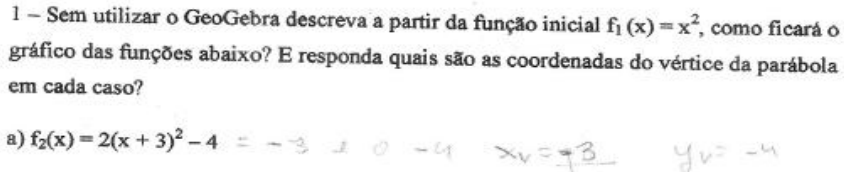
Protocolo 27 Atividade 5 Resposta da 1ª questão letra a Estudante A02.



1 – Sem utilizar o GeoGebra descreva a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, como ficará o gráfico das funções abaixo? E responda quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada caso?

a) $f_2(x) = 2(x + 3)^2 - 4$ x: -3 , y: -4 Vertice xv: -3 Vertice yv: -4

Protocolo 28 Atividade 5 Resposta da 1ª questão letra a Estudante A15.



1 – Sem utilizar o GeoGebra descreva a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, como ficará o gráfico das funções abaixo? E responda quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada caso?

a) $f_2(x) = 2(x + 3)^2 - 4$ = -3 x 0 -4 xv = -3 yv = -4

Neste ponto percebemos que os estudantes se encontravam na fase da Validação da TSD, buscando a identificação de novos saberes, observamos que os estudantes conseguiram ter uma representação mental do gráfico antes da construção do GeoGebra, e através da linguagem algébrica (inicialmente) passaram para linguagem gráfica (posteriormente).

Após identificarem as coordenadas dos vértices o professor solicitou que os estudantes digitassem no campo de entrada a função quadrática $f(x) = (x+3)^2-5$ e em seguida digitassem $g(x) = x^2 + 6x + 4$, então, o professor perguntou se eles conseguiam prever como ficariam os gráficos e obtivemos as respostas conforme a transcrição do vídeo, à figura e o protocolo:

Professor: coloque ai no campo de entrada $g(x)=x^2+6x+4$ e vamos ver ser confirma o que vocês escreveram no papel (protocolo);

A15: cadê aquele outro Ryan? Professor ela ficou em cima do f(x) certinho! Olhe aqui!

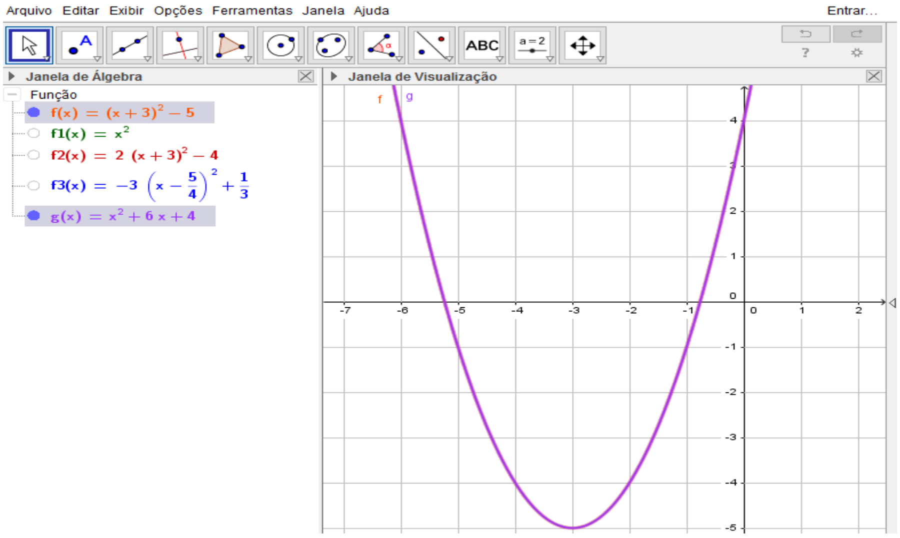
Professor: qual é a conclusão que vocês chegaram? Você fez uma observação muito importante!

A15: que a resposta é a mesma do f(x)!

Professor: se ela ficou certinha em cima, tem uma palavra chave que eu quero que vocês compreendam! Se ficou certinha em cima, qual é a conclusão?

A15: que pode usar fórmulas diferentes e que pode dar o mesmo resultado!

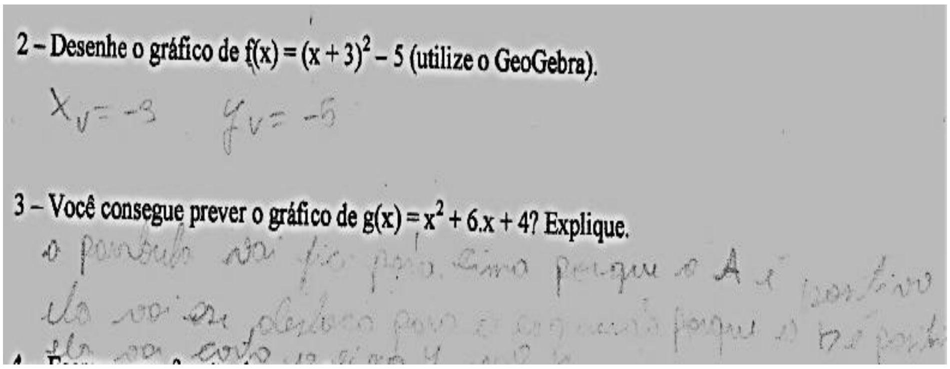
Figura 52 - Atividade 5 exercício 2.



Fonte: Autor.

Neste protocolo a seguir, percebemos que os estudantes, ao ler a questão, identificaram o parâmetro **m** como a coordenada do vértice X_V e **n** como a coordenada do vértice Y_V.

Protocolo 29 Atividade 5 Resposta da 2ª e 3ª questão Estudante A15.



2 – Desenhe o gráfico de $f(x) = (x+3)^2 - 5$ (utilize o GeoGebra).

$X_V = -3$ $\quad Y_V = -5$

3 – Você consegue prever o gráfico de $g(x) = x^2 + 6.x + 4$? Explique.

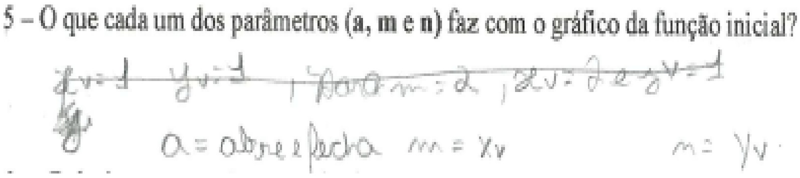
o parabola vai fica para cima porque o A é positivo

Neste momento os estudantes conseguiram compreender que, apesar de termos funções quadráticas aparentemente diferentes, como f(x) = $(x+3)^2$-5 na forma canônica e $g(x) = x^2 + 6x + 4$ na forma fatorada da função quadrática, obteremos gráficos iguais porque as funções são iguais, porém, escrita com duas representações para mesma função.

Ressaltamos neste ponto o protocolo 29, que o estudante conseguiu passar do registro de representação semiótica na linguagem algébrica para a linguagem gráfica, fazendo um esboço mental, somente observando a função $g(x) = x^2 + 6x + 4$. O estudante justificou que a parábola está voltada para cima porque o valor do coeficiente (a) é positivo, há o deslocamento para a esquerda do eixo da ordenada porque o coeficiente (b) é positivo e corta o eixo da ordenada no coeficiente $(c = 4)$.

Seguindo a atividade no exercício 5 o professor solicitou que os estudantes identificassem, se possível, os parâmetros (**a, m** e **n)** e qual a relação de cada um deles com o gráfico, e obtivemos as respostas nos protocolos:

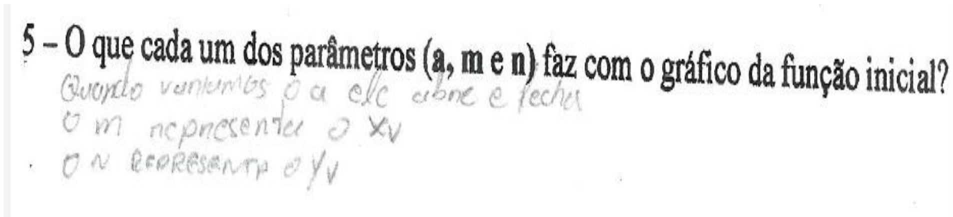
Protocolo 30 Atividade 5 Resposta da 5ª questão Estudante A02.



5 – O que cada um dos parâmetros (a, m e n) faz com o gráfico da função inicial?

a = abre e fecha m = Xv m = Yv

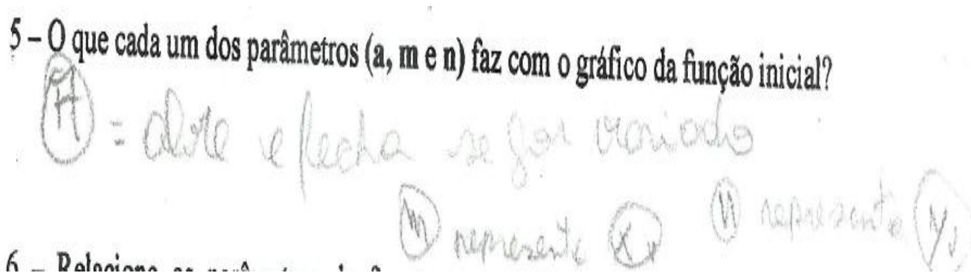
Protocolo 31 Atividade 5 Resposta da 5ª questão Estudante A03.



5 – O que cada um dos parâmetros (a, m e n) faz com o gráfico da função inicial?

Quando variamos o a ele abre e fecha
O m representa o Xv
O n representa o Yv

Protocolo 32 Atividade 5 Resposta da 5ª questão Estudante A01.



5 – O que cada um dos parâmetros (a, m e n) faz com o gráfico da função inicial?

A = abre e fecha se for variado
M representa Xv N representa Yv

Neste ponto, observamos que a atividade atingiu o seu objetivo conforme a análise a *priori* e de acordo com Duval (2011,pg. 99) “Com esta abordagem **não estamos mais na presença da associação “um ponto – um par de números”, mas na presença da associação “variável visual de representação – unidade significativa da expressão algébrica”.”. P**ercebemos que os estudantes conseguiram compreender a finalidade de cada parâmetro (**a, m** e **n)** e como eles se comportam no gráfico quando são variados com números positivos e negativos, institucionalizando o saber matemático.

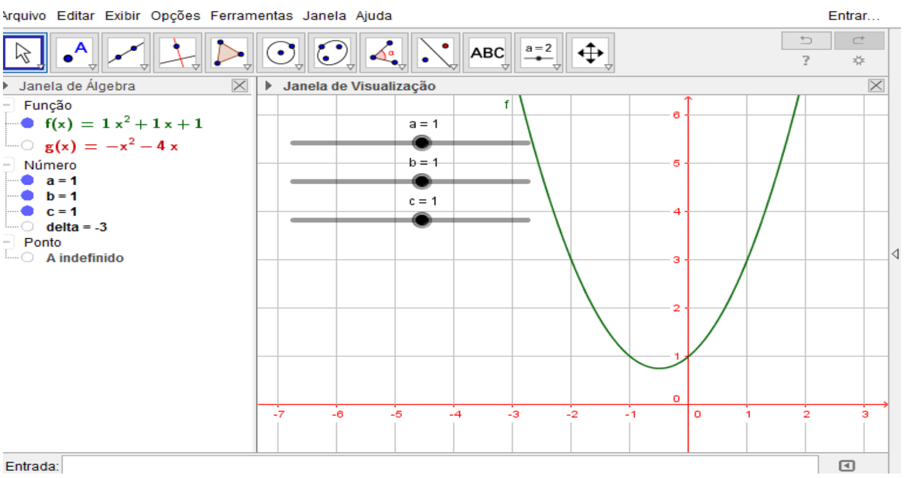
4.2.6 Atividade 6

A sexta atividade teve como objetivo institucionalizar as construções de conhecimentos através das trocas da linguagem semiótica algébricas para linguagem semiótica gráficas e vice-versa, verificando as funcionalidades dos coeficientes (**a**, **b** e **c**), raízes da função e descriminante delta e suas influências na parte gráfica.

Esta atividade foi executada no dia 03 de dezembro, às 08h30, com duração de 45 minutos, participaram cinco estudantes.

O professor iniciou distribuindo o protocolo de respostas, explicando as necessidades desta atividade leu junto com os estudantes, naquele momento, segundo a nossa análise a *priori* os participantes se encontravam na fase da Ação da TSD, interagiram com a atividade proposta e estabeleceram um contrato didático, logo após, o professor solicitou que os estudantes digitassem no campo de entrada do software GeoGebra a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ com seus respectivos controles deslizantes e, em seguida, que digitassem delta = b^2 -4ac e o comando RAIZ[f]. Neste caso o valor de delta ficou negativo e as raízes ficaram indeterminadas, conforme figura abaixo.

Figura 53 - Atividade 6 A02.



Fonte: Autor.

Ao variar os valores dos coeficientes (**a, b** e **c**) representados pelos controles deslizantes da função quadrática no GeoGebra, os estudantes perceberam que os valores de delta também variavam conforme o gráfico mostrava, naquele momento os estudante entravam na fase da Formulação da TSD, começaram a levantar hipótese, após as indagações.

O professor perguntou aos estudantes: “fazendo a = 4, b = -4 e c = 2, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do delta?”, e os estudantes responderam (transcrição do vídeo):

P: o que aconteceu com o gráfico?

A15: ele ficou para cima! Só que ele se fechou mais e cortou em cima do três;

P: quanto vale o “c” ai?

A20: dois!

P:Qual o sinal de delta?

A20:menos dezesseis!

P: faça a=1, b= -4 e c=3

A20: ele ficou pra cima, deslocou para direita e cortou no 3!

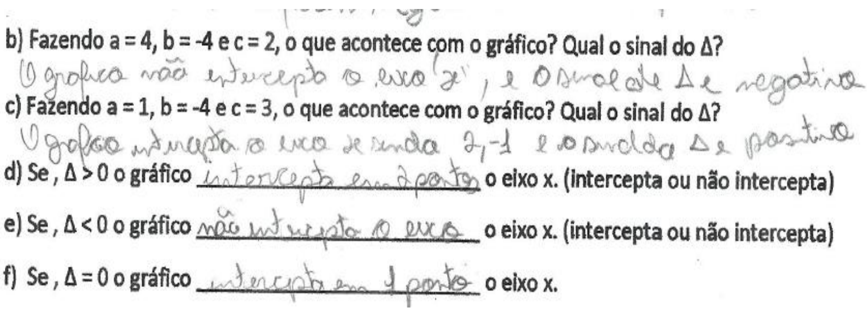
P: qual o sinal de delta, neste caso?

A20: positivo!

P: varie o “c” para quatro, cinco e depois vai diminuindo o valor de “c” e observe ai qual é o sinal de delta!

Nesse ponto os estudantes perceberam que, para cada variação dos coeficientes, havia simultaneamente a variação do discriminante delta, conforme podemos observar nos protocolos abaixo:

Protocolo 33 Atividade 6 Resposta da 1ª questão letras b até f Estudante A02.


b) Fazendo a = 4, b = -4 e c = 2, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do Δ?

O grafico não intercepta o eixo 'x', e o sinal de Δ e negativo

c) Fazendo a = 1, b = -4 e c = 3, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do Δ?

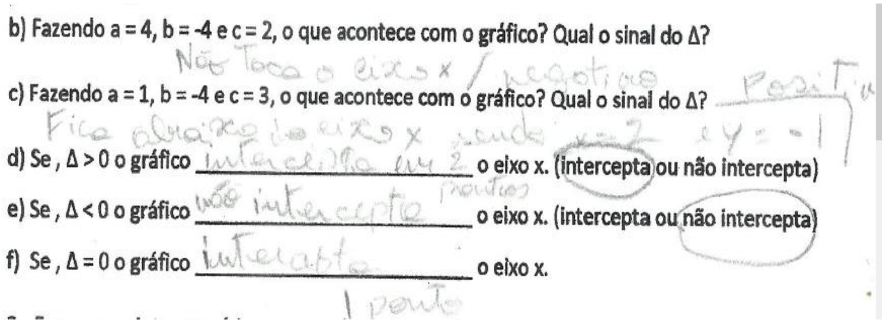
O grafico intercepta o eixo sendo 3, -1 e o sinal de Δ e positivo

d) Se , Δ > 0 o gráfico intercepta em 2 pontos o eixo x. (intercepta ou não intercepta)

e) Se , Δ < 0 o gráfico não intercepta o eixo o eixo x. (intercepta ou não intercepta)

f) Se , Δ = 0 o gráfico intercepta em 1 ponto o eixo x.

Protocolo 34 Atividade 6 Resposta da 1ª questão letras b até f Estudante A01.

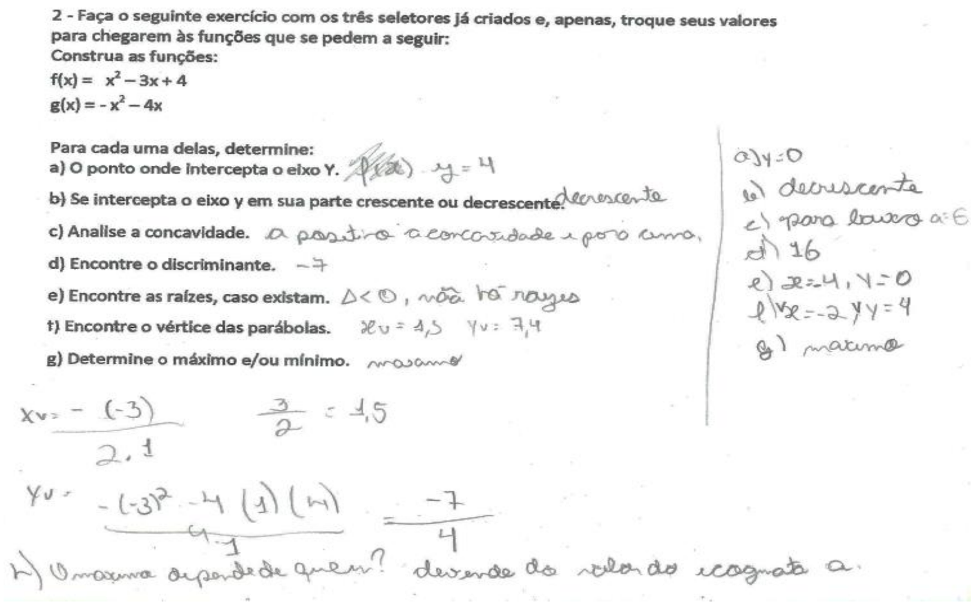

b) Fazendo a = 4, b = -4 e c = 2, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do Δ?
Não Toca o eixo x / negativo
c) Fazendo a = 1, b = -4 e c = 3, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do Δ? Positivo
Fica abaixo do eixo x sendo x=2 e y=-1
d) Se , Δ > 0 o gráfico intercepta em 2 pontos o eixo x. (intercepta ou não intercepta)
e) Se , Δ < 0 o gráfico não intercepta o eixo x. (intercepta ou não intercepta)
f) Se , Δ = 0 o gráfico intercepta 1 ponto o eixo x.

Nesta atividade, observando as variações dos valores de delta, os estudantes conseguiram compreender que quando o delta tinha valores positivos, o gráfico interceptava o eixo X em dois pontos distintos; quando assumia valor zero, interceptava somente uma vez e, quando assumia valores negativos, não interceptava o eixo X.

Enveredando por este caminho nas atividades, fazendo variar os coeficientes da função quadrática na linguagem algébrica e observar instantaneamente o comportamento na linguagem gráfica, está de acordo com os estudos de Duval (2011, pg. 103) “De fato, é suficiente praticar a abordagem experimental a mais clássica: **variar uma unidade significativa na expressão, mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro”.**

Continuando a atividade 6 exercício 2, o professor solicitou que os estudantes variassem os controles deslizantes do GeoGebra para construírem f(x) = $x^2 - 3x + 4$ e g(x) = $- x^2 - 4x$, analisando uma função de cada vez, e obtivemos as seguintes respostas conforme os protocolos abaixo:

Protocolo 35 Atividade 6 Resposta da 2ª questão letras a até g Estudante A02.


2 - Faça o seguinte exercício com os três seletores já criados e, apenas, troque seus valores para chegarem às funções que se pedem a seguir:
Construa as funções:
$f(x) = x^2 - 3x + 4$
$g(x) = -x^2 - 4x$

Para cada uma delas, determine:
a) O ponto onde intercepta o eixo Y. $y = 4$
b) Se intercepta o eixo y em sua parte crescente ou decrescente. decrescente
c) Analise a concavidade. a positiva a concavidade é para cima,
d) Encontre o discriminante. -7
e) Encontre as raízes, caso existam. $\Delta < 0$, não há raízes
f) Encontre o vértice das parábolas. $x_v = 1,5$ $y_v = 7,4$
g) Determine o máximo e/ou mínimo. máximo

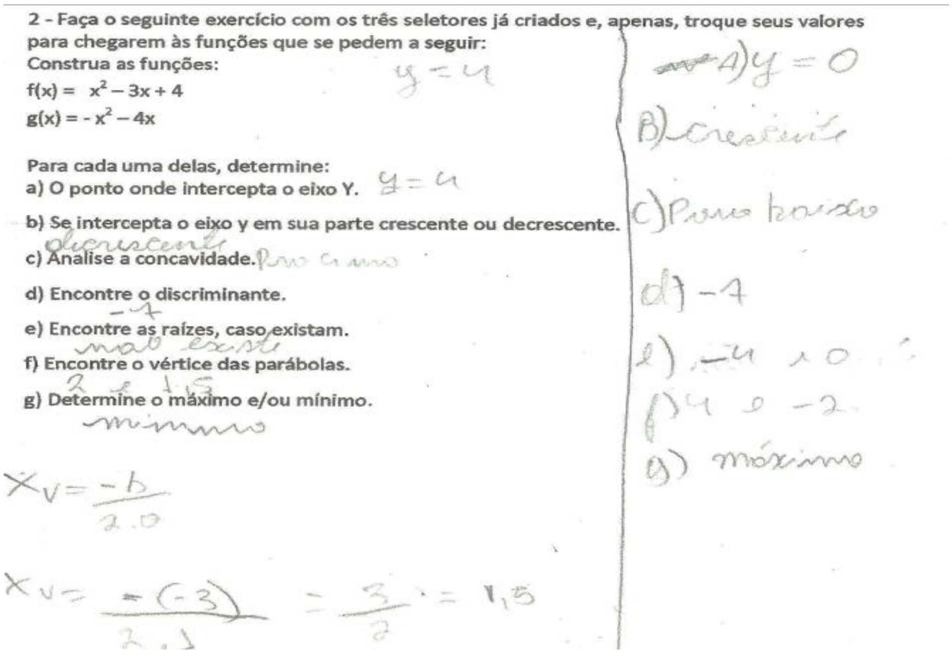
a) $y = 0$
b) decrescente
c) para baixo a: 6
d) 16
e) $x = -4$, $y = 0$
f) $x = -2$ $y = 4$
g) máximo

$x_v = \frac{-(-3)}{2 \cdot 1} \quad \frac{3}{2} = 1,5$

$y_v = \frac{-(-3)^2 - 4(1)(4)}{4 \cdot 1} = \frac{-7}{4}$

h) O máximo depende de quem? depende do valor do coeficiente a.

Protocolo 36 Atividade 6 Resposta da 2ª questão letras a até g Estudante A15.


2 - Faça o seguinte exercício com os três seletores já criados e, apenas, troque seus valores para chegarem às funções que se pedem a seguir:
Construa as funções:
$f(x) = x^2 - 3x + 4$ $y = 4$
$g(x) = -x^2 - 4x$

Para cada uma delas, determine:
a) O ponto onde intercepta o eixo Y. $y = 4$
b) Se intercepta o eixo y em sua parte crescente ou decrescente.
decrescente
c) Analise a concavidade. Pra cima
d) Encontre o discriminante.
-7
e) Encontre as raízes, caso existam.
não existe
f) Encontre o vértice das parábolas.
2 e 1,5
g) Determine o máximo e/ou mínimo.
mínimo

A) $y = 0$
B) crescente
C) Para baixo
d) -4
e) -4 e 0
f) 4 e -2
g) máximo

$x_v = \frac{-b}{2 \cdot a}$

$x_v = \frac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} = 1,5$

Neste ponto, observamos que a atividade atingiu o seu objetivo parcialmente da análise a *priori*, percebemos que os estudantes tiveram dificuldades, para encontrar através de cálculos apenas as coordenadas de Yv, entretanto, pela gama de informações da atividade identificamos que os estudantes compreenderam os demais pontos levantados nas questões, e assim, institucionalizaram o saber matemático referente à concavidade, o vértice, as raízes, o ponto de máximo e mínimo, a parte do gráfico que é crescente ou decrescente.

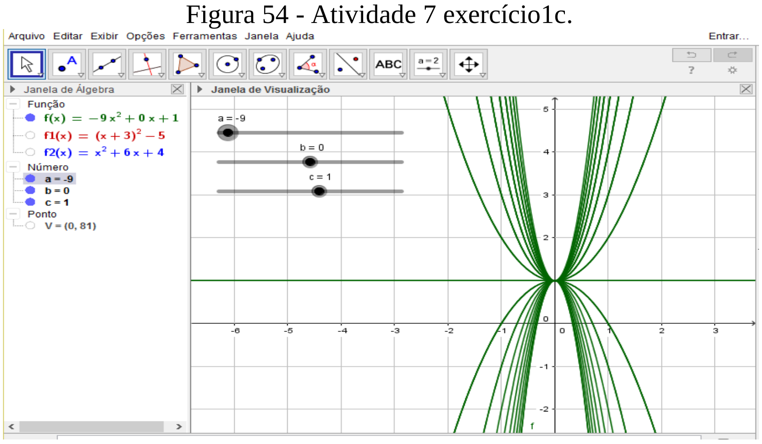
4.2.7 Atividade 7

Esta atividade foi executada no dia 04 de Dezembro, às 09h00, com duração de 50 minutos. Participaram cinco estudantes, esta atividade foi elaborada para suprir a necessidade de se ter conhecimento dos coeficientes, em especial o coeficiente **b**, e também representar a mesma função com estruturas algébricas diferentes.

O professor iniciou distribuindo o protocolo de respostas explicando as necessidades desta atividade leu, naquele ponto os estudantes se encontravam na fase da Ação da TSD, tomaram conhecimento da atividade e estabeleceram um contrato didático e foi solicitado que os estudantes digitassem no campo de entrada do software GeoGebra a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ e criassem os controles deslizantes dos coeficientes em intervalos de [-10, 10].

Em seguida o professor solicitou que os estudantes digitassem no campo de entrada do GeoGebra V = (-b/2*a , -(b^2 - 4*a*c)/4*a) e habilitassem o seu rastro e variassem os controles deslizantes um de cada vez, nesse momento os estudantes passaravam para a fase da Formulação da TSD levantaram hipótese, argumentaram e logo após iniciaram pelo coeficiente **a** gerando o gráfico abaixo:

Figura 54 - Atividade 7 exercício1c.



Fonte: Autor.

Percebemos que os estudantes compreenderam o objetivo da atividade através dos protocolos de respostas dos estudantes, que a concavidade depende do coeficiente **a** nesse momento os estudantes fizeram conjecturas a respeito da atividade e ao responder entraram na fase da Validação da TSD, buscando o sucesso de novos saberes ou não.

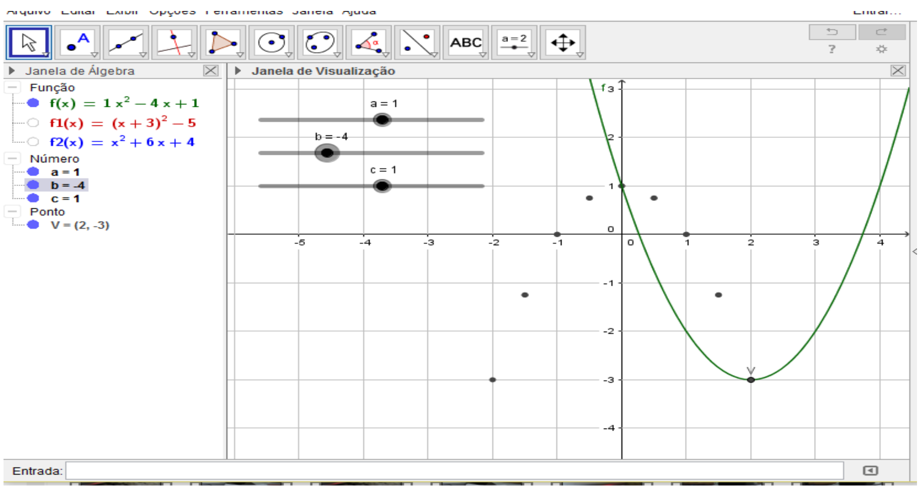
Protocolo 37 Atividade 7 Resposta da 1ª questão letra c Estudante A02.

Comente os comportamentos dos coeficientes;

(a) = Variando a letra "a" muda a concavidade para cima e para baixo

O professor em seguida solicitou que os estudantes variassem somente o coeficiente **b** e analisassem o seu comportamento e obtivemos resposta conforme a imagem do gráfico a seguir (transcrição do vídeo e protocolo de resposta):

Figura 55 - Quadro da Atividade 7 exercício 1c A20.



Fonte: Autor.

Professor: agora é... Marcelo clica com o dedo direito no mouse e anima ele;

A15: Já!

Professor: O que está acontecendo ai?

A15: Ele tá descendo e subindo e deixando... tá subindo de novo!

Professor: Vamos observar bem e ver o que está acontecendo! Está variando apenas qual coeficiente?

A20: Só o bê!

Professor: Isso! E o que ele está fazendo?

A20: Vai para o lado, se expande e volta!

Professor: E no rastro o que ele deixa?

A15: Ele deixa um rastro, só que é apontado pra cima!

Professor: O gráfico está voltado para cima! E o rastro dele?

A15: É voltado pra baixo!...

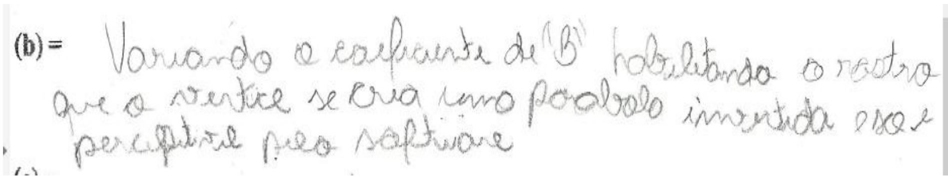
... Professor: O que foi que o coeficiente "b" criou quando habilitou o rastro?

A20: uma função voltada para baixo!

A15: uma função voltada pra baixo!

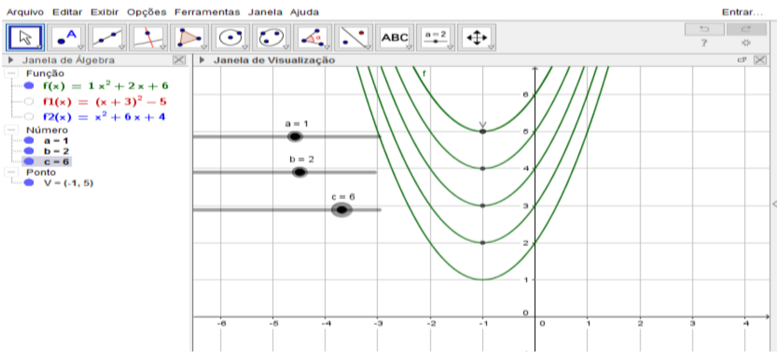
Percebemos que os estudantes compreenderam a influência do coeficiente **b** na função quadrática e, de acordo com os protocolos dos estudantes, foram unânimes nas suas respostas, conforme um dos protocolos abaixo, tendo este ainda escrito que este tipo de comportamento do coeficiente só poderia ser visualizado como o software educacional:

Protocolo 38 Atividade 7 Resposta da 1ª questão letra b Estudante A02.


(b) = Variando o coeficiente de "B" habilitando o rastro que o vertice se cria uma parabola invertida esse perceptível pelo software

Continuando a atividade 7 exercício 1c, o professor solicitou que os estudantes variassem somente o coeficiente **c** e observassem o comportamento do gráfico, e obtivemos como respostas a imagem do gráfico criado, a transcrição do vídeo e protocolos dos estudantes.

Figura 56 - Quadro da Atividade 7 exercício 1c A20.



Fonte: Autor.

*Professor: e o coeficiente **c**? o que ele faz? Varia o "c" ai!*

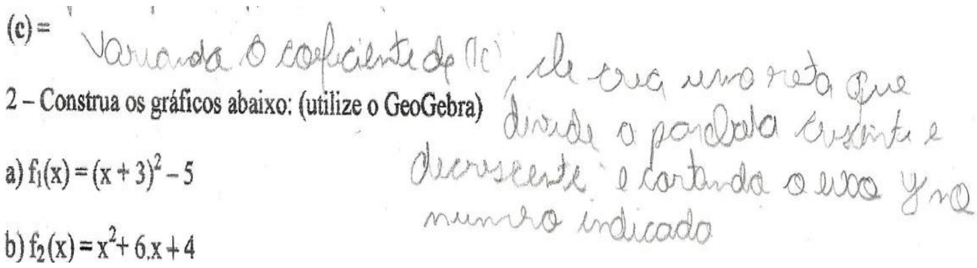
A15: ele desce e sobe!

Professor: e ele corta que eixo?

A15: O Y!

Podemos perceber que os estudantes conseguiram compreender a função do coeficiente **c,** pois, em seus protocolos foram unânimes em afirmar que o gráfico fazia uma translação vertical. Ressaltamos o protocolo abaixo, no qual o estudante faz um comentário surpreendente:

Protocolo 39 Atividade 7 Resposta da 1ª questão letra c Estudante A02.


(c) = Variando o coeficiente de "c" ele cria uma reta que divide a parabola crescente e decrescente e cortando o eixo y no numero indicado

2 – Construa os gráficos abaixo: (utilize o GeoGebra)

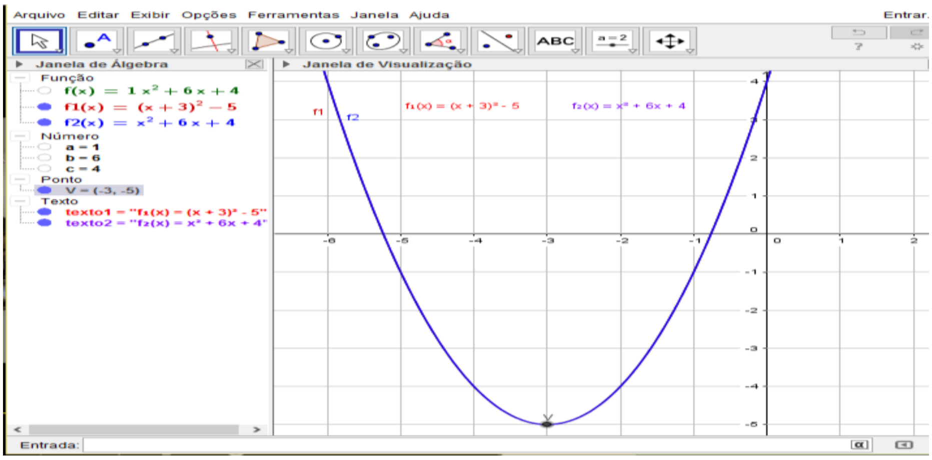
a) $f_1(x) = (x+3)^2 - 5$

b) $f_2(x) = x^2 + 6x + 4$

Este estudante referiu-se à reta criada pelo vértice na translação vertical para cima e para baixo no gráfico e constatou que o vértice era a "fronteira" da parte decrescente e crescente, e neste caso chamamos o vértice de ponto de mínimo.

Seguindo para o exercício de número dois, o professor solicitou dos estudantes que construíssem dois gráficos f_1 e f_2, produzindo a imagem abaixo, conforme o gráfico, e que observassem o comportamento dos gráficos no software educacional Geogebra, ao que obtivemos como resposta (transcrição do vídeo):

Figura 57 - Quadro da Atividade 7 exercício 2 A20.



Fonte: Autor.

Professor: Marcelo coloque aí no GeoGebra a função f_1 e depois a f_2:

A15: Ele ficou na mesma coisa, um em cima do outro, oh aqui!

Professor: Desabilita essa função f!

A15: a roxa ficou em cima da vermelha!

Professor: Então qual é a observação que vocês fazem? Você colocou f_1 na forma canônica e f_2 na forma desenvolvida!

A15: É que duas fórmulas podem dar o mesmo resultado!

Professor: Na letra a você enxerga melhor quem?

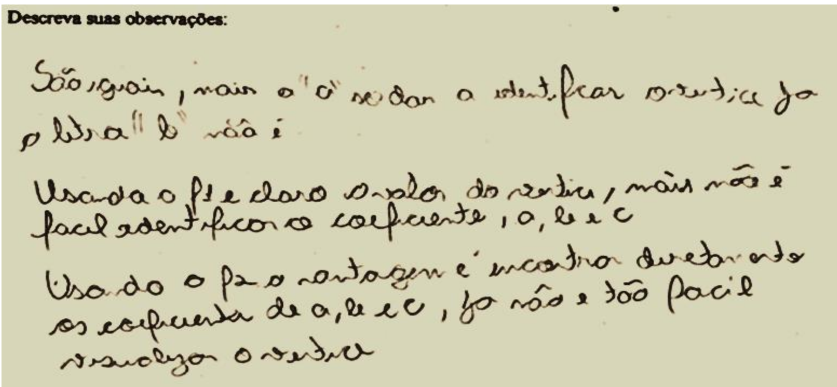
A15: o vértice né?

Professor: Na letra b você enxerga melhor o quê?

A15: o 1,6 e o 4 que é o ah o bê e o cê!

Neste momento o professor perguntou para os estudantes qual é a vantagem de você usar uma ou outra, ou seja, a forma canônica e a forma desenvolvida, e obtivemos as respostas conforme protocolos abaixo:

Protocolo 40 Atividade 7 Resposta da 2ª questão Estudante A02.



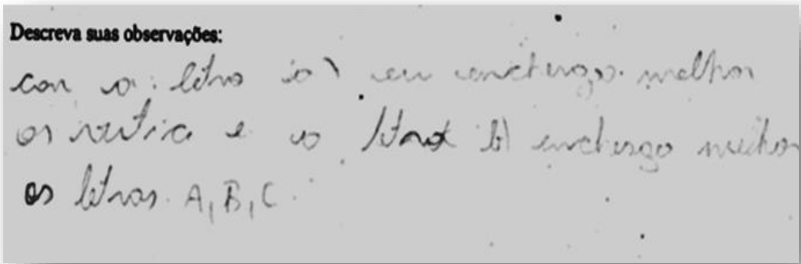
Descreva suas observações:

São iguais, mais o "a" se dá a identificar o vertice já o letra "b" não é

Usando o f1 e claro o valor do vertice, mais não é facil identificar o coeficiente, a, b e c

Usando o f2 a vantagem é encontrar diretamente os coeficientes de a, b e c, já não é tão facil visualizar o vertice

Protocolo 41 Atividade 7 Resposta da 2ª questão Estudante A15.



Descreva suas observações:

com a letra "a" eu enxergo melhor o vertice e a letra "b" enxergo melhor as letras A, B, C.

Percebemos que os estudantes reconheceram que se tratava do mesmo gráfico, porém, tinham funções diferentes: na função $f_1(x) = (x+3)^2 - 5$, eles conseguiram identificar as coordenadas do vértice com facilidade, enquanto que em $f_2(x) = x^2 + 6x + 4$, poderiam identificar os seus coeficientes.

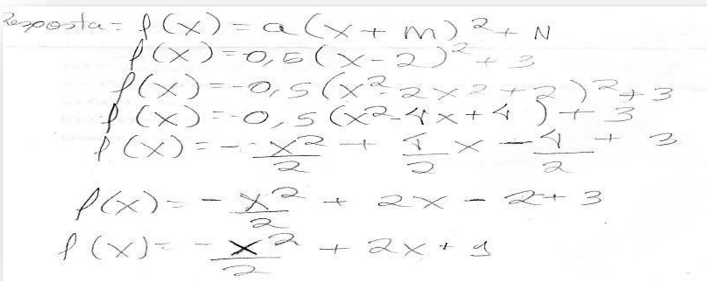
Também compreenderam que poderiam representar a mesma função com representações algébricas diferentes, institucionalizando desta maneira o saber matemático.

No exercício de número três da última atividade da sequência didática foi solicitado que partindo da variável microdidática $f(x) = x^2$ explicassem qual seriam as suas estratégias para adaptar esta função à imagem da Igreja da Pampulha e escreva a função nas formas $f(x) = a(x+m)^2 + n$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Os estudantes teceram comentários entre si e realizaram a atividade:

Estudante A20: *A estratégia é deslocar o M até chegar no -2, depois deslocar o N até o 3 e desloca o a até chegar no – 0,5. Após isso identifica a imagem e vê se está, na forma correta. É possível identificar que o M e N são as coordenadas do vértice da função.*

Protocolo 42 Atividade 7 Resposta da 2ª questão Estudante A03.


Resposta: $f(x) = a(x+m)^2 + N$

$f(x) = 0,5(x-2)^2 + 3$

$f(x) = -0,5(x^2 \cdot 2x^2 + 2)^2 + 3$

$f(x) = -0,5(x^2 - 4x + 4) + 3$

$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{2}x - \frac{4}{2} + 3$

$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 2 + 3$

$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 1$

Estudante 03: *Movimenta o m para a direita até chegar no centro do local onde a atividade me propôs, em seguida direcionar o n para cima até a altura em que a atividade me propus, por altura movimentarei o a até a forma em que a atividade me propus também pode observar que conforme eu alterava o valor de m e n o vertice mudava de localização então pudemos dizer que o m e o n são as cordenadas do vertice.*

Protocolo 43 Atividade 7 Resposta da 2ª questão Estudante A15.

$$f(x) = -0,5(x-2)^2 + 3$$
$$f(x) = -0,5(x^2 - 2.x.2 + 2^2) + 3$$
$$f(x) = -0,5(x^2 - 4x + 4) + 3$$
$$f(x) = -0,5 + 0,5.4x - 0,5.4 + 3$$
$$f(x) = -0,5x^2 + 2x - 2 + 3$$
$$f(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$$

Essas atividades e seus resultados estão de acordo com os estudos de Duval.

> A razão profunda dessas dificuldades não se deve procurar nos conceitos matemáticos ligados à função afim, mas na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica. De fato, o ensino e mesmo certos estudos didáticos, atém-se a passagem da equação para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, esquece-se que **é a passagem inversa que traz problema.** Para efetuar tal passagem, a abordagem ponto a ponto não é somente inadequada como constitui um obstáculo... (DUVAL, 2011. Pg. 97).

Percebemos que os estudantes conseguiram fazer a articulação, entre o registro de representação semiótica na linguagem gráfica para o registro de representação semiótica na linguagem algébrica, atingindo assim os objetivos da atividade para a superação dos obstáculos didáticos previstos na análise a *priori*.

4.2.8 Uma observação especial

De acordo com Duval (2011), em uma atividade matemática, envolvendo gráfico, a falta da transição do registro de representação semiótica na linguagem gráfica para a linguagem algébrica, é gerador de obstáculos.

Dentro da análise prévia, fizemos um estudo praxeológico nos moldes da Teoria Antropológico do Didático de Chevallard (1996) e percebemos que os livros didáticos, não abordam em suas atividades, a transição do registro gráfico para o algébrico, privilegiam o inverso, buscando suprir esta lacuna nos livros didáticos de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, sugerimos a utilização de uma nova regra, para fazer esta transição.

Com a preferência dos livros didáticos para a passagem da linguagem algébrica/gráfica, temos o seguinte relato de Duval (2011, pg. 97) “De fato, o ensino e mesmo certos estudos didáticos, atém-se a passagem da equação para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, esquece-se que **é a passagem inversa que traz problema.**”.

Para sugeri contribuições, almejando superar este obstáculo durante a pesquisa analisamos o comportamento da função quadrática no GeoGebra, buscando padrões em busca da passagem da representação semiótica da linguagem gráfica para a linguagem algébrica, assim, observamos um comportamento interessante no gráfico da função quadrática.

Observando o ponto notável com as coordenadas $(0, c)$ onde o gráfico intercepta o eixo Y e o seu ponto simétrico $[2x_v, c]$, estes possuem em módulo, uma distância na razão dos coeficientes da função quadrática $|distância| = \frac{b}{a}$, onde esta distância é a soma de suas raízes.

Figura 58 – Relação da distância com os coeficientes **a** e **b**.

Fonte: Autor.

$$|d| = \frac{b}{a}$$

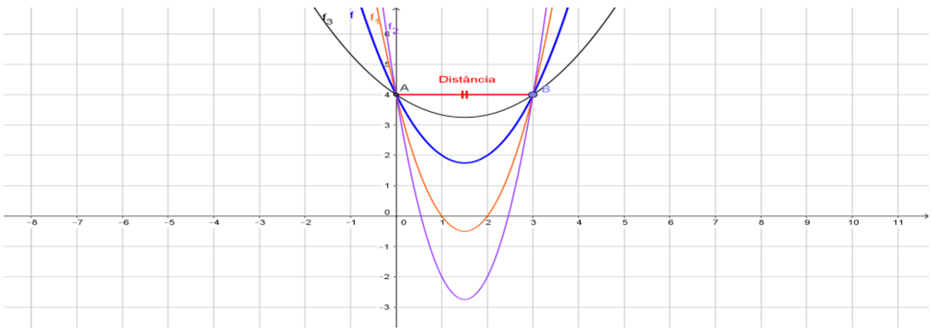
$$|d| = 3 = \frac{3}{1}$$

$$Se,\ f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$então f(x) = 1x^2 - 3x + 4$$

Com a observação desta distância, definida pela malha do GeoGebra ou do papel milimetrado é possível determinarmos a equação que rege esta função ou as equações da família das funções quadráticas que passam por estes dois pontos em comum e que possuem a mesma coordenada para X_v sendo diferentes suas coordenadas para Y_v em consequência disto não possuem as mesmas raízes.

Figura 59 – Famílias de Funções Quadráticas com dois pontos em comum



Fonte: Autor.

Conhecida esta distância é possível determinar toda a família de equações que passam por estes dois pontos em comum $A=[0,c]$ e $B=[2x_v,c]$.

$$|d| = \frac{b}{a} \qquad f(x)=ax^2+bx+c$$

$$|d| = 3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \ldots$$

Para cada fração gerada podemos determinar uma função quadrática:

$f(x)=1x^2-3x+4$	$f_1(x)=2x^2-6x+4$	$f_2(x)=3x^2-9x+4$
$f(2)=1.(2)^2-3.(2)+4$	$f_1(2)=2.(2)^2-6.(2)+4$	$f_2(2)=3.(2)^2-9.2+4$
$f(2)=4-6+4$	$f_1(2)=8-12+4$	$f_2(2)=12-18+4$
$f(2)=2$	$f_1(2)=0$	$f_2(2)=-2$
$[2,2]$ *ParábolaAzul*	$[2,0]$ *ParábolaVermelha*	$[2,-2]$ *ParábolaRoxa*

Para função acima na figura em cor preta nós dividimos por 3 numerador e denominador $|d| = 3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \div 3}{1 \div 3} = \frac{1}{1/3} = \frac{b}{a}$ assim, a função quadrática obedece o seguinte cálculo:

$$f_3(x) = 1/3x^2 - 1x + 4$$
$$f_3(2) = 1/3.(2)^2 - 1.2 + 4$$
$$f_3(2) = 4/3 - 2 + 4$$
$$f_3(2) = 3,3$$
$$[2, 3.3] ParábolaPreta$$

Escolhemos o valor de $x = 2$, por exemplo, para determinar as coordenadas em $y(x)$, para saber qual o gráfico que representa cada função quadrática.

Este novo método é imediato para determinar a função quando $a = 1$, para $a \neq 1$são necessários os cálculos acima para determinar as funções quadráticas na linguagem algébrica.

Como no 9º ano do Ensino Fundamental II, a maioria das atividades são elaboradas com o coeficiente para $a = 1$, pode ser viável utilização deste método, ainda que tenha esta restrição.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao nortear o nosso trabalho na introdução, declaramos que os resultados das avaliações como Prova Brasil e Sadeam, mostram que, a aprendizagem de Matemática vem causando certo desconforto aos educadores nesta área de ensino.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do 3º e 4º ciclo evidencia que o papel da Matemática no ensino fundamental é fornecer aos estudantes mecanismos eficientes de compreensão, de interesse e de curiosidade para o desenvolvimento da capacidade de construir conhecimentos matemáticos.

Pela nossa experiência profissional percebemos que os estudantes ao iniciarem seus estudos no Ensino Médio, apresentavam obstáculos em reconhecer uma função quadrática e seus coeficientes, apreensivo por tais circunstâncias, decidimos investigar o processo evolutivo deste conteúdo específico, em uma Escola Estadual do Município de Manaus.

Nosso trabalho almejou contribuir com outros trabalhos sobre Função Quadrática, ao realizarmos as análises prévias da pesquisa, revelaram indícios de obstáculos didáticos segundo Brousseau (2008).

Ainda nos referindo as análises prévias, foram identificadas, alguns efeitos dos Contratos Didáticos e obstáculos didáticos nos livros didáticos utilizados pelas Instituições de Ensino ao que priorizarem na construção do gráfico o procedimento por pontos, partem da linguagem algébrica, atribuem valores para “x” e determinam “y”.

A nossa pesquisa objetivou identificar e analisar os obstáculos didáticos na construção do conhecimento de função quadrática, visando à superação dos obstáculos com uma sequência didática atrelada ao GeoGebra.

Acreditamos o que nos fornecer respaldo e segurança, em nosso trabalho, foi nos aliarmos com a Teoria das Situações Didáticas para gerenciar a execução da sequência didática, analisando processo em jogo das atividades, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica para a análise do processo cognitivo do conceito de função quadrática e a parte metodológica com a Engenharia Didática de Michèle Artigue.

Para isto, utilizamos uma sequência didática validada por Maia (2007), com adaptações na qual permitiu visualizar os registros de representação semiótica na linguagem algébrica e gráfica simultaneamente expondo as variáveis visuais.

A sequência didática sobre função quadrática aplicada foi composta por sete atividades, com intenção de superação dos obstáculos didáticos, e fundamentou-se na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e na Teoria dos registros de Representação Semiótica de Duval bem como na parte metodológica nos princípios da Engenharia Didática de Artigue.

No último capítulo referente à experimentação e análise a *posteriori*, analisamos os protocolos de cinco estudantes, que voluntariamente participaram das sete sessões, as transcrições dos vídeos produzidos, as investigações referentes à análise a *priori*, este material permitiu a comparação entre a análise *a posteriori* e a análise a *priori*, para realizarmos algumas deduções.

Para realização desta pesquisa destacamos alguns pontos negativos que nos serviram de alerta. Ao realizarmos a nossa aplicação da sequência no último dia de Novembro se estendendo pela primeira semana de Dezembro, alguns estudantes possuem outras prioridades em detrimento de adquiri novos conhecimentos, como viagens marcadas para o final do ano ou recuperação em algumas disciplinas, em função disto, houve desistência de três estudantes.

Entretanto, como pontos positivos, os outros estudantes se sentiram entusiasmados com o software GeoGebra, o que motivou curiosidade e despertou interesse em manusear os software educacional, constatamos tal fato, pela descontração e sorrisos produzidos nas atividades.

Ao iniciarem a primeira atividade os estudantes sempre sorriam após digitarem as funções no campo de entrada, porque o respectivo gráfico aparecia na janela de visualização gráfica, tal dinamicidade ao variar os controles deslizantes garantiu aos estudantes uma compreensão diferenciada das variáveis visuais, assim, houve a articulação entre o registro de representação semiótica da linguagem algébrica para a gráfica.

Nesta atividade os estudantes descontraídos queriam variar os controles deslizantes para observarem, quando o professor lhes perguntava a respeito do parâmetro "a" , gesticulavam com a mão, representando a parábola voltada para "cima" ou para "baixo", quando não, mostravam as mãos abrindo e fechando, permitindo assim que tivessem uma visão global do parâmetro.

Destacamos a resposta do estudante para questão da letra "c", quando o professor perguntou se os gráficos tinham algum ponto em comum o estudante A20 respondeu que sim, no ponto zero significa coordenadas (0,0), porque? Porque o "b" e "c" são zero. Podemos inferir neste caso que! Se os estudantes na análise prévia possuíam obstáculos didáticos para identificação dos coeficientes, os mesmos já não existiam.

Seguindo para a segunda atividade, o professor perguntou o que aconteceria se somasse ou subtraísse uma constante na função $f_1(x) = x^2$, os estudantes foram unânimes em responder que o gráfico se deslocava para cima quando soma uma casa ou o gráfico descia quando subtraía uma casa, neste ponto o software GeoGebra foi fundamental na decisão, isto porque, quando realizado no lápis e papel só poderá verificar, após vários gráficos, inferimos que os estudantes conseguiram identificar a translação vertical do gráfico.

Ainda na atividade dois, quando foi inserida a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx$, os estudantes tiveram dificuldades porque há duas translações, uma vertical e a outra horizontal, eles só conseguiram visualizar a translação para direita ou esquerda, podemos deduzir que o obstáculo para observar o comportamento do coeficiente "b" permaneceu, porém houve avanço na atividade que observou a translação somente vertical do parâmetro "n".

Na atividade três ao ser introduzido na caixa de entrada a função quadrática correspondente $f(x) = (x+m)^2$, percebemos que os estudantes se apropriaram do conhecimento, quando responderam em seus protocolos, de forma similar ao estudante A02 *"Quando somado a parábola anda uma casa no eixo "x" a esquerda, quando subtraída ao "x" o numero ele tende a parábola para a direita do eixo x"*, mais uma vez o software GeoGebra foi fundamental, pois, permite ao animar o controle deslizante para o parâmetro "m" observarem instantaneamente a variação da representação semiótica da linguagem algébrica para a linguagem gráfica e consequentemente a translação horizontal.

As três primeiras atividades faziam referência à forma canônica $f(x) = a(x+m)^2 + n$, e dentro deste parâmetro, os estudantes compreenderam qual o papel de cada um deles, conforme foi previsto na análise *a priori*, salientamos que o GeoGebra foi crucial para a apropriação do conhecimento, pois tais atividades, demandariam várias aulas se fosse necessário construir gráficos na tecnologia lápis/papel.

A quarta atividade confirmou a institucionalização do conhecimento sobre as variáveis visuais do parâmetro "a", concavidade assim como a expansão ou contração da parábola, o parâmetro "m" a translação horizontal e o parâmetro "n" a translação vertical. Quanto à restrição do parâmetro "a" para $a \neq 0$, enfatizamos que só foi possível nesta atividade para evitar o efeito do contrato didático "Topaze", para evitar isto, o professor argumentou: *"anima o parâmetro "a", o que está ocorrendo? Ela tá se fechando. Professor: vai variando, chegou no zero? O estudante A15: virou uma linha. Professor: continua sendo uma parábola? Estudante A20: não é uma reta. Estudante A15: ele se transforma numa reta.* Observamos que os estudantes compreenderam a restrição do parâmetro "a".

Na atividade cinco os estudantes colocaram em prática os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores, pois, os estudantes conseguiram compreender qual o papel dos parâmetros "m" e "n", observamos que a sequência didática solicitava que não utilizassem o GeoGebra e perguntava quais as coordenadas do vértice da parábola em cada caso, e percebemos que os estudantes conseguiram a representação mental do gráfico em cada caso, conseguiram identificar e escrever as coordenadas de X_v e Y_v sem observar no gráfico, olhando somente a representação semiótica na linguagem algébrica.

Outro ponto relevante da atividade mostra que os estudantes conseguiram compreender que funções aparentemente diferentes podem representar o mesmo gráfico, isso porque na atividade, solicitava as suas previsões para os registros de representações semióticas na linguagem algébrica, e de forma surpreendente os estudantes perceberam que se tratava do mesmo gráfico com equações diferentes, entretanto, dentre os estudantes, o A15 justificou sua representação mental da seguinte maneira, a parábola esta voltada para cima porque o valor do coeficiente (a) é positivo, há um deslocamento para a esquerda do eixo da ordenada porque o coeficiente (b) é positivo e corta o eixo da ordenada no coeficiente $(c = 4)$, apesar dele não ter se referido em nenhum momento ao eixo X, observamos que o mesmo localizou o gráfico em relação ao eixo Y, utilizando as variáveis visuais em conformidade com Duval (2011).

Na atividade seis os estudantes permaneceram descontraídos e conforme as atividades se desenvolviam mais seguros nas observações, os estudantes perceberam nas atividades anteriores que conforme eles variavam os coeficientes da linguagem algébrica os gráficos também simultaneamente sofriam variações, e perceberam que em função dos comandos das atividades, quando o delta ficou positivo interceptou o eixo do X em duas oportunidades, porém, quando o delta assumiu valor zero, o gráfico interceptou o eixo do X apenas uma vez, e quando o delta ficou negativo não interceptava o eixo X. Nesta atividade tiveram dificuldades em determinar os valores de $Y_v(x_v)$, o que em nosso entendimento, não prejudicou a apropriação dos demais conhecimentos envolvidos.

Encerrando a experimentação na atividade sete que foi elaborada para suprir a necessidade de institucionalizar os conhecimentos com relação tão somente o coeficiente “b” o software GeoGebra foi decisivo, porque não é trivial como o coeficiente “a” ou “c”, os estudantes superaram este obstáculo parcialmente, porque eles observaram que ao habilitar o rastro do controle deslizante, foi observado que o coeficiente “b” através do vértice, constrói outra parábola invertida.

Ainda nesta atividade, os estudantes ficaram motivados em comparar as duas formas da função quadrática e perceberam que a forma canônica $f(x) = a(x+m)^2 + n$, revela de imediato as coordenadas dos vértices, em quanto que a forma desenvolvida $f(x) = ax^2 + bx + c$, revela somente os seus coeficientes.

Para finalizar a atividade sete no exercício de número 3 solicitamos que os estudantes elaborassem uma estratégia para adaptar a função quadrática em uma imagem da igreja da Pampulha, e posteriormente passar da linguagem gráfica para a linguagem algébrica e envolve tanto o tratamento como a conversão, pré-requisito para consolidação da apropriação do conhecimento de função quadrática, nesta atividade somente dois estudante conseguiram realizar esta atividade totalmente com sucesso.

Em síntese, com a execução das sete atividades, com arguições e levantamento de questões, percebemos que a sequência didática em conjunto com o software GeoGebra proporcionou um desenvolvimento progressivo na construção da compreensão do conceito de função quadrática, sem este recurso seria uma tarefa árdua, pois, o software possibilitou a verificação instantânea da passagem do registro algébrico para o registro gráfico, disponibilizando a observação e animação das variáveis visuais, possibilitando superação dos obstáculos didáticos identificados nesta pesquisa e superando parcialmente o obstáculo do coeficiente “b”.

Ao seguir algumas questões norteadoras:

a) Nossa sequência didática em conjunto com o GeoGebra contribuirá para conversão da linguagem algébrica para linguagem gráfica das funções quadráticas? Pelas explanações expostas na análise a *posteriori* da pesquisa, acreditamos que a sequência didática contribuiu para o desenvolvimento progressivo na construção da compreensão do conceito de função quadrática.

b) Após a execução da sequência didática os estudantes compreenderão o papel dos coeficientes e relacionarão com as representações algébricas e gráficas? Dentro da Validação no confronto entre a análise *a priori* e *a posteriori* acreditamos que a maioria dos estudantes compreenderam e conseguiram relacionar com as respectivas representações.

Desta forma, acreditamos ter confirmado nossa a hipótese de que somente a utilização da abordagem e atividades do livro didático, causam obstáculos didáticos e a aplicação de uma sequência didática, sobre função quadrática, voltada para os seus coeficientes e parâmetros com translações de modo dinâmico, contribui para a superação do obstáculo didático e consequentemente ter respondido a nossa questão de pesquisa: de que forma o uso da sequência didática sobre função quadrática com o GeoGebra contribui para superar obstáculos didáticos? Abordando as variáveis visuais e unidades simbólicas na sequência didática sobre função quadrática.

Sugerimos para futuros trabalhos a continuação de um método para passar da linguagem gráfica para a linguagem algébrica no Geogebra, menos restrito, já que o método aqui observado, mas, não desenvolvido na sequência didática com os estudantes, vale para $a = 1$, $b \in □$ e $c \in □$, este método surgiu da interação com o GeoGebra, não foi previsto na análise prévia, e por não ter sido prioridade em nossa pesquisa.

Outra sugestão para futuros trabalhos seria aplicar esta sequência didática a estudantes que ainda não estudaram função quadrática como “7º ou 8º Ano” e verificar qual seria o resultado.

Nesta maratona, em que o objetivo maior é aprimorar os conhecimentos, para contribuir com a sociedade, e já observando a linha de chegada, descrevo que a realização deste trabalho demandou inicialmente alegrias, depois medos, angustias, pensamentos sobre fracassos, e por fim pensamentos inspirados por Deus de sucesso no final. A estas reações e a partir das interações com os participantes, percebi que havia dificuldades da minha parte e deles, com isso brotou uma sensibilidade especial com os estudantes que possuem as mais diversas dificuldades nas disciplinas Matemática e Física.

REFERÊNCIAS

ABAR, Celina AAP. Aportes teóricos de pesquisas que utilizaram o geogebra. In: **Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**. Uruguay, 2012. P. 1-13.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Ed. UFPR, 2007.

ARDENGHI, Marcos José et al. Ensino aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996.

BOYER, Carl B, Uta C. Merzbach**. História da Matemática**. [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais–PCN**, Parâmetros. Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1998.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.35-113.

____. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. Tradução: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

BUENO, Rafael Winícius da Silva**. As múltiplas representações e a construção do conceito de função**. 2009. Dissertação de Mestrado Rio Grande do Sul: PUC, 2009.

CHEVALLARD, Yves. Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUM, Jean (Org.). **Didática das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, p.115-153, 1996.

DUVAL, R.; FREITAS, JLM; REZENDE, V. **Entrevista:** Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica**.** Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 2, p. 10-34, 2013.

DUVAL, Raymond. **Gráficos e equações**: a articulação de dois registros. Revemat, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad Méricles Thadeu. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

____. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**.** In:MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em matemática**. Papirus Editora, 2013.

____. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (Trad.). Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, v. 2, 2009.

INEP (Instituto nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais). **Resultados e Metas**. Disponível em www.inep.gov.br (acesso em 16/09/2014, 12h12).

MAIA, Diana. **Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional**. 2007. 141 f Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo: PUC, 2007.

MPAKA, Nlandu. **O ensino e aprendizagem do gráfico da função quadrática com e sem auxílio do Software Winplot**. Dissertação de Mestrado, Lisboa – Pt. 2010.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**.** 137f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 1997.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3ª Edição . Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

PELHO, Edlweiss Benez Brandão. **Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis**. 2003. Tese de Doutorado. Dissertação de mestrado, Puc/SP.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Zahar, 2012.

ROSSINI, Renata; **Docentes sobre o tema função, Saberes.** 2006 Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUC 2006.

SALIN, Eliana Bevilacqua. **Matemática dinâmica: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas**. 2014 Dissertação de Mestrado – Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática. Rio Grande do Sul: UFRGS, 2014.

SANTOS, S. A. **Ambiente informatizado: para o aprofundamento da função quadrática por alunos da 2ª série do Ensino Médio.** 2009. 161 f Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2009

SILVA, Alessandra Azzolini da. **A noção de função quadrática na transição entre os ensinos fundamental, médio e superior**. 2012. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo, 2012.

ZABALA, Antoni; **A Prática Educativa: Como ensinar.** Trad. Ernani F da Rosa. Porto Alegre: Editora. Artimed, 1998.

ZUFFI, Edna Maura; PACCA, J. L. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, n. 9, p. 10-16, 2001.

ANEXOS

ANEXO 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA NÍVEL MESTRADO

TESTE DIAGNÓSTICO

NOME________________________________ Serie___________ Data___/___/___

01) O que é uma função quadrática?

____

____

____

02) Como você representa uma função quadrática?

____

____

03) Marque um X somente nas funções quadráticas e escreva ao lado sua variável.

a) $f(x) = x^2$ variável (   )

b) $f(x) = 2 – 3x + 4x^2$ variável (   )

c) $y = 3^2x + 4$ variável (   )

d) $y = 2^x$ variável (   )

e) $y = - 3w^2 +4w – 1$ variável (   )

f) $y = t + 5^2$ variável (   )

g) $f(t) = - t^2 + 2t – 4^2$ variável (   )

h) $y = b^2 – 4.a.c$ variável (   )

j) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ variável (   )

04) O que é raiz de uma função quadrática?

05) Quantas raízes possui uma função quadrática?

06) O que é a simetria da função quadrática?

07) Responda conforme cada caso, quantas raízes possuem as funções quadráticas:

a) $\Delta = 5$ quantas raízes?

b) $\Delta = -3$ quantas raízes?

c) $\Delta = 1$ quantas raízes?

d) $\Delta = 0$ quantas raízes?

e) $\Delta = -2$ quantas raízes?

08) Seja $f(x) = 3.x^2 + 2.x + 1$ uma função quadrática. Responda:

a) com relação ao coeficiente de número 3 sendo positivo indica qual situação na construção do gráfico desta função?

b) e se ele fosse negativo o que indicaria na construção do gráfico?

c) e o coeficiente de número um positivo representa qual situação na construção do gráfico?

d) e se ele fosse negativo qual a situação agora?

09) Dada uma função quadrática $y= x^2 – 9.x + 20$, calcule os zeros da função.

10) Dada uma função quadrática $y = -x^2 + 4.x$, calcule o vértice da parábola.

11) Construa os gráficos das funções quadráticas da questões 09 e 10, no papel milimetrado formato A4:

a) questão 09 para valores de x = { 2, 3, 4, 5, 6, 7};

b) questão 10 para valores de x = { -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, };

c) quanto ao formato do gráfico o que representam?

12) Dada a função quadrática $f(x) = 2.x^2 -3.x + 5$, calcule f(-3), f(0) e f(4).

ANEXO 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPG-ECIM
ATIVIDADE 1

NOME_____________________________________ Data _____/_____/_____
NOME_____________________________________

1 - Num mesmo par de eixos cartesianos desenhe, utilizando o GeoGebra, os gráficos de:

a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = 2x^2$

c) $f_3(x) = 3x^2$

d) $f_4(x) = 10.x^2$

e) $f_5(x) = 1/2.\ x^2$

f) $f_6(x) = 1/4.\ x^2$

g) $f_7\ (x) = -\ x^2$

h) $f_8\ (x) = -\ 2\ x^2$

i) $f_9\ (x) = -\ 3x^2$

j) $f_{10}\ (x) = -\ 10x^2$

k) $f_{11}(x) = -\ 1/2.x^2$

l) $f_{12}\ (x) = -\ 1/4.x^2$

2 – Analisando os gráficos:

a) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número maior que zero.

b) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número menor que zero.

c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê?

d) O que garante em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de x^2 ser um número positivo? E de ser um número negativo?

e) Comparando os gráficos do item **a** e **f** o que se pode concluir?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPG-ECIM
ATIVIDADE 2

NOME____ Data _____/_____/_____
NOME____

1 – Num mesmo par de eixos cartesiano desenhe, utilizando o GeoGebra, os gráficos de:

a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = x^2 + 1$

c) $f_3(x) = x^2 + 2$

d) $f_4(x) = x^2 + 3$

e) $f_5(x) = x^2 - 1$

f) $f_6(x) = x^2 - 2$

g) $f_7(x) = x^2 - 3$

2 – O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante, para obter uma nova função?

3 – Num mesmo par de eixos cartesiano desenhe, utilizando o GeoGebra, os gráficos de:

a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = x^2 + x$

c) $f_3(x) = x^2 + 2x$

d) $f_4(x) = x^2 + 3x$

e) $f_5(x) = x^2 - x$

f) $f_6(x) = x^2 - 2x$

g) $f_7(x) = x^2 - 3x$

4 – O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante a variável (x), para obter uma nova função?

5 – Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos?

a) c) e) g)

b) d) f)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPG-ECIM
ATIVIDADE 3

NOME______________________________________ Data _____/_____/_____
NOME______________________________________

1 – Num mesmo par de eixos cartesiano desenhe, utilizando o GeoGebra, os gráficos de:

a) $f_1 (x) = x^2$

b) $f_2 (x) = (x + 1)^2$

c) $f_3 (x) = (x + 2)^2$

d) $f_4 (x) = (x – 1)^2$

e) $f_5 (x) = (x – 2)^2$

f) $f_6 (x) = (x + ½)^2$

g) $f_7(x) = (x – ½)^2$

2 – Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1 (x) = x^2$, o que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraímos uma constante positiva da variável independente x?

3 – Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos?

a) $Vf_1 =$

b) $Vf_2 =$

c) $Vf_3 =$

d) $Vf_3 =$

e) $Vf_4 =$

f) $Vf_5 =$

g) $Vf_6 =$

h) $Vf_7 =$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPG-ECIM
ATIVIDADE 4

NOME_____________________________________ Data _____/_____/_____
NOME_____________________________________

1 – Num mesmo par de eixos cartesiano desenhe, utilizando o GeoGebra, o gráfico da função quadrática $f(x) = a.x^2 + b.x + c$:

a) Crie os controles deslizantes (**a, b** e **c**) em um intervalo de [-10, 10];

b) Varie o controle deslizante de **a** de acordo com o intervalo e mantenha os controles **b** e **c** constantes;

c) O que você observou? Explique.

d) Varie o controle deslizante de **b** de acordo com o intervalo e mantenha os controles **a** e **c** constantes;

e) O que você observou? Explique.

f) Varie o controle deslizante de **c** de acordo com o intervalo e mantenha os controles **a** e **b** constantes;

g) O que você observou? Explique.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPG-ECIM
ATIVIDADE 5

NOME______________________________________ Data _____/_____/_____
NOME______________________________________

1 – Sem utilizar o GeoGebra descreva a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, como ficará o gráfico das funções abaixo? E responda quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada caso?

a) $f_2(x) = 2(x + 3)^2 – 4$

b) $f_3(x) = -3(x – 5/4)^2 + 1/3$

2 – Desenhe o gráfico de $f(x) = (x + 3)^2 – 5$ (utilize o GeoGebra).

3 – Você consegue prever o gráfico de $g(x) = x^2 + 6.x + 4$? Explique.

4 – Escreva uma função do segundo grau genérica em função dos parâmetros **a, m** e **n** de modo que seja fácil a visualização de seu gráfico.

5 – O que cada um dos parâmetros (**a, m** e **n)** faz com o gráfico da função inicial?

6 – Relacione os parâmetros da função que vocês encontraram o item 4 com os parâmetros da função $f(x) = a.x^2 +b.x +c$. Quais conclusões vocês chegaram?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPG-ECIM
ATIVIDADE 6

NOME______________________________________ Data _____/_____/_____
NOME______________________________________

1 – Crie uma função f(x) = a.x^2 +b.x +c com seus respectivos controles deslizantes, depois no campo de entrada digite delta = b^2-4*a*c e enter, em seguida digite o comando RAIZ[f].

a) Altere os valores de a, b ou c de forma que o gráfico intercepte o EixoX. Qual o sinal do Δ?

b) Fazendo a = 4, b = -4 e c = 2, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do Δ?

c) Fazendo a = 1, b = -4 e c = 3, o que acontece com o gráfico? Qual o sinal do Δ?

d) Se , Δ > 0 o gráfico ___________________________ o eixo x. (intercepta ou não intercepta)

e) Se , Δ < 0 o gráfico ___________________________ o eixo x. (intercepta ou não intercepta)

f) Se , Δ = 0 o gráfico ___________________________ o eixo x.

2 - Faça o seguinte exercício com os três seletores já criados e, apenas, troque seus valores para chegarem às funções que se pedem a seguir:
Construa as funções:
$f(x) = x^2 – 3x + 4$
$g(x) = - x^2 – 4x$

Para cada uma delas, determine:
a) O ponto onde intercepta o eixo Y.

b) Se intercepta o eixo y em sua parte crescente ou decrescente.

c) Analise a concavidade.

d) Encontre o discriminante.

e) Encontre as raízes, caso existam.

f) Encontre o vértice das parábolas.

g) Determine o máximo e/ou mínimo.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS – UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPG-ECIM
ATIVIDADE 7

NOME______________________________________ Data _____/_____/_____
NOME______________________________________

1 – Num mesmo par de eixos cartesiano desenhe, utilizando o GeoGebra, o gráfico da função quadrática $f(x) = a.x^2 + b.x + c$:

a) Crie os controles deslizantes (**a, b** e **c**) em um intervalo de [-10, 10];

b) No campo de entrada digite V = (-b/2*a , -(b^2 - 4*a*c)/4*a); (Habilite o rastro)

c) Varie um controle deslizante de cada vez (**a, b** e **c**) de acordo com os intervalos e analise os seus comportamentos;

Comente os comportamentos dos coeficientes;

(**a**) =

(**b**) =

(**c**) =

2 – Construa os gráficos abaixo: (utilize o GeoGebra)

a) $f_1(x) = (x + 3)^2 – 5$

b) $f_2 (x) = x^2+ 6.x + 4$

Descreva suas observações:

3 – De Acordo com as imagens proposta no GeoGebra execute:

a) Partindo da função quadrática $f(x) = x^2$, explique qual sua estratégia para adaptar esta função à imagem da Igreja da Pampulha e escreva a função nas formas $f(x) = a(x+m)^2 + n$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$.