

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

*UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO  
CONCEITO DE PARÁBOLA: a engenharia didática como apoio  
metodológico*

Luiz Henrique de Vasconcelos Cavalcante

MANAUS

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Luiz Henrique de Vasconcelos Cavalcante

*UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE  
PARÁBOLA: a engenharia didática como apoio metodológico*

Dissertação apresentada ao Programa de  
Mestrado Profissional da Universidade  
Federal do Amazonas, como requisito parcial  
para a obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio da Fonseca de Lira

MANAUS

2017

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

C376u	<p>Cavalcante, Luiz Henrique de Vasconcelos Uma Sequência Didática para o ensino de Parábola : a Engenharia Didática como apoio metodológico / Luiz Henrique de Vasconcelos Cavalcante. 2017 45 f.: il. color; 31 cm.</p> <p>Orientador: Antonio da Fonseca de Lira Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.</p> <p>1. ensino/aprendizagem de parábola. 2. engenharia didática. 3. sequência didática. 4. geogebra. 5. informática na educação. I. Lira, Antonio da Fonseca de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título</p>
-------	---

LUIZ HENRIQUE DE VASCONCELOS CAVALCANTE

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE  
PARÁBOLA: a engenharia didática como apoio metodológico

Dissertação apresentada ao Programa de  
Mestrado Profissional em Matemática da  
Universidade Federal do Amazonas, como  
requisito parcial para a obtenção do título de  
Mestre em Matemática

Aprovado em 27 de março de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio da Fonseca de Lira

Presidente

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

Membro

Prof. Dr. Antonio Ferreira Santana Filho

Membro externo

## DEDICATÓRIA

À minha esposa, Francisca, e aos meus filhos,  
Felipe e Lucas, pelo apoio e motivação para a  
conclusão deste curso.

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço ao Deus da minha vida, pelo Seu grandioso amor e por sempre estar comigo, até mesmo nos momentos em que minha fé foi pouca.

À minha Mãe Lina, pois sem o seu apoio, desde o início da minha graduação, com certeza, eu não chegaria aqui.

À minha esposa Francisca, pelo apoio nas horas mais difíceis e pelas palavras certas nos momentos mais desconfortantes, sem o seu apoio eu não teria terminado este curso.

Aos meus filhos, Felipe e Lucas, por me mostrarem a felicidade de ser um Pai e por me darem um propósito para buscar sempre mais.

Aos professores do PROFMAT polo UFAM, pela dedicação e esforço em nos conduzir ao caminho do conhecimento.

Ao meu orientador, Professor Antonio Lira, pelos ensinamentos e pela atenção dispensada para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas de turma, pelo companheirismo e pelas horas de estudo.

Senhor, eu não sou digno que entreis em  
minha morada, mas dizei uma só palavra e eu  
serei salvo.

(Mateus 8:8)

## RESUMO

O presente trabalho apresenta uma experiência de utilização de teorias sobre didática no ensino de matemática. Abordou-se o conceito de parábola, ensinado no terceiro ano do ensino médio, dentro do conteúdo de geometria analítica, tendo como base uma sequência de ensino. Para a concepção da atividade buscamos os conceitos de situações didáticas e contrato didático, oriundos da didática da matemática francesa, no qual compõem o quadro teórico da engenharia didática com o objetivo de fundamentarmos a elaboração da sequência de ensino. Como metodologia de pesquisa usamos os preceitos indicados pela Engenharia Didática tanto na concepção da sequência de ensino quanto aplicação da atividade em sala de aula. Fizemos uma exposição da aplicação das análises prévias; das análises *a priori* e concepção; das análises *a posteriori* e validação no âmbito do nosso trabalho com o objetivo de mostrar o como a sequência de ensino foi elaborada seguindo os passos ditados pela metodologia escolhida. Optamos por desenvolver uma sequência de ensino para o ensino do conceito de parábola baseada no uso do programa Geogebra como ferramenta auxiliar ao processo de ensino/aprendizagem. Realizamos a aplicação da sequência de ensino com uma turma de terceiro ano do ensino médio que ainda não havia estudado o assunto e verificamos que o seu uso em sala de aula mostrou-se satisfatório ao realizarmos as análises *a priori* e validação da experiência.

Palavras-chave: Ensino/aprendizagem de parábola, engenharia didática, sequência didática, geogebra, informática na educação.

## ABSTRACT

The present work presents an experience of using theories on didactics in mathematics teaching. The parabola concept, taught in the third year of high school, within the content of analytical geometry, was based on a teaching sequence. For the conception of the activity we look for the concepts of didactic situations and didactic contract, coming from French's didactics of mathematics, in which they make up the theoretical framework of didactic engineering in order to base the elaboration of the teaching sequence. As a research methodology, we use the precepts indicated by didactic engineering in both the design of the teaching sequence and the application of the activity in the classroom. We made an exposition of the application of previous analyzes; *a priori* analysis and conception; *a posteriori* analysis and validation in the scope of our work with the objective of showing how the teaching sequence was elaborated following the steps dictated by the chosen methodology. We chose to develop a teaching sequence for the teaching of the parabola concept based on the use of the Geogebra program as an auxiliary tool to the teaching / learning process. We applied the sequence of teaching with a group of third year of high school who had not yet studied the subject and found that its use in the classroom proved to be satisfactory when performing the analysis *a priori* and validation of the experience.

**Keywords:** Teaching / learning of parabola, didactic engineering, didactic sequence, geogebra, informatics in education.

# Sumário

<b>Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>1. Teorias da didática da matemática.....</b>	<b>3</b>
1.1 Teoria das situações didáticas .....	4
1.2 O contrato didático .....	7
1.3 Engenharia Didática .....	8
<b>2. A Metodologia da Engenharia Didática.....</b>	<b>11</b>
2.1 Análises Prévias .....	12
2.2 Concepção e Análises <i>a priori</i> .....	13
2.3 Implementação .....	14
2.4 Análises <i>a posteriori</i> e validação .....	15
<b>3. A Engenharia Didática em nosso trabalho .....</b>	<b>16</b>
3.1 Análises prévias realizadas.....	16
3.2 Análises <i>a priori</i> e concepção para a nossa experiência .....	20
3.3 Implementação da sequência didática desenvolvida .....	21
3.4 Análise <i>a posteriori</i> e validação da sequência didática.....	23
<b>Considerações finais .....</b>	<b>33</b>
<b>Referências .....</b>	<b>36</b>

## Introdução

No desenvolvimento do nosso trabalho em sala de aula devemos lidar com o desafio de ensinar matemática de tal forma que o aluno possa se interessar pelo conteúdo ensinado e compreender corretamente o conceito trabalhado de modo que ele consiga ter autonomia para aplicar os conhecimentos obtidos no cotidiano ou até mesmo em avaliações de larga escala, como os vestibulares e em particular o Exame Nacional do Ensino Médio- ENEM.

Percebemos, pela nossa própria prática docente, que muitas vezes os alunos conseguem ter um bom desempenho desenvolvendo e deduzindo fórmulas e equações, dentro do conteúdo de geometria analítica, porém, em muitos casos não conseguem fazer uma integração entre a álgebra e a geometria presentes no conteúdo.

Em algumas situações, notamos que os alunos têm a capacidade de, a partir da equação, distinguir os elementos de uma cônica, definir se aquela equação descreve uma hipérbole, elipse ou parábola, porém, se for preciso associar a cônica ao seu respectivo lugar geométrico o aluno já não tem tanto sucesso

Neste sentido procuramos uma maneira de trabalhar, especificamente, o conteúdo de parábola do terceiro ano do ensino médio de uma forma que o próprio aluno tenha capacidade de desenvolver o conceito por si só e com o professor em um papel de mediador com o objetivo de auxiliar o aluno na formação do conceito.

Para tanto, o presente trabalho foi desenvolvido com o objetivo de:

- Elaborar uma sequência de ensino para trabalhar o conceito de parábola com alunos do terceiro do ano do ensino médio.

Para atingirmos tal objetivo, seguimos como objetivos específicos:

- Investigar as teorias que possam fundamentar o desenvolvimento da sequência de ensino;
- Buscar uma metodologia para nos auxiliar no desenvolvimento da sequência didática e na sua aplicação em sala de aula;
- Aplicar a sequência de ensino em uma turma de terceiro ano do ensino médio;

- Avaliar o resultado obtido após a implementação da sequência de ensino usando questionário e um teste para verificação da aprendizagem.

Assim sendo, no primeiro capítulo deste trabalho trataremos as teorias das situações didáticas, do contrato didático e da engenharia didática originadas na didática da matemática francesa. No segundo capítulo apresentaremos a metodologia da engenharia didática expondo de forma detalhada cada uma das quatro fases da metodologia.

Já no terceiro capítulo, explicitaremos como a engenharia didática foi aplicada para o desenvolvimento da pesquisa. Serão exibidos cada passo seguido da engenharia didática passando pelas análises prévias, análises *a priori* e concepção, implementação até chegar na validação onde discutiremos os resultados obtidos

# 1. Teorias da didática da matemática

A origem do termo Didática está relacionada ao modo de ensinar, tornar o conhecimento significativo diante de situações de ensino. Segundo Candau (1983, p.14), o objeto de estudo da didática é o processo de ensino-aprendizagem, no qual, toda proposta didática está impregnada, implícita ou explicitamente de uma referência do processo de ensino-aprendizagem. Dessa forma, o intuito da didática em diversas situações de ensino, é associar a teoria à prática, como forma de compreender os conteúdos apresentados.

Nessa perspectiva, Melo e Urbanetz (2008, p.105) afirmam que é na relação ensino e aprendizagem e, mais especificamente, no sucesso dessa última que toda didática ganha no sentido de que o ato educativo tem como característica a intencionalidade, ou seja, é uma ação proposital que visa um fim, o qual, por sua vez, depende das concepções dos atores presentes no ato educativo.

Historicamente, o termo Didática surgiu há um pouco mais de três séculos, com o intuito de entender como as crianças assimilavam o conhecimento e como funcionava a relação ensinar e aprender. Nessa época um jovem chamado João Amós Comênio, por volta do século XVII criou a Didática Magna, que significa a “a Arte de Ensinar”, no qual acreditava que o conhecimento poderia estar ao alcance de todos e não restringido ao clero ou a pessoas com maior poder aquisitivo da época.

Assim, a Didática passou por muitas transformações, adquiriu espaço nas escolas com técnicas de ensino/aprendizagem e com ideias inovadoras, e foi cada vez mais se firmando como campo de estudo, abrangendo diversas áreas do conhecimento humano. Hoje, o estudo da didática está concentrado na educação para a transformação social, para que o conhecimento possa abarcar a todos.

Dentro do campo de ensino da matemática, temos a didática da matemática desenvolvida pelos franceses durante o século passado. Iglioni ao falar da denominação Didática da Matemática observa que no Brasil e em outros países o termo mencionado pode ser também conhecido como Educação Matemática.

Na França, o ramo do conhecimento voltado ao processo do ensino e da aprendizagem da Matemática é denominado Didática da Matemática; em outros países e no Brasil, em geral, é denominado Educação Matemática. (IGLIORI, 2010, p.114)

A didática da matemática traz teorias e conceitos voltados para o trabalho em sala de aula daquele que ensina e daquele que aprende matemática. Seu interesse de estudo passa por temas como a forma que se pode ensinar/aprender matemática, as barreiras que podem surgir no processo de ensino/aprendizagem da disciplina, ferramentas que podem ajudar na elaboração de metodologias para trabalhar os conceitos matemáticos em sala de aula.

## **1.1 Teoria das situações didáticas**

No âmbito geral, pode-se salientar que os contextos didáticos são um conjunto de regras, as quais podem ser expressas implícita ou explicitamente, sendo que essas regras são direcionadas aos alunos por intermédio do professor. No cenário matemático, chamamos de teoria das situações matemáticas, sendo desenvolvida na França e tem como principal teórico Guy Brousseau conhecido como pai da didática matemática.

Segundo Brousseau (1986, p. 8):

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos.

Neste sentido, essa teoria nos permite obter uma compreensão mais profunda sobre as concepções adquiridas em sala de aula, a maneira como esses alunos estão aprendendo e de como o professor está contribuindo na construção desse conhecimento.

Não tão obstante, Freitas (2010, p.77) afirma que esta teoria se trata de formas de apresentação aos alunos do conteúdo matemático, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem Matemática, ainda Silva (2008) ressalta que o aluno somente constrói o conhecimento, quando se envolve com o problema proposto por alguma situação.

De acordo com Gálvez (1996), a teoria de Brousseau nos faz perceber a associação das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais no campo da Educação Matemática, fazendo compreender as interações sociais ocorrem na sala de aula entre alunos e professores, as circunstâncias e a forma que o conhecimento matemático pode ser aprendido no contexto escolar. Intrinsecamente, as situações didáticas nesse sentido, estão diretamente relacionadas com ensino da matemática, seria uma reflexão mais profunda acerca dos métodos aplicados em sala de aula.

Dessa forma, o intuito da teoria das situações matemáticas é trazer o aprendiz para o problema apresentado e partindo desse ponto construir o conhecimento com o auxílio do professor, que nesse caso torna-se mediador do processo de ensino/aprendizagem, salientando que o aluno deve estar ciente que a presença do educador nesse processo é de suma importância para a construção do mesmo.

Assim, podemos perceber que se cria uma ligação de três instrumentos indispensável para que a situação didática matemática funcione, sendo que, “o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber” (ALMOULOU, 2007, p. 32).

Para tanto, Brousseau resolveu esboçar sua teoria das situações matemáticas em um sistema conhecido como “triângulo didático”, no qual em cada vértice do triângulo está o professor, o aluno e o conhecimento, que são fragmentos indispensáveis no que se refere à teoria. Devemos levar em consideração o saber que os discentes adquiriram ao longo de sua trajetória, seja no contexto social e ou escolar, e a partir desse ponto propor a eles situações didáticas.

Nesse sentido, o educador deverá desenvolver uma sequência didática planejada a ser apresentada para os alunos, essa sequência por sua vez deverá ser esclarecedora e tangível. Para isso faz-se necessário que o professor e o aluno estejam alinhados quanto

as situações que foram apresentadas, assim, o professor firma um “contrato didático” com sua classe, com acordos bilaterais.

De acordo com Menezes (2006), o professor e o aluno devem possuir uma vinculação assimétrica em relação ao saber. Com isso, cabe ao professor instigar seus alunos propondo um problema apropriado por meio de significados e eventos apresentados em sala de aula, no qual propicie a aprendizagem, uma vez que, na relação aluno/ professor ficará claro a condição de que o educador é o mediador das situações didáticas.

Contudo, na teoria das situações didáticas, podemos perceber que existem circunstâncias no qual o educador não possui o controle, pois não tem como prever que caminhos os alunos irão desbravar para obter o saber matemático de algum problema proposto. Nesse modelo, dizemos que se têm situações a-didáticas, no qual segundo Brousseau (1996) os alunos alcançam verdadeiramente o saber “quando for capaz de aplicá-lo por si próprio às situações com que se depara fora do contexto do ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional, uma tal situação é denominada a-didática”, chamada também de “milieu”.

Sendo assim, Brousseau propôs ainda alguns tipos de situações didáticas podem que ser utilizadas para contribuir na descoberta do saber pelo aluno. Nesse sentido, temos:

- Situações de ação: quando o aluno se esforça para encontrar um resultado repentino de algum problema proposto a ele, assim usam-se moldes e tentativas para sistematizar o problema.
- Situações de formulação: resulta-se na permuta de informações entre o discente e as situações a-didáticas, sem o uso de uma linguagem matemática formal.
- Situações de validação: o aluno utiliza uma linguagem matemática formal, mecanismo de prova, com o intuito de convencer o professor da verdade da situação vivenciada.
- Situações de institucionalização: onde o saber é sistematizado, reconhecido e identificado, e esse tem caráter cultural.

Dessa maneira, a teoria das situações didáticas, tem como finalidade a melhoria do ensino matemático, no qual o conhecimento passe a ser instantâneo no que se refere

ao saber matemático. O aluno quebra o paradigma de oferecer respostas prontas para problemas propostos, sendo a busca por esse saber uma procura mais interessante.

## 1.2 O contrato didático

Para regular as relações entre o professor e o aluno em sala de aula podemos recorrer ao conceito do contrato didático. Conforme expõe Silva (2010, p. 49): “A relação professor-aluno está subordinada a muitas regras e convenções, que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato”.

Segundo Brousseau (2013), o conceito de contrato didático apareceu no ano de 1980 com o intuito de estudar um grupo de alunos, no qual tinham dificuldades de aprendizagem em matemática, esse estudo foi realizado pelo Centro de Observação e Pesquisas que trabalha com o Ensino de Matemática, pertencente à Universidade de Bordeaux.

Nessa perspectiva o teórico Guy Brousseau define o contrato didático da seguinte maneira:

Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.” (BROUSSEAU, 1986, APUD SILVA, 2008, p.50).

Nesse sentido, o contrato didático é um elo que une professor e aluno em direção à descoberta do conhecimento. As relações estabelecidas no contrato devem estar claras para ambas as partes, com isso a negociação terá que assumir um papel implícito. Segundo Galvez (1996), as regras de funcionamento do contrato didático são definidas dentro das situações didáticas, como por exemplo, o direito de se expressar e dar opiniões, bem como o dever de ouvir o que lhe é dito.

Na visão de Cury (1994), a noção de contrato didático avulsa da compreensão filosófica ou pedagógica adotada pelo professor, sendo que é um vínculo no qual se estabelece toda vez que um educador e seus alunos juntam-se em torno de um saber. Nesse modelo de relações estabelecidas, as partes precisam estar abertas a novas negociações ou renovações caso o contrato não seja satisfatório a alguma das partes ou

as duas a cada novo ciclo. Dessa forma, esse padrão de funcionamento estabelece o andamento das aulas em sala de aula, bem como o comportamento da classe como um todo.

Nessa perspectiva, cabe ao educador direcionar seus alunos na resolução de problemas propostos por ele, bem como a função do aluno está em ouvir esse direcionamento e executá-lo, assim professor e alunos constroem um vínculo, ou seja, uma relação mutua, no qual reflete um relacionamento de confiança, e por fim as duas partes do contrato chegam ao objetivo principal – o conhecimento.

Silva (2010, p. 51), ao falar de como o contrato didático se apresenta, nos diz que: “[...] o contrato didático depende da estratégia de ensino adotada, adaptando-se a diversos contextos, tais como: as escolhas pedagógicas, o tipo de trabalho solicitado aos alunos, os objetivos do curso, as condições de avaliação, etc.”.

Deste modo, destacamos que o contrato didático é inerente à sala de aula e está presente e deve ser explicitado quando o professor propõe uma atividade, avaliação ou até mesmo no primeiro dia de aula quando são apresentados os objetivos da disciplina, as formas de avaliação entre outras atividades que serão propostas para o desenvolvimento do curso.

### **1.3 Engenharia Didática**

A engenharia didática é uma metodologia de pesquisa desenvolvida no campo da didática da matemática por Michele Artigue. Esta teoria foi desenvolvida englobando os conceitos de situações didáticas, contrato didático e obstáculo epistemológico e tem como finalidade facilitar o trabalho do professor em sala de aula durante o seu cotidiano.

Machado (2010, p. 232) destaca que a engenharia didática nasce com a finalidade de analisar as situações didáticas, este aspecto da engenharia didática nos proporciona a possibilidade de inserir a teoria na fundamentação deste trabalho em virtude do principal objetivo que é produzir uma situação didática.

Ao utilizar os passos da engenharia didática o pesquisador/professor tem como referencial os conceitos de didática da matemática, deste modo a aplicabilidade prática da metodologia torna-se viável pois em alguns casos, como o uso em uma situação de sala de aula, dispensa uma fundamentação mais profunda.

Artigue ao discorrer acerca da engenharia didática coloca que sua origem está nos anos 80 e justifica a origem do termo engenharia didática ao comparar o trabalho de um professor ao trabalho de um engenheiro.

Nas palavras da autora:

La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos epurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (ARTIGUE, 1995, p. 33)

Machado (2010, p.234 - 235) ao analisar as concepções relativas à engenharia didática observa uma dupla função para a teoria:

De fato, a noção de engenharia didática foi se construindo na Didática da matemática com essa dupla função, na qual ela pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise a priori, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino.

Campos (2006, p. 1) ao analisar o quadro teórico da engenharia didática também observa a dupla funcionalidade “ [...]como metodologia de pesquisa e como de produção de situações de ensino e aprendizagem, [...]”. Este posicionamento encontrado em Campos está baseado nos ensinamentos de Douady:

“[...] el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta em funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase.” (Douady, 1996, p. 241)

Neste sentido, ao referir-se a respeito da dualidade da engenharia didática temos Carneiro (2005, p. 90) relatando que: “É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. ”

Finalizando o raciocínio Carneiro conclui que:

Nessa linha, prática de ensino é articulada com prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico. (CARNEIRO, 2005, p. 90)

Buscando melhorar o entendimento a respeito da engenharia didática como metodologia de pesquisa encontramos Almouloud e Coutinho (2006, p. 66) que nos dizem: “A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. ”

Sendo assim, alinhamos as características da engenharia didática, na qual se encontra a metodologia de pesquisa e a metodologia para o desenvolvimento de situações didáticas, com o objetivo desse trabalho que é o de produzir uma situação de aprendizagem visando o ensino de parábola para alunos do terceiro ano do ensino médio e ainda encontramos uma metodologia de pesquisa que se baseia em quatro etapas conforme veremos adiante.

## 2. A Metodologia da Engenharia Didática.

Artigue (1995, p.36) ao caracterizar a engenharia didática como metodologia de pesquisa nos fala que:

Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Ainda caracterizando a metodologia Artigue aponta dois níveis distintos referentes à engenharia didática: “Allí se distinguen por lo general dos niveles: el de la *micro-ingeniería* y el de la *macro-ingeniería*, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación.” (ARTIGUE, 1995, p.36).

Machado (s/d, p 12) detalha os dois níveis de engenharia didática:

Pode-se distinguir dois níveis de “*engenharia didática*”, necessários e complementares. O primeiro, é a “*microengenharia*”, no qual as pesquisas têm por objeto de estudo um determinado assunto. Estas pesquisas são localizadas e levam em conta principalmente a complexidade dos fenômenos de sala de aula. Num segundo nível, está a “*macroengenharia*”, que, por sua vez, são as pesquisas que permitem uma composição entre a complexidade das pesquisas da “*microengenharia*” e os fenômenos ligados à duração nas relações ensino aprendizagem.

Artigue (1995, p. 36-37) observa que as pesquisas em microengenharia são mais simples de se colocar em prática e acabam ajudando a analisar de forma local os acontecimentos da sala de aula, ao passo que as pesquisas de macroengenharia ainda que sejam mais complexas são necessárias.

Machado ao examinar os dois níveis da metodologia relata que:

As pesquisas de microengenharia são aquelas que têm por objeto o estudo de um determinado assunto, elas são localizadas e levam em conta, principalmente, a complexidade dos fenômenos de sala de aula. Por outro lado,

as pesquisas de macroengenharia são aquelas que permitem compor a complexidade das pesquisas de microengenharia com a dos fenômenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem. (MACHADO, 2010, p. 234)

Desse modo, observa-se que estamos desenvolvendo uma pesquisa baseada na metodologia da engenharia didática considerando o nível de microengenharia, uma vez que nosso objeto de estudo está centrado em uma situação didática para analisar determinado conteúdo em sala de aula.

Artigue (1995, p. 37) distingue a engenharia didática de outras metodologias de pesquisa. Ela observa que outras metodologias de pesquisas se baseiam na análise de grupos experimentais e grupos de controle enquanto a engenharia didática tem sua validação interna a partir de uma confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* situadas dentro da própria engenharia didática.

A saber, a engenharia didática como metodologia de pesquisa se desenvolve por meio de quatro fases denominadas análises prévias, concepção e análises *a priori*, implementação e análise *a posteriori* e validação.

## 2.1 Análises Prévias

Artigue coloca que a fase das análises prévias não deve se basear apenas em um quadro teórico e no que se conhece com relação ao campo de estudo, ela observa que devem ser feitas análises considerando outros pontos como:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
  - El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
  - El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
  - El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva
  - Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación
- (ARTIGUE, 1995, p. 38)

Almouloud e Coutinho (2008, p. 66) propõem alguns pontos que podem ser levados em consideração para se contemplar esta etapa:

A primeira fase é aquela na qual se realizam as análises preliminares, que pode comportar as seguintes vertentes:

- epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- do ensino usual e seus efeitos;
- das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
- das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- a consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

Também observamos o entendimento de Machado ao falar das análises prévias:

As *análises preliminares* para a concepção da engenharia são feitas através de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão, bem como sobre:

- a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino;
- a análise do ensino atual e de seus efeitos;
- a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução;
- a análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática.

(MACHADO, 2010, p. 238)

Os pontos a serem analisados podem ser modificados de acordo com a pesquisa que será realizada usando a metodologia da engenharia didática. Artigue (1995, p. 39) relata que apesar de compor o início da engenharia didática, as análises prévias podem ser retomadas nas outras fases da metodologia conforme apareçam as necessidades.

## **2.2 Concepção e Análises *a priori***

Machado ao explorar a concepção e análises *a priori* nos diz que:

Na fase da *concepção e da análise a priori* o pesquisador orientado pelas análises preliminares delimita certo número de variáveis pertinentes do sistema sobre o qual o ensino pode atuar, as quais são chamadas de variáveis de comando. (MACHADO, 2010, p. 241)

Artigue distingue dois tipos de variáveis de comando para serem observadas nesta etapa. Pelas palavras da autora:

Nos parece útil, para facilitar el análisis de una ingeniería, distinguir dos tipos de variables de comando:

- Las *variables macro-didácticas* o *globales*, concernientes a la organización global de la ingeniería
- Y las *variables micro-didácticas* o *locales*, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase. (ARTIGUE, 1995, p. 42)

Artigue (1995, p. 45) observa que o objetivo das análises *a priori* é determinar o quanto que escolhas feitas nesta etapa permitem controlar o comportamento dos alunos.

Por conseguinte, após avaliar as variáveis que podem influenciar na experimentação temos a concepção da situação de aprendizagem para o conteúdo, no qual se deseja trabalhar.

## 2.3 Implementação

Na implementação leva-se à prática o que foi planejado na fase de concepção. É a hora do contato com os alunos dos quais se deseja trabalhar o conteúdo matemático, Machado coloca que:

A fase da *experimentação* é a fase clássica. É a fase da realização da engenharia com uma certa população de alunos Ela se inicia no momento em que se dá o contato pesquisador/professor/observador(es) com a população de alunos objeto da investigação.(MACHADO, 2010, P. 244)

Ainda tratando da fase em que se coloca em prática o que foi concebido Machado observa que:

A experimentação supõe:

- A explicitações dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- O estabelecimento do contrato didático;
- Aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- Registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros visuais, etc.) (MACHADO, 2010, p. 244-245)

## 2.4 Análises *a posteriori* e validação

Por fim, chegamos à última etapa a ser trabalhada ao utilizar a metodologia da engenharia didática. Artigue (1995, p. 48) ressalva que esta fase é baseada nas observações das sequências didáticas, nas atividades produzidas pelos alunos e em dados coletados durante a implementação.

Machado sugere algumas ferramentas para auxiliar na compreensão dessa fase:

Muitas vezes para melhor compreensão do ocorrido, tornam-se necessário dados complementares como: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas tanto durante a experimentação quanto no final dela. Isto é, as fases 3 e 4 não são excludentes, mas complementares. (MACHADO, 2010, p.246)

Para encerrar o estudo relativo à metodologia da engenharia didática atentamos para a ressalva de Machado (2010, p. 246) ao colocar que: “Finalmente, é da confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* que se validam ou se refutam as hipóteses levantadas no início da engenharia”.

### **3. A Engenharia Didática em nosso trabalho**

O desenvolvimento da situação de aprendizagem foi todo baseado nos preceitos da engenharia didática, neste tópico detalharemos as fases da metodologia aplicada para a elaboração, implementação e validação da sequência de ensino.

Salientamos que a atividade foi desenvolvida com uma turma de alunos do terceiro ano do curso Técnico Integrado em Informática do Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia do Amazonas – IFAM/ Campus Maués.

#### **3.1 Análises prévias realizadas**

Para as análises prévias percorremos por alguns pontos sugeridos pelos autores e que foram apontados no capítulo reservado à engenharia didática. O primeiro ponto que percorremos foi a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino, que no nosso caso é conteúdo de parábola que está inserido dentro de geometria analítica.

Mol (2013, p. 55) relata a respeito da obra *Cônicas* escrita pelo matemático e astrônomo Apolônio (262-190 a.C.) que nasceu em Pérgamo, porém vinculado à Escola de Alexandria.

Boyer (1974, p. 106) narra que as cônicas já eram conhecidas há pelo menos um século e meio quando Apolônio escreveu, conforme descreve Boyer (1974, p. 106), “sua obra prima” e que nesse período, de um século e meio, outros matemáticos já haviam escrito a respeito do assunto de cônicas.

Por conseguinte, Mol (2013, p. 55) observa que Apolônio, em seus estudos, obteve propriedades características das cônicas que geraram os nomes que hoje conhecemos, sendo parábola relacionada à comparação, hipérbole à excesso e elipse à deficiência.

Mol observa que a obra de Apolônio foi um marco inicial para a geometria analítica, segundo o autor: “A obra de Apolônio foi marcante para o desenvolvimento da geometria. Em muitos aspectos, seu trabalho foi uma antecipação da geometria analítica de René Descartes, que viria a ser desenvolvida no século XVII.” (MOL, 2013, p. 56)

Corroborando com o que foi exposto por Mol, temos Boyer afirmando: “Os métodos de Apolônio, em *As Cônicas*, em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera seu tratado como uma geometria analítica, antecipando a de Descartes por 1800 anos” (BOYER, 1974, p. 114).

Avançando ao tempo de Descartes, Mol (2013, p. 95) atribui ao filósofo e matemático as bases da geometria analítica expostas em seu trabalho intitulado *A Geometria*, do ano 1637. Mol, ao falar da obra de Descartes, conta que: “Esse texto nasceu como um conjunto de três apêndices ao Discurso do Método e, a princípio, sua função era ilustrar o método filosófico de Descartes.” (MOL, 2013, p.95-96).

Boyer (1974, p. 251) expõe que Descartes, em seus trabalhos sobre geometria analítica, deduziu a equação geral  $y^2 = ay - byx + cx - dx^2$  para uma cônica passando pela origem, e denotou a manipulação dos coeficientes que fazem com que a equação seja de uma reta, parábola, elipse ou hipérbole.

Por conseguinte, notamos a grande contribuição de Descartes para o desenvolvimento da geometria analítica e do estudo das cônicas, entretanto, Boyer (1974, p.253), salienta que a matemática não foi um campo no qual René Descartes mais se empenhou, sua contribuição para matemática resumiu-se ao seu trabalho com geometria e sua dedicação estava voltada para a ciência e a filosofia.

Ainda na época de Descartes, Boyer (1974, p. 253), faz referência à Fermat que estudou a noção de lugar geométrico a partir da geometria analítica ao fazer uma reconstrução do Lugares Planos de Apolônio.

Fermat, conforme aponta Boyer (1974), trabalhava na área do direito e poucos dos seus estudos em matemática foram publicados em vida, incluindo-se *A introdução aos lugares*, obra na qual abordou acerca da geometria.

Deste modo, depreendemos que o surgimento do conceito de parábola dentro da geometria analítica está relacionado com o estudo das cônicas tanto nos primórdios da matemática com Apolônio e muito antes dos seus estudos quanto no surgimento da geometria analítica com Descartes e Fermat. Há de se ressaltar que Fermat, com sua releitura a respeito do que seria o início da noção de Lugar Geométrico, trouxe para geometria analítica, o conceito no qual basearemos a construção da sequência didática.

O segundo ponto considerado foi o do ensino atual que foi contemplado com uma análise do livro didático usado pelos alunos. Buscamos examinar a forma como o conteúdo é trabalhado no livro, quais são os conteúdos que são trabalhados antes de parábola entre outras características que o livro apresenta.

A coleção adotada para o estudo de matemática na instituição onde ocorreu a experimentação é do autor Manoel Paiva do ano de 2013.

Iniciamos analisando o sumário da coleção para observar a forma como os conteúdos são apresentados no desenvolver do livro. O capítulo 1 do livro é apresentado como Noções de Estatística. Não consideramos que algum assunto contido no primeiro capítulo possa influenciar de forma direta no assunto visado pelo nosso trabalho.

O capítulo 2 é exposto com o título Geometria analítica: ponto e reta. Entre os tópicos deste capítulo o que chamou a atenção foi o de Distância entre dois pontos, já que entendemos que este conceito seja necessário para que o aluno possa compreender o conceito de parábola e tenha capacidade de deduzir a equação da parábola. Ainda no segundo capítulo o autor apresenta as retas verticais e horizontais que são usadas como retas diretrizes das parábolas e auxiliam tanto na sua construção geométrica quanto na construção algébrica.

Deste modo, observamos dois temas importantes para o processo de ensino/aprendizagem de parábola no segundo capítulo. Esses dois temas devem entrar no rol de conhecimentos prévios dos alunos por estarem diretamente ligados ao conceito de parábola.

O capítulo 3 é apresentado sob o título Formas da equação da reta, paralelismo e perpendicularidade e apresenta os conteúdos indicados no próprio título do capítulo.

Seguindo com a análise apenas do sumário temos o capítulo 4 que é proposto como Complementos sobre o estudo da reta que entre os seus tópicos apresenta Distância entre ponto e reta. Esse conceito também integra a definição de lugar geométrico atribuída à parábola, deste modo, avaliamos que este conceito também deve integrar o rol de conhecimentos prévios dos alunos.

O capítulo 5 é reservado para apresentar os conhecimentos acerca de circunferência e tem como título Equações da circunferência. Não observamos nenhum

conteúdo específico diretamente relacionado à parábola, porém, cabe mencionar que quando se trabalha com circunferência tem-se o uso do lugar geométrico, tal noção pode trazer benefícios ao processo de ensino/aprendizagem de parábola pelo fato de ser também usada para o tema.

No capítulo 6 encontramos o conteúdo no qual pretendíamos trabalhar. O capítulo foi intitulado As cônicas: elipse, hipérbole e parábola. Iremos fazer uma análise do capítulo mais adiante.

Finalizando as observações concernentes ao sumário, os capítulos que se seguem são os 7, 8 e 9 e são denominados, no livro, como Conjunto dos números complexos, Polinômios e Equações polinomiais respectivamente. Não entramos em detalhes sobre esses capítulos, pois não apresentam conteúdos que possam influenciar no processo de ensino/aprendizagem de parábola.

Retomando o capítulo 6 que trabalha as cônicas, o estudo se inicia com a construção de uma superfície cônica circular reta de duas folhas a partir de um eixo de rotação e a rotação em torno do eixo de uma reta geratriz. Por conseguinte, Paiva (2013) apresenta as secções efetuadas na superfície cônica com um plano.

Ainda de uma forma introdutória o autor apresenta uma forma de se visualizar as cônicas usando uma lanterna e em seguida trabalha o aspecto histórico das cônicas desde seu surgimento até as aplicações atuais.

Pela orientação do livro, parábola é a última cônica a ser trabalhada. De início o autor faz um paralelo entre o conteúdo que será estudado e o de equações do segundo grau no qual o autor menciona que já foi trabalhado no primeiro livro da coleção relativo ao primeiro ano do ensino médio.

Prosseguindo com a análise, observamos que o autor define o conceito de parábola como lugar geométrico e apresenta os elementos da cônica. Continuando neste primeiro momento de estudo o autor apresenta duas formas de se construir a parábola, uma usando barbante, régua, esquadro e lápis e outra usando dobradura de papel.

Para finalizar o primeiro momento com o conceito de parábola são apresentados exercícios resolvidos e exercícios proposto trabalhando apenas com os pontos apresentados até o momento relacionados à parábola.

Após os exercícios propostos, o que vem a ser trabalhado é a equação reduzida da parábola. A abordagem ao conteúdo inicia com um caso particular onde são dados o foco cujas coordenadas são (3,5) e a diretriz de equação  $y - 3 = 0$ . Usa-se o lugar geométrico correspondente à parábola e os conceitos de distância entre pontos e distância entre ponto reta para chegar à equação reduzida da parábola.

Seguindo na temática da equação reduzida o autor faz a generalização dos quatro casos de equação reduzida possíveis de acordo com a concavidade da parábola, apresenta os exercícios resolvidos e exercícios propostos. Os exercícios trazidos no livro relativos à equação reduzida da parábola iniciam com problemas nos quais são dados o gráfico para que se determine a equação, em seguida são apresentadas equações reduzidas para que se faça um esboço do gráfico, exercícios para que seja determinada a equação reduzida a partir da equação geral e alguns exercícios contextualizados.

Deste modo, termina a abordagem ao conteúdo de parábola pelo livro didático. Ainda aparecem no final do capítulo mais duas seções, uma denominada roteiro de trabalho, onde são propostos alguns exercícios para serem resolvidos em grupo, e outra chamada de exercícios complementares onde são apresentados mais exercícios, alguns exercícios de vestibulares, concernentes ao conteúdo do capítulo.

### **3.2 Análises *a priori* e concepção para a nossa experiência**

Focamos a construção do presente trabalho no processo de ensino/aprendizagem de parábola inserido no conteúdo de geometria analítica do terceiro ano do ensino médio. Objetivamos construir uma sequência de didática na qual o aluno possa perceber a parábola como lugar geométrico dos pontos de um plano; relacionar a parábola a sua equação e generalizar a equação da parábola.

Ressalvamos que ao preparar a sequência de ensino, entendemos ser de grande importância para o desenvolvimento da atividade que os alunos tenham conhecimento a respeito da noção de distância entre dois pontos e, não menos importante, saibam operar corretamente com os produtos notáveis, assunto presente no currículo do ensino fundamental, mas de vital importância para a dedução das equações da parábola. Percebemos que essas variáveis apontadas podem trazer um reflexo negativo para o trabalho se não forem observadas.

Baseado nas análises realizadas anteriormente, elaboramos a seguinte sequência didática pensada para ser desenvolvida com o apoio do programa Geogebra:

1. Represente o ponto F (5,4) e a reta d:  $y = -2$  no Geogebra.
2. Encontre três pontos do plano com a seguinte característica: a distância do ponto pretendido ao ponto F deve ser a igual a distância do ponto pretendido à reta d. Use os recursos do Geogebra que julgar necessário.
3. Mostre, usando distância entre dois pontos, que os pontos que você encontrou anteriormente satisfazem à propriedade solicitada no passo anterior.
4. Com a fórmula da distância entre dois pontos generalize o passo anterior usando um ponto P de coordenadas (x, y) no lugar dos pontos que você havia determinado.
5. No Geogebra use o botão  para determinar a parábola que tem como foco o ponto F e diretriz a reta d.
6. Compare a equação que você obteve no passo 4 com a equação apresentada na janela de álgebra do Geogebra
7. Repita o roteiro para deduzir a equação geral da parábola que tem como foco o ponto F (-6, -2) e como diretriz a reta  $x = -2$ .

### 3.3 Implementação da sequência didática desenvolvida

Para a implementação da sequência de ensino utilizamos três tempos de 50 minutos e seguidos. Logo no início do primeiro tempo os alunos foram encaminhados ao laboratório de informática da instituição e os mesmos já tinham uma certa familiaridade com o programa Geogebra devido ao uso em outras atividades e em sala de aula pelo professor.

Para cada um aluno foi distribuído um roteiro da atividade com instruções relativas ao seu desenvolvimento. Inserido no corpo do roteiro foram inseridas 5 perguntas nas quais nos auxiliaram a perceber como foi o desempenho dos alunos na atividade. Por conseguinte, apresentamos o roteiro conforme foi distribuído aos alunos:

Roteiro para atividade usando o programa Geogebra

- Aguarde as orientações do professor aplicador para prosseguir com os passos do roteiro durante o desenvolvimento da atividade.
- Responda às perguntas apresentadas no roteiro no momento em que aparecerem.
- Em caso de dúvidas pergunte ao professor aplicador.

Início da atividade:

1. Represente o ponto F (5,4) e a reta d:  $y = -2$  no Geogebra.
2. Encontre três pontos do plano com a seguinte característica: a distância do ponto pretendido ao ponto F deve ser a igual a distância do ponto pretendido à reta d. Use os recursos do Geogebra que julgar necessário.
3. Mostre, usando distância entre dois pontos, que os pontos que você encontrou anteriormente satisfazem à propriedade solicitada no passo anterior.

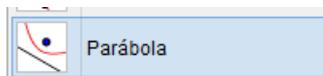
[PERGUNTA 1]: Você lembrou da fórmula da distância entre dois pontos?

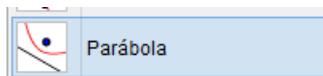
- (a) Sim
- (b) Não

[PERGUNTA 2]: Você conseguiu aplicar a fórmula da distância entre dois pontos corretamente?

- (a) Sim
- (b) Sim, porém tive dificuldade
- (c) Não

4. Com a fórmula da distância entre dois pontos generalize o passo anterior usando um ponto P de coordenadas (x, y) no lugar dos pontos que você havia determinado.



5. No Geogebra use o botão  para determinar a parábola que tem como foco o ponto F e diretriz a reta d.

[PERGUNTA 3]: Os pontos que você determinou pertencem à parábola gerada pelo programa geogebra

- (a) Sim
- (b) Não

6. Compare a equação que você obteve no passo 4 com a equação apresentada na janela de álgebra do Geogebra.

[PERGUNTA 4]: É possível afirmar que as duas equações são idênticas?

- (a) Sim
- (b) Não

7. Repita o roteiro para deduzir a equação geral da parábola que tem como foco o ponto F (-6, -2) e como diretriz a reta  $x = -2$ .

[PERGUNTA 5]: Você conseguiu obter a equação geral da parábola?

- (a) Sim
- (b) Não

Todas as instruções iniciais foram lidas e foram seguidos rigorosamente todos os passos da atividade. Em alguns momentos da atividade foi necessária uma intervenção mais ativa do professor como, por exemplo, no caso do item 3, uma vez que foi preciso escrever a fórmula da distância entre dois pontos na lousa pois alguns alunos não lembravam corretamente da fórmula.

### **3.4 Análise *a posteriori* e validação da sequência didática**

Iniciamos a contemplação da quarta etapa da engenharia didática analisando as respostas das perguntas inseridas no desenvolvimento da atividade em sala de aula. A primeira pergunta foi: “Você lembrou da fórmula da distância entre dois pontos?” na qual eram apresentadas como alternativas de respostas sim ou não.

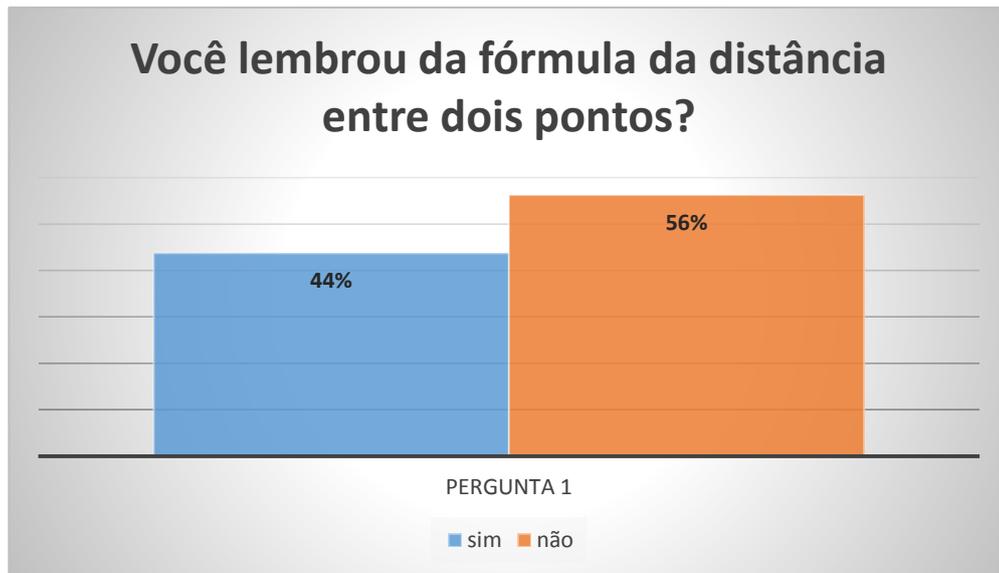


Figura 1: gráfico da pergunta 1

Com a análise do gráfico notamos que mais da metade dos alunos participantes, precisamente 56% dos alunos, afirmou não ter lembrado da fórmula da distância entre dois pontos. Este fator, como foi previsto na seleção das variáveis, poderia ter influenciado negativamente no andamento da atividade, já que, o conceito de parábola tem apoio na noção de distância entre dois pontos.

Na figura 2, a seguir apresentamos a respostas para a pergunta 2 que foi respondida pelos alunos assim que eles terminaram de realizar a etapa 3 da sequência de ensino.

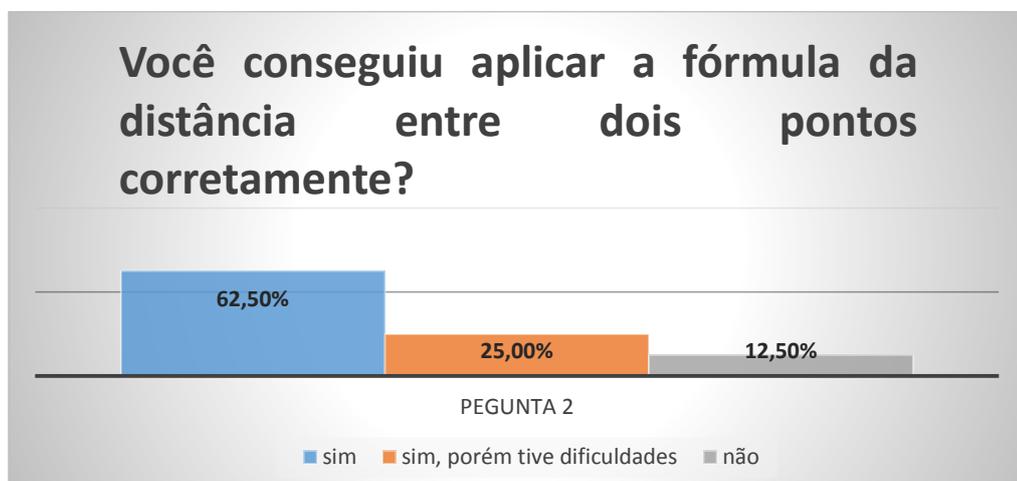


Figura 2: gráfico da pergunta 2

Ainda que na pergunta 1 a maioria dos alunos tenha sinalizado que não lembrou da fórmula da distância entre dois pontos, na pergunta 2 62,5% afirmou ter aplicado corretamente a fórmula e 25% assinalou que conseguiu aplicar, porém com dificuldades. Ressalvamos que entre a primeira e a segunda pergunta o professor interferiu na atividade escrevendo a fórmula, que seria necessária para o andamento da atividade, no quadro. Tal interferência foi prevista nas análises prévias ao verificarmos o campo dos entraves que poderiam dificultar a aprendizagem do conceito.

A figura 3 apresenta a frequência das respostas da pergunta 3. Essa pergunta foi respondida após a quinta etapa da sequência didática e requer que o aluno faça uma análise visual do que fez naquela etapa da atividade.

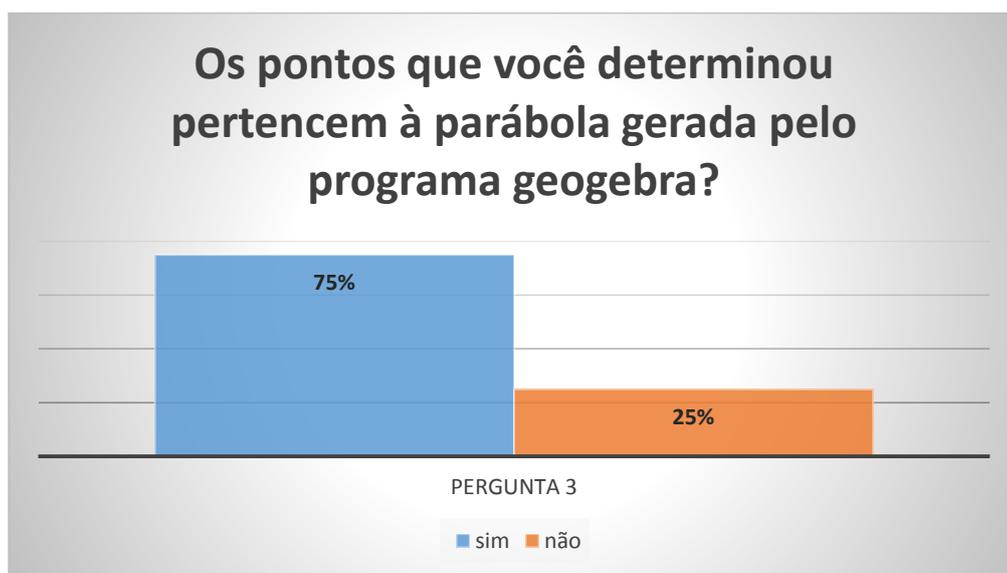


Figura 3: gráfico da pergunta 3

Para a pergunta 3, conforme ilustra a figura 3, 75% das respostas foi sim enquanto 25% foi não. A pergunta 3 sinaliza se o desempenho dos alunos nos itens anteriores ao item 5 foi de acordo com o que se esperava tendo em vista que se trata de uma pergunta diretamente ligada à atividade.

A pergunta 4 aparece após o item 6 da sequência de ensino e com ela está relacionada pois precisa que o aluno faça o que se pede para que seja respondida. Na figura 4 podemos observar a frequência relativa das alternativas de respostas.

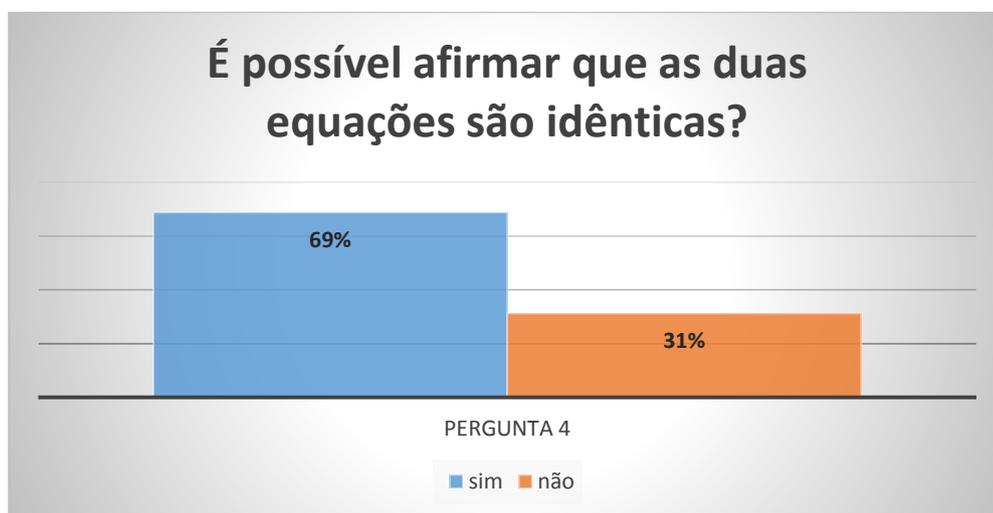


Figura 4: gráfico da pergunta 4

No momento da ocorrência da pergunta 4, o aluno já deveria ter desenvolvido a equação da parábola e tinha em mãos a equação da parábola fornecida pelo Geogebra na janela de álgebra. Tivemos 69% assinalando sim para a pergunta e 31% apontando não como resposta para pergunta. Observamos ser um número próximo dos resultados apontados na pergunta anterior mostrando, desta forma, uma coerência entre os resultados uma vez que existe uma relação de dependência entre as duas perguntas.

A última pergunta que acompanhou o roteiro da atividade distribuído aos alunos foi proposta logo após o sétimo item da sequência de ensino. Tal item pedia para que o aluno repetisse todo o processo para determinar a equação de uma outra parábola. Na figura 5 podemos verificar a ocorrência das respostas.

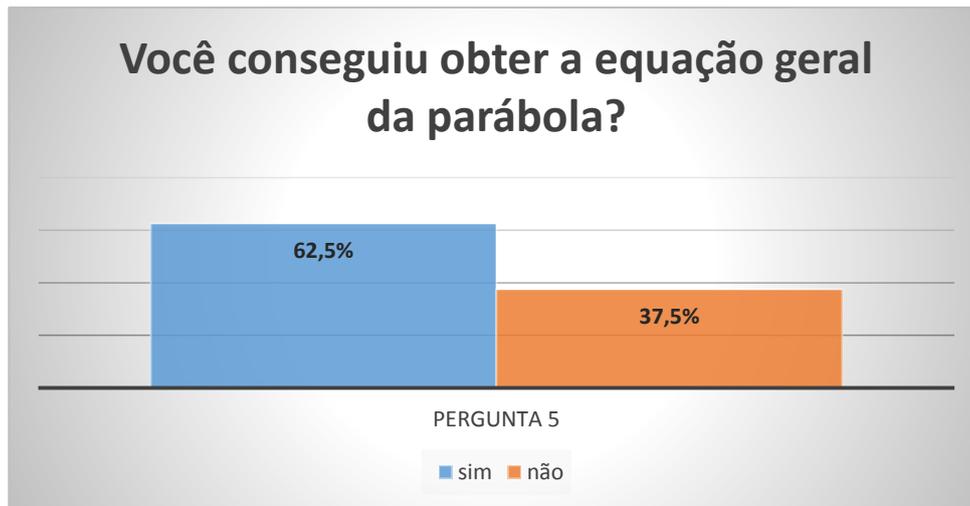


Figura 5: gráfico da pergunta 5

Avaliando o gráfico apresentado na figura 5, temos 62,5% dos alunos marcou sim, ao serem perguntados se eles conseguiram refazer a atividade, e 37,5% assinalou não. Das 5 perguntas, apenas a pergunta 1 teve menos de 50% dos alunos assinalando “sim”. Ressalvamos que a insuficiência apontada ao avaliarmos as respostas da pergunta 1 foi possível de ser sanada com a intervenção do professor.

No dia seguinte ao da aplicação da atividade, foi aplicado um teste com 4 questões relacionadas ao que havíamos trabalhado na sequência didática. Para a aplicação do teste foi reservado um tempo de aula de 50 minutos. A primeira questão do teste pode ser vista na figura 6.

1. São elementos da parábola:
  - a) Eixo maior, diretriz e vértices
  - b) Foco e eixo real
  - c) Foco e assíntotas
  - d) Foco e diretriz

Figura 6: primeira questão do teste

Com a primeira questão do teste o que se pretendia era perceber se os alunos conseguiriam assinalar, dentre as alternativas, qual apresenta elementos da parábola. Na figura 7 podemos observar que 93,25% dos alunos respondeu corretamente. Era um resultado esperado tendo em vista que se tratava de uma questão na qual considerávamos de nível fácil.

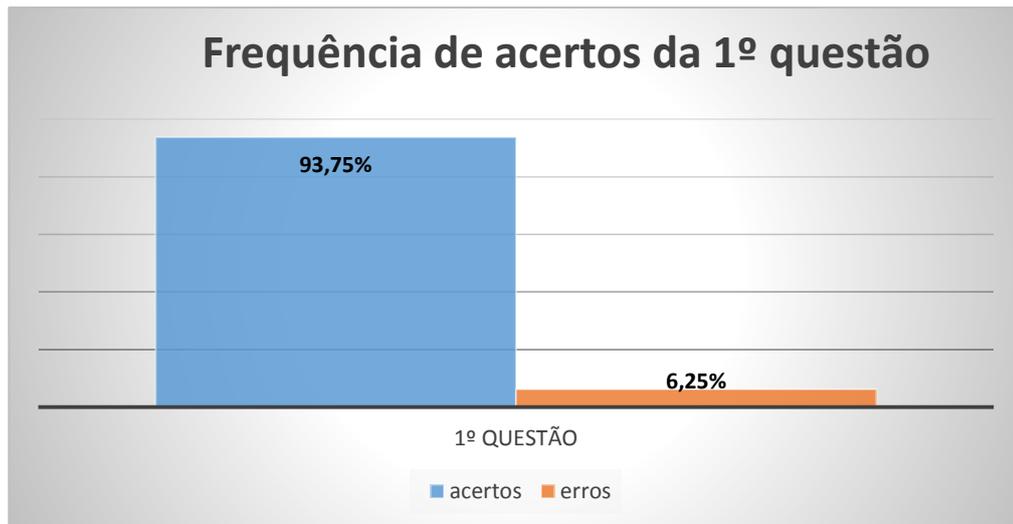


Figura 7: frequência de acertos da primeira questão

A segunda questão pode ser vista na figura 8. Com essa questão pretendíamos observar se os alunos apontariam corretamente a noção de lugar geométrico relativo à parábola.

2. Dentre as alternativas apresentadas a seguir qual delas melhor define uma parábola.
- a) Conjunto de pontos que estão a mesma distância de um ponto fixo chamado foco e são intersectados por uma reta chamada diretriz
  - b) Dados um ponto  $F$  e uma reta  $d$  de um plano, com  $F \notin d$ . Parábola é o conjunto de pontos do plano que estão a mesma distância da reta  $d$  e do ponto  $F$ .
  - c) Fixados dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  e uma reta  $d$  que passa por  $F_1$  e  $F_2$ . Parábola é o conjunto de pontos do plano tais que as diferenças, em módulo, das distâncias aos pontos  $F_1$  e  $F_2$  é constante.
  - d) Fixados dois pontos  $F_1$  e  $F_2$ . Parábola é o conjunto de pontos do plano tais que a soma das suas distâncias aos pontos  $F_1$  e  $F_2$  é constante.

Figura 8: segunda questão do teste

Na segunda questão, conforme podemos verificar na figura 9, 68,75% sinalizou a resposta correta, ou seja, 11 alunos conseguiram selecionar a opção que apresentava o lugar geométrico para parábola conforme tínhamos como objetivo ao início da atividade.

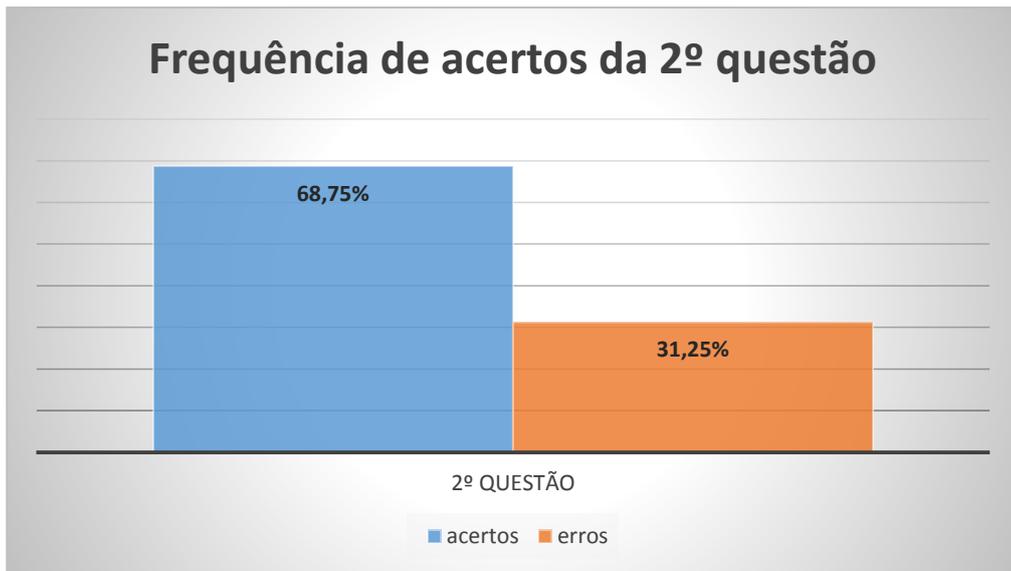


Figura 9: frequência de acertos da 2ª questão

A figura 10 apresenta a terceira questão do teste aplicado. Nela era solicitado que o aluno distinguísse, entre as alternativas, aquela que apresentava um ponto que pudesse pertencer a uma parábola de acordo com os elementos que eram apresentados em cada alternativa.

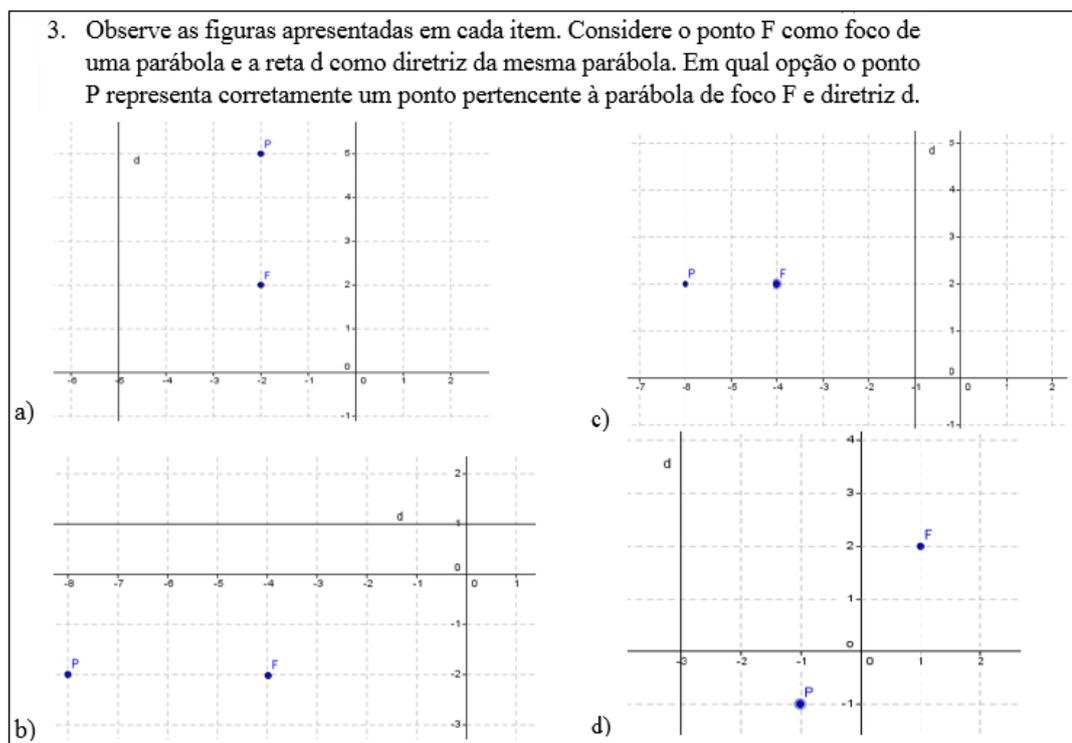


Figura 10: terceira questão do teste

De acordo com a figura 11, 56,25% dos alunos marcou a alternativa correta na terceira questão, traduzindo para valores absolutos, 9 alunos dos 16 participantes atingiram o que era esperado. A expectativa era que um número maior de alunos respondesse corretamente, entretanto, devemos salientar que a quantidade de alunos que acertou ficou acima da metade dos participantes.



Figura 11: frequência de acertos da 2ª questão

A última questão do teste já exigia um pouco mais dos alunos. Era necessário que o aluno assinalasse a alternativa que apresentava a equação da parábola mostrada na figura que acompanhava a questão. Na figura 12 temos a quarta questão do teste.

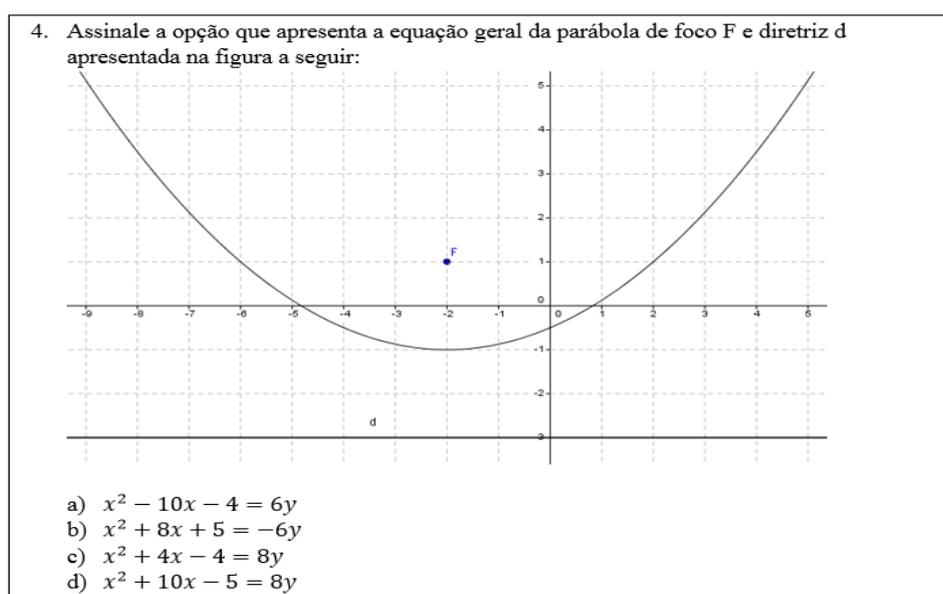


Figura 12: quarta questão do teste

Na quarta questão a quantidade de alunos que assinalou a resposta correta ficou abaixo de 50 % dos alunos. Conforme apresentado na figura 13, 37,5% marcou a alternativa correta. De acordo com o que foi apresentado, percebemos uma deficiência neste ponto, porém, em contraponto, temos o desempenho durante a atividade que se mostrou satisfatório. Ao tentar identificar as variáveis que contribuíram para esse resultado podemos mencionar que o tempo para desenvolver essa habilidade durante a atividade foi pouco, contudo, com o resultado da avaliação da atividade, foi possível corrigir essa falha na aprendizagem na continuação das aulas.

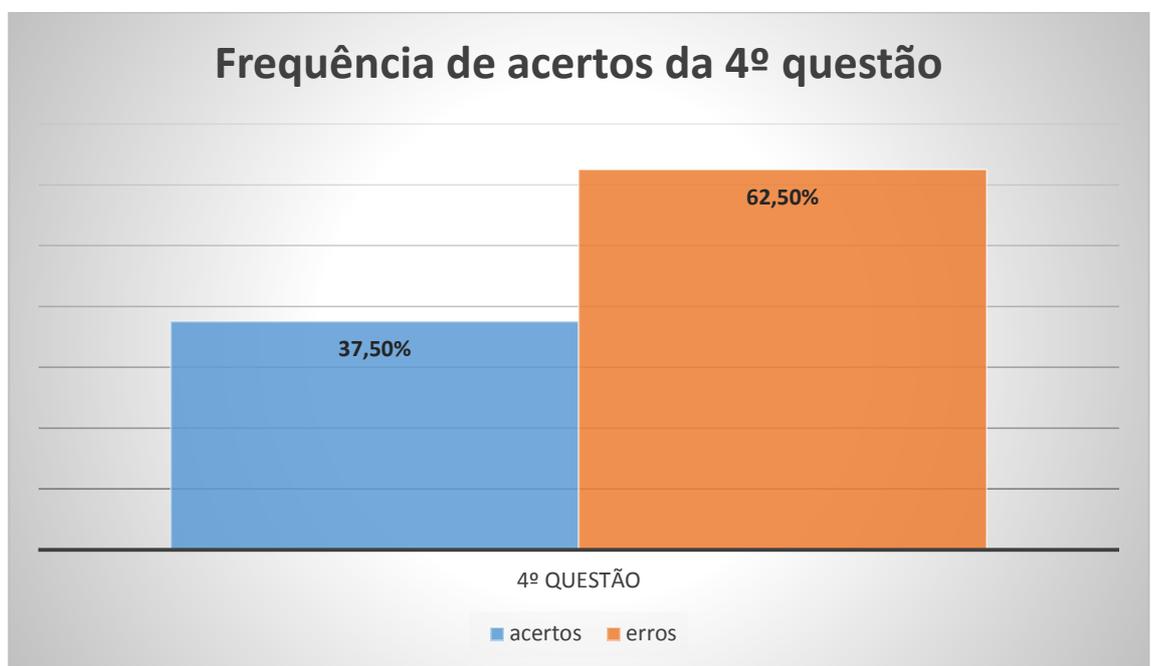


Figura 13: frequência de acertos da 4ª questão

Relacionado ao teste aplicado para verificação de aprendizagem, é possível observar a quantidade de acertos de cada aluno conforme mostrado na figura 14 a seguir.

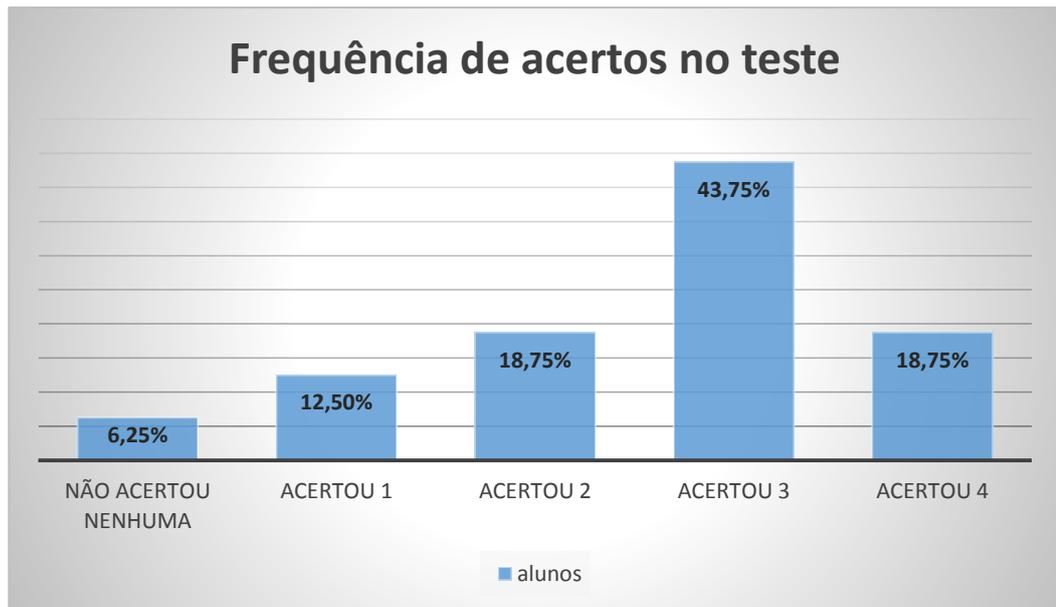


Figura 14: frequência de acertos

Observando o gráfico da figura 14 temos que 43,75% dos alunos acertou 3 questões e 18,75% acertou 4 questões, somando esses dois percentuais temos que 62,5% dos alunos acertou mais da metade das questões da prova e se analisarmos quantos alunos acertaram menos de duas questões, de acordo com a figura 14, temos um percentual de 18,75% dos alunos participantes.

## Considerações finais

Iniciamos o presente trabalho tendo como objetivo a construção de uma sequência didática para trabalharmos o conceito e a dedução da equação de parábola, presente no conteúdo de geometria analítica, para alunos do terceiro ano do ensino médio.

Para tanto buscamos o referencial bibliográfico na didática da matemática francesa, ou educação matemática, com o intuito de desenvolver uma sequência de ensino para trabalharmos o conceito de parábola e assim sendo, encontramos as teorias das situações didáticas, do contrato didático e da engenharia didática que nos forneceu uma metodologia de pesquisa.

Na teoria das situações didáticas encontramos uma forma de entender como o processo de ensino/aprendizagem pode ser articulado de tal modo que o conhecimento, de determinado conceito, possa ser construído pelo aluno. Ainda com a ajuda das situações didáticas, percebemos qual é o papel do professor nesse processo, vimos que, ainda que seja de uma forma menos intensa do que acontece no ensino tradicional, o docente não perde a sua importância dentro do processo pois, está incumbido de mediar o relacionamento do aluno com o conteúdo.

Com o contrato didático entendemos como o relacionamento entre os alunos e o professor pode ser regulado. Ao aprofundarmos nosso estudo relacionado ao contrato didático, verificamos que para cada postura adotada pelo professor, existe um conjunto de regras específico que deve ser adotado para regular aquela prática. Usando tal teoria, compreendemos a importância da exposição, durante uma atividade em sala de aula, das regras necessárias ao bom andamento do processo de ensino/aprendizagem

Deste modo, destacamos a importância das teorias apresentadas ao observarmos que elas nos apresentaram o direcionamento para a elaboração da atividade, ressaltamos a importância da engenharia didática para o nosso trabalho tendo em vista que essa teoria considera as teorias das situações didáticas e do contrato didático. Com ela conseguimos aplicar a sequência de ensino e analisar os resultados, deste modo, conseguimos atingir nosso primeiro objetivo específico com o apoio das teorias da didática da matemática.

Finalmente, falando da engenharia didática, salientamos sua importância para o planejamento da sequência didática. Ao passarmos pelas suas fases iniciais, conseguimos

enxergar os pontos que gostaríamos de atingir com a atividade e prever as dificuldades que poderíamos enfrentar no decorrer de sua aplicação. Deste modo, com o planejamento presente na metodologia da engenharia didática, conseguimos aplicar a atividade de uma maneira muito próxima como havíamos previsto.

Em se tratando da sequência de ensino, destacamos o bom desempenho dos alunos durante a implementação da experiência. De acordo com o exposto no trabalho, vimos que boa parte dos alunos conseguiu desenvolver o que foi proposto e ainda que houvessem dificuldades em lembrar de fórmulas, conseguiram aplica-las corretamente para a contemplação das etapas da sequência didática.

Vale destacar, dentro da atividade, o uso do programa Geogebra para o desenvolvimento da sequência de ensino. Com a ajuda do programa foi possível desenvolver a parte gráfica de uma maneira mais rápida do que seria se usássemos papel, a sua boa interface permite que os alunos tenham facilidade de explorar os recursos disponíveis para o desenvolvimento da atividade.

Ressalvamos a validade da experiência, tendo em vista que os conceitos abordados foram apontados por boa parte dos alunos no teste e durante o desenvolvimento da atividade. Durante a aplicação da sequência de ensino, observamos um impacto positivo relacionado à motivação dos alunos em participar da atividade. O retorno apresentado pelos alunos foi favorável, ouvimos relatos de que a aula foi mais interessante e que a aprendizagem foi mais agradável comparado aos outros conteúdos já trabalhados pelo método tradicional.

Nesse sentido, depreendemos que a sequência de ensino trouxe benefícios para o ensino usual de geometria analítica, no terceiro ano do ensino médio, uma vez que foi bem recebida pelos alunos e apresentou resultados satisfatórios, no que tange à formação do conceito de parábola.

Considerando a finalidade de otimizar a atividade desenvolvida, sugerimos a adição de mais um tempo de aula para a aplicação da mesma com o intuito de reforçar o trabalho com a equação da parábola pois, pelo que vimos nos resultados do teste, esse foi um ponto no qual os alunos tiveram um desempenho que não era esperado.

Seguindo no sentido de melhorar e ampliar a utilização da atividade, apontamos que a mesma atividade pode ser estendida para trabalhar o processo de

ensino/aprendizagem das outras cônicas e para circunferência, observando que a atividade está centrada na utilização da noção de lugar geométrico para a construção do conceito a ser trabalhado e partindo desse ponto, a equação algébrica é desenvolvida.

## Referências

- ALMOULOUD, Saddo Ag. A Teoria das Situações Didáticas. São Paulo: PUC-SP, 2004.
- ALMOULOUD, Saddo ag. Fundamentos da Didática da Matemática. Paraná: EDITORA UFPR. 2007, 216p.
- ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.
- ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine, MORENO, Luis. INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá, 1995.
- BOYER, Carl Benjamin. História da matemática: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo. ED. Da Universidade de São Paulo, 1974.
- BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 1. p. 35-113.
- BROUSSEAU, Guy. O não dito é essencial. Revista Nova Escola. Edição 264, 2013.
- CAMPOS, Edison de Farias. INGENIERÍA DIDÁCTICA. CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. 2006, Año 1, Número 2
- CANDAU, Vera Maria. (org.). A Didática em questão. Petrópolis: Vozes, 1983.
- CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia Didática: Um Referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. *ZETETIKÉ*, Campinas: v. 13, n. 23, p. 87-119, jan./jun., 2005.
- CURY, H. C. As Concepções De Matemática dos Professores De Matemática e Suas Formas De Considerar Os Erros Dos Alunos. 1994. 128 p. Tese (Doutorado em Educação) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul.
- DOUADY, Régine. Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M. 1996.
- FREITAS, José Luiz Magalhães. Teoria das Situações Didáticas. In: Educação Matemática: uma nova introdução. 3 ed. - São Paulo: EDUC, 2010. P. 77-112
- GÁLVEZ, G. A didática da matemática. In.: Parra, C. & Saiz, I (orgs.) Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre : Artes Médicas, 1996.

IGLIORI, Sonia Barbosa. A Noção de Obstáculo Epistemológico e a Educação Matemática. In: Educação Matemática: uma nova introdução. 3 ed. - São Paulo: EDUC, 2010. P. 113 – 142

MACHADO, Cláudia Rejane. TEORIAS DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: a influência dos franceses. Disponível em: [http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/pesquisa/CLAUDIA\\_FRANCESES.DO\\_C.pdf](http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/pesquisa/CLAUDIA_FRANCESES.DO_C.pdf). Acesso em 15/12/2016

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: Educação Matemática: uma nova introdução. 3 ed. - São Paulo: EDUC, 2010. P. 77-112

MELO, de A; URBANETZ, T. S. Fundamentos da didática. Curitiba: IBPEX, 2008.

MENEZES, M. B; LESSA, M. M. L; MENEZES, A. P. A. B. A Emergência de Fenômenos Didáticos em Sala de Aula: a Negociação de uma Sequência Didática em Álgebra Inicial. 2006. Disponível em: <[www.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema/](http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema/).pdf>. Acesso em 15/12 / 2016.

MOL, Rogério Santos. Introdução à história da matemática. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

PAIVA, Manoel. Matemática – 2ed. – São Paulo: Moderna, 2013

SILVA, Benedito Antonio da. Contrato Didático. In: Educação Matemática: uma nova introdução. 3 ed. - São Paulo: EDUC, 2010. P. 49-76

SILVA, Mônica de Oliveira Pinheiro da. “As Relações Didatico-Pedagogicas no Ensino de Geometria com o *Software Cabri Geometre*.” Curitiba, 2008.