

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

27 retas na superfície cúbica

João Raimundo Silva Ferreira

MANAUS - AM
JULHO DE 2017

Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

27 retas na superfície cúbica

por

João Raimundo Silva Ferreira

sob a orientação do

Prof. Dr. Dmitry Logachev

Manaus – AM
Julho de 2017

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo autor.

F383d Ferreira, João Raimundo Silva
27 retas na superfície cúbica / João Raimundo Silva Ferreira.
2017
82 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Dmitry Logachev
Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) -
Universidade Federal do Amazonas.

1. Retas no espaço. 2. Superfícies cúbicas. 3. Variedades
Grassmannianas. 4. Inchamentos de superfícies. I.
Logachev, Dmitry II. Universidade Federal do Amazonas III.
Título

27 retas na superfície cúbica

por

João Raimundo Silva Ferreira ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

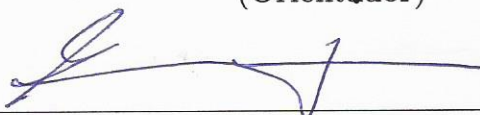
Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 10 de Julho de 2017.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Dmitry Logachev - UFAM
(Orientador)



Prof. Dr. Stefan Josef Ehbauer - UFAM
(Membro Interno)



Prof. Dr. Luis Enrique Ramirez - UFABC
(Membro Externo)

¹O autor foi bolsista da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas - FAPEAM durante a elaboração desta dissertação.

Dedicatória

Dedico à mulher da minha vida Sandra Fonseca e ao meu filho Gabriel Ferreira, de quem tenho muito orgulho, pelo apoio incondicional em todos os momentos, principalmente nos de incerteza, muito comuns para quem tenta trilhar novos caminhos.

Sem vocês nenhuma conquista valeria a pena.

Dedico, especialmente ao meu pai Pedro Barbosa (in memoriam), meu exemplo de homem digno e à minha mãe Olendina Ferreira, minha eterna protetora e também à todos os meus irmãos, que dignamente me apresentaram a importância da família e ao caminho da honestidade e persistência.

Dedico também aos amigos, pela paciência, incentivo e amizade.

Sem o apoio de todos, este trabalho não seria possível. A vocês eu dedico.

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus pelo dom da vida e que colocou em meu caminho este desafio, à minha mãe *Olendina Ferreira* por ter-nos ensinado que a educação é o melhor caminho para vencer e a nunca esmorecer diante das dificuldades, ao meu filho *Gabriel Ferreira* que é meu grande incentivador e agradeço aos demais familiares que estiveram presentes nesta empreitada.

Agradeço também aos meus professores que, sem dúvida, foram e são essenciais nessa minha empreitada: á professora *Pacheco* que me fez ler *Os Lusíadas*, de *Luís de Camões* no ensino básico, mostrando-me a importância da leitura; às professoras do ensino fundamental, *Lucilene Góes* e *Maria das Graças* por me apresentarem de forma viva e prazerosa a matemática, elas foram decisivas nessa minha escolha pela carreira de matemático; aos professores do ensino médio, em particular ao professor e amigo *Eduardo Façanha* o *Macaxeira* para os mais próximos; aos professores da graduação e especialização, *Erisson Galvão*, *Adauto Barros*, *Isabel Lobato*, *Edgar Bublitz*, *Francisco Eteval*, *Ana Acácia* e *Dr. Ivan Chaveco* que participaram de forma fundamental na minha base matemática, permitindo-me prosseguir os estudos no mestrado e também aos professores da pós graduação, *Dr. Alfredo Wagner*, *Dr. Stefan Ehbauer*, *Dr. Dmitry Logachev* (meu orientador) e ao *Dr. Roberto Cristóvão* (era para ser da otimização...rs); ao meu orientador *Dr. Dmitry Logachev* meu muito obrigado pela atenção e paciência na confecção desta dissertação. Finalizando a extensa lista de professores, meu sincero obrigado aos professores da banca examinadora *Dr. Dmitry Logachev*, *Dr. Stefan Ehbauer* e *Dr. Luis Enrique Ramirez* que tiveram a paciência de lerem e terem feitos valiosíssimas observações e correções à esta; não poderia deixar de fora deste, os secretários do DM/PPGM *Aristocles*, *Elclimar Alves* e *Arlene* a vocês eu agradeço.

Agora chegou a hora deles, aos vários amigos que me acompanharam nesta caminhada, aos amigos professores do ICET, *Lúcio Fábio* e *Marcos Aurélio* pelas dicas e ajudas nos momentos certos; aos amigos da turma do mestrado, *Márcia Sarraff* nossa mãezinha no ICE, *Daniele Alencar*, companheira de todas as horas, *Fernando Jr.*, *Teo Felipe*, *Alan Kardec*, *Rafael Arcos*, *Bruno Reis* e *Ayana Santana* (a turma do cabelo), com os quais compartilhei momentos de estudos, loucuras e devaneios matemáticos que, em algumas vezes, regadas por umas cervejinhas estupidamente gelada, por terem dedicado seu tempo, ora com álgebra, ora com apenas conversas livres e contagiantes, aos amigos do *Grupo Inigualável Galera*; em especial à *Allynne Bessa* (in memoriam), fundadora do *Grupo Celebração 2016*, pelas palavras de apoio, incentivo e conforto em momento crucias que precederam esta dissertação;Agradeço também aqueles que por uma razão ou outra tentaram dificultar minha caminhada meu muito obrigado (vocês me deixaram mais forte).

Por fim gostaria de agradecer à *FAPPEAM* pelo apoio financeiro, sem o qual não poderia realizar este trabalho.

A todos os demais que de uma forma ou de outra foram importantes nessa caminhada, meus sinceros agradecimentos e até breve.

Epígrafe

Índio - Boi Garantido - 1995

Eu sou um índio
Sou um índio guerreiro
Sou também feiticeiro
Mas eu não quero guerra
Quero a paz na terra
A selva pra caçar
E o rio pra pescar

Eu sou um índio
Pense nisso seu branco
Já tiraste o encanto
O esplendor da floresta
Quase nada me resta
Eu só quero viver
Ver meu filho crescer

Me deixe em paz seu moço
Ou eu fico louco
Respeite os limites pra manter minha
nação
Não preciso do seu saber
Por que isso me faz sofrer
Eu já tenho a beleza
Da mãe natureza pra sobreviver

Me deixe em paz seu moço
Ou eu fico louco
Respeite os limites pra manter minha
nação
Não preciso do seu saber
Por que isso me faz sofrer
Eu já tenho a beleza
Da mãe natureza pra sobreviver
Composição: Emerson Maia

Saga de Um Canoeiro - Boi Caprichoso - 1994

Vai um canoeiro, nos braços do rio,
Velho canoeiro, vai. Já vai canoeiro.

Vai um canoeiro, no murmúrio do rio,
No silêncio da mata, vai. Já vai canoeiro.

Já vai canoeiro, nas curvas que o remo dá. Já vai canoeiro.

Já vai canoeiro, no remanso da travessia. Já vai canoeiro.

Enfrenta o banzeiro nas ondas dos rios,
E das correntezas vai o desafio. Já vai canoeiro.

Da tua canoa, o teu pensamento:
"Apenas chegar", "apenas partir". Já vai canoeiro.

Teu corpo cansado de grandes viagens.
Já vai canoeiro.

Tuas mãos calejadas do remo a remar.
Já vai canoeiro.

Da tua canoa de tantas remadas. Já vai canoeiro.

O porto distante,
O teu descansar....

Eu sou, eu sou.
Sou, sou, sou, sou canoeiro. canoeiro,
vai!

Eu sou, eu sou.
Sou, sou, sou, sou canoeiro. canoeiro,
vai!

Composição: Ronaldo Barbosa

Resumo

Nesta dissertação é apresentada a ideia da prova do teorema que em uma superfície cúbica não singular em \mathbb{P}^3 contem 27 retas. Também, são mostrados como estas retas se intersectam, quais planos formam, quais são sêxtuplos das retas que não se cruzam (sêxtuplos de Schläefli) etc. Um exemplo explícito da superfície definida sobre \mathcal{Q} tal que todas suas retas são definidas sobre \mathcal{Q} é tratado. Finalmente, mostra-se que existe um isomorfismo entre uma superfície cúbica e um o plano inchado em 6 pontos. Isto é uma matéria clássica de pesquisa de século *XIX*, mas ela tem desenvolvimento até hoje. Como introdução, a dissertação contém a definição do espaço afim, espaço projetivo, seus subespaços, variedades Grassmannianas dos subespaços e especialmente a variedade $\mathbb{G}(2,4)$ das retas em \mathbb{P}^3 . Em seguida, a construção inicial de uma reta em \mathbb{P}^3 e \mathbb{P}^5 retas quais cruzam a ela é tratada. Mostra-se que existe uma e somente uma superfície cúbica que contem a estas 6 retas. Usando o teorema que 4 retas no espaço têm 2 retas secantes, é possível construir todas as 27 retas nesta superfície. Também, é achada sua matriz de intersecção. Isto nos dá soluções de vários problemas combinatórios relacionados com esta configuração das retas. Projeção da superfície de duas retas reversas permite mostrar que existe um isomorfismo entre a superfície e um o plano inchado em 6 pontos. Por sua vez, este isomorfismo permite obter mais facilmente a matriz da intersecção das retas. Finalmente, cálculos explícitos para uma configuração simples das 6 retas são feitos. Como um resultado, obtemos uma superfície tal que todas suas 27 retas têm coordenadas racionais.

Palavras-chave: Retas no espaço, superfícies cúbicas, variedades Grassmannianas, inchamentos de superfícies.

Abstract

In this dissertation we present the idea of proof of the theorem that on a non-singular cubic surface in \mathbb{P}^3 contains 27 straight lines. Also, they are shown as these lines intersect, Which planes form, which are sextuples of straight lines that do not intersect (Sextuplets of Schlaefli). An explicit example of the surface defined on \mathbb{Q} such that all its lines are defined on \mathbb{Q} is treated. Finally, it is shown that there is an isomorphism between a cubic surface and a 6-point swollen plane. This is a classic subject of nineteenth-century research, but it has development to this day. As an introduction, the dissertation contains the definition of the affine space, projective space, its subspaces, Grassmannian varieties of the subspaces and especially the $\mathbb{G}(2, 4)$ variety of the straight lines in \mathbb{P}^3 . Then the initial construction of a straight line at \mathbb{P}^3 and \mathbb{P}^5 which cross it is treated. It is shown that there is one and only one cubic surface containing these 6 lines. Using the theorem that 4 straight in space have 2 secant lines, it is possible to construct all 27 straight lines on this surface. Also, its intersection matrix is found. This gives us solutions to various combinatorial problems related to this configuration of the lines. Projection of the surface of two straight lines allows to show that there is an isomorphism between the surface and a plane swollen in 6 points. In his turn, this isomorphism makes it easier to obtain the matrix of the intersection of the lines. Finally, explicit calculations for a simple configuration of the 6 straight lines are made. As a result, we obtain a surface such that all its 27 straight lines have rational coordinates.

Keywords: Straight in space, Cubic surfaces, Grassmannian varieties, Surface swelling.

Lista de Figuras

1.1	Adição de Vetores	5
1.2	Cilindro	8
1.3	Função Racional	9
1.4	União e Interseção do Cone e da Esfera	12
1.5	Planos	14
2.1	Parábola ($y = x^2$, vermelho) e cúbica ($y = x^3$, azul) no espaço projetivo . .	17
2.2	Esfera S^2	20
2.3	Plano Projetivo Real	21
2.4	Plano Projetivo Real	21
2.5	A reta projetiva \mathbb{RP}^1 é homeomorfa a S^1	23
2.6	Uma representação gráfica do plano projetivo \mathbb{RP}^2	24
2.7	Projeção estereográfica	25
2.8	Cálculo em coordenadas da projeção estereográfica.	26
3.1	A quádrlica não singular de \mathbb{P}^3	61
3.2	O cone quádrlico de \mathbb{P}^3	61
3.3	Dois planos simples de \mathbb{P}^3	61
3.4	Um plano duplo de \mathbb{P}^3	62
3.5	A quádrlica suave de \mathbb{P}^3	63
4.1	A intersecção $\Pi \cap \mathcal{S}$	70
4.2	Os cinco pares de planos Π_i gerados por (L_i, L'_i)	70
4.3	Configuração da dezessete retas	72
4.4	Superfície Cúbica Diagonal de Clebsch	75

Sumário

Introdução	1
1 Espaços afins	4
1.1 Espaço afim associado a um espaço vetorial	4
1.2 Variedades Algébricas Afins	8
1.3 Produto de Variedades Afins	15
2 Espaços Projetivos	17
2.1 Variedades Algébricas Projetivas	18
2.1.1 Espaço projetivo \mathbb{P}^n	18
2.2 Variedades Projetivas	30
2.3 Produto de Variedades Afins	32
2.4 Teorema de Bézout: Um caso particular	35
3 Grassmannianas	37
3.1 Definição e primeiros exemplos	38
3.2 A Grassmanniana de Retas	39
3.3 Imersão de Plücker de $\mathbb{G}(k, n)$	47
3.3.1 Alguns exemplos	48
3.3.2 Subespaços Lineares da Grassmanniana de Retas	50
3.4 Variedades de Schubert	53
3.5 Ciclos de Schubert e anel de Chow	56
3.6 Cálculo de Schubert em $\mathbb{G}(1, n)$	59
3.7 Exemplos de curvas e superfícies em $\mathbb{G}(1, 3)$ e $\mathbb{G}(1, 5)$	60
3.8 A quádrlica suave de \mathbb{P}^5	61
4 As 27 retas de uma superfície cúbica	65
4.1 Considerações iniciais	65
4.1.1 Superfícies cúbicas singulares	67
4.2 As 27 retas	67
4.3 Aplicação	75
4.3.1 Superfície Cúbica de Clebsch	75
4.3.2 Superfície de Fermat	78
Referências Bibliográficas	81

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- ✓ R denota um anel algébrico;
- ✓ E^n denota um espaço vetorial de dimensão n ;
- ✓ \mathbb{C} denota o corpo dos números complexos;
- ✓ \mathbb{K} denota um corpo algébrico;
- ✓ \mathbb{A}^n denota um espaço afim de dimensão n ;
- ✓ \mathcal{X} denota uma variedade;
- ✓ \mathbb{P}^n denota um espaço projetivo de dimensão n ;
- ✓ L denota uma reta em \mathbb{P}^n ;
- ✓ l denota um ponto $\mathbb{G}(k, n)$;
- ✓ $\mathbb{G}(k, n)$ denota a Grassmanniana de k -planos em E ;
- ✓ $\Omega(E_1, \dots, E_k) = W_{a_1 \dots a_k}$ denota a Variedade de Schoubert;
- ✓ \mathcal{Q} denota uma quádrlica suave em \mathbb{P}^3 ;
- ✓ $\deg(F)$ denota o grau do polinômio F .

Introdução

A geometria algébrica atua classificando os zeros de polinômios multivariados, moderadamente ela se baseia em no uso de técnicas algébricas abstratas valendo-se principalmente da álgebra comutativa para resolver problemas geométricos sobre esses conjuntos de zeros. Os objetos fundamentais de estudo em geometria algébrica são variedades algébricas, que são manifestações geométricas de soluções de sistemas de equações polinomiais e alguns exemplos das classes mais estudadas de variedades algébricas são: *curvas algébricas planas* que incluem retas, círculos, parábolas, elipses e hipérbolas; *curvas cúbicas* tais como as curvas elípticas e *curvas quárticas* tais como as lemniscatas e ovais de Cassini, assim temos que um ponto do plano pertence a uma curva algébrica se suas coordenadas satisfizerem uma determinada equação polinomial. As questões básicas envolvem o estudo dos pontos de especial interesse, como os pontos singulares, os pontos de inflexão e os pontos no infinito. Esta área do conhecimento ocupa um lugar central na matemática moderna e tem múltiplas conexões conceituais com campos tão diversos como análise complexa, topologia e teoria dos números. Inicialmente, um estudo de sistemas de equações polinomiais em várias variáveis, o sujeito da geometria algébrica começa onde a resolução da equação termina e torna-se ainda mais importante compreender as propriedades intrínsecas da totalidade das soluções de um sistema de equações do que encontrar uma solução específica, isso leva a algumas das áreas mais profundas em toda a matemática, tanto conceitualmente como em termos de técnica e neste aspecto podemos citar dois atuantes precursores neste campo do conhecimento: *Arthur Cayley*, advogado, professor e um dos nomes mais relevantes da matemática inglesa no século XIX, cujas teorias matemáticas proporcionaram a formulação das teoria da relatividade de Einstein e da mecânica quântica de Max Planck. Estudou no King's College de Londres e no Trinity College de Cambridge, onde se destacou como um brilhante estudante e no qual foi professor por três anos. Desde cedo começou a publicar trabalhos no recém-fundado Cambridge Mathematical Journal e ganhou a maioria dos prêmios de sua época. Apesar de seu interesse pela matemática, decidiu estudar direito. Sem abandonar suas pesquisas e a publicação de ensaios científicos, exerceu a advocacia durante 14 anos (1849-1863). Foi nomeado catedrático de matemática pura em Cambridge (1863) e encerrou a carreira de jurista, dedicando-se exclusivamente a matemática iniciando pelo algebrismo, sendo considerado um dos fundadores da álgebra moderna, pois formulou de modo rigoroso, a definição de grupo e desenvolveu trabalhos importantes sobre a teoria dos invariantes, juntamente com seu amigo *J. J. Sylvester*, e logo depois na geometria dos hiperespaços. Trabalhou nos Estados Unidos e publicou numerosos trabalhos sobre, principalmente, geometria e álgebra. Também contribuiu para a análise quando publicou seu único livro, *An Elementary Treatise on Elliptic Functions (1876)*. Escreveu cerca de mil trabalhos breves, contendo

seus artigos publicados nas várias revistas especializadas da Europa e dos Estados Unidos, reunidos nos 13 volumes de *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley (1889-1897)*. Foram destaques no conjunto da obra o desenvolvimento da teoria da invariância algébrica e a ideia da unidade das geometrias euclidiana e não-euclidiana. Sua geometria, aplicável a espaços com qualquer número de dimensões, foi fundamental para o estabelecimento da relação espaço-tempo na teoria da relatividade. Deve-se ao matemático a formulação das regras do cálculo matricial, usado posteriormente por *Werner Heisenberg* em seus trabalhos sobre mecânica quântica. Também realizou estudos nos campos da física astronômica e da dinâmica teórica e morreu em Cambridge, em 26 de janeiro (1895) e *George Salmon* foi um matemático irlandês graduou-se no Trinity College Dublin em 1839 com honras muito altas em matemática, e em 1841 aos 21 anos, obteve uma bolsa de estudos e uma posição de professor em matemática no mesmo, onde permaneceu para o resto de sua carreira. No final dos anos 1840 e 1850, Salmon estava em comunicação regular e frequente com *Arthur Cayley* e *J.J. Sylvester*, juntamente com um pequeno número de outros matemáticos (inclusive *Charles Hermite*), estavam desenvolvendo um sistema para lidar com álgebra e geometria n-dimensional. Durante este período, Salmon publicou cerca de 36 artigos em revistas, nos quais em sua maior parte, resolveu problemas concretos em geometria algébrica, em oposição a questões mais amplamente sistemáticas ou fundamentais. Mas ele foi um dos primeiros a adotar as inovações fundamentais de Cayley e de outros matemáticos emergentes. Em 1859, ele publicou o livro *Lessons introductory to the modern higher algebra First edition (1859)* (onde a palavra "superior"significa n-dimensional), foi por um tempo simultaneamente, o estado-da-arte e a apresentação padrão do assunto e passou por edições atualizadas e expandidas em 1866, 1876 e 1885, e foi traduzido para alemão e francês. Enquanto isso, em 1848, o Salmon publicou um livro de estudos de graduação intitulado *A treatise on conic sections (1848)*, este texto permaneceu impresso por mais de cinquenta anos, passando cinco edições atualizadas em inglês, e foi traduzido para alemão, francês e italiano. O próprio Salmon não participou das expansões e atualizações das edições mais posteriores. A versão alemã, que era uma "adaptação gratuita"de Wilhelm Fiedler, era popular como um texto de graduação na Alemanha. Salmon também publicou dois outros textos de matemática, *A treatise on higher plane curves: Intended as a sequel to a treatise on conic sections (1852)* e *A treatise on the analytic geometry of three dimensions (1862); 5th edition (1895)* estes também foram impressos por um longo período de tempo e passaram por várias edições posteriores, com Salmon delegando o trabalho das edições posteriores para outros. Em 1858, ele recebeu a *The Cunningham Medal is the Academy?s*. Em junho de 1863 ele foi eleito membro da Sociedade Real seguido em 1868 pelo prêmio de sua Medalha Real "Por suas pesquisas em geometria analítica e na teoria das superfícies". Em 1889, Salmon recebeu a *Copley Medal - The Royal Society*, o mais alto prêmio honorário da ciência britânica, mas naquela época perdeu seu interesse pela matemática e a ciência. Estes são os atores principais que nortearam nossos estudos acerca do problema das 27 retas sobre uma superfície cúbica, a qual é uma superfície algébrica é da forma $f(x, y, z) = 0$, onde $f(x, y, z)$ é um polinômio em x, y e z . A ordem da superfície é o grau do polinômio: uma superfície de ordem "um"é um plano; uma superfície de ordem dois é chamada superfície quádrada e é constituída por superfícies como elipses e hiperboloides, estes incluem cones, cilindros e paraboloides e a superfície cuja história nos interessa para esta dissertação é uma superfície de grau três em quatro variáveis que é chamada de superfície cúbica, em 1849 Cayley e Salmon publicaram os resultados de sua correspondência com o número de retas em uma superfície cúbica, foi Cayley que, em uma carta ao Salmon , mostrou

pela primeira vez que poderia haver apenas um número finito de retas em uma superfície cúbica e logo depois Salmon mostrou que havia exatamente 27 dessas retas em uma superfície cúbica geral. No final de 1865, seu *A treatise on the analytic geometry of three dimensions (1862)* Salmon descreveu como os dois haviam colaborado ao longo encontrar o *Teorema de Cayley - Salmon*.

Assim, nesta dissertação iremos fazer uma descrição de *O problema das 27 Retas* e dar uma ideia de sua demonstração, e para que o nosso proposito seja alcançado iremos necessitar de conhecimentos prévios de: anel, que aqui será considerado anel comutativo e com unidade 1; homomorfismos de anéis que mandam 1 em 1; de domínio, que significa anel com $1 \neq 0$ e sem divisores de zero, i.é., $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$ e corpo que é um domínio em que $\forall x \neq 0, \exists y$ tal que $xy = 1$, todo domínio R está contido em seu corpo de frações, $\mathbb{K} = Fr(R)$, como por exemplo, onde, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, onde o corpo de frações é caracterizado pela propriedade de que, para todo homomorfismo injetivo $\varphi : R \rightarrow L$, existe uma única extensão a um homomorfismo $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow L$. Os tipos de anéis mais importantes que iremos considerar aqui neste trabalho são: o anel de polinômios, $R[X]$ com coeficientes no anel R , na variável X e o anel $R[X_1, \dots, X_n]$, em n variáveis, por questão de simplicidade quando estivermos considerando $n = 2$ ou $n = 3$ escreveremos simplesmente $R[X, Y]$ ou $R[X, Y, Z]$ respectivamente, lembremos que todo elemento $f \in R[X_1, \dots, X_n]$ se escreve de forma única como combinação linear de monômios, $F = \sum_{i=1}^n a_i X^i$, onde $i = i_1, \dots, i_n$, denota um multi-índice e $X^i = X^{i_1} \dots X^{i_n}$. O grau desse monômio é $|i| = i_1 + \dots + i_n$. O grau "deg(F)" de um polinômio F é o maior dos graus de seus monômios X^i (com $a_i \neq 0$) e dizemos que o polinômio F é homogêneo quando todos os seus monômios são do mesmo grau. Polinômios homogêneos são também denominados formas. Para alcançar os nossos objetivos, esta dissertação está dividido quatro capítulos que são eles: No *Capítulo 1* e *2* é realizado o estudo dos espaços afins e projetivos com os principais resultados e uma grande quantidade de exemplos explícitos; O *Capítulo 3* é dedicado aos principais resultados de geometria algébrica no que se refere a Grassmanniana, com exemplos iniciais e Grassmannianas de retas, seguindo mostrando a imersão de Plücker de $\mathbb{G}(k, n)$ e vários exemplos, seguido das variedades de Schoubert e definindo os seus Ciclos e os Ciclos de Chaw, com exemplos claros de curvas e superfícies em $\mathbb{G}(1, 3)$ e $\mathbb{G}(1, 5)$ e este culmina com a exploração da quádrlica Suave \mathcal{Q} de \mathbb{P}^3 e finalizamos no *Capítulo 4*, realizaremos a prova do nosso principal resultado.

Capítulo 1

Espaços afins

O nosso primeiro passo aqui é fazendo considerações acerca do corpo \mathbb{K} e na geometria algébrica clássica, este corpo sempre foi o conjunto dos números complexos \mathbb{C} , mas muitos dos mesmos resultados são verdadeiros se assumimos apenas que \mathbb{K} seja algebricamente fechado, assim se considerarmos o espaço afim de dimensão n sobre \mathbb{K} , denotado $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ (ou mais simplesmente \mathbb{A}^n , quando \mathbb{K} é claro a partir do contexto e não houver risco de confusão). Quando se corrige um sistema de coordenadas, pode-se identificar $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ com \mathbb{K}^n e o objetivo de não trabalhar com \mathbb{K}^n é enfatizar aquele "esquecer" a estrutura do espaço vetorial que \mathbb{K}^n carrega.

1.1 Espaço afim associado a um espaço vetorial

Preliminares

Agora iremos apresentar de forma sucinta o espaço afim onde iremos definir e apresentar algumas proposições e teoremas e alguns deles sem demonstrá-los. Considera E um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} .

Definição 1.1. Um conjunto $\mathcal{A} \neq \emptyset$ é um espaço afim associado a E se existir uma aplicação

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow E \\ (P, Q) &\mapsto \overline{PQ} (:= \varphi(P, Q))\end{aligned}$$

verificando os seguintes axiomas:

- i) Para todo ponto $P \in \mathcal{A}$ e para todo vetor $v \in E$, existe um e um somente um elemento Q em \mathcal{A} tal que $\overline{PQ} = v$;
- ii) Para todos os elementos P, Q e $R \in \mathcal{A}$

$$\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$$

(ou seja $(\overline{PQ} + \overline{QR}) = \varphi(PR)$)

Nomenclatura

Se \mathcal{A} é um espaço afim dá-se o nome de *ponto* aos elementos de \mathcal{A} . Os pontos são usualmente indicados por letras maiúsculas do alfabeto latino. Dados dois pontos P, Q de \mathcal{A} , dizemos que o vetor \overline{PQ} é o vetor com origem em P e extremidade em Q .

Notação

Dado um ponto P de um espaço afim \mathcal{A} associado ao espaço vetorial E e um vetor v de E , usa-se a notação simbólica $P + v$ para indicar o único ponto Q tal que $\overline{PQ} = v$.

Dados dois pontos $P, Q \in \mathcal{A}$, indica-se o vetor \overline{PQ} pela notação simbólica $Q - P$.

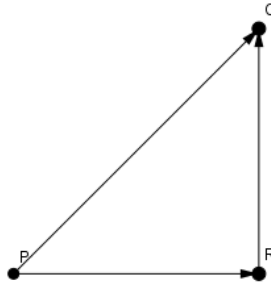


Figura 1.1: Adição de Vetores

Propriedades imediatas

Sendo \mathcal{A} um espaço afim (associado ao espaço vetorial E), P, Q pontos de \mathcal{A} , então:

- i) $\overline{PP} = 0_v$ que é o vetor nulo, cuja origem e extremidade ocorre em um único ponto;
- ii) $\overline{PQ} = -\overline{QP}$ que é o vetor simétrico, cujo vetor \overline{PQ} com origem em P e extremidade em Q e o seu simétrico com origem em Q e extremidade em P ;
- iii) Para qualquer ponto P de um espaço afim \mathcal{A} associado ao espaço vetorial E e para quaisquer dois vetores u, v de E tem-se

$$P + (u + v) = (P + u) + v$$

Estrutura de espaço afim de um espaço vetorial

Qualquer espaço vetorial E tem uma estrutura natural de espaço afim dada pela aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\rightarrow E \\ (a, b) &\mapsto b - a \end{aligned}$$

Em particular, o espaço vetorial $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{K}\}$ tem uma estrutura natural de espaço afim ao qual se dá o nome de *estrutura canônica* (ou natural) de \mathbb{K}^n . Esta estrutura denota-se por vezes por $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ ou simplesmente por \mathbb{A}^n que adotaremos neste trabalho. Os elementos de \mathbb{A}^n são chamados de pontos, assim temos que \mathbb{A}^1 é a reta afim, \mathbb{A}^2 o plano afim, \mathbb{A}^3 o espaço afim.

Subespaços afins

Sendo \mathcal{A} um espaço afim associado ao espaço vetorial E , um subconjunto \mathcal{F} de \mathcal{A} é um subespaço afim se

$$\mathcal{F} = P + W := \{P + w; w \in W\}$$

onde P é um ponto de \mathcal{A} e $W \subseteq E$ é um subespaço vetorial.

O subespaço vetorial W chama-se o subespaço (ou espaço) de direções (ou direção) de \mathcal{F} . Se $\mathcal{F} = P + W$ diz-se que \mathcal{F} é o subespaço afim que passa por P com direção W . Se \mathcal{A} é um subespaço afim de \mathcal{A} e assim um ponto P é um subespaço afim de \mathcal{A} associado ao espaço vetorial zero.

Propriedades

Seja $\mathcal{F} = P_0 + W$ um subespaço afim do espaço afim \mathcal{A} . Então:

- i) \mathcal{F} é um espaço afim associado ao espaço vetorial W ;
- ii) Para qualquer ponto $Q \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = Q + W$;
- iii) $W = \{\overline{PQ}; P, Q \in \mathcal{F}\}$ (ou seja o subespaço W fica unicamente determinado por \mathcal{F}).

Dimensão

Definição 1.2. Sendo \mathcal{A} um espaço afim associado ao espaço vetorial V , a dimensão de \mathcal{A} é a dimensão de V como espaço vetorial. Em particular, se $\mathcal{F} = P + W$ é um subespaço afim de \mathcal{A} , a dimensão de \mathcal{F} é a dimensão de W .

- i) Um espaço (ou subespaço) afim de dimensão 1 é uma reta;
- ii) Um espaço (ou subespaço) afim de dimensão 2 é um plano;
- iii) Um espaço (ou subespaço) afim de dimensão k é um k -plano.

Codimensão

Definição 1.3. Seja \mathcal{A} um espaço afim de dimensão finita n e \mathcal{F} um subespaço afim de \mathcal{A} de dimensão k . A codimensão de \mathcal{F} é o número $n - k$. Um subespaço afim H de codimensão 1 é um hiperplano.

Observação 1.1. A noção de codimensão é relativa, a dimensão de um hiperplano de \mathcal{A} e a codimensão de um k -plano de \mathcal{A} dependem da dimensão de \mathcal{A} . Por exemplo:

- i) se \mathcal{A} tem dimensão 2 (\mathcal{A} é o espaço afim real \mathbb{R}^2) os hiperplanos de \mathcal{A} são retas;
- ii) se \mathcal{A} tem dimensão 3 (\mathcal{A} é o espaço afim real \mathbb{R}^3) o hiperplanos de \mathcal{A} tem dimensão 2 (ou seja é um plano);
- iii) uma reta em \mathbb{R}^8 tem codimensão 7 enquanto que uma reta em \mathbb{R}^2 tem codimensão 1;
- iv) um 3-plano do espaço afim complexo \mathbb{C}^5 tem codimensão 2.

Paralelismo

Definição 1.4. Seja \mathcal{A} um espaço afim e

$$\mathcal{F} = P + U, \mathcal{G} = Q + W$$

dois subespaços afins de \mathcal{A} , os subespaços afins \mathcal{F} e \mathcal{G} são paralelos se

$$U \subseteq W \text{ ou } W \subseteq U$$

Em outras palavras \mathcal{F} e \mathcal{G} são paralelos se o subespaço vetorial de direções de um dos subespaços afins estiver contido no subespaço de direções do outro subespaço afim.

Observação 1.2. *Note que:*

- i) *Um subespaço é sempre paralelo a si mesmo;*
- ii) *Se $\mathcal{F} = P + U, \mathcal{G} = Q + W$ têm mesma dimensão k , então \mathcal{F} e \mathcal{G} são paralelos se e somente se $U = W$.*

Teorema 1.1. *Se dois subespaços afins de um mesmo espaço afim são paralelos, ou têm intersecção vazia ou um deles está contido no outro. Em particular, dois subespaços afins associados ao mesmo subespaço vetorial, ou são disjuntos ou são iguais.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{F} = P + U$ e $\mathcal{G} = Q + W$ dois subespaços afins paralelos do espaço afim \mathcal{A} . Temos que se dados os subespaços U e W de \mathcal{A} , por definição que de paralelismo entre subespaços afins que $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $U \subseteq W$. Se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, existe um ponto $R \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, pelo que $\mathcal{F} = R + U$ e $\mathcal{G} = R + W$. Concluimos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, com igualdade se $U = W$. □

Consequências

- i) Duas retas distintas paralelas não se intersectam;
- ii) Uma reta paralela a um plano ou não encontra o plano ou está contida nele;
- iii) Dois hiperplanos diferentes e paralelos não se intersectam;
- iv) Se duas retas paralelas se encontram então são coincidentes.

Intersecção de subespaços afins

Teorema 1.2. *Sejam $\mathcal{F} = P + U, \mathcal{G} = Q + W$ dois subespaços afins do espaço afim \mathcal{A} . Então, ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ é um subespaço afim. Mais precisamente se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ e R é um ponto de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, então*

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = R + (U \cap W).$$

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ e consideremos um ponto $R \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Podemos escrever então $\mathcal{F} = R + U$ e $\mathcal{G} = R + W$.

Um ponto $X \in R + (U \cap W)$ pertence obviamente a $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, donde $R + (U \cap W) \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Reciprocamente, se um ponto X está simultaneamente em \mathcal{F} e em \mathcal{G} , temos que, necessariamente, o vetor \overrightarrow{RX} pertence a ambos os espaços vetoriais U e W , donde

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = R + (U \cap W)$$

Concluimos então que se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, então

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = R + (U \cap W).$$

□

Generalizando

Teorema 1.3. *A intersecção de subespaços afins ou é vazia ou é um subespaço afim. Mais precisamente se $B_\alpha = P_\alpha + U_\alpha; \alpha \in I$ é uma família de subespaços afins associados aos subespaços vetoriais U_α (respectivamente), então ou*

i) $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \emptyset$ ou

ii) $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$ é um subespaço afim associado ao subespaço vetorial $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$

Note que se $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \neq \emptyset$, temos $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = R + \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$ onde R é qualquer ponto de $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$

Teorema 1.4. *Sejam $\mathcal{F} = P + U, \mathcal{G} = Q + W$ dois subespaços afins do espaço afim \mathcal{A} . Então $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ se, e somente se o vetor \overrightarrow{PQ} pertence ao subespaço vetorial $U + W$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ e seja R um ponto de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Então, como $R \in \mathcal{F}$, o vetor $\overrightarrow{PR} \in U$. Analogamente o vetor $\overrightarrow{RQ} \in W$. Como, pelo segundo axioma de espaço afim, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$ conclui-se que $\overrightarrow{PQ} \in U + W$. Assim provamos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in U + W$.

Suponhamos agora que $\overrightarrow{PQ} \in U + W$. Então existe um vetor $u \in U$ e existe um vetor $w \in W$ tais que $\overrightarrow{PQ} = u + w$. Por definição de \mathcal{F} e de \mathcal{G} , o ponto $P + u \in \mathcal{F}$ e o ponto $Q - w \in \mathcal{G}$. Temos

$$P + u = P + (\overrightarrow{PQ} - w) = (P + \overrightarrow{PQ}) - w = Q - w$$

Como $P + u = P + (\overrightarrow{PQ} - w) = (P + \overrightarrow{PQ}) - w = Q - w$, conclui-se que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. \square

1.2 Variedades Algébricas Afins

Os objetos geométricos mais simples estudados em geometria algébrica são os subconjuntos de espaços afins definidos por uma ou mais equações polinomiais. Por exemplo em \mathbb{R}^3 , considere o conjunto (x, y, z) satisfazendo a equação $x^2 + z^2 - 1 = 0$ que é um cilindro circular de raio 1 ao longo do eixo y , Figura 1.2.

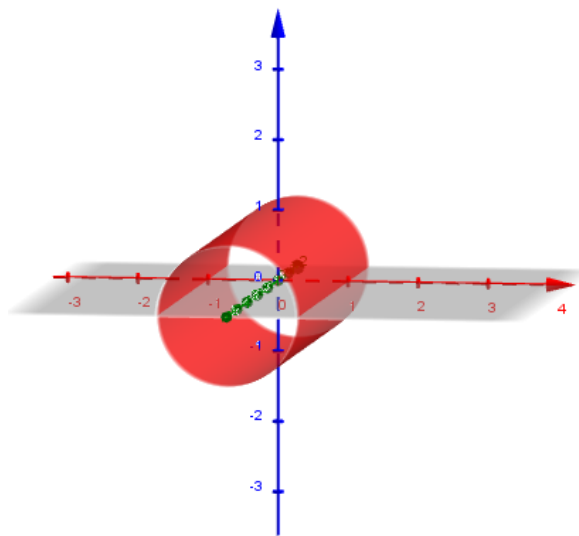


Figura 1.2: Cilindro

Mais geralmente, podemos considerar soluções simultâneas de um sistema de equações polinomiais.

Conjuntos algébricos

Definição 1.5. Uma variedade afim é um subconjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{C}^n$ definido por um sistema de equações polinomiais,

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{C}^n; f(x) = 0, \forall f \in S\}$$

dizemos também que é um conjunto algébrico afim

Definição 1.6 (Equivalentemente). O conjunto de todas as soluções simultâneas $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ de um sistema de equações polinomiais:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_s(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

é conhecida como a variedade afim definida por f_1, \dots, f_s , e é denotada por $\mathcal{X} = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)$. Um subconjunto $\mathbb{V} \subset \mathbb{K}^n$ é uma variedade afim se $\mathbb{V} = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)$ para alguma coleção de polinômios $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Se f é um polinômio não constante, dizemos que $\mathbb{V}(f)$ é uma *hipersuperfície*, as cônicas: *parábolas*, *elipses* e *hipérboles*, são exemplos de variedades afins. Gráficos de funções polinomiais e de funções racionais também são exemplos de variedades afins. Note que se $y = f(x)$, ($f(x)$ sendo um polinômio) então o gráfico de f é dado por $\mathbb{V}(y - f(x))$.

Exemplo 1. O gráfico da função racional, Figura 1.3.

$$y = \frac{1}{x-1} \text{ é } \mathbb{V}(yx - y - 1),$$

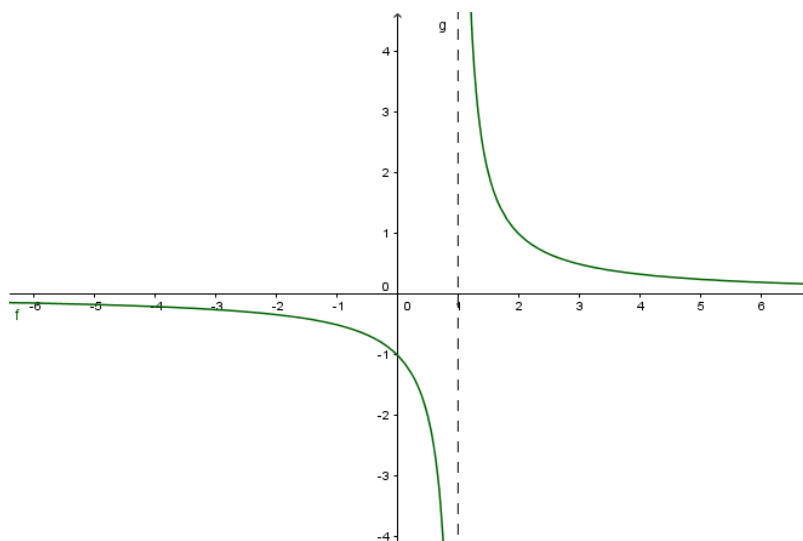


Figura 1.3: Função Racional

Observação 1.3. *Uma demonstração para estas afirmações pode ser encontrada em [17].*

i) *Interseção finita de variedades afins é uma variedade afim, pois se $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, então*

$$\mathbb{V}(I) = \bigcap_{i=1}^s \mathbb{V}(f_i) = \bigcap_{F \in I} \mathbb{V}(F)$$

ii) *União finita de variedades afins também é uma variedade afim, pois*

$$\mathbb{V}(f \cdot g) = \mathbb{V}(f) \cup \mathbb{V}(g),$$

para quaisquer polinômios f e g .

Temos que o *Teorema da base de Hilbert* estabelece que todo ideal no anel de polinômios em várias variáveis sobre um anel noetheriano¹ é finitamente gerado. Isto pode ser traduzido para o contexto da geometria algébrica da seguinte maneira: *todo conjunto algébrico sobre um corpo pode ser descrito como o conjunto das raízes comuns a uma quantidade finita de equações polinomiais*. O teorema recebe o nome em homenagem ao matemático alemão David Hilbert, que o demonstrou em 1888 que formalizando temos:

Teorema 1.5 (Teorema da base de Hilbert). *Todo ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é finitamente gerado.*

Demonstração. Logo, escrevendo $\langle S \rangle = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, concluímos que $\mathbb{V}(S) = \bigcap_i \mathbb{V}(f_i)$, intersecção finita de hipersuperfícies. \square

Ideal de um subconjunto

Se $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{C}^n$, definimos $\mathcal{I}(\mathcal{X}) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]; f(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X}\}$. Trata-se de um ideal radical, i.e., para cada $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, se existir um inteiro k tal que $f^k \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$, segue $f \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$. Temos evidentemente que $\mathbb{V}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) \supseteq \mathcal{X}$.

Proposição 1.6. *Se $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{C}^n$ é algébrico, então $\mathbb{V}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \mathcal{X}$.*

Demonstração. Se $\mathcal{X} = \mathbb{V}(\mathcal{I})$, vale $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{X})$. Daí é imediato que $\mathbb{V}(\mathcal{I}) \supseteq \mathbb{V}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. \square

Proposição 1.7. *Se \mathcal{X} é um subconjunto de \mathbb{A}^n então $\mathcal{X} = Z(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$.*

A topologia de Zariski

Os objetos principais da Geometria Algébrica são as variedades algébricas, i.e., objetos geométricos (variedades) definidas por polinômios (algébricas).

Considere \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado e \mathbb{A}^n o espaço afim n-dimensional sobre \mathbb{K} . Vamos imbuir \mathbb{A}^n de uma topologia.

Considere o anel de polinômios $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ nas variáveis X_1, \dots, X_n com coeficientes em \mathbb{K} .

Seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ um subconjunto. Denotamos por

$$Z(\mathcal{S}) := \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0; \forall f \in \mathcal{S}\}$$

o conjunto de zeros de \mathcal{S} .

¹Um anel noetheriano é um anel comutativo que satisfaz a condição da cadeia ascendente para ideais. O termo noetheriano é uma homenagem à matemática alemã Emmy Noether

Lema 1.8. *Temos que*

- i) $Z(\{0\}) = \mathbb{A}^n$ e $Z(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]) = \emptyset$;
- ii) Se \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 são subconjuntos de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ com $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$, então $Z(\mathcal{S}_2) \subset Z(\mathcal{S}_1)$;
- iii) Dada uma família \mathcal{S}_i de subconjuntos de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, então $\bigcap_i Z(\mathcal{S}_i) = Z(\bigcup_i \mathcal{S}_i)$;
- iv) Se \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 são subconjuntos de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, então $Z(\mathcal{S}_1) \cup Z(\mathcal{S}_2) = Z(\mathcal{S})$ onde $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 := \{f_1 \cdot f_2 \mid f_i \in \mathcal{S}_i; i = 1, 2\}$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5] □

Definição 1.7. *Dizemos que um subconjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^n$ de fechado se $\mathcal{X} = Z(\mathcal{S})$ para algum $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Assim, um subconjunto aberto de \mathbb{A}^n é o complementar de um fechado.*

Corolário 1.9. *Os subconjuntos abertos de \mathbb{A}^n formam uma topologia chamada topologia de Zariski.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5] □

Proposição 1.10. *Todo subconjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^n$ se escreve de forma única como união finita*

$$\mathcal{X} = \mathcal{W}_1 \cup \dots \cup \mathcal{W}_k$$

onde \mathcal{W}_i é um fechado irredutível de \mathcal{X} para cada i e $\mathcal{W}_i \not\subset \mathcal{W}_j$ se $i \neq j$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5] □

A coleção dos subconjuntos algébricos de \mathbb{C}^n satisfaz o axioma de coleção dos subconjuntos fechados de uma topologia, chamada a topologia de Zariski:

- i) \emptyset, \mathbb{C}^n são algébricos;
- ii) $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m \subset \mathbb{C}^n$ algébricos $\Rightarrow \mathcal{X}_1 \cup \dots \cup \mathcal{X}_m$ algébrico;
- iii) \mathcal{X}_α algébrico $\forall \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_\alpha \mathcal{X}_\alpha$ algébrico.

Se $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$ é um subconjunto, convencionaremos considerá-lo como subespaço topológico com a topologia de Zariski induzida.

Exemplo 2. *Considere o cone*

$$\mathbb{V}((z-2)^2 - x^2 - y^2) \subset \mathbb{R}^3$$

e a esfera

$$\mathbb{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 4) \subset \mathbb{R}^3$$

Calcular a intersecção e a união destas duas variedades afins, assim temos:

Na Intersecção temos

$$\mathbb{V}((z-2)^2 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2 - 4)$$

1. Espaços afins

Note que na intersecção da esfera e o cone, na Figura 1.4 (parte real) vemos uma circunferência e um ponto isolado, que são os pontos em comum nas duas variedades afins.

$$\mathbb{V}((z-2)^2 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2 - 4) = \mathbb{V}((z-2)^2 - x^2 - y^2) \cap \mathbb{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$$

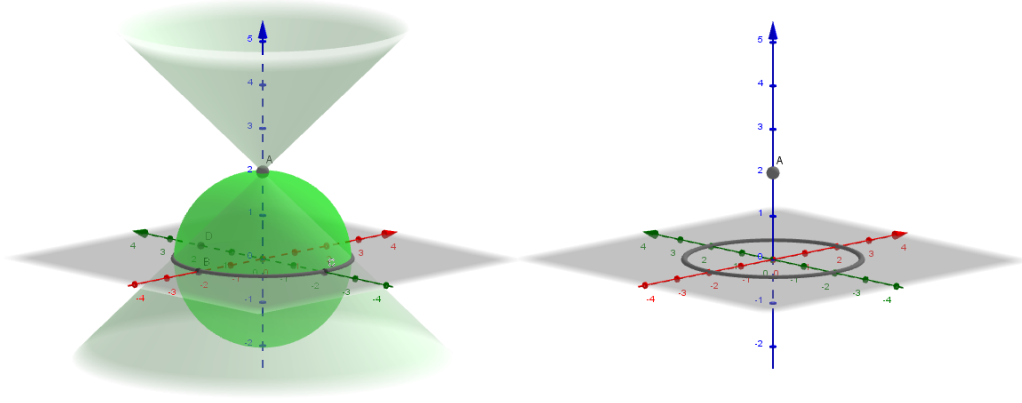


Figura 1.4: União e Intersecção do Cone e da Esfera

Considerando agora o seguinte sistema S para obtermos (cone \cap esfera):

$$S = \begin{cases} (z-2)^2 - x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

resolvendo o sistema obtemos $z = 0$ ou $z = 2$, no plano $z = 0$, temos a circunferência dada por $x^2 + y^2 = 4$ e no plano $z = 2$, temos $x^2 + y^2 = 0$, que é o ponto $(0, 0, 2)$ (caso real) ou duas retas $(x + iy)(x - iy)$ contida no plano $z = 2$ (caso complexo).

Com relação a união temos que

$$\mathbb{V}(((z-2)^2 - x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 4)) = \mathbb{V}((z-2)^2 - x^2 - y^2) \cup \mathbb{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 4).$$

Temos as variedades afins triviais $\mathbb{V}(0) = \mathbb{K}^n$, $\mathbb{V}(1) = \emptyset$ e como $\mathbb{V}(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{K}$, então qualquer subconjunto finito de \mathbb{K}^n , $n > 0$, é uma variedade afim. Por outro lado, considere o conjunto $S = \mathbb{R} - \{(0, 1, 2)\} \subset \mathbb{R}$, verifica-se que S não é uma variedade afim, pois se f é um polinômio em $\mathbb{R}[x]$ que se anula em todo ponto de S , então f tem infinitas raízes e pelas propriedade de polinômios em uma variável, isto implica que f deve ser necessariamente o polinômio nulo. Portanto, a menor variedade em \mathbb{R} contendo S é própria reta real. Se F é um polinômio não constante, o conjunto de zeros de F , isto é, pontos $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que $F(a) = 0$, é chamado de hipersuperfície definida por F , e denotada por $\mathbb{V}(F)$, assim se F é um polinômio onde $\deg(F) = 1$, temos que $\mathbb{V}(F)$ é chamado de hiperplano em \mathbb{K}^n .

Exemplo 3 (Caso Geral). *Um exemplo de variedade afim importante com muitas aplicações vem da álgebra linear. Fixamos um corpo \mathbb{K} e considere um sistema linear com m equações e n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n com coeficientes $a_{ij}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$ em \mathbb{K} :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(m-1)1}x_1 & +a_{(m-1)2}x_2 & + \dots & +a_{(m-1)n}x_n & = b_{m-1} \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + \dots & +a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases}$$

As soluções destas equações formam uma variedade afim em \mathbb{K}^n , chamada especialmente de variedade linear, assim as retas e planos são exemplos de variedades lineares. Em álgebra linear, utilizamos o método redução por linha, também chamada de eliminação Gaussiana, que nos fornece um método ou algoritmo para encontrar todas as soluções de tal sistema de equações lineares. Existe uma generalização deste algoritmo para resolver sistemas com equações polinomiais.

Torna-se muito importante saber a dimensão de uma variedade afim e iremos expor brevemente de modo intuitivo sobre a dimensão de uma variedade afim usando alguns exemplos, tais como:

- i) Uma reta ou uma curva em \mathbb{R}^2 é um objeto de dimensão 1, i.é., (dimensão da curva) $= 1 = \dim(\mathbb{R}^2) - (\text{número de equações})$;
- ii) Uma equação em \mathbb{R}^3 geralmente nos dá uma superfície, que tem dimensão 2, i.é., (dimensão da superfície) $= 2 = \dim(\mathbb{R}^3) - (\text{número de equações})$;
- iii) A intersecção de dois planos concorrentes em \mathbb{R}^3 gera uma reta, cuja dimensão é 1, i.é., (dimensão da reta $\subset \mathbb{R}^3$) $= 1 = \dim(\mathbb{R}^3) - (\text{número de equações})$.

A nossa intuição nos leva a conjecturar que a dimensão da variedade afim é igual à dimensão do espaço menos o número de equações. Se isso for verdade, então a dimensão do conjunto solução do sistema linear S acima seria, $m - n$, i.é., número de equações menos o número de variáveis, contudo, isso em geral não é válido, na realidade, quando o conjunto $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{K}^n$ for a variedade linear do sistema linear S , os teoremas da álgebra linear nos garantem que se $\mathbb{V} \neq \emptyset$, então \mathbb{V} tem dimensão $n - r$, onde r é o posto da matriz dos coeficientes do sistema S . Portanto, para variedades lineares a dimensão é determinada pelo número de equações linearmente independentes. Esta intuição se aplica para variedades afins em geral, um leitor interessado que queira aprofundar-se no assunto, pode iniciar sua busca em [6] por exemplo.

Um outro exemplo onde a dimensão da variedade afim é diferente da dimensão do espaço menos o número de equações é dado por $\mathbb{V}(xz, yz)$ veja que temos duas equações, mas a dimensão desta variedade não é 1 (dimensão do espaço menos o número de equações), pois as equações $xz = yz = 0$ define a união do plano- xy com o eixo z , que tem dimensão global igual a 2.

Exemplo 4 (Variedade afim na forma paramétrica). *Temos que $W := \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{K}^3\}$ é uma variedade afim, precisamos encontrar um conjunto de equações polinomiais com 3 variáveis que se anulam nos pontos da forma (t, t^2, t^3) , este problema é chamado de implícitização e sempre é possível resolvê-lo, fazendo*

$$\begin{cases} x & = t \\ y & = t^2 \\ z & = t^3 \end{cases}$$

eliminando a variável t , temos

$$\begin{cases} x^2 = t^2 = y; \text{ uma equação da forma } x^2 - y = 0 \\ x^3 = t^3 = z; \text{ uma equação da forma } x^3 - z = 0 \\ y^3 = t^6 = z^2; \text{ uma equação da forma } y^3 - z^2 = 0 \end{cases}$$

Assim, os pontos da forma $(t, t^2, t^3) \in \mathbb{K}$, satisfazem simultaneamente essas equações, logo

$$W = \mathbb{V}(x^2 - y, x^3 - z, y^3 - z^2)$$

Portanto, W é uma variedade afim. Observe também que

$$\begin{cases} xy = t^3 = z; \text{ outra equação da forma } xy - z = 0 \\ xz = t^4 = y^2; \text{ outra equação da forma } xz - y^2 = 0, \end{cases}$$

então

$$W = \mathbb{V}(x^2 - y, xy - z, xz - y^2).$$

Portanto, W é uma variedade afim.

Uma variedade afim $\mathbb{V} = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{K}^n$, pode ser descrita por diferentes sistemas de equações, pois se $g = p_1 f_1 + \dots + p_s f_s$, com $p_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, então $g(a) = 0, a \in \mathbb{V}$. Conseqüentemente, dado qualquer conjunto de equações definindo uma variedade \mathbb{V} , sempre podemos produzir infinitos novos polinômios que também se anulam sobre \mathbb{V} , em termos de ideais, g como acima, significa que g pertence ao ideal gerado por f_1, \dots, f_s , logo, uma coleção destes novos polinômios definem a mesma variedade que os polinômios f_1, \dots, f_s definem, i.é., ideais iguais tem variedades iguais, ou seja, $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle, J = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ e $I = J$, então $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(J)$, agora podemos ter $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(J)$ com $I \subsetneq J$.

Exemplo 5. Considere o seguinte sistema linear

$$S = \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ -x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

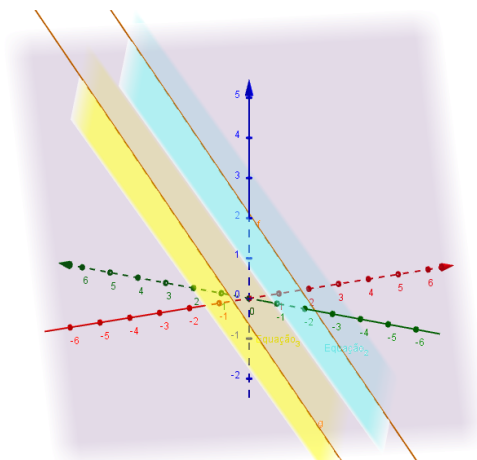


Figura 1.5: Planos

Escalonando o sistema linear S , obtemos outro sistema linear S_1 equivalente a S , dado por:

$$S_1 = \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ + 3y - 2z + 3 = 0 \\ + 1 = 0. \end{cases}$$

Como S_1 não tem solução, segue que S também não tem. Por outro lado, note que os ideais determinados pelas equações de S e S_1 são respectivamente,

$$I = \langle x + 2y - z + 1, -x + y - z + 2, 2x - 2y + 2z + 1 \rangle$$

e

$$J = \langle x + 2y - z + 1, +3y - 2z + 3, 1 \rangle.$$

Um dos geradores do ideal J é o polinômio constante não nulo $g := 1$, e como nenhum ponto de \mathbb{K}^3 se anula em $g(x, y, z) = 1$, temos que $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(J) = \emptyset$ e observe ainda que o ideal J gera todo o anel, pois $1 \in J$, e ainda que todo ideal J que contém um polinômio constante não nulo, satisfaz $\mathbb{V}(J) = \emptyset$. Se \mathbb{K}^n não é algebricamente fechado, podemos ter $\mathbb{V}(J) = \emptyset$, sem que $1 \in J$. O ideal próprio gerado por $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ não tem um zero comum. Porém, se \mathbb{K} é um corpo algebricamente fechado e se $J \subsetneq (\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n])$ (J um ideal próprio), então $\mathbb{V}(J) \neq \emptyset$, esta afirmação pode ser vista em [6] que é um resultado devido a Hilbert².

1.3 Produto de Variedades Afins

Observemos que na topologia produto de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$, os fechados são as uniões finitas de subconjuntos da forma $X \times Y$, com $X \in \mathbb{C}^m, Y \in \mathbb{C}^n$ fechados.

Por exemplo, para $m = n = 1$, resultam apenas as uniões finitas de retas horizontais ou verticais ou pontos. Enquanto isso, em \mathbb{C}^2 , cada polinômio não constante define uma curva, $f(x, y) = 0$.

Essas considerações levam a definir a topologia de Zariski no produto cartesiano como a induzida pela bijeção natural

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^{m+n} \\ (\underline{x}, \underline{y}) &\rightarrow (\underline{x}, \underline{y}) \end{aligned}$$

onde abreviamos $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m), \underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Como vimos, essa topologia é mais fina do que a topologia produto.

Observe também que, no anel de polinômios $\mathbb{C}[\underline{x}, \underline{y}]$ com dois blocos de variáveis, cada elemento se escreve como soma de elementos da forma $f(\underline{x})g(\underline{y})$.

A prova deste *Lema 1.11*, *Proposição 1.12* e os *Lemas 1.13* e *1.14* podem ser encontradas em [17].

²O *Hilbert Nullstellensatz* (em alemão: **teorema dos zeros**) é um teorema em Geometria Algébrica que relaciona variedades e ideais em anéis de polinômios sobre corpos algebricamente fechados. Foi provado inicialmente por David Hilbert, em 1893. Seja \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado (como o dos números complexos), considera-se o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e seja I um ideal neste anel. O *Teorema dos Zeros de Hilbert* nos diz que se p é um polinômio em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ que se anula na variedade $\mathbb{V}(I)$, i.é., $p(a) = 0, \forall a \in \mathbb{V}(I)$, então existe um número natural r tal que $p^r \in I$. Um corolário imediato é o *Teorema dos Zeros Fraco*: se I é um ideal próprio em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, então $\mathbb{V}(I)$ não pode ser vazio, i.é., existe um zero comum para todos os polinômios do ideal. Esta é a razão para o nome do teorema.

Lema 1.11. *A projeção $p_1 : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ é um morfismo aberto.*

Proposição 1.12. *Sejam $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{C}^m, \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{C}^n$ subvariedades afins, e sejam p_1, p_2 as projeções de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$. Então:*

- i) $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{m+n}$ é uma subvariedade afim;*
- ii) Cada função regular $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ é soma de funções da forma $f(x)g(y)$ tais que f (resp. g) é regular em \mathcal{X} (resp. \mathcal{Y}).*

Lema 1.13. *Notação como acima, temos*

- i) $\mathcal{I}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = J_{\mathcal{X}} + J_{\mathcal{Y}}$;*
- ii) Se \mathcal{X} e \mathcal{Y} são irredutíveis então $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ também é.*

Lema 1.14. *Sejam $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ variedades com \mathcal{X}, \mathcal{Y} afins. Então para todo par de morfismos $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}, \psi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$, a aplicação $\rho : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ dada por $\rho(\mathcal{Z}) = (\varphi(\mathcal{Z}), \psi(\mathcal{Z}))$ é um morfismo.*

Capítulo 2

Espaços Projetivos

Assim como as fórmulas para as raízes dos polinômios de 2º, 3º e 4º grau sugerem a extensão dos números reais à configuração mais algebricamente completa dos números complexos, muitas propriedades das variedades algébricas sugerem o alongamento do espaço afim para um espaço projetivo mais geometricamente completo. Enquanto os números complexos são obtidos adicionando o número i , uma raiz do polinômio $x^2 + 1$, o espaço projetivo é obtido adicionando em pontos apropriados "no infinito", pontos em que retas paralelas podem se encontrar. Para ver como isso pode acontecer, considere a variedade $\mathbb{V}(y - x^2)$, se esboçarmos obteremos uma parábola, à medida que x vai para o infinito positivo, a inclinação da reta da origem para o ponto (x, x^2) também vai para o infinito positivo e quando x vai para o infinito negativo, a inclinação da mesma reta vai para o infinito negativo. Vamos comparar isso com a variedade $\mathbb{V}(y - x^3)$, esta é uma curva cúbica, note que à medida que x vai para o infinito positivo, a inclinação da reta da origem para o ponto (x, x^3) passa para o infinito positivo, como antes, contudo ao contrário de antes, quando x vai para o infinito negativo, a inclinação da mesma reta também vai para o infinito positivo e este comportamento é exatamente o oposto da parábola (figura 2.1).

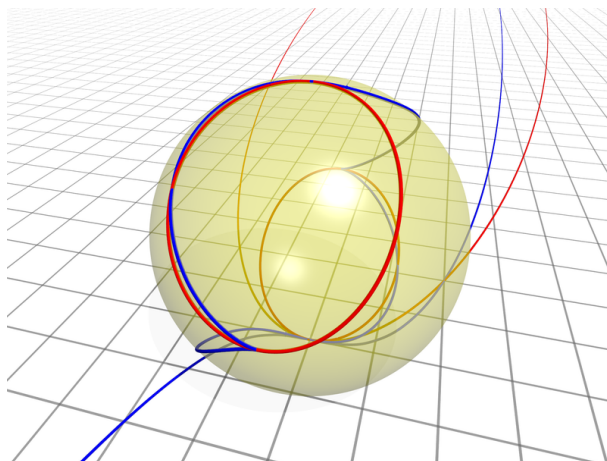


Figura 2.1: Parábola ($y = x^2$, vermelho) e cúbica ($y = x^3$, azul) no espaço projetivo

Portanto, o comportamento "no infinito" da variedade $\mathbb{V}(y - x^3)$ é diferente do comportamento "no infinito" da variedade $\mathbb{V}(y - x^2)$. A consideração da realização projetiva das duas curvas, que é o seu prolongamento "no infinito" no plano projetivo, permite quantificar essa diferença: o ponto na infinidade da parábola é um ponto regular, cuja tangente

é a reta no infinito, enquanto o ponto na infinidade da curva cúbica é uma cúspide e além disso, ambas as curvas são racionais, como são parametrizadas por x e o *Teorema de Riemann-Roch* implica que a curva cúbica deve ter uma singularidade, que deve estar no infinito, pois todos os seus pontos no espaço afim são regulares.

Assim, muitas das propriedades das variedades algébricas, incluindo a equivalência birracional e todas as propriedades topológicas, dependem do comportamento "no infinito", e, portanto, é natural estudar as variedades no espaço projetivo e ainda mais, a introdução de técnicas projetivas fez com que muitos teoremas em geometria algébrica sejam mais simples e mais nítidos: por exemplo, o *Teorema de Bézout* sobre o número de pontos de intersecção entre duas variedades pode ser declarado na sua forma mais nítida somente no espaço projetivo. Por estas razões, o espaço projetivo desempenha um papel fundamental na geometria algébrica.

2.1 Variedades Algébricas Projetivas

Uma variedade algébrica é o conjunto de zeros de uma família de polinômios e constitui o objeto principal de estudo da geometria algébrica. Pelo conceito de variedade algébrica é possível constituir uma relação entre a álgebra e a geometria, o que permite reformular problemas geométricos em termos algébricos, e vice-versa. Tal relação é baseada principalmente no fato que um polinômio complexo em uma variável é completamente determinado pelos seus zeros: o *Teorema dos Zeros de Hilbert* permite estabelecer uma correspondência entre variedade algébrica e ideal de anéis de polinômios, sendo assim nesta seção estudaremos curvas, conjuntos dados por zeros de sistemas de equações polinomiais. Utilizaremos um pouco de álgebra e, em particular, precisamos estudar os ideias do anel de polinômios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Entre os principais exemplos de variedades temos os espaços projetivos, definidos a seguir.

2.1.1 Espaço projetivo \mathbb{P}^n

A construção do espaço projetivo

Inicialmente faremos algumas definições e construções geométricas do espaço ambiente que estudaremos. Essa introdução é essencial no estudo da *geometria projetiva* quanto *geometria algébrica*, pois nos dará noções intuitivas dos espaços sobre os quais trabalhamos. Sem ela a teoria seguinte poderia se tornar bastante artificial. Atualmente, o espaço projetivo \mathbb{P}^n de dimensão n é geralmente definido como o conjunto das retas que passam por um ponto, considerado como a origem, no espaço afim de dimensão $n + 1$ ou de forma equivalente, ao conjunto das retas em um vetor do espaço vetorial de dimensão $n + 1$. Quando um sistema de coordenadas foi escolhido no espaço de dimensão $n + 1$, todos os pontos de uma reta têm o mesmo conjunto de coordenadas até a multiplicação por um elemento do corpo \mathbb{K} , isso define as coordenadas homogêneas de um ponto de \mathbb{P}^n como uma sequência de $n + 1$ elementos do corpo base \mathbb{K} , definidos até a multiplicação por um elemento λ diferente de zero \mathbb{K} (o mesmo para toda a sequência). A ideia básica da geometria projetiva é acrescentar pontos no infinito, de modo que, por exemplo, quaisquer duas retas no plano se intersectem. É claro que isso não ocorre no plano afim. Para construir o plano projetivo, identificamos o plano afim \mathbb{A}^2 com o plano

$$\mathbb{A}^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3 \mid x_0 = 1\}$$

do espaço afim \mathbb{K}^3 . Cada ponto $(1, x_1, x_2)$ deste plano determina uma reta passando pela origem, a saber a reta $\{(\lambda, \lambda x_1, \lambda x_2) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$. As retas em \mathbb{K}^3 passando pela origem que não intersectam o plano " $x_0 = 1$ " são as retas do plano " $x_0 = 0$ ". Intuitivamente, uma tal reta encontra o plano " $x_0 = 1$ " no infinito. Usamos estas retas então para definir os pontos no infinito.

Assim, o plano projetivo \mathbb{P}^2 é tal que existe a bijeção

$$\{\text{pontos de } \mathbb{P}^2\} \Leftrightarrow \{\text{retas em } \mathbb{K}^3 \text{ passando pela origem}\}.$$

Uma tal reta é da forma $\{(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$, onde $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3$ não é a origem. Note que dois vetores (x_0, x_1, x_2) e (y_0, y_1, y_2) definem a mesma reta pela origem se, e somente se

$$(y_0, y_1, y_2) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{K}$. Denotamos o ponto correspondente em \mathbb{P}^2 por $(x_0 : x_1 : x_2)$. Analogamente, o espaço projetivo de dimensão n é denotado por \mathbb{P}^n e tem pontos que correspondem a retas em \mathbb{K}^{n+1} passando pela origem. Isto nos motiva a seguinte definição.

Definição 2.1. *O espaço projetivo de dimensão n é dado por*

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

onde

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i = \lambda y_i, \forall i = 0, \dots, n$$

para algum $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Definição 2.2. *Um ponto P do espaço projetivo \mathbb{P}^n sobre o corpo \mathbb{K} é definido por uma $(n+1)$ -upla $(x_0 : \dots : x_n)$, tais que $x_i \in \mathbb{K}$ são não simultaneamente nulos. Os números x'_i são chamados coordenadas homogêneas de P . Uma outra $(n+1)$ -upla $(y_0 : \dots : y_n)$ também define P se, e somente se, existe um número $\lambda \neq 0$, tal que $x_i = \lambda y_i, \forall i = 0, 1, \dots, n$.*

Usualmente, chamamos de pontos finitos aos pontos do conjunto

$$\{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\} = \{(1 : x_1 : \dots : x_n) \mid (x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{A}^n\}$$

e chamamos de pontos infinitos aos pontos do conjunto

$$\{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\} = \{(0 : x_1 : \dots : x_n) \mid (x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}\}$$

note que o conjunto dos pontos finitos de \mathbb{P}^n pode ser identificado com \mathbb{A}^n e o conjunto dos pontos infinitos pode ser identificado com \mathbb{P}^{n-1} .

Observação 2.1. *Em particular, temos*

$$\mathbb{P}^1 = \text{reta afim dos pontos finitos} \cup \{(0 : 1)\}$$

e assim \mathbb{P}^1 tem um único ponto infinito e este espaço projetivo de dimensão igual a 1 é chamado de reta projetiva;

$$\mathbb{P}^2 = \text{plano afim dos pontos finitos} \cup \text{reta projetiva dos pontos infinitos}$$

e assim \mathbb{P}^2 é um espaço projetivo de dimensão igual a 2 é chamado de plano projetivo;

$\mathbb{P}^3 =$ espaço afim dos pontos finitos \cup espaço projetiva dos pontos infinitos

e assim \mathbb{P}^3 é um espaço projetivo de dimensão igual a 3 é chamado de espaço projetivo.

Além disso em geral omitimos sobre qual corpo estamos trabalhando, a não ser que isso seja especialmente relevante na situação, e escrevemos apenas \mathbb{P}^n .

Outra propriedade importante desse sistema de coordenadas é que não existem pontos em \mathbb{P}^n com todas as coordenadas nulas.

Antes de fazermos considerações sobre as variedades projetivas, onde trataremos nosso problema, vamos tentar mostrar essa construção deste espaço de duas formas, que nos darão motivações suficientes para a construções mais gerais:

Primeira Forma

Dentre as várias formas de "enxergar" o espaço \mathbb{P}^n , vejamos o caso $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ por exemplo em [12] (que é o caso mais interessante que conseguimos desenhar). Podemos enxergar cada elemento desse espaço como uma reta que passa pela origem em \mathbb{R}^3 (dois pontos em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ estão numa mesma reta desse tipo se, e somente se pertencem à mesma classe de equivalência). Continuando nessa linha de pensamento podemos observar também que uma reta desse tipo intercepta \mathbb{S}^2 , a esfera unitária, em exatamente dois pontos. Portanto, podemos olhar apenas para o hemisfério superior de \mathbb{S}^2 .

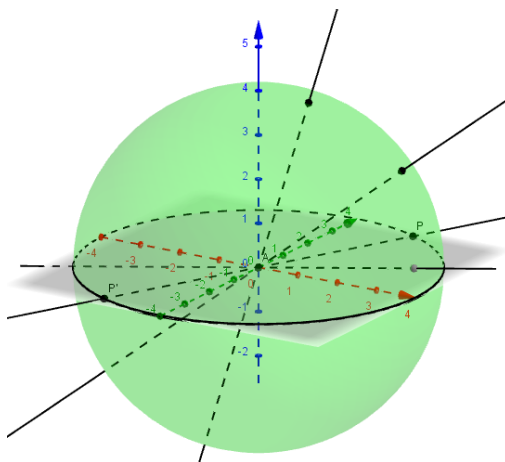


Figura 2.2: Esfera \mathbb{S}^2

Todos as retas que não pertencem ao plano $z = 0$ estão representadas unicamente nesse hemisfério, as outras são representadas por dois pontos que chamamos de antipodais, no "equador" de \mathbb{S}^2 . Para tentar compreender o formato do plano projetivo podemos imaginar a "colagem" desses pontos antipodais, essa é uma imagem que não pode ser realizada em três dimensões.

Isso nos deixa numa situação muito boa para introduzir as retas projetivas imersas no plano projetivo. Uma reta em \mathbb{P}^2 é um conjunto do tipo

$$l = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \forall a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

com ao menos um $a_i \neq 0$. Ou seja, olhando $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ da forma que estamos fazendo, uma reta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ será a intersecção de um plano que passa pela origem com \mathbb{S}^2 (na verdade a classe de equivalência determinada por esse círculo). Observe pelo desenho que duas retas em \mathbb{P}^2 sempre se interceptam, i. é., estamos nos referindo ao teorema da dualidade.

Segunda Forma

Vejam agora considerações sobre como construir o Plano Projetivo Real, da seguinte forma como em [17]. Considere o plano afim mergulhado no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , π cuja equação é dada por $z = 1$.

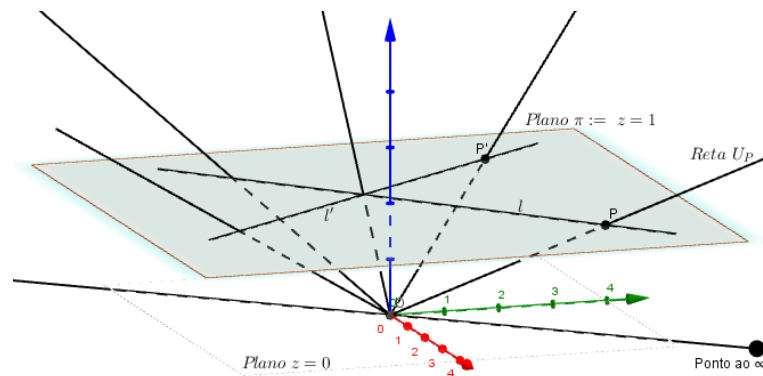


Figura 2.3: Plano Projetivo Real

Cada ponto P em $\pi := z = 1$ determina uma única reta U_P passando pela origem e pelo ponto dado, determinando subespaços unidimensionais da forma $U_P \subset \mathbb{R}^3$ e temos ainda os subespaços unidimensionais que não interceptam o plano π , que são os subespaços contidos no Plano $z = 0$, chamado de pontos no infinito, i.é., se as retas $l, l' \subset \pi$ encontram-se em seu ponto de intersecção, esta geram a reta l'' a elas associadas, caso as retas $l, l' \subset \pi$ sejam paralelas ainda assim se interceptam ao longo de uma reta que passa pela origem contida no plano $z = 0$.

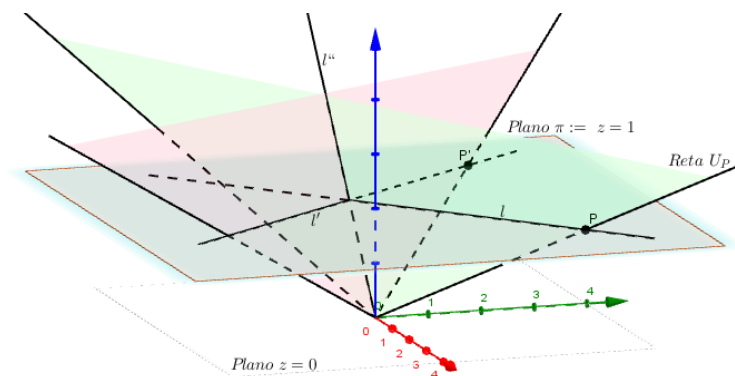


Figura 2.4: Plano Projetivo Real

Este fato nos remete a seguinte definição de Plano Projetivo Real:

Definição 2.3. *O Plano Projetivo \mathbb{P}^2 é o conjunto das retas do espaço tridimensional real passando pela origem, i.é., o conjunto dos subespaços unidimensionais do espaço tridimensional real \mathbb{R}^3*

Decorre diretamente da definição que o plano π fica naturalmente identificado a um subconjunto de \mathbb{P}^2 que é denotado pelo próprio π , os pontos de $\mathbb{P}^2 \setminus \pi$ como visto acima são chamados pontos ao infinito.

Denotamos por $(x : y : z)$ o ponto de \mathbb{P}^2 que representa a reta ligando a origem O a um ponto $P = (x, y, z) \neq O$. Dizemos x, y, z são as coordenadas homogêneas do ponto $P = (x : y : z)$ relativas à base canônica $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Por definição, temos que

$$(x : y : z) \sim (x' : y' : z')$$

se, e somente se

$$\exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } (x, y, z) = \lambda(x', y', z').$$

Definimos a aplicação

$$q : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$$

que introduz naturalmente uma topologia em \mathbb{P}^2 , a topologia quociente. Dizemos que um subconjunto $U \subset \mathbb{P}^2$ é aberto se $q^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ com topologia usual. Desta forma vemos que \mathbb{P}^2 é uma "compactificação" do plano afim

Observação 2.2. *Quando trabalhamos sobre um corpo qualquer \mathbb{K} , ainda é possível ver \mathbb{P}^2 como um espaço topológico compacto. Neste caso, a topologia natural a ser considerada é a topologia de Zariski, onde os fechados são os conjuntos algébricos projetivos e nada se perde no estudo dos conjuntos algébricos quando consideramos esta topologia. Nesta dissertação, estamos trabalhando sempre sobre o corpo dos números complexos.*

A representação acima é extremamente interessante pois nos permite observar que podemos "recortar" do nosso plano projetivo um plano afim e os pontos que sobram, nesse caso o conjunto

$$\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid (x : y : 0), x, y \in \mathbb{R}\}$$

É na verdade uma reta projetiva (a reta $z = 0$), a qual chamamos de reta no infinito, que aqui denotaremos por l_∞ , i. é., podemos enxergar nosso plano projetivo como a união de um plano afim e um reta projetiva.

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1$$

Sem perda de generalidades, note que:

- As coordenadas de \mathbb{P}^n são $(x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_{n-2} : x_{n-1} : x_n)$;
- As coordenadas de \mathbb{P}^{n-1} são $(x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_{n-2} : x_{n-1})$;
- ...
- As coordenadas de \mathbb{P}^2 são $(x_0 : x_1 : x_2)$;
- As coordenadas de \mathbb{P}^1 são $(x_0 : x_1)$;
- As coordenadas de \mathbb{P}^0 são (x_0) ;

note também que:

- As coordenadas de \mathbb{A}^n são $(1 : x_1 : x_2 : \dots : x_{n-2} : x_{n-1} : x_n)$;
- As coordenadas de \mathbb{A}^{n-1} são $(1 : x_1 : x_2 : \dots : x_{n-2} : x_{n-1})$;
- ...
- As coordenadas de \mathbb{A}^2 são $(1 : x_1 : x_2)$;
- As coordenadas de \mathbb{A}^1 são $(1 : x_1)$;
- As coordenadas de \mathbb{A}^0 são (1) ;

Assim

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} \Rightarrow \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{A}^{n-1} \cup \mathbb{P}^{n-2} \Rightarrow \mathbb{P}^{n-2} = \mathbb{A}^{n-2} \cup \mathbb{P}^{n-3} \Rightarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{P}^2 \Rightarrow \mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1 \Rightarrow \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{P}^0$$

Logo

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{A}^{n-1} \cup \mathbb{A}^{n-2} \cup \mathbb{A}^{n-3} \cup \dots \cup \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$$

note que:

- $\mathbb{P}^0 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^1) = \{[1]\}$ consiste de um único ponto, pois $\mathbb{C} = [1]$ é o único subespaço de \mathbb{C} de dimensão 1;
- \mathbb{P}^1 consiste de uma cópia de \mathbb{C} e o ponto no infinito, i. é., $\mathbb{P}^1 = \{[a, 1] | a \in \mathbb{C}\} \cup \{[(1, 0)]\}$;

Exemplo 6. [4] A reta projetiva real, $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, como conjunto, ele se identifica com o conjunto das retas no plano que passam pela origem. Uma outra forma de caracterizar a reta projetiva é considerarmos a circunferência $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$. Como cada reta que passa pela origem cruza \mathbb{S}^1 em dois pontos diametralmente opostos, chamados pontos antípodas, podemos identificar a reta projetiva real com uma semi-circunferência na qual suas extremidades estão identificadas, fazendo, assim, um espaço homeomorfo a \mathbb{S}^1 , como podemos ver na figura 2.5.

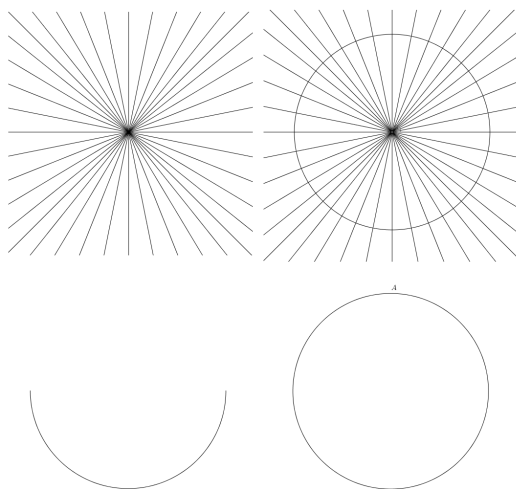


Figura 2.5: A reta projetiva \mathbb{RP}^1 é homeomorfa a \mathbb{S}^1

Exemplo 7. [4] O plano projetivo real $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, como conjunto ele se identifica com o conjunto de todas as retas no espaço tridimensional que passam pela origem, para caracterizá-lo de uma forma mais precisa, utilizaremos a esfera bidimensional

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Note que toda reta que passa pela origem em \mathbb{R}^3 intersecta \mathbb{S}^2 duas vezes, exatamente em pontos antípodas. Assim, o plano projetivo real \mathbb{RP}^2 é homeomorfo à esfera \mathbb{S}^2 com os pontos antípodas identificados. Mesmo não sendo possível desenhar o plano projetivo a figura 2.6 nos dá uma noção de sua construção.

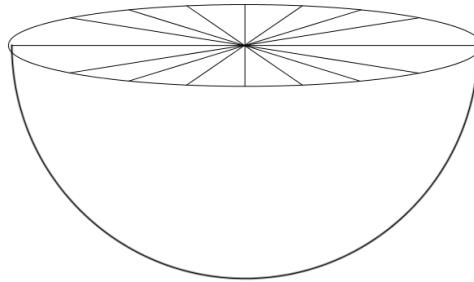


Figura 2.6: Uma representação gráfica do plano projetivo \mathbb{RP}^2

Exemplo 8. [4] O espaço projetivo tridimensional real $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, é homeomorfo ao grupo $SO(3)$ ¹. Pelo exemplos anteriores, já podemos deduzir que o conjunto de retas em \mathbb{R}^4 que passam pela origem é homeomorfo à esfera \mathbb{S}^3 com os pontos antípodas identificados, contudo neste caso, esta caracterização não nos auxilia grandemente para termos uma imagem do espaço projetivo. Para melhorarmos nossa percepção, retornemos ao caso de \mathbb{RP}^2 . Como vimos, \mathbb{RP}^2 também pode ser entendido como um hemisfério com os pontos antípodas do equador identificados. Mas todo hemisfério é homeomorfo a um disco. Por exemplo, o hemisfério norte da esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é homeomorfo ao disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, pela aplicação

$$f : D \rightarrow \mathbb{S}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

cuja aplicação inversa é dada nas duas primeiras coordenadas, com isso o plano projetivo é, ainda, homeomorfo ao disco unitário com os pontos antípodas identificados. Agora, voltando ao nosso exemplo, um hemisfério de \mathbb{S}^2 pode ser visto como homeomorfo a um disco tridimensional (uma bola), i.é., o hemisfério norte da esfera $\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$ é homeomorfo à bola $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, i.é., pela aplicação

$$f : D \rightarrow \mathbb{S}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z, \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2})$$

cuja aplicação inversa é a projeção nas primeiras três coordenadas. Como \mathbb{RP}^3 é homeomorfo a \mathbb{S}^3 com os pontos antípodas identificados, também podemos caracterizá-lo como

¹grupo das rotações em \mathbb{R}^3

um hemisfério de \mathbb{S}^3 com os pontos antípodas da borda (que é homeomorfa a uma esfera \mathbb{S}^2) identificados. E através deste isomorfismo de um hemisfério de \mathbb{S}^3 com uma bola, podemos finalmente ver o espaço projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ como uma bola tridimensional com os pontos antípodas de sua borda identificados, agora podemos estabelecer uma aplicação de \mathbb{R}^3 em $SO(3)$ associando a cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$ uma rotação cujo eixo é dado pelo vetor unitário $v = \frac{v}{\|v\|}$ e com ângulo dado por $\|v\|$, que é contínua, sobrejetiva e que dois vetores corresponderão à mesma rotação se, e somente se, forem co-lineares e a sua diferença for um múltiplo inteiro de 2π . Assim, se tomarmos a restrição desta aplicação à bola fechada $\overline{B(0, \pi)}$, teremos uma aplicação contínua entre um espaço compacto (a bola fechada $\overline{B(0, \pi)}$) e um espaço Hausdorff (o grupo $SO(3)$, pois a sua topologia é herdada da topologia métrica existente no espaço das matrizes $M_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^9$), logo aberta². Se identificarmos os pontos antípodas da superfície da bola $B(0, \pi)$, teremos uma aplicação contínua, aberta, injetiva e sobrejetiva entre $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ (que é homeomorfo à bola com os pontos antípodas da borda identificados), e o grupo $SO(3)$, isto é o mesmo que dizer que $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ é homeomorfo ao grupo $SO(3)$.

Exemplo 9. [4] Este espaço projetivo é o espaço projetivo complexo unidimensional $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, que é o conjunto de todos os planos complexos passando pela origem de \mathbb{C}^2 , se tratarmos este espaço como uma variedade (definiremos na próxima seção) sobre \mathbb{R} , veremos que este terá dimensão 2, i. é., será uma superfície real, que iremos mostrar ser homeomorfo à esfera \mathbb{S}^2 , para isto, iremos fazer primeiramente a projeção estereográfica, que promove um homeomorfismo entre a esfera (menos um ponto), e o plano complexo.

Construção: Tomemos o ponto $N = (0, 0, 1)$ sobre \mathbb{S}^2 , que é chamada de polo norte, e associarmos a cada ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ o ponto $Z = \varphi(P) = X + iY \in \mathbb{C}$ é a intersecção da semi-reta \overrightarrow{NP} com o plano (x, y) , como na figura 2.7 abaixo.

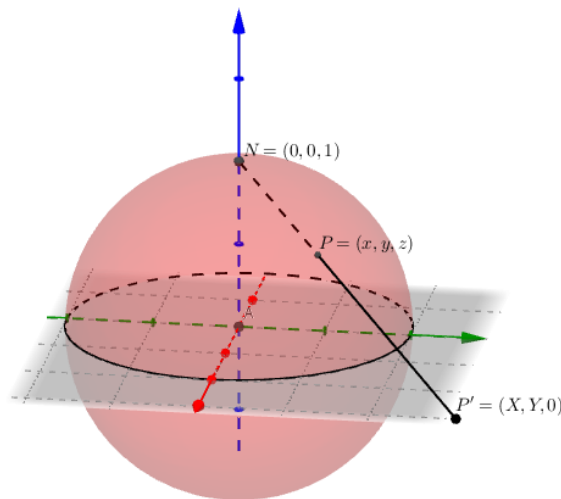


Figura 2.7: Projeção estereográfica

Em coordenadas, podemos calcular facilmente a projeção estereográfica considerando as semelhanças de triângulos existentes nos planos (x, z) e (y, z) , como podemos ver na figura 2.8.

²Um teorema importante em topologia nos garante que toda aplicação contínua entre um espaço compacto e um espaço Hausdorff é aberta, i.é., que a imagem de um aberto é um aberto

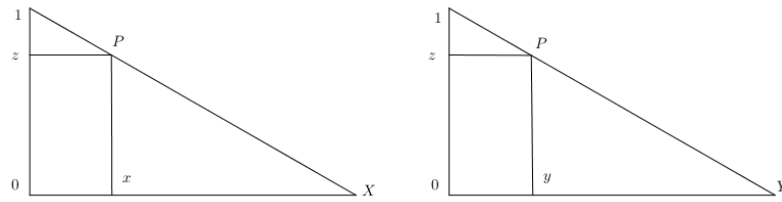


Figura 2.8: Cálculo em coordenadas da projeção estereográfica.

Assim, temos

$$\frac{X}{x} = \frac{1}{1-z} \Rightarrow X = \frac{x}{1-z}$$

$$\frac{Y}{y} = \frac{1}{1-z} \Rightarrow Y = \frac{y}{1-z}$$

i. é.,

$$Z = \varphi(P) = X + iY = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z} = \frac{x + iy}{1-z}$$

Portanto,

$$\varphi : \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \quad (x, y, z) \mapsto \frac{x + iy}{1-z}$$

A inversa da projeção estereográfica pode ser descrita assim: dado $Z = X + iY \in \mathbb{C}$ podemos encontrar um ponto sobre \mathbb{S}^2 com coordenadas (x, y, z) , tais que

$$\begin{cases} x = X(1-z) \\ y = Y(1-z) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = (X^2 + Y^2)(1-z)^2$$

Recordemos que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, vemos que $x^2 + y^2 = 1 - z^2$, assim

$$x^2 + y^2 = 1 - z^2 = (X^2 + Y^2)(1-z)^2 \Rightarrow 1 + z = (X^2 + Y^2)(1-z) \Rightarrow z = \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1}$$

como

$$x = X(1-z) \Rightarrow x = \frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1}$$

$$y = Y(1-z) \Rightarrow y = \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1}$$

Portanto,

$$\varphi^{-1}(X + iY) = \left(\frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1} \right)$$

De fato, pode ser verificado que φ e φ^{-1} são mutuamente inversas e também são aplicações contínuas, assim a esfera menos o polo norte é homeomorfa ao plano complexo. Temos também que a aplicação

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, -1) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x - iy}{1+z}$$

pode ser vista como uma projeção estereográfica a partir do polo sul, mas compatível com a orientação do plano complexo. Esta aplicação também é inversível e constitui-se um homeomorfismo entre a esfera menos o polo sul e o plano complexo. Exceto os polos norte e sul, todos os outros pontos da esfera estão nos domínios das aplicações φ e $\tilde{\varphi}$. Pode-se mostrar facilmente que, para $P = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ temos:

$$\tilde{\varphi}(P) = \frac{1}{\varphi(P)}$$

Sabemos que a esfera \mathbb{S}^2 pode ser coberta por dois abertos $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus (1, 0, 0)$ e $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, 1)$, cada um deles homeomorfo ao plano complexo \mathbb{C} e na intersecção entre estes dois abertos, a composta $\tilde{\varphi} \circ \varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ produz a inversão no plano complexo, i. é., $\tilde{\varphi} \circ \varphi = \frac{1}{z}$, ainda assim podemos afirmar que a esfera é homeomorfa ao compactificado de Alexandroff do plano, denotado por $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que consiste do espaço topológico construído a partir do plano em união com um ponto, chamado ponto no infinito e com os abertos dados por todos os abertos do plano mais os complementares de compactos no plano, que, por definição serão as vizinhanças abertas do ponto no infinito. Vejamos que \mathbb{CP}^1 também possui as mesmas propriedades que \mathbb{S}^2 , i. é., pode ser coberta por dois abertos homeomorfos ao plano complexo e que na intersecção entre eles produz a inversão no plano complexo: os abertos são

$$V_N = \{(z : w) \in \mathbb{CP}^1 | w \neq 0\} \quad V_S = \{(z : w) \in \mathbb{CP}^1 | z \neq 0\}$$

onde $(z : w)$ é a classe de equivalência do par ordenado $(z : w) \in \mathbb{C}^2$ módulo a relação de equivalência que define o espaço projetivo complexo.

As bijeções, ou melhor, os homeomorfismos são, análogas às aplicações definidas no caso real, e são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \psi_N : V_N &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z : w) &\mapsto \frac{z}{w} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_S : V_S &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z : w) &\mapsto \frac{w}{z} \end{aligned}$$

e suas respectivas inversas são dadas por:

$$\begin{aligned} \psi_N^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow V_N \\ z &\mapsto (z : 1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_S^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow V_S \\ z &\mapsto (1 : z) \end{aligned}$$

É fácil ver que, realmente, todas estas aplicações são contínuas e que ψ_N ; ψ_N^{-1} e também ψ_S ; ψ_S^{-1} são, de fato, mutuamente inversas. Também temos que $\psi_S \circ \psi_N^{-1} = \frac{1}{z}$, ou seja, estas aplicações funcionam da mesma maneira que as projeções estereográficas. Composto, portanto, estes homeomorfismos entre abertos de \mathbb{CP}^1 e o plano com as inversas das transformações estereográficas, teremos um homeomorfismo entre \mathbb{CP}^1 e \mathbb{S}^2 , conforme anunciado previamente.

O espaço projetivo \mathbb{P}^n também é imbuído de uma topologia de Zariski dada por polinômios, tome $\mathcal{F} \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$. Não faz sentido falar do valor de \mathcal{F} em um ponto $(x_0 : \dots : x_n)$ pois este valor em geral depende da escolha de coordenadas projetivas, i.é., $\mathcal{F}(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ em geral depende de λ , dizemos que \mathcal{F} se anula em $(x_0 : \dots : x_n)$ se $\mathcal{F}(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Se \mathcal{F} se anula em um ponto $x \in \mathbb{P}^n$, por vezes escrevemos $\mathcal{F}(x) = 0$, onde o polinômio $\mathcal{F} \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ é homogêneo de grau d se

$$\mathcal{F}(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d \mathcal{F}(x_0, \dots, x_n); \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Os polinômios homogêneos de grau d são então da forma

$$\mathcal{F} = \sum_{r_0 + \dots + r_n = d} c_{r_0 + \dots + r_n} X_0^{r_0} \dots X_n^{r_n}$$

Assim todo polinômio $\mathcal{F} \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ se escreve como uma soma $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \dots + \mathcal{F}_r$ onde $\mathcal{F}_i \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ é um polinômio homogêneo de grau i . Dizemos que $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_r$ são as componentes homogêneas de \mathcal{F} . Agora suponha que \mathcal{F} se anula em um ponto $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$.

Então para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{F}(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \\ &= \mathcal{F}_0(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) + \mathcal{F}_1(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) + \dots + \mathcal{F}_r(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \\ &= \mathcal{F}_0(x_0, \dots, x_n) + \lambda \mathcal{F}_1(x_0, \dots, x_n) + \dots + \lambda^r \mathcal{F}_r(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Fazendo $a_i := \mathcal{F}_i(x_0, \dots, x_n)$, vemos que todo $\lambda \in \mathbb{K}$ é raiz do polinômio $a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda^r a_r$. Como \mathbb{K} é infinito (por ser algebricamente fechado) o polinômio deve ser identicamente nulo, ou seja, temos que ter $\mathcal{F}_i(x_0, \dots, x_n) = 0; \forall i = 0, \dots, r$.

Definição 2.4. *Seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ um subconjunto. O conjunto de zeros de \mathcal{S} é*

$$Z_p(\mathcal{S}) := \{x \in \mathbb{P}^n \mid \mathcal{F}(x) = 0 \text{ para todo } \mathcal{F} \in \mathcal{S}\}.$$

Um subconjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$ é dito fechado se $\mathcal{X} = Z(\mathcal{S})$ para algum \mathcal{S} . Um subconjunto de \mathbb{P}^n é aberto se seu complementar é fechado. Os abertos (resp. fechados) de \mathbb{P}^n são também chamados abertos projetivos (resp. fechados projetivos ou conjuntos algébricos projetivos).

Para $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$ um subconjunto, definimos o ideal de \mathcal{X} por

$$\mathcal{I}_p(\mathcal{X}) := \{\mathcal{F} \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n] \mid \mathcal{F}(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathcal{X}\}.$$

note que o ideal $\mathcal{I}_p(\mathcal{X})$ é um ideal homogêneo, i.é., um polinômio \mathcal{F} está em $\mathcal{I}_p(\mathcal{X})$ se, e somente se, todas as componentes homogêneas de \mathcal{F} estão em $\mathcal{I}_p(\mathcal{X})$.

Observação 2.3. *Note que*

- i) Os abertos em \mathbb{P}^n formam uma topologia chamada topologia de Zariski de \mathbb{P}^n . De fato, as afirmações ii), iii) e iv) do Lema 1.8 continuam válidas para \mathbb{P}^n . A topologia de Zariski de \mathbb{P}^n se estende a subconjuntos $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$ tomando-se intersecções. Os fechados (resp. abertos) de \mathcal{X} são então intersecções de \mathcal{X} com fechados (resp. abertos) de \mathbb{P}^n ;*

ii) Pelo Teorema 1.5, o anel $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ é Noetheriano e, como para cada $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$ o ideal $\mathcal{I}_p(\mathcal{X})$ é homogêneo, podemos escrever

$$\mathcal{I}_p(\mathcal{X}) = \langle \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k \rangle$$

com $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ polinômios homogêneos.

iii) Da mesma forma que na Proposição 1.10, mostra-se que todo $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$ se escreve de modo único como

$$\mathcal{X} = \mathcal{W}_1 \cup \dots \cup \mathcal{W}_k$$

com $\mathcal{W}_1 \cup \dots \cup \mathcal{W}_k$ fechados irredutíveis em \mathcal{X} tais que $\mathcal{W}_i \not\subseteq \mathcal{W}_j$ se $i \neq j$. Novamente, diremos que $\mathcal{W}_1 \cup \dots \cup \mathcal{W}_k$ são as componentes irredutíveis de \mathcal{X} . Um fechado projetivo irredutível é dito uma variedade projetiva.

Existe uma diferença básica entre os casos afim e projetivo. Considere o ideal $\mathcal{I} = \langle X_0, \dots, X_n \rangle$, então $Z_p(\mathcal{I}) = \emptyset$ já que, se os polinômios de \mathcal{I} se anulassem em um ponto $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$, teríamos que ter $x_0 = \dots = x_n = 0$.

O espaço projetivo \mathbb{P}^n tem uma cobertura por abertos afins, de fato, os conjuntos

$$\mathbb{A}_i^n := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i = 1\}$$

são abertos em \mathbb{P}^n e podem ser identificados com \mathbb{A}^n . Além disso, é óbvio que

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n \mathbb{A}_i^n$$

deste modo, se \mathcal{Y} é um subconjunto de \mathbb{A}^n , geralmente consideramos \mathcal{Y} como subconjunto de \mathbb{P}^n identificando \mathbb{A}^n com \mathbb{A}_0^n .

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$ um polinômio homogêneo, a desomogenização de \mathcal{F} é o polinômio $f = \mathcal{F}(1, X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

Reciprocamente, tome $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ e escreva $f = f_0 + \dots + f_d$ com f_i homogêneo de grau i . Então a homogenização de f é o polinômio homogêneo de grau d

$$\mathcal{F} = \sum_{i=0}^d f_i X_0^{d-i} \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_n].$$

Agora tome $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$ fechado, identificando $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_0^n$, consideramos o conjunto dos pontos finitos de \mathcal{X} , i.é., a intersecção $\mathcal{X} \cap \mathbb{A}^n$. O ideal de $\mathcal{X} \cap \mathbb{A}^n$ é o ideal gerado pelas desomogenizações de todos os polinômios de $\mathcal{I}(\mathcal{X})$. Reciprocamente, tome $\mathcal{Y} \subset \mathbb{A}^n$ fechado. Seja \mathcal{J} o ideal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ gerado pelas homogenizações de todos os polinômios de $\mathcal{I}(\mathcal{Y})$. O fecho projetivo de \mathcal{Y} é o fechado $\overline{\mathcal{Y}} = Z_p(\mathcal{J})$. Note que o conjunto dos pontos finitos de $\overline{\mathcal{Y}}$ é o próprio \mathcal{Y} , visto como subconjunto de \mathbb{P}^n .

Observação 2.4. Note que

- i) Se \mathcal{Y} é uma hipersuperfície de \mathbb{A}^n , i.é., $\mathcal{I}(\mathcal{Y}) = \langle f \rangle$ com $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, então o fecho projetivo de \mathcal{Y} é $\overline{\mathcal{Y}} = Z_p(\mathcal{F})$ onde \mathcal{F} é a homogenização de f .
- ii) O fecho projetivo de $\mathcal{Y} \subset \mathbb{A}^n$ é de fato o fecho de \mathcal{Y} em \mathbb{P}^n . Mais geralmente, é possível mostrar de modo análogo à Proposição 1.7 que se $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$ então o fecho de $\mathcal{X} = Z_p(\mathcal{I}_p(\mathcal{X}))$.

Definição 2.5. *Um conjunto algébrico quasi-projetivo é um subconjunto de \mathbb{P}^n satisfazendo as seguintes condições equivalentes:*

- i) \mathcal{X} é a intersecção de um aberto e um fechado de \mathbb{P}^n ;*
- ii) \mathcal{X} é um subconjunto fechado de um aberto de \mathbb{P}^n ;*
- iii) \mathcal{X} é um subconjunto aberto de um fechado de \mathbb{P}^n ;*
- iv) \mathcal{X} é um subconjunto aberto de seu fecho.*

Uma variedade quasi-projetiva é um conjunto algébrico quasi-projetivo irredutível.

2.2 Variedades Projetivas

Dado um polinômio em $n + 1$ variáveis, ele desaparece em todos os pontos de uma reta que passa pela origem se, e somente se, for homogêneo. Neste caso, diz-se que o polinômio desaparece no ponto correspondente de \mathbb{P}^n , isso permite definir um conjunto algébrico projetivo em \mathbb{P}^n como o conjunto $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_k)$, onde um conjunto finito de polinômios homogêneos $\{f_1, \dots, f_k\}$ desaparece. Como para conjuntos algébricos afins, há uma bijecção entre os conjuntos algébricos projetivos e os ideais homogêneos reduzidos que os definem. As variedades projetivas são os conjuntos algébricos projetivos cujo ideal de definição é primitivo. Por outras palavras, uma variedade projetiva é um conjunto algébrico projetivo, cujo anel coordenado homogêneo é um domínio integral, definindo o anel de coordenadas projetivas como o quociente do anel graduado ou polinômios em $n + 1$ variáveis, pelo ideal homogêneo (reduzido) definindo a variedade. Todo conjunto algébrico projetivo pode ser decomposto de forma exclusiva em uma união finita de variedades projetivas.

Em \mathbb{P}^n , os subconjuntos fechados são definidos como zeros de ideais homogêneos em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Com efeito, se $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ é fechado, sua imagem inversa por π é dada pelos zeros em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ de um ideal homogêneo, como já comentado anteriormente.

Se $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ é fechado, definimos o anel de coordenadas homogêneas

$$A_h(\mathcal{X}) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]/\mathcal{I}(\mathcal{X}).$$

Embora os elementos de $A_h(\mathcal{X})$ não possam ser interpretados como funções, aqueles que provêm de polinômios homogêneos desempenham importante papel. Se $\bar{F} \in A_h(\mathcal{X})$ é a classe de um polinômio homogêneo, a condição $\bar{F}(\mathcal{X}) = 0$ faz sentido para $x \in \mathcal{X}$.

Definimos $\mathcal{X}_{\bar{F}} = \{x \in \mathcal{X} \mid \bar{F} \neq 0\}$.

Como no caso afim, cada subconjunto de \mathbb{P}^n herda a topologia induzida de Zariski. Se $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ é fechado, uma base de abertos para a topologia de Zariski em \mathcal{X} é dada pelos subconjuntos da forma $\mathcal{X}_{\bar{F}}$, $\bar{F} \in A_h(\mathcal{X})$ homogêneo.

Subvariedades Projetivas

Uma subvariedade projetiva de \mathbb{P}^n é, como espaço topológico, um subconjunto fechado $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^n$; o feixe de funções regulares se define da seguinte maneira. Para cada ponto $x \in \mathcal{X}$, dizemos que um germe de função f é regular em x se existirem polinômios homogêneos F, G do mesmo grau, tais que $G(x) \neq 0$ e $f = F/G$ como germes em x .

A exemplo do caso afim, para cada aberto $U \subseteq \mathcal{X}$, o anel de funções regulares $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$ é formado pelas funções $U \rightarrow \mathbb{C}$ cujos germes são regulares em cada $x \in U$.

Temos assim um espaço anelado $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ que é de fato uma variedade.

Para verificar, consideramos a cobertura aberta $\{\mathcal{X}_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ definida pondo $\mathcal{X}_i = \mathcal{X} \cap U_i$

Cada \mathcal{X}_i é fechado na variedade afim U_i . Além disso, mostra-se que o isomorfismo de variedades $\sim: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ induz um isomorfismo de \mathcal{X}_i na sua imagem, subvariedade afim de \mathbb{C}^n .

Variedades Quase-projetivas

Se $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma variedade projetiva, temos para cada aberto $U \subseteq \mathcal{X}$ uma estrutura induzida de variedade, que chamamos de quase-projetiva.

Toda variedade afim, e mesmo toda subvariedade aberta de uma variedade afim, é uma variedade quase-projetiva.

Em linhas gerais, a passagem afim \leftrightarrow quase-projetiva é feita

- i) a nível de espaços topológicos, tomando uma inclusão

$$\mathcal{X} \subseteq \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n;$$

- ii) e quanto às funções regulares, expressando um germe seja como quociente de elementos do anel de coordenadas, seja como restrição de quociente de polinômios homogêneos.

Subconjuntos Irredutíveis

Diremos que um espaço topológico \mathcal{X} é redutível se existirem fechados $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ tais que:

- i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$;
 ii) $\mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{X}_2$.

\mathcal{X} é irredutível caso contrário.

Exemplo 10. $\mathcal{X} = \{0\} \subset \mathbb{C}^1$ é irredutível.

Exemplo 11. *Todo subconjunto finito de \mathbb{C}^n com mais de um elemento é redutível.*

Lema 2.1. *\mathcal{X} é irredutível se e só se todo subconjunto aberto não vazio é denso em \mathcal{X} .*

Exemplo 12. \mathbb{C}^n é irredutível.

Exemplo 13. \mathbb{P}^n é irredutível.

Exemplo 14. *Todo aberto não vazio de irredutível é irredutível.*

Lema 2.2. *Um subconjunto fechado não vazio $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$ é irredutível se, e só se, o ideal $\mathcal{I}(\mathcal{X}) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal primo.*

Lema 2.3. *Seja $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \dots$ uma cadeia descendente de fechados em \mathbb{C}^n . Então existe r tal que $\mathcal{X}_r = \mathcal{X}_{r+1} = \mathcal{X}_{r+2} = \dots$. Em palavras, toda cadeia descendente de fechados em \mathbb{C}^n é estacionária a partir de certa ordem.*

Componentes irredutíveis

Teorema 2.4. *Seja $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{C}^n$ um fechado não vazio. Então existem $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r \subset \mathbb{C}^n$ fechados irredutíveis tais que:*

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \dots \cup \mathcal{X}_r.$$

Corolário 2.5. *A decomposição anterior pode ser escolhida de forma que*

$$\forall i \neq j, \mathcal{X}_i \not\subseteq \mathcal{X}_j.$$

Tal decomposição irredundante é única a menos de permutação.

Variedades Irredutíveis

A discussão anterior se estende ao caso quase-projetivo, ou mesmo de uma variedade arbitrária, por conta da condição de quase-compacidade incorporada à definição de variedade.

Morfismos de Variedades

Um morfismo de variedades $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é uma aplicação contínua que localmente se expressa como morfismo de variedades afins. Precisamente, para cada aberto afim $V \subseteq \mathcal{Y}$ e para cada aberto afim $U \subseteq \varphi^{-1}V$, o morfismo induzido $\varphi|_U : U \rightarrow V$ é um morfismo de variedades afins. Corresponde portanto a um homomorfismo entre os anéis de coordenadas, $\varphi^* : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(U)$.

Em particular, se \mathcal{Y} é uma variedade afim, cada morfismo $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ induz no feixe de funções regulares $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ uma estrutura de feixe de $\mathcal{O}(\mathcal{Y})$ -álgebras, e reciprocamente.

A recíproca significa o seguinte. Para cada aberto afim $U \subseteq \mathcal{X}$, o homomorfismo estrutural $\mathcal{O}(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$ corresponde a um morfismo de variedades afins $\varphi_U : U \rightarrow \mathcal{Y}$. Se $U' \subseteq \mathcal{X}$ é também um aberto afim, temos igualmente $\varphi_{U'} : U' \rightarrow \mathcal{Y}$. Seja U'' aberto afim de $U \cap U'$.

2.3 Produto de Variedades Afins

Tome $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^n$ e $\mathcal{Y} \subset \mathbb{A}^m$ fechados afins. Suponha que

$$\mathcal{X} = Z(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$$

$$\mathcal{Y} = Z(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_s)$$

onde $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ e $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_s \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_m]$ considere o produto

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} := \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{A}^{n+m} \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}; (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{Y}\}.$$

Então $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ é fechado em \mathbb{A}^{n+m} visto que

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = Z(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_s)$$

onde consideramos $\mathbb{K}[\mathbb{A}^{n+m}] = \mathbb{K}[\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_s]$. Deste modo, identificamos $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ com \mathbb{A}^{n+m} .

Observação 2.5. A topologia em \mathbb{A}^{n+m} dada acima não é a topologia produto, de fato, como \mathbb{A}^n não é Hausdorff³, a diagonal

$$\Delta_{\mathbb{A}^n} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{A}^n\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$$

não é fechada na topologia produto. Mas é claro que $\Delta_{\mathbb{A}^n}$ é fechada em \mathbb{A}^{n+m} já que é o conjunto de zeros dos polinômios $X_i - Y_i$ com $i = 1, \dots, n$.

Para \mathcal{X} e \mathcal{Y} conjuntos algébricos quasi-projetivos, é mais complicado ver o produto $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ como um conjunto algébrico. De fato, o procedimento acima não funciona, pois não existe maneira natural de identificar $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ com \mathbb{P}^{n+m} . Para ver o produto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ como um conjunto algébrico projetivo, usamos o mergulho de Segre.

Teorema 2.6 (Mergulho de Segre). *A aplicação*

$$\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m}$$

$$((x_0 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_m)) \mapsto (\dots : x_i y_j : \dots)$$

é injetora. Se consideramos \mathbb{P}^{nm+n+m} com coordenadas z_{ij} onde $0 \leq i \leq n$; $0 \leq j, m$, então φ tem como imagem o fechado projetivo

$$\{(\dots : z_{ij} : \dots) \in \mathbb{P}^{nm+n+m} \mid z_{ij} z_{kl} = z_{il} z_{kj}, \text{ para } 0 \leq i, k \leq n, 0 \leq j, l \leq m\}.$$

Demonstração. Inicialmente note que, φ está bem definida, i.é., existem i, j tais que $x_i y_j \neq 0$. Mais ainda, temos $\varphi(\mathbb{A}_i^n \times \mathbb{A}_j^m) \subset \mathbb{A}_{ij}^{nm+n+m}$. Primeiro temos que mostrar que φ tem uma inversa.

Tome $z = (\dots : z_{ij} : \dots) \in \mathbb{P}^{nm+n+m}$ tal que

$$z_{ij} z_{kl} = z_{il} z_{kj}; \forall 0 \leq i, k \leq n, 0 \leq j, l \leq m$$

suponha sem perda de generalidade que $z \in \mathbb{A}_{kl}^{nm+n+m}$, de modo que $z_{kl} = 1$. Definimos pontos $x \in \mathbb{P}^n$ e $y \in \mathbb{P}^m$ por

$$\begin{aligned} x_i &= z_{il} & \text{para } i = 0, \dots, n \\ y_j &= z_{kj} & \text{para } j = 0, \dots, m \end{aligned}$$

Note que $x_k = y_l = z_{kl} = 1$ e logo $x \in \mathbb{A}_k^n, y \in \mathbb{A}_l^m$. Vamos mostrar que o mapa definido por

$$\psi : z \mapsto (x, y)$$

é inversa de φ . De fato, tome $z \in \mathbb{A}_{kl}^{nm+n+m}$. Para x e y como definidos acima, temos

$$\varphi(x, y) = (\dots : x_i y_j : \dots) = (\dots : z_{ij} : \dots) = z,$$

visto que

$$x_i y_j = z_{il} y_{kj} = z_{ij} z_{kl} = z_{ij}.$$

³Em topologia, um espaço de Hausdorff, separado ou T_2 é um espaço topológico no qual diferentes pontos tem entornos disjuntos. Espaços de Hausdorff são nomeados em honra de *Felix Hausdorff*, um dos fundadores da topologia. A definição original de um espaço topológico de Hausdorff (1914) incluiu a propriedade Hausdorff como axiomático. "Cada espaço métrico (e, portanto, todo o espaço normalizado) é um espaço de Hausdorff"

assim $\varphi \circ \psi = 1$. Analogamente, $\psi \circ \varphi = 1$ já que se $z = \varphi(x, y)$ então $z_{ij} = x_i y_j$ e logo

$$(z_{0l} : \dots : z_{nl}) = (x_0 y_l : \dots : x_n y_l) = (x_0 : \dots : x_n) = x$$

$$(z_{k0} : \dots : z_{km}) = (x_k y_0 : \dots : x_k y_m) = (y_0 : \dots : y_m) = y$$

□

Observação 2.6. *A imagem do mergulho de Segre é uma variedade determinantal, de fato, podemos expressar $z \in \mathbb{P}^{nm+n+m}$ como uma matriz (z_{ij}) de ordem $(n+1) \times (m+1)$. A condição $z_{ij} z_{kl} = z_{il} z_{kj}$ é então a condição de anulamento dos menores 2×2 da matriz. Assim vemos que a imagem de φ é a variedade determinantal*

$$\mathcal{X}_1 = \{(z_{ij}) \mid rk(z_{ij}) \leq 1\}.$$

Identificamos então o produto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ com sua imagem $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ em \mathbb{P}^{nm+n+m} e desta forma consideramos $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ como um fechado projetivo. Via esta identificação, os fechados em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ são os subconjuntos $\mathcal{Z} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ tais que $\varphi(\mathcal{Z})$ é fechado em $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$, ou melhor, fechado em \mathbb{P}^{nm+n+m} . A topologia definida acima é a topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Novamente a topologia de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ não é a topologia produto. Vejamos que a topologia de Zariski contém todos os abertos da topologia produto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Lembre que se \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 são espaços topológicos, a topologia produto em $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ é a topologia gerada pelos conjuntos da forma $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_2$ e $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{X}_2$ onde $\mathcal{Y}_i \subset \mathcal{X}_i$ é fechado para $i = 1, 2$.

Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n$ um fechado. Vejamos que $\mathcal{X} \times \mathbb{P}^m$ é fechado em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Para isso primeiro considere um polinômio

$$\mathcal{F} = \sum_{e_0 + \dots + e_n = d} a_{e_0, \dots, e_n} T_0^{e_0} \dots T_n^{e_n}$$

homogêneo de grau d em $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$. Para cada $j = 0, \dots, m$ considere o polinômio

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{S}_j^d = \sum_{e_0 + \dots + e_n = d} a_{e_0, \dots, e_n} (T_0 \mathcal{S}_j)^{e_0} \dots (T_n \mathcal{S}_j)^{e_n}$$

Fazendo $\mathcal{Z}_{ij} = T_i \mathcal{S}_j$, obtemos um polinômio homogêneo de grau d

$$\mathcal{F}^{(j)} := \sum_{e_0 + \dots + e_n = d} a_{e_0, \dots, e_n} \mathcal{Z}_{0j}^{e_0} \dots \mathcal{Z}_{nj}^{e_n}$$

Note que $x \in \mathcal{Z}_p(\mathcal{F})$ se, e somente se, para todo $y \in \mathbb{P}^m$ temos $\varphi(x, y) \in \mathcal{Z}_p(\mathcal{F}^{(0)}, \dots, \mathcal{F}^{(m)})$. Assim, dado um fechado $\mathcal{X} = \mathcal{Z}_p(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$ de \mathbb{P}^n , então

$$\varphi(\mathcal{X} \times \mathbb{P}^m) = \mathcal{Z}_p(\mathcal{F}_1^{(0)}, \dots, \mathcal{F}_1^{(m)}, \mathcal{F}_r^{(0)}, \dots, \mathcal{F}_r^{(m)})$$

é fechado em \mathbb{P}^{nm+n+m} . Portanto $\mathcal{X} \times \mathbb{P}^m$ é fechado em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Do mesmo modo, mostre que $\mathbb{P}^n \times \mathcal{Y}$ é fechado em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ para todo fechado $\mathcal{Y} \subset \mathbb{P}^m$. Assim a topologia de Zariski é mais fina que a topologia produto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Vamos ver no Corolário 3.7 que a diagonal em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é fechado na topologia de Zariski mas, como \mathbb{P}^n não é Hausdorff, não é fechado na topologia produto.

Proposição 2.7. *Um subconjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ é fechado se, e somente se,*

$$\mathcal{X} = \{((x_0 : \dots : x_n), (y_0 : \dots : y_m)) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \mid \mathcal{H}_l(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m) = 0; \forall l = 0, \dots, k\}$$

onde os $\mathcal{H}_l(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_m)$ são polinômios bihomogêneos, i.é., homogêneos em X_0, \dots, X_n e homogêneos em Y_0, \dots, Y_m .

Corolário 2.8. *Os fechados em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ são conjuntos de zeros comuns de polinômios em $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_m]$ homogêneos em X_0, \dots, X_n .*

Corolário 2.9. *Se \mathcal{X} é um conjunto algébrico quasi-projetivo, então a diagonal*

$$\Delta_{\mathcal{X}} := \{(x, x) \mid x \in \mathcal{X}\}$$

é fechado em $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Corolário 2.10. *Se $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é um morfismo de conjuntos algébricos quasi-projetivos, então o gráfico de f*

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \mid y = f(x)\}$$

é fechado em $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Teorema 2.11. *Seja \mathcal{X} um fechado projetivo e \mathcal{Y} um conjunto algébrico quasi-projetivo. Então a projeção*

$$p : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$$

leva fechados em fechados.

Observação 2.7. *O teorema não vale em geral se \mathcal{X} é afim. Por exemplo considere a projeção*

$$p : \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1$$

então $\mathcal{X} = \mathcal{Z}(X_1 X_2 - 1)$ é fechado em \mathbb{A}^2 mas $p(\mathcal{X}) = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ não é fechado em \mathbb{A}^1 .

2.4 Teorema de Bézout: Um caso particular

Para o que se segue \mathbb{K} é um corpo algebricamente fechado.

Teorema 2.12 (Caso Afim). *Sejam f e $g \in \mathbb{K}[X, Y]$ duas curvas planas afins sem componente em comum. Então $f \cap g$ é finito.*

Exemplo 15. *Considere a parábola \mathcal{P} dada por*

$$Y = X^2.$$

Considere agora uma reta geral no plano afim,

$$aX + bY + c = 0; a, b, c \in \mathbb{K}$$

Temos que no plano afim o número de intersecções entre um reta e uma curva depende da posição relativa entre as mesmas.

A reta intersecta \mathcal{P} em dois pontos distintos, em um ponto contado com multiplicidade dois, ou em um ponto.

Teorema 2.13 (Caso Projetivo). *Seja \mathcal{F} um polinômio homogêneo em $\mathbb{K}[X, Y]$ de grau n . Então existem $a \in \mathbb{K}^*$ e pares ordenados $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2 - (0, 0)$ tais que*

$$\mathcal{F} = a \prod_{i=0}^n (a_i X - b_i Y)$$

Lema 2.14. *Sejam \mathcal{F}, \mathcal{G} curvas planas projetivas. Então $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ é finita se, e somente se, \mathcal{F}, \mathcal{G} não admitem componente em comum.*

Corolário 2.15. *Duas retas em \mathbb{P}^2 se intersectam em exatamente um ponto.*

Exemplo 16. *Considere a curva*

$$\mathcal{F} = YZ = X^2.$$

Considere uma reta geral no plano projetivo, $\mathcal{G} : Y = \alpha X + \beta Z; \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Temos se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ são dois pontos distintos ou um ponto com multiplicidade 2.

Consideremos agora o problema do cálculo do número de pontos de intersecção de duas curvas projetivas \mathcal{F}, \mathcal{G} de graus arbitrários.

Teorema 2.16 (Teorema de Bézout). *Se \mathcal{F}, \mathcal{G} são curvas planas projetivas sem componente em comum. Então o número de pontos na intersecção $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, contados com multiplicidade, é igual a $\deg(\mathcal{F}) \cdot \deg(\mathcal{G})$*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [17]

Teorema 2.17 (Teorema de Bézout - caso particular). *Se \mathcal{F}, \mathcal{G} são curvas planas projetivas sem componente em comum de graus n e 1 respectivamente. Então o número de pontos na intersecção $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, contados com multiplicidade, é igual a $1n = n$.*

Capítulo 3

Grassmannianas

A Grassmanniana $\mathbb{G}(k, E)$ é um espaço que parametriza todos os k -subespaços lineares de dimensão k do espaço vetorial E . Por exemplo, a Grassmanniana $\mathbb{G}(1, E)$ é o espaço de retas que passam pela origem em E , quando E é um espaço vetorial real ou complexo, as Grassmannianas são variedades suaves compactas e têm a estrutura de uma variedade algébrica suave. O primeiro trabalho em uma Grassmanniana não trivial é devido a *Julius Plücker*¹, que estudou o conjunto de retas no 3-espaço projetivo e os parametrizou pelo que agora são chamadas de coordenadas do Plücker. As Grassmannianas receberam este nome devido Hermann Grassmann², que introduziu o conceito geral. As notações podem variar entre autores, com $\mathbb{G}(E, k)$ sendo equivalente a $\mathbb{G}(k, E)$ e ainda alguns autores utilizando $\mathbb{G}(k, n)$ ou $\mathbb{G}(n, k)$ para denotar a Grassmanniana de subespaços de dimensões k de um espaço vetorial n -dimensional não especificado. Ao tomar uma coleção de subespaços de algum espaço vetorial, uma estrutura topológica, é possível falar sobre uma escolha contínua de subespaço ou coleções abertas e fechadas de subespaços. Dando-lhes a estrutura de uma variedade diferenciável pode-se falar sobre escolhas de subespaços suaves. Um exemplo natural vem de feixes tangentes de variedades suaves embutidos no espaço euclidiano, suponha que tenhamos uma variedade M de dimensão k embutida em \mathbb{R}^n . Em cada ponto x em M , o espaço tangente para M pode ser considerado como um subespaço do espaço tangente de \mathbb{R}^n , que é apenas \mathbb{R}^n . Consideremos \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado que por vezes iremos considerá-lo sem perda de generalidade como sendo \mathbb{C} e E^n é um espaço vetorial de dimensão igual a n sobre o corpo \mathbb{K} ; estudaremos inicialmente as propriedades da Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$, i.é., o conjunto de k -planos no espaço projetivo \mathbb{P}^n ; veremos que $\mathbb{G}(k, n)$ tem uma estrutura de variedade projetiva; estudar a dimensão; o grau e o *anel Chow*, considerando especialmente a Grassmanniana de retas em \mathbb{P}^3 onde será utilizada a imersão de Plücker para identificar essa Grassmanniana com uma superfície quádrlica em \mathbb{P}^5 .

¹Julius Plücker foi um matemático alemão que estudou e desenvolveu o conceito e o emprego de coordenadas analíticas e influenciado pela escola francesa de geometria, cujo fundador foi *Gaspard Monge*, em 1828 se tornou professor de matemática e no mesmo ano, publicou o primeiro volume de *Analytisch-geometrische Entwicklungen* onde apresentou pela primeira vez a ideia da notação geométrica simplificada, em 1831 publicou o segundo volume em que estabelece claramente uma base independente para a teoria da dualidade projetiva.

²Hermann Günther Grassmann foi um polímata alemão, renomado em sua época como linguista e altamente admirado como matemático. Entre os muitos temas que Grassmann abordou está seu ensaio sobre a teoria das marés. O elaborou em 1840, tomando como base a teoria da *Méchanique analytique* de Lagrange e da *Méchanique céleste* de Laplace, mas expondo estas teorias por métodos vetoriais, nos quais trabalhava desde 1832. Este ensaio, publicado primeiro nos *Collected Works* de 1894-1911, contém a primeira demonstração do que hoje se conhece como álgebra linear e a noção de espaço vetorial.

3.1 Definição e primeiros exemplos

Definição 3.1 (Grassmannianas). *Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{C} de dimensão n . A Grassmanniana $\mathbb{G}(k, E)$ se define como o conjunto de sub-espacos vetoriais de dimensão k do espaco vetorial E . Se $E = \mathbb{C}^n$, então se escreve $\mathbb{G}(k, n)$ em vez de $\mathbb{G}(k, \mathbb{C}^n)$.*

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Chamamos de k -Grassmanniana ou Grassmannianas de k -planos em E ao conjunto

$$\mathbb{G}(k, E) = \mathbb{G}(k, n) = \{F \subset E \mid F \text{ é um subespaço vetorial de } E \text{ de dimensão } k\}.$$

Todo elemento de $\mathbb{G}(k, n)$ se pode representar por meio de uma matriz $A \in \mathcal{A}(k, n)$, donde $\mathcal{A}(k, n)$ é o subespaço das matrizes $k \times n$, de posto k , da forma:

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k1} & \cdots & e_{kn} \end{pmatrix}.$$

Duas matrizes A e A' representam o mesmo elemento de $\mathbb{G}(k, n)$ se, e somente se, $A = TA'$, para algum $T \in GL_k$, onde GL_k é o grupo das matrizes $k \times k$ invertíveis. Então $\mathbb{G}(k, n)$ é o espaco de órbitas da ação pela esquerda do grupo GL_k sobre $\mathcal{A}(k, n)$.

Consideremos agora qualquer multi-índice: $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinalidade k , $U_I := \{\Lambda \in \mathbb{G}(k, n) \mid \Lambda \cap E_{I_0} = \{0\}\}$ onde E_{I_0} é o espaco complementar de $E_I = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle$, então temos que $\Lambda \subset U_I$ se, e somente se, Λ está representado por uma só matriz $A, k \times n$, de posto k , tal que a submatriz A^I , formada pelas colunas i_1, \dots, i_k , é invertível, ou equivalentemente, se Λ pode ser representada de forma única por uma matriz B com submatriz

$$B^I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1. \end{pmatrix}.$$

A esta representação chamaremos a *a representação normalizada* de Λ .

A partir de agora, salvo mencionado explicitamente iremos usar a notação $\mathbb{G}(k, n)$ para as Grassmannianas. Assim a projetivização de E pode ser vista como a Grassmanniana de subespaços de dimensão 1 do espaco E , i.é.,

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{G}(1, n).$$

Analogicamente $\mathbb{G}(2, E)$ é chamado de Grassmanniana de retas de $\mathbb{P}(E)$, pois toda reta $r \subset \mathbb{P}(E)$ é definida como a projetivização de um subespaço vetorial F de E de dimensão 2, i.é., $F \in \mathbb{G}(2, E)$.

No caso da dimensão do espaco vetorial E ser n podemos denotar tal Grassmanniana por $\mathbb{G}(k, n)$, i.é., o conjunto de k -planos no espaco projetivo \mathbb{P}^n e um k -Plano de \mathbb{P}^n pode ser visto por um lado como um espaco linear em \mathbb{P}^n e por outro lado como ponto de $\mathbb{G}(k, n)$. Será visto mais adiante que a Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$ pode ser imersa num determinado espaco projetivo \mathbb{P}^N .

Exemplo 17 (Grassmanniana nas retas de \mathbb{P}^3). *A Grassmanniana de retas de \mathbb{P}^3 é o conjunto dos subespaços vetoriais de \mathbb{C}^4 de dimensão 2 que passam pela origem, tais subespaços são chamados de planos do espaco vetorial \mathbb{C}^4 . A Grassmanniana das retas de \mathbb{P}^3 será denotada por $\mathbb{G}(2, 4)$ ou $\mathbb{G}(1, 3)$.*

Segue imediatamente da definição que a Grassmanniana parametriza as retas de \mathbb{P}^3 , visto que uma reta de \mathbb{P}^3 é um plano de \mathbb{C}^4 passando pela origem.

Notação

Se temos um k -plano, vamos usar uma letra maiúscula se considerarmos como um espaço linear de \mathbb{P}^n e iremos usar uma letra minúscula se considerarmos como um ponto da Grassmanniana, melhor dizendo se $l \in \mathbb{G}(2, 4)$, então l é um ponto de $\mathbb{G}(2, 4)$ que correspondente à reta $L \in \mathbb{P}^3$.

Vamos estudar alguns exemplos triviais de Grassmannianas.

Exemplo 18. Se $k = 0$, $\mathbb{G}(0, n)$ é o conjunto dos 0-planos de \mathbb{P}^n , i. é., o conjunto de pontos de \mathbb{P}^n . Então

$$\mathbb{G}(0, n) \cong \mathbb{P}^n, \forall n.$$

Exemplo 19. A Grassmanniana $\mathbb{G}(1, 2)$ é o conjunto das retas de \mathbb{P}^2 .

Se

$$\mathbb{P}^2 = \{(x_0 : x_1 : x_2)\},$$

uma reta $L \subset \mathbb{P}^2$ lugar dos zeros de uma equação linear

$$L : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0.$$

A reta L pode ser identificado pelos coeficientes a_0, a_1 e a_2 . Além disso, ao multiplicar todos os coeficientes a_i por $\mu \neq 0$, temos a mesma reta. Então

$$\mathbb{G}(1, 2) = \{(a_0 : a_1 : a_2)\} \cong \mathbb{P}^2$$

é o plano projetivo dual.

3.2 A Grassmanniana de Retas

A Grassmanniana de retas de \mathbb{P}^3 é uma generalização do espaço projetivo \mathbb{P}^3 . Note que \mathbb{P}^3 foi construído considerando \mathbb{C}^4 e um ponto de \mathbb{P}^3 é uma reta de \mathbb{C}^4 passando pela origem e neste caso os pontos serão subespaços de dimensão dois

Notação

Iremos denotar com $L_{i,j}$ a reta de \mathbb{P}^3 de equação $\{x_i = x_j = 0\}$.

Exemplo 20. A reta $L_{2,3}$ (intersecção dos dois planos $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$) pode ser dada como um conjunto de combinações lineares de dois pontos $(1 : 0 : 0 : 0)$ e $(0 : 1 : 0 : 0)$, então esta reta podemos associar matriz 2×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta não é a única maneira de fazer isso, pois qualquer par de pontos $(a : b : 0 : 0)$ e $(c : d : 0 : 0)$ associados à matriz

$$A' = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

define a mesma reta se

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Isto significa que, através da multiplicação pela esquerda da matriz A por uma matriz 2×2 invertível, obtemos o mesmo ponto de $\mathbb{G}(2, 4)$.

Em geral, se $L_{i,j} \in \mathbb{P}^3; 0 \leq i < j \leq 3$ em \mathbb{P}^3 é a reta dada pelos pontos $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$ e $\beta = (\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3), l \in \mathbb{G}(1, 3)$ pode-se associar à classe da matriz

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

modulo multiplicação do lado esquerdo por uma matriz 2×2 , invertível, cujos menores são dados por

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{pmatrix};$$

$$M_{01} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix}; M_{02} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_2 \end{pmatrix}; M_{03} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}; M_{13} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{pmatrix}; M_{23} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

Além disso, os dois pontos são diferentes, de modo que, pelo menos um dos menores 2×2 da matriz B é diferente de zero. Suponha por um momento que

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Então

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$$

definem a mesma reta. Isto significa que $\mathbb{G}(1, 3)$ contém um aberto afim

$$U_{0,1} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathbb{C}^4,$$

com coordenadas (a, b, c, d) , onde

$$a = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}; b = \frac{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3}{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}; c = \frac{\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0}{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}; d = \frac{\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0}{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}.$$

Da mesma forma, se o menor da matriz B que corresponde às colunas 0 e 2 é diferente de zero, teremos o aberto

$$U_{0,2} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a' & 0 & b' \\ 0 & c' & 1 & d' \end{pmatrix} \mid a', b', c', d' \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathbb{C}^4,$$

$$U_{0,2} = \{ \text{retas que não cortam a } L_{0,2} \}.$$

O mesmo vale para todas os menores correspondentes a duas colunas da matriz B , e então temos o seguinte:

Observação 3.1 (Dimensão de $\mathbb{G}(2, 4)$). *Uma boa estratégia de abordagem para estudar um conjunto é cobri-lo por subconjuntos menores com estruturas que nos são familiares, no nosso caso \mathbb{P}^n , vamos proceder assim: Dados $U_i = \{(x_0 : x_1 : x_2 : \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n | x_i \neq 0; i = 0, 1, 2, \dots, n\}$, \mathbb{P}^n pode ser coberto por esses U_i 's, i.é.,*

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_i,$$

agora vamos fazer o mesmo com $\mathbb{G}(2, 4)$.

Se temos que

$$\mathbb{G}(k, n) = \bigcup_{I \subseteq \{1, \dots, n\}; \#I=k} U_I,$$

$\mathbb{G}(k, n)$ dotada, como espaço de órbitas, da topologia quociente respectiva, é uma variedade topológica de dimensão complexa $k(n - k)$, compacta e conexa, donde

$$U_I \approx \mathbb{C}^{k(n-k)}$$

Proposição 3.1. *A Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 4)$ pode ser coberta com os 6 abertos afins*

$$U_{i,j} := \{ \text{retas que não cortam a } L_{i,j} \}; 0 \leq i < j \leq 3.$$

Demonstração. Seja π um plano de \mathbb{C}^4 que pode ser representado pelos vetores $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ linearmente independente, que geram o plano $\pi \subset \mathbb{C}^4$ que pode ser representado pela matriz

$$B_\pi = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

seja $U_{01} = \{\pi \in \mathbb{G}(2, 4) | \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 \neq 0\}$ de forma que $\pi \in \mathbb{C}^4$ está representado pelo gerador, cujos vetores são os vetores α e $\beta \in \mathbb{C}^4$, tomemos agora um outro gerador qualquer dado pelos vetores α' e $\beta' \in \pi$ e escrever na forma matricial como acima e ainda que a pertinência de π à U_{01} independe da base escolhida, i.é., podemos escolher geradores da forma que cada plano $\pi \in U_{01}$ possui uma representação única da seguinte forma

$$B'_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ 0 & 1 & \beta'_2 & \beta'_3 \end{pmatrix}.$$

Reciprocamente, a cada matriz como acima corresponde a um único plano de U_{01} , assim fica estabelecida uma bijeção entre os planos de U_{01} e os pontos de \mathbb{C}^4 . Logo U_{01} tem dimensão 4. Para os outros casos procedemos da mesma forma, i.é., seja $U_{ij} = \{\pi \in \mathbb{G}(2, 4) | \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i \neq 0; \text{ com } 0 \leq i < j \leq 3\}$. Existem $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ U_{ij} 's que são $U_{01}, U_{02}, U_{03}, U_{12}, U_{13}, U_{23}$ que cobrem todo $\mathbb{G}(2, 4)$, pois

$$\mathbb{G}(2, 4) = \bigcup_{0 \leq i < j \leq 3} U_{ij},$$

temos que cada um dos U_{ij} 's tem dimensão 4 e $\mathbb{G}(2, 4)$ foi coberta por uma quantidade finita desses U_{ij} 's, podemos afirmar que $\mathbb{G}(2, 4)$ tem dimensão 4. \square

3. Grassmannianas

Com este resultado sobre a Grassmanniana de retas de \mathbb{P}^3 , é possível identificarmos $\mathbb{G}(2, 4)$ com uma superfície quádrlica \mathcal{Q} em \mathbb{P}^5 , para isso consideremos o plano $\pi \in \mathbb{C}^4$ dado pelos geradores $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{C}^4$ que é representado pela matriz

$$B_\pi = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

e sejam $p_{ij} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$ onde $0 \leq i < j \leq 3$ os menores (determinantes) 2×2 da matriz A considerando as colunas i, j , temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Existe uma bijeção entre os pontos de $\mathbb{G}(2, 4)$ e os pontos $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \in \mathbb{P}^5$ que são raízes da quádrlica de \mathbb{P}^5 dada pelo polinômio*

$$\mathcal{F} = X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3.$$

Demonstração. Dado o plano $\pi \in \mathbb{G}(2, 4)$ que é representado pela matriz

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

considere a aplicação

$$\Phi : \mathbb{G}(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}^5$$

$$\pi \mapsto \Phi(\pi) = (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}),$$

onde

$$\begin{aligned} p_{01} &= \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0; & p_{02} &= \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0; & p_{03} &= \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0; \\ p_{12} &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1; & p_{13} &= \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1; & p_{23} &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \end{aligned}$$

i.é.,

$$p_{ij} = \det \begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{pmatrix} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i,$$

são os menores 2×2 da matriz B que representa o plano $\pi \in \mathbb{G}(2, 4)$. Como $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ são linearmente independente, isso implica que os p_{ij} s são nem todos nulos. Além disso se

$$B' = \begin{pmatrix} \alpha'_0 & \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta'_0 & \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \end{pmatrix},$$

é outra representação do plano $\pi \in \mathbb{G}(2, 4)$, da álgebra linear sabemos que existe uma matriz T , do tipo 2×2 invertível, tal que

$$B' = BT,$$

denotando por M_{ij} (Respectivamente M'_{ij}) a matriz formada pelas colunas i e j da matriz B (Respectivamente B'), temos assim

$$M'_{ij} = M_{ij}T \Rightarrow \det(M'_{ij}) = \det(M_{ij}T) \Rightarrow p'_{ij} = p_{ij} \det(T), \forall 0 \leq i < j \leq 3,$$

como $\det(T) \neq 0$, segue que

$$(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) = (p'_{01} : p'_{02} : p'_{03} : p'_{12} : p'_{13} : p'_{23}).$$

3. Grassmannianas

Logo Φ é bem definida e as coordenadas p_{ij} de $\pi \in \mathbb{G}(2, 4)$ são chamadas de *Coordenadas de Plücker*. Agora devemos verificar que Φ é, de fato uma bijeção entre a Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 4)$ é a quádrlica \mathcal{Q} em \mathbb{P}^5 dada pela equação $\mathcal{F} = X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3$, inicialmente devemos verificar que

$$\pi \in \mathbb{G}(2, 4) \Rightarrow \mathcal{F}(\Phi(\pi)) = 0,$$

i.é., como

$$\Phi(\pi) = (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5,$$

e substituindo as coordenadas de Plücker na equação da quádrlica \mathcal{Q} de \mathbb{P}^5 , i.é., em $\mathcal{F} = X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3$ Temos assim que

$$\mathcal{F}(\Phi(\pi)) = \mathcal{F}((p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}))$$

$$\mathcal{F}(\Phi(\pi)) = p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12}$$

$$\mathcal{F}(\Phi(\pi)) = (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) - (\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0)(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) + (\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

$$\mathcal{F}(\Phi(\pi)) = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que um ponto

$$P = (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5,$$

satisfaça a equação da quádrlica \mathcal{Q} em \mathbb{P}^5 $X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3 = 0$ e suponha também que $p_{01} \neq 0$ tomemos $p_{01} = 1$ sem perda de generalidades(o caso de outros p_{ij} são análogos), como P é raiz do polinômio, segue que

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

$$p_{23} = p_{02}p_{13} - p_{03}p_{12}$$

note que o plano $\pi_0 \in \mathbb{G}(2, 4)$ é dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_{12} & -p_{13} \\ 0 & 1 & p_{02} & p_{03} \end{pmatrix}$$

de tal forma que $\Phi(\pi_0) = (1 : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$ como queríamos demonstrar, se além disso tivermos $\Phi(\pi_1) = P$, temos que π_1 é dado éla mesma base acima, logo $\pi_0 = \pi_1$.

Assim é estabelecida a bijeção entre a Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 4)$ de retas de \mathbb{P}^3 e a quádrlica \mathcal{Q} de \mathbb{P}^5 dada pelo polinômio

$$\mathcal{F} = X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3.$$

□

Daremos algumas definições que nos irão nortear na sequencia do nosso trabalho

Definição 3.2 (Mergulho de Plücker em \mathbb{P}^5). *A aplicação*

$$\Phi : \mathbb{G}(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}^5$$

$$\pi \mapsto \Phi(\pi) = (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$$

é chamada de mergulho de Plücker em \mathbb{P}^5 , onde $p_{ij} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$ com $0 \leq i < j \leq 3$, são menores 2×2 da matriz que representa π considerando as colunas i e j .

Definição 3.3 (Coordenadas de Plücker). Dado um plano $\pi \in \mathbb{G}(2, 4)$, as coordenadas da imagem de π pelo mergulho de Plücker são chamadas de coordenadas de Plücker em \mathbb{P}^5 .

Definição 3.4 (Quádrica de Plücker-Klein). A quádrica $\mathcal{Q} = X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3$ é conhecida como quádrica de Plücker-Klein.

Definição 3.5 (Grassmanniana das Retas de \mathbb{P}^{n-1}). A Grassmanniana das retas de \mathbb{P}^{n-1} é o conjunto dos subespaços vetoriais bidimensionais de \mathbb{K}^n , tais subespaços são chamados de planos de \mathbb{K}^n . A Grassmanniana das retas de \mathbb{P}^{n-1} será denotada por $\mathbb{G}(2, n)$ ou por $\mathbb{G}(1, n-1)$.

Os elementos de $\mathbb{G}(2, n)$ são os subespaços bidimensionais do espaço vetorial \mathbb{K}^n , logo podem ser representados por matrizes 2×2 de posto igual a 2

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix},$$

consequentemente, $\mathbb{G}(2, n)$ pode ser coberta por $\binom{n}{2}$ subespaços U_{ij} , com $1 \leq i < j \leq n$, de dimensão $2(n-2)$, onde U_{12} é o conjunto das matrizes da forma

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha'_3 & \dots & \alpha'_n \\ 0 & 1 & \beta'_3 & \dots & \beta'_n \end{pmatrix}$$

os outros U'_{ij} s são obtidos de U_{12} por permutação das colunas. Sejam

$$p_{ij}(G) = \begin{vmatrix} \alpha_{1i} & \alpha_{1j} \\ \beta_{2i} & \beta_{2j} \end{vmatrix}; 1 \leq i < j \leq n,$$

os menores 2×2 da matriz G . Como a razão $\frac{p_{ij}(G)}{p_{rs}(G)}$ independe do representante do subespaço gerado por G ,

$$\Phi(G) = (p_{12}(G) : \dots : p_{ij}(G) : \dots : p_{(n-1)(n)}(G)) \in \mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1}, 1 \leq i < j \leq n,$$

depende unicamente do subespaço em questão e não do representante. Chamamos as coordenadas $p_{ij}(G) \in \mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1}, 1 \leq i < j \leq n$ de coordenadas de Plücker da Grassmanniana $\mathbb{G}(2, n)$.

Exemplo 21. Consideremos a reta $\tau \in \mathbb{P}^3$ que passa pelos pontos $\alpha = (1 : 1 : -1 : 1)$ e $\beta = (-1 : 1 : 1 : 1)$. A matriz que representa esta reta é dada por

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto as coordenadas de Plücker desta retas são

$$p_{01} = 2; p_{02} = 0; p_{03} = 2; p_{12} = 2; p_{13} = 0; p_{23} = -2.$$

No exemplo a seguir, vamos ver como alternam as coordenadas entre abertos.

Exemplo 22. Consideremos o aberto $U_{0,1}$ e o aberto $U_{0,2}$ correspondendo às matrizes da forma

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix} \text{ e } N_2 = \begin{pmatrix} 1 & a' & 0 & b' \\ 0 & c' & 1 & d' \end{pmatrix},$$

as linhas na intersecção c e c' são diferentes de zero, então a matriz N_1 é equivalente à matriz

$$N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & \frac{1}{c} & 1 & \frac{d}{c} \end{pmatrix},$$

agora, subtraindo a multiplicado pela segunda linha da primeira,

$$N_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-a}{c} & 0 & \frac{bc-ad}{c} \\ 0 & \frac{1}{c} & 1 & \frac{d}{c} \end{pmatrix},$$

onde comparando com a matriz N_2 , temos

$$a' = \frac{-a}{c}; b' = \frac{bc-ad}{c}; c' = \frac{1}{c}; d' = \frac{d}{c}.$$

Assim, a transformação entre abertos pode ser dada como

$$(a, b, c, d) \mapsto \left(\frac{-a}{c}, \frac{bc-ad}{c}, \frac{1}{c}, \frac{d}{c} \right).$$

Este é um isomorfismo

$$\{(a, b, c, d) | c \neq 0\} \mapsto \{(a', b', c', d') | c' \neq 0\},$$

e o mesmo pode ser realizado com quaisquer dois abertos, desse modo, se prova que

Proposição 3.3. $\mathbb{G}(2, 4)$ é uma prevariedade.³

O próximo passo é para provar que $\mathbb{G}(2, 4)$ é uma variedade projetiva, i.é., que pode ser visto como subvariedade de \mathbb{P}^N .

Definição 3.6. Consideramos um ponto $l \in \mathbb{G}(2, 4)$, cuja matriz de Plücker seja a matriz B dada por

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

e definimos as coordenadas de Plücker como

$$p_{ij} := \det \begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{pmatrix}.$$

³Dados feixes de Taylor \mathbf{F}^V , um espaço M com um feixe de funções com valores em \mathbb{K} é dito uma prevariedade se, localmente, ele é um subespaço localmente fechado em um espaço \mathbb{K} -linear de dimensão finita.

Seja M_{ij} o menor 2×2 dada por

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{pmatrix},$$

multiplicando a matriz B por uma matriz 2×2 invertível M_{ij} , cada p_{ij} é multiplicada por $\det(M_{ij})$. Então as p_{ij} podem ser visto como coordenadas homogêneas de um ponto em \mathbb{P}^5 . A seguinte aplicação está bem definida:

$$\Phi_{2,4} : \mathbb{G}(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}^5$$

$$l \mapsto (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}),$$

note também que, se $l \in U_{i,j}$ então a coordenada p_{ij} é diferente de zero. Se denotamos por $V_{i,j} \subset \mathbb{P}^5$ o aberto $\{p_{ij} \neq 0\}$, temos que

$$\Phi_{2,4}(\mathbb{G}(2, 4)) \cap V_{i,j} = \Phi_{2,4}(U_{i,j}).$$

Para provar que $\Phi_{2,4}$ é uma imersão algébrica é suficiente considerar as restrições $\Phi_{2,4|U_{i,j}} : U_{i,j} \rightarrow V_{i,j}$. No caso de $U_{0,1}$ temos

$$\Phi_{2,4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix} = (1 : c : d : -a : -b : ad - bc),$$

com o qual $\Phi_{2,4|U_{i,j}}$ é injetivo e todas as coordenadas de $V_{0,1}$ são polinômios nas coordenadas (a, b, c, d) de $U_{0,1}$. Então $\Phi_{2,4|U_{i,j}}$ é uma imersão algébrica e o mesmo se pode provar para a restrição de $\Phi_{2,4}$ a cada aberto $U_{i,j}$. Com isso provamos que:

Proposição 3.4. $\mathbb{G}(2, 4)$ é uma variedade projetiva de dimensão 4 contido em \mathbb{P}^5 .

Este é o mesmo que dizer que $\mathbb{G}(2, 4)$ é uma hipersuperfície em \mathbb{P}^5 . Vamos escrever sua equação.

Proposição 3.5. A imagem de $\mathbb{G}(2, 4)$ em $\mathbb{P}^5 = \{(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})\}$ é a quádrlica suave \mathcal{Q} de equação

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Demonstração. Provamos as duas inclusões.

$(\Rightarrow) \Phi_{2,4}\mathbb{G}(2, 4) \subset \mathcal{Q}$. Como anteriormente consideramos simplesmente a restrição ao aberto U_{01} . Considerando a equação

$$\Phi_{2,4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix} = (1 : c : d : -a : -b : ad - bc)$$

neste caso, obtemos

$$p_{01} = 1, p_{02} = c, p_{03} = d, p_{12} = -a, p_{13} = -b, p_{23} = ad - bc,$$

e, então estas coordenadas verificam a equação

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0,$$

da quádrlica \mathcal{Q} . O mesmo pode ser provado em todo aberto U_{ij} .

(\Leftarrow) $\mathcal{Q} \subset \Phi_{2,4}(\mathbb{G}(2,4))$. se $q = (q_{01} : q_{02} : q_{03} : q_{12} : q_{13} : q_{23}) \in \mathcal{Q}$, veremos que existe uma reta $L_q \subset \mathbb{P}^3$ tal que $\Phi_{2,4}(l_q) = q$. Sabemos que pelo menos um dos q_{ij} é diferente de zero, sem perda de generalidade suponhamos que $q_{01} \neq 0$, podemos tomar como sendo $q_{01} = 1$. Como as coordenadas de q satisfazem a equação

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0,$$

podemos escrever

$$q_{23} = q_{02}q_{13} - q_{03}q_{12}.$$

Então, verifica-se imediatamente que a reta L_q associada à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_{12} & -q_{13} \\ 0 & 1 & q_{02} & q_{03} \end{pmatrix}$$

satisfaz $\Phi_{2,4}(l_q) = q$. □

3.3 Imersão de Plücker de $\mathbb{G}(k, n)$

Nesta seção, vamos expor algo sobre o caso mais geral da Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$, os K -planos em \mathbb{P}^n . Um leitor interessado que queira aprofundar-se no assunto, pode iniciar sua busca em [1] por exemplo.

Como anteriormente, um k -plano em \mathbb{P}^n pode ser dada através de $k + 1$ pontos linearmente independentes, i.é., uma matriz de Plücker de posto $k + 1$,

$$P = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k0} & a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Podemos assumir que o determinante da matriz $A_{0,1,\dots,k}$ correspondente com as primeiras $k + 1$ colunas é diferente de zero. Multiplicando a matriz acima pela esquerda por $A_{0,1,\dots,k}^{-1}$ a mesma se torna em

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{0k+1} & \dots & b_{0n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{1k+1} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{kk+1} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}.$$

O conjunto destes k -planos é um aberto afim de $\mathbb{G}(k, n)$, de dimensão $(k + 1)(n - k)$. De um ponto de vista geométrico pode ser visto como os k -planos que não interceptam o espaço linear $\{x_0 = \dots = x_k = 0\}$.

Notação

Denotamos U_{i_0, i_1, \dots, i_k} o conjunto das retas que não cortam $\{x_{i_0} = \dots = x_{i_k} = 0\}$.

Proposição 3.6. *A família $\{U_{i_0, i_1, \dots, i_k} | 0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ é uma cobertura afim de $\mathbb{G}(k, n)$.*

Como no caso de $\mathbb{G}(2, 4)$ você pode ver que as funções de mudança entre os abertos nos permitem construir uma prevariedade. Nós também podemos definir uma imersão em \mathbb{P}^N , definindo as coordenadas de Plücker de $\mathbb{G}(k, n)$.

Definição 3.7. *A coordenada de Plücker p_{i_0, \dots, i_k} é a menor de P correspondente às colunas i_0, \dots, i_k .*

As coordenadas de Plücker são $\binom{n+1}{k+1}$ e então, pondo $N = \binom{n+1}{k+1} - 1$, a aplicação está bem definida,

$$\Phi_{k,n} : \mathbb{G}(k, n) \rightarrow \mathbb{P}^N.$$

Como antes, se denotarmos V_{i_0, \dots, i_k} o aberto de \mathbb{P}^N de equação $\{p_{i_0, \dots, i_k} \neq 0\}$, teremos que,

$$\Phi_{k,n}(\mathbb{G}(k, n)) \cap V_{i_0, \dots, i_k} = \Phi_{k,n}(U_{i_0, \dots, i_k}).$$

Usando restrições $\Phi_{k,n}|_{U_{i_0, \dots, i_k}}$ é possível provar que $\Phi_{k,n}$ é uma imersão algébrica, e isso significa que

Teorema 3.7. *A Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$ é uma variedade algébrica projetiva de dimensão $(k+1)(n-k)$ contida em $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}$.*

O grau de $\mathbb{G}(k, n)$ pode ser calculado utilizando o cálculo de *Schubert* que será apresentada na próxima seção.

3.3.1 Alguns exemplos

Exemplo 23. *Agora analisaremos a Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 4)$, por definição temos que $\mathbb{G}(2, 4)$ é o conjunto dos 2-planos π de \mathbb{P}^3 e aqui trabalharemos com os 2-planos cuja representação matricial apresenta o primeiro menor sendo dado pela matriz identidade, i.é., consideremos a representação matricial de π :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

Temos que π determina, via imersão de Plücker, um ponto

$$y = (1 : \beta_2 : \beta_3 : -\alpha_2 : -\alpha_3 : \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) = (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5.$$

note que p_{23} é uma coordenada dependente de $p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}$, donde podemos obter a seguinte relação algébrica:

$$p_{23} = -p_{03}p_{12} + p_{02}p_{13}$$

Homogeneizando em relação à variável p_{01} (que é não nula) obtemos a seguinte relação:

$$\mathcal{S} : p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12}$$

A qual chamaremos de relação de Plücker, formalmente para mostrarmos que $\mathbb{G}(2, 4)$ é de fato uma subvariedade de \mathbb{P}^5 formada pelo conjunto solução da equação de \mathcal{S} devemos observar que:

- i) As demais cartas afins correspondentes às matrizes em que um outro menor é a identidade produzem a mesma equação de \mathcal{S} . De fato, basta repetir o mesmo argumento anterior, com a diferença que agora consideraremos os 1-planos $\pi \in \mathbb{P}^3$*

em que um outro menor é dado pela matriz identidade. Este por sua vez determinará um ponto $p \in \mathbb{P}^5$ em que uma das coordenadas p_{ij} é igual a 1. Seguindo o mesmo processo acima, onde homogeneizamos em relação à variável p_{ij} , obteremos as mesmas relações dadas na equação de \mathcal{S} . Portanto, $\mathbb{G}(2, 4) \subset \mathcal{S}$.

ii) Dado um ponto $p \in \mathbb{P}^5$ que satisfaz a equação de \mathcal{S} , este deve ser imagem pela aplicação Φ de algum 2-plano $\pi \in \mathbb{P}^3$. Basta tomar $p \in \mathbb{P}^5$ que satisfaz equação de \mathcal{S} , onde sem perda de generalidade podemos assumir que $p_{01} = 1$, ou seja, $p = (1 : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$ e correspondê-lo com o seguinte 2-plano π , cuja representação matricial é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_{12} & -p_{13} \\ 0 & 1 & p_{02} & p_{03} \end{pmatrix}$$

isto mostra que $\mathcal{S} \subset \mathbb{G}(2, 4)$.

Por outro lado, podemos definir uma aplicação que mapeia o ponto

$$y = (1 : \beta_2 : \beta_3 : -\alpha_2 : -\alpha_3 : \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) = (1 : x : y : z : w : xw - yz) \in \mathbb{P}^5.$$

no ponto

$$(x : y : z : w : u) \in \mathbb{K}^5$$

onde $u = xw - yz$. Temos que $\mathbb{G}(2, 4)$ pode ser vista (localmente) como o gráfico de uma função, que neste caso é dada por

$$\varphi : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^1$$

$$(x : y : z : w) \mapsto xw - yz$$

Exemplo 24. Analisaremos de forma análoga a Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 5)$. Como no exemplo anterior tomemos 2-plano $\pi \in \mathbb{P}^4$, onde o menor referente às colunas 0 e 1 seja não nulo e admite a seguinte representação matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

Temos que as coordenadas de Plücker de π determinam um ponto em \mathbb{P}^9

$$\begin{aligned} (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{04} : p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) = \\ (1 : \beta_2 : \beta_3 : \beta_4 : -\alpha_2 : -\alpha_3 : -\alpha_4 : \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 : \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 : \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3) \end{aligned}$$

que por sua vez pode ser identificado com o ponto

$$(1 : u : v : w : x : y : z : uy - xv : uz - xw : vz - yw).$$

Além disso podemos definir uma aplicação de \mathbb{P}^9 em \mathbb{K}^6 que mapeia o ponto

$$(1 : u : v : w : x : y : z : uy - xv : uz - xw : vz - yw)$$

no ponto

$$(u, v, w, x, y, z, uy - xv, uz - xw, vz - yw).$$

Assim como visto para $\mathbb{G}(2, 4)$, temos que $\mathbb{G}(2, 5)$ é localmente o gráfico da aplicação

$$\varphi : \mathbb{K}^6 \rightarrow \mathbb{K}^3$$

$$(u, v, w, x, y, z) \mapsto (uy - xv, uz - xw, vz - yw)$$

Agora calculemos as equações que definem $\mathbb{G}(2, 5)$, consideremos um ponto em \mathbb{P}^9 como sendo da forma

$$(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{04} : p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34})$$

de $(u, v, w, x, y, z, uy - xv, uz - xw, vz - yw)$ obtemos as seguintes relações algébricas:

$$\begin{cases} p_{23} = p_{02}p_{13} - p_{12}p_{03} \\ p_{24} = p_{02}p_{14} - p_{12}p_{04} \\ p_{34} = p_{03}p_{14} - p_{13}p_{04} \end{cases}$$

Homogeneizando em relação à variável p_{01} , temos as seguintes equações quádricas;

$$\begin{cases} p_{01}p_{23} = p_{02}p_{13} - p_{12}p_{03} \\ p_{01}p_{24} = p_{02}p_{14} - p_{12}p_{04} \\ p_{01}p_{34} = p_{03}p_{14} - p_{13}p_{04} \end{cases}$$

O procedimento para mostrar que $\mathbb{G}(1, 4)$ é uma subvariedade de \mathbb{P}^9 descrita pelas equações quádricas encontradas é exatamente o mesmo do exemplo anterior.

3.3.2 Subespaços Lineares da Grassmanniana de Retas

Temos que $\mathbb{G}(2, 4)$ é identificada com uma hipersuperfície quádrica $\mathcal{Q} = V(\mathcal{P}) \subset \mathbb{P}^5$ onde:

$$\mathcal{P}(P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{12}, P_{13}, P_{23}) = P_{01}P_{23} - P_{02}P_{13} + P_{03}P_{12} = 0.$$

Dada uma equação \mathcal{P} de uma quádrica \mathcal{Q} , um ponto de \mathcal{Q} será denotado por uma letra maiúscula ($P, Q, R, \text{etc.}$) e a reta que ele representa em \mathbb{P}^3 pela letra minúscula correspondente $p, q, r, \text{etc.}$ Em uma hipersuperfície quádrica \mathcal{Q} de \mathbb{P}^5 estamos interessados em encontrar subespaços lineares de dimensão menor, como retas e planos por exemplo. Iniciaremos pelas retas contidas na Grassmanniana. Temos a proposição:

Proposição 3.8. *Sejam $p, q \subset \mathbb{P}^3$ retas. A reta $\lambda P + \mu Q \subset \mathbb{P}^5$ está contida na quádrica \mathcal{Q} se, e somente se, as retas p e q se interceptam.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que o ponto de intersecção das retas p e q é $p \cap q = (1 : 0 : 0 : 0)$. Sejam $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ e $y = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ respectivamente dois outros pontos das retas p e q . Podemos representar p e q respectivamente pelas seguintes matrizes:

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \quad A_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

para alguma escolha p_2, p_3 , donde,

$$\Phi(p) = P = (1 : p_2 : p_3 : 0 : 0 : 0) \in \mathcal{Q},$$

3. Grassmannianas

e para alguma escolha q_2, q_3 , donde,

$$\Phi(q) = Q = (1 : q_2 : q_3 : 0 : 0 : 0) \in \mathcal{Q},$$

A reta

$$\begin{aligned} \lambda P + \mu Q &= \lambda(1 : p_2 : p_3 : 0 : 0 : 0) + \mu(1 : q_2 : q_3 : 0 : 0 : 0) = \\ \lambda P + \mu Q &= (\lambda : \lambda p_2 : \lambda p_3 : 0 : 0 : 0) + (\mu : \mu q_2 : \mu q_3 : 0 : 0 : 0) = \\ \lambda P + \mu Q &= (\lambda + \mu : \lambda p_2 + \mu q_2 : \lambda p_3 + \mu q_3 : 0 : 0 : 0) \end{aligned}$$

satisfaz a equação $X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3 = 0$ da quádrlica \mathcal{Q} para qualquer λ e μ , da onde $\Phi(\lambda P + \mu Q) \subset \mathcal{Q}$.

Reciprocamente suponha que a reta $\lambda P + \mu Q \subset \mathcal{Q}$. Temos

$$\lambda P + \mu Q = (\lambda p_{01} + \mu q_{01} : \lambda p_{02} + \mu q_{02} : \lambda p_{03} + \mu q_{03} : \lambda p_{12} + \mu q_{12} : \lambda p_{13} + \mu q_{13} : \lambda p_{23} + \mu q_{23}) \in \mathcal{Q}$$

para qualquer valor dos parâmetros λ e μ , onde $P = (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$, $Q = (q_{01} : q_{02} : q_{03} : q_{12} : q_{13} : q_{23})$. Substituindo na equação $X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3 = 0$ da quádrlica temos:

$$(\lambda p_{01} + \mu q_{01})(\lambda p_{23} + \mu q_{23}) - (\lambda p_{02} + \mu q_{02})(\lambda p_{13} + \mu q_{13}) + (\lambda p_{03} + \mu q_{03})(\lambda p_{12} + \mu q_{12}) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda^2(p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12}) + \\ + \lambda\mu(p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01}) + \\ + \mu^2(q_{01}q_{23} - q_{02}q_{13} + q_{03}q_{12}) = 0 \end{aligned}$$

Como $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(Q) = 0$ e $\lambda, \mu \neq 0$, temos

$$p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01} = 0$$

pois, sejam

$$\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3) \text{ e } \alpha' = (\alpha'_0 : \alpha'_1 : \alpha'_2 : \alpha'_3) \in p$$

$$\beta = (\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3) \text{ e } \beta' = (\beta'_0 : \beta'_1 : \beta'_2 : \beta'_3) \in q$$

e pondo $p_{ij} = \alpha_i\alpha'_j - \alpha_j\alpha'_i = \beta_i\beta'_j - \beta_j\beta'_i, \forall 0 \leq i < j \leq 3$ a igualdade

$$p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01} = 0$$

significa que

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_0 & \alpha_0 & \alpha_0 \\ \alpha'_0 & \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta'_0 & \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(A) = \alpha_0(\alpha'_1(\beta_2\beta'_3 - \beta_3\beta'_2) - \alpha'_2(\beta_1\beta'_3 - \beta_3\beta'_1) + \alpha'_3(\beta_1\beta'_2 - \beta_2\beta'_1))$$

$$\begin{aligned} \det(A) = & \alpha_0(\alpha'_1(\beta_2\beta'_3 - \beta_3\beta'_2) - \alpha'_2(\beta_1\beta'_3 - \beta_3\beta'_1) + \alpha'_3(\beta_1\beta'_2 - \beta_2\beta'_1)) - \\ & - \alpha_1(\alpha'_0(\beta_2\beta'_3 - \beta_3\beta'_2) - \alpha'_2(\beta_0\beta'_3 - \beta_3\beta'_0) + \alpha'_3(\beta_0\beta'_2 - \beta_2\beta'_0)) + \\ & + \alpha_2(\alpha'_0(\beta_1\beta'_3 - \beta_3\beta'_1) - \alpha'_1(\beta_0\beta'_3 - \beta_3\beta'_0) + \alpha'_3(\beta_0\beta'_1 - \beta_1\beta'_0)) - \\ & - \alpha_3(\alpha'_0(\beta_1\beta'_2 - \beta_2\beta'_1) - \alpha'_1(\beta_0\beta'_2 - \beta_2\beta'_0) + \alpha'_2(\beta_0\beta'_1 - \beta_1\beta'_0)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = & \alpha_0(\alpha'_1q_{23} - \alpha'_2q_{13} + \alpha'_3q_{12}) - \alpha_1(\alpha'_0q_{23} - \alpha'_2q_{03} + \alpha'_3q_{02}) + \\ & + \alpha_2(\alpha'_0q_{13} - \alpha'_1q_{03} + \alpha'_3q_{01}) - \alpha_3(\alpha'_0q_{12} - \alpha'_1q_{02} + \alpha'_2q_{-1}) = 0 \end{aligned}$$

$$\det(A) = p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01} = 0$$

i.é., os quatro pontos $\alpha, \alpha' \in p$ e β, β' são linearmente dependentes e portanto as retas p e q se interceptam. \square

Já sabemos que se duas retas $p, q \in \mathbb{P}^3$ se interceptam então a reta $\lambda\varphi(p) + \mu\varphi(q) \subset \mathcal{Q}$. Será que esta reta parametriza alguma configuração de \mathbb{P}^3 ? O corolário seguinte responde essa questão:

Corolário 3.9. *Dada uma reta $L \subset \mathcal{Q}$, L parametriza o conjunto das retas de \mathbb{P}^3 contidas em um plano e passando por um ponto. Esta configuração é conhecida como feixe (plano) de retas de \mathbb{P}^3 .*

Demonstração. Seja $\lambda P + \mu Q$ a reta de \mathcal{Q} com $P = \Phi(p), Q = \Phi(q)$. Da proposição anterior sabemos que as retas p e q se interceptam em um ponto $p_0 \in \mathbb{P}^3$. Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{P}^3$ tais que $p = \langle p_0, p_1 \rangle$ e $q = \langle p_0, p_2 \rangle$. Temos então que as retas determinadas por $\langle p_0, p_1 + \eta p_2 \rangle$ são todas as retas contidas no plano gerado por $\langle p_0, p_1, p_2 \rangle$ que passam por p_0 . Por outro lado tomando $p_0 = (1 : 0 : 0 : 0), p_1 = (p_{11} : p_{12} : p_{13} : p_{14})$ e $p_2 = (p_{21} : p_{22} : p_{23} : p_{24})$, vemos facilmente que as retas $\langle p_0, p_1 + \eta p_2 \rangle$ correspondem aos pontos $P + \eta Q \subset \mathcal{Q}$. \square

Definição 3.8. *O conjunto de todas as retas contidas em um plano de \mathbb{P}^3 é chamado de plano regrado.*

Definição 3.9. *O conjunto de todas as retas de \mathbb{P}^3 que passam por um mesmo ponto é chamado de estrela.*

Um subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{G}(2, 4)$ é um espaço linear de retas se $\Phi(\mathcal{S})$ for um subespaço linear de \mathbb{P}^5 . Foi visto que os únicos subespaços lineares de \mathbb{P}^3 de dimensão 1 são os feixes planos. No caso de dimensão 2 temos o seguinte resultado:

Proposição 3.10. *Os únicos subespaços lineares de \mathbb{P}^3 de dimensão dois são os planos regrados e as estrelas. Não existem subespaços lineares de \mathbb{P}^3 de dimensão maior que dois.*

Demonstração. Sejam $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{Q}$ pontos linearmente independentes de \mathbb{P}^5 tais que qualquer combinação linear

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$$

também representa uma reta de \mathbb{P}^3 i.é.,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i \in \mathcal{Q}$$

Isto significa que qualquer par de retas p_i, p_j do conjunto p_1, p_2, \dots, p_n se interceptam. Então p_1, p_2 se interceptam em um ponto $P \in \mathbb{P}^3$ e estão contidas em um plano comum π . Temos duas possibilidades para p_3 :

- i) p_3 intercepta p_1, p_2 em pontos $Q, R \in \mathbb{P}^3$ distintos de P , donde p_3 está contida em π ;
- ii) p_3 não está contida em π mas então intercepta p_1, p_2 no ponto P .

No primeiro caso temos que:

$$\Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i P_i \right)$$

é o plano regrado, no segundo a estrela. Em qualquer caso não pode existir uma reta p_4 linearmente independente com p_1, p_2, p_3 e interceptando p_1, p_2, p_3 . Segue que $n = 3$ e a proposição está demonstrada. \square

3.4 Variedades de Schubert

Espaços vetoriais de mesma dimensão são isomorfos, do ponto de vista da álgebra linear. Por esse motivo é necessário outra maneira de distinguir os elementos de uma Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$, para alcançar os nossos objetivos definiremos *Variedades de Schubert*[15]. Seja E um espaço vetorial e $E_1, \dots, E_j, \dots, E_n$ subespaços vetoriais de E .

Definição 3.10. *Uma bandeira associada a um espaço vetorial E é uma seqüência encaixada de subespaços vetoriais de E .*

Por exemplo, uma bandeira de k subespaços vetoriais de E é dada pela seguinte seqüência:

$$E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \dots \subsetneq E_j \subsetneq \dots \subsetneq E_{k-1} \subsetneq E_k$$

donde E_j é o subespaço gerado pelos vetores e_1, \dots, e_j .

Definição 3.11. *Dada uma sucessão de números inteiros a_1, \dots, a_k , se define o conjunto:*

$$\Omega(E_1, \dots, E_k) = W_{a_1 \dots a_k} := \{ \Lambda \in \mathbb{G}(k, n) \mid \dim(\Lambda \cap E_{n-k+i-a_i}) = i \\ \text{e } \dim(\Lambda \cap E_{n-k+i-a_i-1}) = i - 1 \}.$$

é a *Variedade de Schoubert* associada com a k -upla (E_1, \dots, E_k) Se $W_{a_1 \dots a_k} \neq \emptyset$, então a_1, \dots, a_k deve ser uma sucessão não crescente de números inteiros positivos, menores o iguais que $(n - k)$ e nesta seção iremos considerar $E_i, 1 \leq i \leq 4$ subespaços vetoriais de \mathbb{P}^3 e por uma questão didática, comecemos nosso estudo pela Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 4)$ das retas de \mathbb{P}^3 .

Definição 3.12. *Sejam $E_1 \subset E_2$ dois subespaços vetoriais \mathbb{P}^3 . O conjunto*

$$\Omega(E_1, E_2) := \{ \Lambda \in \mathbb{G}(2, 4) \mid \dim \Lambda \cap E_1 \geq 0, \dim \Lambda \cap E_2 \geq 1 \}$$

é a Variedade de Schubert associada ao par (E_1, E_2) .

Note que

$$\Omega(E_1, E_2) := \{ \Lambda \in \mathbb{G}(2, 4) \mid \dim \Lambda \cap E_1 \geq 0, \dim \Lambda \cap E_2 \geq 1 \}$$

pode também ser escrito como

$$\Omega(E_1, E_2) := \{\Lambda \in \mathbb{G}(2, 4) \mid \Lambda \cap E_1 \neq \emptyset, \Lambda \subset E_2\}$$

Observação 3.2. *O par (E_1, E_2) é chamado bandeira.*

Veremos através de alguns exemplos todas as possibilidades dependendo da dimensão de E_1 e E_2 .

Exemplo 25. $E_1 \cong \mathbb{P}^2, E_2 \cong \mathbb{P}^3$

Em nosso primeiro exemplo temos que cada reta $\Lambda \subset \mathbb{P}^3$ corta o plano projetivo $E_1 \cong \mathbb{P}^2$ e cada reta está contida em $E_2 \cong \mathbb{P}^3$, e então as condições são vazias e podemos concluir que:

$$\Omega(E_1, E_2) = \Omega(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3) = \mathbb{G}(2, 4),$$

e $\dim \Omega(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3) = 4$.

Exemplo 26. $E_1 \cong \mathbb{P}^1, E_2 \cong \mathbb{P}^3$

Agora $\Omega(E_1, \mathbb{P}^3)$ é simplesmente o conjunto de retas de $E_2 \cong \mathbb{P}^3$ que interceptam a reta projetiva $E_1 \cong \mathbb{P}^1$. Se E_1 é a reta $\{x_2 = x_3 = 0\}$, podemos escrever

$$\Omega(E_1, \mathbb{P}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \right\},$$

desenvolvendo os menores e obtendo as coordenadas Plücker

$$p_{01} = \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 : p_{02} = \alpha_0\beta_2 - 0 : p_{03} = \alpha_0\beta_3 - 0 : p_{12} = \alpha_1\beta_2 - 0 : p_{13} = \alpha_1\beta_3 - 0 : p_{23} = 0,$$

neste caso temos que $p_{23} = 0$, e então $\Omega(E_1, \mathbb{P}^3)$ é a intersecção de $\mathbb{G}(2, 4)$ com o hiperplano $\{p_{23} = 0\}$, e a $\dim \Omega(E_1, \mathbb{P}^3) = 3$.

Exemplo 27. $E_1 \cong \mathbb{P}^0, E_2 \cong \mathbb{P}^3$

A variedade $\Omega(E_1, \mathbb{P}^3)$ é o conjunto das retas de $E_2 \cong \mathbb{P}^3$ que passam pelo ponto E_1 , se $E_1 = (1 : 0 : 0 : 0)$,

$$\Omega(E_1, \mathbb{P}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \right\},$$

as coordenadas de Plücker de uma reta em $\Omega(E_1, \mathbb{P}^3)$ são

$$p_{01} = \beta_1; p_{02} = \beta_2; p_{03} = \beta_3; p_{12} = 0; p_{13} = 0; p_{23} = 0,$$

i.é., $\Omega(E_1, \mathbb{P}^3)$ é o plano $\{p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0\} \subset \mathbb{P}^5$ e $\dim \Omega(E_1, \mathbb{P}^3) = 2$.

Exemplo 28. $E_1 \cong \mathbb{P}^1, E_2 \cong \mathbb{P}^2$

Neste caso, temos as retas contidas no plano $E_2 \cong \mathbb{P}^2$. Se E_2 é o plano de equação $\{x_3 = 0\}$, esta pode ser escrita como

$$\Omega(E_1, E_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

e as coordenadas de Plücker são dadas por,

$$p_{01} = \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0; p_{02} = \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0; p_{03} = 0; p_{12} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1; p_{13} = 0; p_{23} = 0$$

3. Grassmannianas

e assim, a variedade de Schubert é o plano $\{p_{03} = p_{13} = p_{23} = 0\}$, e a sua dimensão é igual a 2.

Note que no exemplo acima ao variar a reta E_1 no plano E_2 , a variedade de Schubert é a mesma e portanto, pode ser escrita como $\Omega(1, E_2)$, sendo 1 a dimensão da reta.

Exemplo 29. $E_1 \cong \mathbb{P}^0, E_2 \cong \mathbb{P}^2$

Esta variedade de Schubert é o conjunto das retas contidas no plano $E_2 \cong \mathbb{P}^2$ e que passam pelo ponto $E_1 \cong \mathbb{P}^0 \in E_2 \cong \mathbb{P}^2$. Se fizermos $E_1 = (1 : 0 : 0 : 0)$ e $E_2 = \{x_3 = 0\}$, podemos escrever

$$\Omega(E_1, E_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

onde as coordenadas de Plücker são dadas por,

$$p_{01} = \beta_1; p_{02} = \beta_2; p_{03} = 0; p_{12} = 0; p_{13} = 0; p_{23} = 0$$

Esta é a reta $\{p_{03} = p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0\} \subset \mathbb{P}^5$, e tem dimensão 1.

Exemplo 30. $E_1 \cong \mathbb{P}^0, E_2 \cong \mathbb{P}^1$

Esta variedade é o conjunto de retas que passam pelo ponto $E_1 \cong \mathbb{P}^0$ e estão contidas na reta $E_2 \cong \mathbb{P}^1$. Então este conjunto contém apenas o ponto de $\mathbb{G}(2, 4)$ correspondente à reta E_2 e a dimensão é igual a 0.

Exemplo 31. Para a Grassmanniana $\mathbb{G}(2, 4)$ temos,

$$\begin{cases} k = 2 \\ n = 4 \\ i = 1, 2 \\ a_i \in \{0, 1, 2\}. \\ E_1, E_2, E_3, E_4 \end{cases}$$

de forma que podemos definir os seguintes conjuntos:

- i) $W_{00} := \{\Lambda \in \mathbb{G}(2, 4) \mid \dim(\Lambda \cap E_2) = 0; \dim(\Lambda \cap E_3) = 1 \text{ e } \dim(\Lambda \cap E_4) = 2\}$;
- ii) $W_{10} := \{\Lambda \in \mathbb{G}(2, 4) \mid \dim(\Lambda \cap E_1) = 0; \dim(\Lambda \cap E_2) = 1; \dim(\Lambda \cap E_3) = 1 \text{ e } \dim(\Lambda \cap E_4) = 2\}$;
- iii) $W_{11} := \{\Lambda \in \mathbb{G}(2, 4) \mid \dim(\Lambda \cap E_1) = 0; \dim(\Lambda \cap E_2) = 1 \text{ e } \dim(\Lambda \cap E_3) = 2\} \Rightarrow \lambda \subset E_3, \lambda \neq E_2$.
- iv) $W_{20} := \{\Lambda \in \mathbb{G}(2, 4) \mid \dim(\Lambda \cap E_1) = 1; \dim(\Lambda \cap E_3) = 1 \text{ e } \dim(\Lambda \cap E_4) = 2\}$;
- v) $W_{21} := \{\Lambda \in \mathbb{G}(2, 4) \mid \dim(\Lambda \cap E_1) = 1 \text{ e } \dim(\Lambda \cap E_2) = 2\}$;
- vi) $W_{22} := \{\Lambda \in \mathbb{G}(2, 4) \mid \dim(\Lambda \cap E_1) = 1 \text{ e } \dim(\Lambda \cap E_2) = 2\}$.

O encerramento da célula $W_{a_1 \dots a_k}$ é dada pelo conjunto definido por

$$\sigma_{a_1 \dots a_k} := \{\Lambda \in \mathbb{G}(k, n) \mid \dim(\Lambda \cap E_{n-k+i-a_i}) \geq i\}.$$

O conjunto de $\sigma_{a_1 \dots a_k}$ é uma subvariedade fechada de $\mathbb{G}(k, n)$ e é chamada de 2 Variedade de Schubert correspondente a $a = (a_1, \dots, a_k)$, de codimensão $\sum_{i=1}^k a_i$ em $\mathbb{G}(k, n)$.

A condição para um $\Lambda \in \mathbb{G}(k, n)$ seja um dos subconjuntos fechados $\sigma_{a_1 \dots a_k}$, isto significa que as suas coordenadas satisfazem, além das equações de Grassmann, um sistema de equações lineares homogêneas: por tanto $\sigma_{a_1 \dots a_k}$ é uma subvariedade projetiva de $\mathbb{G}(k, n)$.

Além disso, o aplicação de Plücker mapea os ciclos de Schubert da forma

$$\sigma_{a_1 \dots a_k} := \{\Lambda \in \mathbb{G}(k, n) \mid \dim(\Lambda \cap E_{n-k}) \geq i\}$$

em secções hiperplanas $P(\mathbb{G}(n, k)) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$

3.5 Ciclos de Schubert e anel de Chow

Iniciaremos esta seção lembrando de forma sucinta como podemos construir o *Chow anel* de uma variedade projetiva, para o leitor interessado em aprofundar-se no assunto, consultar [9] e [7]. Daqui em diante, \mathcal{X} , será uma variedade algébrica projetiva de dimensão N e aqui \mathcal{Y} será a notação utilizada para o ciclo de Schubert.

Definição 3.13. *Um ciclo de codimensão r sobre a variedade algébrica \mathcal{X} é um elemento do grupo abeliano livre gerado pelas subvariedades de \mathcal{X} de codimensão r . Então um ciclo \mathcal{Y} pode ser escrito como,*

$$\mathcal{Y} = \sum n_i \mathcal{Y}_i,$$

onde $n_i \in \mathbb{Z}$ e \mathcal{Y}_i são subvariedades de codimensão $r, \forall i$.

Definição 3.14. *Dizemos que duas subvariedades \mathcal{Y} e \mathcal{Y}' de codimensão r são racionalmente equivalente se existir uma subvariedade $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ de codimensão $r-1$ e um morfismo $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ de forma que $\mathcal{Y} = f^{-1}(0)$ e $\mathcal{Y}' = f^{-1}(\infty)$.*

Denotamos $[\mathcal{Y}]$ a classe de equivalência da subvariedade \mathcal{Y} .

Esta relação de equivalência pode ser estendida para os ciclos de \mathcal{X} . Para cada r seja $A^r(\mathcal{X})$ o grupo de ciclos de codimensão r modulo equivalência racional. Temos que $A^0(\mathcal{X}) = \mathbb{Z}$, gerado pela classe da variedade \mathcal{X} e $A^r(\mathcal{X}) = 0$ se $r > N$.

Definição 3.15 (Grupo de Chow). *O grupo de Chow de \mathcal{X} se denota por $A^*(\mathcal{X})$ e é definido como a seguinte soma direta:*

$$A^*(\mathcal{X}) := \bigoplus_{r=0}^N A^r(\mathcal{X})$$

Para dar uma estrutura de anel ao grupo de Chow $A^*(\mathcal{X})$, temos que definir um produto entre os ciclos. A ideia é que se temos duas subvariedades \mathcal{Y} e \mathcal{W} de codimensão r e s respectivamente, a intersecção em geral é uma subvariedade de codimensão $r+s$. Passando às classes de equivalência dos ciclos podemos definir uma multiplicação

$$A^r(\mathcal{X}) \times A^s(\mathcal{X}) \rightarrow A^{r+s}(\mathcal{X})$$

Definição 3.16. *O anel de Chow de \mathcal{X} é definido por,*

$$A(\mathcal{X}) := \bigoplus_{r=0}^N A^r(\mathcal{X})$$

juntamente com o produto,

$$A^r(\mathcal{X}) \times A^s(\mathcal{X}) \rightarrow A^{r+s}(\mathcal{X})$$

e é denotado por $A^*(\mathcal{X})$.

Observação 3.3. *O anel de Chow também é chamado de Anel de Intersecção de Chow.*

Antes de ver o que acontece no caso da Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$, vamos definir os *ciclos de Schubert*.

Seja $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \dots \subsetneq E_j \subsetneq \dots \subsetneq E_{k-1} \subsetneq E_k$ uma bandeira de k de subespaços lineares e seja $\Omega(E_1, \dots, E_k)$ a variedade de Schubert correspondente. As projetividades⁴ de \mathbb{P}^n agem de forma transitiva sobre o conjunto das bandeiras de mesma dimensão e então também sobre variedades Schubert correspondentes.

Definição 3.17. *Uma classe de equivalência de $\Omega(E_1, \dots, E_k)$ por projetividades é chamado ciclo de Schubert e é denotado por $\Omega(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ onde $\alpha_i = \dim E_i$.*

Exemplo 32. *No caso de $\mathbb{G}(1, 3)$, temos que existem seis tipos de classes de variedades Schubert, dependendo das dimensões dos subespaços lineares:*

- i) $\Omega(2, 3)$ é o ciclo Schubert correspondente à variedade $\Omega(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3) = \mathbb{G}(1, 3)$ e $\dim \Omega(2, 3) = 4$;
- ii) $\Omega(1, 3)$ é o ciclo Schubert correspondente à variedade $\Omega(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3)$ e $\dim \Omega(1, 3) = 3$;
- iii) $\Omega(0, 3)$ é o ciclo Schubert correspondente à variedade $\Omega(\mathbb{P}^0, \mathbb{P}^3)$ das retas que passam por um ponto, com $\dim \Omega(0, 3) = 2$;
- iv) $\Omega(1, 2)$ é o ciclo Schubert correspondente à variedade $\Omega(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2)$ das retas em um plano, com $\dim \Omega(1, 2) = 2$;
- v) $\Omega(0, 2)$ é o ciclo Schubert correspondente à variedade $\Omega(\mathbb{P}^0, \mathbb{P}^2)$ das retas contidas em um plano e que passam por um ponto e tem $\dim \Omega(0, 2) = 1$;
- vi) $\Omega(0, 1)$ é o ciclo Schubert correspondente à variedade $\Omega(\mathbb{P}^0, \mathbb{P}^1)$ de uma única reta e tem $\dim \Omega(0, 1) = 0$.

Em resumo, os ciclos em Schubert $\mathbb{G}(1, 3)$ são os seguintes:

$$\begin{aligned} \dim 0 &\leftrightarrow \Omega(0, 1) \\ \dim 1 &\leftrightarrow \Omega(0, 2) \\ \dim 2 &\leftrightarrow \Omega(0, 3), \Omega(1, 2) \\ \dim 3 &\leftrightarrow \Omega(1, 3) \\ \dim 4 &\leftrightarrow \Omega(2, 3) \end{aligned}$$

De posse dessas informações podemos enunciar o seguinte resultado

Teorema 3.11. *O grupo $A^r(\mathbb{G}(k, n))$ é gerado pelos ciclos de Schubert $\Omega(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ de codimensão r .*

⁴Chamamos de projetividade uma combinação finita de correspondências elementares. Assim, uma projetividade relaciona feixe de pontos (ou retas) com feixe de retas (ou pontos).

Então, qualquer ciclo de codimensão r pode ser escrito como uma combinação linear de ciclos de Schubert de codimensão r . Assim para conhecer a estrutura do anel $A(\mathbb{G})$ é suficiente saber como se realiza a multiplicação dos ciclos de Schubert.

Exemplo 33. Se $\mathbb{G} = \mathbb{G}(1, 3)$

$$\begin{aligned} A^4(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(0, 1) \rangle \\ A^3(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(0, 2) \rangle \\ A^2(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(0, 3), \Omega(1, 2) \rangle \\ A^1(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(1, 3) \rangle \\ A^0(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(2, 3) \rangle \end{aligned}$$

Então $A^r(\mathbb{G}) = \mathbb{Z}$ para cada $r \neq 2$, e $A^2(\mathbb{G}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Isto significa que por exemplo se \mathcal{C} é uma subvariedade de codimensão 3, isto é uma curva, pode-se escrever

$$[\mathcal{C}] = d \cdot \Omega(0, 2),$$

com $d \in \mathbb{Z}$. Então a classe de \mathcal{C} é identificada com o número d chamado o grau de \mathcal{C} . Se \mathcal{S} é uma subvariedade de codimensão 2, i.é., uma superfície,

$$[\mathcal{S}] = a \cdot \Omega(0, 3) + b \cdot \Omega(1, 2).$$

O par (a, b) é chamado o *bigrau* de \mathcal{S} .

Exemplo 34. De modo mais geral, se considerarmos a Grassmanniana $\mathbb{G} = \mathbb{G}(1, n)$, onde sabemos que $\dim \mathbb{G} = 2n - 2$ e $\dim \Omega(\alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 + \alpha_1 - 1$, então os geradores de $A^r(\mathbb{G})$ são os ciclos de Schubert $\Omega(\alpha_0, \alpha_1)$ com

$$\alpha_0 + \alpha_1 - 1 = 2n - 2 - r.$$

Assim, por exemplo

$$\begin{aligned} A^{2n-2}(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(0, 1) \rangle \\ A^{2n-1}(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(0, 2) \rangle \\ A^{2n}(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(0, 3), \Omega(1, 2) \rangle \\ &\vdots = \vdots \\ A^2(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(n-3, n), \Omega(n-2, n-1) \rangle \\ A^1(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(n-2, n) \rangle \\ A^0(\mathbb{G}) &= \langle \Omega(n-1, n) \rangle \end{aligned}$$

Tal como no caso de $\mathbb{G}(1, 3)$:

- i) Se $\mathcal{C} \subset \mathbb{G}$ é uma curva e $[\mathcal{C}] = d \cdot \Omega(0, 2)$, e $d \in \mathbb{Z}$ é o grau;
- ii) Se \mathcal{S} é uma superfície, $[\mathcal{S}] = a \cdot \Omega(0, 3) + b \cdot \Omega(1, 2)$ e (a, b) é o bigrau;
- iii) Se \mathcal{W} é uma hipersuperfície, $[\mathcal{W}] = d \cdot \Omega(n-2, n)$, d é o grau, $\Omega(n-2, n)$ é uma secção hiperplana de \mathbb{G} .

3.6 Cálculo de Schubert em $\mathbb{G}(1, n)$

Existem fórmulas gerais sobre como dois ciclos de Schubert multiplicam entre si, ao leitor que queira se aprofundar mais no referido assunto pode iniciar sua busca em [10]. Não iremos aqui descrever essas fórmulas, mas vamos ver como você pode fazer alguns cálculos manuais.

Começamos com alguns produtos no anel Chow de $\mathbb{G}(1, 3)$ utilizando a intersecção da variedades Schubert.

- i) Se p é um ponto e π é um plano de tal modo que $p \notin \pi$, não existe nenhuma reta contida em π e passando por p , i. é., $\Omega(p, \mathbb{P}^3) \cap \Omega(1, \pi) = \emptyset$. Isto resulta em,

$$\Omega(0, 3) \cdot \Omega(1, 2) = 0;$$

- ii) Se π e π' são dois planos distintos, a única reta que pertence $\Omega(1, \pi)$ e $\Omega(1, \pi')$ é a intersecção de π e π' , então,

$$\Omega(1, 2)^2 = \Omega(0, 1);$$

- iii) Agora, vamos examinar $\Omega(1, 3) \cdot \Omega(0, 3)$. Como representantes consideremos as variedades $\Omega(R, \mathbb{P}^3)$ e $\Omega(p, \mathbb{P}^3)$, onde p é um ponto que não pertence a R . A intersecção destas duas variedades é o conjunto das retas que passam por p e contidas no plano gerado por p e R . Então,

$$\Omega(1, 3) \cdot \Omega(0, 3) = \Omega(0, 2).$$

- iv) Para calcular $\Omega(1, 3)^2$, consideremos as retas R e R' que se interceptam em um único ponto. A intersecção das variedades de Schubert $\Omega(R, \mathbb{P})$ e $\Omega(R', \mathbb{P})$ é o conjunto das retas que interceptam a reta R e a reta R' . Cada reta que passa pelo ponto de intersecção tem essa propriedade e também cada reta contida no plano gerado por R e R' . Esse fato nos diz que,

$$\Omega(1, 3)^2 = \Omega(0, 3) + \Omega(1, 2).$$

Exemplo 35. *Vimos que $\mathbb{G}(1, 3)$ pode ser visto como uma hipersuperfície quádrlica em \mathbb{P}^5 . Utilizando o cálculo de Schubert para vermos de outra maneira que o grau de $\mathbb{G}(1, 3)$ é igual a dois.*

Sabemos que $\mathbb{G}(1, 3)$ tem dimensão 4, e por isso o seu grau é o número de pontos que vão cortar $\mathbb{G}(1, 3)$ com uma reta em \mathbb{P}^5 , este é o mesmo que corta $\mathbb{G}(1, 3)$ com 4 hiperplanos gerais. Ao cortar $\mathbb{G}(1, 3)$ com um hiperplano temos uma variedade cujo ciclo de Schubert é $\mathbb{G}(1, 3)$ e então,

$$\deg \mathbb{G}(1, 3) = \Omega(1, 3)^4.$$

Usando as fórmulas acima temos,

$$\Omega(1, 3)^4 = (\Omega(1, 3)^2)^2$$

$$\Omega(1, 3)^4 = (\Omega(0, 3) + \Omega(1, 2))^2$$

$$\Omega(1, 3)^4 = \Omega(0, 3)^2 + 2\Omega(0, 3) \cdot \Omega(1, 2) + \Omega(1, 2)^2$$

$$\Omega(1, 3)^4 = \Omega(0, 1) + 0 + \Omega(0, 1)$$

$$\Omega(1, 3)^4 = 2\Omega(0, 1)$$

Estes mesmos cálculos permitem responder à seguinte pergunta:

Se L_1, L_2, L_3 e L_4 são 4 retas gerais em \mathbb{P}^3 , quantas são as retas que cortam $L_i; \forall i = 1, \dots, 4$?

Na verdade, o que estamos procurando são as retas na intersecção da $\Omega(L_i, \mathbb{P}^3); \forall i = 1, \dots, 4$. O número destas retas é exatamente o grau $\Omega(1, 3)^4$, i.é., é igual a 2. Então, existem duas retas que cortam 4 retas dadas em \mathbb{P}^3 .

3.7 Exemplos de curvas e superfícies em $\mathbb{G}(1, 3)$ e $\mathbb{G}(1, 5)$

Vimos que se $\mathcal{C} \subset \mathbb{G}(1, n)$ é uma curva,

$$[\mathcal{C}] = d \cdot \Omega(0, 2),$$

$d \in \mathbb{Z}$ é o grau de \mathcal{C} . Uma reta em $\mathbb{G}(1, 3)$ é uma curva de grau $d = 1$. Por um lado, sabemos que cada variedade de Schubert $\Omega(p, \pi)$, tem como classe $\Omega(0, 2)$, pois é uma reta. Pode-se provar que todas as retas de $\mathbb{G}(1, n)$ são desta forma. Então:

Proposição 3.12. *As retas em $\mathbb{G}(1, n)$ correspondem às feixes rectas contidas em planos.*

Exemplo 36. *Seja agora $\mathcal{C} \subset \mathbb{G}(1, 3)$ a curva correspondente às retas de um rulling de uma quádrlica suave \mathcal{Q} de \mathbb{P}^3 . Para calcular o grau de uma curva em $\mathbb{G}(1, 3)$ podemos utilizar a igualdade,*

$$\Omega(0, 2) \cdot \Omega(1, 3) = \Omega(0, 1),$$

i.é., $d = [\mathcal{C}] \cdot \Omega(1, 3)$ é o número de Retas de \mathcal{C} que intersectam uma reta L de \mathbb{P}^3 . Neste exemplo, temos de $L \cap \mathcal{Q}$ são dois pontos, pois \mathcal{Q} é uma hipersuperfície quádrlica, e para cada ponto passa exatamente uma reta da família, de modo,

$$[\mathcal{C}] = 2 \cdot \Omega(0, 2).$$

i.é., \mathcal{C} é uma cônica contida em $\mathbb{G}(1, 3)$.

Acabamos de ver dois exemplos de superfícies em Grassmannianas $\mathbb{G}(1, n)$.

Exemplo 37. *Vamos observar inicialmente quais são os planos contidos em $\mathbb{G}(1, 3)$. Geometricamente, se $\Pi \subset \mathbb{G}(1, 3)$ é uma superfície plana, por cada par de pontos $l_1, l_2 \in \Pi$, a reta $\langle l_1, l_2 \rangle$ tem de estar contida em Π . Isto significa que as retas L_1 e L_2 se cruzam em um ponto p , e todas as retas que passam por p , contidas em $\pi = \langle L_1, L_2 \rangle$ estão em Π . Se agora l é outro ponto qualquer de Π , L , tem que cortar L_1 e L_2 . Temos duas possibilidades:*

- i) *Cada reta L passa através do ponto p , e então $\Pi = \Omega(p, \mathbb{P}^3)$ é um α -plano;*
- ii) *Cada reta L está contida em π , e então $\Pi = \Omega(1, \pi)$ é um β -plano.*

Com este resultado acabamos de provar a seguinte proposição.

Proposição 3.13. *Os únicos planos contidos em $\mathbb{G}(1, 3)$ são os α -planos e β -planos.*

3.8 A quádrlica suave de \mathbb{P}^5

Uma hipersuperfície quádrlica em \mathbb{P}^n é dada por zeros de um polinômio homogêneo \mathcal{F} em $n + 1$ variáveis, de grau 2 que está associada a uma forma bilinear sobre um corpo algebricamente fechado com apenas um único invariante a saber, o seu índice. Em nosso trabalho isto significa que toda quádrlica \mathcal{Q} é projetivamente equivalente a uma outra forma

$$X_0^2 + X_0X_1 + \dots + X_0X_r + X_1X_2 + \dots + X_1X_r + \dots + X_iX_j + \dots + X_r^2$$

Para $0 \leq i < j \leq r$

Uma hipersuperfície é não singular se, e somente se, $r = n$, i.é., quando a forma associada é não degenerada.

O nosso interesse é em hipersuperfícies em \mathbb{P}^3 , que nos remetem a exatamente quatro possibilidades

- i) Se tivermos $r = 3$, temos uma quádrlica não singular;

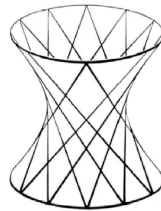


Figura 3.1: A quádrlica não singular de \mathbb{P}^3

- ii) Se tivermos $r = 2$, temos um cone quádrlico;

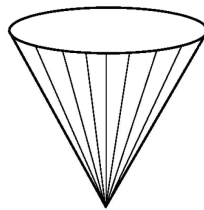


Figura 3.2: O cone quádrlico de \mathbb{P}^3

- iii) Se tivermos $r = 1$, temos a união de dois planos simples;

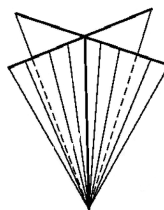


Figura 3.3: Dois planos simples de \mathbb{P}^3

iv) Se tivermos $r = 0$, temos um plano duplo;

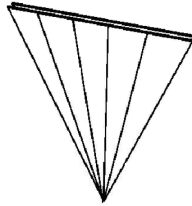


Figura 3.4: Um plano duplo de \mathbb{P}^3

Uma outra forma de obtermos a quádrlica suave é através do *mergulho de Segre*, como visto no Teorema 2.6

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$(x_0 : x_1 : y_0 : y_1) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1)$$

Em coordenadas x, y, z, t a imagem desse mapa é a *quádrlica de Segre*, dada por,

$$xt = yz$$

Esta quádrlica possui duas famílias distintas de retas que são facilmente descritas

$(a : b) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow$ retas passando pelos pontos;

$$\begin{cases} (a : 0 : b : 0) \\ (0 : a : 0 : b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bx = az \\ by = at \end{cases}$$

$\mathbb{P}^1 \times (c : d) \rightarrow$ retas passando pelos pontos;

$$\begin{cases} (c : d : 0 : 0) \\ (0 : 0 : c : d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = cy \\ dy = ct \end{cases}$$

Note a descrição do polinômio $xt - yz$ como o determinante da matriz,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

apresenta as duas famílias de retas de forma bem simples:

- i) As retas de uma das famílias são obtidas impondo uma mesma relação entre colunas;
- ii) As retas da outra família são obtidas impondo uma mesma relação entre linhas;

Resumo

Se \mathcal{Q} é uma quádrlica suave em \mathbb{P}^3 , então:

- i) \mathcal{Q} é uma superfície regrada, com duas famílias infinitas de retas;
- ii) Por cada ponto de \mathcal{Q} passa exatamente uma reta de cada família;

- iii) Duas retas de mesma família são disjuntas;
- iv) Uma reta de uma família intersecta um membro qualquer da outra família de retas em um único ponto em \mathcal{Q} .

Vimos que $\mathbb{G}(2, 4)$ pode ser visto como uma quádrlica suave de \mathbb{P}^5 cuja equação é dada por,

$$X_{01}X_{23} - X_{02}X_{13} + X_{03}X_{12} = 0$$

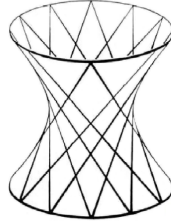


Figura 3.5: A quádrlica suave de \mathbb{P}^3

Proposição 3.14. *A quádrlica \mathcal{Q} é não singular.*

Demonstração. Seja

$$\mathcal{F} = X_{01}X_{23} - X_{02}X_{13} + X_{03}X_{12}$$

temos que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_{01}} = X_{23}; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_{02}} = -X_{13}; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_{03}} = X_{12}; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_{12}} = X_{03}; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_{13}} = -X_{02}; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X_{23}} = X_{01}$$

i.é.,

$$X_{01} = 0; \quad X_{02} = 0; \quad X_{03} = 0; \quad X_{12} = 0; \quad X_{13} = 0; \quad X_{23} = 0$$

como a única solução deste sistema é a origem em \mathbb{C}^6 , concluímos que a quádrlica \mathcal{Q} é não singular. \square

Além disso, se o \mathcal{Q} representa qualquer quádrlica suave, existe uma projetividade que transforma \mathcal{Q} em

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0,$$

i.é., o estudo da Grassmanniana $\mathbb{G}(1, 3)$, permite-nos dizer algo sobre a quádrlica suave de \mathbb{P}^5 .

Inicialmente vimos que em $\mathbb{G}(1, 3)$ há dois famílias de planos, os α -planos e os β -planos.

- i) **α -planos** são as variedades de Schubert da forma $\Omega(p, \mathbb{P}^3)$ e então existe um por cada ponto de $p \in \mathbb{P}^3$. Formam uma família de dimensão 3 parametrizada por \mathbb{P}^3 . Vamos ver como os α -planos interceptam entre eles. Se $\Omega(p, \mathbb{P}^3)$ e $\Omega(p', \mathbb{P}^3)$ são dois α -planos, a intersecção é a família de retas de \mathbb{P}^3 que passam por p e por p' . Então, os dois planos intersectam num único ponto de $\mathbb{G}(1, 3)$ correspondente à reta $\langle p, p' \rangle$.
- ii) **β -planos** são variedades de Schubert da forma $\Omega(1, \pi)$, e por isso são parametrizados por \mathbb{P}^3 dual (a família dos planos de \mathbb{P}^3). Eles também formam uma família de dimensão igual a 3. Se $\Omega(1, \pi)$ e $\Omega(1, \pi')$ são dois β -planos, a intersecção é a família de retas de \mathbb{P}^3 contidas em π e π' . Então os β -planos se cruzam em um único ponto em $\mathbb{G}(1, 3)$, correspondente à reta $\pi \cap \pi'$.

Consideramos agora um α -plano $\Omega(p, \mathbb{P}^3)$ e um β -plano $\Omega(p, \pi)$ geralmente $p \notin \pi$, então não existem retas em π que passem pelo ponto p . Então α -planos $\Omega(p, \mathbb{P}^3)$ não se cruzam. Veremos dois casos particulares:

- i) Fixando o β -plano $\Omega(1, \pi)$ e considerando um ponto $q \in \pi$. Neste caso, a intersecção contém todas as retas que passam por q e estão contidos em π , i.é., um feixe de retas. Vimos que um feixe de retas de \mathbb{P}^3 corresponde a uma reta em $\mathbb{G}(1, 3)$.

Então, para cada β -plano existe uma família de dimensão 2 de α -planos que cruzam o β -plano ao longo de uma reta.

- ii) Agora fixando o α -plano $\Omega(p, \mathbb{P}^3)$ e considerando um plano π que contém o ponto p , o α -plano $\Omega(p, \mathbb{P}^3)$ e o β -plano $\Omega(1, \pi)$ interceptam-se ao longo de uma reta.

Então, para cada α -plano existe uma família de dimensão 2 de β -planos que cortam o α -plano ao longo de uma reta.

Em conclusão, podemos tirar a seguinte:

Proposição 3.15. *A quádrlica suave $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$ contém duas famílias de planos de dimensão 3, tais que:*

- i) *Os planos da mesma família são cortadas dois a dois em um ponto;*
ii) *Um plano de uma família não intersecta o plano genérico da outra;*
iii) *Se fixarmos um plano de uma família, existem ∞^2 planos de outra família que lhe interceptam ao longo de uma reta.*

Capítulo 4

As 27 retas de uma superfície cúbica

4.1 Considerações iniciais

Uma superfície cúbica é uma variedade projetiva estudada em geometria algébrica, é uma superfície algébrica no espaço projetivo tridimensional definido por um único polinômio cúbico quaternário que é homogêneo de grau 3 (daí, cúbico).

Faremos algumas considerações iniciais sobre retas em superfícies, i.é., que uma superfície cubica em \mathbb{P}^3 contém pelo menos uma reta (ou número finito delas) e que uma superfície geral de grau $d \geq 4$ não contém retas e depois iremos restringir o problema ao nosso caso específico.

Lema 4.1. *As condições que expressam o fato da reta L estar contida na superfície \mathcal{S} são relações algébricas entre os p_{ij} e os coeficientes de \mathcal{F} , homogêneos em ambos os conjuntos.*

Demonstração. Sejam

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$$

vetores linearmente independente em \mathbb{K}^4 tais que $x, y \in L$ e seja $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{K}^4$ o 2-espaço vetorial gerado por x, y , assim considere

$$\mathcal{L} = \{\langle \alpha, y \rangle x - \langle \alpha, x \rangle y \mid \alpha \in \mathbb{K}^4\}$$

dado $z \in \mathcal{L}$, sejam $a, b \in \mathbb{K}$ de forma que $z = ax + by$. Parametrizando a reta L em termos das suas coordenadas de Plücker, queremos provar que existe $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^4$ de forma que

$$\langle \alpha, y \rangle x - \langle \alpha, x \rangle y = z$$

i.é.,

$$\langle \alpha, y \rangle = x_0\alpha_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = -b$$

$$\langle \alpha, x \rangle = y_0\alpha_0 + y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 = a$$

como x, y são linearmente independentes, o sistema tem solução.

A cada vetor z de \mathcal{L} de coordenadas $z_i = \sum_{j=0}^3 \alpha_j p_{ij}$, onde $p_{ij} = x_i y_j - y_i x_j$, i.é., as coordenadas de um ponto de l tem a forma

$$(\alpha_1 p_{01} + \alpha_2 p_{02} + \alpha_3 p_{03} : -\alpha_0 p_{01} + \alpha_2 p_{12} + \alpha_3 p_{13} : -\alpha_0 p_{02} - \alpha_1 p_{12} + \alpha_3 p_{23} : -\alpha_0 p_{03} - \alpha_1 p_{13} - \alpha_2 p_{23})$$

onde α_j percorre os vetores não nulos de \mathbb{K}^4 . Substituindo estas expressões na equação

4. As 27 retas de uma superfície cúbica

$\mathcal{F}(X : Y : Z : T) = 0$ e igualando a zero os coeficientes de todos os monômios em α_i , deduzimos (pois o corpo \mathbb{K} é infinito) que a condição $L \subset \mathcal{S}$ é expressa por um conjunto finito de relações algébricas, que são lineares com respeito aos coeficientes de \mathcal{F} , e homogêneas de grau d com respeito às coordenadas de Plücker p_{ij} . \square

Agora iremos restringir ao nosso caso específico de superfície cúbica em \mathbb{P}^3 e por superfície cúbica, digamos \mathcal{S} , entendemos como sendo o lugar dos zeros do espaço projetivo \mathbb{P}^3 de um polinômio homogêneo de grau igual a 3 em 4 variáveis, i.é.,

$$\mathcal{S} = \{(X : Y : Z : T) | \mathcal{F}(X : Y : Z : T) = 0\}$$

o número de coeficientes do tal polinômio de grau d em $n + 1$ variáveis é dado por

$$\binom{n+d}{d} = \binom{6}{3} = 20$$

$$\mathcal{F}(X : Y : Z : T) = 0$$

$$\mathcal{F}(X : Y : Z : T) = a_0X^3 + a_1X^2Y + a_2X^2Z + a_3X^2T + a_4XY^2 + a_5XZ^2 + a_6XT^2 + a_7XYZ + a_8XYT + a_9XZT + a_{10}Y^3 + a_{11}Y^2Z + a_{12}Y^2T + a_{13}YZ^2 + a_{14}YT^2 + a_{15}YZT + a_{16}Z^3 + a_{17}Z^2T + a_{18}ZT^2 + a_{19}T^3 = 0.$$

Suponha que \mathcal{S} é irredutível, \mathcal{S} é não singular.

Exemplo 38. E se \mathbb{P}^3 temos as coordenadas homogêneas $(X : Y : Z : T)$, Então o conjunto de pontos onde $X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 0$ é uma superfície cúbica chamada superfície cúbica de Fermat;

A superfície de Clebsch é o conjunto de pontos onde $X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = (X + Y + Z + T)^3$;

A superfície cúbica nodal de Cayley é o conjunto de pontos onde $WXYZ + XYZ + YZT + ZTX = 0$

Exemplo 39. Seja a superfície cúbica em \mathbb{P}^3

$$\mathcal{F}(X, Y, Z) = Y^2Z - X^2Z - X^3 = 0$$

Derivando parcialmente em relação às variáveis X, Y, Z temos,

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X} = -2XZ - 3X^2 \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Y} = 2YZ \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Z} = Y^2 - X^2 \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 \begin{cases} -2XZ - 3X^2 = 0 \\ 2YZ = 0 \\ Y^2 - X^2 = 0 \end{cases}$$

da terceira igualdade de \mathcal{S}_2 temos $Y^2 = X^2 \Rightarrow Y = \pm X$ e da segunda equação temos $2YZ = 0 \Rightarrow Y = 0$ ou $Z = 0$

i) $Y \neq 0, Z = 0$ não pode acontecer, pois $2XZ - 3X^2 = 0$

ii) $Y = 0, Z \neq 0$ neste caso temos,

$$\mathcal{S}_3 \begin{cases} Y = 0 \Rightarrow X = 0 \\ Z \neq 0 \text{ Podemos assumir que } Z = 1 \end{cases}$$

assim resulta que $(0 : 0 : 1)$ é um ponto de singularidade.

Queremos mostrar que *toda Superfície cúbica não singular de \mathbb{P}^3 contém exatamente 27 retas* e este problema consiste inicialmente em provar a existência de pelo menos uma reta em toda superfície cúbica que será o nosso ponto de partida até chegarmos a provar que, toda superfície cúbica não singular $S \subset \mathbb{P}^3$ possui exatamente 27 retas.

4.1.1 Superfícies cúbicas singulares

Um exemplo de uma superfície cúbica singular é a *superfície cúbica nodal de Cayley* dada por

$$TXY + XYZ + YZT + ZTX = 0$$

Com 4 pontos nodais singulares em $(0 : 0 : 0 : 1)$ e suas permutações. As superfícies cúbicas singulares também contém retas racionais, e o número e arranjo das retas está relacionado ao tipo da singularidade.

As superfícies cúbicas singulares foram classificadas por Schläfli - 1863, e sua classificação foi descrita por Cayley - 1869, Bruce e Wall em 1979.

4.2 As 27 retas

O *teorema de Cayley-Salmon - 1849* afirma que em uma superfície cúbica suave sobre um corpo algebricamente fechado contém 27 retas e podem ser caracterizados independentemente da incorporação no espaço projetivo, como as retas racionais com número de auto-intersecção igual a -1 , i.é., em outras palavras, as -1 -curvas na superfície. Uma superfície cúbica suave também pode ser descrita como uma superfície racional obtida por inchamento de seis pontos no plano projetivo em posição geral (neste caso, "posição geral" significa que não há três pontos alinhados e seis não estão em uma seção cônica). As 27 retas são os divisores excepcionais acima dos 6 pontos inchados, as transformações apropriadas das 15 retas em \mathbb{P}^2 que unem dois dos pontos inchados e as transformações apropriadas das 6 cônicas em \mathbb{P}^2 que contêm todos menos um dos pontos explodidos.

Clebsch deu um modelo de superfície cúbica, denominada *superfície diagonal de Clebsch* onde todas as 27 retas são definidas sobre o corpo $\mathbb{Q}\sqrt{5}$ e em particular, são reais.

Como parte principal de nosso trabalho estamos interessados em demonstrar o resultado seguinte:

Teorema 4.2. [*Teorema de Cayley-Salmon - 1849*] *Toda Superfície cúbica não singular de \mathbb{P}^3 contém 27 retas.*

Seja \mathcal{S} uma superfície cúbica nas hipóteses acima, esta demonstração será dividida em quatro partes, que são elas:

Parte 1 Toda superfície \mathcal{S} contém pelo menos uma reta, por exemplo a reta L , como será visto na Proposição 4.3;

Parte 2 Dada a reta $L \subset \mathcal{S}$ obtida anteriormente, existem exatamente outras dez retas distintas entre si e distintas da reta L de \mathcal{S} , que interceptam a reta L e distribuídas em pares de cinco, por exemplo $(L_i, L'_i) \quad \forall i = 1, \dots, 5$, de forma que:

- Cada par de retas é coplanar com a reta L ;
- Pares com $i \neq j$ são disjuntas, i.é., não se interceptam. Como veremos na Proposição 4.5;

4. As 27 retas de uma superfície cúbica

Note que este resultado nos permite afirmar que toda superfície cúbica contém pelo menos duas retas disjuntas, e assim.

Parte 3 Dadas $L, M \subset \mathcal{S}$, duas retas disjuntas como acima, existem exatamente outras quinze retas de \mathcal{S} com uma configuração particular e será vista na Proposição 4.7;

Parte 4 A partir da configuração das dezessete retas de \mathcal{S} obtida anteriormente, com a Proposição 4.9 deduz-se que existem exatamente outras dez retas de \mathcal{S} que possuem uma configuração especial.

Então, vamos lá em busca de nossas retas!

Proposição 4.3. *Toda superfície cúbica $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}^3$ contém pelo menos uma reta L .*

Demonstração. Seja \mathbb{G} o conjunto formado pelas retas de \mathbb{P}^3 , i.é.,

$$\mathbb{G} = \{L \mid L \text{ são retas de } \mathbb{P}^3\}$$

como a dimensão de \mathbb{P}^3 é igual a 3 e cada reta é determinada por dois de seus pontos e o conjunto \mathbb{G} das retas tem dimensão igual a $3 + 3 - 2 = 4$, como visto na Proposição 3.4. Podemos tomar \mathbb{G} , a Grassmanniana, como sendo um espaço de parâmetros, i.é., um espaço que parametriza as retas de \mathbb{P}^3 , de forma que os pontos de \mathbb{G} estão relacionados biunivocamente com o conjunto de retas de \mathbb{P}^3 , de modo que, quando um ponto de \mathbb{G} varia continuamente, os coeficientes das equações das retas que definem a reta correspondente em \mathbb{P}^3 também variam de forma contínua.

A Grassmanniana \mathbb{G} pode ser dotada de uma estrutura de variedade projetiva, Teorema 3.7, que na realidade, é uma hipersuperfície quádrlica de \mathbb{P}^5 dada por

$$\mathbb{G} = \{(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5 \mid p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0\}$$

cuja equação acima é conhecida como a Relação de Plücker visto no Exemplo 23.

Assim como feito com as retas, se considerarmos a famílias das superfícies cúbicas em \mathbb{P}^3 , teremos um espaço projetivo de dimensão 19, visto que cada superfície é dada pela anulação de um polinômio homogêneo \mathcal{F} com vinte coeficientes, determinados salvo pela multiplicação por escalares.

Note que a subvariedade Λ , do produto cartesiano $\mathbb{G} \times \mathbb{P}^{19}$ formada pelos pares (L, \mathcal{S}) que parametrizam uma reta L e uma superfície cúbica \mathcal{S} , tal que $L \subset \mathcal{S}$, uma vez que a variedade de incidência¹ Λ que tem projeções p_1, p_2 , os dois fatores do produto acima

$$\begin{array}{ccc} & \Lambda \subset \mathbb{G} \times \mathbb{P}^{19} & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{G} & & \mathbb{P}^{19} \end{array}$$

veremos que p_2 é uma aplicação sobrejetiva, com o qual será provado que qualquer superfície cúbica $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}^3$ (singular ou não) contém pelo menos uma reta.

O fato de que uma determinada reta L está contida em \mathcal{S} impõe quatro condições no \mathbb{P}^{19} de superfícies cúbicas:

¹Em geral, as variedades de incidência descrevem pares de variedades em que uma delas está contida em outra. Por exemplo, pares de pontos e retas na qual o ponto pertence à reta, em nosso caso específico de reta e superfície cúbica com a reta contida na superfície.

4. As 27 retas de uma superfície cúbica

- i) Se, exceto por uma mudança de coordenadas, as equações da reta L são $Z = T = 0$, como a equação de \mathcal{S} é dada por $\mathcal{F} = 0$, então $L \subset \mathcal{S}$ é equivalente a restrição de \mathcal{F} a L ser identicamente nula;
- ii) Mas $\mathcal{F}|_L$ é um polinômio cúbico homogêneo de grau 3 nas variáveis (X, Y) e portanto, tem 4 coeficientes que devem ser nulos, desta forma, a fibra de p_1 em cada reta $L \in \mathbb{G}$, ou seja, $p_1^{-1}(L)$, o espaço da superfície cúbica que contém cada reta L , tem dimensão $15 (= 19 - 4)$, então a $\dim \Lambda = 4 + 15 = 19$ e a projeção p_2 resulta ser uma aplicação entre variedades de mesma dimensão;
- iii) Se $\dim(p_2(\Lambda)) < 19$, então a dimensão da fibra de p_2 nos pontos da imagem $p_2(\Lambda)$ deveria ser ao menos igual a 1 e assim, cada superfície conteria retas (que poderiam ser infinitas). Isto não procede, de outras técnicas de construção se pode construir pelo menos uma superfície com um número finito de retas.
- iv) Se cumpre assim que $\dim(p_2(\Lambda)) = 19$ e segue que, usando a imagem de uma variedade projetiva por um morfismo é limitada, assim $p_2(\Lambda) = \mathbb{P}^{19}$.

Como queríamos demonstrar. □

Até aqui temos uma reta, das 27 que estamos buscando. Para provarmos o próximo resultado, necessitamos de um resultado auxiliar, que na realidade é uma consequência da não singularidade da superfície. Continuemos a buscar pelas retas.

Lema 4.4. *Por cada ponto $P \in \mathcal{S}$ passam no máximo três retas contidas em \mathcal{S} , que ainda são coplanares e não são repetidas*

Demonstração. Se $P \in L \subset \mathcal{S}$, então $L = T_P L \subset T_P \mathcal{S}$, i.é., a reta L mora no plano tangente (que está bem definido em todos os pontos de \mathcal{S} , pois \mathcal{S} é uma superfície não singular) e a intersecção $\mathcal{S} \cap T_P \mathcal{S}$, por Teorema 2.16 ² é uma curva cúbica plana passando pelo ponto P , consiste no máximo de três retas (se fossem mais retas, teriam grau maior do que 3) que são automaticamente coplanares

O fato de que não existem retas repetidas é uma consequência da não singularidade de \mathcal{S} . Suponha que tenhamos uma reta repetida:

Se como acima, exceto por uma mudança de coordenadas, suponhamos que a reta L é dada por $Z = T = 0$ e que $T_P \mathcal{S}$ é um plano definido por $T = 0$, assim temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
 &L \text{ é uma reta múltipla de } \mathcal{S} \cap T_P \mathcal{S} \\
 &\quad \Updownarrow \\
 &\mathcal{F}|_{T_P \mathcal{S}} \text{ tem um zero duplo em } Z = 0 \\
 &\quad \Updownarrow \\
 &\mathcal{F}(X, Y, Z, T) = Z^2 A(X, Y, Z, T) + TB(X, Y, Z, T)
 \end{aligned}$$

com A uma forma linear e B uma forma quadrática, mas então \mathcal{S} , uma superfície de equação $\mathcal{F} = 0$, seria singular nos pontos para quais $Z = T = B = 0$ constituindo um conjunto não vazio e isto contradiz a não singularidade de \mathcal{S} . Como queríamos demonstrar. □

²Em um espaço projetivo, a intersecção de uma variedade de grau igual a m e outra variedade de grau igual a n , tem grau máximo igual a $m \cdot n$ pelo *Teorema de Bézout*.

Proposição 4.5. *Dada uma reta $L \subset \mathcal{S}$ existem exatamente outras dez retas distintas em \mathcal{S} , que intersectam a reta L e estão distribuídas em cinco pares (L_i, L'_i) , para $i = 1, \dots, 5$, de forma que:*

- i) L, L_i, L'_i são coplanares para cada $i = 1, \dots, 5$;*
- ii) $(L_i \cup L'_i) \cap (L_j \cup L'_j) = \emptyset$ se $i \neq j$;*

Demonstração. Considere o plano Π que contenha a reta L . Como feito anteriormente a intersecção de $\Pi \cap \mathcal{S}$ é uma curva cúbica plana e é óbvio que $L \subset \Pi \cap \mathcal{S}$, logo a curva é a união da reta e uma curva plana de grau igual 2. Esta cônica pode ser irredutível ou degenerar-se em um par de retas que se intersectam

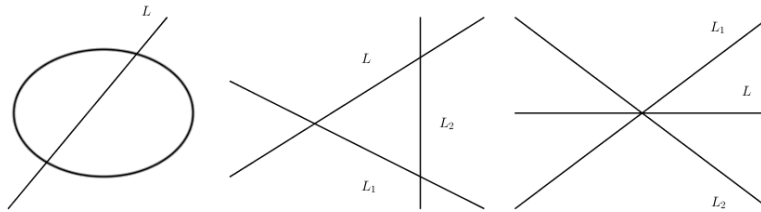


Figura 4.1: A intersecção $\Pi \cap \mathcal{S}$

O que queremos provar é que, entre todos os planos da discussão anterior, existem exatamente 5 planos (Π_1, \dots, Π_5) distintos, que ao interceptarem com a superfície \mathcal{S} produzem uma cônica degenerada, i.é., o par de retas $L_i \cup L'_i$.

Se conseguirmos provar isto, o item 4.5 ii) fica provado automaticamente, vejamos, se o item 4.5 ii) não for verdadeiro, então alguma reta de $\Pi_i \cup \mathcal{S}$, por exemplo L_i , intersectaria uma reta do par $\Pi_j \cup \mathcal{S}$, com $i \neq j$, digamos L_j , e como consequência disso, o ponto de intersecção das duas retas, $P = L_i \cap L_j$ pertenceria a $\Pi_i \cap \Pi_j = L$, com o qual, neste ponto P passariam três retas de \mathcal{S} não coplanares, contradizendo o Lema 4.4.

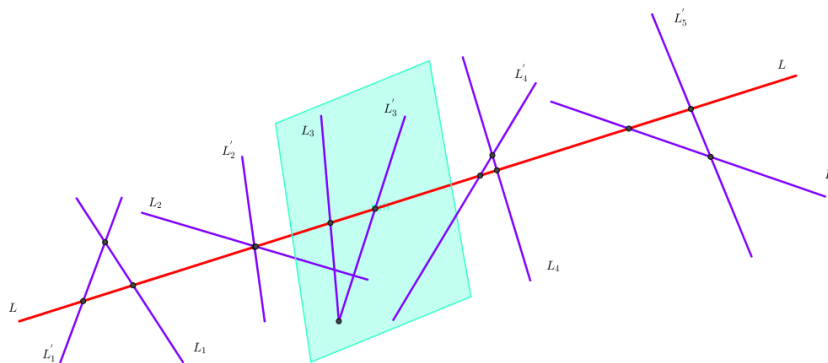


Figura 4.2: Os cinco pares de planos Π_i gerados por (L_i, L'_i)

Para provar o que queremos, suponha sem perda de generalidades que $Z = T = 0$ são equações de L e, assim, um plano Π passando por L , tem uma equação da forma

$$\mu Z + \lambda T = 0; (\mu, \lambda) \neq (0, 0)$$

se por exemplo $\mu \neq 0$, dividindo a equação acima por μ , podemos supor que a equação do plano Π é dada por,

$$Z + \frac{\lambda}{\mu}Z = 0$$

equivalentemente a $Z + \lambda Z = 0$, assim,

$$\mathcal{F}|_{\Pi} = T \cdot Q(X, Y, Z)$$

onde T corresponde à reta L e Q corresponde à cônica. Se tivermos $\lambda \neq 0$, o argumento é análogo ao de $\mu \neq 0$.

Agora agrupando os termos, podemos escrever \mathcal{F} como:

$$\mathcal{F} = AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + H$$

com A, B, C formas lineares e D, E formas quadráticas e H forma cúbica e todas elas em $\mathbb{C}[Z, T]$. Então, ao restringir ao plano Π e usar a homogeneidade de A, B, \dots, E, H a equação

$$Q(X, Y, T) = A(\lambda, 1)X^2 + 2B(\lambda, 1)XY + \dots + 2E(\lambda, 1)YT + H(\lambda, 1)T^2$$

define uma cônica plana variando com λ , i.é., com o plano Π . Portanto, o plano Π produz uma cônica degenerada se, e somente se, a sua matriz simétrica associada a matriz de Q não tem posto máximo e isso é equivalente a condição de que

$$\Delta(Z, T) = \det \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & H \end{pmatrix} = 0.$$

Porém $\Delta(Z, T)$ é um polinômio homogêneo de grau 5 em duas variáveis, portanto, o número das suas raízes contadas as multiplicidades é igual a 5, para terminar, faltaria apenas verificar que Δ não tem raízes múltiplas, o qual novamente é uma consequência da não singularidade de \mathcal{S} como no Lema 4.4. \square

Para continuarmos a prova, precisamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.6. *Dada uma reta $L \subset \mathcal{S}$ e cinco pares de retas de \mathcal{S} que a interceptam, qualquer outra reta de \mathcal{S} intercepta uma única reta de cada par e não a outra reta*

Demonstração. Seja $N \subset \mathcal{S}$ uma reta distinta da reta L e dos cinco pares de retas de \mathcal{S} que interceptam a reta L , denominadas $L_i, L'_i \subset \Pi_i$. Uma reta e um plano tem dimensões complementares em \mathbb{P}^3 , assim pode ocorrer:

- i) Ou $N \subset \Pi_i$;
- ii) Ou N intersecta o plano Π_i em um único ponto $P \in \mathcal{S}$.

Se $N \subset \Pi_i$, então $\Pi \cap \mathcal{S}$ consiste de 4 retas distintas, o que contradiz o Teorema de Bézout 2.16.

Se N intersecta o plano Π_i em um único ponto $P \in \mathcal{S}$, como $\Pi_i \cap \mathcal{S} = L \cup L_i \cup L'_i$, o ponto P está em alguma das três retas. P não está em L , por que nesse caso N deveria ser L_i ou L'_i para algum i e isto contradiz o enunciado do lema. Sendo assim N intersecta L_i ou intersecta L'_i em P . Se intercepta as duas retas, deve ocorrer em um ponto de

4. As 27 retas de uma superfície cúbica

intersecção $P = L_i \cap L'_i$, pois o ponto P é único. Mas então, a existência de P contradiz o Lema 4.4, pois por esse ponto passam três retas de \mathcal{S} não coplanares: N, L_i, L'_i . Então N intercepta uma reta de cada par, mas não a outra. \square

Note que a Proposição 4.5 garante a existência de duas retas disjuntas contidas em cada cúbica \mathcal{S} , e assim finalizamos a terceira etapa da prova.

Proposição 4.7. *Dadas duas retas $L, M \subset \mathcal{S}$ disjuntas, existem exatamente outras quinze retas distintas em \mathcal{S} ; $(L_i, L'_i, L''_i) \quad \forall i = 1, \dots, 5$ com a seguinte configuração:*

- i) *Os cinco pares (L_i, L'_i) são as dez retas de \mathcal{S} que interceptam a reta L ;*
- ii) *Os cinco pares (L_i, L''_i) são as dez retas de \mathcal{S} que interceptam a reta M ;*
- iii) *$L'_j \cap L''_i \neq \emptyset$ se $i \neq j$ e $L'_j \cap L''_i = \emptyset$ se $i = j$.*

Demonstração. Dadas as retas L, M disjuntas de \mathcal{S} , como vista na Proposição 4.5, a reta L se corresponde com os cinco pares de retas (L_i, L'_i) distintas de \mathcal{S} que a intersectam e, assim pelo Lema 4.6 a reta M intersecta uma reta de cada par e não intersecta a outra reta.

Suponha que M , intersecta todas as retas L_i s. Aplicando novamente a Proposição 4.5, existem exatamente outras cinco retas, digamos L''_i , tais que os cinco pares de retas de \mathcal{S} que intersectam a reta M são $(L_i, L''_i), \forall i = 1, \dots, 5$, com a configuração dada pela presente proposição.

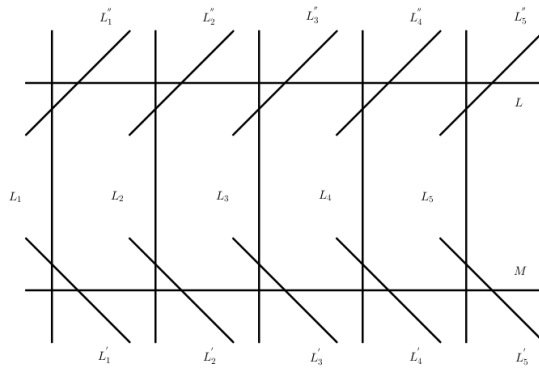


Figura 4.3: Configuração da dezesseite retas

Vejamos que as retas L''_i são distintas das doze retas anteriores.

- i) São distintas de L visto que intersectam a reta M , pois $L \cap M = \emptyset$;
- ii) São distintas de M e de $L_j, \forall j = 1, \dots, 5$ pela Proposição 4.5;
- iii) E finalmente são distintas de $L'_j, \forall j = 1, \dots, 5$, pois se não fosse, M intersectaria as retas do par (L_j, L'_j) contrariando o Lema 4.6.

Enquanto a incidência entre as retas L'_j, L''_j :

- i) Por um lado $L'_j \cap L''_i \neq \emptyset$ se $i \neq j$, uma vez que pelo Lema 4.6, L''_i deve intersectar alguma reta da terna L_i, L_j, L'_i e $L_j \cap L''_i = \emptyset$ se $i \neq j$ e $L \cap L'_i \neq \emptyset$, todos os casos pela Proposição 4.5;

- ii) Por outro lado $L'_i \cap L''_i = \emptyset$ pois L''_i intersecta a reta L_i e L'_i não pode interceptar a outro membro do par (L_i, L'_i) usando mais uma vez o Lema 4.6.

□

Assim que, tomando duas retas disjuntas contidas em \mathcal{S} , se tem outras quinze retas, mas com uma configuração particular descrita pela Proposição 4.7.

Só nos faltam apenas dez retas agora. Para encontra-las e assim completar a prova do nosso Teorema 4.2, temos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.8. *Se L_1, L_2, L_3, L_4 são retas disjuntas de \mathbb{P}^3 , então:*

- i) *Ou as quatro retas estão contidas em uma quádrlica suave em \mathbb{P}^3 e tem infinitas retas transversais comuns;*
 ii) *Ou não existe nenhuma quádrlica que as contém e então eles possuem uma ou duas transversais comuns.*

Demonstração. Dadas três retas disjuntas de \mathbb{P}^3 , digamos L_1, L_2, L_3 , vemos que existe uma única quádrlica \mathcal{Q} que as contém e é não singular, tomemos três pontos distintos em cada reta L_1, L_2, L_3 , no total de nove pontos, o fato de conter um ponto de \mathbb{P}^3 impõe uma condição de linearidade no espaço das quádrlicas de \mathbb{P}^3 que é um \mathbb{P}^9 . Então, se considerarmos as quádrlicas contendo os nove pontos anteriores, o que temos é a intersecção de nove hiperplanos gerais nesse \mathbb{P}^9 que consiste de um único ponto. Portanto existe uma única quádrlica \mathcal{Q} que consiste de três pontos de cada $L_i, i = 1, 2, 3$ e que automaticamente contém a cada reta L_1, L_2, L_3 , pois uma quádrlica e uma reta intersectam em no máximo dois pontos, salvo que a reta esteja contida na quádrlica.

É fácil ver que uma quádrlica singular de \mathbb{P}^3 não pode conter três retas disjuntas. Assim \mathcal{Q} é uma quádrlica suave e sabe-se que uma quádrlica suave em \mathbb{P}^3 é uma superfície regrada³, com duas famílias infinitas de retas contida nela, de tal forma que as retas de cada família são disjuntas duas a duas e cada membro de uma família intersecta a um único membro de outra família em um único ponto.

Agora analisemos as seguintes situações:

- i) Ou $L_4 \subset \mathcal{Q}$ e então L_4 pertence à mesma família que L_1, L_2, L_3 , pois são disjuntas e qualquer reta da outra coleção é transversal às quatro retas L_1, L_2, L_3, L_4 , assim existem infinitas retas transversais comuns;
 ii) Ou $L_4 \not\subset \mathcal{Q}$ e, portanto, intersecta a quádrlica \mathcal{Q} em dois pontos. Neste caso, as retas de outra família que passam por esses pontos são as únicas transversais comuns às quatro retas dadas.

□

Na próxima proposição aparecem as retas que faltam e isto completa a demonstração do Teorema 4.2.

Proposição 4.9. *Sejam $L, M, \{L_i\}_{i=1}^5$ e $\{L'_i\}_{i=1}^5, \{L''_i\}_{i=1}^5$, as dezessete retas de \mathcal{S} dadas pela Proposição 4.7:*

³Em geometria uma superfície é dita regrada se é obtida pela união de retas. Pode conceber-se uma superfície regrada como composta por múltiplas linhas, cuja união forma a própria superfície. Os exemplos mais comuns e mais fáceis de visualizar são o plano, o cilindro e o cone.

4. As 27 retas de uma superfície cúbica

- i) Se $N \subset \mathcal{S}$ é uma reta de \mathcal{S} distinta das demais retas anteriores, então N intersecta exatamente três retas do conjunto $\{L_i\}_{i=1}^5$;
- ii) Por cada escolha de 3 elementos $\{i, j, k\}$ do conjunto $\{1, \dots, 5\}$, existe uma única reta de \mathcal{S} , digamos L_{ijk} , distinta das dezessete retas anteriores que intersectam exatamente a L_i, L_j, L_k .

Demonstração. Temos que,

- i) As retas $\{L_i\}_{i=1}^5$ são disjuntas entre si pela Proposição 4.5. Dadas quatro retas disjuntas de \mathcal{S} , o Lema 4.8 nos diz que as 4 retas não podem estar contidas em uma mesma quádrlica suave \mathcal{Q} , pois neste caso, teriam infinitas retas transversais comuns. Pelo *Teorema de Bézout*, estas retas deveriam estar em uma superfície cúbica \mathcal{S} , sendo que a intersectam em mais três pontos, mas então a superfície \mathcal{S} deveria conter a quádrlica \mathcal{Q} e portanto não seria irredutível, contradizendo nossa hipótese. Consequentemente as quatro retas disjuntas tem uma ou duas transversais comuns.

Agora, se a reta N intersecta mais de três retas L_i , usando o Lema 4.8, estas retas disjuntas teriam mais de duas transversais em comum: N, L, M e assim chegamos a uma contradição.

Se a reta N intersecta ao menos três dessas retas L_i , então intersectaria as três retas ou mais das retas L'_i pelo Lema ???. Se, por exemplo, se a reta N intersectasse a reta L_5 e as retas L'_1, L'_2, L'_3 (e a L_4 ou L'_4), estas quatro retas de \mathcal{S} , que são disjuntas pela Proposição 4.5, possuiriam mais de duas transversais em comum: N, L , e L''_5 , que novamente é impossível. Assim, N intersecta exatamente três retas do conjunto $\{L_i\}_{i=1}^5$.

- ii) Considerando a reta $L_1 \subset \mathcal{S}$ pela Proposição 4.5 existem exatamente dez retas distintas de \mathcal{S} que a intersectam. Destas 10 retas, até agora apareceram apenas 4 retas: L, M, L'_1, L''_1 , cada uma das seis retas que faltam (que, pelas configurações dadas nas Proposição 4.5 e Proposição 4.7 não podem ser nenhuma das doze retas restantes no conjunto $\{L, M, \{L_i\}_{i=1}^5, \{L'_i\}_{i=1}^5, \{L''_i\}_{i=1}^5\}$), deve intersectar exatamente a um par de retas entre L_2, L_3, L_4, L_5 , usando o item *ii*).

Como existem seis desses pares, todas as possibilidades ocorrem e isso nos dá uma única reta L_{1jk} , para cada $\{j, k\}$ entre $\{2, 3, 4, 5\}$, sob as condições do item *ii*). O argumento com L_1 é repetido mas retas L_i e isto termina a prova principal do nosso trabalho. \square

Esta ultima proposição nos dá, a partir da configuração das dezessete retas que se deduziu da Proposição 4.7, exatamente outras dez retas distintas de \mathcal{S} e prova também que não pode existir mais retas.

Com as quatro proposições anteriores, temos acabado de demonstrar o Teorema 4.2: cada superfície cúbica não singular contém 27 retas, que com a notação usada neste trabalho são as seguintes:

$$\{L, M, \{L_i\}_{i=1}^5, \{L'_i\}_{i=1}^5, \{L''_i\}_{i=1}^5, L_{ijk}\}, \text{ i.é., } 1 + 1 + 5 + 5 + 5 + 10 = 27.$$

Agora iremo explicitar dois exemplos clássicos deste problema, o primeiro é *Superfície de Clebsch* que possui a notável propriedade de possuir todas as suas raízes no corpo dos números reais e a *Superfície Cúbica de Fermat* cujas raízes estão no corpo dos números complexos.

4.3 Aplicação

4.3.1 Superfície Cúbica de Clebsch

A *Superfície de Clebsch* é uma superfície mais conhecida por *Superfície Cúbica Diagonal de Clebsch* é não singular e foi estudada por *Clebsch - 1871* e *Klein - 1873*, onde todas as 27 retas excepcionais podem ser definidas sobre o corpo dos números reais. O termo *Superfície Icosaédrica de Klein* pode se referir a essa superfície ou ao seu inchamento nos 10 pontos de Eckardt.

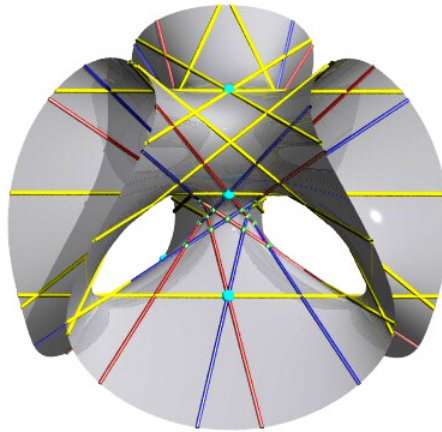


Figura 4.4: Superfície Cúbica Diagonal de Clebsch

A superfície Clebsch é o conjunto de pontos $(X : Y : Z : W : T)$ de \mathbb{P}^4 que é a intersecção das duas equações que satisfazem o seguinte sistema,

$$\mathcal{S} = \begin{cases} X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 + W^3 = 0 \\ X + Y + Z + T + W = 0 \end{cases}$$

como $\mathcal{F} = 0$ e eliminando a variável W , temos que esta é isomorfa em \mathbb{P}^3 à superfície,

$$\mathcal{F}(X, Y, Z, T) = X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 - (X + Y + Z + T)^3.$$

O grupo de simetria da superfície é o grupo simétrico S_5 de ordem 120, agindo por permutações das coordenadas em \mathbb{P}^4 até isomorfismo, a superfície de Clebsch é a única superfície cúbica com este grupo de automorfismo.

Observação 4.1. *As 27 retas excepcionais são*

- i) As 15 imagens (em S_5) da reta de pontos da forma $(a : -a : b : -b : 0)$.*
- ii) As 12 imagens da reta através do ponto $(1 : \xi : \xi^2 : \xi^3 : \xi^4)$ e seu conjugado complexo, onde ξ é uma primitiva raiz quinta da unidade*

Iremos exibir as retas da Superfície Cúbica de Clebsch por suas coordenadas de Plücker, como geral, a reta L em \mathbb{P}^3 é a reta dada pelos pontos $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$ e $\beta = (\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$, $l \in \mathbb{G}(2, 4)$ pode-se associar à classe da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

4. As 27 retas de uma superfície cúbica

como visto na Definição 3.2, pode ser representada por $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ e estaremos supondo que $L \subseteq \mathcal{S}$ e ainda suporemos que $p_{01} \neq 0$ e ainda mais, podemos supor sem perda de generalidade que $p_{01} = 1$ como visto no Teorema 3.2, neste caso temos que a reta L é dada pelos pontos $(1 : 0 : -p_{12} : -p_{13})$ e $(0 : 1 : p_{02} : p_{03})$, i.é.,

$$L = \{(x : y : -p_{12}x + p_{02}y : -p_{13}x + p_{03}y) \in \mathbb{P}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2 \setminus (0, 0)\}$$

temos que ter

$$\mathcal{F}(x : y : -p_{12}x + p_{02}y : -p_{13}x + p_{03}y) = 0 \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2 \setminus (0, 0).$$

assim, convencionando obtemos assim o seguinte sistema de equações de ordem 4:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} (p_{02} + p_{03})(p_{02} + 1)(p_{03} + 1) = 0 \\ (p_{12} + p_{13})(p_{12} - 1)(p_{13} - 1) = 0 \\ p_{02}^2 p_{03} + p_{03}^2 p_{02} + 2p_{02} p_{03} p_{12} + 2p_{02} p_{03} p_{13} - p_{02}^2 - p_{03}^2 - p_{02} p_{03} + 2p_{02} p_{12} \\ + 2p_{02} p_{13} + 2p_{03} p_{12} + 2p_{03} p_{13} - 2p_{02} - 2p_{03} + p_{12} + p_{13} - 1 = 0 \\ p_{02} p_{13}^2 + p_{03} p_{12}^2 + 2p_{02} p_{12} p_{13} + 2p_{03} p_{12} p_{13} + p_{12}^2 + p_{13}^2 + 2p_{12} p_{13} - 2p_{02} p_{12} \\ - 2p_{02} p_{13} - 2p_{03} p_{12} - 2p_{03} p_{13} + p_{02} + p_{03} - 2p_{12} - 2p_{13} + 1 = 0. \end{cases}$$

Das duas primeiras equações, podemos considerar nove casos e em cada um deles eliminamos duas incógnitas que resulta em sistema de equações de ordem 2.

i) Caso $p_{03} = -p_{02}$ e $p_{12} = 1$: neste caso as duas ultimas equações tornam-se

$$\mathcal{S}' = \begin{cases} -p_{13} + p_{02}^2 + p_{02}^2 p_{13} = 0 \\ -p_{02} + p_{13}^2 + p_{02} p_{13}^2 = 0. \end{cases}$$

Observe que $p_{02}^2 \neq 1$, senão na primeira equação haveria $0 = -p_{13} + 1 + p_{13} = 0$ o que é impossível. Evidenciando p_{13} na primeira equação temos:

$$p_{13} = \frac{-p_{02}^2}{p_{02}^2 - 1}.$$

Substituindo na segunda equação, calculamos p_{02} como segue:

$$-p_{02} + \left(\frac{-p_{02}^2}{p_{02} - 1}\right)^2 + p_{02} \left(\frac{-p_{02}^2}{p_{02} - 1}\right)^2 = 0,$$

i.é.,

$$p_{02}(p_{02}^2 + p_{02} - 1) = 0.$$

Assim.

$$p_{02} = 0 \text{ ou } p_{02} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } p_{02} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto temos que $p_{02} = p_{13}$. De fato, quando $p_{02} = 0$ resulta que $p_{13} = 0$ também. Mas quando $p_{02} \neq 0$, temos que $p_{02}^2 - 1 = -p_{02}$, e portanto:

$$p_{13} = \frac{-p_{02}^2}{p_{02}^2 - 1} = \frac{-p_{02}^2}{-p_{02}} = p_{02},$$

i.é.,

4. As 27 retas de uma superfície cúbica

$$p_{03} = -p_{02} \text{ e } p_{12} = 1 \Rightarrow p_{02} = 0 \text{ ou } p_{02} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } p_{02} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

E assim concluimos o primeiro caso.

Analogamente os outros cinco casos são tratados

$$\text{ii) } p_{03} = -p_{02} \text{ e } p_{13} = 1 \Rightarrow -p_{02} = -p_{12} = 0 \text{ ou } -p_{12} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } -p_{02} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2};$$

$$\text{iii) } p_{02} = -1 \text{ e } p_{13} = -p_{12} \Rightarrow p_{03} = p_{12} = 0 \text{ ou } p_{12} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } p_{02} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2};$$

$$\text{iv) } p_{03} = -1 \text{ e } p_{13} = -p_{12} \Rightarrow p_{02} = -p_{12} = 0 \text{ ou } -p_{12} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } -p_{02} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2};$$

$$\text{v) } p_{02} = -1 \text{ e } p_{13} = 1 \Rightarrow p_{03} = -p_{12} = 0 \text{ ou } -p_{12} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } -p_{02} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2};$$

$$\text{vi) } p_{03} = -1 \text{ e } p_{12} = 1 \Rightarrow p_{02} = -p_{13} = 0 \text{ ou } -p_{13} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } -p_{13} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2};$$

vii) $p_{02} = -1$ e $p_{12} = 1 \Rightarrow$ obtemos equações do tipo $1 = 0$, que é impossível;

viii) $p_{03} = -1$ e $p_{13} = 1 \Rightarrow$ obtemos equações do tipo $1 = 0$, que é impossível;

ix) $p_{03} = -p_{02}$ e $p_{13} = -p_{12} \Rightarrow$ obtemos equações do tipo $1 = 0$, que é impossível.

As ponderações feitas acima, foram realizadas considerando $p_{01} \neq 0$ e encontramos 18 retas, resta-nos considerar agora as retas onde $p_{01} = 0$, que será realizado em cinco etapas e em cada uma delas considerando $p_{ij} = 1, p_{01} = 0$ e permutando as coordenadas que aplica x_i e x_j em x_0 e x_1 respectivamente:

$$\text{i) } p_{01} = 0 \text{ e } p_{02} = 1; \text{ permutação } (0213) \mapsto (0123) \Rightarrow \begin{cases} p_{03} = 0, p_{12} = -1, p_{23} = 0 \\ p_{03} = 0, p_{12} = 0, p_{23} = 1 \\ p_{03} = -1, p_{12} = 0, p_{23} = 0 \\ p_{03} = -1, p_{12} = -1, p_{23} = 0. \end{cases}$$

Temos quatro novas retas.

$$\text{ii) } p_{01} = 0, p_{02} = 0 \text{ e } p_{03} = 1; \text{ permutação } (0312) \mapsto (0123) \Rightarrow \begin{cases} p_{13} = -1, p_{23} = 0 \\ p_{13} = 0, p_{23} = -1. \end{cases}$$

Temos duas novas retas.

$$\text{iii) } p_{01} = 0, p_{02} = 0 \text{ e } p_{12} = 1; \text{ permutação } (1203) \mapsto (0123) \Rightarrow \begin{cases} p_{13} = 0, p_{23} = 1 \\ p_{13} = -1, p_{23} = 0. \end{cases}$$

Temos mais duas novas retas.

$$\text{iv) } p_{01} = 0, p_{02} = 0 \text{ e } p_{13} = 1; \text{ permutação } (1320) \mapsto (0123) \Rightarrow \begin{cases} p_{03} = 0, p_{12} = 0, p_{23} = -1 \\ p_{03} = -1, p_{12} = 0, p_{23} = 0. \\ p_{03} = -1, p_{12} = -1, p_{23} = 0. \end{cases}$$

4. As 27 retas de uma superfície cúbica

Temos apenas uma reta nova, as duas últimas retas já foram obtidas na primeira linha do item *ii*) e na segunda linha do item *iii*) respectivamente.

$$v) \quad p_{01} = 0, p_{02} = 0 \text{ e } p_{23} = 1; \text{ permutação } (2310) \mapsto (0123) \Rightarrow \begin{cases} p_{03} = 0, p_{12} = 0, p_{13} = -1 \\ p_{03} = -1, p_{12} = 0, p_{13} = 0. \\ p_{03} = 0, p_{12} = 1, p_{13} = 0. \end{cases}$$

Temos apenas uma reta nova, as duas últimas retas já foram obtidas na primeira linha do item *iv*) e na primeira linha do item *iii*) respectivamente.

Obtemos as nove retas com $p_{01} = 0$ restantes, totalizando as vinte e sete retas sobre a *Superfície Cúbica de Clebsch* e denotando $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\bar{\xi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ esboçamos estas pelas coordenadas de Plücker a seguir:

Reta 01 : (0 : 0 : 0 : 0 : 1 : -1)	Reta 10 : (1 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0)	Reta 19 : (1 : -\xi : \xi : 1 : -\xi : 1)
Reta 02 : (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 1)	Reta 11 : (1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0)	Reta 20 : (1 : -1 : \xi : \xi : -\xi : 1)
Reta 03 : (0 : 0 : 0 : 1 : -1 : 0)	Reta 12 : (1 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0)	Reta 21 : (1 : -1 : \bar{\xi} : \bar{\xi} : -\bar{\xi} : -1)
Reta 04 : (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : -1)	Reta 13 : (1 : -1 : 0 : 0 : 0 : 0)	Reta 22 : (1 : \xi : -\xi : -\xi : 1 : -1)
Reta 05 : (0 : 0 : 1 : 0 : -1 : 0)	Reta 14 : (1 : 0 : -1 : 1 : 0 : 1)	Reta 23 : (1 : \bar{\xi} : -\bar{\xi} : -\bar{\xi} : 1 : -1)
Reta 06 : (0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 1)	Reta 15 : (1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)	Reta 24 : (1 : -1 : -\bar{\xi} : \bar{\xi} : 1 : \bar{\xi})
Reta 07 : (0 : 1 : 0 : -1 : 0 : 0)	Reta 16 : (1 : \xi : -1 : -\xi : \xi : 1)	Reta 25 : (1 : -1 : -\xi : \xi : 1 : \xi)
Reta 08 : (0 : 1 : -1 : 0 : 0 : 0)	Reta 17 : (1 : \bar{\xi} : -1 : -\bar{\xi} : \bar{\xi} : 1)	Reta 26 : (1 : -\bar{\xi} : -1 : 1 : \bar{\xi} : -\bar{\xi})
Reta 09 : (0 : 1 : -1 : -1 : 1 : 0)	Reta 18 : (1 : -\bar{\xi} : \bar{\xi} : 1 : -\bar{\xi} : 1)	Reta 27 : (1 : -\xi : -1 : 1 : \xi : -\xi)

4.3.2 Superfície de Fermat

A *cúbica de Fermat*, com o nome de *Pierre de Fermat* é uma superfície definida por

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Usando os métodos de geometria algébrica, eles nos fornecem a seguinte parametrização desta cúbica:

$$\begin{aligned} x(s, t) &= \frac{3t - 1/3(s^2 + st + t^2)^2}{t(s^2 + st + t^2) - 3} \\ x(s, t) &= \frac{3s + 3t - 1/3(s^2 + st + t^2)^2}{t(s^2 + st + t^2) - 3} \\ x(s, t) &= \frac{-3 - (s^2 + st + t^2)(s + t)}{t(s^2 + st + t^2) - 3} \end{aligned}$$

Assim, no espaço projetivo, a Cúbica de Fermat é dada por

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 0$$

As 27 retas que se encontram na cúbica de Fermat são fáceis de descrever explicitamente como veremos agora. A *Superfície Cúbica de Fermat* é dada pela equação

$$\mathcal{F}(X, Y, Z, T) = X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3$$

pelo que foi provado anteriormente temos que a superfície

$$\mathcal{S} : \mathcal{F}(X, Y, Z, T) = X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 0$$

4. As 27 retas de uma superfície cúbica

contém exatamente 27 retas, queremos explicitar cada uma das 27 retas em coordenadas de Plücker.

Em geral, a reta L em \mathbb{P}^3 é a reta dada pelos pontos $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$ e $\beta = (\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$, $l \in \mathbb{G}(2, 4)$ pode-se associar à classe da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

como visto na Definição 3.2, pode ser representada por $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ e estaremos supondo que $L \subseteq \mathcal{S}$ e ainda suporemos que $p_{01} \neq 0$ e ainda mais, podemos supor sem perda de generalidade que $p_{01} = 1$ como visto no Teorema 3.2, neste caso temos que a reta L é dada pelos pontos $(1 : 0 : -p_{12} : -p_{13})$ e $(0 : 1 : p_{02} : p_{03})$, i.é.,

$$L = \{(x : y : -p_{12}x + p_{02}y : -p_{13}x + p_{03}y) \in \mathbb{P}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2 \setminus (0, 0)\}$$

como $L \subseteq \mathcal{S}$, temos

$$\mathcal{F}(x : y : -p_{12}x + p_{02}y : -p_{13}x + p_{03}y) = 0, \forall (x, y) \neq (0, 0) \text{ em } \mathbb{K}^2,$$

i.é.,

$$x^3 + y^3 + (-p_{12}x + p_{02}y)^3 + (-p_{13}x + p_{03}y)^3 = 0$$

equivalentemente

$$(1 - p_{12}^3 - p_{13}^3)x^3 + (1 + p_{02}^3 + p_{03}^3)y^3 + 3(p_{02}p_{12}^2 + p_{03}p_{13}^2)x^2y - 3(p_{02}^2p_{12} + p_{03}^2p_{13})xy^2 = 0$$

associado a esta equação temos o seguinte sistemas de equações:

$$\mathcal{S}_1 = \begin{cases} 1 + p_{02}^3 - p_{03}^3 = 0 \\ 1 - p_{12}^3 - p_{13}^3 = 0 \\ p_{02}p_{12}^2 + p_{03}p_{13}^2 = 0 \\ p_{02}^2p_{12} + p_{03}^2p_{13} = 0 \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 = \begin{cases} p_{02}^3 + p_{03}^3 = -1 \\ p_{12}^3 + p_{13}^3 = 1 \\ p_{02}p_{12}^2 + p_{03}p_{13}^2 = 0 \\ p_{02}^2p_{12} + p_{03}^2p_{13} = 0. \end{cases}$$

Note que as duas primeiras equações do nosso sistema não homogêneas pelo fato de estarmos supondo que $p_{01} = 1$ e agora estamos interessados em determinar $p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}$ e p_{23} , temos na quarta equação que p_{12} é linear e desde que $p_{02} \neq 0$, temos dois casos a considerar:

- i) $p_{01} = 1$ e $p_{02} \neq 0$, tomando a quarta equação do sistema acima e evidenciando p_{12} , temos

$$p_{02}^2p_{12} + p_{03}^2p_{13} = 0 \Rightarrow p_{12} = -\frac{p_{03}^2p_{13}}{p_{02}^2}$$

e substituindo na segunda e na terceira equação obtemos

$$\mathcal{S}_3 = \begin{cases} p_{02}^3 + p_{03}^3 = -1 \\ \left(-\frac{p_{03}^2p_{13}}{p_{02}^2}\right)^3 + p_{13}^3 = 1 \\ p_{02}\left(-\frac{p_{03}^2p_{13}}{p_{02}^2}\right)^2 + p_{03}p_{13}^2 = 0 \end{cases} \quad \mathcal{S}_4 = \begin{cases} p_{02}^3 + p_{03}^3 = -1 \\ p_{13}^3(p_{02}^3 + p_{03}^3)(p_{02}^3 - p_{03}^3) = p_{02}^6 \\ p_{03}p_{13}^2(p_{03}^3 + p_{02}^3) = 0 \end{cases}$$

4. As 27 retas de uma superfície cúbica

substituindo a equação 1 de \mathcal{S}_4 nas equações dois e três, obtemos

$$\mathcal{S}_5 = \begin{cases} p_{13}^3(p_{03}^3 - p_{02}^3) = p_{02}^6 \\ p_{03}p_{13}^2 = 0 \end{cases}$$

analisando o sistema \mathcal{S}_5 , temos que p_{13} não pode ser nulo, pois $p_{02} \neq 0$, restando que $p_{03} = 0$, assim $p_{12} = 0$, da equação $p_{02}^3 + p_{03}^3 = -1$, resulta que $p_{02}^3 = -1$ e ainda $p_{13}^3 = -1$ totalizando nove soluções.

- ii) Com $p_{01} = 1$ e $p_{02} = 0$, segue da equação \mathcal{S}_2 que $p_{03} = -1$, como $p_{02} = 0$ e $p_{03} \neq 0$, segue das equações três e quatro do mesmo sistema que $p_{13} = 0$ e da segunda equação resulta que $p_{12} = 1$, contabilizando neste caso nove soluções. Temos assim dezoito retas por coordenadas de Plücker, com $p_{01} \neq 0$.
- iii) Com $p_{01} = 0$ e $p_{02} = 1$, Valendo-se da simetria de \mathcal{F} , resolvemos facilmente este caso a partir do caso dois pela permutação $(0213) \mapsto (0123)$ (i.é., $p_{01} \leftrightarrow p_{02}, p_{21} \leftrightarrow -p_{21}$ e $p_{13} \leftrightarrow p_{23}$). Assim as soluções são: $p_{02} = 1, p_{01} = p_{23} = 0$ e $p_{03}^3 = p_{12}^3 = -1$.

resumidamente, tomando ξ para a raiz sexta primitiva da unidade $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, temos as 27 retas contidas na superfície diagonal de Fermat dadas explicitamente pelas coordenadas de Plücker a seguir:

Reta 01 : (1 : -1 : 0 : 0 : 1 : -1)	Reta 10 : (1 : 0 : -1 : 1 : 0 : 1)	Reta 19 : (0 : 1 : -1 : -1 : 1 : 0)
Reta 02 : (1 : -1 : 0 : 0 : -\xi : \xi)	Reta 11 : (1 : 0 : -1 : \xi^2 : 0 : \xi^2)	Reta 20 : (0 : 1 : -1 : -\xi^2 : \xi^2 : 0)
Reta 03 : (1 : -1 : 0 : 0 : \xi^2 : -\xi^2)	Reta 12 : (1 : 0 : -1 : -\xi : 0 : -\xi)	Reta 21 : (0 : 1 : -1 : \xi : -\xi : 0)
Reta 04 : (1 : \xi : 0 : 0 : 1 : \xi)	Reta 13 : (1 : 0 : \xi : 1 : 0 : -\xi)	Reta 22 : (0 : 1 : \xi : -1 : -\xi : 0)
Reta 05 : (1 : \xi : 0 : 0 : -\xi : -\xi^2)	Reta 14 : (1 : 0 : \xi : \xi^2 : 0 : 1)	Reta 23 : (0 : 1 : \xi : -\xi^2 : -1 : 0)
Reta 06 : (1 : \xi : 0 : 0 : \xi^2 : -1)	Reta 15 : (1 : 0 : \xi : -\xi : 0 : \xi^2)	Reta 24 : (0 : 1 : \xi : \xi : \xi^2 : 0)
Reta 07 : (1 : -\xi^2 : 0 : 0 : 1 : -\xi^2)	Reta 16 : (1 : 0 : -\xi^2 : 1 : 0 : \xi^2)	Reta 25 : (0 : 1 : -\xi^2 : -1 : \xi^2 : 0)
Reta 08 : (1 : -\xi^2 : 0 : 0 : -\xi : -1)	Reta 17 : (1 : 0 : -\xi^2 : \xi^2 : 0 : -\xi)	Reta 26 : (0 : 1 : -\xi^2 : -\xi^2 : -\xi : 0)
Reta 09 : (1 : -\xi^2 : 0 : 0 : \xi^2 : \xi)	Reta 18 : (1 : 0 : -\xi^2 : -\xi : 0 : 1)	Reta 27 : (0 : 1 : -\xi^2 : \xi : -1 : 0)

É possível reescreve-la como três famílias de dois parâmetros $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ e cada família com nove elementos cada:

- i) Retas da primeira família quando:

$$p_{01} = 1 \text{ e } p_{02} \neq 0 : (0 : -\lambda : 0 : 0 : \mu : -\lambda\mu); \lambda^3 = 1 \text{ e } \mu^3 = 1$$

- ii) Retas da segunda família quando:

$$p_{01} = 1 \text{ e } p_{02} = 0 : (1 : 0 : -\lambda : \mu : 0 : \lambda\mu); \lambda^3 = 1 \text{ e } \mu^3 = 1$$

- iii) Retas da terceira família quando:

$$p_{01} = 0 \text{ e } p_{02} = 1 : (0 : 1 : -\lambda : -\mu : \lambda\mu : 0); \lambda^3 = 1 \text{ e } \mu^3 = 1$$

Existem outras superfícies cúbicas especiais que fornecerão excelentes trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] ARRONDO E., *Subvarieties of Grassmannians*, Lecture Note Series Dipartimento di Matematica Univ. Trento 10, (1996).
- [2] ASSIS, C. F. C., *As 27 Retas Sobre uma Superfície Cúbica não Singular*, dissertação de mestrado, DM-UFPB, 2014.
- [3] BATISTA, E., *Geometria e Topologia do Grupo de Rotações*, mini-curso, DM-UFSC.
- [4] BATISTA, E., *Ações de grupos e geometria*, V Bienal da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, DM-UFPB, 18 a 22 de outubro de 2010.
- [5] COELHO, J., *Introdução à Geometria Algébrica*, Notas de aula - versão 1.0 - março 2009.
- [6] COX, D., LITTLE, J., O'SHEA, D., *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Third Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg - New York, 2007.
- [7] GALLO, M. J. V., *Las 27 rectas de una superficie cúbica*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 5, no. 2, 271 - 296(2002).
- [8] GATTO, L., *Schubert Calculus: an Algebraic Introduction* - 25 Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura Aplicada(IMPA), Rio de Janeiro, 2005.
- [9] HARTSHORNE, R., *Algebraic geometry*, Springer Verlag, New York, (1977).
- [10] KLEIMAN, S. L. and LAKSOV, D., *Schubert calculus*, The American Mathematical Monthly, Vol. 79, No. 10, (Dec., 1972), pp. 1061-1082.
- [11] MAIA, J. A., *Geometria enumerativa de variedades projetivas contendo retas*, tese de doutorado, UFMG, 2010.
- [12] MARTINS, G. de O., *Os teoremas de Pappus e de Pascal*.
- [13] ROJAS, J. e MENDOZA, R., *Álgebra Linear e o Problemas das Quator Retas do Schoubert*. In *Revista Matemática Universitária*. no 45, p. 55-69, 2010.
- [14] SHAFAREVICH, I. R., *Basic Algebraic Geometry I*, Springer-Verlag, 1977.
- [15] UGAGLIA, L., *Una Introducción a las Grassmannianas*
- [16] VAINSENER, I., *Geometria Algébrica I*, Notas de aula, UFMG de 8 de Junho de 2006.
- [17] VAINSENER, I., *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005 (Matemática Universitária).